UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

A CONJECTURA $3x + 1$, PROPRIEDADES DINÂMICAS E GENERALIZAÇÕES

Juan Sebastian Forero Cardozo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários a obtenção do titulo de mestre em matemática.

Orientador: Maria Jose Pacifico

Rio de Janeiro.
Julho 2018

A CONJECTURA $3x + 1$, PROPRIEDADES DINÂMICAS E GENERALIZAÇÕES

Juan Sebastian Forero Cardozo.
Orientador: Maria Jose Pacifico

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do titulo de mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Maria Jose Pacifico - IM/UFRJ

Prof. Étienne Ghys - ENS/LYON

Prof. Maurizio Monge - IM/UFRJ

Agradecimentos

Existe um numero muito grande de pessoas as quais lhes agradeço por ter me acompanhado ao longo da minha vida, já que cada uma das pessoas que cruzam pelo meu caminho me ajudam a ser cada dia melhor. Portanto, é difícil nomear a todas essas pessoas neste espaço, mas as tenho sempre presente em minha vida.

A primeira pessoa que quero agradecer é a mais importante, a minha mãe, que me criou e educou com todo amor, junto com meu grande anjinho.

Agradeço a meus demais familiares: meu pai, minha prima, meu primo, minha namorada; Já que eles são grande apoio em minha vida, me dando muito amor e sendo muito compreensivos.

A distancia da família talvez tenha sido o mais difícil deste mestrado. Mas conhecer pessoas incríveis que me ajudaram a superar as dificuldades ao longo dessa trajetória foi algo muito reconfortante. Até o ponto de ter a satisfação de poder chamá-los de minha família brasileira, aos quais não tenho palavras para agradecer o que fizeram por mim.

Agradeço ao professor Serafin, por ter me induzido aos estudos dos sistemas dinâmicos; à professora Maria José, por me orientado ao longo do mestrado; e aos demais professores por todo o conhecimento que construímos juntos; Agradeço à CAPES e ao CNpQ pelo apoio financeiro e também a Universidade por esta incrível oportunidade.

CONJECTURA $3x+1$, PROPRIEDADES DINÂMICAS E GENERALIZAÇÕES

Juan Sebastian Forero Cardozo.

Orientador: Maria Jose Pacifico.

Dado um numero inteiro, se ele é par o dividimos por 2, se é ímpar o multiplicamos por 3 adicionamos 1 e dividimos o resultado por 2. A conjectura de Collatz indica que dado qualquer inteiro positivo as sucessivas iterações deste processo, em algum momento alcança o 1.

Por varias décadas os matemáticos tem tentando demonstrar esta conjectura sem sorte ate agora, algumas das ferramentas que tem-se utilizado para sua abordagem vão desde a teoria de números, analise numérico, teoria de grafos e a teoria dos sistemas dinâmicos.

A abordagem desde os sistemas dinâmicos discretos tem sido natural visto que a conjectura tem natureza iterativa, desde esta teoria se demonstra a equivalência da mesma com alguns enunciados como por exemplo a conjectura do tempo de paragem. Se encontram algumas proposições mais fracas, as quais podem servir para criar um caminho à demonstração deste fato, como o são as conjecturas de orbitas divergentes e da periodicidade. Por último veremos como mudando os parâmetros do problema este se trivializa embora as propriedades dinâmicas sejam as mesmas.

Palavras-chave:
Collatz, Conjectura $3x+1$, Sistemas dinâmicos.

Rio de Janeiro.
Julho 2018

CONJECTURE $3X + 1$, DYNAMIC PROPERTIES AND GENERALIZATIONS

Juan Sebastian Forero Cardozo.

Advisor: Maria Jose Pacifico.

Given an integer, if it is even, we divide it by 2. If it is odd, we multiply by 3, add 1 and divide the result by 2. The Collatz conjecture indicates that given any positive integer, the successive iterations of this process reaches 1 at some point.

Mathematicians have been trying to demonstrate this unconceived conjecture for several decades. Many tools have been used for its approach, such as number theory, numerical analysis, graph theory and dynamical systems theory.

The discrete dynamic systems approach has been natural since the conjecture has an iterative nature. This theory demonstrates its equivalence with some "announcements"as for example the "conjecture of the time of the stop". There are some weaker prepositions, which can serve to create a way to demonstrate this fact, as divergent orbits and periodicity conjectures. Finally, we will see how the problem is trivialized by changing its parameters, even if the dynamic properties are the same.

Kew-words:
Collatz, Conjecture $3x + 1$, dynamical systems.

Rio de Janeiro.
Julho 2018

Conteúdo

1 Preliminares **5**
- 1.1 Números inteiros p-ádicos . . . 5
  - 1.1.1 Os p-ádicos como limite inverso . . . 11
  - 1.1.2 Os p-ádicos como espaço topológico . . . 13
  - 1.1.3 Os p-ádicos como espaço de probabilidade . . . 14
- 1.2 Preliminares de sistemas dinâmicos . . . 16
  - 1.2.1 Dinâmica topológica . . . 17
  - 1.2.2 Teoria ergódica . . . 19
- 1.3 Aplicação deslocamento . . . 21

2 Conjectura **24**
- 2.1 Aplicação $3X + 1$ em $\mathbb{N}$ . . . 25
  - 2.1.1 Tempos de paragem . . . 26
- 2.2 Aplicação $3X + 1$ em $\mathbb{Z}_2$ . . . 32
  - 2.2.1 Alguns enunciados mais gerais . . . 37

3 Generalização $AX + B$ **44**

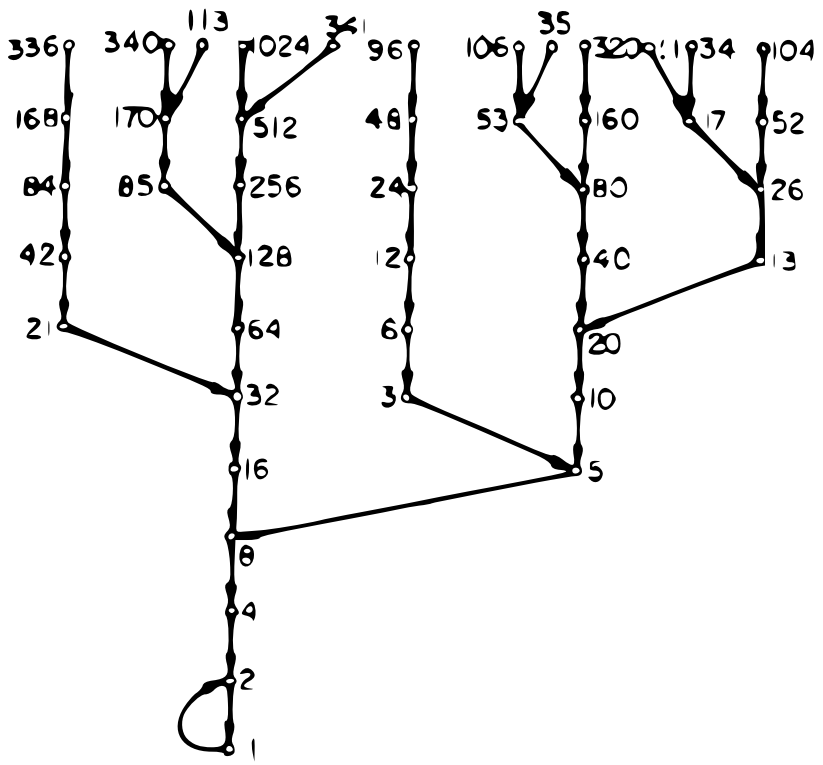
A Teoria da integração e medida **49**

Introdução

Dado um número inteiro. Se ele é par o dividimos por 2, se é impar o multiplicamos por 3 adicionamos 1 e dividimos o resultado por 2. Seja $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por esta regra, isto é, dado $n \in \mathbb{N}$, $\tau(n) = n/2$ se n é par e $\tau(n) = (3n + 1)/2$ se n é impar. Todo cálculo resultante começando com qualquer número inteiro n, aplicando τ repetidas vezes em n, gera uma sequência de inteiros que eventualmente contém o número 1. Este problema, simples de ser enunciado, permanece sem solução até os dias de hoje. Será possível explicar a razão deste comportamento?

A origem deste problema é obscura. Na literatura é atribuida a Lother Collatz (ver [4, 10]), estudante da Universidade de Hamburgo nos anos 30 do século XX. Estimulado pela leitura de trabalhos dos matematicos Edmund Landau, Oskar Perron e Issai Schur, Collatz começou a se interessar pela teoria dos números, isto junto a seu interesse pelos grafos dirigidos o fez se interessar no estudo dos grafos gerados pelas funções da teoria dos números, e questionar-se sobre as propriedades destes grafos resultantes.

Estudos que o levo a estudar o grafo gerado pela função τ:



E perguntar-se se o grafo é conexo?,i.e, todos os números estão conectados?. Questão que é

equivalente a perguntar-se se dado qualquer inteiro positivo suas iterações sucessivas pela função τ eventualmente alcança o número 1.

Apesar de Collatz ter decidido pela não publicação de resultados referentes à conjectura por não ter conseguido resolve-la, apresentou o problema para seu amigo e matemático Hasse, quem tornou-o famoso na Universidade de Siracusa, onde Kakutani e Ulam tiveram conhecimento do problema e se encarregaram de divulgá-la por várias universidades dos Estados Unidos. Percurso pelo qual a conjectura adotou muitos nomes tais como, *o problema* $3x+1$*, o algoritmo de Siracusa, o problema de Kakutani, o problema de Hasse, o problema de Ulam e a Conjectura de Collatz.*

Se esta históoria for verdadeira calcula-se que o problema está sem resposta desde o ano 1937. Desde esta época tem-se tentado solucionar o problema em diferentes áreas da matemática tais como, a teoria dos números, teoria da computação, teoria de grafos, analise numérica e teoria dos sistemas dinâmicos. Enfatizamos que abordar este problema do ponto de vista dinâmico é natural visto que a conjectura tem uma natureza iterativa.

De fato, os (poucos) resultados conhecidos acerca deste problema podem ser expressos mais elegantemente em termos das iterações da função τ definida acima.

A abordagem do ponto de vista dos sistemas dinâmicos fornece equivalências da conjectura com alguns enunciados mais fracos que podem dar uma pista para a solução do problema. Este é o objetivo principal desta dissertação. Abordar o problema do ponto de vista dinâmico e estabelecer algumas conjecturas equivalentes a de Collatz, como o as conjecturas das órbitas divergentes e da periodicidade. Por ultimo ponto veremos como mudando os parâmetros do problema o problema se trivializa embora as propriedades dinâmicas sejam as mesmas. O texto desta dissertação foi baseado em [1].

Considerando a conjectura do ponto de vista dos sistemas dinâmicos, temos que estudar a função $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\tau(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{3n+1}{2} & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Porém, o conjunto $\mathbb{N}$ onde está definida a função τ não tem propriedades topológicas adequadas. Assim, a ideia inicial é estender seu domínio a um conjunto maior e com melhores propriedades como por exemplo compacidade, e identificar a dinâmica de τ estendida ao novo conjunto equivalente a uma aplicação com uma dinâmica conhecida definida neste domínio. Neste caso, o domínio será o conjunto dos números 2-ádicos, $\mathbb{Z}_2$, e a função que consideraremos atuando em $\mathbb{Z}_2$ é a aplicação *deslocamento* σ.

Enfatizamos que é conhecido que σ é conjugada a função τ atuando em $\mathbb{Z}_2$. A conjugação, denominada $\mathcal{Q}$, é a função *itinerário que registra as paridades dos elementos da órbita por* τ*.*

O fato que os sistemas $(\tau, \mathbb{Z}_2)$ e $(\sigma, \mathbb{Z}_2)$ são conjugados implica que o sistema $(\tau, \mathbb{Z}_2)$ é topológicamente misturador, possui pontos periódicos de todos os períodos, os pontos periódicos são densos e a cardinalidade dos pontos periódicos de cada período. Isto pelo lado topológico. Do ponto de vista ergódico a função $\mathcal{Q}$ é uma isometria portanto τ herda a propriedade de σ ser misturador na medida de Bernoulli, que é invariante pelas funções em questão.

Os resultados dados pelos sistemas dinâmicos podem se dividir em dois grandes grupos. O primeiro, encontrar enunciados equivalentes e o segundo, encontrar enunciados mais gerais.

Entre o estudo dos enunciados equivalentes temos alguns muito conhecidos como o resultado dado pelo *tempo de paragem*, que é definido como a quantidade de iterados k que um número n precisa para que $\tau^k(n) < n$.

A equivalência dada pelo tempo de paragem pode ser enunciada da seguinte forma:

Teorema 0.0.1 *A conjectura de Collatz é equivalente ao fato de que todo inteiro positivo maior que 1 tem tempo de paragem finita.*

Observe que assumindo a conjectura verdadeira implica que todos os números inteiros tem tempo de paragem finita. Por outro lado, se para todo número inteiro n existe $k > 0$ dependendo apenas de n e tal que $\tau^k(n) < n$ então, o conjunto $\{\tau^k(n)\}$ tem uma sequência estritamente decrescente que tem que convergir a seu mínimo, neste caso ao 1.

A seguir, vamos enunciar uma segunda equivalência, dada pela função itinerário $\mathcal{Q}$:

Teorema 0.0.2 *Se $x \in \mathbb{Z}$ é positivo, então existe um i tal que $\tau^i(x) = 1$ se e somente se $-3\,\mathcal{Q}(x)$ é um inteiro positivo, primo relativo com o número 3.*

Como no sistema decimal, dado $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_p$ com denominador primo relativo a p, sua sequência p-ádica é eventualmente periódica. Mais do que isso, podemos mostrar que os números $-\frac{a}{3}$ sendo a primo relativo com 3, podem ser representados da forma $(a_0, ..., a_k, 1, 0, 1, 0....)$. Por outro lado, tem-se $\mathcal{Q}(1) = (1, 0, 1, 0..)$, implicando que se um número n tem $\mathcal{Q}(n) = -\frac{a}{3}$ então, pela conjugação, existe pelo menos um $k \in \mathbb{N}$ que satisfaz $\mathcal{Q}(\tau^k(n)) = \mathcal{Q}(1)$. Logo por ser $\mathcal{Q}$ uma bijeção, os iterados do número n por τ tem que convergir ao ciclo $\{1, 2\}$.

Dado x, se o conjunto de números p-ádicos $A = \{x, \tau(x), ..., \tau^i(x), ...\}$ é finito, então dizemos que A é um ciclo e que x é periódico.

Entre o estudo dos enunciados mais gerais temos dois tipos de resultados, aqueles que tem *consequências mais fracas* e aqueles que *mudam alguns parâmetros* do enunciado.

Dentre os enunciados mais gerais, que *flexibilizam* as consequências e que tem surgido ao longo da historia podemos citar.

(A) *A conjectura da periodicidade*: Se x é racional então $\mathcal{Q}(x)$ é racional.

(B) *A conjectura da auto conjugação*: Se x é racional então $\Omega(x)$ é racional, onde $\Omega(x)$ é a única função definida sobre $\mathbb{Z}_2$ que conjuga a dinâmica do deslocamento τ com ela mesma.

(C) *A conjectura das orbitas divergentes*: Nos racionais não existe uma τ-orbita divergente.

Note que a validade das conjecturas acima implica em propriedades mais fracas quando nos restringimos aos números naturais, já que pedir em (A) que a imagem $\mathcal{Q}(n)$ de um número n natural seja racional, é equivalente a afirmar que n é eventualmente periódico sem dar importância ao ciclo ao qual convirja.

Pedir em (C) que as órbitas dos naturais não sejam divergentes não implica que os naturais sejam eventualmente periódicos.

Por último, pedir em (B) para um número natural que sua imagem pela função $\Omega(x)$ seja periódico, a primeira vista não parece dizer muito sobre a nossa conjectura. Mas vamos demostrar que estas três conjecturas são equivalentes.

Dentre os enunciados mais gerais um que *respalda* a conjectura é o dado pela *ergodicidade*. Para enunciar este resultado, lembramos que dado o sistema $(\mathbb{Z}_p, \tau, \mu)$ onde μ é a medida de Bernoulli, a *bacia da medida* de μ, $B(\mu)$, definida como o conjunto dos pontos x tais que para toda função φ integrável a igualdade abaixo é satisfeita

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)).$$

O enunciado da conjectura neste contexto é como abaixo.

(D) *Conjectura da bacia*: $B(\mu) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

A conjectura $3x + 1$ implica (D), embora observamos que o recíproco desta implicação não é verdadeiro, pois o fato de que $B(\mu)$ e $\mathbb{N}$ sejam disjuntos não implica a convergência das órbitas por τ dos naturais.

Por outro lado, provaremos que este enunciado realmente respalda a conjectura, ja que provaremos que para o conjunto dos inteiros 2-ádidos $\mathbb{Z}_2$, vale que $B(\mu) \cap \mathbb{Z}_2 = \emptyset$ pois a bacia $B(\mu)$ tem somente pontos densos e os pontos do conjunto $\mathbb{Z}_2$ não podem ter órbitas densas. Isto respalda melhor a conjectura.

O último tipo de generalização que vamos desenvolver neste trabalho será *mudando as condições do problema*. Para isso, procedemos como a seguir.

Dados a, b impares, consideramos a função $\tau_{a,b} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\tau(n)_{a,b} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{an+b}{2} & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases} \tag{1}$$

e fazemos a mesma pergunta: *Dado qualquer inteiro positivo suas iterações sucessivas pela função τ eventualmente alcança o número* 1?

Para todos os pares de números impares a e b temos os sistemas $(\mathbb{Z}_2, \tau_{a,b})$ e $(\mathbb{Z}_2, \sigma)$ são equivalentes, implicando que o sistema $\tau_{a,b}$ tem dinâmica equivalente à dinâmica de τ.

Mas, se substituímos a por 1 em (1) a conjectura é trivialmente verdadeira, devido a que a função $\tau_{1,1}$ é estritamente decrescente. E se substituímos a por 5 a conjectura é trivialmente falsa, devido a que existem órbitas disjuntas.

Portanto $a = 3$ na equação (1) corresponde a um ponto crítico da conjectura: para $a = 1$ é falsa e para $a = 5$ verdadeira. E não se sabe o que ocorre para $a = 3$. Será possível encontrar a resposta?

Este problema, parece intratável com os conhecimentos matemáticos atualmente disponíveis. Chegou a ser feita uma piada quando este problema estava na moda nas universidades de Yale e Chicago nos anos 50 e 60 do século XX, que dizia que este problema fazia parte duma conspiração para travar o desenvolvimento da Matemática nos E.U.A.. A situação parece tão difícil que, em 1983, Richard Guy [22] publicou uma lista de problemas intitulada

Não tente resolver estes problemas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo vamos introduzir várias das ferramentas e notações que serão utilizadas ao longo do texto.

Uma parte preliminar correspondente a funções integráveis e teoria da medida será desenvolvida no apêndice no final.

1.1 Números inteiros p-ádicos

O primeiro tema a ser tratado é o conjunto dos números p-ádicos. Começamos por introduzir a sua definição e a seguir mostraremos as suas propriedades topológicas e mensuráveis. Para isso vamos seguir os livros [10, 14] e a primeira seção do artigo [1].

Os números p-ádicos foram introduzidos pelo matemático alemão Kurt Hensel, aparentemente com a intenção de reproduzir em $\mathbb{Q}$ o que acontece no corpo de frações de polinômios com coeficientes complexos $\mathcal{C}(x)$, em relação ao anel dos polinomios $\mathcal{C}[x]$. Neste caso, os elementos do corpo $\mathcal{C}(x)$ podem ser representados por meio de series de Laurent.

O semelhante às séries de Laurent no corpo dos p-ádicos consiste ao desenvolvimento de um numero inteiro em potências de p, p primo, que pode ser dividido de jeito formal para obter uma série que represente cada um dos racionais. Concluindo, os racionais podem ser expressos por "séries de Laurent"em uma vizinhança de p, pelo menos formalmente, i.é,

$$x = \frac{a}{b} = \sum_{n>m} a_n p^n.$$

O estudo dos p-ádicos adquiriu importância em muitos ramos da matemática como a criptografia e a teoria dos números, já que estes conjuntos, munidos da sua métrica natural, codificaram muitas propriedades aritméticas dos números primos. Aqui lembramos que dado um espaço métrico A dizemos que um conjunto K completo é o completamento de A se $A \subset K$ e K é minimal em relação a inclusão. Foi demonstrado que os conjuntos $\mathbb{Z}_p$ são os únicos completamentos de $\mathbb{Q}$ não homeomorfos a $\mathbb{R}$.

