



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Fidel Cuba Balvin

Dissertação

Orientador: Pedro Gamboa Romero

Co-orientador: Xavier Carvajal Paredes

Teoria da Boa Colocação Local de um Sistema Tipo - KdV.

Rio de Janeiro

17 de Agosto de 2018

Teoria da Boa Colocação Local de um Sistema Tipo - KdV.

Fidel Cuba Balvin

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Pedro Gamboa Romero
Co-orientador: Xavier Carvajal Paredes

Rio de Janeiro

17 de Agosto de 2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Fidel Cuba Balvin.

Teoria da Boa Colocação Local de um Sistema Tipo - KdV.

Orientador: Pedro Gamboa Romero

Co-orientador: Xavier Carvajal Paredes

Dissertação - UFRJ / IM / Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2018.

I. Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática.

II. Título:

- 1) Preliminares
- 2) Boa Colocação do Problema não linear
- 3) Má Colocação do Problema não linear

III. Rio de Janeiro, UFRJ / IM - 2018

Teoria da Boa Colocação Local de um Sistema Tipo - KdV.

Fidel Cuba Balvin

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Dr. PEDRO GAMBOA ROMERO - UFRJ

Co-orientador, Dr. XAVIER CARVAJAL PAREDES - UFRJ

Dr. Mahendra Prasad Panthee - UNICAMP

Dr. Adán José Corcho Fernández - UFRJ

Rio de Janeiro

17 de Agosto de 2018

Dedicado para meus pais Fidel e Rosa

Agradecimentos

Eu compartilhei momentos bons e agradáveis com muitas pessoas ao longo dos anos. Agradeço :

- À Universidade Federal do Rio de Janeiro por me dar abrigo e lições que aprendi nela. Além disso, por me dar a oportunidade e o seu voto de confiança para fazer o mestrado.
- Aos professores Pedro e Xavier por sua orientação, dedicação, confiança e amizade. Obrigado pelos conhecimentos transmitidos.
- Aos colegas da Pós-graduação, em especial todos meus amigos peruanos e brasileiros.
- À CAPES, pela ajuda financeira.
- Por fim, agradeço todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Conteúdo

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Os Espaços L^p	1
1.2 Distribuições Temperadas	2
1.3 Espaços de Sobolev	4
1.4 Espaços de Bourgain	5
2 Boa Colocação do Problema não linear	6
2.1 Introdução	6
2.2 Estimativas Lineares	7
2.3 Estimativas Bilineares	22
2.4 Teorema Principal	35
3 Má Colocação do Problema não linear	38
3.1 Introdução	38
3.2 Teorema Principal	41
Apêndice A	47
Referências Bibliográficas	48

Resumo

Neste trabalho, estudamos a boa colocação local para um sistema acoplado tipo KdV em toda a reta real. A parte principal deste trabalho é o resultado de existência e unicidade local nos espaços $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, para $s \geq 0$. Além disso, mostramos que o sistema acoplado, não é bem posto nos espaços $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, para $s < 0$.

Palavras chave: Espaços de Bourgain, Boa Colocação Local, Má Colocação.

Abstract

In this work, we studied the local well-posedness for a coupled system of KdV-type in whole real line. The main part of this work is the result of local existence and uniqueness in the spaces $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, for $s \geq 0$. In addition, we show that the coupled system, is ill-posed in the spaces $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, for $s < 0$.

Keywords: Bougain Spaces, Local Well-posedness, Ill-posedness.

Introdução

Neste trabalho, nós consideramos a boa colocação local do sistema acoplado tipo KdV da forma :

$$\begin{cases} u_t + a_{11}u_{xxx} + a_{12}v_{xxx} + b_1uu_x + b_2uv_x + b_3u_xv + b_4vv_x = 0 \\ v_t + a_{21}u_{xxx} + a_{22}v_{xxx} + b_5uu_x + b_6uv_x + b_7u_xv + b_8vv_x = 0 \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (1)$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é auto-adjunto e não singular, u e v são funções de valores reais. Agora, escrevemos A como $A = M^{-1}DM$, onde $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ com $d_j \in \mathbb{R} \setminus 0$ e M é uma matriz ortogonal. Fazendo a mudança de variável $M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x, d_1^{-1}t) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, então pode-se reduzir (1) para :

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + \tilde{b}_1uu_x + \tilde{b}_2uv_x + \tilde{b}_3u_xv + \tilde{b}_4vv_x = 0 \\ v_t + \alpha v_{xxx} + \tilde{b}_5uu_x + \tilde{b}_6uv_x + \tilde{b}_7u_xv + \tilde{b}_8vv_x = 0 \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0, v_0), \end{cases} \quad (2)$$

onde $\alpha = \frac{d_2}{d_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}_\lambda \times \mathbb{R}$, com $\mathbb{T}_\lambda = [0, 2\pi\lambda)$ para algum $\lambda > 0$.

Note que nós não consideramos o caso $\alpha = 0$ (*i.e.* $d_2 = 0$) ou $\alpha = \pm\infty$ (*i.e.* $d_1 = 0$), já que (2) não é dispersiva nestes casos.

Quando $\alpha = 1$, as técnicas básicas desenvolvidas por Kening-Ponce-Vega [4] em (1996) para a boa colocação local da KdV poder ser aplicado a (2), tomando os valores $\tilde{b}_2 = \tilde{b}_3$ e $\tilde{b}_6 = \tilde{b}_7$ para esta afirmação, gerando assim a boa colocação local de (2) em $H^{-\frac{3}{4}+(\mathbb{R})} \times H^{-\frac{3}{4}+(\mathbb{R})}$ e $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}_\lambda) \times H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}_\lambda)$. Quando $\alpha \neq 1$, se prova que existe um intervalo I_0 tal que ocorrem ressonâncias particulares para $\alpha \in I_0 \setminus \{1\}$, e que as regularidades para a boa colocação local de (2), precisam ser maiores que aquelas para $\alpha = 1$.

Em (2005), Majda e Biello obtiveram um modelo assintotico simplificado para estudar as interações ressonantes não-lineares de duas ondas Rossby longas em presença de fluxos adequados. Trata-se de um sistema que tem estrutura de um par de equações de Korteweg de Vries (KdV) acopladas com efeitos dispersivos e não lineares

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uv_x = 0 \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0 \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e (u_0, v_0) são os dados iniciais.

Nós consideramos o problema de Cauchy associado a (3) com $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$.

Enquanto nós afirmamos e provamos nossos resultados somente para $0 < \alpha \leq 1$ para a razão física

mencionada abaixo.

De agora em diante nos referimos a (3) como o Sistema Majda-Biello. Em [11], os valores de α são numericamente determinados e eles são 0.899, 0.960, e 0.980 para diferentes ondas Rossby equatorial. Além do sistema Majda-Biello, existem varios sistemas deste tipo : O sistema Gear-Grimshaw [14], o sistema Hirota-Satsuma [15], entre outros mais.

Primeiro, nós revisamos os resultados recentes de boa colocação para a equação KdV :

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}) \text{ or } H^s(\mathbb{T}). \end{cases} \quad (4)$$

Bourgain [12] provou a boa colocação local em $L^2(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{T})$ via o principio de contração da aplicação. Kening-Ponce-Vega [4] melhoraram os resultados de Bourgain e eles estabeleceram a boa colocação local em $H^{-\frac{3}{4}+}(\mathbb{R})$ e $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$. Colliander-Keel-Staffilani-Tao [16] provaram os correspondentes resultados de boa colocação global via o I -metodo. Mais recentemente, Christ-Colliander-Tao [17] provaram a boa colocação local em $H^{-\frac{3}{4}+}(\mathbb{R})$ via a transformada de Miura modificada. Kappeler-Topalov [18] provaram a boa colocação global da KdV em $H^{-1}(\mathbb{T})$, usando a integrabilidade completa da equação.

Em [12], Bourgain introduziu um novo espaço-tempo ponderado de Sobolev, é o espaço $X^{s,b}$, cuja norma é dada por

$$\|u\|_{X^{s,b}(Z \times \mathbb{R})} = \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^b \widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L^2_{\xi, \tau}(Z^* \times \mathbb{R})},$$

onde $\langle \cdot \rangle = 1 + |\cdot|$, e o domínio espacial de Fourier é $Z^* = \mathbb{R}$ se o domínio espacial $Z = \mathbb{R}$, e $Z^* = Z \setminus \lambda$ se $Z = \mathbb{T}_\lambda$. Kening-Ponce-Vega [4] provaram que a estimativa bilinear aguda

$$\|\partial_x(uv)\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \|v\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \quad (5)$$

se cumpre para $s > -\frac{3}{4}$ e $b = \frac{1}{2}+$. $S(t) = e^{-t\partial_x^3}$ o grupo unitario associado da KdV e $\eta(t)$ uma função uma função de corte suave suportada em $[-2, 2]$ cujo valor é 1 em $[-1, 1]$. Então, junto com as estimativas lineares [5] :

$$\begin{cases} \|\eta(t)S(t)u_0\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \lesssim \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ \|\eta(t) \int_0^t S(t-t')N(u(t'))dt'\|_{X^{s,b}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} \lesssim \|N(u)\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}, \end{cases}$$

a estimativa bilinear (5) e o escalonamento estabelecem a boa colocação da KdV em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > -\frac{3}{4}$. Nosso objetivo é verificar se é posivel encontrar a existência e unicidade local desses sistemas, escolhendo os dados iniciais apropriados, isto é :

O problema de Cauchy: Diremos que o problema de Cauchy associado ao sistema (3) é (localmente) bem posto em um espaço de Banach X , se para um dado inicial $u_0 \in X$, existe um tempo $T > 0$ e uma única solução $u \in C([0, T]; X)$ que depende continuamente dos dados iniciais e satisfaz a propriedade de persistência, significa, para um dado inicial $u_0 \in X$ a solução $u(t) \in X$ para todo $t \in [-T, T]$ descreve uma curva contínua em X . Se qualquer uma das condições acima não se sustentar, dizemos que o problema de Cauchy está mal posicionado. Mais informação sobre a boa colocação olhar o Apêndice A.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo, daremos alguns conceitos e resultados de análise que serão usados durante o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Os Espaços L^p

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω .

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \text{ para } p = +\infty$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.1. *Se $f \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de f são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração. Ver [7]. □

Proposição 1.2 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < p, q < +\infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Proposição 1.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$. Então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Segue como corolário da Proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1.1 (Desigualdade de Hölder generalizada). *Sejam $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i > 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p} \leq 1$. Então $f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f_1 f_2 \dots f_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [7]. □

1.2 Distribuições Temperadas

Definição 1.1. *Uma função real f de classe C^∞ definida em $\mathbb{R}$ está no espaço de Schwartz, se para todo par de números inteiros não negativos m e n existe uma constante $C_{m,n}$ tal que*

$$p_{m,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| \leq C_{m,n} < +\infty.$$

Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções que pertencem ao espaço de Schwartz.

Definição 1.2. *Dizemos que uma sequência $(\varphi)_{j \geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para zero, se para todo $m, n \in \mathbb{N}$ temos*

$$p_{m,n}(\varphi_j) \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow +\infty.$$

Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ diz-se que a sequência $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quando a sequência $(\varphi_j - \varphi)_{j \geq 1}$ converge para zero no sentido dado acima. Agora vamos definir a transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definição 1.3. *A transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, denotada por $\widehat{f}$ é dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

A próxima proposição resume as principais propriedades da Transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 1.5. *Sejam f e g em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, então valem*

- (i) $\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$
- (ii) $\widehat{f+g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$
- (iii) $\widehat{bf}(\xi) = b\widehat{f}(\xi)$
- (iv) $\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (i\xi)^m \widehat{f}(\xi)$

(v) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e vale a formula de inversão

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$(\widehat{\widehat{f}}) = f = (\check{\check{f}}),$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(vi) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e

$$(f * g)^{\wedge}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

onde $*$ denota a convolução de f por g .

(vii) $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ (Identidade de Plancherel em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Demonstração. Ver [8]. □

As aplicações lineares definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ são denominadas distribuições temperadas. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de seqüências será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Assim

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \text{ se } \lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Teorema 1.1. *Seja $1 \leq p < +\infty$. A aplicação inclusão*

$$\begin{aligned} i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longrightarrow i(\varphi) = \varphi \end{aligned}$$

é continua e densa, isto é,

(i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

(ii) $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$, onde o fecho é tomado na norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

(iii) *Existem constantes positivas $C_{m,n}, M, N$, tais que*

$$\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{m,n}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Ver [6]. □

É fácil provar que se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $x^m \varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Assim usando o Teorema 1.1 podemos definir em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a seguinte família de seminormas:

$$\tilde{p}_{m,n}(\varphi) = \|x^m \varphi^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (1.1)$$

Analogamente, dizemos que $(\varphi_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ com relação a família de seminormas (1.1) se, $\tilde{p}_{m,n}(\varphi_j - \varphi) \longrightarrow 0$, quando $j \rightarrow +\infty$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

1.3 Espaços de Sobolev

Seja $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev (do tipo L^2) em $\mathbb{R}$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

O espaço $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_s := \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

A norma proveniente deste produto interno é

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Em particular, $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. No caso $s \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \sum_{j=0}^s \|\partial_x^j f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Exibiremos agora umas propriedades dos espaços definidos anteriormente.

