

Dimensão de Hausdorff de conjuntos de Cantor regulares

Elkin Fabian Campos Ramos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Maria José Pacífico

Co-orientador: Sergio Romaña Ibarra

Rio de Janeiro
Junho de 2018

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos de Cantor Regulares

Elkin Fabian Campos Ramos

Orientadora: Maria José Pacifico

Co-orientador: Sergio Romãna

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof^a. Maria José Pacifico - IM/UFRJ

Prof. Samuel Anton Senti - IM/UFRJ

Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira - IMPA

Rio de Janeiro

Junho de 2018

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que eu chegasse até aqui. Em especial a minha orientadora pela paciência. A CAPES e a FAPERJ, pelo suporte financeiro.

Resumo

Este trabalho discute sobre a medida de Hausdorff de conjuntos de Cantor regulares e os atratores geométricos de Lorenz. Com o propósito de demonstrar que estes últimos têm dimensão de Hausdorff estritamente maior que dois. A prova deste resultado encontra-se em [3] no qual o trabalho está baseado. Este fato permite provar que para um conjunto grande de funções os espectros de Lorenz e Markov dinâmicos associados a estes atratores têm interior não vazio.

Palavras Chaves: Conjunto de Cantor, Atrator Geométrico de Lorenz, Dimensão de Hausdorff, Dimensões fractais.

Abstract

This work discusses the Hausdorff measure of regular Cantor sets and the Lorenz geometric attractors. In order to demonstrate that the latter have Hausdorff dimension strictly larger than two. Proof of this result is found in [3] on which the work is based. This fact allows proving that for a large set of functions the dynamic Lorenz and Markov spectra associated with these attractors have non-empty interiors.

Key words: Cantor Set, Geometric Lorenz attractor, Hausdorff dimension, Fractal dimension.

Sumário

1	Preliminares	7
1.1	Construção do atrator geométrico de Lorenz	9
1.2	Quase eventualmente sobre	13
2	Conjuntos de Cantor e Medida de Hausdorff	18
2.1	Dimensão de Hausdorff de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos . . .	25
3	Conjuntos de Cantor gordos para f	34
4	O espectro de Lagrange	42

Introdução

No estudo da previsão do tempo, E. Lorenz chegou a um conjunto de três equações muito simples (polinomiais de grau dois) para governar a evolução do sistema, veja equação abaixo.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) & a &= 10 \\ \dot{y} &= rx - y - xz & r &= 28 \\ \dot{z} &= xy - bz & b &= 8/3\end{aligned}\tag{1}$$

Através de estudos numéricos conjecturou que tal sistema de equações deveria conter *um atrator estranho* (sensível com respeito a condições iniciais, i. é, trajetórias de pontos arbitrariamente próximos se afastam com o tempo). A dificuldade em tratar tais sistemas é tanto:

- (a) Conceitual: a presença de um equilíbrio acumulado por trajetórias regulares dos sistema implica que tais atratores não são hiperbólicos, e portanto não foram inseridos no estabelecimento da teoria hiperbólica abordada por Smale e seus colaboradores na década dos 60.
- (b) Numérica : as trajetórias, a medida que se aproximam do equilíbrio, diminuem a sua velocidade e portanto acrescentam erros não limitados nos cálculos.

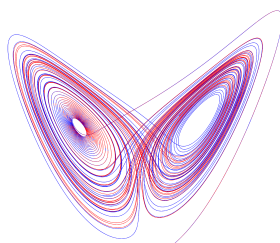


Figura 1: Lorenz attractor

A dificuldade no tratamento destes sistemas levaram Guckenheimer e Williams [6], e Afraimovich, Bikov e Shilnikov [1], a introduzirem o chamado modelo geométrico para tal comportamento, que apresenta todas as propriedades previstas por Lorenz. Estes modelos são fluxos em dimensão três para os quais podemos provar rigorosamente a coexistência de um ponto de equilíbrio acumulado por órbitas regulares. Lembre que a órbita de um ponto p é regular se o campo não se anula em p . Além disso, pode-se provar que estes atratores são robustos: não são destruídos por pequenas perturbações do campo de vetores.

Levando em conta que a divergência do campo induzido pelas equações de Lorenz é negativa, concluímos que a medida de Lebesgue ou volume do atrator de Lorenz é zero. Então, é natural o interesse nas outras dimensões deste trator, como a dimensão de Hausdorff.

Experimentos numéricos dão que este valor é aproximadamente igual a 2.062, [11] e também, para alguns valores particulares do parâmetro, a dimensão da medida física esta contida no intervalo $[1.24063, 1.24129]$, [5].

Recentemente foi provado por Moreira, Pacifico e Romaña em [3], que a dimensão de Hausdorff de atratores geométricos de Lorenz é estritamente maior que dois. Uma consequência não trivial deste fato é que permite estabelecer que o espectro de Lagrange dos atratores geométricos de Lorenz tem interior não vazio. Esta dissertação é baseada nesse artigo. Assim, os Teoremas principais que provaremos aqui são:

Teorema A. *A dimensão de Hausdorff de um atrator geométrico de Lorenz é estritamente maior que 2.*

Antes de enunciar precisamente a consequência deste fato, vamos lembrar algumas definições e resultados provados anteriormente. O *espectro de Lagrange* $\mathcal{L}$ é o subconjunto da reta estendida relacionado a aproximações Diofantinas. Dado um número irracional α o número racional p/q é a melhor aproximação de α se a desigualdade abaixo for verdadeira

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < |\alpha - \frac{p'}{q'}|, \forall \frac{p'}{q'} \neq \frac{p}{q}, 0 < q' \leq q.$$

O erro da aproximação usualmente é estimada comparando-se $|\alpha - p/q|$ a uma função $\psi = \psi(q)$, tipicamente uma potência negativa de q . O primeiro resultado importante sobre cotas superiores para aproximações diofantinas é o Teorema de Aproximação de Dirichlet's, estabelecendo que para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ tem um número infinito de soluções em $\mathbb{Q}$.

Markov e Hurwitz melhoraram este resultado, verificando que, para todo α irracional, a inequação $|\alpha - p/q| < \frac{1}{(q^2 \sqrt{5})}$ tem um número infinito de soluções p/q e $\sqrt{5}$ é a melhor constante. De fato, para $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\forall \epsilon > 0$, $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon).q^2}$ tem um número finito de soluções em $\mathbb{Q}$. Procurando por resultados mais finos para um $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixo somos levados a definir

$$k(\alpha) = \sup\{k > 0 : |\alpha - p/q| < 1/(k q^2) \text{ infinitas soluções racionais } p/q\}.$$

A discussão acima implica $k(\alpha) \geq \sqrt{5} \forall \alpha$, and $k(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \sqrt{5}$. Pode ser provado que $k(\alpha) = \infty$ para quase todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Estamos interessados em $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $k(\alpha) < \infty$.

Definição 0.0.1. *O espectro de Lagrange $\mathcal{L}$ é a imagem da função k :*

$$\mathcal{L} = \{k(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \text{ and } k(\alpha) < \infty.\}$$

Outro interessante conjunto é o *espectro de Markov* dado por

$$\mathcal{M} = \left\{ \inf_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} |f(x,y)|^{-1} : f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = 1, b^2 - 4ac = 1 \right\}. \quad (2)$$

Vamos deduzir uma expressão mais amigável para a função k . Para isso, escreva α em frações contínuas: $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina:

$$\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] \quad \beta_n = [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots].$$

Pode ser provado que

$$k(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n). \quad (3)$$

Markov provou que a parte inicial do espectro de Lagrange é discreto, isto é,

$$\mathcal{L} \cap (-\infty, 3) = \{k_1 = \sqrt{5} < k_2 = 2\sqrt{2} < k_3 = \frac{\sqrt{221}}{5} < \dots\} \text{ with } k_n \rightarrow 3, k_n^2 \in \mathbb{R}, \text{ for all } n.$$

Em 1947 Hall provou que o conjunto de Cantor $C(4)$ dos números reais em $[0, 1]$ tais que em sua expansão contínua aparece apenas os coeficientes 1, 2, 3, 4, satisfaz $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4(\sqrt{2} - 1)]$, e usando a expressão (3) e o resultado de Hall, segue que $[6, \infty) \subset \mathcal{L}$. Isto é, o espectro de lagrange contém uma semi-reta, hoje denominada *raio de Hall*.

Enfatizamos que o fato $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4(\sqrt{2} - 1)]$ implica que $C(4)$ é um conjunto de Cantor tal que a ferradura obtida por $\Lambda = C(4) \times C(4)$ tem dimensão de Hausdorff $HD(\Lambda) > 1$.

Isto é um ponto chave para se obter um raio, isto é, uma semi-reta, em $\mathcal{L}$, o que garante que o interior do espectro de Lagrange é não vazio.

Isto leva a pensar que os candidatos a ter o espectro interior não vazio devem conter pelo menos uma ferradura Λ com $HD(\Lambda) > 1$.

Em 1975, Freiman provou que a soma aritmética de certos conjuntos regulares de Cantor, relacionados com frações contínuas contém intervalos e determinou precisamente o começo do raio de Hall (a maior semi-reta contida em $\mathcal{L}$) que é igual a

$$\frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569} \cong 4,52782956616\dots$$

É notável que os espectros de Lagrange e Markov têm uma *interpretação dinâmica*. A expressão da função $k(\alpha)$ em termos da expressão em frações contínuas de α permite caracterizar o

espectro de Lagrange em termos da aplicação deslocamento definida em um espaço conveniente. Para entender melhor, lembre que se $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ é a expressão em frações contínuas de α e para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n e β_n são definidos como a seguir

$$\alpha_n = [a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots], \quad \beta_n = [0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots] \quad \text{we get} \quad k(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n).$$

Seja $\Sigma = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{Z}}$ o espaço das bi-sequências de números inteiros, considere a aplicação deslocamento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, $\sigma((a_n)_n) = (a_{n+1})_n$ e defina

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((a_n)_n) = \alpha_0 + \beta_0.$$

O espectro de Lagrange é caracterizado como

$$\mathcal{L} = \left\{ \limsup_k f(\sigma^k((a_n)_n)), (a_n)_n \in \Sigma \right\}.$$

E o espectro de Markov como

$$\mathcal{M} = \left\{ \sup_k f(\sigma^k((a_n)_n)), (a_n)_n \in \Sigma \right\}$$

Estas caracterização nos permite estender este conceito no contexto de dinâmica hiperbólica como segue.

Seja M uma variedade compacta e $\varphi : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Seja $\Lambda \subset M$ compacto, invariante e hiperbólico para φ . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O *espectro de Lagrange dinâmico* de (f, Λ) é definido por

$$\mathcal{L} = \left\{ \limsup_k f(\varphi^k((a_n)_n)), (a_n)_n \in \Sigma \right\}.$$

E O *espectro de Markov dinâmico* de (f, Λ) por

$$\mathcal{M} = \left\{ \sup_k f(\varphi^k((a_n)_n)), (a_n)_n \in \Sigma \right\}.$$

No contexto de dinâmica hiperbólica discreta, citamos [19], onde foi provado que certas ferra-duras com dimensão de Hausdorff maior que 1, o espectro dinâmicos de Lagrange e o espectro dinâmico de Markov têm interior não vazio para certas funções típicas.

Claramente os conceitos acima naturalmente se estendem para dinâmica contínua, substituindo a função φ pelo fluxo X^t associado ao campo de vetores X e Λ por um conjunto compacto e invariante por X^t :

$$\mathcal{L}(f, \Lambda) = \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} f(X^t(x)) : x \in \Lambda \right\}.$$

$$\mathcal{M}(f, \Lambda) = \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} f(X^t(x)) : x \in \Lambda \right\}.$$

Finalmente podemos anunciar a consequência do Teorema A mencionada acima.

Teorema B. *O interior dos espectros de Lagrange e Markov de um atrator geométrico de Lorenz são não vazios.*

Não nos estenderemos na prova do Teorema B e sugerimos ao leitor interessado consultar [3] para mais detalhes. Neste trabalho, vamos desenvolver a prova do Teorema A.

Aqui observamos que em [2, 9], a dimensão de Hausdorff de um atrator de Lorenz é caracterizada em termos da pressão do sistema e em termos do expoente de Lyapunov e a entropia com respeito a uma medida invariante associada ao modelo respectivamente. Mas, em ambos casos, os autores chegam que esta dimensão é maior ou igual a 2, e não provam a desigualdade estrita. A primeira tentativa de obter a desigualdade estrita foi em [7], onde os autores provam este resultado no caso bastante particular e não genérico de que ambos ramos da variedade instável do equilíbrio encontram a variedade estável do equilíbrio. O objetivo do texto é obter a desigualdade estrita para a dimensão de Hausdorff para *qualquer* atrator geométrico de Lorenz.

Para obter este resultado, desde que é conhecido que o atrator geométrico de Lorenz é a suspensão de um produto cruzado com folhas contratoras invariantes, definido em uma sessão transversal, começamos por estudar a aplicação uni-dimensional induzida no espaço das folhas.

O Teorema principal seguirá de um outro, anunciado abaixo, que exhibe uma sequência crescente e encaixante de conjuntos de Cantor regulares C_k para f , C_k convergindo para o maximal invariant Λ_f de f , com dimensão de Hausdorff convergindo a 1. Este fato implica que o maximal invariante Λ_P para o skew product tem dimensão de Hausdorff estritamente maior que 1. Por sua vez, este último fato implica que o atrator geométrico de Lorenz tem medida de Hausdorff estritamente maior que 2. Dado um conjunto A , $HD(A)$ denota a dimensão de Hausdorff de A .

Teorema 0.1. *Existe uma sequência crescente e encaixada de conjuntos de Cantor C_k para f tal que*

$$HD(C_k) \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Aqui salientamos que os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos (regulares) desempenham um papel fundamental em sistemas dinâmicos, e também em alguns problemas em teoria dos números. Eles são definidos por funções expansoras e têm um certo tipo de similaridade: partes pequenas são difeomorfas a partes maiores com distorção limitada. A dimensão de Hausdorff destes conjuntos descreve sua geometria fractal e a complexidade da dinâmica do sistema.