Nesta dissertação não vamos trabalhar o conjunto dos números p-ádicos completo. Existe um subconjunto chamado de inteiros p-ádicos no qual vamos a trabalhar e nos referiremos a ele como p-ádicos, sempre que que não haja confusão.

Definição 1.1.1 *Fixado um número primo p, o conjunto dos números inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ é definido por*

$$\mathbb{Z}_p = \{(a_0, a_1, ..., a_n, ...) : a_i \in \{1, ..., p\}\}.$$

Ou seja, $\mathbb{Z}_p$ é o conjunto das sequências com entradas em $\{1, ..., p\}$.

Em $\mathbb{Z}_p$ definimos duas operações binárias, soma $(+)$ e multiplicação $(*)$ do seguinte modo: Dados dois elementos $x = (x_i), y = (y_i)$ em $\mathbb{Z}_p$, a soma e a multiplicação são definidas coordenada a coordenada, como:

seja q_{i-1} tal que $(x+y)_{i-1} = q_{i-1}p + r$. Então, a i-ésima coordenada da soma $x + y$ é dada por

$$(x+y)_i = \begin{cases} x_i + y_i \ mod(p) & se \quad x_{i-1} + y_{i-1} < p \\ x_i + y_i + q_{i-1} \ mod(p) & se \quad x_{i-1} + y_{i-1} > p. \end{cases}$$

Agora seja $c_i = \Sigma_{k=0}^{k=i} x_k y_{i-k}$ e definamos $\tilde{q}_i$ tal que $c_i = \tilde{q}_i p + r$. Então a i-ésima coordenada da multiplicação $x \star y$ é definida como:

$$(x * y)_i = \begin{cases} c_i \ mod(p) & se \quad c_{i-1} < p \\ c_i + \tilde{q}_{i-1} \ mod(p) & se \quad c_{i-1} > p \end{cases}.$$

Os números q_{i-1} e $\tilde{q}_{i-1}$ acima são chamados de *resíduos das coordenadas anteriores.*

Porem este seja o conjunto dos inteiros p-ádicos, neste trabalho vamos nos referir a ele como o conjunto dos números p-ádicos, já que a palavra inteiro p-adico pode confundir ao leitor com o fato de ser inteiro racional.

Há relações importantes entre os conjuntos usuais de números e o conjunto $\mathbb{Z}_p$ definido acima que serão apresentadas abaixo.

Lema 1.1.1 *Dados um número p primo e $n \in \mathbb{N}$. Então n tem uma única expansão finita em base p.*

Demonstração. A demonstração deste fato ocorrerá mediante o processo de indução. Fixando p, se $n = 1$ temos que $1 = 1 * p^0$ é sua única expansão. Logo, suponha a hipótese de indução para todo $k < n$. Veremos que é válida para n. De fato, se $n < p$ temos $n = n * p^0$. Por outro lado, se $p < n$ pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem $q < n$ e $r < p$ tais que $n = q * p + r$. Utilizando a hipótese de indução, temos $q = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i$ e substituindo na expressão anterior para n obtemos $n = (\sum_{i=0}^{n} b_i p^i) * p + r$.

Para concluir a prova, resta ver que a expansão acima é única. Novamente a prova é por indução. Já vimos que a expansão do 1 é única. Supondo que todo numero natural $r \leq n$ tem expansão única, vamos mostrar que $n + 1$ tem expansão única. Sejam então duas expansões do número $n + 1$,

$$(\sum_{i=0}^{n} b_i p^i) * p + r = n + 1 = (\sum_{i=0}^{k} g_i p^i) * p + t.$$

Pelo algoritmo da divisão sabemos que o resto é único e portanto $r = t$. Observemos que se $n + 1 - r < n$, aplicando a hipótese de indução concluímos que $n + 1 - r = (\sum_{i=0}^{n} b_i p^i) * p = (\sum_{i=0}^{k} g_i p^i) * p$ e portanto $g_i = b_i$ para todo i. □

Note que a existência de uma expansão em base p induz uma correspondência injetiva entre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ da seguinte forma:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p\,; \quad n = \sum_{i=0}^{m} b_i p^i \to (b_0, ..., b_m, 0, 0...), \tag{1.1}$$

onde os b_i são os coeficientes da expansão para $k \leq m$ e $b_k = 0$ para todo $k > m$. Pode-se provar que esta função realmente é um homeomorfismo. Portanto, com abuso da notação podemos identificar $\mathbb{N}$ com sua imagem $f(\mathbb{N})$.

Observação 1.1.1 *Neste trabalho faremos uso indistinto dos números naturais e as suas projeções em $\mathbb{Z}_p$ para maior praticidade. Por exemplo, escreveremos $1 = (1, 0, 0, ...)$, sempre que não haja confusão.*

Utilizando esta convenção, a definição de soma dada acima implica que $1 + (p-1, p-1, ...) = 0$. Daí segue que o inverso aditivo -1 do elemento neutro 1 pode ser escrito como $-1 = (p-1, p-1, ..., p-1, ...)$.

O que nos permite encontrar o inverso aditivo para todo elemento $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ..) \in \mathbb{Z}_p$ dado por

$$-x = (p-1-x_0, p-1-x_1, ..., p-1-x_n, ...) + 1, \tag{1.2}$$

visto que $(x_0, x_1, ..., x_n, ..) + (p-1-x_0, p-1-x_1, ..., p-1-x_n, ..) = -1$.

Utilizando as ferramentas dadas pela observação 1.1.1, podemos estender f a $\mathbb{Z}$ de modo que a extensão seja um homeomorfismo de anéis, do modo seguinte:

$$f(x) = (p-1-x_0, p-1-x_1, ..., p-1-x_n, ...) + 1, \ \textit{se } x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},$$

onde os x_i estão definidos por $f(-x) = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$, como em (1.1).

Deste modo, estendemos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p$ ao conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ e de novo, por abuso de linguagem, identificamos $\mathbb{Z}$ com sua imagem $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}_p$.

A seguir vamos estender a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p$ ao conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$, chamado na literatura de localização do anel Conjunto definido por

$$\mathbb{Q}^{odd} = \{\frac{s}{t},\ s, t \in \mathbb{Z} : \text{ mdc}(t_0, p) = 1 \text{ onde } t_0 \text{ é a primeira coordenada de } t\}.$$

A extensão de f ao conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$ não tem uma forma algébrica simples, porem a seguir vamos a exibir um processo indutivo que mostra como encontrar cada uma das coordenadas da sequência que corresponderia a cada elemento de $\mathbb{Q}^{odd}$.

Lema 1.1.2 *Se $x, y \in \mathbb{Q}^{odd}$ então $\frac{y}{x}$ é um inteiro p-ádico, i.e., tem uma sequência que o representa em $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Para isso é suficiente provar que $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}_p$ com $mdc(x_0, p) = 1$ tem expansão p-ádica já que $\mathbb{Z}_p$ é fechado para a multiplicação.

Suponha $\frac{1}{x} = (z_0, ..., z_n, ...)$. Multiplicando ambos os lados da expressão para $1/x$ acima por x obtemos que

$$1 = (x_0, ..., x_n, ...)(z_0, ..., z_n, ...).$$

Então, vamos encontrar os valores dos z_i indutivamente. Pela definição de multiplicação temos que $1 = x_0 z_0$ e como $mdc(x_0, p) = 1$ existe x_0^{-1} e portanto $x_0^{-1} = z_0$. Agora vamos encontrar termo z_1 por meio da equação $0 \equiv z_0 x_1 + z_1 x_0 \ (mod\ p)$, com um pouco de álgebra tem-se que $z_1 \equiv -z_0 x_1 x_0^{-1} \ (mod\ p)$. Isso, junto á condição de que $z_1 \in \{0, ..., p-1\}$, determina totalmente z_1. Por outro lado, da definição de congruência existe um q_0 tal que $z_0 x_1 + z_1 x_0 = k_1 p$ e não é difícil observar que $q_1 = k_1 x_0^{-1}$ é o resíduo para a coordenada seguinte. Agora vamos ilustrar o processo para o n-ésimo termo. Observe que temos a seguinte equação

$$0 \equiv z_0 x_n - ... - z_{n-1} x_1 + q_n \ (mod\ p).$$

Aplicando um pouco de álgebra, temos que,

$$z_n \equiv z_0 x_n x_0^{-1} - ... - z_{n-1} x_1 x_0^{-1} + q_n x_0^{-1} \ (mod\ p).$$

Portanto, z_n fica determinado pois $z_n \in \{0, ..., p-1\}$ e os z_i são conhecidos para $i = 0, ..., n-1$. □

Note-se que a priori nada nos demonstra que este processo indutivo que estamos mostrando, convirja a um ponto. De fato, com as poucas ferramentas que desenvolvemos até este momento não são suficientes para afirmar a convergência. Esta demonstração será dada no final da próxima seção.

Deste modo, estendemos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p$ ao conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$ e identificamos $\mathbb{Q}^{odd}$ com sua imagem $f(\mathbb{Q}^{odd}) \subset \mathbb{Z}_p$.

Exemplo 1.1.1 *Vamos dar um exemplo para evidenciar como é o processo de divisão no corpo* $\mathbb{Z}_2$. *O numero escolhido para este exemplo é* $-\frac{1}{3}$. *Para isto vamos encontrar os* x_i *tal que* $-\frac{1}{3} = (x_0, ..., x_n, ...)$, *mediante a igualdade*

$$(1, 1, 1...) = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)(3) = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)(1, 1, 0, 0).$$

Portanto,

	x_0	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	$\Rightarrow x_0 = 1$
	x_1	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	$\Rightarrow x_0 + x_1 = 1,\ x_1 = 0$
$\times$	x_2	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	$\Rightarrow x_1 + x_2 = 1,\ x_2 = 1$
	x_3	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	$\Rightarrow x_2 + x_3 = 1,\ x_3 = 0$
	...						*0*	$\Rightarrow x_3 + x_4 = 1,\ x_4 = 1$
		1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	

Com base na divisão anterior, na próxima tabela mostramos a representação em $\mathbb{Z}_2$ de alguns números racionais, que serão importantes para o argumento dado em teoremas nos capítulos seguintes.

número	Representação em $\mathbb{Z}_p$
$-\frac{1}{3}$	$(1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$
$\frac{1}{3}$	$(1, 1, 0, 1, 0, ...)$
$\frac{2}{3}$	$(0, 1, 1, 0, 1, 0, ...)$

Lema 1.1.3 *Note-se que* $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}_p$.

Demonstração Vamos dar uma explicação heurística deste fato. Se assumimos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}_p$, precisaríamos que $\frac{1}{p}$ tivesse uma representação em $\mathbb{Z}_p$. Isso implicaria que existe z_0 tal que $1 = 0 \cdot z_0$, levando a uma contradição. Portanto $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}_p$.

Portanto, para obter a inclusão $\frac{1}{p} \in \mathbb{Z}_p$, teríamos a necessidade de bi-sequências no lugar de só sequências na representação de $\mathbb{Z}_p$, i.e., ter como conjunto base $\{p^k\}$ com $k \in \mathbb{Z}$ e não somente com $k \in \mathbb{N}$. Esse conjunto é $\mathbb{Q}_p$. No entanto, este conjunto foge de nosso interesse nesta dissertação.

Já que vários dos conjuntos usuais podem ser identificados através de extensões do homeomorfismo de anéis $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_p$, de novo por abuso de linguagem, podemos fazer a seguinte identificação:

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ o conjunto dos inteiros p-adicos formado por todas as sequências determinadas por números inteiros, i.e., $\mathbb{Z} = f(\mathbb{Z})$.
- $\mathbb{Q}^{odd} \subset \mathbb{Z}_p$ o conjunto dos racionais p-adicos formado por todas as sequências determinadas por quociente de $x, y \in \mathbb{Z}_p$ tal que $y_0 \neq 0$, i.e., $mdc(y, p) = 1$.

Entre o conjunto das sequências que representam os números p-ádidos, algumas se destacam pela sua importância como as definidas abaixo.

Definição 1.1.2 *Dado $x \in \mathbb{Z}_p$, seja $\{x_n\}$ sua representação.*
Dizemos que a sequência $\{x_n\}$ é

- *Eventualmente fixa se $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > m$ tem-se $x_n = x_m$. Se $m = 0$ então $\{x_n\}$ se diz fixa.*
- *Eventualmente periódica se $\exists\, m, h \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > m$ tem-se $x_{n+h} = x_n$. Se $m = 0$ então a sequência se diz periódica com período igual ao mínimo h que satisfaz essa propriedade.*

Existem representações com padrões importantes para caracterizar pontos dos conjuntos $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}^{odd}$ e através destas, pode-se caracterizar totalmente as suas representações em $\mathbb{Z}_p$.
Usaremos estas caracterizações para facilitar os argumentos utilizados nas provas dos resultados a seguir.

Teorema 1.1.1 *Para todo p primo, as seguintes igualdades se verificam:*

a) $\mathbb{Z} = \{x = (x_n) \in \mathbb{Z}_p : \{x_n\}$ *é eventualmente fixo ao ponto* $p-1$ *ou* $0\}$.
Sendo os terminados em 0 *os positivos e os terminados em* $p-1$ *negativos.*

b) $\mathbb{Q}^{odd} = \{x = (x_n) \in \mathbb{Z}_p : \{x_n\}$ *é eventualmente periodico*$\}$.

Demonstração do teorema. 1.1.1 a)

Seja $n \in \mathbb{N}$. O lema 1.1.1 implica que:

$$n = (x_0, x_1, ..., x_n, 0, 0, 0...).$$

Além disso, se o número é negativo, pela igualdade (1.2) obtemos que:

$$-n = (p - x_0, p - 1 - x_1, ..., p - 1 - x_n, p - 1, p - 1, p - 1, ...). \square$$

Para a prova do item b) do teorema 1.1.1, vamos demonstrar alguns lemas prévios.

Lema 1.1.4 *Se $x \in \mathbb{Z}_p$ é periódico de período k então $x = \frac{a}{p^k-1}$, com $a \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Para isto, precisamos calcular $p^k x - x$. Como

$$-x = (p - x_0, ..., p - 1 - x_{k-1}, p - 1 - x_0, ..., x_{k-1}, ...)$$

obtemos que $p^k x = (\underbrace{0, .., 0}_{k}, x_0, ..., x_{k-1}, x_0, ..., x_{k-1}, ...)$.

Assim, somando as expressões acima obtemos

$$p^k x - x = (p - x_0, ..., p - 1 - x_{k-1}, p - 1, p - 1, p - 1, p - 1, ...).$$

Logo, por teorema 1.1.1a) temos que $(p^k - 1)x = -a$, com $a \in \mathbb{N}$, fatorando e passando a dividir $(p^k - 1)x$. Isto termina a prova do lemma. □

Lema 1.1.5 *Os p-ádicos $\frac{-1}{p^k-1} \in \mathbb{Q}^{odd}$ são periódicos de período k, i.e., suas representações são periódicas de período k.*

Demonstração.
Defina $x = (x_n) \in \mathbb{Z}_p$, por

$$x = (1, \underbrace{0, ..., 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{k-1}, 1, \cdots)$$

com $k - 1$ zeros entre cada par de 1.

Claramente tem-se que $p^k x - x = -1$ e portanto $x = \frac{-1}{p^k-1}$ é periódico de período k. □

Lema 1.1.6 *Se $x \in \mathbb{Z}_p$ é eventualmente periódico então x é racional.*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{Z}_p$ eventualmente periódico de período k, x se escreve como $x = (n_0, ..., n_i, y_0, ..., y_k, y_0, ..., y_k, ...)$. Portanto tem-se $x = n + p^k y$ onde $n \in \mathbb{N}$ e y é periódico de período k. Pelo lema 1.1.5 temos que $y = \frac{1}{p^k-1}$. Concluindo,

$$x = n + p^k \frac{1}{p^k - 1} = \frac{n(p^k - 1) + p^k}{p^k - 1} \in \mathbb{Q}^{odd}.$$

□

Lema 1.1.7 *Dado x,y eventualmente periódicos e $n \in \mathbb{Z}$, então $x + y$ e nx são eventualmente periódicos*

Demonstração. Dados x e y como no enunciado, temos que existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ e $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ tais que $x_{n+h_1} = x_n \ \forall n > k_1$ e $y_{m+h_2} = y_m \ \forall m > k_2$. Agora sejam $k = max\{k_1, k_2\}$ e $h = mmc\{h_1, h_2\}$. Se $t > k$ então $(x+y)_{t+h} = (x)_{t+h} + (y)_{t+h} = (x)_t + (y)_t = (x+y)_t$. Portanto, $x+y$ é eventualmente periódico.

Agora vamos a demonstrar a segunda parte de teorema. Antes, observe que se x é eventualmente periódico então aplicando indutivamente o resultado acima a x, obtemos que $x+x$ é eventualmente periódico. Logo, se assumimos indutivamente que $(n-1)x$ é eventualmente periódico por hipótese de indução, então $nx = x + (n-1)x$ é eventualmente periódico para todo $n \in \mathbb{N}$. Para n negativo, pela fórmula (1.2) sabemos se x é eventualmente periódico $-x$ também é. □

Lema 1.1.8 *Se $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ então x é eventualmente periódico.*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{Q}^{odd}$, temos que $x = \frac{y}{n}$, com $mcd(n,p) = 1$. Pelo teorema de Fermat-Euler temos que $p^{\varphi(n)} \equiv 1\ mod(n)$, onde $\varphi(n)$ é a função de Euler. Portanto existe $t \in \mathbb{Z}$, tal que $tn = p^k - 1$. Substituindo obtemos que $x = ty\frac{1}{p^k-1}$ e pela afirmação 1.1.5 obtemos que $\frac{1}{p^k-1}$ é periódico. Como $ty \in \mathbb{Z}$ o lema 1.1.7 implica que $ty\frac{1}{p^k-1}$ é eventualmente periódico. □

A seguir vamos concluir a demonstração do teorema 1.1.1.
Demonstração teorema 1.1.1 b) O lema 1.1.6 implica que

$$\mathbb{Q}^{odd} \subseteq \{x \in \mathbb{Z}_p : x \text{ é eventualmente periódico}\}.$$

E o lema 1.1.8 mostra que

$$\mathbb{Q}^{odd} \supseteq \{x \in \mathbb{Z}_p : x \text{ é eventualmente periódico}\}.$$

Portanto, estes conjuntos são iguais. □

Fazendo um resumo deste capítulo, temos um novo conjunto chamado de números p-ádicos no qual estão contidas representações de alguns dos conjuntos usais. Além disso, temos a seguinte relação entre estes conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^{odd} \subset \mathbb{Z}_p.$$

Observamos que nem todo conjunto usual pode se representar homeomorficamente em $\mathbb{Z}_p$. De fato, como os racionais não possuem inverso multiplicativo segue $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}_p$.

A seguir vamos estender a definição de *paridade dos números inteiros* para os números 2-ádicos de uma maneira adequada.

Definição 1.1.3 *O número $x = (x_n) \in \mathbb{Z}_2$ é par se $x_0 = 0$, caso contrário é impar. Alem disso, chamamos a x_0 a primeira coordenada de paridade de x*

Observemos que esta definição restrita ao conjunto dos $\mathbb{Z}_2$ coincide com a usual, pois o número 2 divide a x se e somente se $x_0 = 0$.

1.1.1 Os p-ádicos como limite inverso

Agora podemos dar detalhes de outra forma de construir o conjunto dos números p-ádicos, de um ponto de vista mais algébrico. Para esta construção, vamos acompanhar o livro [12] sem muito rigor já que alguns resultados saem do objetivo desta dissertação. Começameos por introduzir um novo objeto matemático, denominado *o limite inverso*. Sugerimos ao leitor interessado consultar [12] para maiores detalhes.

Definição 1.1.4 *O sistema $\{X_i, \phi_{i,k}, I\}$ com $(I, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado, $\{X_i : i \in I\}$ uma sequência de espaços topológicos indexados por I, e $\phi_{i,j} : X_i \longrightarrow X_j$, para todo $j \preceq i$, uma coleção de homeomorfismos, tal que $\phi_{i,j} = \phi_{i,k} \circ \phi_{k,j}$ sempre que $i \preceq k \preceq j$ então o sistema $\{X_i, \phi_{i,k}, I\}$ é denominado um sistema inverso.*

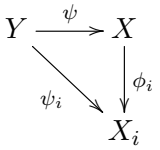
Exemplo 1.1.2 *Sejam $I = \mathbb{N}$ e o espaço topológico discreto $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e defina*

$$X_i = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^i = \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{i},$$

para $j \leq i$ seja $\phi_{i,j} : \mathbb{Z}^i \longrightarrow \mathbb{Z}^j$, definida por $\phi_{i,j}(x_0, x_1, ..., x_{i-1}) = (x_0, x_1, ..., x_{j-1})$, i.e., a projeção nas primeiras j-coordenadas as quais são contínuas evidentemente. Assim, concluímos que o sistema $\{X_i, \phi_{i,k}, \mathbb{N}\}$ é um sistema inverso.