Proposição 1.6. *Propiedades dos espaços de Sobolev :*

- (i) Se $s < s'$, então $H^{s'}(\mathbb{R}) \subsetneq H^s(\mathbb{R})$,
- (ii) Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso em $H^s(\mathbb{R})$,
- (iii) Se $s_1 \leq s \leq s_2$, com $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, então

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^{s_1}(\mathbb{R})}^\theta \|f\|_{H^{s_2}(\mathbb{R})}^{1-\theta}.$$

Demonstração. Ver [2]. □

Teorema 1.2 (Imersão). *Se $s > n/2 + k$, então $H^s(\mathbb{R})$ é imerso continuamente em $C_\infty^k(\mathbb{R})$. Em outras palavras, se $f \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > n/2 + k$, então $f \in C_\infty^k(\mathbb{R})$ e existe $c_s > 0$ tal que*

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{R})} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Demonstração. Ver [2]. □

1.4 Espaços de Bourgain

Sejam $s, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Os espaços de Bourgain em $\mathbb{R}^2$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:

$$X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : (1 + |\xi|)^s (1 + |\tau - \alpha \xi^3|)^b \widehat{f}(\xi, \tau) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

O espaço $X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|f\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|)^{2s} (1 + |\tau - \alpha \xi^3|)^{2b} |\widehat{f}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau.$$

Proposição 1.7. *Sejam $s, s', b, b', \alpha \in \mathbb{R}$. Se $s' \leq s$ e $b' \leq b$, então*

$$X_{\alpha}^{s',b'}(\mathbb{R}^2) \subset X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2),$$

e também vale a relação

$$\left(X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)\right)^* = X_{\alpha}^{-s,-b}(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Ver [13]. □

Proposição 1.8. *Sejam $s, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Se $b > \frac{1}{2}$, então*

$$X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2) \subset C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R})).$$

Demonstração. Ver [13]. □

Lema 1.1. *Sejam $u \in X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e $s, b, \alpha \in \mathbb{R}$.*

Se $0 \leq b' < b < \frac{1}{2}$ ou $0 \geq b > b' > -\frac{1}{2}$, então para qualquer $0 < \delta \leq 1$ nós temos

$$\|\eta_{\delta}(t)u\|_{X_{\alpha}^{s,b'}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \delta^{b-b'} \|u\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.$$

onde $\eta_1(t) \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta_1(t) \leq 1$ é uma função de corte dada por,

$$\eta_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 2 \end{cases}$$

e $\eta_{\delta}(t) := \eta_1(t/\delta)$, $0 < \delta \leq 1$.

Demonstração. Ver [13]. □

Capítulo 2

Boa Colocação do Problema não linear

2.1 Introdução

Pelo princípio de Duhamel, nós podemos escrever o sistema (3) como o seguintes sistema de equações integrais

$$\begin{cases} u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-t')(vv_x)(t') dt' \\ v(t) = S_\alpha(t)v_0 - \int_0^t S_\alpha(t-t')(uv)_x(t') dt', \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $S(t) = e^{-t\partial_x^3}$ e $S_\alpha(t) = e^{-\alpha t\partial_x^3}$ são os grupos unitarios associados ao sistema (3).

Dizemos que (u, v) é solução do sistema (3) se e somente se (u, v) satisfaz (2.1).

Vamos a supor que a solução pode ser encontrada em um intervalo finito $[-T, T]$, então podemos reemplazar (2.1) por

$$\begin{cases} u(t) = \eta_1(t)S(t)u_0 - \eta_1(t) \int_0^t S(t-t')\eta_\delta(t')(vv_x)(t') dt' \\ v(t) = \eta_1(t)S_\alpha(t)v_0 - \eta_1(t) \int_0^t S_\alpha(t-t')\eta_\delta(t')(uv)_x(t') dt', \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $T \leq \delta$, $0 < \delta \leq 1$, $\eta_\delta(t) := \eta_1(t/\delta)$ e $\eta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta_1(t) \leq 1$ é uma função de corte definida como no Lema 1.1.

Dizemos que (u, v) é solução do sistema (3) se e somente se (u, v) satisfaz (2.2).

Nós vamos estabelecer a boa colocação local do sistema (3) em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $0 < \alpha < 1$, provando as seguintes estimativas bilineares, i.e.

Sejam $v_1, v_2 \in X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$, $u \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e $v \in X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$:

$$\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|v_1\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \|v_2\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \quad (2.3)$$

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)}. \quad (2.4)$$

Mas antes disso precisamos estabelecer estimativas lineares do sistema integral (2.2) nos espaços de Bourgain, por isso enunciamos e provamos elas.

2.2 Estimativas Lineares

Lema 2.1. *Sejam $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, $\eta_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{S_\alpha(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ os grupos unitários associados ao sistema (3). Para qualquer $s, b \in \mathbb{R}$, se verificam:*

$$(i) \|\eta_\delta(t)S(t)\phi\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad (2.5)$$

$$(ii) \|\eta_\delta(t)S_\alpha(t)\phi\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad (2.6)$$

onde $\eta_\delta(t) := \eta(t/\delta)$ e $0 < \delta \leq 1$.

Demonstração. Nós vemos que a igualdade abaixo é cumprida

$$(\eta_\delta(t)S(t)\phi(x))^\wedge(\xi, \tau) = \widehat{\eta}_\delta(\tau - \xi^3) \widehat{\phi}(\xi). \quad (2.7)$$

Pois, se cumpre

$$(\eta_\delta(t)S(t)\phi(x))^\wedge(\xi) = \eta_\delta(t) e^{i\xi^3 t} \widehat{\phi}(\xi).$$

Tomando transformada de Fourier na variavel temporal da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} (\eta_\delta(t)S(t)\phi(x))^\wedge(\xi, \tau) &= (\eta_\delta(t) e^{i\xi^3 t})^\wedge(\tau) \widehat{\phi}(\xi) \\ &= \widehat{\eta}_\delta(\tau - \xi^3) \widehat{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

Agora, usando a definição do espaço $X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e a igualdade (2.7); obtemos a estimativa (2.5).

De fato:

$$\begin{aligned} \|\eta_\delta(t)S(t)\phi\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2b} |(\eta_\delta(t)S(t)\phi(x))^\wedge(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2b} |\widehat{\eta}_\delta(\tau - \xi^3) \widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2b} |\widehat{\eta}_\delta(\tau - \xi^3)|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}} \langle \tau' \rangle^{2b} |\widehat{\eta}_\delta(\tau')|^2 d\tau' d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \tau' \rangle^{2b} |\widehat{\eta}_\delta(\tau')|^2 d\tau' \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\equiv \|\eta_\delta\|_{H^b(\mathbb{R})} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq C_{\eta_\delta} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \text{ pois } \eta_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \\ &\lesssim \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Além disso, usando a definição do espaço $X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e a identidade (2.7), obtemos a estimativa (2.6).

De fato:

$$\begin{aligned} \|\eta_\delta(t)S_\alpha(t)\phi\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha\xi^3 \rangle^b |(\eta_\delta(t)S_\alpha(t)\phi(x))^\wedge(\xi)|\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha\xi^3 \rangle^b |\widehat{\eta}_\delta(\tau - \alpha\xi^3) \widehat{\phi}(\xi)|\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= \|\eta_\delta\|_{H^b(\mathbb{R})} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq C_{\eta_\delta} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \text{ pois } \eta_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \\ &\lesssim \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Sejam $F \in X^{s,b'}(\mathbb{R}^2)$, $G \in X_{\alpha}^{s,b'}(\mathbb{R}^2)$, $\eta_{\delta} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{S_{\alpha}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ os grupos unitários associados ao sistema (3). Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, $-1/2 < b' \leq 0 \leq b \leq b' + 1$ e $0 < \delta \leq 1$, se verificam:*

$$(iii) \|\eta_{\delta}(S *_R F)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \delta^{1-b+b'} \|F\|_{X^{s,b'}(\mathbb{R}^2)}, \quad (2.8)$$

$$(iv) \|\eta_{\delta}(S_{\alpha} *_R G)\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \delta^{1-b+b'} \|G\|_{X_{\alpha}^{s,b'}(\mathbb{R}^2)}, \quad (2.9)$$

onde $*_R$ denota a convolução retardada, i.e. $(S *_R F)(t) = \int_0^t S(t-t')F(t')dt$.

Demonstração. Temos que é cumprida a igualdade

$$\begin{aligned} \|\eta_{\delta}(S *_R F)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} &\equiv \|S(-t)[\eta_{\delta}(S *_R F)]\|_{H_x^s(\mathbb{R})H_t^b(\mathbb{R})} \\ &= \|S(-t)[\eta_{\delta}(t) \int_0^t S(t-t')F(t')dt']\|_{H_x^s(\mathbb{R})H_t^b(\mathbb{R})} \\ &= \|\eta_{\delta}(t) \int_0^t S(-t')F(t')dt'\|_{H_x^s(\mathbb{R})H_t^b(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Agora seja $f(t') = S(-t')F(t')$ e definimos $(Lf)(t) := \eta_{\delta}(t) \int_0^t f(t')dt'$, note que $\|f\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \equiv \|S(-t)f\|_{H_x^s(\mathbb{R})H_t^b(\mathbb{R})}$. Então provar

$$\|\eta_{\delta}(S *_R F)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \delta^{1-b+b'} \|F\|_{X^{s,b'}(\mathbb{R}^2)} \quad (2.10)$$

é equivalente a provar

$$\|\eta_{\delta}(t) \int_0^t f(t')dt'\|_{H_x^s(\mathbb{R})H_t^b(\mathbb{R})} \lesssim \delta^{1-b+b'} \|S(t)f\|_{X^{s,b'}(\mathbb{R}^2)} \equiv \delta^{1-b+b'} \|f\|_{H_x^s(\mathbb{R})H_t^{b'}(\mathbb{R})}. \quad (2.11)$$

Então nós provamos (2.11).

De fato, seja $f \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e consideramos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t') dt' &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau') e^{i\tau' t'} d\tau' dt', \text{ pela inversa da T. de Fourier.} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau') \int_0^t e^{i\tau' t'} dt' d\tau', \text{ pelo Teorema de Fubini.} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau') \left[\frac{e^{i\tau' t} - 1}{i\tau'} \right] d\tau'. \end{aligned}$$

Agora, seja

$$J(t) = (Lf)(t) = \eta_{\delta}(t) \int_0^t f(t') dt'.$$

Então

$$J(t) = \eta_{\delta}(t) \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau') \left[\frac{e^{i\tau' t} - 1}{i\tau'} \right] d\tau'.$$

Aplicando a transformada de Fourier a J , obtemos

$$\begin{aligned}
 \widehat{J}(\tau) &= \left[\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau') \eta_{\delta}(t) \left(\frac{e^{i\tau't} - 1}{i\tau'} \right) d\tau' \right]^{\wedge}(\tau) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau') \left[\eta_{\delta}(t) \left(\frac{e^{i\tau't} - 1}{i\tau'} \right) \right]^{\wedge}(\tau) d\tau' \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(\tau')}{i\tau'} \left[(\eta_{\delta}(t) e^{i\tau't})^{\wedge}(\tau) - (\eta_{\delta}(t))^{\wedge}(\tau) \right] d\tau' \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(\tau')}{i\tau'} [\widehat{\eta}_{\delta}(\tau - \tau') - \widehat{\eta}_{\delta}(\tau)] d\tau'.
 \end{aligned}$$

Então

$$\widehat{J}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}(\tau')}{i\tau'} [\widehat{\eta}_{\delta}(\tau - \tau') - \widehat{\eta}_{\delta}(\tau)] d\tau'.$$

Agora, nós dividimos $f = f_+ + f_-$, onde

$$\widehat{f}_+(\tau) = \widehat{f}(\tau) \chi(|\tau| > 1/T) \quad e \quad \widehat{f}_-(\tau) = \widehat{f}(\tau) \chi(|\tau| \leq 1/T)$$

e correspondentemente $J = J_+ + J_-$.

Então, vamos escrever J_- como:

$$\begin{aligned}
 \widehat{J}_-(\tau) &= \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}_-(\tau')}{\tau'} [\widehat{\eta}_{\delta}(\tau - \tau') - \widehat{\eta}_{\delta}(\tau)] d\tau' \\
 &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}_-(\tau')}{-\tau'} \left[\int_0^1 d(\widehat{\eta}_{\delta}(\tau - \lambda\tau')) \right] d\tau' \\
 &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{f}_-(\tau')}{-\tau'} \left[\int_0^1 \widehat{\eta}_{\delta}'(\tau - \lambda\tau')(-\tau) d\lambda \right] d\tau' \\
 &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_-(\tau') \left[\int_0^1 \widehat{\eta}_{\delta}'(\tau - \lambda\tau') d\lambda \right] d\tau' \\
 &= \frac{-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}_{\delta}'(\tau - \lambda\tau') d\lambda d\tau'.
 \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto de $\widehat{J}_-(\tau)$:

$$|\widehat{J}_-(\tau)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}_{\delta}'(\tau - \lambda\tau') d\lambda d\tau' \right|. \quad (2.12)$$

Além disso se cumpre

$$\begin{aligned}
 \langle \tau \rangle^b &= (1 + |\tau|)^b \\
 &\leq (1 + |\tau - \lambda\tau'| + |\lambda\tau'|)^b \\
 &\leq (1 + |\tau'| + |\tau - \lambda\tau'|)^b \\
 &\leq (\langle \tau' \rangle + |\tau - \lambda\tau'|)^b \\
 &\leq C(\langle \tau' \rangle^b + |\tau - \lambda\tau'|^b).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \tau \rangle^b \leq C(\langle \tau' \rangle^b + |\tau - \lambda \tau'|^b). \quad (2.13)$$

Então usando a desigualdade (2.13), temos

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle^b |\widehat{J}_-(\tau)| &= C \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \langle \tau \rangle^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\lambda d\tau' \right| \\ &\leq C \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \langle \tau' \rangle^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\lambda d\tau' \right| + \\ &\quad C \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\tau - \lambda \tau'|^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\lambda d\tau' \right|. \end{aligned}$$

Tomando a norma L^2 , na desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\langle \tau \rangle^b |\widehat{J}_-(\tau)|\|_{L^2_{\tau}} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \langle \tau' \rangle^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\lambda d\tau' \right\|_{L^2_{\tau}} + \\ &\quad C \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\tau - \lambda \tau'|^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\lambda d\tau' \right\|_{L^2_{\tau}}, \\ &\quad \text{pela desigualdade de Minkowski.} \\ &\leq C \left\| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \langle \tau' \rangle^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\tau' d\lambda \right\|_{L^2_{\tau}} + \\ &\quad C \left\| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\tau - \lambda \tau'|^b \widehat{f}_-(\tau') \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \lambda \tau') d\tau' d\lambda \right\|_{L^2_{\tau}} \\ &= C \left\| \int_0^1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} \langle \lambda^{-1} \omega \rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1} \omega) \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \omega) d\omega d\lambda \right\|_{L^2_{\tau}} + \\ &\quad C \left\| \int_0^1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\tau - \omega|^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1} \omega) \widehat{\eta}'_{\delta'}(\tau - \omega) d\omega d\lambda \right\|_{L^2_{\tau}} \\ &= C \left\| \int_0^1 \lambda^{-1} [(\langle \lambda^{-1} \cdot \rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot)) * \widehat{\eta}'_{\delta'}](\tau) d\lambda \right\|_{L^2_{\tau}} + \\ &\quad C \left\| \int_0^1 \lambda^{-1} [\widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot) * (|\cdot|^b \widehat{\eta}'_{\delta'})](\tau) d\lambda \right\|_{L^2_{\tau}} \\ &\leq C \int_0^1 \lambda^{-1} \|(\langle \lambda^{-1} \cdot \rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot)) * \widehat{\eta}'_{\delta'}\|_{L^2_{\tau}} d\lambda + \\ &\quad C \int_0^1 \lambda^{-1} \|\widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot) * (|\cdot|^b \widehat{\eta}'_{\delta'})\|_{L^2_{\tau}} d\lambda. \end{aligned}$$