A organização do texto é como a seguir: Assumindo alguns resultados sobre análise no $\mathbb{R}^n$, no Capítulo 1 definimos os conceitos básicos a utilizar no texto, a hiberbolicidade, a topologia $C^{1+\epsilon}$. Além disso construímos o atrator de Lorenz geométrico a partir das equações de Lorenz,

baseando-nos em [3].

Seguindo a estrutura de [8, Cap. 4], no capítulo 2 definimos os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, damos alguns exemplos e definimos também a dimensão de Hausdorff destes conjuntos. Além disso, apresentamos teoremas importantes (alguns com a prova outros não), um deles dá uma "maneira" de calcular a dimensão de Hausdorff, a qual será usada no capítulo seguinte.

No Capitulo 3 fazemos a demonstração de que a dimensão de Hausdorff dos atratores geométricos de Lorenz têm dimensão de Hausdorff estritamente maior do que dois.

No capitulo 4 anunciamos algumas consequências deste resultado respeito aos espectros de Lagrange e Markov de atratores geométricos de Lorenz.

Capítulo 1

Preliminares

Seja M uma variedade compacta e sem bordo e de dimensão três. Fixamos uma métrica Riemanniana a qual induz a distância em M , que naturalmente define uma forma de volume Riemanniana Leb , a qual chamamos volume de Lebesgue ou medida de Lebesgue. Sempre tomamos Leb normalizada, isto é, $Leb(M) = 1$. Para qualquer conjunto $A \subset M$, denotamos por $\overline{A}$ seu fecho topológico.

Dado um campo de vetores X de classe C^r , $r \geq 1$, em M , consideramos o fluxo global $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Observe que X está definido em toda M , a qual é compacta, X é limitado e portanto X^t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Lembre que um **fluxo** $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de C^r difeomorfismos que satisfazem as seguintes propriedades:

1. $X^0 = Id : M \longrightarrow M$, a aplicação identidade em M ,
2. $X^{t+s} = X^t \circ X^s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.
3. Se $\frac{d}{dt}X(q)|_{t=t_0} = X(X_{t_0}(q))$ para todo $q \in M$ e $t_0 \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, dado um fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de classe C^{r+1} ele determina um único campo de vetores C^r cujo fluxo associado é precisamente $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

No que segue denotamos $\mathfrak{X}^r(M)$ o espaço vetorial de todos os campos de vetores de classe C^r em M munido da topologia C^r e por $\mathfrak{F}^r(M)$ o espaço de todos os fluxos em M também com a topologia C^r .

Um *ponto de equilíbrio* ou *singularidade* para X é um ponto $\sigma \in M$ tal que $X^t(\sigma) = \sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto é, σ é um ponto fixo para todas as aplicações X^t , o qual corresponde ao zero do campo vetorial associado X , isto é, $X(\sigma) = 0$. Denotaremos por $\mathfrak{S}(X)$ o conjunto de singularidades de X . Um ponto de $p \in M$ é *regular* se ele não é uma singularidade para X .

Dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $q \in M$, a *órbita* de q por X é o conjunto $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}_X(q) = \{X^t(q) : t \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}$. Uma órbita periódica de X é uma órbita $\mathcal{O}_X(q)$ tal que $X^T(q) = q$ para algum $T > 0$. O valor minimal $T_0 > 0$ tal que $X^{T_0}(q) = q$ é denominado período de q . Denotamos por $\text{Per}(X)$ o conjunto de pontos periódicos de X . Um *elemento crítico* de um campo vetorial X é um elemento que é uma singularidade ou é um ponto periódico. Denotamos por $C(X) = S(X) \cup \text{Per}(X)$ o conjunto de elementos críticos de X .

Dizemos que um ponto $p \in M$ é *não-recorrente* se para todo $T > 0$ existe uma vizinhança U de p tal que para $t > T$, $X^t(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto de pontos *não-recorrentes* é denotado por $\Omega(X)$. Se $q \in M$, definimos $\omega_X(q)$ como o conjunto de pontos de acumulação da órbita não-negativa de q , $\{X^t(q) : t \geq 0\}$. Definimos também $\alpha_X(q) = \omega_{-X}(q)$ onde $-X$ é o campo reverso de X . Temos que $\omega_X(q) \cup \alpha_X(q) \subset \Omega(X)$.

Um conjunto Λ é *invariante* para X , ou *X-invariante* se $X(\Lambda) = \Lambda$. É claro que $\omega_X(q)$ e $\alpha_X(q)$ são *X-invariantes* para todo $q \in M$.

Para todo conjunto compacto invariante Λ definimos o *conjunto estável* de Λ como:

$$W_X^s(\Lambda) = \{q \in M : \omega_X(q) \subset \Lambda\},$$

e o *conjunto instável* de Λ como

$$W_X^u(\Lambda) = \{q \in M : \alpha_X(q) \subset \Lambda\}.$$

Dizemos que um conjunto *X-invariante* Λ é *isolado* ou *maximal* se existe uma vizinhança U de Λ tal que $\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X^t(U) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{X^t(U)}$. Um conjunto invariante Λ é *transitivo* se $\Lambda = \omega_X(q)$ para algum $q \in M$, e é *atraente* se $\Lambda_X(U) = \bigcap_{t \geq 0} X^t(U)$ para alguma vizinhança U de Λ satisfazendo $\overline{X^t(U)} \subset U$ para todo $t > 0$. Temos que todo conjunto atraente é isolado.

Por último definimos um *atrator* de X como um conjunto invariante e transitivo de X e um *repulsor* se é um atrator para $-X$.

Hiperbolicidade Um *poço* é uma singularidade de X que é também um atrator. Uma *fonte* de X é um poço para $-X$. Uma singularidade σ é *hiperbólica* se todos os autovalores de $DX(\sigma)$ têm parte real diferente de zero (e portanto não tem autovalores com norma 1). Da mesma maneira, um ponto periódico p de período T é *hiperbólico* se $DX^T(p)$ não tem autovalores de norma 1.

Agora damos a definição de hiperbolicidade para conjuntos compactos invariantes.

Definição 1.1. *Sejam M uma variedade, $X \in \mathfrak{F}^r(M)$ um fluxo definido em M . Se T é um operador linear denotamos por $m(T) = \inf_{\|v\|=1} \|T(v)\|$, a norma de T . Um conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset M$ é *hiperbólico* se*

1. *admite uma decomposição DX -invariante do fibrado tangente contínua*

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u.$$

Em outras palavras, o espaço tangente pode ser descrito como uma soma direta da forma $E_x^s \oplus E_x^X \oplus E_x^u$, onde E_x^X é o subespaço em $T_x M$ gerado por $X(x)$ e os espaços E_x^i , $i \in \{s, u\}$, satisfazem as condições abaixo:

- $DX^t(x) \cdot E_x^i = E_{X^t(x)}^i$ para todo $x \in \Lambda$;

2. Existem constantes $\lambda, K > 0$ tais que

- E_x^s é (λ, K) -contraente, ou seja para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$

$$\|DX^t(x)|_{E_x^s}\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t}$$

- E_x^u é (λ, K) -expansora, ou seja para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$

$$m(DX^t(x)|_{E_x^u}) \geq Ke^{\lambda t}.$$

Dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, se Λ é um conjunto compacto invariante por X e hiperbólico, para todo $p \in M$, os conjuntos estável $W_X^{ss}(p)$ e instável $W_X^{uu}(p)$ definidos por

$$W_X^{ss}(p) = \{q \in M : \text{dist}(X^t(q), X^t(p)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}$$

$$W_X^{uu}(p) = \{q \in M : \text{dist}(X^t(q), X^t(p)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}$$

são C^r -variedades tangentes a E_x^s e E_x^u em p .

1.1 Construção do atrator geométrico de Lorenz

Vamos seguir de perto a construção dada em [2]. Começamos por determinar o campo de vetores numa vizinhança da origem.

Pelo teorema de Hartman-Grobman as equações de Lorenz são equivalentes ao sistema linear por conjugação de $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ que tem soluções da forma

$$X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t}).$$

Onde $\lambda_1 \approx 11.83$, $\lambda_2 \approx -22.83$ e $\lambda_3 = -8/3$, (x_0, y_0, z_0) perto a origem. Tomemos $S = \{(x, y, 1) \text{ tais que } |x| \leq 0.5, |y| \leq 0.5\}$;

$$\begin{aligned} S^- &= \{(x, y, 1) \in S : x < 0\}, & S^+ &= \{(x, y, 1) \in S : x > 0\}, \text{ e} \\ \Gamma &= \{(x, y, 1) \in S : x = 0\}, & S^* &= S \setminus \Gamma = S^- \cup S^+. \end{aligned}$$

Assumamos que S é uma seção transversal ao fluxo, portanto toda trajetória eventualmente cruza S na direção do eixo negativo z como na figura 1.1. Seja $\Sigma = \{(x, y, z) : |x| = 1\} =$

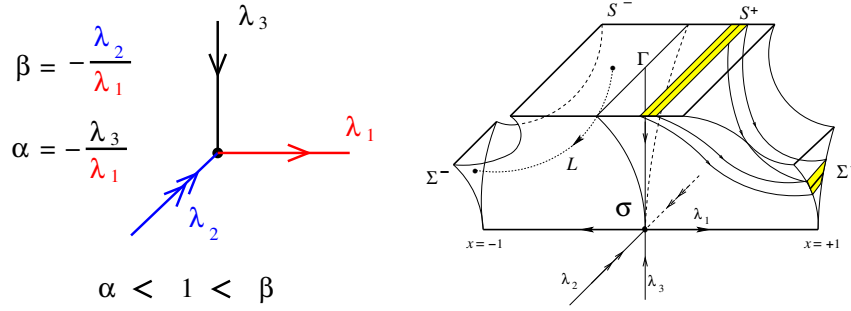


Figura 1.1: Comportamento perto à origem

$\Sigma^+ \cup \Sigma^-$, onde $\Sigma^\pm = \{(x, y, z) : x = \pm 1\}$. Para cada $(x_0, y_0, 1) \in S^*$ o tempo τ tal que $X^\tau(x_0, y_0, 1) \in \Sigma$ é dado por $\tau(x_0) = -\frac{1}{\lambda_1} \log(x_0)$ (note que depende somente de x_0 e que $\tau(x_0) \rightarrow +\infty$ quando $x_0 \rightarrow 0$). Obtemos que se $x_0 \neq 0$ então

$$X^\tau(x_0, y_0, 1) = (\text{sgn}(x_0), y_0 e^{\lambda_2 \tau(x_0)}, z_0 e^{\lambda_3 \tau(x_0)}) = (\text{sgn}(x_0), y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}).$$

Dado que $0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$, temos que $0 < \alpha := -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} < 1 < \beta := -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Seja $L : S^* \rightarrow \Sigma$ dado por

$$L(x, y, 1) = (\text{sgn}(x), y|x|^\beta, |x|^\alpha) \quad (1.1)$$

É fácil ver que $L(S^\pm)$ tem forma de um triângulo sem o vértice $(\pm 1, 0, 0)$.

A partir de agora denotamos por $\Sigma^\pm$ o fecho de $L(S^\pm)$. Claramente cada segmento de linha de $\{(x, y, z) \in S^* : x = x_0\}$ é levado por L a outro segmento de linha $\{(x, y, z) \in \Sigma : z = z_0\}$.

Para imitar as voltas aleatórias de uma órbita regular ao redor da origem e obter uma forma de borboleta como no fluxo original, procedemos como segue. Os conjuntos $\Sigma^\pm$ devem retornar à seção S através de um fluxo descrito por uma composição de uma rotação $R_\pm$, uma expansão $E_\pm$ e uma translação $T_\pm$. Assumimos que os "triângulos" $L(S^\pm)$ são comprimidos na direção y e são estendidos na outra direção transversal. Assumimos também que essa aplicação de retorno leva os segmentos de linha $\{(x, y, z) \in \Sigma : z = z_0\}$ nos segmentos de linha $\{(x, y, z) \in S : x = x_1\}$ como na figura 1.2.

Dado que o ponto $(0, 0, 0)$ é hiperbólico a variedade estável $W^s((0, 0, 0))$ e instável $W^u((0, 0, 0))$ estão bem definidas. Além disso, a dimensão de $W^u((0, 0, 0))$ é um. A rotação $R_\pm$ tem eixo paralelo à y -direção, isto é, se $(x, y, z) \in \Sigma^\pm$ então

$$R_\pm(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A expansão ocorre ao longo da x -direção, portanto E_θ é dado por

$$E_\theta(x, y, z) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

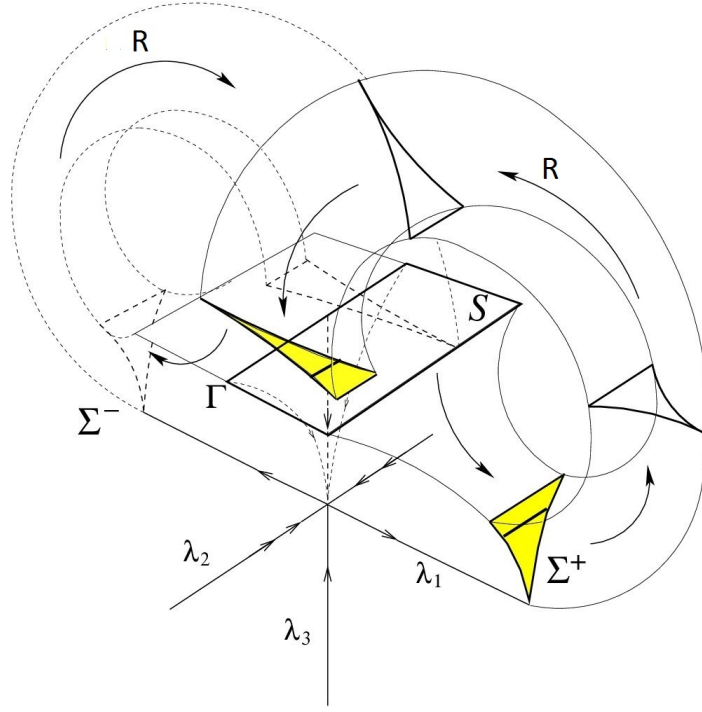


Figura 1.2: R leva $\Sigma^\pm$ a S

com $\theta 2^{-\alpha} < 1$ e $\theta \alpha 2^{1-\alpha} > \sqrt{2}$. Notamos que a primeira condição acima faz que a imagem da aplicação resultante esteja contida em S e a segunda condição faz que uma certa aplicação induzida seja expansora por partes como veremos a seguir.