Considere um sistema inverso $(X_i, \phi_{i,j}, I)$. Suponha que existem um espaço topológico Y e uma sequência de funções contínuas $\psi_j : Y \longrightarrow X_j$ com $j \in I$. Esta sequência de funções se diz *coerente* se satisfaz a propriedade $\phi_{i,j} \circ \psi_i = \psi_j$ para todo i, j.

Definição 1.1.5 *Seja o espaço topológico X juntamente com funções continuas e coerentes ϕ_i, $i \in I$. Dizemos que X é o limite inverso do sistema inverso $\{X_i, \phi_{i,k}, I\}$, se para todo par (Y, ψ_j), com Y um espaço topológico e $\psi_j : Y \longrightarrow X_j$ uma sequência de funções contínuas coerentes, existe uma única função contínua $\psi : Y \to X$ tal que $\phi_i \circ \psi = \psi_i$, isto é, o diagrama abaixo é comutativo.*



E o notamos assim, $X = \varprojlim X^i$

Exemplo 1.1.3 *Definamos primeiro uma relação de equivalência chamada congruência modulo p, dada por $x \equiv y \ (mod\ p)$ se e somente se existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = kp$.*

Denotemos $\mathbb{Z}_p/p^k$ o espaço quociente de $\mathbb{Z}_p$ pela relação congruência modulo p^k. Observe que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k = \mathbb{Z}_p/p^k$.

Seja $\phi_i : \mathbb{Z}_p \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^i$, a projeção canônica, i.e., a função que envia cada x na sua classe de equivalência.

Não é difícil provar que estas funções são coerentes com as do sistema inverso $(X_i, \phi_{i,j}, I)$ do exemplo anterior, já que a composição de projeções é uma projeção.

A seguir enunciaremos um teorema que estabelece a existência do limite inverso. Recomendamos ao leitor interessado na sua demonstração que consulte a referência [12].

Teorema 1.1.2 *Dado um sistema inverso $\{X_i, \phi_{i,k}, I\}$ então:*

- *Existe um limite inverso para este sistema.*
- *O limite inverso do sistema é único a menos de homeomorfismos, i.e., se existem dois limites inversos eles são homeomorfos.*

Chegamos assim ao objetivo principal desta seção que é mostrar que o conjunto dos p-ádicos é um limite inverso.

Observação 1.1.2 *O teorema 1.1.2 nos diz que o limite inverso do sistema inverso esboçado nos exemplos (1.1.3) e (1.1.2) existe e de fato são os* $\mathbb{Z}_p = \varprojlim(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^i$. *Além disso temos* $\varprojlim \mathbb{Z}_p/p^k = \{(x_n) : x_n \equiv x_m \ (modp^m) \text{ se } m \leq n\}$ *pois as funções* ϕ_i *são coerentes. Consequência importantes são que uma sequência de elementos* x_i *define um único elemento em* $\mathbb{Z}_p$, *e todo elemento de* $\mathbb{Z}_p$ *tem uma unica expansão p-ádica.*

A seguir introduzimos a noção de *sequências coerentes.*

Definição 1.1.6 *Uma sequência* $\{a_n\} \subset \mathbb{N}$ *tal que* $0 \leq a_n \leq p^{n-1}$ *se diz coerente se*

$$a_{n+1} \equiv a_n \ (mod\ p^n), \ \forall\ n \geq 1.$$

Estas sequências convergem a um único ponto pela observação (1.1.2).

Uma primeira consequência das sequências coerentes é demonstrar que o processo de divisão mostrado em (1.1.2) está bem definido, o que resulta evidente observando que este processo indutivo gera uma sequência coerente $x_n = (x_0, x_1..., x_n, 0, 0, ...)$, que pela observação anterior converge a um único ponto do espaço.

A abordagem desde o ponto de vista do limite inverso pode atribuir varias propriedades topológicas ao conjunto de números p-adicos como pode ser visto na referencia [12]. Mas, neste trabalho vamos abordar a topologia desde o ponto de vista usual,

partindo da definição duma métrica sobre o conjunto e vendo as propriedades que esta atribui nos números p-ádicos.

1.1.2 Os p-ádicos como espaço topológico

Passamos agora a definir uma métrica no espaço dos p-ádicos e ver as propriedades topológicas que induz neste conjunto.

Definição 1.1.7 *Seja* $d : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}^+$ *a função definida por* $d(x, y) = v(x - y)$ *onde* v *é uma função de valor real positivo sobre os p-ádicos dada por*

$$v(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ p^{-k} & se \quad x \neq 0, \text{sendo } k \text{ o maior expoente tal que } p^k \text{ divide } x. \end{cases}$$

Observação 1.1.3 *Temos que* $v(x) = p^{-k}$ *se e somente se para todo* j *tal que* $0 \leq j \leq k - 1$ *tem-se* $x_j = 0$

Afirmação 1.1.1 *A função* d *é uma métrica.*

Demonstração.

- $d(x, y) = o \iff v(x - y) = 0 \iff x - y = 0$,
- Temos que $p^k \mid x-y$ se e somente se $p^k \mid y-x$, portanto $d(x, y) = v(x-y) = v(y-x) = d(y, x)$,
- Suponhamos $max\{d(x, y), d(y, z)\} = d(y, z) = p^{-k}$. Então $p^k \mid y - z$ por definição e $p^k \mid x - y$ já que $d(x, y) \leqslant p^{-k}$ e portanto $p^k \mid y - z + x - y$ que implica $d(x, z) \leqslant p^{-k}$ de onde podemos concluir a desigualdade triangular forte

$$d(x, z) \leqslant max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

O que demonstramos realmente é que d é uma ultramétrica, já que a desigualdade triangular forte implica a desigualdade triangular visto que:

$$max\{d(x,y), d(y,z)\} \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Vamos denotar $B_r(x) = \{y : d(y,x) < r\}$ a bola aberta e $\overline{B_r(x)} = \{y : d(y,x) \leq r\}$ a bola fechada.

Lema 1.1.9 *Dado $y \in B_r(x)$ temos que existe $k \in \mathbb{N}$ que depende somente de r tal que $x_i = y_i$ para todo $i = 0, 1, ..., k$.*

Demonstração. Temos que se $y \in B_r(x)$ então existe um t tal que $p^{-t} = d(y,x) < r$ com $t < k$; e lembrando a observação 1.1.3 temos que $(x-y)_i = 0$ para todo $i = 0, 1, ..., t$. □

Corolário 1.1.1 *Se $x, y \in \mathbb{Z}_p$ e $r > 0$, então $B_r(x) = B_r(y)$ ou $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $z \in B_r(x) \cap B_r(y) \neq \emptyset$, portanto existe um k tal que $z_i = x_i$ e $z_i = y_i$ para $i = 0, 1, ..., k$. Visto isso temos $y_i = x_i$ para estas coordenadas e portanto $y \in B_r(x)$ e $x \in B_r(y)$ concluindo assim $B_r(x) = B_r(y)$. □

Uma propriedade importante do espaço topológico $\mathbb{Z}_p$ é que todos os pontos da bola $B_r(x) \subset \mathbb{Z}_p$ são o centro da mesma. Este corolário implica trivialmente o seguinte resultado

Corolário 1.1.2 *Se $x \in B_r(y)$ então $B_r(x) = B_r(y)$.*

Lema 1.1.10 *Seja $r \in \mathbb{R}$ positivo, tal que existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-k} \leqslant r \leqslant p^{-k+1}$, então $B_r(x) = \overline{B_r(x)}$.*

Demonstração. É claro que $B_r(x) \subseteq \overline{B_r(x)}$ por definição, ademais se $y \in \overline{B_r(x)}$ então existe $k \leq t$ tal que $p^{-t} \leqslant p^{-k} < r$ e portanto, $y \in B_r(x)$ obtendo então a igualdade destes conjuntos. □

Estes resultados possuem importantes implicações. Devido a que mostram que o espaço métrico separável $\mathbb{Z}_p$ é um espaço totalmente desconexo. Além disso, para todo $r = \dfrac{1}{p^k}$ existe uma cobertura de $\mathbb{Z}_p$ aberta com p^k elementos disjuntos.

1.1.3 Os p-ádicos como espaço de probabilidade

Por último vamos fazer uma pequena revisão acerca de alguns temas da teoria da medida, e adicionar uma estrutura mensurável ao conjunto dos p-ádicos. Nesta seção vamos seguir os livros [14, 13].

Um espaço de probabilidade é uma tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, onde X é um conjunto, $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra e a função μ é uma função de probabilidade, i.e., $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$, tal que é $\sigma - aditiva$. Chamaremos os elementos da σ-álgebra de conjuntos mensuráveis.

As definições de σ-álgebra e σ-aditiva encontram-se no apêndice.

Os conjuntos mensuráveis dos p-ádicos são chamados *cilindros* e são definidos como:

Dados $m \leq n$ e $c_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$ fixos para $i = m, m+1, ..., n$, o cilindro $C_n^m(c_m, ..., c_n)$ é o conjunto dado por

$$C_n^m(c_m, ..., c_n) = \{x \in \mathbb{Z}_p : x_i = c_i \; para \; m \leq i \leq n\}.$$

Dizemos que os cilindros $C_n^m(c_m, ..., c_n)$ e $C_t^s(l_s, ..., l_t)$ são independentes se $c_i \neq l_i$ para todo i natural tal que $i \in [n, m] \cap [s, t]$.

Definamos $\mathcal{A}$ como o conjunto das uniões finitas de cilindros unido com o vazio. Mostraremos que este conjunto é uma álgebra, para a definição de álgebra veja o apêndice. De fato,

- $X \in \mathcal{A}$, posto que $X = \bigcup_{i=0}^{p-1} C_0^0(i)$,
- Observe que a interseção finita de cilindros $C_i, n \leq i \leq m$, é um cilindro ou é vazia, e o complemento de um cilindro C é uma união finita de cilindros.

  Portanto, dada uma sequência de cilindros $\{A_m\}_{m \in I}$, tem-se. $(\bigcup_{m \in I} A_m)^c = \bigcap_{m \in I} (A_m)^c = \bigcap_{m \in I} \bigcup_n B_n^m$ onde $(A_m)^c = \bigcup_n B_n^m$, concluindo assim que $(\bigcup_{m \in I} A_m)^c = \bigcup_n \bigcap_{m \in I} B_n^m \in \mathcal{A}$ por definição.
- Se $B, A \in \mathcal{A}$ pela construção é claro que $B \cup A \in \mathcal{A}$

Portanto $\mathcal{A}$ é uma álgebra, mas não é uma σ-álgebra.

Vamos definir uma medida para a álgebra $\mathcal{A}$ em $\mathbb{Z}_p$. Para isso, sejam $\{P(0), ..., P(p-1)\}$ as probabilidades dos elementos $\{0, 1, ..., p-1\}$, tais que $P(0) + ... + P(p-1) = 1$. Para o nosso trabalho vamos tomar $P(i) = \frac{1}{p}$ para todo i.

Seja $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ definida em um cilindro por $(C_n^m(c_m, ..., c_n)) \mapsto P(c_m)P(c_{m+1})...P(c_n)$. Como toda união de cilindros pode ser escrita como uma união de cilindros independentes podemos estender μ a toda união de cilindros como $\mu(\bigcup_n c_n) = \sum_n \mu(c_n)$, onde os $\{c_n\}$. são cilindros independentes.

No restante da seção vamos a enunciar sem demostração uns teoremas clássicos da teoria da medida. As demonstrações podem ser consultadas nos em [13, 14].

O primeiro teorema nos permite dar condições suficientes para estender μ ate a σ-álgebra gerada por uma álgebra.

Teorema 1.1.3 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de X e seja $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ uma função finitamente aditiva com $\mu_0(x) < \infty$, i.e., μ_0 seja finita; então existe uma única medida μ definida na σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ estendendo μ_0.*

O segundo teorema chamado de continuidade no vazio da propriedades baixo as quais aditividade implica $\sigma - aditividade$

Teorema 1.1.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ finitamente aditiva. Se*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = 0 \tag{1.3}$$

para toda sequência de conjuntos mensuráveis $A_1 \supset ... \supset A_k...$ tal que $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$, então μ é $\sigma - aditiva$.

Observemos que na álgebra acima definida no conjunto dos p-ádicos tem uma propriedade muito interessante: dada uma sequência de cilindros encaixantes $A_1 \supset ... \supset A_k ...$ então $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \neq \emptyset$.

Esta propriedade segue do fato de que se os cilindros estão encaixados então fixam pelo menos as mesmas coordenadas e então podemos criar sequências coerentes definindo os pontos da interseção. Portanto junto com o teorema anterior podemos concluir que toda função finitamente aditiva sobre os cilindros realmente é $\sigma - aditiva$.

E por último um teorema de aproximação dos elementos de uma σ -álgebra mediante elementos da álgebra que a gera.

Teorema 1.1.5 *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{A}$ uma álgebra que gera a σ-álgebra $\mathcal{B}$. Então para todo $\epsilon > 0$ e todo $B \in \mathcal{B}$ existe um $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A \triangle B) < \epsilon$.*

1.2 Preliminares de sistemas dinâmicos

O objetivo da teoria dos sistemas dinâmicos é principalmente descrever a evolução no tempo das trajetórias dos pontos do sistema. Embora sejam antigos os problemas com respeito ao estudo do movimento este ramo da matemática surge formalmente com o estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias proposto pelo matemático francês H. Poincaré quem propôs o estudo das propriedades das órbitas geradas pela solução de uma equação diferencial e não apenas centrar-se na resolução analítica.

Um sistema dinâmico tem três componentes importantes o *cojunto* onde se movimentam os elementos, o *espaço tempo* e a função que descreve o movimento. E a dinâmica do sistema pode ser obtido iterando uma função ou deixando o tempo evoluir no tempo a solução de uma equação.

Quando a dinâmica é obtida pelo processo de iteração de uma função, i.e., dado um valor inicial x a dinâmica em este ponto esta dada por

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ...$$

Onde $f^n(x)$ é o estado de x no tempo n. Então o sistema evolui por unidades de tempo discretas portanto o sistema dinâmico se diz *discreto*. Por outro lado, se a dinâmica é obtida através da solução de uma equação diferencial, i.e., dado um elemento inicial x o movimento em este ponto esta dada por

$$\{f_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$$

Sendo $f_n(x)$ o estado de x no tempo n. Então o sistema evolui em unidades de tempo contínuas portanto o sistema dinâmico se diz *contínuo*.

Neste trabalho pela característica iterativa das funções estudadas somente vamos trabalhar com sistemas dinâmicos discretos, para facilitar notação, para $n > 0$ denotamos por $f^n(x)$ o n-ésimo iterado de x, i.e, $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f(x)}_{n}$. Definimos ademais, $f^0(x) = x$. Caso f tenha inversa, a denotamos por f^{-1} e para $n < 0$, denotamos por $f^{-n}(x)$ o n-ésimo iterado de x pela inversa f^{-1} .

Diferentes enfoques no tratamento dos sistemas tem gerados diferentes subáreas da teoria dos sistemas dinâmicos, como por exemplo, o estudo dos sistemas que preservam o volumem para fundamentar a mecânica estatística deu origem à teoria ergódica e o estudo de métodos geométricos para dar soluções a equações diferenciais deu origem à teoria geométrica dos sistemas dinâmicos.

1.2.1 Dinâmica topológica

O objetivo de esta seção é dar noções básicas da teoria topológica dos sistemas dinâmicos. Para isto vamos trabalhar com os livros [17, 15]. Onde o primeiro fará uma boa introdução aos sistemas dinâmicos e o segundo é uma boa enciclopédia com bastante teoria sobre este tema.

Um sistema dinâmico topológico é un sistema $\{X, f\}$, onde X é um conjunto compacto e f é continua, caso f seja invertível f^{-1} igualmente continua.

Definição 1.2.1 *Dado $x \in X$ definimos a órbita de x pela função f sendo o conjunto*

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\},$$

a órbita positiva $\mathcal{O}_f^+(x)$ tomando somente os iterado para $n \leq 0$.

Como já vimos, o objetivo dos sistemas dinâmicos é entender o movimento das órbitas dos pontos mediante o entendimento das trajetórias e as regiões para as quais estas convergem. Portanto, existem vários tipos de órbitas relevantes nesta teoria.

Definição 1.2.2 *Dizemos que $x \in X$*

- *É um ponto eventualmente periódico se existem $k, h \in \mathbb{N}$ tais que $f^{i+k}(x) = f^i(x)$ para todo $h \leq i$, se $h = 0$. Então, dizemos que é periódico. Além disso, o mínimo k é o período de x.*
- *É um ponto eventualmente fixo se existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x$ para todo $h \leq k$, se $h = 0$. Então, o ponto se diz fixo.*

Dado A um conjunto compacto, invariante e não vazio podemos restringir $f|_A$ e estudar a subdinâmica definida nestes conjunto, facilitando assim a compreensão de toda a dinâmica. Dizemos que um conjunto compacto é decomponível se existe uma decomposição em uma união de dois conjuntos disjuntos, invariantes, compactos e não vazios.

As três condições seguintes nos dão condições sobre a possibilidade de descompor o conjunto.

Definição 1.2.3 *Seja (X, f) um sistema dinâmico topológico. dizemos que o sistema é*

- *Topologicamente transitivo se para todo $U, V \subset X$ abertos existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq M$ $f^n(V) \bigcap U \neq \phi$.*

  Intuitivamente a transitividade reflete o fato de que existe um ponto tal que seus iterados estão arbitrariamente perto de abertos muito pequenos de algum outro ponto, implicando que o conjunto é indecomponível.

- *Topologicamente minimal se para todo $x \in X$ tal que O_x^+ é densa em X.*

  De fato, a minimalidade do sistema implica que não existem conjuntos invariantes próprios.

- *Topologicamente mixing se para todo $U, V \subset X$ abertos existe um M tal que para todo $n \geq M$ $f^n(V) \bigcap U \neq \phi$.*

  Esta condição é mais forte do que a transitividade e permite um controle mais acurado no tempo de recorrência dos pontos pelos conjuntos.

Uma forma alternativa de entender os sistemas transitivos é dada pela seguinte equivalência que dá uma ideia diferente da transitividade.

Lema 1.2.1 *Seja (X, f) um sistema dinâmico, com X sem pontos isolados. Então (X, f) é topologicamente transitivo se somente se existe um ponto $x \in X$ tal que O_x^+ é densa em X*

Demonstração. Veja a demonstração em [16, capitulo 7,2].

Um sistema dinâmico se diz sensível a condições iniciais se pequenos erros na medição inicial gera orbitas bastante afastadas em tempos finitos.

Definição 1.2.4 *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo é sensível a condições iniciais se existe um $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in X$ e para todo $\delta > 0$. Então existe um $y \in B_\delta(x)$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$.*

Os sistemas sensíveis a condições iniciais tem dinâmica imprevisível, já que o comportamento de órbitas próximas é bastante diferente e qualquer error na medição inicial implicaria diferencias significativas no resultado.

Uma condição similar, porém mais forte, é a expansividade a qual dá uma aproximação no afastamento das órbitas próximas.

Definição 1.2.5 *Seja f um homeomorfismo se diz expansivo se existe um $\alpha > 0$ tal que se $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ então $x = y$.*

Não é difícil observar que todo sistema expansivo é sensível as condições iniciais.

Uma parte importante dos sistemas dinâmicos é encontrar condições que impliquem que dois sistemas que podem parecer distintos, no fundo, tenham as mesmas propriedades. E portanto, poderíamos afirmar que duas dinâmicas são parecidas quando seus movimentos sejam basicamente os mesmos só que em ambientes diferentes, e a formalização deste fato é a conjugação.

Definição 1.2.6 *Sejam $(X, f), (Y, g)$ dois sistemas dinâmicos e seja $h : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo (continua e sobrejetora) tal que $h \circ f = g \circ h$ então dizemos que h conjuga a f e g (semi-conjuga).*

A diferença da conjugação, a semi-conjugação indica que dentro do sistema (Y, g) existe um sub-sistema $(B, g|_B)$ com $B \in Y$ fechado invariante. tal que $(B, g|_B)$ e (X, f) são conjugados.