Logo, se consegue a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \|J_-\|_{H^b} &\leq C \int_0^1 \lambda^{-1} \|(\langle \lambda^{-1} \cdot \rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot)) * \widehat{\eta}'_{\delta'}\|_{L^2_{\tau}} d\lambda + C \int_0^1 \lambda^{-1} \|\widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot) * (|\cdot|^b \widehat{\eta}'_{\delta'})\|_{L^2_{\tau}} d\lambda \\ &\leq C \int_0^1 \lambda^{-1} \|\langle \lambda^{-1} \cdot \rangle^b \widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot)\|_{L^1_{\tau}} \|\widehat{\eta}'_{\delta'}\|_{L^2_{\tau}} d\lambda + C \int_0^1 \lambda^{-1} \|\widehat{f}_-(\lambda^{-1} \cdot)\|_{L^1_{\tau}} \|(|\cdot|^b \widehat{\eta}'_{\delta'})\|_{L^2_{\tau}} d\lambda, \\ &\quad \text{pela desigualdade de Young.} \end{aligned}$$

Assim, temos que se cumpre

$$\begin{aligned}
\|J_-\|_{H^b} &\leq C \int_0^1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} \langle \lambda^{-1} \tau \rangle^b |\widehat{f}_-(\lambda^{-1} \tau)| d\tau d\lambda \|\widehat{\eta}_\delta'\|_{L_\tau^2} + \\
&\quad C \int_0^1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_-(\lambda^{-1} \tau)| d\tau d\lambda \|(| \cdot |^b \widehat{\eta}_\delta')\|_{L_\tau^2} \\
&= C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \langle \mu \rangle^b |\widehat{f}_-(\mu)| d\mu d\lambda \|\widehat{\eta}_\delta'\|_{L_\tau^2} + \\
&\quad C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_-(\mu)| d\mu d\lambda \|(| \cdot |^b \widehat{\eta}_\delta')\|_{L_\tau^2}, \text{ onde } \mu = \lambda^{-1} \tau. \\
&= C \| \langle \cdot \rangle^b \widehat{f}_- \|_{L_\tau^1} \|\widehat{\eta}_\delta'\|_{L_\tau^2} + C \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \|(| \cdot |^b \widehat{\eta}_\delta')\|_{L_\tau^2}.
\end{aligned}$$

Então

$$\|J_-\|_{H^b} \leq C \| \langle \cdot \rangle^b \widehat{f}_- \|_{L_\tau^1} \|\widehat{\eta}_\delta'\|_{L_\tau^2} + C \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \|(| \cdot |^b \widehat{\eta}_\delta')\|_{L_\tau^2}.$$

Mas pelo suporte de $\widehat{f}_-$ e a homogeneidade

$$\begin{aligned}
\| \langle \cdot \rangle^b \widehat{f}_- \|_{L_\tau^1} &= \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^b |\widehat{f}_-(\tau)| d\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} C(1 + |\tau|^b) |\widehat{f}_-(\tau)| d\tau \\
&\leq C(1 + \frac{1}{\delta^b}) \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}_-(\tau)| d\tau \\
&\leq C\delta^{-b} \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \\
&= C\delta^{3/2-b} \delta^{-3/2} \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \\
&\leq C\delta^{3/2-b} \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\|J_-\|_{H_t^b} &\leq C\delta^{3/2-b} \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \|\widehat{\eta}_\delta'\|_{L_\tau^2} + C\delta^{3/2-b} \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \|(| \cdot |^b \widehat{\eta}_\delta')\|_{L_\tau^2} \\
&\leq C\delta^{3/2-b} \left(\|\widehat{\eta}_\delta'\|_{L_\tau^2} + \|(| \cdot |^b \widehat{\eta}_\delta')\|_{L_\tau^2} \right) \|\widehat{f}_-\|_{L_\tau^1} \\
&\leq C\delta^{1-b+b'} \|f\|_{H_t^{b'}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Analogamente provamos que

$$\|J_+\|_{H_t^b} \leq C\delta^{1-b+b'} \|f\|_{H_t^{b'}}. \tag{2.15}$$

Logo de (2.14) e (2.15)

$$\|\eta_\delta(t) \int_0^t f(t') dt'\|_{H_t^b} = \|Lf\|_{H_t^b} = \|J\|_{H_t^b} \leq \|J_-\|_{H_t^b} + \|J_+\|_{H_t^b} \leq C\delta^{1-b+b'} \|f\|_{H_t^{b'}}.$$

Portanto

$$\|\eta_\delta(t) \int_0^t f(t') dt'\|_{H_x^s H_t^b} \leq C\delta^{1-b+b'} \|f\|_{H_x^s H_t^{b'}}.$$

Similarmente se prova a estimativa

$$\|\eta_\delta(S *_R G)\|_{X_\alpha^{s,b}} \leq C\delta^{1-b+b'} \|G\|_{X_\alpha^{s,b'}}.$$

□

Agora vamos estabelecer alguns lemas que precisamos para provar as estimativas bilineares.

Lema 2.3. Para $l > \frac{1}{2}$. Se verificam:

$$(a) \ I_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x-\alpha \rangle^{2l} \langle x-\beta \rangle^{2l}} \lesssim \frac{1}{\langle \alpha-\beta \rangle^{2l}},$$

$$(b) \ I_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x \rangle^{2l} \sqrt{|\alpha-x|}} \lesssim \frac{1}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}},$$

$$(c) \ \text{Para } l > \frac{1}{3}, \ I_3 = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \rangle^l} \lesssim 1.$$

Demonstração. (a) Fazendo a mudança de variável $x - \alpha = y$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x-\alpha \rangle^{2l} \langle x-\beta \rangle^{2l}} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle y \rangle^{2l} \langle y+\alpha-\beta \rangle^{2l}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle y \rangle^{2l} \langle y+d \rangle^{2l}}, \text{ onde } d = \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Para a integral acima nós temos dois casos, o caso :

(i) Se $|y+d| \geq \frac{|d|}{2}$, então

$$\begin{aligned} \langle y+d \rangle &= 1 + |y+d| \\ &\geq 1 + \frac{|d|}{2} \\ &> \frac{1+|d|}{2} \\ &= \frac{\langle d \rangle}{2}, \end{aligned}$$

o que implica a desigualdade

$$\frac{2^{2l}}{\langle d \rangle^{2l}} \geq \frac{1}{\langle y+d \rangle^{2l}}. \quad (2.16)$$

Assim multiplicando (2.16) por $1/\langle y \rangle^{2l}$ e integrando em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle y \rangle^{2l} \langle y+d \rangle^{2l}} &\leq \frac{2^{2l}}{\langle d \rangle^{2l}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle y \rangle^{2l}} \\ &\leq \frac{C}{\langle d \rangle^{2l}} \\ &\lesssim \frac{1}{\langle d \rangle^{2l}}. \end{aligned}$$

Retomando às variáveis originais, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle x-\alpha \rangle^{2l} \langle x-\beta \rangle^{2l}} \lesssim \frac{1}{\langle \alpha-\beta \rangle^{2l}}. \quad (2.17)$$

Também se analisa o caso :

(ii) Se $|y+d| < \frac{|d|}{2}$, então

$$\begin{aligned} |y| &= |d - (y+d)| \\ &\geq |d| - |y+d| \\ &> |d| - \frac{|d|}{2} \\ &= \frac{|d|}{2}. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade acima

$$\begin{aligned}\langle y \rangle &= 1 + |y| \\ &> 1 + \frac{|d|}{2} \\ &> \frac{1 + |d|}{2} \\ &= \frac{\langle d \rangle}{2}.\end{aligned}$$

O que implica a desigualdade

$$\frac{2^{2l}}{\langle d \rangle^{2l}} \geq \frac{1}{\langle y \rangle^{2l}}. \quad (2.18)$$

Assim multiplicando (2.18) por $1/\langle y + d \rangle^{2l}$ e integrando em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle y \rangle^{2l} \langle y + d \rangle^{2l}} &\leq \frac{2^{2l}}{\langle d \rangle^{2l}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle y + d \rangle^{2l}} \\ &= \frac{2^{2l}}{\langle d \rangle^{2l}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{\langle z \rangle^{2l}} \\ &\leq \frac{C}{\langle d \rangle^{2l}} \\ &\lesssim \frac{1}{\langle d \rangle^{2l}}.\end{aligned}$$

Retomando às variáveis iniciais, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle x - \alpha \rangle^{2l} \langle x - \beta \rangle^{2l}} \lesssim \frac{1}{\langle \alpha - \beta \rangle^{2l}}$$

(b) Fazendo a mudança de variável $x = \frac{\alpha}{2} + y$, então

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{|\frac{\alpha}{2} - y|^{\frac{1}{2}} \langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l}}.$$

Tomando os casos

(i) Se $|y - \frac{\alpha}{2}| \geq |y + \frac{\alpha}{2}|$ então $\frac{1}{|y + \frac{\alpha}{2}|} \geq \frac{1}{|y - \frac{\alpha}{2}|}$.

Logo

$$\begin{aligned}I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{|y + \frac{\alpha}{2}|^{\frac{1}{2}} \langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{|x|^{\frac{1}{2}} \langle x \rangle^{2l}} \\ &\leq \int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^{\frac{1}{2}} \langle x \rangle^{2l}} + \int_{|x| > 1} \frac{dx}{|x|^{\frac{1}{2}} \langle x \rangle^{2l}} \\ &\leq \int_{|x| \leq 1} \frac{dx}{|x|^{\frac{1}{2}}} + \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x \rangle^{2l}} \\ &\leq C, \text{ pois } l > \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Se $|y - \frac{\alpha}{2}| \leq |y + \frac{\alpha}{2}|$ então $\langle y - \frac{\alpha}{2} \rangle \leq \langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle$.

Logo

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle y - \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l} |y - \frac{\alpha}{2}|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{\langle z \rangle^{2l} |z|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq C, \text{ pois } l > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, se $|\alpha| \leq 1$, temos para $C > 0$

$$C \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} C}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Então

$$I_2 \leq C \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} C}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}} \lesssim \frac{1}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Se $|\alpha| > 1$, temos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y - \frac{\alpha}{2}| \geq \frac{|\alpha|}{2}} \frac{dy}{\langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l} |\frac{\alpha}{2} - y|^{\frac{1}{2}}} + \int_{|y - \frac{\alpha}{2}| < \frac{|\alpha|}{2}} \frac{dy}{\langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l} |\frac{\alpha}{2} - y|^{\frac{1}{2}}} \\ &= I_s + I_p. \end{aligned}$$

Agora para I_s temos a desigualdade

$$\begin{aligned} I_s &\leq \frac{2^{\frac{1}{2}}}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}} \int_{|y - \frac{\alpha}{2}| \geq \frac{|\alpha|}{2}} \frac{dy}{\langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l}} \\ &\leq \frac{2^{\frac{1}{2}}}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l}} \\ &\leq \frac{2^{\frac{1}{2}} C}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}, \text{ pois } l > \frac{1}{2}. \\ &\sim \frac{2^{\frac{1}{2}} C}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}, \text{ pois } |\alpha| > 1. \\ &\lesssim \frac{1}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Em I_p nós temos

$$|y + \frac{\alpha}{2}| > \frac{|\alpha|}{2},$$

o que implica

$$\frac{2^{2l}}{\langle \alpha \rangle^{2l}} > \frac{1}{\langle y + \frac{\alpha}{2} \rangle^{2l}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
I_p &\leq \frac{2^{2l}}{\langle \alpha \rangle^{2l}} \int_{|y - \frac{\alpha}{2}| < \frac{|\alpha|}{2}} \frac{dy}{|y - \frac{\alpha}{2}|^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2^{2l}}{\langle \alpha \rangle^{2l}} \int_{|t| < \frac{|\alpha|}{2}} \frac{dt}{|t|^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2^{2l}}{\langle \alpha \rangle^{2l}} \int_0^{\frac{|t|}{2}} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq C \frac{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \alpha \rangle^{2l}} \\
&\leq \frac{C}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}, \text{ pois } l > \frac{1}{2}. \\
&\lesssim \frac{1}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$I_2 = I_s + I_p \lesssim \frac{1}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

(c) Temos que se cumpre a igualdade

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \rangle^l} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} \\
&= \int_B \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} + \\
&\quad \int_{B^c} \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l},
\end{aligned}$$

onde x_1, x_2, x_3 são raízes do polimônio $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e B é a união de três bolas de raio 1 sobre as raízes x_i .