As translações $T_\pm$ são escolhidas para que a direção instável da origem seja enviada à fronteira de S e as imagens dos $\Sigma^\pm$ sejam disjuntas. Tomamos a composição $T_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ R_\pm$. Composto a expressão 1.1 com $R_\pm$, $E_{\pm\theta}$ e $T_\pm$ obtemos uma fórmula explícita para $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$, a aplicação de Poincaré de primeiro retorno do *Atrator Geométrico de Lorenz* em S :

$$P(x, y) = (f(x), g(x, y)) \quad (1.2)$$

tal que

$$f(x) = \begin{cases} -\theta|x|^\alpha + 1/2 & x < 0 \\ \theta|x|^\alpha - 1/2 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x, y) = \begin{cases} -y|x|^\beta + c_1 & x < 0 \\ y|x|^\beta + c_0 & x > 0 \end{cases}$$

Acima c_0 e c_1 são números dependendo das translações $T_\pm$.

A construção anterior nos permite descrever, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, a órbita $X^t(x)$ para todo ponto x de S . A órbita começa pelo campo linear até $\Sigma^\pm$ e logo ela segue X retornando a S e assim por diante. Denotemos por $W = \{X^t(x), x \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^+\}$. O *Fluxo de Lorenz Geométrico* é o par (W, X^t) . O *Atrator Geométrico de Lorenz* é o conjunto

$$\Lambda = \overline{\bigcap_{t \geq 0} X^t(\Lambda_P)}, \quad \Lambda_P = \overline{\bigcap_{i \geq 1} P^i(S^*)}. \quad (1.3)$$

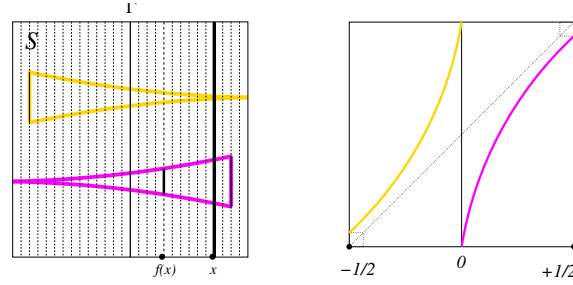


Figura 1.3: A aplicação de Lorenz 1-dimensional.

Propriedades da função unidimensional f Vamos especificar as propriedades que seguem da construção anterior que utilizaremos na prova dos teoremas principais.

- (f_1) A simetria das equações de Lorenz implica que $f(-x) = -f(x)$;
- (f_2) f é descontínua em $x = 0$ como limites laterais $f(0^-) = \frac{1}{2}$ e $f(0^+) = -\frac{1}{2}$;
- (f_3) f é diferenciável em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$;
- (f_4) Os limites laterais de f' em *zero* são $f'(0^-) = +\infty$ e $f'(0^+) = -\infty$.

Para simplificar a notação, no que segue vamos denotar $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e para qualquer intervalo J contendo 0 vamos denotar por J^+ a maior das duas componentes conexas que são separadas por zero (caso essas componentes tenham o mesmo comprimento denotamos por J^+ quaisquer uma das duas), isto é, se por exemplo $J = [-a, b]$ com $a > b$ tomamos $J^+ = [-a, 0)$. Vamos provar o próximo resultado, que estabelece que f é *eventualmente sobrejetora*, seguindo as ideias de [21]. Estas ideias vão ser utilizadas no lema 1.7 mais embaixo, que estabelece que f é *quase eventualmente sobrejetora*.

Lema 1.2. *Dado $J \subset I$ existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^n(J) = I$ (isto é, f é eventualmente sobrejetiva).*

Demonstração. Seja $J \subset I$, se $0 \notin J$ seja $J_0 = J$, caso contrário seja $J_0 = J^+$. Agora indutivamente definamos uma sequência de intervalos $\{J_i\}$ da seguinte maneira: se J_i está bem definido, seja J_{i+1} dado por

$$J_{i+1} = \begin{cases} f(J_i) & \text{se } 0 \notin f(J_i), \\ f(J_i)^+ & \text{se } 0 \in f(J_i). \end{cases}$$

É claro que $|f(J_i)| > \eta|J_i|$, onde $\eta = \inf |f'| > \sqrt{2}$. Notemos que se $0 \notin f(J_i)$ ou $0 \notin f(J)$ então

$$|J_{i+2}| \geq \frac{\eta^2}{2}|J_i|.$$

Dado que $\eta^2 > 2$ isso nem sempre pode acontecer. Seja n a primeira interação tal que $0 \in f(J_{n-2}) \cap f(J_{n-1})$ segue que $f(J_{n-1})$ contém o zero e um ponto extremo de I . Portanto J_n é uma metade de I (isto é, $J_n = [-1/2, 0)$ ou $J_n = (0, 1/2]$). Notemos que $f(J_n)$ contém a outra metade de I , e finalmente $f^3(J_n) = I$. $\square$

O seguinte lema dá uma propriedade ergódica para f .

Lema 1.3. *f tem uma medida de probabilidade μ , absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue m . Além disso $\mu = \psi m$ para alguma função de variação limitada ψ e μ é ergódica.*

Para a demonstração vide [10, Corollary 3.4, corollary 3.5 e example 3.2].

1.2 Quase eventualmente sobre

Nesta seção usaremos um tipo de argumento similar ao dado na prova do Lema 1.2 para estabelecer que f satisfaz uma propriedade que desempenhará uma ferramenta fundamental para a prova do teorema 0.1. Em poucas palavras, esta propriedade significa que existe um número a arbitrariamente próximo de 1, dependendo apenas de f , tal que para qualquer intervalo $J \subset I$, temos

- (1) existe um intervalo $\tilde{J} \subset J$ tal que $0 \notin \tilde{J}$ e com comprimento igual a uma proporção fixa do comprimento de J ,
- (2) um número $n = n(J)$ tal que a restrição de f^n a $\tilde{J}$, $f^n : \tilde{J} \rightarrow L_1^a$ é um difeomorfismo, onde $L_1^a = [f(1-a), 0)$. Mais ainda, obtemos controle da distorção de f^j para $1 \leq j \leq n-1$.

Para isso, começamos com um resultado auxiliar.

Lema 1.4. *Existe uma constante $\kappa > 0$ tal que para todo intervalo $J \subset I \setminus \{0\}$ cumprindo que $0 \in f(J)$ e $0 \in f^2(J)$ tem-se que*

$$|J| > \kappa.$$

Demonstração. Denotemos as pre-imagens de 0 em cada ramo de f por $0_1 \in [-1/2, 0)$ e $0_2 \in (0, 1/2]$, isto é, $-1/2 < 0_1 < 0$ e $0 < 0_2 < 1/2$ tais que $f(0_i) = 0$ para $i = 1, 2$. Denotemos também as pre-imagens 0_i^1 e 0_i^2 em $[-1/2, 0)$ e $(0, 1/2]$ respetivamente para $i = 1, 2$. Dado que $0 \in f(J)$ e $0 \in f^2(J)$ então $0, 0_i \in f(J)$ para algum $i \in \{1, 2\}$. Segue que algum dos intervalos $J_1 = [0_1^1, 0_1]$, $J_2 = [0_1, 0_1^1]$, $J_3 = [0_2^1, 0_2]$, $J_4 = [0_2, 0_2^1]$ está contido em J , ao tomarmos $\kappa = \min\{|J_1|, |J_2|, |J_3|, |J_4|\}$ obtemos um κ satisfazendo o lema. $\square$

Seja κ dado pelo lema 1.4. Lembrando que $\frac{\eta^2}{2} > 2$ tomamos um número $a \in (0, 1)$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$a^2 \eta^2 > 2 \quad \text{e} \quad 1 - a < \kappa. \tag{1.4}$$

Usaremos o a de acima para definir os cortes que evadem a singularidade. Dado um intervalo $J = (b, c) \subset I \setminus \{0\}$ denotemos por J_a o subintervalo J que se obtém cortando a proporção $(1-a)|J|$ no lugar mais próximo ao zero, isto é,

$$J_a = \begin{cases} (b, ac + (1-a)b) & \text{se } c \leq 0 \\ (ab + (1-a)c, c), & \text{se } b \geq 0. \end{cases}$$

Isto implica que $|J_a| = a|J|$ e $0 \notin J_a$. Se um subintervalo $J \subset I \setminus \{0\}$ tem comprimento $|J| > 1-a$ e intersecta o intervalo $(a-1, 1-a)$ denotemos ${}_aJ = J \setminus [a-1, 1-a]$, isto é estamos cortando o intervalo de comprimento $1-a$ do lado próximo do zero,

$${}_aJ = [b, -(1-a)] \text{ ou } {}_aJ = [(1-a), b].$$

é claro que os intervalos J_a e ${}_aJ$ evadem a singularidade.

Agora suponhamos que $0_1 \in J_1 = (b, 0)$ e $0_2 \in J_2 = (0, c)$ tais que $0_i \in {}_aJ_i$ em outras palavras $0 \in f({}_aJ_i)$ para $i = 1, 2$. Usemos esta notação para o seguinte lema.

Lema 1.5. *Se a é o suficientemente próximo a 1 então para quaisquer intervalos $[b, a-1]$, $[1-a, c]$ que contêm a 0_1 e 0_2 respetivamente temos que*

Demonstração. Dado que $f(-1/2) > -1/2$ temos que $|f([-1/2, 0_1])| < |f(0_1, 0)|$. Em particular $|f((b, 0_1))| < |f([0_1, 0])|$. Seja $\theta = |f((0_1, 0))| - |f([-1/2, 0_1])|$ e tomemos a' suficientemente próximo de 1 tal que

$$|f([0_1, 0])| - |f([0_1, a' - 1])| < \frac{\theta}{2},$$

segue que $|f[b, 0_1]| < |f[0_1, a' - 1]|$. Da mesma maneira tomemos $0 < a' \leq a < 1$ tal que $|f[0_2, c]| < |f[1-a, 0_2]|$. Assim concluimos a demonstração do lema. $\square$

Corolário 1.6. *Nas mesmas hipóteses do lema acima, obtemos que*

$$f({}_aJ_1)^+ = f[0_1, a-1] \text{ e } f({}_aJ_2)^+ = f[1-a, 0_2].$$

Daqui em diante definimos $L_1^a = [f(1-a), 0)$ com a suficientemente próximo de 1 e satisfazendo 1.4.

A demonstração do próximo lema é similar ao lema 1.2 e nos dá um controle para o número de iterações necessárias para incrementar o tamanho do intervalo mediante f evadindo a singularidade.

Lema 1.7. *Se $J \subset I$ é um subintervalo, então existe um subintervalo $J' \subset J$ e um inteiro $n(J)$ tal que $f^{n(J)} : J' \rightarrow L_1^a$ é um difeomorfismo e J' satisfaz as propriedades*

(a) $d(f^i(J'), \{0\}) \geq \frac{(1-a)}{2} |J_{i-2}|$, para $i = 2, \dots, n(J) - 1$ onde os J_{i-2} são intervalos dados por (1.5) abaixo.

$$(b) \quad n(J) \leq 4 + \frac{2 \log \frac{2}{a^2 |J|}}{\log \frac{a^2 \eta^2}{2}}.$$

Demonstração. Se $0 \notin J$ seja $|J_0| = J_a$, caso contrario seja $J_0 = J_a^+$, agora dado J_i definido seja

$$J_{i+1} = \begin{cases} f(J_i)_a & \text{se } 0 \notin f(J_i) \\ f(J_i)_a^+, & \text{se } 0 \in f(J_i). \end{cases} \quad (1.5)$$

Lembremos que $\eta = \inf |f'| > \sqrt{2}$. Dado $|f(J_{i+1})| > \eta |J_{i+1}|$, se $0 \notin f(J_i)$ ou $0 \notin f(J_{i+1})$ então

$$|J_{i+2}| \geq \frac{a^2 \eta^2}{2} |J_i|.$$

Mas como $a^2 \eta^2 > 2$, a desigualdade acima nem sempre é válida. Seja n o primeiro momento tal que

$$0 \in f(J_{n-2}) \text{ e } 0 \in f(J_{n-1}).$$

Então J_{n-2} satisfaz as hipóteses do Lema 1.4. Segue que $|J_{n-2}| \geq \kappa$, logo $1 - a < \kappa$ pela definição de a (ver 1.4). Agora consideremos o subintervalo $\tilde{J}_{n-1} := {}_a f(J_{n-2})^+ \subset f(J_{n-2})^+$.

Consideremos dois casos:

Caso 1: Se $\tilde{J}_{n-1} \subset [0, 1/2]$ então por definição de ${}_a f(J_{n-2})^+$ temos que $\tilde{J}_{n-1} = [1 - a, b]$ para algum $b > 0$. além disso, dado que $0 \in f(J_{n-1})$, então $0 \in f(\tilde{J}_{n-1})$ e portanto $0_2 \in \tilde{J}_{n-1}$ o qual implica pelo lema 1.5 que $|f((1 - a, 0_2))| > |f((0_2, b))|$, em outras palavras

$$f(\tilde{J}_{n-1})^+ = f([1 - a, 0_2)) = [f(1 - a), 0) = L_1^a.$$

Agora tomemos a sequência de intervalos $I_{n-2} := f^{-1}([1 - a, 0_2]) \subset \tilde{J}_{n-1}$ e $I_i = f^{-1}(I_{i+1}) \subset J_i$. Tomemos $J' = I_0$ segue que $n(J) = n$.

Caso 2. Se $\tilde{J}_{n-1} \subset [-1/2, 0]$ então $\tilde{J}_{n-1} = [c, a - 1]$. Dado que $0 \in f(\tilde{J})$, então $0_1 \in \tilde{J}_{n-1}$ pelo lema 1.5 temos que $|f((0_1, a - 1))| > |f((c, 0_1))|$, isto é, $f(\tilde{J}_{n-1})^+ = f((0_1, a - 1]) = (0, f(a - 1)]$, então $\tilde{J}_n := {}_a f(\tilde{J}_{n-1})^+ = [1 - a, f(a - 1)]$. Agora o lema 1.5 implica

$$f(\tilde{J}_n)^+ = [f(1 - a), 0) = L_1^a.$$

Tomemos a sequência de intervalos $I_{n-1} = f^{-1}[1 - a, 0_2] \subset \tilde{J}_{n-1}$ e $I_i = f^{-1}(I_{i+1}) \subset J_i$, e tomemos $J' = I_0$ segue que $n(J) = n + 1$.