Dados $(X, f), (Y, g)$ dois sistemas dinâmicos, denotamos por $\mathfrak{A}(f, g)$ o conjunto definido por

$$\mathfrak{A}(f, g) = \{h : X \longrightarrow Y : h \text{ conjuga } f \text{ e } g\}.$$

Lema 1.2.2 *Dados dois sistemas (X, f) o conjunto de auto conjugação $\mathfrak{A}(f, f)$ é um grupo com a operação da composição.*

Demonstração. De fato, observemos que claramente a função identidade pertence a $\mathfrak{A}(f, f)$.
A seguir, dados $g \in \mathfrak{A}(f, f)$ note-se que $g^{-1} \in \mathfrak{A}(f, f)$, visto que f é bijectiva, continua num compacto, portanto aberta, satisfazendo $h^{-1} \circ f = f \circ h^{-1}$.
Por último, dados $h, g \in \mathfrak{A}(f, f)$ observemos que $h \circ g^{-1} \in \mathfrak{A}(f, f)$. A bijectividade é imediata; além disso, $h \circ g^{-1} \circ f = h \circ f \circ g^{-1} = f \circ h \circ g^{-1}$, concluindo que $\mathfrak{A}(f, f)$ é um subgrupo.□

A conjugação preserva várias propriedades importantes dos sistemas, as quis são chamadas de propriedades dinâmicas; tais como:

Lema 1.2.3 *Sejam $(X, f), (Y, g)$ dois sistemas dinâmicos e seja $h : X \longrightarrow Y$ uma semi-conjugação então.*

a. *Se (X, f) é top. mixing então (Y, g) é top. mixing.*

b. *Se (X, f) é top. transitivo então (Y, g) é top. transitivo.*

c. *Se (X, f) é top. minimal então (Y, g) é top. minimal.*

Demonstração.

a. Sejam abertos $U_1, U_2 \subset Y$ então existem $V_1, V_2 \subset X$ abertos tais que $h(U_i) = V_i$. Dado que X é top. mixing existe um k tal que para todo $k \leq m$ tem-se $f^m(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Portanto $\emptyset \neq h(f^m(U_1)) \cap h(U_2) = g^m(V_1) \cap V_2$ concluindo assim que (Y, g) é top. mixing.

b. Isto é um caso particular de [a.].

c. Dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $h(x) = y$ e a órbita de x é densa. Como h é contínua temos $Y = h(\overline{O_f(x)}) \subset \overline{h(O_f(x))} = \overline{O_g(h(x))}$ portanto $\overline{O_g(y)} = Y$. Assim toda órbita de Y é densa, concluindo que (Y, g) é top. minimal.

1.2.2 Teoria ergódica

Alguns dos livros mais importantes para aprender a teoria ergódica são [20, 21, 19]. Estes são precisamente as referências que usaremos nesta seção.

Vamos estudar a dinâmicas sobre espaços mensuráveis com "boas"medidas, que serão definidas abaixo.

Definição 1.2.7 *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e uma função mensurável $f : M \longrightarrow M$. Dizemos que a medida μ é invariante por f se $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{B}$.*

Pode-se relaxar um pouco a definição do ser medida invariante.

Lema 1.2.4 *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade. Suponha que existe uma álgebra A tal que gera a $\sigma - algebra$ B de M e $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in A$, então μ é invariante.*

Um sistema dinâmico mensurável é un sistema $\{X, f, \mu\}$, onde X é um conjunto compacto, f é medível, caso f seja invertível f^{-1} igualmente medível e μ uma medida de probabilidade f-invariante.

A teoria ergódica pode-se afirmar que começou nas mãos de Boltzmann, quando este trabalhava na teoria dos gazes, onde ele acreditava que as órbitas descritas pelas partículas e o tempo que elas tardavam para preencher o espaço estava relacionado com o tamanho do mesmo. Esta conjectura foi chamada de hipótese de Boltzmann, a qual se comprovou depois que era falsa, mas deu origem ao estudo de certas dinâmicas que a satisfazem.

Agora sejam $x \in M$ um ponto qualquer, e $E \subset M$ um conjunto mensurável. Defina a função

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n : f^j(x) \in E\}$$

A qual mede o tempo médio das visitas de um ponto x a um conjunto mensurável E.

Definição 1.2.8 *Seja $f : M \to M$ mensurável, f invariante por uma medida μ, então o sistema (f, μ) se diz ergódico se $\tau(E, x) = \mu(x)$*

Dois aspectos importantes de a ergodicidade são, Como vamos ver um depois esta implica que o conjunto não pode ser dividido em dois conjuntos invariantes de medida positiva.

Agora seja uma função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$,definimos:

$$\tilde{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

O seguinte teorema é talvez um dos mais importantes da teoria ergódica, conhecido como o teorema ergódico de Birkhoff

Teorema 1.2.1 *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida de probabilidade $f-$ invariante. Dada uma função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ então $\tilde{\varphi}$ existe $\mu-$ quase todo ponto. Além disso $\tilde{\varphi}$ é integrável e satisfaz $\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$*

Pela importância deste resultado sua demonstração esta feita em qualquer livro de teoria ergódica. Além disso, uma boa demonstração para o leitor interessado pode ser encontrada no livro [21].

A ergodicidade motiva a definição de um conjunto importante, o qual definiremos a seguir.

Definição 1.2.9 *Dada uma medida μ, $f-$ invariante chamamos bacia de μ o conjunto $B(\mu)$ dos pontos $x \in M$ tal que, para toda função continua φ satisfaz.*

$$\tilde{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

Observemos que se o sistema (X, μ, f, K) é ergódico implica que a bacia $B(\mu)$ tem medida total. Existem varias formas de caraterizar a ergodicidade algumas delas são as seguintes.

Proposição 1.2.1 *seja (f, μ) um sistema de probabilidade com μ sendo $f-$ invariante, os enunciados seguintes são equivalentes:*

- *O sistema é ergódico.*
- *Para todo mensurável $E \subset M$ a função $\tau(B, \cdot)$ é constante em μ-quase todo ponto.*
- *Para toda função integrável φ temos que $\tilde{\varphi} = \int \varphi d\mu$*
- *Para todo conjunto mensurável $B \subset M$ a medida temporal $\tilde{\varphi}$ é constante μ-quase todo ponto.*
- *Para toda função integrável invariante ψ tem-se que $\psi(x) = \int \psi d\mu$*
- *Toda função integrável invariante ψ é constante em μ- quase todo ponto.*
- *Todo subconjunto A invariante tem-se que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$*

Demonstração A demonstração pode ser consultada no livro [19].

Porem os sistemas nos que estamos trabalhando pareçam ser determinísticos, o certo é que eles quando evoluem no tempo vão esquecendo o passado, o que induz neles comportamento de tipo estocástico. Uma forma de caraterizar estes sistemas é a seguinte:

Definição 1.2.10 *Um sistema (f, μ) é misturador se*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

para todo A, B, conjuntos mensuráveis de M.

Definição que podemos relaxar um pouco, já que não se precisa garantir esta propriedade para todos os elementos da $\sigma - algebra$.

Lema 1.2.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra gerando a σ − álgebra $\mathcal{B}$, então, se para todo $A, B \in \mathcal{A}$ tem-se $\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ então o sistema é misturador*

Demonstração. Veja [19].

Sendo a propriedade de ser misturador uma condição mais forte do que a ergodicidade. Devido ao teorema que vamos a mostrar agora.

Lema 1.2.6 *Se o sistema (f, μ) é misturador, então é ergódico.*

Demonstração. Dado A conjunto invariante, temos que $f^{-n}(A) = A \ \forall n \in \mathbb{Z}$, relembrando a definição de misturador, se satisfaz a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap A) = \mu(A)\mu(A)$$

visto isso $\mu(A) = \mu(A)^2$ implica que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Assim sendo, pela afirmação anterior temos que (f, μ) é ergódico.□

1.3 Aplicação deslocamento

Uma aplicação muito importante nos sistemas dinâmicos discretos, pelas suas propriedades e simplicidade é o deslocamento de Bernoulli.

Definição 1.3.1 *Seja $\sigma : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, tal que para todo $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ definimos $\sigma(x) = (x_1, x_2, x_3, ...)$.*

Observação 1.3.1 *Uma forma analítica da aplicação deslocamento em $\mathbb{Z}_2$ é a seguinte:*

$$\sigma(x) = \begin{cases} x/2 & se \quad x \text{ é par} \\ (x-1)/2 & se \quad x \text{ é impar} \end{cases}.$$

Demonstração. De fato, dado $x \in \mathbb{Z}_2$ temos dois casos:

- Se x é par, temos a representação $x = (0, x_1, x_2, ...)$ logo $x/2 = (x_1, x_2, ...) = \sigma(x)$.
- Se x é impar, temos a representação $x = (1, x_1, x_2, ...)$ portanto $x - 1 = (0, x_1, x_2, ...)$ concluindo assim $(x - 1)/2 = (x_1, x_2, ...) = \sigma(x)$. □

Agora vamos apresentar algumas propriedades topológicas da função deslocamento.

Lema 1.3.1 *A função σ é contínua.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ e $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seja n tal que $\frac{1}{p^n} < \epsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{p^{n+1}}$. Portanto, se $d(x,y) < \delta = \frac{1}{p^{n+1}}$ então pela proposição (1.1.9), temos que $x_i = y_i$ para $i = \{0, 2, ..., n-1\}$, logo $\sigma(x)_i = \sigma(y)_i$ para $i = \{0, 2, ..., n-2\}$ concluindo assim $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \epsilon$ e portanto σ é continua. □

Lema 1.3.2 *A função σ tem pontos periódicos de todas as ordens e estes são densos.*

Demonstração. Dado n numero natural, fixamos uma sequência $x_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$ para $0 \leq i \leq n-1$, logo defina $y = x_0...x_{n-1}x_0...x_{n-1}x_0...x_{n-1}....$ É claro pela construção de y que $\sigma^n(y) = y$.

Agora vejamos que estes pontos são densos. De fato, dado $z = (z_i) \in \mathbb{Q}_p$ um ponto qualquer e seja $\epsilon > 0$. Então existe m tal que $\epsilon > \frac{1}{p^m}$ e definimos $w = z_0...z_{m-1}z_0...z_{m-1}z_0...z_{m-1}....$ Portanto w é periódico e $d(w,z) < \epsilon$ concluindo assim $\overline{Per(\sigma)} = \mathbb{Z}_p$. □

Teorema 1.3.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras*

a. *σ é top. transitiva.*

b. *σ é top. mixing .*

c. *σ não é top. minimal.*

d. *σ é expansora.*

e. *σ é sensível a condiciones iniciais.*

Demonstração.

a. Para isto só temos que procurar um ponto com orbita densa e podemos construir ele do seguinte jeito.

   Seja B_i^j o i-ésimo bloco de comprimento j, vamos colocar eles num só elemento deste jeito $x = B_1^1B_1^2B_2^1...B_2^4...B_n^1...B_n^{2^n}$. É claro que $\overline{O_\sigma(x)} = \mathbb{Z}_p$. De fato, dado x e $\epsilon > \frac{1}{p^n} > 0$ existem k, t tal que $x = B_n^k x_{n+1}...$ e $\sigma^t(x) = B_n^k B_n^{k+1}...$ podendo assim concluir que $d(x, \sigma^t(x)) < \epsilon$.

b. Dados dois cilindros $c_m^i(x_m, ..., x_i)$ e $c_n^j(y_j, ..., y_n)$ definimos a serie de pontos como, Fixando n natural estabelecemos

$$z_n = s_0...s_{m-1}x_m...x_ih_1...h_nt_0...t_{j-1}y_j...y_n...$$

   onde os s_i, h_i, t_i são entradas arbitrarias. Tem-se por construção que $z_n \in c_m^i(x_m, ..., x_i)$. Além disso, $\sigma^{i+1+n}(z_n) = t_0...t_{j-1}y_j...y_n...$ logo, $\sigma^{i+1+n}(z_n) \in c_n^j(y_j, ..., y_n)$. Visto isso, concluímos que para todo $m > i+1$ temos $\sigma^m(c_m^i(x_m, ..., x_i)) \cap c_n^j(y_j, ..., y_n) \neq \emptyset$.

c. Como σ tem pontos periódicos não pode ser minimal.

d. Seja $\alpha = \frac{1}{2}$, então se $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \leq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ concluímos que $x_n = \sigma^n(x)_0 = \sigma^n(y)_0 = y_n$ dessa forma $x = y$.

e. Devido a ser expansora.

Concluindo assim o teorema.□

Lema 1.3.3 *O deslocamento preserva a medida de Bernoulli.*

Demonstração. De fato, dado um cilindro $H = C_i^k(x_i, ..., x_k)$ observamos que $\sigma^{-1}(H) = C_{i+1}^{k+1}(x_i, ..., x_k)$, então $\mu(H) = \frac{1}{p^{k-i}} = \mu(\sigma^{-1}(H))$.□

Proposição 1.3.1 *O deslocamento é misturador com a medida de Bernoulli.*

Demonstração. Sejam $A = C_m^i(x_m, ..., x_i)$ e $B = C_n^j(y_n, ..., y_j)$ dois cilindros , observemos que $\sigma^{-k}(C_m^i(x_m, ..., x_i)) = C_{m+k}^{i+k}(x_m, ..., x_i)$, fixando um k suficientemente grande tal que $m+k > j$.

Então,

$$\sigma^{-k}(A) \cap B = \bigcup \{C_n^{i+m}(x_m, ..., x_i, c_{i+1}, ..., c_{i+n-1}, y_n, ..., y_j)\} = \bigcup \{H(c_{i+1}, ..., c_{i+n-1})\}$$

.

Onde os $c_i \in \{0, ..., 9\}$ percorrem todo o conjunto, Portanto,

$$\mu(\bigcup \{H(c_{i+1}, ..., c_{i+n-1})\} = \sum \mu(\{H(c_{i+1}, ..., c_{i+n-1})\}) = p^{n-1} \frac{1}{p^{n-1}} \mu(A)\mu(B)$$

visto isso podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

Portanto pelo lema (1.2.5) o sistema é misturador. □

Capítulo 2

Conjectura

Como enunciado na Introdução, o problema que traremos neste trabalho é a conjetura de Collatz. Problema muito famoso que tem circulado em média uns 80 anos pela literatura. Embora muitos matemáticos tenham atribuído o início desta conjectura nos ano 1937 ao Collatz, sua origem não é clara como descrito em [2, 3].

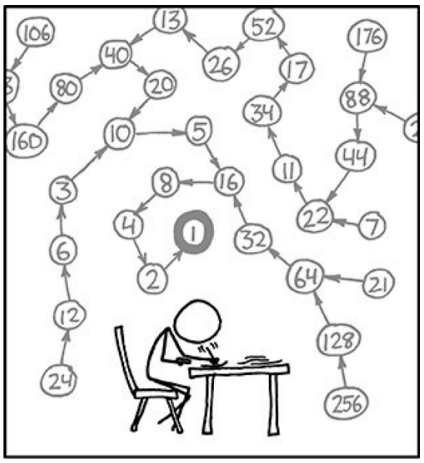
No artigo "About the motivation of the (3n+1)-problem" de 1986. Collatz narra que nos anos 30's, juntamente com seus estudantes tentavam classificar alguns grafos mediante uma família de funções semelhantes a função τ. COmo por exemplo:

Em 1932, ele considerou em suas notas a função
$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que,

$$g(x) = \begin{cases} 2x/3 & se \quad x \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ 4x/3 - 1/3 & se \quad x \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ 4x/3 + 1/3 & se \quad x \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases} .$$

Função sobre a qual conjecturo que as órbitas dos elementos são finitas o infinitas, dependendo de se ela atingia o 8 ou não.

Estudos os quais o levou a estudar o grafo determinado pela função τ definida na seguinte seção em (2.1), e perguntar-se se dado grafo é conexo.



Mas como não conseguiu dar solução ao problema, decidiu não publicar nada respeito desta conjectura nesses anos.

A seguir Collatz propôs o problema para seu colega Hasse no ano 1952. Este popularizou a conjetura durante os anos 50's quando visitou a Universidade de Siracusa. Nos anos 60's Kakutani e Ulam conheceram o problema e começaram a divulgá-lo por várias universidades dos Estados Unidos como, por exemplo, as Universidades de Yale, Chicago e Los Alamos.

Como é muito simples enunciar a conjectura, vários matemáticos tentaram prová-la. Entre os quais se destaca Paul Erdös quem chegou a afirmar que "a matemática de hoje não e suficiente para solucionar esse problema". Portanto, até o dia de hoje a solução não foi encontrada e o problema segue aberto.

Intuitivamente, podemos enunciar este problema como: Dado um numero inteiro, se ele é par o dividimos por 2, se é impar o multiplicamos por 3 lê adicionamos 1 e dividimos o resultado por 2. A conjectura de Collatz indica que dado qualquer inteiro positivo sua órbita, isto é, as sucessivas iterações deste processo, em algum momento alcança o 1.

2.1 Aplicação $3X + 1$ em $\mathbb{N}$

Nesta seção vamos enunciar formalmente a conjectura, exibir algumas órbitas, e dar uma conjectura equivalente. As ideias aqui expostas são tomadas dos artigos [3, 5, 6].

Nesta parte da dissertação vamos trabalhar no conjunto $\mathbb{N}$, mas com abuso de notação como já falamos anteriormente nos preliminares, i.e., vamos identificar $\mathbb{N}$ com subconjunto de $\mathbb{Z}_2$ e portanto dotá-lo com a topologia induzida por $\mathbb{Z}_2$.

Esta conjetura pode-se enunciar formalmente da seguinte forma.

Seja a função $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que,

$$\tau(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{3n+1}{2} & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases} \tag{2.1}$$

Então para todo $x \in \mathbb{N}$ existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que o $k-$*ésimo iterado* da função em x atinge o 1, i.e., $\tau^k(x) = 1$.

Exemplo 2.1.1 *Na tabela abaixo vamos mostrar algumas das órbitas para evidenciar que a velocidade de chegada ao 1 é bastante arbitrária.*

n	$\mathcal{O}_\tau(x)$
1	$\{1, 2, ...\}$
7	$\{7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, ...\}$
20	$\{20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, ...\}$
43	$\{43, 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, ...\}$
64	$\{64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, ...\}$

Os dados acima mostrados são um pequeno exemplo da sensibilidade da função τ com respeito à velocidade de chegada dos iterados ao 1, isto devido a que números muito grandes podem convergir em poucos passos e números muito pequenos demorar bastante tempo em convergir.

2.1.1 Tempos de paragem

É importante distinguir na órbita $\mathcal{O}_\tau(n)$ de n o primeiro iterado k para o qual se tem $\tau^k(n) < n$.

Isto motiva a definição de uma função que será uma ferramenta para entender melhor o problema, essa nova função é chamada de *tempo de paragem* exposta a seguir.

Definição 2.1.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, denominamos tempo de paragem $\psi(n)$ de n como o menor $k \geq 0$ tal que $\tau^k(n) < n$. Se tal k não existe definimos $\psi(n) = \infty$.*

Exemplo 2.1.2 *Na seguinte tabela vamos mostrar alguns tempos de paragem para evidenciar que este é bastante arbitrário.*

n	Tempo de paragem
1	∞
27	59
28	1
31	54
29	2

Teorema 2.1.1 *A conjectura de Collatz é equivalente ao fato de que todo inteiro positivo maior que 1 tem tempo de paragem finita.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Se a conjectura é afirmativa, então as órbitas não podem ser estritamente crescentes. Portanto, existe um número $m > 1$ tal que $\tau_m(n) \leq n$. Além disso, como não existe pontos fixos positivos, obtemos $\tau_m(n) < n$.

($\Leftarrow$) Agora suponha que todos os tempos de paragem são finitos nos inteiros positivos. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ então existe um tempo m_0 tal que $n_1 = \tau_{m_0}(n_0) < n_0$, e indutivamente definimos $n_k = \tau_{m_{k-1}}(n_{k-1}) < n_{k-1}$, onde os m_{k-1} são os tempos de paragem de n_{k-1}.