Então, em B cumpre-se

$$\int_B \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} \leq C \lesssim 1. \quad (2.19)$$

Por outra parte, em B^c temos que se cumpre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} \langle x - x_1 \rangle \langle x - x_2 \rangle \langle x - x_3 \rangle &= \frac{1}{7} (1 + |x - x_1|)(1 + |x - x_2|)(1 + |x - x_3|) \\
&= \frac{1}{7} (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3), \text{ onde } a_i = |x - x_i|. \\
&= \frac{1}{7} (1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3) \\
&\leq \frac{1}{7} (7 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3) \\
&= \frac{1}{7} (7 + 7a_1a_2a_3) \\
&= (1 + a_1a_2a_3) \\
&= \langle a_1a_2a_3 \rangle = \langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{7} \langle x - x_1 \rangle \langle x - x_2 \rangle \langle x - x_3 \rangle \leq \langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle.$$

Então

$$\frac{1}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} \leq \frac{7^l}{\langle x - x_1 \rangle^l \langle x - x_2 \rangle^l \langle x - x_3 \rangle^l}.$$

Assim, tomando integral na desigualdade anterior:

$$\begin{aligned} \int_{B^c} \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} &\leq 7^l \int_{B^c} \frac{dx}{\langle x - x_1 \rangle^l \langle x - x_2 \rangle^l \langle x - x_3 \rangle^l} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x - x_1 \rangle^l \langle x - x_2 \rangle^l \langle x - x_3 \rangle^l} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x - x_1 \rangle^{3l}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x - x_2 \rangle^{3l}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x - x_3 \rangle^{3l}} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ &\quad \text{pela desigualdade de Holder.} \\ &\leq C \\ &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{B^c} \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} \lesssim 1. \quad (2.20)$$

Portanto de (2.19) e (2.20)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \rangle^l} \lesssim 1.$$

□

Lema 2.4. Para $\frac{1}{2} < b \leq \frac{3}{4}$. Se verifica:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1,$$

onde $\tau = \tau_1 + \tau_2$ e $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

Demonstração. Começamos com a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle -\tau_1 + \tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2b}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_1 - [\tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3] \rangle^{2b}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle \tau_1 - a \rangle^{2b} \langle \tau_1 - b \rangle^{2b}}, \\ &\quad \text{onde } a = \alpha \xi_1^3 \text{ e } b = \tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3. \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle a - b \rangle^{2b}}, \text{ pelo Lema 2.3 (a).} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \alpha \xi_1^3 - [\tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3] \rangle^{2b}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \alpha \xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2b}}. \end{aligned}$$

Agora vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned} u &= \tau - \alpha \xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \\ &= \tau - \alpha \xi_1^3 - \alpha \xi^3 + 3\alpha \xi^2 \xi_1 - 3\alpha \xi \xi_1^2 + \alpha \xi_1^3 \\ &= \tau - \alpha \xi^3 + 3\alpha \xi^2 \xi_1 - 3\alpha \xi \xi_1^2 \\ &= \tau - \alpha \xi^3 + 3\alpha \xi \xi_1 (\xi - \xi_1). \end{aligned}$$

Tomando o diferencial de u

$$\begin{aligned} du &= 3\alpha \xi (\xi - \xi_1) d\xi_1 - 3\alpha \xi \xi_1 d\xi_1 \\ &= 3\alpha \xi \xi d\xi_1 - 3\alpha \xi \xi_1 d\xi_1 - 3\alpha \xi \xi_1 d\xi_1 \\ &= 3\alpha \xi \xi d\xi_1 - 6\alpha \xi \xi_1 d\xi_1 \\ &= 3\alpha \xi (\xi - 2\xi_1) d\xi_1. \end{aligned}$$

Mas também de u temos a igualdade

$$3\alpha \xi \xi_1^2 - 3\alpha \xi^2 \xi_1 + u - \tau + \alpha \xi^3 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática acima a respeito de ξ_1

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1}{2(3\xi\alpha)}[3\alpha\xi^2 \pm \sqrt{|9\alpha^2\xi^4 - 12\alpha\xi(u - \tau + \alpha\xi^3)|}] \\
 &= \frac{1}{2(3\xi\alpha)}[3\alpha\xi^2 \pm \sqrt{|9\alpha^2\xi^4 - 12\alpha\xi u + 12\alpha\xi\tau - 12\alpha^2\xi^4|}] \\
 &= \frac{1}{2(3\xi\alpha)}[3\alpha\xi^2 \pm \sqrt{|-3\alpha^2\xi^4 - 12\alpha\xi u + 12\alpha\xi\tau|}] \\
 &= \frac{1}{2(3\xi\alpha)}[3\alpha\xi^2 \pm \sqrt{|3\alpha\xi(4\tau - \alpha\xi^3 - 4u)|}] \\
 &= \frac{\xi}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{|4\tau - \alpha\xi^3 - 4u|}}{2(\alpha\sqrt{3}\sqrt{\xi})}.
 \end{aligned}$$

Então

$$|\alpha\xi(\xi - 2\xi_1)| = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\xi}}{\sqrt{3}}\sqrt{|4\tau - \alpha\xi^3 - 4u|}.$$

Por outra parte, lembrando que

$$du = 3\alpha\xi(\xi - 2\xi_1)d\xi_1,$$

retomando as variáveis respeito de $d\xi_1$

$$\begin{aligned}
 d\xi_1 &= \frac{du}{3\alpha\xi(\xi - 2\xi_1)} \\
 &= \frac{du}{\sqrt{3\alpha\xi}\sqrt{|4\tau - \alpha\xi^3 - 4u|}}.
 \end{aligned}$$

Agora com as ferramentas acima estimamos a seguinte integral

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \alpha\xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2b}} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\langle u \rangle^{2b} \sqrt{3\alpha\xi} \sqrt{|4\tau - \alpha\xi^3 - 4u|}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3\alpha\xi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{\langle u \rangle^{2b} \sqrt{|\tau - \frac{\alpha\xi^3}{4} - u|}} \\
 &\lesssim \frac{1}{2\sqrt{3\alpha\xi}} \left[\frac{1}{\langle \tau - \frac{\alpha\xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right], \text{ pelo Lema 2.3 (b)} \\
 &\lesssim \frac{1}{\sqrt{\xi} \langle \tau - \frac{\alpha\xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha\xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha\xi_2^3 \rangle^{2b}} \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \alpha\xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1) \rangle^{2b}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\xi} \langle \tau - \frac{\alpha\xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\frac{1}{\xi^{\frac{1}{4}} \langle \tau - \frac{\alpha \xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{4}}} \right) \\
&= \frac{|\xi|^{\frac{3}{4}}}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b} \langle \tau - \frac{\alpha \xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{4}}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{\frac{3}{4}}}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\frac{1}{4}} \langle \tau - \frac{\alpha \xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{4}}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{\frac{3}{4}}}{\langle \xi^3 - \frac{\alpha \xi^3}{4} \rangle^{\frac{1}{4}}} \\
&\leq \frac{|\xi|^{\frac{3}{4}}}{|(1 - \frac{\alpha}{4})\xi^3|^{\frac{1}{4}}} \\
&\leq C \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a desigualdade necessária

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1.$$

□

Observação 2.1.

Para definir nosso operador bilinear precisamos redefinir v_1, v_2 , isto é :

Dados $v_1, v_2 \in X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)$, definimos as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\xi, \tau) = \widehat{v}_1(\xi, \tau) \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^b$$

e

$$g(\xi, \tau) = \widehat{v}_2(\xi, \tau) \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^b.$$

Reorganizando as funções $\widehat{v}_1$ e $\widehat{v}_2$ em função de f e g

$$\widehat{v}_1(\xi, \tau) = \frac{f(\xi, \tau)}{\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^b} \quad (2.21)$$

e

$$\widehat{v}_2(\xi, \tau) = \frac{g(\xi, \tau)}{\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^b}. \quad (2.22)$$

Também, tomando a norma $L_{\xi}^2(\mathbb{R})$ e $L_{\tau}^2(\mathbb{R})$ a $f(\xi, \tau)$ e $g(\xi, \tau)$

$$\|f\|_{L_{\xi}^2(\mathbb{R})L_{\tau}^2(\mathbb{R})} = \|v_1\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} < \infty$$

e

$$\|g\|_{L_{\xi}^2(\mathbb{R})L_{\tau}^2(\mathbb{R})} = \|v_2\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Agora vamos expressar $\partial_x(v_1 v_2)$ em termos de f e g , isto é

$$\begin{aligned} \partial_x(\widehat{v_1 v_2})(\xi) &= i\xi \widehat{v_1 v_2}(\xi) \\ &= i\xi \widehat{v}_1 *_{\xi} \widehat{v}_2 \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_1(\xi_1) \widehat{v}_2(\xi - \xi_1) d\xi_1. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a igualdade acima

$$\begin{aligned} \partial_x(\widehat{v_1 v_2})(\xi, \tau) &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_1(\xi_1) \widehat{v}_2(\xi - \xi_1) d\xi_1 \right] e^{i\tau t} dt \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [\widehat{v}_1(\xi_1) \widehat{v}_2(\xi - \xi_1)] e^{i\tau t} dt d\xi_1, \text{ por Fubini.} \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} [\widehat{v}_1(\xi_1) \widehat{v}_2(\xi - \xi_1)]^{\wedge}(\tau) d\xi_1 \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_1(\xi_1, \tau) *_{\tau} \widehat{v}_2(\xi - \xi_1, \tau) d\xi_1 \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_1(\xi_1, \tau_1) \widehat{v}_2(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) d\tau_1 d\xi_1 \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1, \\ &\quad \text{por (2.21) e (2.22).} \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle \xi - \xi_1 \rangle^s \langle \tau - \tau_1 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1 \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1, \end{aligned}$$

onde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ e $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Logo, se obtem a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(b-1)} |\widehat{\partial_x(v_1 v_2)}(\xi, \tau)|^2 &= \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(b-1)} \\ &\quad |i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1|^2. \end{aligned}$$

Tomando integral dupla da igualdade acima, com relação às variáveis ξ e τ , obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(b-1)} |\widehat{\partial_x(v_1 v_2)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(b-1)} |i\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1|^2 d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(b-1)} |\xi|^2 \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1 \right|^2 d\xi d\tau \\ &= \left\| \frac{\xi \langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{(1-b)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}. \end{aligned}$$

Da igualdade acima obtemos

$$\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} = \left\| \frac{\xi \langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{(1-b)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1 \right\|_{L_\xi^2(\mathbb{R}) L_\tau^2(\mathbb{R})}.$$

Então definimos nosso operador bilinear dado por

$$\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau) = \frac{\xi \langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{(1-b)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b} \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\tau_1 d\xi_1.$$

2.3 Estimativas Bilineares

Proposição 2.1. *Sejam $v_1, v_2 \in X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$, $u \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e $v \in X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ as estimativas bilineares.*

$$\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|v_1\|_{X_\alpha^{s,b}} \|v_2\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \quad (2.23)$$

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \|v\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \quad (2.24)$$

Se verificam, para $s \geq 0$, com algum $b > \frac{1}{2}$.

Demonstração. Primeiro nós vamos provar a estimativa bilinear (2.23).

De fato, pela Observação 2.1, definimos nosso operador bilinear

$$\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau) = \frac{\xi \langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1,$$

onde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ e $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Se $s = 0$, temos que:

$$\mathcal{B}_{0,b}(f, g)(\xi, \tau) = \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1.$$

Tomando a norma $L_\xi^2(\mathbb{R})$ e $L_\tau^2(\mathbb{R})$ do operador bilinear $\mathcal{B}_{0,b}(f, g)(\xi, \tau)$, e pela desigualdade de Holder

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{0,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2(\mathbb{R}) L_\tau^2(\mathbb{R})} &= \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2(\mathbb{R}) L_\tau^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^2(\xi_1, \tau_1) g^2(\xi_2, \tau_2) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^2(\xi_1, \tau_1) g^2(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &\leq C \left\| \left[(f^2 * g^2)(\xi, \tau) \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}, \text{ pelo Lema (2.4).} \\ &= C \left\| \left[\int_{\mathbb{R}} (f^2 * g^2)(\xi, \tau) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_\tau^2} \\ &= C \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f^2 * g^2)(\xi, \tau) d\xi d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left[\|f^2\|_{L_\xi^1 L_\tau^1} \|g^2\|_{L_\xi^1 L_\tau^1} \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ pela Desigualdade de Young.} \\ &= C \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Então obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \|f\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \|g\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \\
&= C \|v_1\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \|v_2\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \|v_1\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \|v_2\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Para $s > 0$, temos que se cumpre

$$\langle \xi \rangle^s \leq \langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s.$$

Assim

$$\frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s} \leq 1. \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(v_1 v_2)\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} &= \|\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \\
&= \left\| \frac{\xi \langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \\
&= \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^s f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \\
&\leq \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2}, \\
&\quad \text{pela desigualdade (2.25).} \\
&= \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_1, \tau_1)}{\langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \\
&\leq C \|f\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} \|g\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2}, \\
&\quad \text{pelo demonstrado anteriormente para o caso } s = 0. \\
&= C \|v_1\|_{X_{\alpha}^{s,b}} \|v_2\|_{X_{\alpha}^{s,b}} \\
&\lesssim \|v_1\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \|v_2\|_{X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Portanto a estimativa acima prova a estimativa bilinear (2.23).

Segundo provaremos a estimativa bilinear (2.24):

De fato, como $u \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ e $v \in X_{\alpha}^{s,b}(\mathbb{R}^2)$, então definimos as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\xi, \tau) = \widehat{u}(\xi, \tau) \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^b$$

e

$$g(\xi, \tau) = \widehat{v}(\xi, \tau) \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^b.$$

Tomando a norma $L_{\xi}^2(\mathbb{R})$ e a norma $L_{\tau}^2(\mathbb{R})$ a f e g , obtemos

$$\|f\|_{L_{\xi}^2 L_{\tau}^2} = \|u\|_{X^{s,b}} < \infty$$

e

$$\|g\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|v\|_{X_\alpha^{s,b}} < \infty.$$

Logo, nosso candidato a operador bilinear é o seguinte

$$\tilde{\mathcal{B}}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau) = \frac{\xi \langle \xi \rangle^s}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_1 \rangle^s \langle \xi_2 \rangle^s \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1,$$

onde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ e $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Somente analisamos para $s = 0$, pois para $s > 0$ o procedimento é análogo usando a desigualdade (2.25).

$$\begin{aligned} \|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{s,b-1}} &= \|\tilde{\mathcal{B}}_{0,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &\leq \left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^b \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \|g\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad \|u\|_{X_\alpha^{s,b}} \|v\|_{X_\alpha^{s,b}}. \end{aligned}$$

E como $\|u\|_{X_\alpha^{s,b}} < +\infty$ e $\|v\|_{X_\alpha^{s,b}} < +\infty$, então nós apenas temos provar:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty \quad (2.26)$$

ou pelo Lema 2.3 (a), provar que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} < \infty. \quad (2.27)$$

Conseqüentemente, nós dividimos $\mathbb{R}^4 = \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1)\}$ em algumas regiões e provamos que ou (2.26) ou (2.27) se verificam em cada um deles.