Nos dois casos notemos que por construção $f^i(J') \subset J_i$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Portanto concluímos que

$$d(f^i(J'), \{0\}) \geq \begin{cases} (1-a) \cdot |f(J_{i-1})| \geq (1-a) \cdot |J_{i-2}| & \text{se } 0 \notin f(J_{i-2}) \\ (1-a) \cdot |f(J_{i-1})^+| \geq \frac{1-a}{2} |J_{i-2}|, & \text{se } 0 \in f(J_{i-2}). \end{cases}$$

Para provar o item (b) basta notar que por construção

$$\frac{1}{2} \geq |J_{n-2}| \geq \begin{cases} \left(\frac{a^2\eta^2}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} |J_0| & \text{se } n \text{ é par} \\ \left(\frac{a^2\eta^2}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} |J_1| & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e que $|J_0| \geq \frac{a}{2}|J|$ e $|J_1| \geq \frac{a^2}{4}|J|$. □

Uma consequência deste lema é o próximo corolário que vai ser uma ferramenta fundamental para a prova do teorema 0.1, no capítulo 3.

Corolário 1.8. *Se $\{m_k\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$ é uma sequência tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$ e $\{J_k\}$ é uma sequência de subintervalos de $I = [-1/2, 1/2]$ tais que $|J_k| \geq \frac{1}{3m_k^3}$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ então*

(a) *Existe uma constante D tal que $n(J_k) \leq D \log m_k$.*

(b) *Existem constantes $E > 0$ e $\xi > 0$ tais que para todo $i = 0, 1, \dots, n(J_k) - 1$ tem-se que $\sup_{x \in f^i(J'_k)} |f'(x)| \leq E \cdot m_k^\xi$, onde J'_k é dado pelo lema 1.7.*

Demonstração. (a) Dado que $|J_k| \geq \frac{1}{3m_k^3}$ o lema 1.7 implica que

$$n(J_k) \leq \frac{2(\log 3 + \log 2 - 2 \log a + 3 \log m_k) + 4 \log \frac{a^2\eta^2}{2}}{\log \frac{a^2\eta^2}{2}} \leq D \log m_k,$$

para m_k suficientemente grande e $D = 7 / \log \frac{a^2\eta^2}{2}$, em particular podemos escolher D o suficientemente grande para que $n(J) \leq D \log m_k$ para todo k .

(b) Tomemos o intervalo J'_k dado pelo lema 1.7, o item (a) do lema 1.7 diz que

$$d(f^i(J'_k), \{0\}) \geq \frac{(1-a)}{2} |(J_k)_{i-2}|$$

A construção dos $(J_k)_i$ mostra que $|(J_k)_{i+2}| \geq |(J_k)_i|$ para $0 \leq i \leq n(J) - 2$. Além disso, $|(J_k)_0| \geq \frac{a}{2}|J_k|$, $|(J_k)_1| \geq \frac{a^2}{4}|J_k|$, $d((J_k)_0, \{0\}) \geq \frac{1-a}{2}|J_k|$ e $d((J_k)_1, \{0\}) \geq \frac{(1-a)a}{4}|J_k|$. Portanto

$$d(f^i(J'_k), \{0\}) \geq \frac{(1-a)a^2}{8} \cdot \frac{1}{3m_k^3}. \quad (1.6)$$

para $0 \leq i \leq n(J_k) - 1$. Agora vamos estimar a derivada da função $f : f^i(J') \rightarrow f^{i+1}$. As equações 1.6 e 1.7 implicam que para uma constante $C \geq 1$

$$\sup_{x \in f^i(J'_k)} |f'(x)| \leq C \left(\frac{a^2(1-a)}{24m_k^3} \right)^{\alpha-1} = C \cdot (a^2(1-a))^{\alpha-1} \cdot 24^{1-\alpha} \cdot m_k^{3 \cdot (1-\alpha)}$$

Tomando $E = C \cdot (a^2(1-a))^{\alpha-1} \cdot 24^{1-\alpha}$ e $\xi = 3 \cdot (1-\alpha)$ concluímos a prova. $\square$

Propriedades da Função g

Temos que g é C^2 por partes. Além disso, g possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $(x, y) \in S^*$ com $x \neq 0$ temos $|\partial_y(g(x, y))| = |x|^\beta$, como $|x| \leq \frac{1}{2}$ então existe λ tal que $1 > \lambda > \left(\frac{1}{2}\right)^\beta \geq |\partial_y g|$.
2. Para todo $(x, y) \in S^*$ com $x \neq 0$, temos que $|\partial_x g(x, y)| = \beta x^{\beta-\alpha} < M$ dado que $\beta > \alpha$ e $|x| < \frac{1}{2}$.

O primeiro item implica que existe uma contração da folheação dada pelas linhas $\{(x, y, z) \in S \text{ tais que } x = x_0\}$ onde os x_0 são constantes.

Pode-se provar que o Atrator de Lorenz é robusto, isto é, ele é persistente para campos vetoriais próximos dele, isto significa que existe uma vizinhança U de Λ tal que para todo campo vetorial Y , C^1 -próximo de X , o maximal invariante $\Lambda_Y = \bigcap_{t \geq 0} Y^t(U)$ também é um conjunto *transitivo* para Y . Além disso, temos o teorema seguinte cuja prova encontra-se em [2, Theorem 3.10].

Teorema 1.9. *Sejam X o campo vetorial obtido na construção do Atrator geométrico de Lorenz e $\mathfrak{F}_X$ a folheação contratora invariante da seção transversal S . Então todo vetor Y suficientemente C^1 -próximo a X admite uma folheação contratora invariante $\mathfrak{F}_Y$ na seção transversal S . Além disso, as $\mathfrak{F}_Y$ são contínuas com folhas C^1 .*

Assim, para Y suficientemente próximo a X . Se f_Y é a aplicação quociente $f_Y : S^* \rightarrow S$ associada a aplicação de Poincaré correspondente, as quais chamaremos de P_Y . Depois de uma mudança de coordenadas linear, podemos assumir que as propriedades $(f_1), (f_2), (f_3)$ têm-se. Porém com outras constantes com f_Y em um subintervalo $[-b_0, b_1]$ com b_0 e b_1 próximos a $1/2$ em particular

$$Df_Y(x) \approx |x|^{\alpha-1}; \quad \text{isto é; } \frac{1}{C} \leq \frac{Df_Y(x)}{|x|^{\alpha-1}} \leq C \quad \text{e} \quad \frac{|Df_Y^2(x)|}{|x|^{\alpha-2}} \leq C_1. \quad (1.7)$$

Com C, C_1 uniformemente em uma vizinhança C^2 de X com $\alpha = \alpha(Y) = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ dependendo suavemente de Y , a propriedade (f_3) assegura que as f_Y são absolutamente sobrejetivas para Y suficientemente próximas a X .

Capítulo 2

Conjuntos de Cantor e Medida de Hausdorff

No início do capítulo vamos definir os conceitos básicos de medida para entender o que é a dimensão de Hausdorff. Não faremos muitas demonstrações, somente aquelas que acreditamos pertinentes, e também definiremos conjuntos de Cantor dinamicamente definidos.

Começamos definindo o que são uma medida exterior e uma medida.

Definição 2.1. *Seja X um conjunto, uma medida exterior μ em X , é uma aplicação do conjunto X nos reais não-negativos com as seguintes propriedades:*

- a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- b) Se $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$; e
- c) Se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma coleção de subconjuntos de X então:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (2.1)$$

Definição 2.2. *Seja X um conjunto, e Σ uma coleção de subconjuntos de X , então Σ é uma σ -álgebra se satisfaz*

- a) $\emptyset \in \Sigma$,
- b) $A \in \Sigma$ se e somente se, $A^C = X \setminus A \in \Sigma$,
- c) Se $A_1, A_2, \dots$ é uma sequência de elementos de Σ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Definição 2.3. *Sejam X um conjunto, Σ uma σ -álgebra de subconjuntos de X e μ uma aplicação de Σ em $[0, \infty+]$, então μ é uma medida se satisfaz*

a) $\mu(\emptyset) = 0$ e

b) se $A_1, A_2, \dots$ é uma sequência enumerável de elementos de Σ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ então

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

O Teorema de *Carathéodory* e o Teorema de extensão de *Carathéodory* (vide [12, 1.11 Carathéodory's Theorem] e (ver [12, 1.14 Theorem])) estabelecem que se μ é uma medida exterior então a coleção $\{A \subset X \mid \mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A), \forall E \subset X\}$ é uma σ -álgebra e μ restrita a esta σ -álgebra é uma medida. Vamos chamar os elementos desta σ -álgebra de μ -mensuráveis. Reciprocamente se μ é uma medida definida em uma σ -álgebra Σ de X então μ' definida como $\mu'(A) = \inf\{\mu(E) \mid A \subset E, E \in \Sigma\}$ para todo $A \subset X$ é uma medida exterior. Pelo anterior muitas vezes nesta seção não vamos fazer diferença entre medida exterior e medida. Definimos uma probabilidade em X como uma medida para a qual $\mu(X) = 1$.

No que segue vamos supor que X está munido de uma métrica ϱ , ao par (X, ϱ) o denominamos de espaço métrico. Agora continuamos a definir uma aproximação às s -medidas de Hausdorff As quais são medidas exteriores.

Para um subconjunto $U \subset X$ definimos seu diâmetro, $|U| = \sup_{x,y \in U} \varrho(x,y)$. Para toda $A \subset X, s \geq 0$ e $\delta > 0$ definimos

$$HD_{\delta}^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s; \text{ tais que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j; \text{ e } |U_j| \leq \delta \text{ para todo } j \right\}. \quad (2.2)$$

Note que se A é compacto podemos assumir que há um número finito de U_j .

Definimos a s -dimensional medida de Hausdorff de U , $HD^s(U)$, fazendo limite de δ para zero, isto é:

$$HD^s(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} HD_{\delta}^s(U). \quad (2.3)$$

Temos que o limite existe (pode ser infinito) dado que $HD_{\delta}^s(U)$ incrementa quando δ decresce e os seguintes resultados.

Proposição 2.4. HD_{δ}^s é uma medida exterior para todo $\delta > 0$.

Claramente pela definição $HD^s(\emptyset) = 0$ e $HD^s(A) \leq HD^s(B)$ se $A \subset B$. Agora seja $A_1, A_2, \dots$ uma coleção de subconjuntos de X . Dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência $\{B_j^i\}$ de subconjuntos de X tal que

$$A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_j^i, \quad |B_j^i| \leq \delta, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |B_j^i|^s \leq HD_{\delta}^s(A_j) + \epsilon 2^{-j}$$

Dado que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j,i=1}^{\infty} B_j^i$ então

$$HD_{\delta}^s \left(\bigcup A_j \right) \leq \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} HD_{\delta}^s(A_j).$$

Dado que ϵ é arbitrário concluímos que $HD_{\delta}^s \left(\bigcup A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} HD_{\delta}^s(A_j)$. Segue que HD_{δ}^s é uma medida exterior.

A proposição 2.4 implica que HD^s é uma medida exterior, de fato HD^s é uma medida exterior métrica, isto é, HD^s é uma medida exterior e se a $\text{dist}(A, B) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A, y \in B\} > 0$ então

$$HD^s(A \cup B) = HD^s(A) + HD^s(B). \quad (2.4)$$

Para ver que HD^s é uma medida exterior métrica procedemos como segue. Sejam A, B subconjuntos de X tais que $\text{dist}(A, B) > 0$ e seja $\delta < \text{dist}(A, B)/2$. É fácil provar que $HD_{\delta}^s(A \cup B) = HD_{\delta}^s(A) + HD_{\delta}^s(B)$ e portanto $HD^s(A \cup B) = HD^s(A) + HD^s(B)$.

O seguinte teorema implica que os conjuntos de Borel de (X, ρ, HD^s) , isto é a σ -álgebra gerada pelos abertos de X está contida na σ -álgebra dada pelo teorema de Carathéodory. Para a prova deste teorema vide [15, Theorem 1.5].

Teorema 2.5. *Seja μ^* uma medida exterior métrica em (X, ρ) então todos os subconjuntos de Borel de X são μ^* -mensuráveis.*

Uma proposição útil é a seguinte

Proposição 2.6. *Sejam A um subconjunto de (X, ρ) , $s' > s > 0$; se $HD^s(A) < \infty$ então $HD^{s'}(A) = 0$.*

Agora vamos definir a dimensão de Hausdorff de A como

$$HD(A) = \inf\{s > 0 \text{ tais que } HD^s(A) = 0\}. \quad (2.5)$$

Um importante fato fácil de demonstrar o seguinte

Proposição 2.7. *Sejam $A \subset X$ $s > 0$ então $HD^s(A) = 0$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ de A tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |U_j|^s < \epsilon$.*

Agora seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, pela definição de HD^s é fácil demonstrar que

$$HD^s(f(A)) = a^s HD^s(A). \quad (2.6)$$

Vejamos a continuação algumas propriedades da dimensão de Hausdorff

Proposição 2.8. *i) Se $A \subset B$ então $HD(A) \leq HD(B)$,*

ii) Se $\{X_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ é uma sequência contável de subconjuntos de X então

$$HD\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sup_k \{HD(X_k)\}$$

iii) Se U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ então $HD(U) = n$.

iv) Se $f : (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ é uma função Hölder contínua com expoente $\theta \in (0, 1]$ (se $\theta = 1$ então f diz-se Lipschitz), isto é

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot \rho_X(x_1, x_2)^\theta,$$

$$\text{então } HD(f(X)) \leq HD(X)/\theta,$$

v) Se f em iv) é bi-Lipschitz isto é f e f^{-1} são Lipschitz então $HD(X) = HD(f(X))$.

Notemos que a dimensão de Hausdorff de um ponto é zero portanto ii) implica que a dimensão de Hausdorff de um conjunto contável é zero.