Pela construção observemos que $\{n_m\}$ são estritamente decrescentes e limitados inferiormente por 1. Portanto existe um iterado finito, pois este processo precisa de no máximo n iterados para atingir o 1. Visto isso, podemos concluir que $\tau^{m_0+m_1+\ldots+m_k}(n) = 1$.□

Embora o tempo de paragem de números próximos pareça bastante aleatório, como indicado na tabela acima, o teorema abaixo mostra que este não é o comportamento do tempo de paragem para números grandes. Para enunciá-lo, lembre que se A é um conjunto, $\#(A)$ denota a cardinalidade de A.

Teorema 2.1.2 *Para todo t numero inteiro positivo, seja o conjunto*

$$S_t(m) = \{m \geq 1 : n \leq m \text{ e } \psi(n) \geq t\}.$$

Então a função $F(t) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#S_t(m)$ está bem definida e é é limitada. Além disso tem-se

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0.$$

Observe que $\frac{1}{m}\#S_t(m)$ é a medía temporal da quantidade de elementos menores que m que tem tempo de paragem maior que t. Dessa forma, passando o limite quando m tende ao infinito; o numero $F(t)$ é a medía temporal de inteiros positivos que tem tempo de paragem maior do que t.

Visto isso, não é difícil perceber que a função F é decrescente e de fato o teorema nos indica que no infinito tende a 0. Concluindo assim que, para uma grande quantidade de inteiros mas não para todos o tempo de paragem é finito .

Com o objetivo de demonstrar o teorema (2.1.2), vamos mostrar algumas propriedades do tempo de paragem, e introduzir um novo tempo de paragem que terá um vínculo estreito com o tempo de paragem já conhecido.

Dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_2$, lembrando que x_0 é a paridade de x, definamos a função $\mathcal{Q} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ como $\mathcal{Q}(x) = (x_0, \tau(x)_0, ..., \tau^n(x)_0, ...)$[1], que registra a paridade de cada elemento da órbita positiva de x. Seja $\mathcal{Q}^k(x) = (x_0, \tau(x)_0, ..., \tau^{k-1}(x)_0)$ a projeção nas primeiras k-coordenadas de $\mathcal{Q}(x)$.

Como a paridade x_0 de x é zero ou um, podemos escrever a função τ como

$$\tau(x) = \frac{3^{x_0}x + x_0}{2}. \tag{2.2}$$

E portanto, os iterados $\tau^k(x)$ de x podem ser escritos como no teorema a seguir.

Teorema 2.1.3 *Os iterados de τ podem ser escritos como*

$$\tau^k(x) = \lambda_k(x)x + \rho_k(x), \text{ com } \lambda_k(x) = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_0+...+\mathcal{Q}(x)_{k-1}}}{2^k} \quad e \quad \rho_k(x) = \sum_i^{k-1} \mathcal{Q}(x)_i \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_{i+1}+...+\mathcal{Q}(x)_{k-1}}}{2^{k-i}}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar este fato por indução em k.
Para $k = 1$ se satisfaz claramente o enunciado pela definição da função em (2.2).

Agora supondo o teorema verdadeiro para $k = n \geq 1$, vamos demonstrar que se satisfaz para $k = n + 1$

Pela definição temos que $\tau^{k+1}(x) = \tau(\tau^k(x)) = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_k}x+\mathcal{Q}(x)_k}{2}$ e portanto

$$\lambda_{k+1}(x) = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_k}\lambda_k}{2} = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_{k+1}}}{2}\frac{3^{\mathcal{Q}(x)_0+...+\mathcal{Q}(x)_k}}{2^k} = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_0+...+\mathcal{Q}(x)_{k+1}}}{2^{k+1}}.$$

Por outro lado,

$$\rho_{k+1}(x) = \frac{\rho_k(x)3^{\mathcal{Q}(x)_k} + \mathcal{Q}(x)_k}{2} = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_k}\sum_i^{k-1}\mathcal{Q}(x)_i\frac{3^{\mathcal{Q}(x)_{i+1}+...+\mathcal{Q}(x)_{k-1}}}{2^{k-i}} + \mathcal{Q}(x)_k}{2} =$$

$$\sum_i^{k-1}\mathcal{Q}(x)_i\frac{3^{\mathcal{Q}(x)_{i+1}+...+\mathcal{Q}(x)_k}}{2^{k+1-i}} + \frac{\mathcal{Q}(x)_k}{2} = \sum_i^{k}\mathcal{Q}(x)_i\frac{3^{\mathcal{Q}(x)_{i+1}+...+\mathcal{Q}(x)_k}}{2^{k+1-i}}.$$

A prova está concluída. □

Uma propriedade importante destas funções é que são constantes em vizinhanças suficientemente pequenas.

Fato que ajuda a demonstrar que esta propriedade é herdada por $\mathcal{Q}^k$

[1]Esta função será definida com todo detalhe na seguinte seção, devido ao fato de que esta desempenhará um importante papel neste trabalho.

Lema 2.1.1 *Para todo x, k inteiros positivos, temos que $\mathcal{Q}^k(x) = \mathcal{Q}^k(n)$ se e somente se $x \equiv n(mod\ 2^k)$.*

Demonstração.

($\Leftarrow$). Dado $x \in \mathbb{N}$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \equiv n\ (mod\ 2^k)$ portanto existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = x + r2^k$. Isto implicando que $x_0 = n_0$, portanto $\tau(n) = \frac{3^{x_0}(x+r2^k)+x_0}{2}$, por um argumento indutivo podemos observar que se satisfaz a igualdade

$$\tau^i(x + r2^k) = \tau^i(x) + r2^{k-i}3^{x_0+...+x_i}$$

Já que $r2^{k-i}3^{x_0+...+x_i}$ é par para todo $i = 0, .., k$ podemos concluir que $\tau^i(n)$ e $\tau^i(x)$ tem a mesma paridade ao longo da orbita. Implicando isto que $\mathcal{Q}^k(x) = \mathcal{Q}^k(n)$.

($\Rightarrow$). Suponha que $\mathcal{Q}^k(x) = \mathcal{Q}^k(n)$. Então tem-se que $\mathcal{Q}(x)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1} = \mathcal{Q}(n)_0 + ... + \mathcal{Q}(n)_{k-1}$ e portanto $\rho_k(x) = \rho_k(n)$ e $\lambda_k(x) = \lambda_k(n)$. assim pelo teorema (2.1.3) temos que $\tau^k(n) - \tau^k(x) = (n - x)\lambda_$ Como $\lambda_k(x) = \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_0+...+\mathcal{Q}(x)_{k-1}}}{2^k}$ então 2^k divide a $(n - x)$; visto isso $x \equiv n(mod\ 2^k)$.□

Proposição 2.1.1 *Se $x \equiv n(mod\ 2^k)$ então $\rho_k(x) = \rho_k(n)$ e $\lambda_k(x) = \lambda_k(n)$.*

Demonstração. A prova deste enunciada é imediata do teorema anterior, já que as funções ρ_k e λ_k dependem apenas das k primeiras coordenadas de $\mathcal{Q}^k$. □

Corolário 2.1.1 *A função Q^k é periódica com período 2^k.*

Demonstração. Temos que $Q^k(x+2^k) = Q^k(x)$ pelo lema anterior. Ademais $Q^k(x + 2^i) \neq Q^k(x)$ para todo $i = 0, 1, ..k - 1$, portanto é periódica. □

Observação 2.1.1 *Note que a função induzida por $\mathcal{Q}^k$ em $\mathbb{Z}_2/2^k\mathbb{Z}$ dada por $\overline{\mathcal{Q}}^k : \mathbb{Z}_2/2^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2/2^k\mathbb{Z}$ preserva as propriedades de $\mathcal{Q}^k$ e ademais é uma permutação.*

Algo importante é dado um $v \in \mathbb{Z}_2$ saber quais são os números que têm as mesmas k-projeções de suas funções itinerário $\mathcal{Q}$. Assim, dado $v \in \mathbb{Z}_2$ e k fixo, Isso motiva a definição do conjunto

$$S(v) = \{w : \mathcal{Q}^k(v) = \mathcal{Q}^k(w)\}.$$

O teorema 2.1.3 juntamente com o fato que $0 < \rho_m(n)$ implica que se $\tau_m(n) < n$ então $\lambda_m(n) < 1$. Isto motiva a definição.

Definição 2.1.2 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ dizemos que $\omega(n) = k$ se e somente se k é o menor inteiro tal que $\lambda_m(n) < 1$. Se este número não existe então definimos $\omega(n) = \infty$. Este numero é chamado o ω-tempo de paragem de n.*

Pelo comentário acima da definição tem-se que $\omega(n) \leq \psi(n)$.
Na tabela abaixo indicamos alguns ω-tempo de paragem de alguns números inteiros n.

n	ω-Tempo de paragem
1	2
15	7
28	1
3	4
29	2

Note-se que para todo número par se satisfaz que $\omega(n) = 1 = \psi(n)$. Além disso, todos os números que mostramos nesta tabela e na do exemplo 2.1.2 têm igualdade em ambos tempos de paragem à excepção do 1.

Lema 2.1.2 *Se $\omega(n) = k$, então é ω é constante em $B_{\frac{1}{2^k}}(n)$.*

Demonstração. Se $m \in B_{\frac{1}{2^k}}(n)$ então $x \equiv n(mod\ 2^k)$, aplicando o corolário (2.1.1) temos que $\mathcal{Q}^k(m) = \mathcal{Q}^k(n)$, visto isso $\mathcal{Q}(m)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1} = \mathcal{Q}(m)_0 + ... + \mathcal{Q}(n)_{k-1}$ e portanto a igualdade $\lambda_k(m) = \lambda_k(n)$, concluindo assim que se $\omega(n) = k$ então $\omega(m) = k$.□

Note-se que este lema implica que $B_{\frac{1}{2^k}}(i) = S(i)$. Portanto, para cada k o espaço $\mathbb{Z}_2$ se divide em 2^k bolas disjuntas nas quais todos os elementos tem o mesmo $\mathcal{Q}^k$

Proposição 2.1.2 *As seguintes desigualdades são equivalentes:*

1. $\tau^k(n) < n$.
2. $\frac{\rho_k(n)}{1-\lambda_k(n)} < n$.

Demonstração.

(1.) $\Leftrightarrow$ (2.) Se $\tau^k(n) < n$ então $\lambda_k(n)n + \rho_k(n) < n$. Aplicando um pouco de álgebra $\rho_k(x) < n - \lambda_k(n)n$, portanto fatorando e passando a dividir concluímos que $\frac{\rho_k(n)}{1-\lambda_k(n)} < n$ já que se satisfaz a desigualdade $\lambda_k(n) < 1$

(2.) $\Leftrightarrow$ (1.) Suponha que se satisfaz $\frac{\rho_k(n)}{1-\lambda_k(n)} < n$. Então $\tau^k(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n) = \lambda_k(n)n + \frac{\rho_k(n)(1-\lambda_k(n))}{1-\lambda_k(n)}$ $< \lambda_k(n)n + (1 - \lambda_k(n))n = n$.□

Vamos mostrar agora que com algumas condições pode-se garantir a igualdade de ambos tempos de paragem.

Teorema 2.1.4 *Se $\omega(n) = k$ então existe um inteiro positivo M tal que se $m \in B_{\frac{1}{2^k}}(n)$ e $m \geq M$ tem-se que $\psi(m) = k$.*

Demonstração. Suponha $\omega(n) = k$ então pelo corolário (2.1.1) tem-se que $\frac{\rho_k(n)}{1-\lambda_k(n)}$ é constante em $B_{\frac{1}{2^k}}(n)$. Seja t suficientemente grande tal que $\frac{\rho_k(n)}{1-\lambda_k(n)} < M = n + 2^k t$.

Seja $m \in B_{\frac{1}{2^k}}(n)$ tal que $m \geq M$ então não é difícil ver que existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + r2^k$ e $r > t$; Então pela escolha de M tem-se que $\frac{\rho_k(m)}{1-\lambda_k(m)} < M < m$ junto à proposição anterior tem-se que $\tau^k(m) < m$; Concluindo assim que $\psi(m) \leq k$. Por outro lado do lema (2.1.2) segue-se que $\omega(m) = k$ e visto que $\omega(m) \leq \psi(m)$ obtemos finalmente que $\psi(m) = k$. □

E vemos que realmente estes pontos são bastante. Pois os pontos onde $\omega(n) \neq \psi(n)$ são muito poucos.

Corolário 2.1.2 *Existe finitos números positivos tais que $\omega(n) < \psi(n)$.*

Demonstração. Já sabemos que se satisfaz $\omega(n) \leq \psi(n)$, então temos que procurar os pontos onde $\omega(n) \neq \psi(n)$. Então pelo teorema anterior dado um n tal que $\omega(n) = k$, então existe um M tal que se existe um i com $\omega(i) = k$ e $\psi(n) < k$ então $i \in B_{\frac{1}{2^k}}(x)$ e $x < M$. Portanto somente pode existir finitos números satisfazendo esta propriedade.□

Definição 2.1.3 *Defina $P[\omega = k]$ a proporção de números inteiros no intervalo $[1, 2^k]$ tal que seu $\omega(n)$-tempo de paragem é k, i,e. $P[\omega = k] = \frac{1}{2^k}\#\{m \in [1, 2^k] : \omega(m) = k\}$.*

Teorema 2.1.5 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se que $F(k)$ existe e $F(k) = P[\omega \geq k]$.*

Demonstração. Veja-se que $P[\omega = k] = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{n \leq m : \omega(n) = k\}$. De fato, devido a periodicidade de ω se satisfazem as seguintes igualdades.

$$\{n \in [1, m] : \omega(n) = k\} = \{r \in [1, 2^k], q \in \mathbb{N} : \omega(q2^k + r) = k\} = \{r \in [1, 2^k] : \omega(r) = k\} = P[\omega = k]$$

Portanto, aplicando limite em ambos lados se satisfaz a igualdade acima exposta. Além disso, relembrando o corolário anterior observemos que os conjuntos $\{r \in \mathbb{N} : \psi(r) = k\}$, $\{r \in \mathbb{N} : \omega(r) = k\}$ diferem somente em um numero finito de elementos. Visto isso podemos concluir que

$$P[\omega = k] = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{n \leq m : \omega(n) = k\} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#\{n \leq m : \psi(n) = k\}.$$

De onde não é difícil concluir o enunciado.□

Observação 2.1.2 *A condição $\lambda_k(n) > 1$ é equivalente a $\mathcal{Q}(m)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1} > k\gamma$, onde $\gamma = \frac{ln(2)}{ln(3)}$.*

Demonstração observemos:

$$\lambda_k(n) > 1 \Leftrightarrow \frac{3^{\mathcal{Q}(x)_0+...+\mathcal{Q}(x)_{k-1}}}{2^k} > 1 \Leftrightarrow 3^{\mathcal{Q}(x)_0+...+\mathcal{Q}(x)_{k-1}} > 2^k$$

$$\Leftrightarrow ln(3)(\mathcal{Q}(x)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1}) > ln(2)k \Leftrightarrow \mathcal{Q}(x)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1} > \frac{ln(2)k}{ln(3)}$$

Onde é evidente que essa cadeia de equivalências se satisfaz se $\mathcal{Q}(m)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1} > k\gamma$.□

A observação anterior nos motiva a definir certo tipo de sequências que tem propriedades importantes.

Definição 2.1.4 *Dada uma sequência $(x_0, ..., x_{k-1}, ...)$ dizemos que ela é admissível se sua projeção nas primeiras k-coordenadas $(x_0, ..., x_{k-1})$ satisfaz $x_0 + ... + x_i > i\gamma$, para todo $i = 0, ..., k-2$; Além disso dizemos que ela ativa se também satisfaz a propriedade para $i = k-1$, caso contrario dizemos que ela é terminal.*

Observemos que claramente $(\mathcal{Q}(x)_0, ..., \mathcal{Q}(x)_{k-1})$ é uma sequência admissível se e somente se $\omega(x) \geq k$. Portanto pelo teorema (2.1.5) temos a igualdade.

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i}\#\{v = (v_0, ..., v_{i-1}) : v \text{ é } admissivel\}. \tag{2.3}$$

Definição 2.1.5 *Vamos definir dois números que nos ajudarão a contar as sequências admissíveis.*

Seja $n(a,k)$ o numero de sequências admissíveis de longitude k com a zeros.
Seja $c(a,k)$ tal que $c(a,k)=1$ se $a<k(1-\gamma)$ e $c(a,k)=0$ em caso contrario.

Veja que se $a>k$ então não se pode ter uma sequencia com tantos zeros portanto $n(a,k)=0$, definamos igualmente $n(a,k)=0$ para $a<0$. Por outro lado, observemos que $n(0,1)=0$ e $n(1,1)=1$

Teorema 2.1.6 *Se satisfaz esta igualdade*

$$c(a,k)n(a,k)+c(a-1,k)n(a-1,k)=n(a,k+1)$$

Demonstração. Um fato evidente de observar é que se temos una sequencia admissível de longitude $k+1$ então sua k-projeção debe ser admissível ativa, esta projeção tem duas possibilidades tem a ou $a-1$ zeros, e ambas destas podem se estender ate uma sequencia admissível com a zeros. A primeira adicionando $v_k=1$ e a segunda $v_k=0$.

Por outro lado note-se que $c(a,k)n(a,k)$ é a quantidade de sequencia admissíveis ativas com a zeros, e $c(a,k)n(a,k)$ a quantidade de sequencia admissíveis ativas com $a-1$ zeros. De onde não é dificil concluir a igualdade pedida.□

Vamos definir um número que ajuda o nosso trabalho de entender os tempos de paragem, $[k\gamma]$ é o numero inteiro no intervalo $((k-1)\gamma,k\gamma)$, se existe.

Teorema 2.1.7 *Se satisfaz a seguinte igualdade.*

$$P[\psi\geq k]=\sum_{k=0}^{k}\frac{n(a,k)}{2^k}=F(k).$$

Demonstração. Seja uma sequencia admissível $v=(v_0,...,v_{k-1})$ com a zeros, então seja $b=k-a$ a quantidade de uns. tem-se dois casos.

primeiro, v é ativo então $\frac{3^b}{2^k}>1$, visto isso pela observação (2.1.2) se satisfaz que $b>k\gamma$ e portanto $a<k(1-\gamma)$. segundo, v é terminal então $w=(v_0,...,v_{k-2})$ é ativa e por um razonamento similar ao anterior tem-se que $a<(k-1)(1-\gamma)$.

Portanto, deste razonamento observemos que não podem existir sequencia admissível com mais de $k(1-\gamma)$ zeros. Concluindo assim.

$$P[\psi\geq k]=\sum_{k=0}^{[k(1-\gamma)]}\frac{n(a,k)}{2^k}=F(k).$$

Por ultimo uma proposição que deixaremos sem prova ja que os métodos utilizados fogem do objetivo da dissertação, a demonstração pode ser consultada em [6] ou [3].

Observação 2.1.3 *Tem-se que*

$$\sum_{k=0}^{[k(1-\gamma)]}\frac{n(a,k)}{2^k}\leq\sum_{k=0}^{[k(1-\gamma)]}\binom{k}{a}\frac{1}{2^k}$$

e $lim_{k\to\infty}\sum_{k=0}^{[k(1-\gamma)]}\binom{k}{a}\frac{1}{2^k}=0$

Demonstração teorema (2.1.2). Este resultado nos mostra que as sequencias admissíveis são muito pocas e que seu crescimento é menos que exponencial. Uma consequência importante deste resultado é finalmente o objetivo desta seção, mostrar que

$$0 \leq \lim_{t \leftarrow -\infty} F(t) \leq lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{[k(1-\gamma)]} \binom{k}{a} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Teorema 2.1.8 *Os seguintes enunciados são equivalentes.*

a. *Existe um* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\psi(n) = k$.

b. *O intervalo* $((k-1)\gamma, k\gamma)$ *tem um numero natural.*

c. *A desigualdade* $\frac{3^{[k\gamma]}}{2^{k-1}} > 1$ *se satisfaz.*

Demonstração.

$(a). \Leftrightarrow (b).$ Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(n) = k$ então $\lambda_k(n) > 1$ e $\lambda_{k-1}(n) < 1$ portanto é claro que $\mathcal{Q}(x)_{k-1} = 0$, visto isso nomeemos $b = \mathcal{Q}(m)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-1} = \mathcal{Q}(m)_0 + ... + \mathcal{Q}(x)_{k-2}$, logo pela observação (2.1.2) tem-se $b < k\gamma$ e $b > (k-1)\gamma$.