De fato,

Supohamos que $|\xi| \lesssim 1$, então para $b \leq 1$ temos que

$$1 \leq \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}.$$

Então

$$\frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \lesssim 1. \quad (2.28)$$

Além disso se $\frac{1}{6} < b \leq 1$, então $\frac{1}{3} < 2b \leq 2$, logo pelo Lema 2.3 (c):

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2b}} \lesssim 1. \quad (2.29)$$

Portanto de (2.28) e (2.29):

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1,$$

onde $|\xi| \lesssim 1$ e $\frac{1}{6} < b \leq 1$.

Supohamos agora que $\xi \gtrsim 1$.

Então para $\xi > 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$ fixos.

Definimos

$$F(\xi_1) = \tau - \xi^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3.$$

Então

$$F(\xi_1) = \tau - \alpha\xi^3 - ((1 - \alpha)\xi_1^3 - 3\alpha\xi^2\xi_1 + 3\alpha\xi\xi_1^2).$$

Assim

$$\begin{aligned} F'(\xi_1) &= -((1 - \alpha)3\xi^2 - 3\alpha\xi^2 + 6\alpha\xi\xi_1) \\ &= -3((1 - \alpha)\xi_1^2 - \alpha\xi^2 + 2\alpha\xi\xi_1). \end{aligned}$$

Então resolvendo $F'(\xi_1) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -3((1 - \alpha)\xi_1^2 - \alpha\xi^2 + 2\alpha\xi\xi_1) \\ &= (1 - \alpha)\xi^2 - \alpha\xi^2 + 2\alpha\xi\xi_1 \\ &= (1 - \alpha)\xi^2 + 2\alpha\xi\xi_1 - \alpha\xi^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-2\alpha\xi \pm \sqrt{(2\alpha\xi)^2 - 4(1 - \alpha)(-\alpha\xi^2)}}{2(1 - \alpha)} \\ &= \frac{-2\alpha\xi \pm \sqrt{4\alpha^2\xi^2 + 4\alpha\xi^2 - 4\alpha^2\xi^2}}{2(1 - \alpha)} \\ &= \frac{-2\alpha\xi \pm 2\xi\sqrt{\alpha}}{2(1 - \alpha)} \\ &= \frac{-\alpha\xi \pm \xi\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} \\ &= \frac{(-\sqrt{\alpha} \pm 1)\xi\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Então

$$\xi_1^1 = r_1\xi \quad \text{e} \quad \xi_1^2 = r_2\xi,$$

onde $r_1 = \frac{-\alpha^{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt{\alpha}}$ e $r_2 = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{\alpha}}$.

Então $F(\xi_1)$ é monótona em qualquer dos intervalos $\langle -\infty, \xi_1^1 \rangle$, $[\xi_1^1, \xi_1^2]$ e $[\xi_1^2, +\infty)$.

Supohamos que $|F'(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2$.

Fazemos a mudança de variável $\mu = F(\xi_1)$ em qualquer dos intervalos anteriores.

Então

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle F(\xi_1) \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\langle \mu \rangle^{2b} |F'(\xi_1)|} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\langle \mu \rangle^{2b} |\xi|^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ pois } |F'(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2. \\
 &\leq \frac{1}{|\xi|} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\langle \mu \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{C}{|\xi|} \\
 &\lesssim \frac{1}{|\xi|}.
 \end{aligned}$$

Logo, quando $\frac{1}{2} < b \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha\xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} &\lesssim \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha\xi^3 \rangle^{1-b}} \frac{1}{|\xi|} \\
 &= \frac{1}{\langle \tau - \alpha\xi^3 \rangle^{1-b}} \\
 &\leq 1.
 \end{aligned}$$

E portanto

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha\xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1.$$

Por outra parte, definimos

$$G(\xi_1) = (\alpha - 1)\xi_1^2 + 3\alpha\xi^2 - 3\alpha\xi\xi_1.$$

Então

$$\begin{aligned}
 \xi_1 G(\xi_1) &= -\xi_1^3 + 3\alpha\xi^2\xi_1 - 3\alpha\xi\xi_1 + \alpha\xi_1^3 \\
 &= \alpha\xi^3 - \xi_1^3 - \alpha\xi^3 + 3\alpha\xi^2\xi_1 - 3\alpha\xi\xi_1 + \alpha\xi_1^3 \\
 &= \alpha\xi^3 - \xi_1^3 - \alpha(\xi^3 + 3\xi^2\xi_1 - 3\xi\xi_1 + \xi_1^3) \\
 &= \alpha\xi^3 - \xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \\
 &= \alpha\xi^3 - \xi_1^3 - \alpha\xi_2^3.
 \end{aligned}$$

Agora suponhamos que $|G(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2$ e $|\xi_1| \sim |\xi|$.

Então

$$\begin{aligned}
|\xi_1 G(\xi_1)| &= |\alpha \xi^3 - \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3| \\
&= |-\tau + \alpha \xi^3 + (\tau_1 + \tau_2) - \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3| \\
&= |-(\tau - \alpha \xi^3) + \tau_1 - \xi_1^3 + \tau_2 - \alpha \xi_2^3| \\
&\leq |\tau - \alpha \xi^3| + |\tau_1 - \xi_1^3| + |\tau_2 - \alpha \xi_2^3| \\
&\leq \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle + \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle + \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle \\
&\leq 3 \max\{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle, \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle, \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle\} \\
&\lesssim \max\{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle, \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle, \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle\}.
\end{aligned}$$

Agora seja $M := \max\{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle, \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle, \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle\}$.

Então

$$\begin{aligned}
M &\gtrsim |\xi_1 G(\xi_1)| \\
&= |\xi_1| |G(\xi_1)| \\
&\gtrsim |\xi_1| |\xi|^2.
\end{aligned}$$

Temos os casos

(a) Se $M = \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle \gtrsim |\xi_1| |\xi|^2 \sim \langle \xi_1 \rangle |\xi|^2$, então

$$\begin{aligned}
\frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \\
&\quad \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right) \frac{d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}}, \\
&\quad \text{por Fubini.} \\
&\leq \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \\
&\quad \left[\sup_{\xi_1 \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left[\sup_{\xi_1 \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{[\langle \xi_1 \rangle |\xi|^2]^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left[\sup_{\xi_1 \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_2}{\langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{|\xi|^{4b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \xi_1 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} [C_1]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|\xi|^{2b}} [C_2]^{\frac{1}{2}}, \text{ para alguns } C_1, C_2 > 0. \\
&= C_3 \frac{|\xi|^{1-2b}}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \\
&\lesssim |\xi|^{1-2b}, \text{ onde } \frac{1}{2} < b \leq 1. \\
&\leq |\xi|^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto se cumpre (2.26).

(b) Se $M = \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle \gtrsim |\xi_1| |\xi|^2 \sim \langle \xi_1 \rangle |\xi|^2$, então

$$\begin{aligned} \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b} \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \\ &\quad \left[\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right] \frac{d\xi_1}{\langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \\ &\quad \left[\sup_{\xi_1 \in \mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2b}} \right] \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

E repetimos o processo análogo como no item (a). Portanto se cumpre (2.26).

(c) Se $M = \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle \gtrsim |\xi_1| |\xi|^2$.

E como $|\xi_1| \sim |\xi|$, então temos que

$$\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle \gtrsim |\xi|^3,$$

assim, para $b \leq \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} [|\xi|^3]^{\frac{1}{3}} &\lesssim \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{\frac{1}{3}} \\ &\lesssim \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}. \end{aligned}$$

Então

$$|\xi| \lesssim \langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}.$$

O que implica que

$$\frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \lesssim 1.$$

Também para $b > \frac{1}{6}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi_1^3 - \alpha(\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2b}} \lesssim 1.$$

Por tanto

$$\sup_{\xi, \tau} \frac{|\xi|}{\langle \tau - \alpha \xi^3 \rangle^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle \tau - \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3 \rangle^{2b}} \lesssim 1.$$

Finalmente, nós precisamos demonstrar que

$$\begin{aligned} \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4 / \xi \gtrsim 1\} &\subset \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4 / |F'(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2\} \cup \\ &\quad \{(\xi, \xi_1, \tau, \tau_1) \in \mathbb{R}^4 / |G(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2, |\xi_1| \sim |\xi|\}. \end{aligned}$$

De fato:

Seja $\xi \gtrsim 1$ e consideramos a seguinte função

$$\begin{aligned}
 H(\xi_1) &= \frac{1}{3}F'(\xi_1) - G(\xi_1) \\
 &= \frac{1}{3}[-3((1-\alpha)\xi_1^2 - \alpha\xi^2 + 2\alpha\xi\xi_1)] - [(\alpha-1)\xi_1^2 + 3\alpha\xi^2 - 3\alpha\xi\xi_1] \\
 &= [(\alpha-1)\xi_1^2 + \alpha\xi^2 - 2\alpha\xi\xi_1] + [(1-\alpha)\xi_1^2 - 3\alpha\xi^2 + 3\alpha\xi\xi_1] \\
 &= -2\alpha\xi^2 + \alpha\xi\xi_1 \\
 &= \alpha\xi(-2\xi + \xi_1).
 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
 H(\xi_1) &= \alpha\xi(\xi_1 - 2\xi) \\
 &\leq \alpha\xi(\xi - 2\xi), \text{ se } \xi_1 \leq \xi \\
 &= \alpha\xi(-\xi) \\
 &= -\alpha\xi^2.
 \end{aligned}$$

Logo

$$-H(\xi_1) \geq \alpha\xi^2.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \alpha\xi^2 &\leq |-H(\xi_1)| \\
 &= |H(\xi_1)| \\
 &= \left|\frac{1}{3}F'(\xi_1) - G(\xi_1)\right| \\
 &\leq \left|\frac{1}{3}F'(\xi_1)\right| + |G(\xi_1)| \\
 &\leq |F'(\xi_1)| + |G(\xi_1)| \\
 &\leq 2 \max\{|F'(\xi_1)|, |G(\xi_1)|\}.
 \end{aligned}$$

Então

$$|\xi|^2 \lesssim \max\{|F'(\xi_1)|, |G(\xi_1)|\}, \text{ se } \xi_1 \leq \xi. \quad (2.30)$$

Agora se $\xi_1 \geq \xi \gtrsim 1$, temos que

$$2\alpha\xi\xi_1 \geq 2\alpha\xi\xi = 2\alpha\xi^2.$$

Assim

$$2\alpha\xi\xi_1 - \alpha\xi^2 \geq \alpha\xi^2.$$

O que implica

$$\begin{aligned}
 (1-\alpha)\xi_1^2 + 2\alpha\xi\xi_1 - \alpha\xi^2 &\geq (1-\alpha)\xi^2 + \alpha\xi^2 \\
 &= \xi^2.
 \end{aligned}$$

Então

$$F'(\xi_1) = -3[(1-\alpha)\xi^2 + 2\alpha\xi\xi_1 - \alpha\xi^2] \leq -3\alpha\xi^2.$$

Logo

$$-\frac{1}{3}F'(\xi_1) \geq \xi^2.$$

Então

$$|\frac{1}{3}F'(\xi_1)| \geq \xi^2.$$

Então

$$|F'(\xi_1)| + |G(\xi_1)| \geq \frac{1}{3}|F'(\xi_1)| \geq \xi^2.$$

O que implica

$$2 \max\{|F'(\xi_1)|, |G(\xi_1)|\} \geq \xi^2.$$

Assim

$$\max\{|F'(\xi_1)|, |G(\xi_1)|\} \gtrsim |\xi|^2, \text{ se } \xi_1 \geq \xi \gtrsim 1. \quad (2.31)$$

Portanto de (2.30) e (2.31):

$$\max\{|F'(\xi_1)|, |G(\xi_1)|\} \gtrsim |\xi|^2, \text{ para todo } \xi_1 \in \mathbb{R}$$

Logo; temos dois casos:

1. $|F'(\xi_1)| \gtrsim |\xi|^2$
2. $|F'(\xi_1)| \ll |\xi|^2$

Se for verificado 1, então temos a parte esquerda da inclusão.

Se for verificado 2, então

$$|G(\xi_1)| = \max\{|F'(\xi_1)|, |G(\xi_1)|\} \gtrsim |\xi|^2$$

Além disso, como $|F'(\xi_1)| \ll |\xi|^2$, então

$$|F'(\xi_1)| = |(\xi_1 - r_1\xi)(\xi_1 - r_2\xi)| < \theta\xi^2, \text{ onde } 0 < \theta \ll 1.$$

Então

$$\begin{aligned} \theta\xi^2 &> |\xi_1^2 - (r_1 + r_2)\xi\xi_1 + r_1r_2\xi^2| \\ &> |\xi_1^2 - [(r_1 + r_2)\xi\xi_1 - r_1r_2\xi^2]| \\ &\geq |\xi_1^2| - |(r_1 + r_2)\xi\xi_1 - r_1r_2\xi^2|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |\xi_1|^2 &< \theta\xi^2 + |(r_1 + r_2)\xi\xi_1 - r_1r_2\xi^2| \\ &\leq \theta\xi^2 + |(r_1 + r_2)\xi\xi_1| + |r_1r_2\xi^2| \\ &= \theta\xi^2 + C_1|\xi||\xi_1| + C_2|\xi^2| \\ &= (\theta + C_2)\xi^2 + C_1|\xi||\xi_1| \\ &\leq (\theta + C_2)\xi^2 + C_1|\xi||\xi_1| \\ &\leq C_3|\xi|^2 + C_1^2\frac{|\xi|^2}{2} + \frac{|\xi_1|^2}{2} \\ &= C_4|\xi|^2 + \frac{|\xi_1|^2}{2}. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{|\xi_1|^2}{2} < C_4|\xi|^2.$$

Portanto

$$|\xi_1| \lesssim |\xi|. \quad (2.32)$$

Além disso, temos que se verifica

$$\begin{aligned} \theta\xi^2 &> |\xi_1^2 - (r_1 + r_2)\xi_1\xi + r_1r_2\xi^2| \\ &= |r_1r_2\xi^2 + \xi_1^2 - (r_1 + r_2)\xi_1\xi| \\ &\geq |r_1r_2\xi^2| - |\xi_1^2 - (r_1 + r_2)\xi_1\xi|. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} |r_1r_2\xi^2| - \theta\xi^2 &< |\xi_1^2 - (r_1 + r_2)\xi_1\xi| \\ &\leq |\xi_1^2| + |(r_1 + r_2)||\xi_1||\xi|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} C_5|\xi|^2 &\leq |\xi_1|^2 + C_6|\xi||\xi_1| \\ &= |\xi_1|^2 + (C_5^{\frac{1}{2}}|\xi|)\frac{C_6|\xi_1|}{C_5^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq |\xi_1|^2 + \left[\frac{C_5|\xi|^2}{2} + \frac{C_6^2|\xi_1|^2}{2C_5} \right]. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{C_5|\xi|^2}{2} &\leq C_7|\xi_1|^2. \\ |\xi| &\lesssim |\xi_1|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto de (2.32) e (2.33):

$$|\xi| \sim |\xi_1|.$$

□

Lema 2.5. *Dados R e $\tilde{R}$ retângulos centrados em (a, b) e $(\tilde{a}, \tilde{b})$ cujas dimensões são $2\alpha \times 2\beta$. Dado R_0 a translação paralela de R , centrado em $(a + \tilde{a}, b + \tilde{b})$. Se verifica:*

$$\chi_R * \chi_{\tilde{R}}(\xi, \tau) \geq \alpha\beta\chi_{R_0}(\xi, \tau).$$

Observação 2.6.