Vejamos a seguir um exemplo sobre a medida de Hausdorff.

Exemplo 2.1. O conjunto de Cantor ternário C_3 é definido como segue

$$C_3 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{3^n}; \sigma_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.7)$$

Note que $\frac{C_3}{3^n} = \{x : 3^n(x) \in C_3\} \subseteq C_3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Outra maneira de definir C_3 é a seguinte. Tomemos o intervalo $[0, 1]$ e tiremos o terço médio aberto, isto é, tiremos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Assim ficam dos intervalos fechados cada um de comprimento $\frac{1}{3}$. Denotemos por C^1 a união desses intervalos, de novo tiramos o terço médio de cada um desses intervalos e denotamos a união destes novos intervalos como C^2 , e assim diante definimos $C^3, \dots, C^n, \dots$. O conjunto ternário de Cantor é dado por $C_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Vamos calcular a dimensão de Hausdorff de C_3 seguindo as ideias de [14]. Começemos fazendo um cálculo heurístico de $HD(C_3)$. Se definirmos $C_e = C_3 \cap [0, 1/3]$ e $C_d = C_3 \cap [2/3, 1]$ obtemos que $C_3 = C_e \cup C_d$ (uma união disjunta). Se definimos $f_1(x) = (1/3)x$ e $f_2(x) = (1/3)x + 2/3$ então $f_1(C_3) = C_e$ e $f_2(C_3) = C_d$. Por 2.6 e 2.4 tem-se que $HD^s(C_3) = HD^s(C_e) + HD^s(C_d) = (1/3)^s HD^s(C_3) + (1/3)^s HD^s(C_3) = 2(1/3)^s HD(C_3)$. Se supormos que $HD^s(C_3) \neq 0$ se $s = HD(C_3)$ (o qual pode-se provar, vide o teorema 2.17) então $1 = 2(1/3)^s$, $s = \log 2 / \log 3$.

Agora vamos fazer um cálculo explícito de $HD(C_3)$, é suficiente provar que $1/2 \leq HD^s(C_3) \leq 1$. Se $s = \log 2 / \log 3$ sigamos a segunda construção de C_3 nesta cada C^n consta de 2^n intervalos de comprimento 3^{-k} , chamemos estes intervalos de k -níveis intervalos. Ao tomarmos

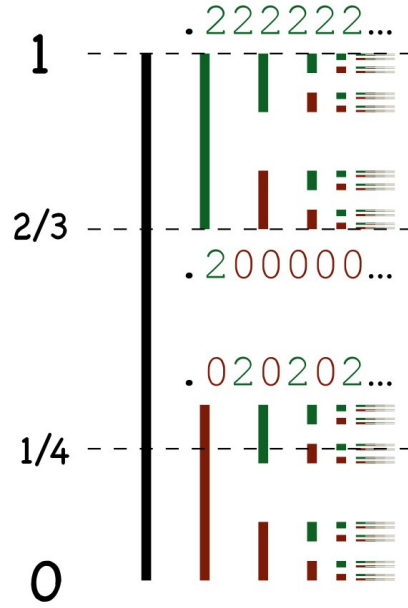


Figura 2.1: De esquerda para direita, passo a passo na construção do conjunto de Cantor ternário.

os k -níveis intervalos como uma cobertura obtemos que $HD_{3^{-k}}^s(C_3) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$. Ao fazer $k \rightarrow \infty$ obtemos que $HD^s(C_3) \leq 1$.

Para provar que $HD^s(C_3) \geq 1/2$ mostremos que

$$\sum_i |U_i|^s \geq 1/2 = 3^{-s} \quad (2.8)$$

para toda cobertura $\{U_i\}$ de C_3 .

Notemos que podemos supor que os U_i são subintervalos compactos $[0, 1]$ e todos intersectam C_3 . Para cada U_i seja k o número inteiro tal que $3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}$. Então U_i intersecta no máximo um k -nível, pela segunda construção de C_3 para $j \geq k$ U_i intersecta no máximo $2^{j-k} = 2^j 3^{-ks} \leq 2^j 3^s$ j -níveis intervalos. Tomemos j o suficientemente grande para que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo U_i . Dado que $\bigcup U_i$ intersecta todos os 2^j j -níveis intervalos os quais têm comprimento 3^{-j} . Contando intervalos obtemos que $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ que é equivalente a 2.8.

A seguir vamos introduzir a noção de conjuntos de Cantor e conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Seguiremos [8] para enunciar e provar alguns conceitos básicos dos conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Mas primeiro vejamos algumas definições.

Definição 2.9. *Um subconjunto K de um intervalo real I é um conjunto de Cantor se ele é fechado, totalmente desconexo e um subconjunto perfeito de I (esta ultima condição significa que todo ponto de K é um ponto de acumulação de K).*

Definição 2.10. Uma função f definida em um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é expansora se $|f'| > \eta > 1$ e $f \in C^{1+\epsilon}$, isto é, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f'(y) - f'(x)| \leq M|y - x|^\epsilon$ para todo $x, y \in A$.

Partições de Markov. Sejam K um conjunto de Cantor e ψ uma função expansora. Definimos uma partição de Markov como uma coleção finita de intervalos disjuntos, $K_1, \dots, K_k \subset K_0$ tais que

- ψ está definido em uma vizinhança de K_i , para $i \geq 1$;
- K está contido em $\bigcup_{i=1}^k K_i$, e a fronteira de cada K_i está contida em cada K_i ;
- Para cada $1 \leq i \leq k$, $\psi(K_i)$ é um intervalo o qual é a envolvente convexa de uma subcoleção dos intervalos da partição de Markov;
- Para cada $1 \leq i \leq k$, para n suficientemente grande $\psi(K \cap K_i) = K$ (isto é, $\psi|_K$ é topologicamente mixing).

Pode-se provar que para todo conjunto de Cantor existe uma partição de Markov com K_i , para todo i , arbitrariamente pequeno.

Exemplo 2.2. Consideremos o conjunto de Cantor ternário C_3 , seguindo a definição dada anteriormente. Tomemos $K = C_3$, $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $K_2 = [\frac{2}{3}, 1]$ e ψ dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 3x & x < \frac{1}{2} \\ 3x - 2 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.9)$$

Note que ψ' é identicamente 3 e portanto ψ é expansora. Além disso $\psi(K_1) = \psi(K_2) = K_0$, agora tomando a expansão em base 3 de cada ponto $x \in K_i \cap K$, $i = 1, 2$ como em 2.7 obtemos que $\psi^2(K \cap K_i) = K$. O anterior implica que $K_1, K_2 \subset K =$ é uma partição de Markov de C_3 e ψ .

Além disso C_3 é um conjunto de Cantor dinamicamente definido, vejamos isto último com a seguinte definição.

Definição 2.11. Um conjunto de Cantor dinamicamente definido (ou simplesmente **regular**) é um conjunto de Cantor $K \subseteq \mathbb{R}$ junto com:

- um número λ , com $0 < |\lambda| < 1$ tal que λK é uma vizinhança de um ponto $x \in K$,
- uma aplicação $\psi : K \rightarrow K$ com uma extensão $\tilde{\psi}$ expansora definida em uma vizinhança de K e
- uma partição de Markov $\{K_1, \dots, K_k\}$.

Note que sempre podemos associar a uma partição de Markov $\{K_1, \dots, K_k\}$ e uma função expansora ψ o conjunto de Cantor $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} \psi^{-i}(K_1 \cup \dots \cup K_k)$.

A seguir vejamos alguns exemplos de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos. Nestes, vamos supor $\psi|_{K_i}$ tem derivada constante em cada K_i , ou seja, $\psi|_{K_i}$ é afim.

Exemplo 2.3. O primeiro exemplo é a generalização da construção do conjunto de Cantor ternário C_3 , os chamados *conjuntos mid- α -Cantor*. Para a construção deles tomamos $K_i = [0, \frac{1}{2}(1 - \alpha)]$ e $K_2 = [\frac{1}{2}(1 + \alpha), 1]$ com $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 2.4. Agora tomemos $K_1 = [K_1^e, K_1^d], K_2 = [K_2^e, K_2^d], \dots, K_k = [K_k^e, K_k^d]$, tais que $0 = K_1^e, K_i^d < K_j^e$ se $i < j$, e a imagem de $\psi|_{K_i}$ é $[0, K_k^d]$ para todo $i = 1, \dots, k$. Os conjuntos de Cantor construídos assim são chamados de *Conjuntos de Cantor afins*. Uma generalização destes conjuntos de Cantor são os chamados *conjuntos de Cantor generalizados* onde a imagem dos K_i pela aplicação expansora ψ é um intervalo da forma $[K_{j_i}^e, K_{l_i}^d]$ com $j_i \leq l_i$ ao invés de $[0, K_k^d]$.

Vejamos a seguir uma propriedade interessante das funções expansoras, a chamada *Propriedade de distorção limitada*, cuja prova é similar à **Afirmção 4** do capítulo 3.

Teorema 2.12. *Sejam ψ uma função expansora, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\theta > 0$ e $q, \tilde{q}$ no domínio de ψ tais que*

- $|\psi^n(q) - \psi^n(\tilde{q})| \leq \theta$ e
- *para todo $0 \leq i \leq n - 1$ o intervalo $[\psi^i(q), \psi^i(\tilde{q})]$ está contido no domínio de ψ .*

Então existe $\delta(\theta)$ (dependendo somente de θ) tal que $|\log|(\psi^n)'(q)| - \log|(\psi^n)'(\tilde{q})|| \leq \delta(\theta)$. Além disso $\delta(\theta)$ converge para zero quando θ vai para zero.

Demonstração. Dado que ψ é expansora existe η tal que $|f'| \geq \eta > 1$ então $|\psi^{n-1}(q) - \psi^{n-1}(\tilde{q})| \leq \eta^{-1}|\psi^n(q) - \psi^n(\tilde{q})| \leq \eta^{-1}\theta$. Por indução obtemos que $|\psi^{n-i}(q) - \psi^{n-i}(\tilde{q})| \leq \eta^{-i}\theta$, além disso como $\psi \in C^{1+\epsilon}$ e $\psi' > 1$ existe M tal que $|\log|\psi'(x) - \psi'(y)|| \leq M|y - x|^\epsilon$ então

$$\begin{aligned} |\log|(\psi^n)'(q)| - \log|(\psi^n)'(\tilde{q})|| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \log|\psi'(\psi^i(q))| - \log|\psi'(\psi^i(\tilde{q}))| \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} M|\psi^i(q) - \psi^i(\tilde{q})|^\epsilon \leq \sum_{i=0}^{n-1} M\theta^\epsilon \cdot \eta^{-\epsilon(n-i)} \\ &\leq M\theta^\epsilon \frac{\eta^{-\epsilon}}{1 - \theta^{-\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim $\delta(\theta)$ pode ser tomado como $M\theta^\epsilon \frac{\eta^{-\epsilon}}{1 - \theta^{-\epsilon}}$. □

2.1 Dimensão de Hausdorff de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos

A seguir vamos definir o limite de capacidade o qual nos *conjuntos de Cantor dinamicamente definidos* é equivalente à dimensão de Hausdorff como veremos depois.

Definição 2.13. *Sejam K um conjunto de Cantor de $\mathbb{R}$, $N_\epsilon(K)$ o menor número de intervalos de comprimento ϵ necessários para cobrir K . Então o limite de capacidade de K , $d(K)$ é dado por*

$$d(K) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(K)}{-\log \epsilon}.$$

Note que para a definição usamos fortemente que K é compacto e que está contido em um espaço métrico, nos quais podemos tomar bolas de comprimento ϵ em vez de intervalos. Agora vejamos dois exemplos sobre o cálculo do limite de capacidade.

Exemplo 2.5. De novo tomemos o conjunto de Cantor ternário C_3 e usemos a notação usada na sua construção. Tomemos a cobertura pelos k -níveis intervalos de C^k os quais têm comprimento 3^{-k} , deduzimos que se $3^{-k} < \epsilon \leq 3^{-(k-1)}$ então $N_\epsilon(C_3) \leq 2^k$. Portanto

$$d(C_3) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N_\epsilon(C_3)}{-\log \epsilon} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Temos também que qualquer intervalo de comprimento ϵ com $3^{-(k+1)} \leq \epsilon$, intersecta pelo menos um dos k -níveis intervalos de comprimento 3^{-k} . Dado que existem 2^k de tais intervalos pelo menos 2^k intervalos de comprimento ϵ são necessários para cobrir C_3 pelo qual $N_\epsilon(C_3) \leq 2^k$. Portanto

$$d(C_3) \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N_\epsilon(C_3)}{-\log \epsilon} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Daí $d(C_3) = HD(C_3) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Nem sempre o limite de capacidade é igual à dimensão de Hausdorff. Além disso a definição de limite de capacidade pode ser estendida a conjuntos compactos. A seguir, damos um exemplo de um conjunto com limite de capacidade estritamente maior à dimensão de Hausdorff.

Exemplo 2.6. Seja $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ dado que F é contável $HD(F) = 0$, mas $d(F) = \frac{1}{2}$ (vide [14, Example 3.5]).

Proposição 2.14. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor então $d(K) \geq HD(K)$.*

Demonstração. Para todo $d' > d(K)$ e ϵ suficientemente pequeno, existe uma cobertura de K com $\epsilon^{-d'}$ intervalos de comprimento ϵ . Para essa cobertura $\mathcal{U}$, e $d'' > d'$, temos que $HD^{d''}(K) \leq$

$\epsilon^{-d'} \epsilon^{d''}$ (vide definição de $HD^{d''}(K)$, equação 2.3). Notemos que quando ϵ vai para zero $\epsilon^{-d'} \epsilon^{d''}$ vai para zero. Isto é para $d'' > d(K)$, a medida d'' de Hausdorff de K é zero, isto é $d(K) \leq HD(K)$. $\square$

A demonstração anterior prova um fato mais forte, a saber, que para todo conjunto de Cantor $K \subset \mathbb{R}$,

$$HD(K) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(K)}{-\log \epsilon}.$$

Em particular, se $HD(K) = d(K)$ então

$$HD(K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(K)}{-\log \epsilon}.$$

O anterior acontece se K é dinamicamente definido. O teorema seguinte é este fato.