$(b). \Leftrightarrow (c).$ Seja $b = [k\gamma]$ que existe por hipótese, então $\frac{3^b}{2^{k-1}} > \frac{3^{(k-1)\gamma}}{2^{k-1}} = (\frac{3}{2})^{k-1} 3^\gamma > \frac{3}{2} > 1$

$(c). \Leftrightarrow (a).$ Defina o vetor $v = (v_0, v_1, ..., v_{k-1})$, com $v_i = 1$ para $i = 0, 1, ..., b-1$. e $v_i = 0$ em outro caso. Agora pela observação (2.1.1) existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{Q}^k(n) = v$; então observemos que $\tau^i(n) > n$ para todo i=0,...,k-1 e $\tau^k(n) < n$ como consequência da observação (2.1.2); Portanto $\psi(n) = k$.□

2.2 Aplicação $3X + 1$ em $\mathbb{Z}_2$

Nesta seção vamos estender a função num conjunto maior e mostrar suas propriedades dinâmicas; nele vamos apresentar ideias tomados dos artículos [1], [2]

Anteriormente observamos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_p$ mais do que isso é denso na topologia p-adica, i.e. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_p$, Portanto já que os p-ádicos são um espaço métrico, temos que existe uma única extensão continua, a qual iremos apresentar a seguir.

Definição 2.2.1 *Seja a função* $\tau : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ *tal que,*

$$\tau(x) = \begin{cases} (3x+1)/2 & se \quad x \text{ é impar} \\ x/2 & se \quad x \text{ é par} \end{cases}.$$

Estender esta função ate $\mathbb{Z}_2$ é bastante importante pelo menos desde o ponto de vista dinâmico, já que o conjunto dos 2-ádicos tem uma propriedade que ajudam bastante no estudo dos sistemas; que é ser compacto. Embora os p-ádicos sejam não-arquimediano, em alguns momentos vamos considerar o conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$ ordenado pela ordem induzida por $\mathbb{R}$ com a ordem usual.

Algumas propriedades básicas desta função são.

Lema 2.2.1 *Seja* $h \in \mathbb{Z}_2$ *sendo impar, então* $\tau(\frac{1}{h}\mathbb{Z}) \subset \frac{1}{h}\mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $x \in \tau(\frac{1}{h}\mathbb{Z})$, logo existe um $a \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \tau(\frac{a}{h})$, então existem duas possibilidades.

- Se a for par, então $a = 2k$. Portanto $x = \tau(\frac{2k}{h}) = \frac{k}{h} \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}$.
- Se a for impar, então $a = 2k + 1$, e $h = 2t + 1$. Substituindo $x = \tau(\frac{2k+1}{h}) = \frac{3\frac{2k+1}{h}+1}{2} = \frac{6k+3+h}{2h} = \frac{6k+4+2t}{2h} = \frac{3k+2+t}{h} \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}$. □

É fácil ver que a função τ é sobrejetora posto que se $x = (x_0, x_1, ...) \in \mathbb{Z}_2$, então claramente tem-se que $y = (0, x_0, x_1, ...)$, tal que $\tau(y) = x$. Mas a função não é injetora posto que todo ponto tem exatamente correspondência com dois elementos do domínio. Logo, podemos definir um tipo de "pseudo-inversa".

$$\tilde{\tau_0}(y) = 2y \text{ e } \tilde{\tau_1}(y) = (2y - 1)/3. \tag{2.4}$$

Como já o anunciamos no capitulo anterior, um instrumento bastante útil é a função que codifica as paridades dos elementos da orbita de cada numero.

Definição 2.2.2 *Seja a função $\mathcal{Q} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ tal que,*

$$\mathcal{Q}(x)_i = \begin{cases} 1 & se \quad \tau^i(x) \text{ é impar} \\ 0 & se \quad \tau^i(x) \text{ é par} \end{cases} .$$

Esse é o papel que cumpre a função $\mathcal{Q}$ ja que como vimos na definição de paridade no final da seção (1.1.0) A paridade de um elemento esta definida pela primeira coordenada de sua representação, e esta paridade decide qual das duas seções da função τ vai ser utilizada. Algumas orbitas relevantes para nosso trabalho vão ser mostradas a seguir.

Exemplo 2.2.1 *Vamos a calcular as imagens mediante $\mathcal{Q}$ de alguns números que serão relevantes para nosso trabalho posterior*

número	$\mathcal{Q}(n)$
1	$1010101... = -\frac{1}{3}$
2	$0101010... = -\frac{2}{3}$
0	$0000000... = 0$
-1	$111111... = -1$

Teorema 2.2.1 *A função $\mathcal{Q}$ conjuga τ com σ.*

Demonstração. A demonstração deste fato é um caso particular de um teorema mais geral que vamos apresentar no seguente capitulo, mais especificamente o teorema (3.0.1).

O teorema abaixo mostrar um enunciado equivalente à conjectura de Collatz dada pela função $\mathcal{Q}$

Teorema 2.2.2 *Se $x \in \mathbb{Z}$ é positivo, então existe um i tal que $\tau^i(x) = 1$ se e somente se $-3\mathcal{Q}(x)$ é um inteiro positivo, primo relativo com o 3.*

Demonstração. Seja $x > 2$ e k o míinimo tal que $\tau^k(x) = 1$. Aplicando $\mathcal{Q}$ em ambos lados desta igualdade, obtemos

$$-1/3 = (1, 0, 1, 0...) = \mathcal{Q}(1) = \mathcal{Q}(\tau^k(x)) = \sigma^k(\mathcal{Q}(x)) \;\Rightarrow\; \mathcal{Q}(x) = (q_0, ..., q_{k-1}, 1, 0, 1, 0...).$$

- Suponha que $q_{k-1} = 1$, então, $\mathcal{Q}(\tau^{k-1}(x)) = \sigma^{k-1}(\mathcal{Q}(x)) = 1/3 = \mathcal{Q}(1/3)$. Como $\mathcal{Q}$ é bijetiva, concluímos $\tau^{k-1}(x) = 1/3$, levando a uma contradição pois τ preserva inteiros. Então $q_{k-1} = 0$.
- Observe que a minimalidade de k satisfazendo $\tau^k(x) = 1$ implica que $q_{k-2} = 0$.

Então podemos escrever $\mathcal{Q}(x)$ como

$$\mathcal{Q}(x) = (q_0, ..., q_{k-3}, 0, 0, 1, 0, 1, 0...) = n - 2^k\frac{1}{3}, \text{ com } n < (1 + .. + 2^{k-3})(2-1) = 2^{k-2} - 1.$$

Portanto

$$-3\mathcal{Q}(x) = -3n + 2^k > -3(2^{k-2} - 1) + 2^k = 3 - (2^{k-2} + 2^{k-1}) + 2^k > 0,$$

o que implica que $-3\mathcal{Q}(x)$ é um inteiro positivo.

Reciprocamente, se $-3\mathcal{Q}(x)$ é um inteiro positivo. Então $\mathcal{Q}(x) = -\frac{a}{3}$, com a não divisível por 3 e a proposição (1.1.5) temos que $\mathcal{Q}(x)$ é eventualmente periódico de período 2. A conjugação de τ com o deslocamento σ implica que o único ciclo de período 2 é $\{1, 2\}$. Portanto, a órbita $\tau^k(x)$ converge para o ciclo $\{1, 2\}$, terminando a prova. □

Embora a conjectura pareça solucionada pelo teorema anterior, este somente cria uma equivalência da mesma com outro problema. Já que para determinar se $-3\mathcal{Q}(x)$ é um inteiro temos que calcular toda a órbita para conhecer as paridades, portanto a primeira vista não facilita muito a resolução do problema.

Um resultado que vai ser utilizado em vários argumentos é o seguinte

Lema 2.2.2 *Um ponto $x \in \mathbb{Z}_2$ é eventualmente periódico com respeito a τ se e somente se $\mathcal{Q}(x)$ é racional.*

Demonstração Este lema é um caso particular do lema (3.0.1), que vamos demonstrar na próxima seção. □

A seguir faremos alguns comentários respeito ao lema acima.

Note que o lema 2.2.2 pode ser enunciado como $\mathcal{Q}(\mathbb{Q}^{odd}) \subset \mathbb{Q}^{odd}$ e portanto $\mathbb{Q}^{odd}$ é invariante por $\mathcal{Q}$. Daí segue que a representação da imagem $\mathcal{Q}(x)$ de $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ é eventualmente periódica.

Vamos agora a dar um tratamento do ponto de vista ergódico ao sistema $(\tau, \mathbb{Z}_2, \mu)$, onde μ é a medida de Bernoulli.

Proposição 2.2.1 *A função $\mathcal{Q}$ preserva a medida μ de Bernoulli.*

Demonstração Seja $C = C_i^k(x_i, ..., x_k)$ um cilindro e $y \in C$. Como $\mathcal{Q}^{-1}(y) \in \mathcal{Q}^{-1}(C)$ segue que $\mathcal{Q}^{-1}(C) = C_i^k(\mathcal{Q}^{-1}(y)_i, ..., \mathcal{Q}^{-1}(y)_k)$ portanto

$$\mu(C) = \frac{1}{p^{k-i}} = \mu(\mathcal{Q}^{-1}(C)).\square$$

Observe que com um argumento similar podemos demostrar que $\mathcal{Q}^{-1}$ também preserva medida.

Corolário 2.2.1 *A função τ preserva a medida de Bernoulli.*

Demonstração Como $\tau = \mathcal{Q}^{-1} \circ \sigma \circ \mathcal{Q}$ e as funções $\mathcal{Q}^{-1}$, σ *e* $\mathcal{Q}$ preservam a medida de Bernoulli, concluímos que τ também preserva a medida de Bernoulli.

Teorema 2.2.3 *O sistema $\{\tau, \mu\}$ é misturador.*

Demonstração. Dados dois conjuntos mensuráveis A, B, como σ é misturadora, cf. proposição 1.3.1, tome m suficientemente grande tal que $\mu(\sigma^{-m}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Por outro lado, utilizando a conjunção $\tau^k = Q^{-1} \circ \sigma^k \circ Q$ obtemos

$$\mu(\tau^{-m}(A) \cap B) = \mu(Q^{-1} \circ \sigma^k \circ Q(A) \cap B) = \mu(Q^{-1} \circ \sigma^k \circ Q(A) \cap Q^{-1} \circ Q(B))$$
$$= \mu(Q^{-1}(\sigma^k \circ Q(A) \cap Q(B))) = \mu((\sigma^k \circ Q(A) \cap Q(B))) = \mu(Q(A))\mu(Q(B)) = \mu(A))\mu(B).$$

As últimas igualdades são verdadeiras devido a que $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}^{-1}$ preservam a medida de Bernoulli. Isso conclui a prova. □

No restante da seção vamos descrever sobre temas relacionados a funções integráveis e integração, para o leitor que não tem conhecimento sobre estos temas, pede revisar o apêndice A no final do trabalho.

Começamos por lembrar que o lema 1.2.6 implica trivialmente o seguinte resultado.

Corolário 2.2.2 *O sistema (τ, μ) é ergódico.*

Dado um conjunto mensurável A, seja a função característica de A, $\chi_A : \mathbb{Z}_p \to \{0, 1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in A \\ 0 & se \quad x \notin A \end{cases}.$$

A função χ_A é integrável e, tomando A igual a um cilindro $A = C_i^k(x_i, ..., x_k)$ vale que

$$\int \chi_A d\mu = \chi_A(A)\mu(A) + \chi_a(A^c)\mu(A^c) = \mu(A) = \frac{1}{p^{k-i}}.$$

Sejam $x \in B(\mu)$ um ponto na bacia de μ e $B = C_0^k(x_0, ..., x_k)$ um cilindro. Como a função τ é claramente integrável pois é contíinua num compacto,obtemos

$$\frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_B \tau^n(x). \tag{2.5}$$

Lema 2.2.3 *A conjectura de Collatz implica que $B(\mu) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha por contradição que existe um ponto $y \in B(\mu) \cap \mathbb{N}$ e para cada $i > 2$ fixo defina o cilindro $B = C_0^i(0, ..., 0)$. Por hipótese existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^k(y) = 1$ e portanto $\chi_B \tau^j(y) = 0$ para todo $j > k$, uma contradição visto que $y \in B(\mu)$ e por isso tem que satisfazer a equação (2.5). □

Observemos que o recíproco desta implicação é evidentemente falso , já que $B(\mu) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ não implica sequer a convergência das órbitas dos naturais. Por outro lado, no final da próxima seção vamos mostrar que realmente se satisfaz $B(\mu) \cap \mathbb{Q}^{odd} = \emptyset$.

A partir de este ponto vamos trabalhar com a função τ restita ao espaço $\mathbb{Q}^{odd}$, e o espaço $\mathbb{Q}^{odd}$ com a topologia e a ordem induzida pelos reais.

Observação 2.2.1 *o lema (2.2.1) implica que estes conjuntos densos* $\frac{1}{h}\mathbb{Z}$ *são invariantes e enchem totalmente o conjunto* $\mathbb{Q}^{odd}$*, implicando ademais que este conjunto não pode possuir orbitas densas, na topologia induzida pelos reais.*

Corolário 2.2.3 *Para todo* $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ *e* $[a,b]$ *intervalo em* $\mathbb{R}$*, temos que* $O_\tau(x) \cap [a,b]$ *é finito.*

Demonstração. Se $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ então, pela definição deste conjunto, temos $x = \frac{a}{h}$. Visto o lema anterior $O_\tau(x) \subset \frac{1}{h}\mathbb{Z}$, já que para todo intervalo [a,b] temos que $\#\{\frac{1}{h}\mathbb{Z} \cap [a,b]\} < \infty$ podemos concluir que $O_\tau(x) \cap [a,b]$ é finito. □

Corolário 2.2.4 *Seja* $x \in \mathbb{Q}^{odd}$*.*

a. A $O_\tau(x)$ *é limitada se e somente se* x *é eventualmente cíclico.*

b. Se $O_\tau(x)$ *tem elemento supremo (ínfimo) se e somente se tem elemento máximo (minimo).*

Demonstração.

a. Se $O_\tau(x)$ é limitada então $O_\tau(x) \subset [-m,m]$ pelo corolário anterior a órbita é finita e portanto x é eventualmente cíclico. O reciproco é fácil de provar posto que se x é eventualmente cíclico então sua orbita é finita sendo assim limitada.

b. É imediata a Demonstração deste fato, já que o corolário anterior nos mostram que as órbitas dos números racionais não podem se acumular pois são totalmente discretas.

Podemos dividir as orbitas em três grupos grandes as estritamente positivas, estritamente negativas e as eventualmente positivas.

Lema 2.2.4 *Dado um* $x \in \mathcal{Q}^{odd}$*.*

- *Se* $x > 0$ *então* $\mathcal{O}_\tau(x)$ *é estritamente positivo.*
- *Se* $-1 < x \leq 0$ *então* $\mathcal{O}_\tau(x)$ *é eventualmente não negativa.*
- *Se* $\mathcal{O}_\tau(x)$ *é estritamente negativa então* $\mathcal{O}_\tau(x) \subset (-\infty, -1]$*.*

Demonstração

- Se $x > 0$, então é claro que $\frac{x}{2} > 0$ e $\frac{3x+1}{2} > 0$, portanto sua órbita é estritamente positiva.

- Se $x = 0$ é clara a proposição, sabemos $Q(0) = 0$, e $Q(-1) = -1$, já que Q é bijetora, temos que se $-1 < x < 0$, então Q(x) tem pelo menos uma coordenada que é 0 e uma igual a 1.

  Agora vamos ver por casos. Suponha que $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0$, então $-\frac{1}{8} \leq \frac{x}{2}$ e $\frac{1}{8} \leq \frac{3x+1}{2}$ assim sendo se o elemento é par seu iterado se mantem no intervalo, se ele e impar seu iterado sera positivo, já que Q tem uma coordenada igual a 1, em algum momento sua órbita sera positiva.

  Agora se $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{4}$, posto que $-\frac{1}{4} \leq \frac{x}{2}$ e $-\frac{1}{4} \leq \frac{3x+1}{2}$ pode-se dizer que seu próximo iterado é positivo, ou entra no caso anterior.

  Agora por ultimo seja $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, então $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2}$ e $-1 \leq \frac{3x+1}{2}$ então os iterados permanecerão no intervalo $(-1, \infty)$ até aparecer um zero e assim a nova iteração estará no intervalo $(-\frac{1}{2}, \infty)$ onde já sabemos que satisfaz o enunciado pelos passos anteriores.

- Isto é consequência dos itens anteriores.□

2.2.1 Alguns enunciados mais gerais

Nesta seção vamos trabalhar somente no conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$, com a topologia e a ordem induzida por $\mathbb{R}$.

Lembre que dados dois sistemas dinâmicos (X, f) e (Y, g), o conjunto de conjugação $\mathfrak{A}(f, g)$ é o conjunto dado por

$$\mathfrak{A}(f,g) = \{h : X \to Y,\ h \text{ homeomorfismo} \quad \text{conjugando} \quad f \ e \ g\}.$$

Lema 2.2.5 *Seja $V : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ a função definida por $x \mapsto -1-x$. Então, o conjunto de conjugação $\mathfrak{A}(\sigma, \sigma) = \{id, V\}$, onde id é a identidade.*

Demonstração. Ver [18].

É relevante para o desenvolvimento desta seção o entendimento da função $V : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ definida por

$$V(x_0, ..., x_n, ...) = (\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n, ...), \quad \overline{x}_i = \begin{cases} 1 & se \quad x_i = 0 \\ 0 & se \quad x_i = 1 \end{cases} = 1 - x_i.$$

Observe que as definições

$$V(x) = -1 - x \quad \text{e} \quad V(x) = -1 - x = -1 + (1 - x_0, 1 - x_1, ..., 1 - x_n, ...) + 1 = (\overline{x}_0, ..., \overline{x}_n, ...)$$

são equivalentes.

A tabela abaixo mostra alguns valores de $V(x)$ com $x \in \mathbb{Z}_2$.

x	V(x)
1	$01010101... = -\frac{2}{3}$
2	$10101010... = -\frac{1}{3}$
0	$1111111... = 1$
10	$10111010... = \frac{65}{3}$

Observe que V preserva $\mathbb{Q}^{odd}$ já que a imagem $V(x) = -1 - x$ de um número x representado por uma sequência eventualmente periódica é também eventualmente periódica.

Observação 2.2.2 *Se $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ então $V(x) \in \mathbb{Q}^{odd}$.*

Corolário 2.2.5 *Seja $\Omega = \mathcal{Q} \circ V \circ \mathcal{Q}^{-1}$. Então o conjunto de conjugação $\mathfrak{A}(\tau, \tau)$ coincide com $\{id, \Omega\}$.*

Demonstração. Suponha que existe $\psi \in \mathfrak{A}(\tau, \tau)$, $\psi \neq id$ e $\psi \neq \Omega$. Então $\mathcal{Q} \circ \psi \circ \mathcal{Q}^{-1} \in \mathfrak{A}(\sigma, \sigma)$ o que é uma contradição com o lema 2.2.5.

Muitas vezes é difícil de primeiro momento abordar uma conjectura, portanto é conveniente procurar enunciados equivalentes e ferramentas que deem um melhor entendimento do problema, esboçando um caminho possível para a demonstração.

A seguir anunciamos várias das conjecturas relacionadas com a conjectura de Collatz que tem surgido ao longo da historia.

a. Conjectura da periodicidade: Se x é racional então $\mathcal{Q}(x)$ é racional.

b. Conjectura da auto conjugação: Se x é racional então $\Omega(x)$ é racional, onde Ω é dada no corolário 2.2.5.

c. Conjectura das órbitas divergentes: Nos racionais não existe uma órbita divergente.

d. Conjectura dos ciclos triviais: O único ciclo nos inteiros positivos é $\{1, 2\}$.

Agora vamos explicar um pouco de cada uma destas conjecturas e ver o estado de cada uma delas.

a. Conjectura da periodicidade: Pelo teorema (2.2.2) temos que $\mathcal{Q}(\mathbb{Q}^{odd}) \subset \mathbb{Q}^{odd}$. A conjectura da periodicidade é sobre a validade do recíproco, isto é, será que se satisfaz a condição $\mathbb{Q}^{odd} \subset \mathcal{Q}(\mathbb{Q}^{odd})$? Caso positivo implicaria que os únicos pontos eventualmente periódicos são os elementos de $\mathbb{Q}^{odd}$.

b. Conjectura da auto conjugação: A conjectura anterior conjectura se $\mathbb{Q}^{odd} = \mathcal{Q}(\mathbb{Q}^{odd})$, já mostramos que se satisfaz $\mathbb{Q}^{odd} = V(\mathbb{Q}^{odd})$. Portanto é natural pergunta-se se $\mathbb{Q}^{odd} = \Omega(\mathbb{Q}^{odd})$?.

c. Conjectura das orbitas divergentes: Um enunciado mais geral do que pergunta-se se os elementos são eventualmente periódicos é perguntar-se os elementos não divergem, já que a não divergência não implica a convergência, posto que estas órbitas poderiam ser densas no espaço.

d. Conjectura dos ciclos triviais: Observemos que esta conjectura complementa a conjectura de periodicidade, posto que, se as conjecturas (a.) e (d.) são verdadeiras teríamos que todos os números naturais são eventualmente periódicos e invariantes, portanto teriam que convergir ao único ciclo nos naturais que seria o $\{1, 2\}$.