Por outra parte na prova da Proposição (2.3), nós tñhamos

$$M = \max\{\langle \tau - \xi^3 \rangle, \langle \tau_1 - \alpha\xi_1^3 \rangle, \langle \tau_2 - \alpha\xi_2^3 \rangle\}.$$

Como

$$M \lesssim \langle \tau - \xi^3 \rangle + \langle \tau_1 - \alpha\xi_1^3 \rangle + \langle \tau_2 - \alpha\xi_2^3 \rangle. \quad (2.34)$$

Também

$$\langle \tau - \xi^3 \rangle + \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle + \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle \leq M + M + M \lesssim M. \quad (2.35)$$

Logo de (2.34) e (2.35):

$$\begin{aligned} M &\sim \langle \tau - \xi^3 \rangle + \langle \tau_1 - \alpha \xi_1^3 \rangle + \langle \tau_2 - \alpha \xi_2^3 \rangle \\ &= (1 + |\tau - \xi^3|) + (1 + |\tau_1 - \alpha \xi_1^3|) + (1 + |\tau_2 - \alpha \xi_2^3|) \\ &\geq |\tau - \xi^3| + |\tau_1 - \alpha \xi_1^3| + |\tau_2 - \alpha \xi_2^3| \\ &\geq |\tau - \xi^3 - (\tau_1 - \alpha \xi_1^3) - (\tau_2 - \alpha \xi_2^3)| \\ &= |\tau - \xi^3 - \tau_1 + \alpha \xi_1^3 - \tau_2 + \alpha \xi_2^3|, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2 \\ &= |-\xi^3 + \alpha \xi_1^3 + \alpha \xi_2^3| \\ &= |\xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3|. \end{aligned}$$

Então, $\xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3 = 0$, para muitos valores de ξ, ξ_1 e ξ_2 , causando ressonância.

Resolvendo a equação de ressonância:

$$\xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3 = 0, \text{ com } \xi = \xi_1 + \xi_2.$$

Isto é

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha \xi_2^3 \\ &= \xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha (\xi - \xi_1)^3 \\ &= \xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha (\xi^3 - 3\xi^2\xi_1 + 3\xi\xi_1^2 - \xi_1^3) \\ &= \xi^3 - \alpha \xi_1^3 - \alpha \xi^3 + 3\alpha\xi^2\xi_1 - 3\alpha\xi\xi_1^2 + \alpha\xi_1^3 \\ &= (1 - \alpha)\xi^3 + 3\alpha\xi^2\xi_1 - 3\alpha\xi\xi_1^2 \\ &= (1 - \alpha)\xi^2 + 3\alpha\xi\xi_1 - 3\alpha\xi_1^3, \text{ para } \xi \neq 0. \end{aligned}$$

Então

$$-3\alpha\xi_1^2 + 3\alpha\xi\xi_1 + (1 - \alpha)\xi^2 = 0.$$

Obtemos a soluções

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-3\alpha\xi \pm \sqrt{(3\alpha\xi)^2 - 4(-3\alpha)(1 - \alpha)\xi^2}}{2(-3\alpha)} \\ &= \left[\frac{-3\alpha \pm \sqrt{-3\alpha^2 + 12\alpha}}{2(-3\alpha)} \right] \xi \\ &= \left[\frac{3 \mp \sqrt{-3 + 12\alpha^{-1}}}{6} \right] \xi, \text{ para } \alpha > 0. \\ &= \left[\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{-3 + 12\alpha^{-1}}}{6} \right] \xi. \end{aligned}$$

Logo, os valores de ξ_1 são

$$\xi_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3 + 12\alpha^{-1}}}{6} \right] \xi = c_1 \xi$$

ou

$$\xi_1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3 + 12\alpha^{-1}}}{6} \right] \xi = c_2 \xi.$$

Portanto, os pontos de ressonância ocorrem em

$$(\xi_1, \xi_2) = (c_1 \xi, \xi - \xi_1) = (c_1 \xi, c_2 \xi) \quad \text{ou} \quad (\xi_1, \xi_2) = (c_2 \xi, \xi - \xi_1) = (c_2 \xi, c_1 \xi).$$

Proposição 2.2. *Se $s < 0$, as estimativas bilineares (2.23) e (2.24) falham para qualquer $b \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Nós só construímos o contraexemplo para (2.23), pois para (2.24) é semelhante. Como a ressonância só ocorre neste caso, quando

$$(\xi_1, \xi_2) = (c_1 \xi, c_2 \xi).$$

Escolhemos as funções f e g tais que

$$\text{supp}(f) \sim \xi_1 = c_1 N,$$

$$\text{supp}(g) \sim \xi_2 = c_2 N,$$

$$\text{supp}(f * g) \sim \xi = \xi_1 + \xi_2 = c_1 N + c_2 N = (c_1 + c_2)N = N.$$

Para N grande, consideramos dois retangulos R_j de dimensões $\sim N^{-2} \times 1$ e centrados em $(c_j N, \alpha(c_j N)^3) = (\xi_j, \alpha(\xi_j)^3)$, para $j = 1, 2$, tais que a interseção de ∂R_j e a curva $\tau = \alpha \xi^3$ são nos lados horizontais de R_j .

Note que a seguinte condição pode ser satisfeita para N grande desde a diagonal menor mais pequena de $\tau = \alpha \xi^3$ em R_j é $\sim 3\alpha C_j^2(N - N^{-2})^{-2} \sim N^2$ para N grande.

Agora sejam $f(\xi_1, \tau_1) = \chi_{R_1}$ e $g(\xi_2, \tau_2) = \chi_{R_2}$, tomando a norma em L^2

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\chi_{R_1}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mu(R_1))^{\frac{1}{2}} \\ &= (N^{-2})^{\frac{1}{2}} \\ &= N^{-1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|g\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \sim N^{-1}.$$

Em R_j temos

$$\langle \xi_j \rangle^s = (1 + |\xi_j|)^s = (1 + |c_j N|)^s = |c_j N|^s \sim N^s \quad \text{e} \quad \langle \tau_j - \alpha \xi_j^3 \rangle = (1 + |\tau_j - \alpha \xi_j^3|) = 1.$$

Mais ainda em $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g) = R_1 + R_2$, nós temos

$$\xi \sim N \quad \text{e} \quad \langle \tau - \xi^3 \rangle \sim 1.$$

Também $c_1N + c_2N = (c_1 + c_2)N = 1.N = N$ e

$$\begin{aligned}\alpha(c_1N)^3 + \alpha(c_2N)^3 &= \alpha N^3(c_1^3 + c_2^3) \\ &= \alpha N^3(c_1 + c_2)(c_1^2 - c_1c_2 + c_2^2) \\ &= \alpha N^3(1)\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\ &= N^3.\end{aligned}$$

Então $(a + \tilde{a}, b + \tilde{b}) = (c_1N + c_2N, \alpha(c_1N)^3 + \alpha(c_2N)^3) = (N, N^3)$.

Seja R_0 o retângulo centrado em (N, N^3) do mesmo tamanho que R_j . Então, temos

$$R_0 \subset R_1 + R_2,$$

e pelo Lema 2.5, temos que qumpre-se

$$\begin{aligned}(f * g)(\xi, \tau) &= (\chi_{R_1} * \chi_{R_2})(\xi, \tau) \\ &\geq \left(\frac{N^{-2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \chi_{R_0}(\xi, \tau) \\ &= \frac{N^{-2}}{4} \chi_{R_0}(\xi, \tau).\end{aligned}$$

Agora supohamos que a estimativa bilinear (5) cumpre-se, isto é

$$\|\partial_x(v_1v_2)\|_{X^{s,b-1}} \lesssim \|v_1\|_{X_\alpha^{s,b}} \|v_2\|_{X_\alpha^{s,b}},$$

ou equivalentemente

$$\|\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \lesssim \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \|g\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = N^{-1}N^{-1} = N^{-2}. \quad (2.36)$$

Por outro lado, temos que se satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} &\sim \left\| \frac{NN^s}{1^{1-b}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{N^s 1^b} \frac{g(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{N^s 1^b} d\tau_1 d\xi_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= N^{1-s} \|(f * g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= N^{1-s} \|(\chi_{R_1} * \chi_{R_2})(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &\geq N^{1-s} \frac{N^{-2}}{4} \|\chi_{R_0}(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= N^{1-s} \frac{N^{-2}}{4} N^{-1}.\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\|\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \gtrsim N^{-2-s}. \quad (2.37)$$

Logo de (2.36) e (2.37), temos que

$$N^{-2-s} \lesssim \|\mathcal{B}_{s,b}(f, g)(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \lesssim N^{-2}.$$

Então

$$N^{-s} \lesssim 1.$$

Assim

$$s \geq 0 \text{ (contradição).}$$

□

2.4 Teorema Principal

Teorema 2.1 (Boa Colocação local). *Seja $s \geq 0$, $b > \frac{1}{2}$ e $0 < \alpha < 1$ para qualquer par $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, existe $T = T(\|(u_0, v_0)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}) > 0$, e uma única solução do problema (3) da forma $(\eta_T u, \eta_T v)$ com $(u, v) \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2) \times X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ no intervalo de tempo $[-T, T]$ tal que*

$$(u, v) \in C([-T, T] : H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})). \quad (2.38)$$

Demonstração. Para $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 0$ e $\|(u_0, v_0)\| = r \ll 1$ nos definimos o operador

$$\Phi_{(u_0, v_0)}(u, v)(t) = (\Phi_1(u, v)(t), \Phi_2(u, v)(t)),$$

onde

$$\Phi_1(u, v)(t) = \eta_1(t)S(t)u_0 - \eta_1(t) \int_0^t S(t-t')\eta_\delta(t')(vv_x)(t') dt',$$

$$\Phi_2(u, v)(t) = \eta_1(t)S_\alpha(t)v_0 - \eta_1(t) \int_0^t S_\alpha(t-t')\eta_\delta(t')(uv)_x(t') dt'.$$

Vamos provar que $\Phi(\cdot)$ define uma contração no espaço

$$\Omega_{4Cr} := \left\{ (u, v) \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2) \times X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2) : \|u\|_{X^{s,b}} \leq 2Cr, \|v\|_{X_\alpha^{s,b}} \leq 2Cr \right\}, \quad (2.39)$$

então Ω_{4Cr} é um espaço métrico completo com a norma

$$\|(u, v)\|_{\Omega_{4Cr}} := \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} + \|v\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.$$

Primeiro vamos provar que $\Phi : \Omega_{4Cr} \longrightarrow \Omega_{4Cr}$.

Seja $(u, v) \in \Omega_{4Cr}$. Usando o Lema (2.1), Lema (2.2), a Proposição (2.3) e a definição de Ω_{4Cr} , nós temos

$$\|\Phi(u, v)\|_{\Omega_{4Cr}} = \|\Phi_1(u, v)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} + \|\Phi_2(u, v)\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.$$

Então temos que

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u, v)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} &\leq \|\eta_1(t)S(t)u_0\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} + \|\eta_1(t) \int_0^t S(t-t')\eta_\delta(t')(vv_x)(t') dt'\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + C\|\eta_\delta(t)\partial_x(\frac{v^2}{2})\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} \\ &= C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + C\delta^{\frac{b-b'}{8(1-b')}}\|\partial_x(\frac{v^2}{2})\|_{X^{s,b'-1}(\mathbb{R}^2)} \\ &= C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + C\|\partial_x(\frac{v^2}{2})\|_{X^{s,b-1}(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq Cr + \|v\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq Cr + C(2Cr)^2, \end{aligned}$$

Similarmente temos que

$$\|\Phi_2(u, v)\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq Cr + C(2Cr)^2.$$

Então

$$|||\Phi(u, v)|||_{\Omega_{4Cr}} \leq 2Cr + 2C(2Cr)^2.$$

Assim nos pegamos r tal que $4C^2r \leq 1$. O que implica que a norma

$$|||\Phi(u, v)|||_{\Omega_{4Cr}} \leq 2Cr + 2Cr = 4Cr.$$

Logo, $\Phi(u, v) \in \Omega_{4Cr}$.

Similarmente usando os Lemas anteriores, para $w, \tilde{w} \in \Omega_{4Cr}$, onde $w = (w_1, w_2), \tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$, se obtém que

$$|||\Phi(w) - \Phi(\tilde{w})|||_{\Omega_{4Cr}} \leq \frac{1}{2} \left(\|w_1 - \tilde{w}_1\|_{X^{s,b}} + \|w_2 - \tilde{w}_2\|_{X_\alpha^{s,b}} \right) = \frac{1}{2} |||w - \tilde{w}|||_{\Omega_{4Cr}}.$$

Então $\Phi(\cdot)$ é uma contração.