Teorema 2.15. *Se K é um conjunto de Cantor dinamicamente definido então $d(K) = HD(K)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.14 basta provar que $d(K) \leq HD(K)$. Para isso, vamos seguir [8]. Sejam $\mathcal{R}^1 = \{K_1, \dots, K_m\}$ uma partição de Markov de K , e para $n > 1$, $\mathcal{R}^n$ o conjunto de componentes conexas dos $\psi^{1-n}(K_i)$, $K_i \in \mathcal{R}$, Para $R \in \mathcal{R}^n$. Sejam também $\lambda_{n,R} = \inf |(\psi^n)'|_R|$ e $\Lambda_{n,R} = \sup |(\psi^n)'|_R|$. Definamos α_n, β_n por

$$\sum_{R \in \mathcal{R}^n} (\Lambda_{n,R})^{-\alpha_n} = C \quad \text{e} \quad \sum_{R \in \mathcal{R}^n} (\lambda_{n,R})^{-\beta_n} = 1$$

Com C uma constante especialmente escolhida, vamos demonstrar que para todo $n \geq 1$, cumpre-se que $HD(K) \geq \alpha_n$ e $d(K) \leq \beta_n$ e depois provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$. Para fixar a constante C , lembramos que pela definição de β_n , existe $\hat{\beta}$ tal que $\beta_n \leq \hat{\beta}$. Tomamos $C = \sup |(\psi^k)'|^\beta$, onde k é tal que $\psi^{k+1}(K_i \cap K) = K$ para todo $K_i \in \mathcal{R}^1$. Temos que se $\psi|_{K_i}$ é sobrejetiva para todo i então $C = 1$.

Agora provemos que $d(K) \leq \beta_n$ para todo n . Seja $\beta > d(K)$. A definição de $d(K)$ nos permite tomar ϵ_0 tal que $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \cdot N_\epsilon(K) \leq \epsilon^{-\beta}$, o que implica que existe uma cobertura de K com no máximo $\epsilon^{-\beta}$ intervalos de comprimento ϵ . Para todo $R \in \mathcal{R}^n$, as imagens inversas destes intervalos pela função $\psi^n|_R$ formam uma cobertura de R por intervalos com comprimento no máximo $\epsilon \cdot \lambda_{n,R}^{-1}$. Ou seja, $N_{\epsilon \cdot \lambda_{n,R}^{-1}}(R) < \epsilon^{-\beta}$ para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, isto é, $N_\epsilon(R) \leq \lambda_{n,R}^{-\beta} \cdot \epsilon^{-\beta}$ para $0 < \epsilon \leq \lambda_{n,R}^{-1}(R) \cdot \epsilon_0$. Segue que se $\lambda_n = \sup_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}$ então $N_\epsilon(K) \leq \epsilon^{-\beta} \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)$. Aplicando o mesmo argumento para $k \leq 1$ obtemos que

$$N_\epsilon(K) \leq \epsilon^{-\beta} \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)^k \quad \text{se} \quad 0 < \epsilon \leq \lambda_n^{-k} \epsilon_0.$$

Portanto

$$d(K) \leq \beta + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)^k \right)}{\log(\lambda_n \epsilon_0)} = \beta + \frac{\log \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\beta} \right)}{\log \lambda_n}.$$

Agora tomando limite quando $\beta \rightarrow d(K)$, obtemos

$$d(K) \leq d(K) + \frac{\log \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-d(K)} \right)}{\log \lambda_n}.$$

Como $\lambda_n > 1$ temos que $\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-d(K)} \geq 1$ e portanto $d(K) \leq \beta_n$.

Agora devemos provar que $HD(K) \geq \alpha_n$, para todo n . A prova segue por contradição. Suponha que $HD(K) < \alpha_n$ para algum n . Tome α tal que $HD(K) < \alpha < \alpha_n$. Segue que existe uma cobertura finita $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de K por intervalos com comprimentos arbitrariamente pequenos para os quais $\sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha$ também é suficientemente pequeno. Suponhamos que todo elemento de $\mathcal{U}$ intersecta a somente um $R \in \mathcal{R}^n$. Isso acontecerá se $\sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha \leq \epsilon_0$, onde $\epsilon_0 > 0$ depende apenas de n e α . Coloquemos $\mathcal{U}_R = \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap R \neq \emptyset\}$. Tomemos como anteriormente $k \geq 0$ tal que $\psi^{k+1}(K_i \cap K) = K$ para todo $K_i \in \mathcal{R}^1$. Também podemos assumir que $(\psi^{n+k}|_R)(\mathcal{U}_R)$ é uma cobertura bem definida de K para todo $R \in \mathcal{R}^n$. Notemos que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha \leq (\sup |(\psi^k)'|)^\alpha \cdot \Lambda_{n,R}^\alpha \cdot \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(U))^\alpha \leq C \cdot \Lambda_{n,R}^\alpha \cdot \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(U))^\alpha.$$

Agora se para todo $R \in \mathcal{R}^n$, $\sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha > \epsilon_0$ então

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha &= \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(U))^\alpha \geq C^{-1} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \cdot \sum_{U \in \mathcal{U}_R} (\ell(\psi^{n+k}|_R(U)))^\alpha \\ &\geq C^{-1} \left(\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \right) \cdot \epsilon_0 \geq \left(C^{-1} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \right) \cdot \sum_{i \in I} (\ell(U_i))^\alpha \end{aligned}$$

o qual é uma contradição dado que $\alpha < \alpha_n$, ou seja, temos que $\sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} > C$.

Pelo anterior existe $R_0 \in \mathcal{R}^n$ tal que $\sum_{U \in \mathcal{U}_{R_0}} (\ell(\psi^{n+k}|_{R_0}(U)))^\alpha \leq \epsilon_0$, e obtemos uma cobertura $\mathcal{U}' = (\psi^{n+k}|_{R_0})(\mathcal{U}_{R_0}) = \{U_i\}_{i' \in I'}$ com um número menor de elementos tal que $\sum_{i' \in I'} (\ell(U'_i))^\alpha \leq \epsilon_0$. Repetindo o mesmo argumento indutivamente obtemos uma cobertura de K sem elementos, uma contradição. Concluimos que $HD(K) \geq \alpha_n$ como queríamos.

Nos resta ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$. Pela propriedade da distorção limitada existe $a > 0$ tal que $\Lambda_{n,R} \leq a \cdot \lambda_{n,R}$, para todo $n \leq 1$ e $R \in \mathcal{R}^n$. Sejam $\eta = \inf |\psi'|$ e $\theta_n = \frac{\alpha_n \log a + \log C}{-\log a + n \log \eta}$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,R}^{-\alpha - \theta_n} &\leq a^{\alpha_n + \theta_n} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} \cdot \Lambda_{n,R}^{-\theta_n} \\ &\leq a^{\alpha_n + \theta_n} \cdot \eta^{-n\theta_n} \sum_{R \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,R}^{-\alpha} = a^{\alpha_n + \theta_n} \cdot \eta^{-n\theta_n} \cdot C = 1 \end{aligned}$$

isto último devido a definição de δ_n . Segue que $\beta_n \leq \alpha_n + \theta_n$, o que implica que

$$\beta_n - \alpha_n \leq \frac{\alpha_n \log a + \log C}{n \log \eta - \log a} \leq \frac{HD(K) \log a + \log C}{n \log \eta - \log a}.$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$, assim a demonstração conclui. $\square$

Notemos que a demonstração anterior nos dá uma "fórmula" para calcular a dimensão de Hausdorff a qual vai ser utilizada no capítulo 3. Além disso, dado que para conjuntos de Cantor dinamicamente definidos afins $\alpha_1 = \beta_1$ obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.16. *Seja $\{I_i\}_{i \in J}$ uma coleção finita de intervalos compactos disjuntos, I a envoltura convexa de $\cup_{i \in J} U_i$ e ψ uma aplicação afim e sobrejetiva em cada $I_i \subset I$. Então a dimensão do conjunto de Cantor afim gerado por esta partição é o número d que satisfaz*

$$\sum_{i \in J} |I_i|^d = 1.$$

Lembremos que $HD^s(A)$ é a s -dimensional medida de Hausdorff (ver a equação 2.3) e que $HD(A) = \inf\{s > 0 \text{ tais que } HD^s(A) > 0\}$, mas para os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos temos que esse ínfimo é atingido, isso é o que afirma o seguinte teorema.

Teorema 2.17. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor dinamicamente definido com $HD(K) = d$. Então $0 < HD^d(K) < \infty$. Além disso existe $c > 0$ tal que para todo $x \in K$ e $0 < r \leq 1$,*

$$c^{-1} \leq \frac{HD^d(B_r(x) \cap K)}{r^d} \leq c.$$

Para a demonstração ver [8, PROPOSITION 3, Capítulo 4].

Corolário 2.18. *Mantendo as notações do teorema 2.15, existe $a_2 > 1$, dependendo somente de K e ψ tal que para todo $R \in \mathcal{R}^n$ e $n \geq 1$ vale*

$$a_2^{-1} \leq \frac{HD^d(R \cap K)}{(\ell(R))^d} \leq a_2. \quad (2.11)$$

Demonstração. Para mostrar este fato observemos que ψ^{n-1} aplica R em forma difeomorfa em algum $K_i \in \mathcal{R}_1$. Segue que

$$\lambda_{n-1,R}^d \cdot HD^d(R \cap K) \leq HD^d(K_i \cap K) \leq \Lambda_{n-1,R}^d \cdot HD^d(R \cap K).$$

pelo teorema do valor médio temos que

$$\lambda_{n-1}^d \cdot \ell(R) \leq \ell(K_i) \leq \Lambda_{n-1}^d \cdot \ell(R).$$

Pela propriedade da distorção limitada existe $a \leq 1$ tal que $\Lambda_{n-1,R} \leq a \cdot \lambda_{n-1,R}$, a qual somente depende de K e ψ . Portanto obtemos que

$$a^{-d} \cdot \frac{HD^d(K_i \cap K)}{(\ell(K_i))^d} \leq \frac{HD^d(R \cap K)}{(\ell(R))^d} \leq a^d \cdot \frac{HD^d(K_i \cap K)}{(\ell(K_i))^d}.$$

Dado que há um número finito de K_i existe $M, N > 0$ tal que $M < \ell(K_i) < N$ para todo K_i . portanto somente falta provar o mesmo para $HD^d(K_i \cap K)$. Dado que $HD^d(K_i \cap K) \leq HD^d(K) \leq \infty$, obtemos que $HD^d(K_i \cap K)$ é limitado superiormente.

Dado que para algum $k \geq 0$ $\psi^{k+1}(K_i \cap K) = K$, segue pela definição de dimensão de Hausdorff que

$$HD^d(K_i \cap K) \leq (\sup |(\psi^{k+1})'|)^{-d} HD^d(K) > 0.$$

Assim conclui a prova de 2.11. □

Teorema 2.19. *Sejam K_1, K_2 conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, $d_i = HD(K_i)$ para $i = 1, 2$, $d = d_1 + d_2$ e $K = K_1 \times K_2$. Então existe $c > 0$ tal que*

- $0 < HD^d(K) < \infty$, portanto $HD(K) = d$
- $c^{-1} \leq \frac{HD^d(K \cap B_r(x))}{r^d} < c$ para todo $x \in K$ e $0 < r \leq 1$.

Demonstração. Pelo teorema anterior é suficiente provar que HD^d é equivalente ao produto de medidas $\mu =: HD^{d_1} \times HD^{d_2}$, pelo qual é suficiente provar para os conjuntos de Borel A em K , isto é $0 < \mu(A)/HD^d(A) < \infty$. Para isto consideremos as partições de Markov $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ para K_1 e K_2 respetivamente e seja $\mathcal{R}_i^n$ para $i = 1, 2$, a família de componentes conexas de $\psi_i^{-(n-1)}(L_j)$ para $L_j \in \mathcal{R}_i$. Dado que os conjuntos de Borel da forma $A = R_1 \times R_2$ com $R_1 \in \mathcal{R}_1^n$, $R_2 \in \mathcal{R}_2^n$ geram a σ -álgebra de Borel de K vamos-nos restringir a eles. Seja $\mathcal{U} = \{U_{1,j} \times U_{2,j} \mid 1 \leq j \leq m\}$, com $A \cap U_{1,j} \times U_{2,j} \neq \emptyset$, para todo j , uma cobertura de A por cubos. Fixemos $x_{i,j} \in U_{i,j} \cap R_i$ e seja $B_{i,j}$ a bola em K_i com centro em $x_{i,j}$ com radio $\ell(U_{i,j})$ para $i = 1, 2$ e $1 \leq j \leq m$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(U_{1,j} \times U_{2,j}) = HD^{d_1}(U_{1,j} \times HD^{d_2}(U_{2,j})) \\ &\leq HD^{d_1}(B_{1,j}) \times HD^{d_2}(B_{2,j}) \\ &\leq c_1 c_2 \cdot (\ell(U_{1,j}))^{d_1} \cdot (\ell(U_{2,j}))^{d_2} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (\text{diam}(U_{1,j} \times U_{2,j}))^d &\geq \sum_{j=1}^m (\ell(U_{1,j}))^{d_1} \cdot (\ell(U_{2,j}))^{d_2} \\ &\geq (c_1 c_2)^{-1} \sum \mu(U_{1,j} \times U_{2,j}) \\ &\geq (c_1 c_2)^{-1} \mu(A) \end{aligned}$$

Onde $\text{diam}(B)$ é o diâmetro de B . Dado que $\mathcal{U}$ é arbitrário segue que $HD^d(A) \geq (c_1 c_2)^{-1} \mu(A)$.