   Os estudos sobre esta conjectura (d.) em grande maioria são feitos computacionalmente, como dize Vitor Araújo. Se tem demonstrado para números muito grandes que não há cíclicos e que qualquer ciclo contido nos inteiros debe ter pelo menos 275.000 elementos, situação que parece contraditória com o fato que $\{1, 2\}$ somente tem dois elementos.

Teorema 2.2.4 *Os seguintes enunciados são equivalentes:*

a. Conjectura da periodicidade.

b. Conjectura da Auto conjugação.

c. Conjectura das orbitas divergentes.

Para lograr a demonstração deste fato, temos que desarrolhar teoria previa, mostrar desigualdades que nos ajudem.

Precisamos antes um pouco de notação para facilitar o enunciado das seguintes desigualidades.

Seja $k_n(x) = \sum_{m=0}^{m=n-1} \mathcal{Q}(x)$, i.e. A quantidade de elementos impares que tem o pedaço de orbita $\{x, \tau(x), ..., \tau^{n-1}(x)\}$

Teorema 2.2.5 *Sejam Ω um ciclo de τ com comprimento n. Então,*

$$log_2(3+M^{-1}) < \frac{n}{k_n(x)} < log_2(3+m^{-1}), \qquad onde\ M = Max\ \Omega\ e\ m = Min\ \Omega. \tag{2.6}$$

Antes de demostrar o teorema anterior, vamos mostrar um lema prévio para facilitar a Demonstração.

Lema 2.2.6 *Sejam Ω um τ-ciclo de comprimento k e $\Omega_1 \subset \Omega$ o subconjunto formado por todos os elementos impares de Ω. Se satisfaz a igualdade*

$$\prod_{n\in\Omega_1}(3+n^{-1}) = 2^k$$

.

Demonstração. De fato, tem-se que $\prod_{n\in\Omega} n = \prod_{n\in\Omega}\tau(n)$ já que τ é uma permutação dos elementos do Ω. Então dividindo temos

$$\prod_{n\in\Omega}\frac{\tau(n)}{n} = 1,$$

esta função tem a forma analítica seguinte:

$$\frac{\tau(n)}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \quad n\ é\ par \\ \frac{3+n^{-1}}{2} & se \quad n\ é\ impar \end{cases},$$

substituindo obtemos,

$$1 = \prod_{n\in\Omega}\frac{\tau(n)}{n} = \prod_{n\in\Omega_1}\frac{\tau(n)}{n}\prod_{n\in\Omega_1^c}\frac{\tau(n)}{n} = \prod_{n\in\Omega_1}\frac{(3+n^{-1})}{2^k},$$

portanto concluímos $\prod_{n\in\Omega_1}(3+n^{-1}) = 2^k$. □

Chegamos assim à demonstração do teorema (2.2.5).

Demonstração teorema (2.2.5). Considerando $M = Max\ \Omega$, $m = Min\ \Omega$, $k = \#\Omega$ e $k_n(x) = \#\Omega_1$, pelo lema anterior se satisfaz

$$(3+M^{-1})^{k_n(x)} \leqslant 2^k \leqslant (3+m^{-1})^{k_n(x)},$$

tomando logaritmos em ambos lados obtemos

$$k_n(x)log_2(3+M^{-1}) \leqslant k \leqslant k_n(x)log_2(3+m^{-1}),$$

portanto dividindo por $k_n(x)$ concluimos

$$log_2(3+M^{-1}) \leqslant \frac{k}{k_n(x)} \leqslant log_2(3+m^{-1}).\square$$

Lema 2.2.7 *Seja $x \in \mathcal{Q}^{odd}$, então para todo $j \in \mathbb{N}$*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{k_n(\tau^j(x))}{n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{k_n(x)}{n}$$

Demonstração. Dado $j \in \mathbb{N}$ e lembre que $0 \leq k_n(x) = \sum_{m=0}^{m=n-1} \mathcal{Q}(x)_m \leq n$. Já que as sequencias $\{k_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas, seja $L_1 = \liminf_{n\to\infty} \frac{k_n(\tau^j(x))}{n}$ e $L_2 = \liminf_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n}$, os quais estão contidos no intervalo $[0,1]$. Por outro lado, Seja $n > j$ e observemos,

$$\frac{k_n(x)}{n} = \frac{\sum_{m=0}^{m=n-1} \mathcal{Q}(x)_m}{n} = \frac{\sum_{m=0}^{m=j-1} \mathcal{Q}(x)_m + \sum_{m=j}^{m=n-1} \mathcal{Q}(x)}{n} = \tag{2.7}$$

$$\frac{\sum_{m=0}^{m=j-1} \mathcal{Q}(x)_m}{n} + \frac{\sum_{m=j}^{m=n-1} \mathcal{Q}(x)_m}{n-j}\frac{n-j}{n}$$

Agora observe que $\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=0}^{m=j-1} \mathcal{Q}(x)_m}{n} = 0$, já que a parte de cima é constante. Ademais, $\liminf_{n\to\infty} \frac{n-j}{n} = 1$. Podemos afirmar também que $\frac{k_{n-j}(x)}{n-j} = \frac{\sum_{m=j}^{m=n-1} \mathcal{Q}(x)_m}{n-j}$. E portanto, $\liminf_{n\to\infty} \frac{k_{n-j}(x)}{n-j} = \liminf_{n\to\infty} \frac{k_n(\tau^j(x))}{n}$. Assim considerando o limite em ambos os lado da igualdade, concluímos que:

$$\liminf \frac{k_n(\tau^j(x))}{n} = \liminf \frac{k_n(x)}{n}.\square$$

Lema 2.2.8 *Seja $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ com $O_\tau(x)$ estritamente positiva, então existe $min\,\mathcal{O}_\tau(x)$ e para todo m tal que $0 \leqslant m \leqslant min\{\mathcal{O}_\tau(x)\}$, se satisfaz:*

$$\frac{ln(2)}{ln(3+\frac{1}{m})} \leqslant \liminf \frac{k_n(x)}{n}$$

Demonstração Seja $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ tal que $\tau^k(x) > 0$ para todo k. Como a órbita é limitada inferiormente tem minimo, então seja m tal que $0 \leqslant m \leqslant minO_\tau(x)$. Definamos indutivamente a função.

$w^k(x) = w_{k-1} \circ ... \circ w_0(x)$, onde cada w_i se define da forma:

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & se \quad \mathcal{Q}(x)_i = 0 \\ \frac{3+m^{-1}}{2}x & se \quad \mathcal{Q}(x)_i = 1 \end{cases}.$$

Vejamos que $w^k(x) \geq \tau^k(x)$, o qual será demostrado por indução.

Tomando $k = 1$ tem-se duas possibilidades: Se x é par então é claro que $w^1(x) = \tau(x)$. Por outro lado, se x é impar pode-se observar que:

$$w^1(x) - \tau(x) = \frac{3+m^{-1}}{2}x - \frac{3x+1}{2} = \frac{x-m}{2m} \geq 0.$$

Supondo que se satisfaz a condição para $k = h$, Observemos que se cumpre para $k = h+1$, já que

$$w^{h+1}(x) = w^1(w^h(x)) \geq w^1(\tau^h(x)) \geq \tau(\tau^h(x)) = \tau^{h+1}(x),$$

como $k_n(x)$ é o numero de impares na n-semi órbita de x. Observamos que

$$m \leq \tau^n(x) \leq w^n(x) = \frac{3+m^{-1}}{2}^{k_n(x)} \frac{1}{2}^{n-k_n(x)} x = \frac{(3+m^{-1})^{k_n(x)}}{2^n}x,$$

aplicando logaritmo em ambos lados da igualdade, obtemos:

$$\frac{ln2}{ln(3+m^{-1})} - \frac{ln(\frac{x}{m})}{ln(3+\frac{1}{m})}\frac{1}{n} \leq \frac{k_n(x)}{n}$$

Observemos que $\liminf \frac{ln(\frac{x}{m})}{ln(3+\frac{1}{m})}\frac{1}{n} = 0$ e portanto, concluímos.

$$\frac{ln2}{ln(3+m^{-1})} \leq \liminf \frac{k_n(x)}{n}.\square$$

Lema 2.2.9 *Dado $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ com orbita divergente e positiva, então podemos afirmar que:*

$$\frac{ln(2)}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(x)}{n}$$

Demonstração Seja $x \in \mathbb{Z}_p$ tal que $O_\tau(x)$ é divergente, pelo corolário (2.2.3) dado $m > 0$ fixo $O_\tau(x) \cap [0, m]$ é finito, portanto existe j tal que $m \leqslant \tau^j(x)$ para todo $j > m$. O lema anterior (2.2.8) implica $\frac{ln2}{ln(3+m^{-1})} \leq \liminf \frac{k_n(\tau^j(x))}{n}$ e o lema (2.2.7) $\liminf \frac{k_n(\tau^j(x))}{n} = \liminf \frac{k_n(x)}{n}$.

Portanto aplicando limite concluímos

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{ln2}{ln(3+m^{-1})} = \frac{ln(2)}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(\tau^j(x))}{n}.\square$$

Lema 2.2.10 *Dado $x \in \mathbb{Q}^{odd}$, com $O_\tau(x)$ estritamente negativo, então:*

$$\frac{ln(2)}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(x)}{n}.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Q}^{odd}$, com $\mathcal{O}_\tau(x)$ estritamente negativo, seja $\mathcal{Q}(x)$ o vector de paridade da orbita de x. Defina a função $u^k(x) = u_{\mathcal{Q}(x)_{k-1}} \circ ... \circ u_{\mathcal{Q}(x)_0}(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. com :

$$u_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & se \quad \mathcal{Q}(x)_i = 0 \\ \frac{3}{2}x & se \quad \mathcal{Q}(x)_i = 1 \end{cases},$$

vejamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se satisfaz, $\tau^k(x) \geq u^k(x)$.

De fato, vamos demonstrar isso por indução; para $k = 1$.

Se $i = 0$ então $\tau(x) = u(x)$ e se $i = 1$

$$\tau(x) - u(x) = \frac{3x+1}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} > 0.$$

Supondo por hipótese que o enunciado se satisfaz, para $k = h$ vejamos que se satisfaz para $k = h + 1$, já que

$$u^{h+1}(x) = u_{\mathcal{Q}(x)_h}(u^h(x)) \leq u_{\mathcal{Q}(x)_h}(\tau^h(x)) \leq \tau(\tau^h(x)) = \tau^{h+1}(x),$$

posto que u_i é crescente.

Como vimos no lema (2.2.4), temos que -1 é cota superior deste tipo de orbitas, portanto.

$$-1 > \tau^n(x) \leq u^n(x) = (\frac{3}{2})^{k_n(x)}(\frac{1}{2})^{n-k_n(x)}x = \frac{3^{k_n(x)}}{2^n}x,$$

multiplicando por (-1) a inequação, aplicando logaritmo natural e organizando com um pouco de álgebra obtemos.

$$ln(1) \leq ln(-\frac{3^{k_n(x)}}{2^n}x)$$
$$0 \leq ln(3^{k_n(x)}) - ln(2^n) + ln(-x)$$
$$0 \leq (k_n(x))ln(3) - (n)ln(2) + ln(-x)$$
$$-\frac{(k_n(x))ln(3)}{n} \leq \frac{-(n)ln(2)}{n} + \frac{ln(-x)}{n}$$
$$-\frac{k_n(x)}{n} \leq \frac{-ln(2)}{ln(3)} + \frac{ln(-x)}{(n)ln(3)}$$
$$\frac{k_n(x)}{n} \geq \frac{ln(2)}{ln(3)} - \frac{ln(-x)}{(n)ln(3)},$$

observemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(-x)}{(n)ln(3)} = 0$, portanto concluímos que:

$$\frac{ln(2)}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(x)}{n}.\square$$

Teorema 2.2.6 *Dado $x \in \mathbb{Q}^{odd}$, divergente, então:*

$$\frac{ln(2)}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(x)}{n}.$$

Demonstração. Pelo lema (2.2.4), temos 3 casos.

1. Se a orbita é estritamente positiva, veja-se o lema (2.2.9).
2. Se a orbita é estritamente negativa, veja-se o lema anterior.
3. Se a orbita é eventualmente positiva, então existe um $m > 0$ tal que $\mathcal{O}_\tau(\tau^m(x))$ é estritamente positiva , visto isto junto ao lema(2.2.7), podemos afirmar então que

$$\frac{ln(2)}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(\tau^m(x))}{n} = \liminf \frac{k_n((x)}{n}$$

Já que estos são os únicos casos possíveis podemos concluir a nossa demonstração. $\square$

Observação 2.2.3 *Relembrando que $k_n(x)$ são a quantidade de 1 nas primeiras n-coordenadas de $\mathcal{Q}$. Então é obvio que $k_n(x) + k_n(\Omega(x)) = n$ posto que Ω somente inverte a paridade dos elementos das orbitas. Dividindo por n e tomando o limite inf, temos*

$$\liminf \frac{k_n(x)}{n} + \limsup \frac{k_n(\Omega(x))}{n} = 1.$$

Chegando assim ao objetivo desta parte da dissertação como é dar demonstração ao teorema fundamental da seção.

Demonstração do teorema (2.2.4).
Vamos demonstra isto do seguinte jeito $(a). \Rightarrow (b). \Rightarrow (c). \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Se Assumimos $Q(\mathbb{Q}^{odd}) \subset \mathbb{Q}^{odd}$ pela hipótese, e $\mathbb{Q}^{odd} \subset Q(\mathbb{Q}^{odd})$ pelo lema (2.2.2). Relembrando a observação (2.2.2) afirmamos $V(\mathbb{Q}^{odd}) = \mathbb{Q}^{odd}$; Portanto

$$\Omega(\mathbb{Q}^{odd}) = Q \circ V\ Q^{-1}(\mathbb{Q}^{odd}) \subset \mathbb{Q}^{odd}$$

.

$(b) \Rightarrow (c)$ Assumamos a conjectura de auto conjugação, isto é $\Omega(\mathbb{Q}^{odd}) \subset \mathbb{Q}^{odd}$. Seja um $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ com divergente. Sabemos que $O_\tau(x) \subset \mathbb{Q}^{odd}$, como Ω conjuga envia orbitas divergentes em orbitas divergentes. Portanto $\Omega(x)$ tem orbita divergente. Pelo teorema anterior, obtemos

$$\frac{ln2}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(x)}{n} \text{ e } \frac{ln2}{ln(3)} \leq \liminf \frac{k_n(\Omega(x))}{n},$$

concluindo assim pela observação (2.2.3) que

$$1 = \liminf \frac{k_n(\Omega(x))}{n} + \limsup \frac{k_n(x)}{n} =\geq \frac{ln2}{ln(3)} + \frac{ln2}{ln(3)} > 1$$

o que é uma contradição, e portanto não existe uma orbita divergente no conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Se assumimos que não existem orbitas divergentes nos racionais, então existem duas possibilidades serem convergentes a um ciclo ou ser densas; Mais não podem ser densas pelo lema (2.2.1), portanto as orbitas debem ser eventualmente periódicas. □

Finalmente como o anunciamos anteriormente vamos a demostrar que o conjunto $\mathbb{Q}^{odd}$ e a bacia do sistema mensurável $\{\tau, \mathbb{Z}_2, \mathcal{A}, \mu\}$ são disjuntos, fato que não demonstra que a conjectura seja afirmativa, somente respalda uma possível resposta verdadeira.

Teorema 2.2.7 *Para todo $x \in \mathbb{Q}^{odd}$ temos $x \notin B(\mu)$*

Demonstração. Se $x = \frac{p}{q}$ com q sendo impar, então sua orbita é eventualmente periódica ou divergente.

Se $\mathcal{O}_\tau(x)$ é finita claramente que não pode pertencer ao $B(\mu)$.

Se $\mathcal{O}_\tau(x)$ é divergente e $x \in B(\mu)$, seja o cilindro $B = C_0^0(1)$ que fixa 1 na primeiro componente, então $k_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_B \tau^n(x)$. Portanto, o teorema (2.2.6) implica

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_B \tau^n(x) \geq \frac{ln2}{ln3}$$

sendo esta uma contradição. □

Capítulo 3

Generalização $AX + B$

Nesta seção vamos dar mais generalidade à conjectura de Collatz de uma forma alternativa à desarrolhada na seção anterior, vamos definir a seguinte família de funções τ_a. Para ver como reage a conjectura a pequenas variações nos parâmetros.

Definição 3.0.1 *Dado $a \in \mathbb{N}$ ímpar. Seja a função $\tau_a : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ tal que,*

$$\tau_a(x) = \begin{cases} (ax+1)/2 & se \quad x \text{ é impar} \\ x/2 & se \quad x \text{ é par} \end{cases}.$$

E nos fazemos a mesma pergunta.

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{N}\ 1 \leq x \text{ existe um } k > 0 \text{ tal que } \tau_a^k(x) = 1? \tag{3.1}$$

Afirmação 3.0.1 *Para $a = 1$ a pergunta anterior (3.1) é verdadeira.*

Demonstração. Primeiro observamos que $x = 1$ é ponto fixo. E dado $x \in \mathbb{N}$ tal que $1 < x$, temos dois casos:

1. x é par, então $1 \leq x/2 = \tau_a(x) < x$.
2. x é impar portanto $1 \leq (x+1)/2 = \tau_a(x) < x$.

Portanto podemos concluir que $\tau_a(x) < x$ para todo $x > 1$. Portanto $\{\tau_a^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente decrescente limitada inferiormente por 1. Já que a sequencia pode pegar um numero finito de valores $\{1, 2, ..., x\}$, tem que atingir o 1. □

Observação 3.0.1 *Por outro lado, para $a = 5$ temos uma resposta negativa para a pergunta feita em (3.1), já que $\mathcal{O}_{\tau_5}(13)$ é finito e disjunto a $\mathcal{O}_{\tau_5}(1)$. Visto que*

$$\mathcal{O}_{\tau_5}(13) = \{13, 33, 83, 208, 104, 52, 26\} \ \ e \ \ \mathcal{O}_{\tau_5}(1) = \{1, 3, 8, 4, 2\}$$

Logo vemos que o problema radica no 3, já que se mexemos um pouco para abaixo ou para acima a conjetura pode ser verdadeira o falsa, e não presenta muita dificuldade para sua demonstração.

Note-se embora não seja verdadeira a conjectura para todos os sistemas $(\mathbb{Z}_2, \tau_a)$ quando variamos o parâmetro a, estes sistemas sempre tem a mesma dinâmica topológica. de fato,

Podemos conjugar os τ_a ao deslocamento σ mediante as funções $\mathcal{Q}_a : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ tal que,

$$\mathcal{Q}_a(x)_i = \begin{cases} 1 & se \quad \tau^i(x) \text{ é } impar \\ 0 & se \quad \tau^i(x) \text{ é } par \end{cases} .$$

definidas de forma similar à definição (2.2.2).

Teorema 3.0.1 *A função $\mathcal{Q}_a$ conjuga τ_a com σ.*

Demonstração. O primeiro a ser notado é que se satisfaz a igualdade,

$$\mathcal{Q}_a \circ \tau_a = \sigma \circ \mathcal{Q}_a \tag{3.2}$$

Como demonstra a seguinte cadeia de igualdades. Seja $x \in \mathbb{Z}_2$ se satisfaz,

$$\mathcal{Q}_a(\tau_a(x))_i = \tau_a^i(\tau_a(x))_0 = \tau_a^{i+1}(x)_0 = \mathcal{Q}_a(x)_{i+1} = \sigma(\mathcal{Q}_a(x))_i. \tag{3.3}$$

Para facilitar a demonstração da injetiva, sobrejetiva, e continuidade de $\mathcal{Q}_a$ previamente serão provadas algumas afirmações.