Por tanto existe um único $(u, v) \in \Omega_{4Cr}$ tal que $\Phi(u, v) = (u, v)$, isto é :

$$\begin{cases} u(t) = \eta_1(t)S(t)u_0 - \eta_1(t) \int_0^t S(t-t')\eta_\delta(t')(vv_x)(t') dt' \\ v(t) = \eta_1(t)S_\alpha(t)v_0 - \eta_1(t) \int_0^t S_\alpha(t-t')\eta_\delta(t')(uv)_x(t') dt'. \end{cases}$$

Conseqüentemente, no intervalo de tempo $[-1, 1]$, (u, v) resolve o sistema integral associada ao sistema (3). E pela propriedade dos espaços de Bourgain

$$(u, v) \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2) \times X^{s,b}(\mathbb{R}^2) \subset C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})).$$

Agora supohamos que $M > 1$ e $N > 1$, para $s \geq 0$ e $b > \frac{1}{2}$, vamos definir

$$\Omega_{MN} := \{(u, v) \in X^{s,b} \times X_\alpha^{s,b} : \|u\|_{X^{s,b}} \leq M, \|v\|_{X_\alpha^{s,b}} \leq N\},$$

onde $M = 2C\|u_0\|_{H^s}$ e $M = 2C\|u_0\|_{H^s}$.

Vamos provar que $\Phi(\cdot)$ define uma contração no espaço métrico completo Ω_{MN} .

De fato, como no caso anterior vamos ter que, dado $(u, v) \in \Omega_{MN}$, então

$$\|\Phi_1(u, v)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{M}{2} + C_1\delta^\theta\{N^2\}$$

e

$$\|\Phi_2(u, v)\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{N}{2} + C_2\delta^\theta\{MN\},$$

onde $\theta = \frac{b-b'}{8(1-b')}$ com $b' < b$ e $b, b' \in (1/2, 1)$.

Nos escolhemos δ tal que

$$\delta^\theta \leq (2 \max\{C_1, C_2\}(M + N)^2)^{-1},$$

então nós temos que

$$\|\Phi_1(u, v)\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq M \text{ e } \|\Phi_2(u, v)\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq N.$$

Portanto

$$\Phi(u, v) \in \Omega_{MN}.$$

Similarmente usando os Lemas anteriores, para $w, \tilde{w} \in \Omega_{MN}$ se obtém que

$$|||\Phi(w) - \Phi(\tilde{w})|||_{\Omega_{MN}} \leq \frac{1}{2} |||w - \tilde{w}|||_{\Omega_{MN}}.$$

Então $\Phi(\cdot)$ é uma contração.

Por tanto existe um único ponto fixo (u, v) que resolve o problema de Cauchy (3) para $t \in [-T, T]$ com $T \leq \delta$.

□

Capítulo 3

Má Colocação do Problema não linear

3.1 Introdução

Considere o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0 \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (\delta\phi(x), \delta\psi(x)) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\delta \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Suponha que $(u(x, t, \delta), v(x, t, \delta))$ é a solução do sistema acima.

Se $\delta = 0$, então $(u(x, t, 0), v(x, t, 0)) = 0$ é a única solução do sistema (3.1).

Além disso, escrevendo as equações integrais, temos:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= S(t)\{\delta\phi(t)\} - \int_0^t S(t-t') \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right)(t') dt' \\ v(t, x) &= S_\alpha(t)\{\delta\psi(t)\} - \int_0^t S_\alpha(t-t') \partial_x (uv)(t') dt' \end{aligned}$$

onde $S(t) = e^{i\partial_x^3}$ e $S_\alpha(t) = e^{i\alpha\partial_x^3}$.

Tomando derivada parcial de u e v em δ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \delta}(x, t, \delta) &= S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-t') \partial_\delta (vv_x)(x, t', \delta) dt' \\ &= S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-t') (v_\delta v_x + vv_{x\delta})(x, t', \delta) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \delta}(x, t, \delta) &= S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-t') \partial_\delta (uv)(x, t', \delta) dt' \\ &= S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-t') (u_\delta v + uv_\delta)(x, t', \delta) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2}(x, t, \delta) &= - \int_0^t S(t-t') \partial_\delta (v_\delta v_x + v v_{x\delta})(x, t', \delta) dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') (v_{\delta\delta} v_x + v_\delta v_{x\delta} + v_\delta v_{x\delta} + v v_{x\delta\delta})(x, t', \delta) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \delta^2}(x, t, \delta) &= - \int_0^t S(t-t') \partial_\delta (u_{x\delta} v + u_x v_\delta + u_\delta v_x + u v_{x\delta})(x, t', \delta) dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') (u_{x\delta\delta} + u_{x\delta} v_\delta + u_{x\delta} v_\delta + u_x v_{\delta\delta} + \\
&\quad u_{\delta\delta} v_x + u_\delta v_{x\delta} + u_\delta v_{x\delta} + u v_{x\delta\delta})(x, t', \delta) dt'.
\end{aligned}$$

Então, avaliando em $\delta = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \delta}(x, t, 0) &= S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-t') (v_\delta v_x + v v_{x\delta})(x, t', 0) dt' \\
&= S(t)\phi(x) - \int_0^t S(t-t') [v_\delta(x, t', 0)v_x(x, t', 0) + v(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0)] dt' \\
&= S(t)\phi(x) \\
&=: \phi_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \delta}(x, t, 0) &= S_\alpha(t)\psi(x) - \int_0^t S_\alpha(t-t') (u_{x\delta} v + u_x v_\delta + u_\delta v_x + u v_{x\delta})(x, t', 0) dt' \\
&= S_\alpha(t)\psi(x) - \int_0^t S_\alpha(t-t') [u_{x\delta}(x, t', 0)v(x, t', 0) + u_x(x, t', 0)v_\delta(x, t', 0) + \\
&\quad u_\delta(x, t', 0)v_x(x, t', 0) + u(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0)] dt' \\
&= S_\alpha(t)\psi(x) \\
&=: \psi_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \delta^2}(x, t, 0) &= - \int_0^t S(t-t') [v_{\delta\delta}(x, t', 0)v_x(x, t', 0) + v_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0) + \\
&\quad v_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0) + v(x, t', 0)v_{x\delta\delta}(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') [v_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0) + v_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') [2v_\delta(x, t', 0)v_{\delta x}(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') \partial_x [v_\delta^2(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') \partial_x [\psi_1^2] dt' \\
&=: \phi_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \delta^2}(x, t, 0) &= - \int_0^t S(t-t') [u_{x\delta\delta}(x, t', 0)v(x, t', 0) + u_{x\delta}(x, t', 0)v_\delta(x, t', 0) + \\
&\quad u_{x\delta}(x, t', 0)v_\delta(x, t', 0) + u_x(x, t', 0)v_{\delta\delta}(x, t', 0) + u_{\delta\delta}(x, t', 0)v_x(x, t', 0) + \\
&\quad u_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0) + u_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0) + u(x, t', 0)v_{x\delta\delta}(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') [2u_{x\delta}(x, t', 0)v_\delta(x, t', 0) + 2u_\delta(x, t', 0)v_{x\delta}(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') [2u_{\delta x}(x, t', 0)v_\delta(x, t', 0) + 2u_\delta(x, t', 0)v_{\delta x}(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') \partial_x [2u_\delta(x, t', 0)v_\delta(x, t', 0)] dt' \\
&= - \int_0^t S(t-t') \partial_x [2\phi_1\psi_1] dt' \\
&=: \psi_2.
\end{aligned}$$

Note que, se a função solução $\phi_t : H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ tal que, $\phi_t(u_0, v_0) = (u(t), v(t))$ é de classe C^2 , para t fixado, com $|t| < 1$, nós devemos ter:

$$\|\partial_\delta^2(u, v)(\cdot, t, 0)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} = \|(\phi_2, \psi_2)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \lesssim \|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}^2.$$

De fato;

$$\begin{aligned}
\|\partial_\delta(u, v)(\cdot, t, 0)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} &= \|(\phi_1, \psi_1)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \\
&= \|\phi_1\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\psi_1\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{\phi_1}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{\psi_1}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{S(t)\phi(x)}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{S_\alpha(t)\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |e^{i\xi^3 t} \widehat{\phi(x)}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |e^{i\alpha\xi^3} \widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{\phi(x)}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

O que implica que:

$$\|(\phi_1, \psi_1)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} = \|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}$$

Além disso, nós podemos obter a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\|\partial_\delta^2(u, v)(\cdot, t, 0)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} &= \|(\phi_2, \psi_2)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \\
&= \|\phi_2\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} + \|\psi_2\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \\
&= \|\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi_2}(\xi)|\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + \|\langle \xi \rangle^s |\widehat{\psi_2}(\xi)|\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\langle \xi \rangle^s | \{ - \int_0^t S(t-t') \partial_x [\psi_1^2](t') dt' \}^\wedge(\xi) \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + \\
&\quad \|\langle \xi \rangle^s | \{ - \int_0^t S_\alpha(t-t') \partial_x [2\phi_1 \psi_1](t') dt' \}^\wedge(\xi) \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t \{ S(t-t') \partial_x [\psi_1^2](t') \}^\wedge(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + \\
&\quad \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t \{ S_\alpha(t-t') \partial_x [2\phi_1 \psi_1](t') \}^\wedge(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t e^{i\xi^3(t-t')} \{ \partial_x [\psi_1^2](t') \}^\wedge(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + \\
&\quad \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t e^{i\alpha\xi^3(t-t')} \{ \partial_x [2\phi_1 \psi_1](t') \}^\wedge(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t e^{i\xi^3(t-t')} i\xi \{ [\psi_1^2](t') \}^\wedge(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + \\
&\quad \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t e^{i\alpha\xi^3(t-t')} i\xi \{ [2\phi_1 \psi_1](t') \}^\wedge(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t e^{i\xi^3(t-t')} i\xi \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi_1}(\xi - \xi_1) \widehat{\psi_1}(\xi_1) d\xi_1 dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} + \\
&\quad \|\langle \xi \rangle^s | \int_0^t e^{i\alpha\xi^3(t-t')} 2i\xi \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_1}(\xi - \xi_1) \widehat{\psi_1}(\xi_1) d\xi_1(\xi) dt' \|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

3.2 Teorema Principal

Teorema 3.1. *Seja $(u(x, t, \delta), v(x, t, \delta))$ uma solução do sistema (3.1) de classe C^2 . Então $s \geq 0$.*

Demonstração. Seja $\phi(x) = 0$ e

$$\psi(x) = 2\gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left\{ \cos(c_1 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi + \cos(c_2 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi \right\},$$

onde $\gamma = \epsilon N^{-2}$ e $\epsilon, N > 0$ nós escolhemos depois. Então

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\xi) &= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[2\{\cos(c_1 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) + 2\{\cos(c_2 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) \right] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} [\{\cos(c_1 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) \pm i\{\sin(c_1 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) + \\
&\quad \{\cos(c_2 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) \pm i\{\sin(c_2 N x) \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi)] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} [\{e^{\pm i c_1 N x} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) + \{e^{\pm i c_2 N x} \int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi)] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} [\{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{\pm i c_1 N x} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) + \{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{\pm i c_2 N x} e^{i\xi x} d\xi\}^{\wedge}(\xi)] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} [\{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i(\xi \pm c_1 N)x} d\xi\}^{\wedge}(\xi) + \{\int_{-\gamma}^{\gamma} e^{i(\xi \pm c_2 N)x} d\xi\}^{\wedge}(\xi)] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} [\{\int_{-\gamma \pm c_1 N}^{\gamma \pm c_1 N} e^{i\tau x} d\tau\}^{\wedge}(\xi) + \{\int_{-\gamma \pm c_2 N}^{\gamma \pm c_2 N} e^{i\tau x} d\tau\}^{\wedge}(\xi)] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} [\chi_I(\xi) + \chi_J(\xi)]
\end{aligned}$$

onde, $I = [-\gamma \pm c_1 N, \gamma \pm c_1 N]$ e $J = [-\gamma \pm c_2 N, \gamma \pm c_2 N]$.

Assim, nós temos

$$\begin{aligned}
\|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} &= \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \gamma^{-1} N^{-2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\chi_I(\xi) + \chi_J(\xi)|^2 d\xi \\
&= \gamma^{-1} N^{-2s} [\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \chi_I^2(\xi) d\xi + 2 \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \chi_I(\xi) \chi_J(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \chi_J^2(\xi) d\xi] \\
&\leq \gamma^{-1} N^{-2s} [\int_I \langle \xi \rangle^{2s} d\xi + 2 \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \chi_I(\xi) + \int_J \langle \xi \rangle^{2s} d\xi] \\
&\sim \gamma^{-1} N^{-2s} [\int_I N^{2s} d\xi + 2 \int_I N^{2s} + \int_J N^{2s} d\xi] \\
&= \gamma^{-1} [\int_I d\xi + 2 \int_I d\xi + \int_J d\xi] \\
&= \gamma^{-1} [2\gamma + 4\gamma + 2\gamma] \\
&\sim 1.
\end{aligned}$$

Logo

$$\|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \lesssim 1,$$

além disso, cumpre-se

$$\|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \gtrsim 1.$$

Portanto

$$\|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \sim 1.$$

Por outra parte

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= S_\alpha(t)\psi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{S_\alpha(t)\psi}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\alpha\xi^3 t} \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\alpha\xi^3 t} [\gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} (\chi_I(\xi) + \chi_J(\xi))] d\xi \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x + \alpha\xi^3 t)} \chi_I(\xi) d\xi \right] + \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi x + \alpha\xi^3 t)} \chi_J(\xi) d\xi \right] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[\int_I e^{i(\xi x + \alpha\xi^3 t)} d\xi \right] + \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[\int_J e^{i(\xi x + \alpha\xi^3 t)} d\xi \right] \\
&= \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[\int_{|\xi \pm c_1 N| < \gamma} e^{i(\xi x + \alpha\xi^3 t)} d\xi \right] + \gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} \left[\int_{|\xi \pm c_2 N| < \gamma} e^{i(\xi x + \alpha\xi^3 t)} d\xi \right]
\end{aligned}$$