Para a desigualdade na outra direção construímos coberturas $\mathcal{U}_m$, de $A = R_1 \times R_2$ com $m \gg n$. Fixemos $U_1 \in \mathcal{R}_1^m$, U_1 contido em R_1 . Para todo $x_2 \in R_2$, tomemos $\overline{m}(U_1, x_2)$ maximal

tal que se $U_2(U_1, x_2)$ denota o elemento de $\mathcal{R}_2^{\overline{m}(U_1, x_2)}$ contendo x_2 então $\ell(U_2(U_1, x_2)) \geq \ell(U_1)$. Temos que $\{U_2(U_1, x_2) \mid X_2 \in \mathcal{R}_2\}$ contém uma cobertura de finita de R_2 por intervalos por intervalos disjuntos. Como os $U_2(U_1, x_2)$ são elementos de partições de Markov $\mathcal{R}_2^j$, eles são disjuntos ou são contidos um no outro. Portanto podemos extrair uma subcobertura finita de elementos disjuntos. Agora definimos $\mathcal{U}_m$ como a família de conjuntos $U_1 \times U_2(U_1, x_2)$ obtida dessa maneira para todo $U_1 \in \mathcal{R}_1^m$ contido em R_1 . Assim temos uma cobertura de $A = R_1 \times R_2$. Além disso, pela propriedade de distorção limitada existe $0 < b < 1$ dependendo somente de K e ψ tal que se denotarmos os elementos de $\mathcal{R}_2^{\overline{m}(U_1, x_2)+1}$ contendo X_2 por $U'_2(U_1, x_2)$ então $\ell(U'_2(U_1, x_2)) \geq \ell(U_2(U_1, x_2))$. Além disso temos que $\ell(U'_2(U_1, x_2)) \leq \ell(U_1)$. Segue que

$$\ell(U_1) \leq b \cdot \ell(U_2(U_1, x_2)). \quad (2.12)$$

Por 2.11 e 2.12 tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{U}_m} (\text{diam}(U_1 \times U_2(U_1, x_2)))^d &= \sum_{\mathcal{U}_m} \ell(U_2(U_1, x_2))^d \\ &\leq b^{-d_1} \sum_{\mathcal{U}_m} (\ell(U_1))^{d_1} \ell(U_2(U_1, x_2))^d \\ &\leq b^{-d_1} \sum_{\mathcal{R}_m} (a'_2 HD^{d_1}(U_1 \cap K_1)) (a''_2 HD^{d_2}(U_2(U_1, x_2) \cap K_2)) \\ &= b^{-d_1} a'_2 a''_2 \mu(A) \end{aligned}$$

onde a'_2 e a''_2 são dados por 2.11.

Como o diâmetro de $\mathcal{U}_m$ vai para zero quando $m \rightarrow \infty$ concluímos que $HD^d(A) \leq b^{-d_1} a'_2 a''_2 \mu(A)$. Assim termina a demonstração. $\square$

Nosso próximo objetivo é demonstrar que para um conjunto de Cantor K dinamicamente definido vale que $0 < HD(K) < 1$. A prova deste fato precisa de alguns resultados anteriores contidos em [8]. Para isso, precisamos introduzir alguns conceitos básicos.

Seja K um conjunto de Cantor de $\mathbb{R}$ um *gap* de K é uma componente conexa de $\mathbb{R} \setminus K$, agora sejam $u \in K$ e U um gap limitado de K , tais que u pertença à fronteira de U (note que o conjunto de Cantor K somente pode ter dois gaps não limitados). Seja também C a ponte de K em u , isto é, o intervalo maximal de $\mathbb{R}$ tal que u é um ponto fronteira de C , e que C não intersecta nenhum gap U' com comprimento maior o igual ao comprimento de U . Definimos a grossura de K em u , como $\tau(K, u) = \ell(C)/\ell(U)$, e a grossura de K , $\tau(K)$ como o ínfimo sobre os $\tau(K, u)$. Outra maneira de definir a grossura equivalente à anterior é a seguinte. Definamos uma *apresentação* como um ordenamento $\mathfrak{U} = \{U_n\}$ de gaps limitados de K . Agora seja I o menor intervalo compacto contendo K . Para u na fronteira de U_n , ∂U_n , seja C a componente conexa de $I \setminus U_1 \cup \dots \cup U_n$ contendo u . Tomemos $\tau(K, \mathfrak{U}, u) = \ell(C)/\ell(U_n)$. Então

$$\tau(K) = \sup_{\mathfrak{U}} \inf_u \tau(K, \mathfrak{U}, u).$$

definamos também a *densidade* de K como

$$\theta(K) = \inf_{\mathfrak{U}} \sup_u \tau(K, \mathfrak{U}, u).$$

Claramente $\tau(K) \leq \theta(K)$.

A demonstração das seguintes proposições podem ser encontradas no livro de [8].

Proposição 2.20. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor com grossura τ então $HD(K) \geq \log 2 / \log(2 + 1/\tau)$, segue que $\tau(K) > 0$ implica $HD(K) > 0$.*

Proposição 2.21. *Seja K um conjunto de Cantor com densidade θ . Então $HD(K) \leq \log 2 / \log(1 + 1/\theta)$. Deduz-se que $\theta(K) < \infty$ implica $HD(K) < 1$.*

Teorema 2.22. *Se K é um conjunto de Cantor dinamicamente definido então $0 < HD(K) < 1$.*

Demonstração. Pelas duas proposições anteriores é suficiente demonstrar que $0 < \tau(K)$ e que $\theta(K) < \infty$. Para isso vejamos que existe uma apresentação $\mathfrak{U}$ de K tal que

$$0 < \inf_u \tau(K, \mathfrak{U}, u) \leq \sup_u \tau(K, \mathfrak{U}, u) < \infty. \quad (2.13)$$

Para encontrar uma apresentação cumprindo 2.13 tomemos $\mathcal{R} = \{K_1, \dots, K_k\}$ uma partição de Markov de K com aplicação expansora ψ . Sejam $U'_1, \dots, U_{k-1}$ os gaps de K no interior da partição (lembre-se que K contém as fronteiras dos intervalos da partição). Dado um gap U de K seja $s(U)$ o menor inteiro não negativo tal que $\psi^{s(U)}(U)$ não está contido em nenhum $K_i \in \mathcal{R}$. Podemos tomar uma apresentação $\mathfrak{U} = \{U_n\}$ um ordenamento de gaps limitados de K .

$$i \leq j \Rightarrow s(U_i) \leq s(U_j)$$

dado que para todo $r \geq 0$ o conjunto de gaps tais que $s(U) \leq r$ é finito.

Agora vamos provar que $\mathfrak{U}$ satisfaz 2.13, sejam $u \in \partial U_i$, I o menor intervalo compacto contendo K e C a componente conexa de $I \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$ contendo u . Temos que $\psi(C) \subset K_{i_n}$ com $K_{i_n} \in \mathcal{R}$ para $0 \leq n \leq s(U_i) - 1$. Além disso, pela propriedade de distorção limitada existe $a > 0$, (que depende somente de K e ψ), tal que

$$a^{-1} \cdot \frac{\ell(C)}{\ell(U_i)} \leq \frac{\ell(\psi^{s(U_i)}(C))}{\ell(\psi^{s(U_i)}(U_i))} \leq a \cdot \frac{\ell(C)}{\ell(U_i)}$$

equivalentemente

$$a^{-1} \cdot \frac{\ell(\psi^{s(U_i)}(C))}{\ell(\psi^{s(U_i)}(U_i))} \leq \tau(K, \mathfrak{U}, u) \leq a \cdot \frac{\ell(\psi^{s(U_i)}(C))}{\ell(\psi^{s(U_i)}(U_i))}.$$

Portanto é suficiente provar que $0 < \frac{\ell(\psi^{s(U_i)}(C))}{\ell(\psi^{s(U_i)}(U_i))} < \infty$. Para isso notemos que $\psi^{s(U_i)}(U_i) \in U'_1, \dots, U_{k-1}$ e portanto $\psi^{s(U_i)}(U_i)$ somente pode tomar um número finito de valores. O mesmo

acontece com $\psi^{s(U_i)}(C)$ dado que o comprimento de $\psi^{s(U_i)}(C)$ é menor do que o comprimento de K e deve conter um $K_r \in \mathcal{R}$. Para provar que deve conter algum K_r procedemos como segue. Seja v o outro ponto fronteira de C e U o gap de K com $v \in \partial U$. U é ilimitado ou $U = U_j$ com $j < i$ em qualquer caso $s(U) \leq s(U_i)$. Segue que $\psi^{s(U_i)}(v) \in K_r$ para algum $K_r \in \mathcal{R}$ o qual está contido em algum $\psi^{s(U_i)}(c)$ concluímos que $0 < \ell(\psi^{s(U_i)}(U_i))$. Assim a prova fica completa. $\square$

O próximo teorema nos fala sobre a continuidade da *dimensão de Hausdorff*, para entendermos melhor este conceito vejamos a seguinte definição

Definição 2.23. *Seja K um conjunto de Cantor com função expansora ψ e uma partição de Markov $\{K_1, \dots, K_l\}$, tal que $\psi \in C^{1+\epsilon}$ e $|\psi'(p) - \psi'(q)| \leq C|p - q|^\epsilon$ para todo p, q em uma vizinhança de K para alguma constante fixa $C > 0$, esta constante C é chamada de constante de Hölder. Um conjunto de Cantor $\tilde{K}$ está próximo de K , se $\tilde{K}$ tem uma função expansora $\tilde{\psi}$ e uma partição de Markov $\{\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_l\}$ tal que*

- ψ é $C^{1+\tilde{\epsilon}}$, e a constante de Hölder $\tilde{C}$ de $\tilde{\psi}'$ é tal que $(\tilde{\epsilon}, \tilde{C})$ é próxima de (ϵ, C) ,
- $(\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_l)$ é próximo de $(K_1, \dots, K_l)$, isto é, os pontos extremos são próximos.

O teorema é o seguinte

Teorema 2.24. *A dimensão de Hausdorff (limite de capacidade) de um conjunto de Cantor dinamicamente definido K dependem continuamente de K .*

Demonstração. Notemos que pela definição $\psi(K_i)$ intersecta K_j , em outras palavras contém K_j se e somente se o mesmo acontece com $\tilde{\psi}(\tilde{K}_i)$ e $\tilde{K}_j$. Portanto para todo $x \in K$ existe um $\tilde{x} \in \tilde{K}$ tal que $\tilde{\psi}^n(\tilde{x}) \in \tilde{K}_i \Leftrightarrow \psi^n(x) \in K_i$, para todo $n \geq 0$. Como $\tilde{\psi}$ é expansora $\tilde{x}$ é único definamos $h : K \rightarrow \tilde{K}$ por $h(x) = \tilde{x}$. Da mesma maneira podemos obter $h^{-1} : \tilde{K} \rightarrow K$. Isto demonstra que h é uma bijeção. Claramente $\tilde{\psi}(h(x)) = h(\psi(x))$. Temos h é C^0 -próximo da identidade para ver isso para isso construamos partições de Markov $\mathcal{R}$ e $\tilde{\mathcal{R}}$ de K e $\tilde{K}$ como na demonstração do teorema 2.15 e tomemos as componentes conexas das imagens inversas $\psi^{-(n-1)}(K_j)$ e $\tilde{\psi}^{-(n-1)}(\tilde{K}_j)$. Podemos observar que x e $h(x)$ pertencem aos correspondentes intervalos de $\mathcal{R}$ e $\tilde{\mathcal{R}}$ para todo n e esses intervalos não dependem de n . Dado que K e $\tilde{K}$ são compactos e ψ e $\tilde{\psi}$ têm a propriedade de distorção limitada.

Vejamos que h é Hölder-contínua. Tomemos $\delta > 0$ tal que $d(K_i, K_j) > 3\delta$ e $d(\tilde{K}_i, \tilde{K}_j) > 3\delta$ para todo $i \neq j$. Agora, para $x, y \in K$ com $|x - y| \leq \delta$ e tomemos $n = n(x, y) \geq 0$ tal que

$$|\psi^i(x) - \psi^i(y)| \leq 2\delta \text{ para } 0 \leq i \leq n-1$$

e

$$|\psi^n(x) - \psi^n(y)| \geq 2\delta.$$

Pela definição de δ o intervalo $[\psi^i(x), \psi^i(y)]$ está contido em algum elemento da partição de Markov para $0 \leq i \leq n$. Agora tomemos $\tilde{K}$ suficientemente próximo de K tal que $|h(x) - x| \leq \min\{1, \delta/2\}$ para todo x (notemos que $\tilde{\psi}^i(\tilde{x}) = h(\psi^i(x))$). Portanto

$$|\tilde{\psi}^i(\tilde{x}) - \tilde{\psi}^i(\tilde{y})| \leq 3\delta \text{ para } 0 \leq i \leq n-1.$$

De novo $[\tilde{\psi}(\tilde{x}), \tilde{\psi}(\tilde{y})]$ deve estar contido em algum $\tilde{K}_j$ para todo $0 \leq i \leq n-1$. O teorema do valor médio implica que existem $\xi_i \in [\psi^i(x), \psi^i(y)]$ e $\tilde{\xi}_i \in [\tilde{\psi}(\tilde{x}), \tilde{\psi}(\tilde{y})]$ para $0 \leq i \leq n-1$ tais que

$$\begin{aligned} |\psi^n(x) - \psi^n(y)| &= |x - y| \prod_{i=0}^{n-1} |\psi'(\xi_i)|, \\ |\tilde{\psi}^n(\tilde{x}) - \tilde{\psi}^n(\tilde{y})| &= |\tilde{x} - \tilde{y}| \prod_{i=0}^{n-1} |\tilde{\psi}'(\tilde{\xi}_i)|. \end{aligned}$$

Claramente podemos escolher $0 < \gamma < 1$ tal que $|\psi'(\xi_i)|^\gamma \leq |\tilde{\psi}'(\tilde{\xi}_i)|$ para $0 \leq i \leq n-1$. Segue que

$$\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{|x - y|^\gamma} \leq \frac{|\tilde{\psi}^n(\tilde{x}) - \tilde{\psi}^n(\tilde{y})|}{|\psi^n(x) - \psi^n(y)|^\gamma} \leq (\text{diam}(K) + 1)\delta^{-\gamma}.$$

Obtemos que h é Hölder-contínua.

Dado que $\tilde{\psi}$ é C^1 -próxima a ψ podemos tomar os $\tilde{\xi}_i$ tão próximos dos ξ_i tais que os $|\psi'(\xi_i)|$ sejam quase iguais aos $|\tilde{\psi}'(\tilde{\xi}_i)|$. Portanto se $\tilde{K}$ é próximo de K então o expoente de Hölder γ pode ser tomado próximo a 1. O anterior pode ser feito também para h^{-1} .