Afirmação 3.0.2 *Dados $x, y \in \mathbb{Z}_2$ e $k \in \mathbb{N}$. Se satisfazem as equivalências,*

- *$x \equiv y(mod\ 2^k)$ se e somente se $x_0 = y_0$ e $\sigma(x) \equiv \sigma(y)(mod\ 2^{k-1})$.*
- *$x \equiv y(mod\ 2^k)$ se e somente se $x_0 = y_0$ e $\tau_a(x) \equiv \tau_a(y)(mod\ 2^{k-1})$.*

Demonstração.

(a) Sejam $x, y \in \mathbb{Z}_2$ e $k \in \mathbb{N}$ e suponha que $x \equiv y(mod\ 2^k)$, então $x_0 = y_0$. Além disso, podemos escrever $x = x_0 + 2\sigma(x)$ e $z = z_0 + 2\sigma(z)$, portanto substituindo obtemos $2\sigma(x) \equiv 2\sigma(y)(mod\ 2^k)$, de onde resulta claro que

$$x_0 = y_0 \text{ e } \sigma(x) \equiv \sigma(y)(mod\ 2^{k-1}).$$

Por outro lado, suponha $x_0 = y_0$ e $\sigma(x) \equiv \sigma(y)(mod\ 2^{k-1})$, então $2\sigma(x) \equiv 2\sigma(y)(mod\ 2^k)$, portanto somando x_0, z_0 respectivamente a esta equivalências temos que $x \equiv y(mod\ 2^k)$.

(b) Sejam $x, y \in \mathbb{Z}_2$ e $k \in \mathbb{N}$ se assumimos qualquer das duas proposições obtemos a igualdade $x_0 = y_0$, e temos dois casos,

- Se $x_0 = y_0 = 0$ então $\sigma(y) = \tau_a(y)$ e $\sigma(x) = \tau_a(x)$ a proposição se reduz á afirmação anterior ao item (a).
- Se $x_0 = y_0 = 1$ então nomeemos $\tau(x) = z$ e $\tau(y) = w$. Logo substituindo obtemos $x = (2z - 1)/a$ e $y = (2w - 1)/a$, assim subtraindo obtemos $x - y = 2(z - w)/a$, dessa forma, já que 2 não divide a a é claro que

$$x \equiv y(mod\ 2^k) \text{ se e somente se } z \equiv w\,(mod\ 2^{k-1}). \square$$

Afirmação 3.0.3 *Para todo $x, y \in \mathbb{Z}_p$ e $k \in \mathbb{N}$, se satisfaz a seguinte equivalência:*

$$x \equiv y(mod\ 2^k) \text{ se e somente se } \mathcal{Q}_a(x) \equiv Q_a(y)(mod\ 2^k). \tag{3.4}$$

Demonstração. A Demonstração deste fato é feita por indução sobre k.
Se $k = 0$ observe-se $x \equiv y(mod\ 2^0)$ implica $x_0 = y_0$. Visto isso, como $\mathcal{Q}_a(x)_0 = x_0$ e $\mathcal{Q}_a(y)_0 = y_0$ obtemos que $\mathcal{Q}_a(y)_0 = \mathcal{Q}_a(x)_0$ concluindo $\mathcal{Q}_a(x) \equiv \mathcal{Q}_a(y)(mod\ 2^0)$.

Agora suponha a hipótese de indução para $k = n-1$, vamos demonstrar que é verdadeira para $k = n$.
Se $x \equiv y(mod\ 2^n)$ pela afirmação anterior observamos que $x_0 = y_0$ e $\tau_a(x) \equiv \tau_a(y)(mod\ 2^{n-1})$. Pela hipótese de indução obtemos $Q_a(\tau_a(x)) \equiv Q_a(\tau_a(y))(mod\ 2^{n-1})$. Pela igualdade (3.2) podemos afirmar $\sigma(Q_a(x)) \equiv \sigma(Q_a(y))(mod\ 2^{n-1})$, juntamente com o fato de $\mathcal{Q}_a(x)_0 = x_0$ e $\mathcal{Q}_a(y)_0 = y_0$. Pela afirmação (3.0.2) concluímos $\mathcal{Q}_a(x) \equiv \mathcal{Q}_a(y)(mod\ 2^n)$. □

Finalmente chegamos a nosso objetivo que é demonstrar a conjugação.

Continuação da demonstração teorema (teo6). Vejamos primeiro que $\mathcal{Q}_a$ é injetiva. Suponha que $\mathcal{Q}_a(x) = \mathcal{Q}_a(y)$ então para todo $k \geq 0$ tem-se $Q_a(x) \equiv Q_a(y)(mod\ 2^k)$ e portanto $x \equiv y(mod\ 2^k), \forall k \in \mathbb{N}$. Já que, se definimos $z_n = x(mod\ 2^n)$ a qual é sequência coerente que converge a um único ponto, concluindo assim que $x = y$.

Vejamos agora que Q_a é sobrejetiva. Seja $y \in \mathbb{Q}^{odd}$ então geremos a sequencia coerente $y^n = y(mod\ 2^n) \in \mathbb{Z}_2$. Não é difícil encontrar números x_n os quais $\mathcal{Q}_a(x_n) = y^n$. Visto que, é encontrar uma solução x_n da equação

$$\tilde{\tau}_{a,y_0^n}(...\tilde{\tau}_{a,y_{n_1}^n}(\tilde{\tau}_{a,y_n^n}(y))) = 0$$

a sequencia x_n é coerente e portanto converge a x quem satisfaz $\mathcal{Q}_a(x) = y$ visto que $\mathcal{Q}_a(x) \equiv y(mod\ 2^k)$.

Para terminar, notem que a continuidade de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}^{-1}$ é consequencia da afirmação (), já que mostra que a função $\mathcal{Q}$ envia a bola $B_r(x)$ em $B_r(\mathcal{Q}(x))$, respectivamente para $\mathcal{Q}^{-1}$.

Com isto demonstramos que $\mathcal{Q}$ é um homeomorfismo juntamente com a equação $\mathcal{Q}_a \circ \tau_a = \sigma \circ \mathcal{Q}_a$ que foi provada em (3.3), demostra que $\mathcal{Q}$ conjuga τ com σ. □

Corolário 3.0.1 *Dado a impar. O sistema $(\mathbb{Z}_2, \tau_a)$ é top. misturador, top. transitivo, sensível a condiciones ideias. Mas não é top. minimal.*

Este resultado é imediato a partir do lema (1.2.3), feito nos preliminares.

Observemos que a função τ_a é mixing e portanto ergódica, já que na demonstração do teorema (2.2.3) não se utilizam propriedades intrínsecas do numero 3 além de ser numero impar. portanto esta demonstração pode ser estendida sem dificuldade ate o caso geral.

Observação 3.0.2 *Razonando do mesmo jeito como na seção anterior, podemos observar que τ_a não é bijetora posto que cada imagem tem duas pre-imagens, portanto podemos definir uma "pseudo-inversa"*

$$\tilde{\tau}_{a,0}(y) = 2y \text{ e } \tilde{\tau}_{a,1}(y) = (2y-1)/a \tag{3.5}$$

Lema 3.0.1 *Dado $a \in \mathbb{Z}_2$ impar. Então $x \in \mathbb{Z}_2$ é eventualmente periódico com respeito a τ_a se, e somente se, $\mathcal{Q}_a(x)$ é racional.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja $x \in \mathbb{Z}_2$ eventualmente periódico, então existem k, l inteiros positivos tal que $\forall i \geq l$ tem-se $\tau_a^{i+k}(x)_0 = \tau_a^i(x)_0$. Pela definição de $\mathcal{Q}_a$ obtemos $\mathcal{Q}_a(x)_i = \mathcal{Q}_a(x)_{i+k}$, logo $\mathcal{Q}_a(x)$ é eventualmente periódico e portanto $\mathcal{Q}_a(x) \in \mathbb{Q}^{odd}$ pelo lema (1.1.6).

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{Q}_a(x)$ eventualmente periódico, então existem k, l inteiros positivos tal que $\forall i \geq l$ tem-se $\mathcal{Q}_a(x)_i = \mathcal{Q}_a(x)_{i+k}$ portanto obtemos $\sigma^i(\mathcal{Q}_a(x)) = \sigma^{i+k}(\mathcal{Q}_a(x))$ utilizando a conjugação temos $\mathcal{Q}_a(\tau^i(x)) = \mathcal{Q}_a(\tau^{i+k}(x))$. já que $\mathcal{Q}$ é bijeção podendo concluir que $\tau^i(x) = \tau^{i+k}(x)$ então x é eventualmente periódico com respeito a τ_a. □

Lema 3.0.2 *Dados $x, y \in \mathbb{Z}_2$, tal que se satisfaz $x = \tilde{\tau}_{a,h_1}(\tilde{\tau}_{a,h_2}(...\tilde{\tau}_{a,h_i}(y)))$, então x é da forma $2^k By + D$ onde $B, D \in \mathbb{Q}^{odd}$.*

Demonstração. De fato, vamos mostrar este fato por indução sobre i.
Para $i = 1$ é claro pela definição de função $\tilde{\tau}_{a,h_1}$ feita em (3.5).

Agora suponha a hipótese para $i = k-1$, vejamos que se satisfaz o enunciado para $i = k$. Por hipótese de indução se satisfaz a igualdade $x = \tilde{\tau}_{a,h_1}(2^k By + D)$, portanto temos dois caso:

- $h_1 = 0$, então $x = 2^{k+1}By + 2D$
- $h_1 = 1$, portanto $x = 2^{k+1}\frac{B}{a}y + (2\frac{D}{a} - 1)$

Já que B, D são racionais, utilizando o lema (1.1.7) concluímos que $2\frac{D}{a} - 1, \frac{B}{a} \in \mathbb{Q}^{odd}$. Portanto em ambos os casos podemos concluir que $x = 2^k\tilde{B}y + \tilde{D}$ com $\tilde{B}, \tilde{D} \in \mathbb{Q}^{odd}$.

Teorema 3.0.2 *Seja $x \in \mathbb{Z}_2$, se $\mathcal{Q}_a(x)$ é racional então x é racional.*

Demonstração. lembrando o resultado do lema (3.0.1), sabemos que se $Q_a(x)$ é racional então x é eventualmente periódico com respeito a τ_a. Portanto existem k, l inteiros positivos tal que $\forall i \geq l$ se satisfaz

$$w = \tau_a^{i+k}(x) = \tau_a^i(x),$$

obtendo que w é periódico e por tanto $\mathcal{Q}(w)$ é periódico de período k.

Visto isso, sejam $h_i = \mathcal{Q}(w)_i$ como $i = 0, 1, ..., k-1$, aplicando k vezes $\tilde{\tau}_{a,h_m}$ deste modo

$$w = \tilde{\tau}_{a,h_1}(\tilde{\tau}_{a,h_2}(...\tilde{\tau}_{a,h_{k-1}}(w)))$$

e utilizando o lema anterior existem H, T racionais tais que $w = 2^k Hw + T$ resolvendo a equação temos que $w = \frac{T}{1-2^k H} \in \mathbb{Q}^{odd}$. Por outro lado,

$$x = \tilde{\tau}_{a,\mathcal{Q}_a(x)_1}(\tilde{\tau}_{a,\mathcal{Q}_a(x)_2}(...\tilde{\tau}_{a,\mathcal{Q}_a(x)_i}(w)))$$

de onde podemos concluir que x é racional.□

Por ultimo, não só esta família τ_a de funções esta conjugada e tem a mesma dinâmica. Vamos dar um pouco mais de generalidade na função deixando variar o número 1. E ver que de fato estas funções tem as mesmas propriedades dinâmicas das funções anteriores.

Definição 3.0.2 *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ impares seja $\tau_{a,b} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ tal que,*

$$\tau_{a,b}(x) = \begin{cases} (ax+b)/2 & se \quad x \text{ é impar} \\ x/2 & se \quad x \text{ é par} \end{cases}.$$

E seja a função $\mu_b : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ com $\mu_b(x) = bx$.
Vejamos que μ_b conjuga $\tau_{a,b}$ com τ_a.

Lema 3.0.3 *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ impares, se satisfaz $\tau_{a,b} \circ \mu_b = \mu_b \circ \tau_a$ e μ_b é bijeção.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Z}_2$, então temos dois casos.

caso 1. Se x é impar, então

$$\tau_{a,b} \circ \mu_b(x) = \tau_{a,b}(bx) = b(ax+1)/2 = \mu_b \circ \tau_a(x)$$

caso 2. Se x é par, então

$$\tau_{a,b} \circ \mu_b(x) = \tau_{a,b}(bx) = b\ x/2 = \mu_b \circ \tau_a(x)$$

Portanto, $\tau_{a,b} \circ \mu_b = \mu_b \circ \tau_a$.

A função μ_b é bijeção. De fato, ela é injetora já que a equação $b(x-y) = 0$ se satisfaz se $(x-y) = 0$, por outro lado e sobrejetora lembrando que se $x \in \mathbb{Z}_2$ então $\frac{x}{b} \in \mathbb{Z}_2$.

Observação 3.0.3 *Isto demonstra que os sistemas $\tau_{a,b}$ tem a mesma dinâmica topológica. Não é difícil demonstrar que μ_b satisfaz uma equivalência similar à (3.4), i.e.,*

$$x \equiv y (mod\ 2^k) \text{ se e somente se } \mu_b(x) \equiv \mu_b(y) (mod\ 2^k).$$

Já que b é impar. O que demonstra que μ_b preserva a medida de Bernoulli. E seguindo a mesma argumentação da demonstração do teorema (2.2.3) podemos concluir que, para todo par $a, b \in \mathbb{N}$ impares, a função $\tau_{a,b}$ é mixing.

Finalmente assim demonstrando que todos os sistemas induzido pelas função $\tau_{a,b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$ impares possuem as mesmas propriedades topológicas e ergódicas o que da dicas sobre a dinâmica da função. Mas não revela a totalidade da verdade com respeito a conjectura. Já que o estudo da conjectura desde o ponto de vista dinâmico não codifica a verdadeira importância do parâmetro "$a = 3$".

O estudo deste tipo de extensões é bastante antigo, Alguns artigos bastante importantes para afundar neste tema são.

primeiro o artigo [7] onde os autores consideram o problema "$3X + d$"e conjectura que. Para todo numero impar $d \geq -1$ não divisível por 3, toda orbita inteira é finita.

Outra generalização mostrada Aquim foi a abordada em [8], onde demonstra que para $a = 7$ não existem ciclos triviais.

E a ultima referencia que vamos à abordar é [9] onde ele demonstra que para todo a sendo numero de Wieferich a conjectura é falsa , onde, Um numero de Wieferich é um numero impar tal que $2^{l(q)} \equiv 1\ mod\ q^2$, com $l(q)$ o ordem de 2 em $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Apêndice A

Teoria da integração e medida

Vamos dar tratamento neste apêndice a alguns temas importantes da teoria da medida para facilitar o entendimento e à completitude do trabalho.

Para dar formalidade à definição de espaço mensurável vamos dar a definição de σ-álgebra e $\sigma - aditividade$.

Dado um conjunto A. $\mathcal{B}$ um subconjunto do conjunto potencia de A, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A)$ se diz σ-álgebra de A se:

(A) O conjunto vazio pertence a $\mathcal{B}$, i.e., $\emptyset \in \mathcal{B}$.

(B) Se $A \in \mathcal{B}$ então seu complementar também pertence a $\mathcal{B}$, i.e., $A^c \in \mathcal{B}$.

(C) Dada uma coleção enumerável de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ então a união também pertence a $\mathcal{B}$, i.e.,$(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \in \mathcal{B}$.

Dizemos que o conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A)$ é álgebra se satisfaz as condições (A), (B) totalmente e a condição (C) somente para coleções finitas.

Definimos aditividade e σ-aditividade.

Dado X um conjunto, $\mathcal{B}$ uma $\sigma - algebra$, e uma função $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, 1]$. Dizemos que μ é aditiva se para $\{U_1, ..., U_n\}$ um conjunto finito de elementos disjuntos de $\mathcal{B}$ se satisfaz a igualdade

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(U_i)$$

Além disso dizemos que é σ-aditiva se para toda $\{U_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ sequencia de elementos disjuntos de $\mathcal{B}$ se satisfaz a igualdade

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i).$$

Agora para o maior entendimento dos teoremas de teoria ergódica é importante definir alguns tipos de funções importantes na teoria da medida.

O primeiro a ser definido são as funções que preservam os conjuntos medíveis.

Definição A.0.1 *Sejam $(X, \mathcal{B})$ e $(M, \mathcal{A})$ dois espaços mensuráveis. Dada uma função $f : M \to X$ dizemos que a função é mensurável se para todo $E \in \mathcal{B}$ tem-se $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$*

Uma σ- álgebra gerada pelos conjuntos abertos se diz Boreliana, observemos que em uma σ-álgebra Boreliana as funções continuas são mensuráveis.

A seguir vamos definir o que é uma função integrável, conceito bastante importante para entender os teoremas relacionados com a teoria ergódica, parte relevante deste trabalho.

Definição A.0.2 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, A conjunto mensurável, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Vamos definir a integral de Lebesque:*

- *Uma função $f = a\chi_E$, com E mensurável e a numero real positivo, se diz caraterística. E definimos $\int_A f d\mu := a\mu(E \cap A)$.*
- *Uma função $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$, com E_i medíveis, suma de caraterísticas se diz simples. E definimos $\int_A f d\mu := C_i \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap A)$.*
- *Uma função $f : X \to [0, \infty)$ se diz positiva, e definimos $\int_A f d\mu := \sup_{s \leq f} \int_A s \, d\mu$, com o supremo sobre todas as funções simples menores que f.*
- *Dada uma função f definimos $f^+ = max\{0, f\}$ e $f^- = -\, min\{0, f\}$. Então estas duas funções positivas satisfazem $\int_X f^+ d\mu < \infty$ e $\int_X f^- d\mu < \infty$ dizemos que f é integrável, e estabelecemos $\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.*

O conjunto das funções integrável denota-se $L^1(\mu)$.

Por ultimo, vamos definir uma "igualdade" em teoria da medida.

Definição A.0.3 *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida dizemos que uma propriedade P(x) é valida para μ-quase toda $x \in X$ se $\mu(\{x : \ x$ não satisfaz P(x)$\}) = 0$.*

Bibliografia

[1] Akin E., *Why Is the 3X + 1 Problem Hard?*, Chapel Hill Ergodic Theory Workshops, USA, 2004.

[2] Wirschings G.J., *The Dynamical System Generated by the 3n+1 Function*, Springer, Germany, 1998.

[3] Lagarias J.C. *The 3x+1 Problem and its Generalizations*, Am. Math. Mon, 1985.

[4] Monks K. e Yazinski J. *The autoconjugacy of the 3x+1 function*, Springer, 2002.

[5] Araujo V. *O problema* $3X + 1$, manuscrito não publicado.

[6] Terras R. *A stopping time problem on the postive integers*, Acta Arithmetica,USA, 1976.

[7] Belaga E. e Mignotte M. *Embedding the 3x + 1 Conjecture in a 3x + d Context*, Experimental Mathematics, 1998.

[8] Steiner R. *On the "QX + 1 problem", Q odd.*, Fibonacci Quarterly, 1981.

[9] Franco Z. e Pomerance C. *On a Conjecture of Crandall concerning the qx + 1 Problem*, Mathematics of Computation, 1995.

[10] Baker A. *An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis*, School of Math. y Stat., Scotland, 2011.

[11] Quadros F. *Primeiros passos p-adicos*, 17 coloquio brasileiro da matemática, Impa, Rio de Janeiro, 1989.

[12] Ribes L. e Zalesskii P. *Profinite Groups*, Springer, 2010.

[13] Castro A. *Teoria da medida* , projeto Euclides,impa, 2004.

[14] Fernandez R. *Introdução à teoria da medida.*, projeto Euclides,impa, 2002.

[15] Katok A. e Hasselblatt B. *Introduction to the Modern theory of Dynamical system*, Cambridge, 1995.

[16] Katok A. e Hasselblatt B. *A first course in dinamics*, Cambridge, 2003.

[17] Devaney R. *An introduction to chaotic Dynamical system*, Addison-Wesley P. company, 1994.

[18] Hedlund G. *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Systems theory, 1969.

[19] Oliviera K. e Viana M. *Fundamentos de teoria ergodica*, SBM, 2014.

[20] Walters P. *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, 1982.

[21] Mañé R. *Introdução á teoria ergódica*, Projeto Euclides, 2008.

[22] Guy R. *Don't try to solve these problems!*, American mathematical monthly, 1983.