Seja $A = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 / |\xi_1 \pm c_1 N| < \gamma, |\xi_2 \pm c_2 N| < \gamma\}$ e $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Então, temos:

$$\begin{aligned}
\phi_2(x, t) &= \partial_\delta^2 u(x, t, 0) \\
&= - \int_0^t S(t-t') \partial_x (\psi_1^2)(t') dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} S(t-t') \widehat{\partial_x (\psi_1^2)}(t')(\xi) d\xi dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\xi^3(t-t')} \partial_x (\widehat{\psi_1^2})(t')(\xi) d\xi dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\xi^3(t-t')} i\xi (\widehat{\psi_1^2})(t')(\xi) d\xi dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\xi^3(t-t')} i\xi [\widehat{\psi_1} * \widehat{\psi_1}](\xi) d\xi dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\xi^3(t-t')} i\xi [\widehat{S_\alpha(t')\psi} * \widehat{S_\alpha(t')\psi}](\xi) d\xi dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\xi^3(t-t')} i\xi [e^{i\alpha t'(\cdot)^3} \widehat{\psi}(\cdot) * e^{i\alpha t'(\cdot)^3} \widehat{\psi}(\cdot)](\xi) d\xi dt' \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{i\xi^3(t-t')} i\xi \left[\int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha t'(\xi-\xi_1)^3} \widehat{\psi}(\xi-\xi_1) e^{i\alpha t'(\xi_1)^3} \widehat{\psi}(\xi_1) d\xi_1 \right] d\xi dt' \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} i\xi e^{i\xi x} e^{i\xi^3 t} \widehat{\psi}(\xi-\xi_1) \widehat{\psi}(\xi_1) \left[\int_0^t e^{-i\xi^3 t'} e^{i\alpha t'(\xi-\xi_1)^3} e^{i\alpha t' \xi_1^3} dt' \right] d\xi_1 d\xi \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} i\xi e^{i\xi x} e^{i\xi^3 t} \widehat{\psi}(\xi-\xi_1) \widehat{\psi}(\xi_1) \left[\int_0^t e^{i(-\xi^3 + \alpha(\xi-\xi_1)^3 + \alpha\xi_1^3)t'} dt' \right] d\xi_1 d\xi \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} i\xi e^{i\xi x} e^{i\xi^3 t} \widehat{\psi}(\xi-\xi_1) \widehat{\psi}(\xi_1) \left[\int_0^t e^{i(-\xi^3 + \alpha(\xi-\xi_1)^3 + \alpha\xi_1^3)t'} dt' \right] d\xi_1 d\xi
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\phi_2(x, t) &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} i\xi e^{i\xi x} e^{i\xi^3 t} \widehat{\psi}(\xi - \xi_1) \widehat{\psi}(\xi_1) \left[\frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi^3)t} - 1}{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi^3)} \right] d\xi_1 d\xi \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \xi e^{i\xi x} e^{i\xi^3 t} [\gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} (\chi_I(\xi - \xi_1) + \chi_J(\xi - \xi_1))] \\
&\quad [\gamma^{-\frac{1}{2}} N^{-s} (\chi_I(\xi_1) + \chi_J(\xi_1))] \left[\frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi^3)t} - 1}{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha(\xi - \xi_1)^3 - \xi^3)} \right] d\xi_1 d\xi \\
&= -\gamma^{-1} N^{-2s} \iint_A \xi e^{i\xi x} e^{i\xi^3 t} \left[\frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)t} - 1}{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)} \right] d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\|\phi_2(\cdot, t)\|_{H_x^s(\mathbb{R})} &= \|\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi_2}(\xi, t)|\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\geq \|\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi_2}(\xi, t)| \chi_{|\xi|=N+O(\gamma)}\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Assim, restringindo nossa atenção para $\{\xi \in \mathbb{R} / \xi = N + O(\gamma)\}$, em:

$$\widehat{\phi_2}(\xi, t) = \gamma^{-1} N^{-2s} i\xi e^{i\xi^3 t} \int_{\{\xi=\xi_1+\xi_2\} \cap A} \frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)t} - 1}{\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3} d\xi_1$$

Nós vemos que a contribuição para $\{\xi \in \mathbb{R} / \xi = N + O(\gamma)\}$, vem somente de

$B = \{\xi = \xi_1 + \xi_2 / |\xi_1 - c_1 N| < \gamma \text{ e } |\xi_2 - c_2 N| < \gamma\}$, já que $c_1 + c_2 = 1$. Também note que, para N suficientemente grande e para cada $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
|\xi_j^3 - (c_j N)^3| &= |\xi_j - c_j N| |\xi_j^2 + \xi_j(c_j N) + (c_j N)^2| \\
&< \gamma [|\xi_j^2| + |\xi_j(c_j N)| + |(c_j N)^2|] \\
&\sim \gamma [N^2 + |c_j N| |c_j N| + |c_j|^2 N^2] \\
&= \gamma (1 + 2c_j^2) N^2 \\
&\lesssim \gamma N^2 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Além disso em B , nós temos:

$$\begin{aligned}
|\xi^3 - N^3| &= |\xi - N| |\xi^2 + \xi N + N^2| \\
&\leq 2\gamma [|\xi^2| + |\xi| |N| + |N^2|] \\
&\sim 2\gamma [|N^2| + |N| |N| + |N^2|] \\
&= 6\gamma N^2 \\
&\lesssim \gamma N^2 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por outra parte, da seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
 \alpha(c_1 N)^3 + \alpha(c_2 N)^3 &= \alpha c_1^3 N^3 + \alpha c_2^3 N^3 \\
 &= \alpha(c_1^3 + c_2^3) N^3 \\
 &= \alpha(c_1 + c_2)(c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2) N^3 \\
 &= \alpha(1)\left(\frac{1}{\alpha}\right) N^3 \\
 &= N^3.
 \end{aligned}$$

Logo;

$$\alpha(c_1 N)^3 + \alpha(c_2 N)^3 - N^3 = 0$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
 |\alpha \xi_1^3 + \alpha \xi_2^3 - \xi^3| &= |\alpha \xi_1^3 + \alpha \xi_2^3 - \xi^3 - [\alpha(c_1 N)^3 + \alpha(c_2 N)^3 - N^3]| \\
 &= |\alpha \xi_1^3 - \alpha(c_1 N)^3 + \alpha \xi_2^3 - \alpha(c_2 N)^3 - \xi^3 + N^3| \\
 &= |\alpha(\xi_1^3 - (c_1 N)^3) + \alpha(\xi_2^3 - (c_2 N)^3) - (\xi^3 - N^3)| \\
 &\leq \alpha|\xi_1^3 - (c_1 N)^3| + \alpha|\xi_2^3 - (c_2 N)^3| + |\xi^3 - N^3| \\
 &\lesssim \alpha\epsilon + \alpha\epsilon + \epsilon \\
 &= (2\alpha + 1)\epsilon \\
 &\lesssim \epsilon.
 \end{aligned}$$

Já que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{i\theta t} - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{it e^{i\theta t}}{1} \\
 &= it
 \end{aligned}$$

Então nós temos, para θ suficientemente pequeno:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta t} - 1}{\theta} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\theta t} - 1}{\theta} \right) \geq \frac{t}{2}.$$

Agora nós escolhemos ϵ muito pequeno, talque as desigualdades acima se mantêm, com:

$$|\theta| = |\alpha \xi_1^3 + \alpha \xi_2^3 - \xi^3| \lesssim \epsilon.$$

Nós temos:

$$\begin{aligned}
|\widehat{\phi_2}(\xi, t) \chi_{|\xi|=N+O(\gamma)}| &\sim |\gamma^{-1} N^{-2s} i \xi e^{i\xi^3 t} \int_B \frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)t} - 1}{\alpha\xi^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3} d\xi_1| \\
&= \gamma^{-1} N^{-2s} |\xi| \left| \int_B \frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)t} - 1}{\alpha\xi^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3} d\xi_1 \right| \\
&\sim \gamma^{-1} N^{-2s} N \left| \int_B i \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)t} - 1}{\alpha\xi^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3} \right] d\xi_1 \right| \\
&\geq \gamma^{-1} N^{-2s} N \left| \int_B i \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i(\alpha\xi_1^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3)t} - 1}{\alpha\xi^3 + \alpha\xi_2^3 - \xi^3} \right] d\xi_1 \right| \\
&\geq \gamma^{-1} N^{-2s} N \left| \int_B i \frac{t}{2} d\xi_1 \right| \\
&= \gamma^{-1} N^{-2s+1} \frac{t}{2} \left| \int_B 1 d\xi_1 \right|
\end{aligned}$$

Do Lema 5.8, nós temos:

$$\begin{aligned}
\int_B 1 d\xi_1 &= \chi_{|(\cdot) - c_1 N| < \gamma} * \chi_{|(\cdot) - c_2 N| < \gamma}(\xi) \\
&\geq \frac{1}{2} \gamma \chi_{|\xi - N| < \gamma}(\xi).
\end{aligned}$$

Então, tomando a norma $L^2(\mathbb{R})$ a ϕ_2 ; nós temos:

$$\begin{aligned}
\|\phi_2(\cdot, t)\|_{H_x^s(\mathbb{R})} &= \|\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi_2}(\xi, t)|\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\geq \|\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi_2}(\xi, t) \chi_{|\xi|=N+O(\gamma)}|\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&\gtrsim \|N^s \gamma^{-1} N^{-2s+1} \frac{t}{2} (\frac{1}{2} \gamma \chi_{|\xi-N| < \gamma}(\xi))\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= N^{-s+1} \frac{t}{4} \|\chi_{|\xi-N| < \gamma}(\xi)\|_{L_\xi^2(\mathbb{R})} \\
&= N^{-s+1} \frac{t}{4} 2\gamma^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{t}{2} \gamma^{\frac{1}{2}} N^{-s+1} \\
&= \frac{t}{2} (\epsilon N^{-2})^{\frac{1}{2}} N^{-s+1} \\
&= \frac{t}{2} \epsilon^{\frac{1}{2}} N^{-s} \\
&\sim N^{-s}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
1 \sim \|(\phi, \psi)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})}^2 &\gtrsim \|(\phi_2, \psi_2)\|_{H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})} \\
&= \|\phi_2\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\psi_2\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\geq \|\phi_2\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\gtrsim N^{-s}, \text{ para } N \text{ suficientemente grande.}
\end{aligned}$$

Portanto: $s \geq 0$

□

Apêndice A

Boa Colocação para EDPs - Principais Métodos Utilizados

Estamos interessados em obter existência e unicidade para sistemas dispersivos governados por EDPs. Vamos començar a definir as noções de boa colocação que são bem gerais e podem ser aplicadas para diferentes equações de evolução.

Definição 3.1. *Diremos que o problema de Cauchy para a equação (3) é (localmente) bem posto em $H^s(M)$ se, para cada subconjunto limitado B de $H^s(M)$, existe $T > 0$ e um espaço de Banach X_T contido continuamente em $C([-T, T], H^s(M))$ tal que:*

(i) *Para cada dado $u_0 \in B$, o problema de Cauchy (3) tem uma única solução $u \in X_T$ tal que $u(0) = u_0$.*

(ii) *Se $u_0 \in H^\sigma$ para $\sigma > s$, então $u \in C([-T, T], H^\sigma(M))$.*

(iii) *O mapa*

$$u_0 \in B \mapsto u \in X_T$$

é contínuo.

Além disso, diremos que o problema de Cauchy para a equação (3) é globalmente bem posto em $H^s(M)$ se as propriedades (i), (ii), (iii) acima são validas para cada tempo $T > 0$.

Definição 3.2. *Diremos que o problema de Cauchy para a equação (3) é (localmente) uniformemente bem posto em $H^s(M)$ se é bem posto em $H^s(M)$ e se, com a notação da Definição 3.1 o mapa $u_0 \in B \mapsto u \in X_T$ é uniformemente contínuo.*

Um define similarmente a boa colocação global uniforme. Em comparação com a definição com a Definição 3.1, boa colocação uniforme pode ser entendida como um requisito adicional de estabilidade de alta frequência para um tempo uniforme pequeno.

Definição 3.3. *Diremos que o problema de Cauchy para a equação (3) é (localmente) regularmente bem posto em $H^s(M)$ se for bem posicionado em $H^s(M)$ e se, com a notação da Definição 3.1, o mapa $u_0 \in \text{int}(B) \mapsto u \in X_T$ é suave.*

Um define da mesma forma a boa colocação global regular .

Bibliografia

- [1] **T. Oh**, Diophantine Condition in Well-Posedness Theory of coupled KdV - Type systems: Local Theory, Int. Math. Res. Not, no. 18, p. 3516-3556, Canada, 2009.
- [2] **F. Linares and G. Ponce**, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Springer-Verlag, New York, 2015.
- [3] **J. Ginibre and Y. Sutsumi**, On the Cauchy Problem for the Zakharov System, J. Funct. Analysis 151, no. 2, p. 384-436, New York, 1997.
- [4] **C. Kening, G. Ponce and L. Vega**, A Bilinear estimate with applications to the KdV equation, Journal of the American Mathematical Society. 9, no. 2, 573-603. 1996.
- [5] **C. Kening, G. Ponce and L. Vega**, The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equations in Sobolev space of negative indices, Duke Math. J. 71, no. 1, 1-21. 1993.
- [6] **L. C. Evans**, Partial Differential Equations, Amercian Mathematical Society, 2010.
- [7] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, 1983.
- [8] **R. J. Iório and V. Iório**, Ecuacões Diferenciais Parciais: Uma introdução, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [9] **K. Yosida**, Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [10] **L. A. Medeiros and M. Milla Miranda**, Espaços de Sobolev. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [11] **A. Majda e J. Biello**, The nonlinear interaction of barotropic and equatorial baroclinic Rossby waves, J. Atmospheric Sci. 60. Nro 15, 1809-1821, 2003.
- [12] **J. Bourgain**, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and aplications to nonlinear evolution equations II, Geom. Funct. Anal., 209-262, 1993.
- [13] **T. Tao**, Nonlinear Dispersive Equations Local and Global Analysis, Conference Board of the mathemat Sciencses Nro, 106, 2005.
- [14] **J. A. Gear and R. Grimshaw**, Weak and Strong interactions between internal solitary system, Stud. Appl. Math. 70, no.3, 235-258, 1984.
- [15] **R. Hirota and J. Satsuma**, Soliton solution of a coupled Korteweg-de Vries equation, Partial Diff. Eq. 2, 408-409, 1981.

- [16] **J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao**, Sharp Global Well-Posedness for KdV and Modified KdV in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc. 16, no. 3, 705-749, 2003.
- [17] **M. Christ, J. Colliander and T. Tao**, Asymptotics, frequency modulation, and low-regularity ill-posedness of canonical defocusing equations, Amer. J. Math. 125, no. 6, 1235-1293, 2003.
- [18] **T. Kappeler and P. Topalov**, Global Well-posedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, Duke Math. J. 135, no. 2, 327-360, 2006.