Podemos resumir o feito acima dizendo que se $\tilde{K}$ é próximo de K , existe γ próximo de 1 e um homeomorfismo $h : K \rightarrow \tilde{K}$ tal que h e h^{-1} são Hölder contínuas com expoente γ . A proposição 2.8 implica que $\gamma \cdot HD(K) \leq HD(\tilde{K}) \leq \gamma^{-1} \cdot HD(K)$. Assim termina a prova do teorema. $\square$

Capítulo 3

Conjuntos de Cantor gordos para f

Neste Capítulo vamos provar o Teorema 0.1. Isto é, vamos provar a existência de infinitos conjuntos de Cantor regulares com dimensão de Hausdorff (denotada aqui HD) arbitrariamente perto de 1 convergindo para o maximal invariante para a aplicação uni-dimensional f associada a um atrator geométrico de Lorenz.

Prova do Teorema 0.1 Construimos os conjuntos de Cantor indutivamente. Lembremos que $L_1^a = [f(1-a), 0)$. Tomemos qualquer intervalo $I \subset L_1^a$ o lema 1.7 implica que existe um intervalo $I_1 \subseteq I$ e um iterado f^{n_1} de f tal que $f^{n_1} : I_1 \rightarrow L_1^a$ é um difeomorfismo. Sejam $\{J_1^1, J_2^1\}$ os intervalos complementares de I_1 em L_1^a . De novo o lema 1.7 implica que existem $I_1^1 \subset J_1^1$, $I_2^1 \subset J_2^1$, n_1^1 e n_2^1 tal que $f^{n_i^1} : I_i^1 \rightarrow L_1^a$ é um difeomorfismo para $i = 1, 2$.

Sejam $\{J_1^{11}, J_1^{12}\}$ os intervalos complementares de I_1^1 em J_1^1 e $\{J_2^{11}, J_2^{12}\}$ os intervalos complementares de I_2^1 em J_2^1 .

Continuando como o mesmo procedimento no k -ésimo passo obtemos $r_k = 2^k - 1$ intervalos $I_1, \dots, I_{r_k}$, tal que para todo $i = 1, \dots, r_k$ existe um n_i tal que $f^{n_i} : I_{r_i} \rightarrow L_1^a$ é um difeomorfismo (estamos tomando também os intervalos obtidos com esta propriedade nos passos anteriores).

Agora sejam $\{J_1^k, \dots, J_{r_k+1}^k\}$ os intervalos complementares de $\bigcup_{i=1}^{r_k} I_i$ e μ a medida invariante dada pelo lema 1.3 a qual implica que para todo $\hat{I} \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ existe c tal que $\mu(\hat{I}) \leq c\mu(\hat{I}) = c|\hat{I}|$.

Seja $\epsilon_k = \min_i \{\mu(J_i^{(k)})\} \leq c \min_i \{|J_i^{(k)}|\}$ e seja $m_k = \lfloor \frac{1}{\epsilon_k} \rfloor$, em particular $m_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, agora dividamos os intervalos $J_i^{(k)}$ em 2^{m_k} intervalos, $J_{i,j}^{(k)} : j = 1, \dots, 2^{m_k}$ disjuntos de igual μ -medida. Então

$$\frac{1}{2^{m_k}} \geq \mu(J_{i,j}^{(k)}) = \frac{\mu(J_i^{(k)})}{2^{m_k}} \geq \frac{\epsilon_k}{2^{m_k}} > \frac{1}{2^{m_k}(m_k + 1)}. \quad (3.1)$$

No que segue se $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$ é uma sequência de números reais tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{m_k} = 0$ então por abuso de notação vamos escrever $x_k = o(1)$ para todo k .

Para $j = 1, \dots, 2^{m_k}$ a equação 3.1 implica que

$$\log(2^{-m_k}) \geq \log(\mu(J_{i,j}^{(k)})) > \log(2^{-m_k}) - \log(m_k + 1)$$

$$1 \leq \frac{\log(\mu(J_{i,j}^{(k)}))}{\log(2^{-m_k})} < 1 - \frac{\log(m_k + 1)}{\log(2^{-m_k})}.$$

Concluimos que

$$\frac{\log(\mu(J_{i,j}^{(k)}))}{\log(2^{-m_k})} = 1 + o(1).$$

Temos também que dado que $\mu(I) \leq c|I|$,

$$c|J_{i,j}^{(k)}| \geq \mu(J_{i,j}^{(k)}) > \frac{1}{2^{m_k}(m_k + 1)} \Rightarrow \quad (3.2)$$

$$\log(|J_{i,j}^{(k)}|) > -\log c + \log(2^{-m_k}) - \log(m_k + 1) \Rightarrow$$

$$\frac{\log |J_{i,j}^{(k)}|}{\log(2^{-m_k})} < 1 - \frac{\log c + \log(m_k + 1)}{\log(2^{-m_k})} \Rightarrow$$

$$\frac{\log |J_{i,j}^{(k)}|}{\log(2^{-m_k})} \leq 1 + o(1) \Rightarrow$$

$$|(J_{i,r}^{(k)})| \geq \frac{1}{2^{(1+o(1))m_k}}. \quad (3.3)$$

Consideremos o intervalo $(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3})$ e definamos $f^0 = Id$. O fato que μ é f -invariante implica:

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{j=0}^{4m_k} f^{-j} \left(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3} \right) \right) &\leq \sum_{j=0}^{4m_k} \mu \left(f^{-j} \left(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3} \right) \right) = \sum_{j=0}^{4m_k} \mu \left(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3} \right) \\ &\leq 2c \sum_{j=0}^{4m_k} \frac{1}{m_k^3} = \frac{8c}{m_k^2} + \frac{2c}{m_k^3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Note que se tomamos a soma a partir de $j = 1$ então o termo $\frac{2c}{m_k^3}$ desaparece.

No que segue se A é um conjunto finito vamos denotar $\#A$ o número de elementos de A ($\#A$ é o cardinal de A).

Afirmção 1. Para k suficientemente grande existe um conjunto $\mathcal{R}_i \subset \{1, \dots, 2^{m_k}\}$ com $\#\mathcal{R}_i = 2^{m_k-1}$ tal que para todo $r \in \mathcal{R}_i$ existe um ponto $x \in J_{i,r}^{(k)}$ tal que

$$x \notin \left(\bigcup_{j=0}^{4m_k} f^{-j} \left(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3} \right) \right) \quad (3.5a)$$

e existe $M_1 \leq \frac{1}{3}$ tal que

$$|J_{i,r}^{(k)}| < M_1/m_k^3. \quad (3.5b)$$

Demonstração. A ideia da prova é contar o número que não satisfazem essas propriedades. Consideremos o conjunto

$$\tilde{\mathcal{R}}_i^C = \{j, 1 \leq j \leq 2^{m_k}\}; J_{i,j}^{(k)} \subset \bigcup_{j=0}^{4m_k} f^{-j} \left(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3} \right). \quad (3.6)$$

Vamos mostrar que para k suficientemente grande $\#\tilde{\mathcal{R}}_i^C \leq 2^{m_k-2}$. Para isso escreva $\#\tilde{\mathcal{R}}_i^C = 2^{m_k-n_k} + N_k$ com $N_k < 2^{m_k-n_k}$. Temos que $\mu(J_{i,1}^{(k)}) = \mu(J_{i,j}^{(k)})$ para todo $j \in \tilde{\mathcal{R}}_i^C$ e então usando as equações (3.1) e (3.4) obtemos que

$$\frac{1}{2^{m_k}(m_k+1)}(2^{m_k-n_k+N_k}) < \mu(J_{i,1})\#\tilde{\mathcal{R}}_i^C \leq \mu \left(\bigcup_{j \in \tilde{\mathcal{R}}_i^C} J_{i,j}^{(k)} \right) \leq \frac{8c}{m_k^2} + \frac{2c}{m_k^3}.$$

Deduzimos que

$$\frac{1}{2^{n_k}} + \frac{N_k}{2^{m_k}} \leq 8c \frac{m_k+1}{m_k^2} + \frac{2c(m_k+1)}{m_k^3} \leq \frac{1}{4} \text{ para } k \text{ suficientemente grande.} \quad (3.7)$$

Agora 3.7 implica que para k suficientemente grande $\#\tilde{\mathcal{R}}_i^C = 2^{m_k-3} + N_k \leq 2^{m_k-2}$.

Assim, concluímos que para k suficientemente grande existe $\mathcal{R}_i \subset \{1, \dots, 2^{m_k}\}$ com $\#\mathcal{R}_i = 2^{m_k-1}$ cumprindo 3.5a.

Para provar que podemos escolher $\mathcal{R}_i \subset \{1, \dots, 2^{m_k}\}$ cumprindo 3.5b procedemos como segue. Para $M_1 > 0$ consideramos o conjunto $\tilde{J} \subset \tilde{\mathcal{R}}_i$ que não satisfazem a equação (3.5b). Isto é,

$$\tilde{J} := \{j \text{ tais que } J_{i,j}^{(k)} \in \tilde{\mathcal{R}}_i \text{ e } |J_{i,j}^{(k)}| \geq M_1/m_k^3\}.$$

Dado que os $J_{i,j}^{(k)}$ são dois a dois disjuntos temos

$$\#\tilde{J} \cdot \frac{M_1}{m_k^3} \leq \sum_{J_{i,j}^{(k)} \in \tilde{J}} |J_{i,j}^{(k)}| \leq 1.$$

Daí segue que $\#\tilde{J} \leq \frac{1}{M_1/m_k^3} = \frac{m_k^3}{M_1} \ll 2^{m_k-2}$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim, para k suficientemente grande, obtemos $\#\tilde{J} \ll 2^{m_k-2}$ o que implica que $\#\mathcal{R}_i \geq 2^{m_k-1}$. A prova da afirmação 1 está terminada. $\square$

Afirmção 2. Seja $\mathcal{R}_i$ como na afirmação 1. Para todo $r \in \mathcal{R}_i$ existe $j(i, r) \in \{1, \dots, 4m_k\}$ minimal tal que

$$|f^{j(i,r)}(J_{i,r}^{(k)})| > \frac{1}{3m_k^3}. \quad (3.8)$$

Demonstração. Se $|f(J_{i,r}^{(k)})| \geq \frac{1}{m_k^3}$ não há nada a fazer. Caso contrário seja $s \in \{1, \dots, 4m_k\}$ tal que $|f^s(J_{i,r}^{(k)})| < \frac{1}{m_k^3}$, dado que existe um $x_r \in J_{i,r}^{(k)}$ tal que $x \notin f^{-j} \left(-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3} \right)$ para

$j = 1, \dots, 4m_k$, temos que $0 \notin f^s(J_{i,r}^{(x)})$. Argumentando como na demonstração do lema 1.7 e lembrando que $|f'| > \eta > \sqrt{2}$ obtemos

$$\frac{1}{m^3} \geq |f^s(J_{i,r}^{(k)})| \geq \frac{\eta^s}{2^{m_k}(m_k + 1)} \geq \frac{2^{s/2-m_k}}{(m_k + 1)}.$$

Isso implica que $s/2 < 2m_k$. se $|f^{s+1}(J_{i,r}^{(k)})| > \frac{1}{3m^3}$ e concluímos a prova. Se $|f^{s+1}(J_{i,r}^{(k)})| \leq \frac{1}{3m^3} < \frac{1}{m^3}$, raciocinando da mesma maneira que antes, obtemos que $0 \notin f^{s+1}(J_{i,r}^{(x)})$ e pelo lema 1.7 temos que $|f^{s+1}(J_{i,r}^{(k)})| > \eta|f^s(J_{i,r}^{(k)})|$. De novo se $|f^{s+2}(J_{i,r}^{(k)})| > \frac{1}{3m^3}$ terminamos. Caso contrário, argumentando da mesma maneira obtemos que $0 \notin f^{s+2}(J_{i,r}^{(x)})$ e logo

$$|f^{s+2}(J_{i,r}^{(k)})| > \eta|f^{s+1}(J_{i,r}^{(k)})| > \eta^2|f^s(J_{i,r}^{(k)})|.$$

Indutivamente se $|f^{s+2m_k-1}(J_{i,r}^{(k)})| \leq \frac{1}{3m_k^3} < \frac{1}{m_k^3}$ então $0 \notin f^{s+2m_k-1}(J_{i,r}^{(x)})$ e

$$|f^{s+2m_k}(J_{i,r}^{(k)})| > \eta|f^{s+2m_k-1}(J_{i,r}^{(k)})| > \dots > \eta^{2m_k}|f^s(J_{i,r}^{(k)})| > 2^{m_k}|J_{i,r}^{(k)}|.$$

A equação 3.2 implica que

$$|f^{s+2m_k}(J_{i,r}^{(k)})| > \frac{2^{m_k}}{2^{m_k}c(m_k + 1)} > \frac{1}{3m_k^3}$$

dado que estamos supondo que $\frac{8c(m_k+1)}{m_k^2} \leq \frac{1}{2}$. Assim, isto termina a prova da Afirmação 2. $\square$

Lembrando que $L_1^a = [f(1-a), 0)$ e que $|f^{j(i,r)}(J_{i,r}^{(k)})| > \frac{1}{3m_k^3}$, o lema 1.7 e o corolário 1.8 da seção 1.2 implicam a seguinte afirmação.

Afirmação 3. Para todo $r \in \mathcal{R}_i$, existe um intervalo $\bar{I}_{i,r}^{(k)} \subset f^{j(i,r)}(J_{i,r}^{(k)})$ e um número $m_{i,r}^{(k)}$ tais que $f^{m_{i,r}^{(k)}}: \bar{I}_{i,r}^{(k)} \rightarrow L_1^a$ é um difeomorfismo, $0 \notin f^s(\bar{I}_{i,r}^{(k)})$ para $s = 0, 1, \dots, m_{i,r}^{(k)} - 1$, $m_{i,r}^{(k)} \leq D \log m_k$ e $\sup_{x \in f^s(\bar{I}_{i,r}^{(k)})} |f'(x)| \leq E \cdot m_k^\xi$, onde D, E, ξ são as constantes dadas pelo Corolário 1.8.

Afirmação 4. Seja $\tilde{I}_{i,r}^{(k)} \subset J_{i,r}^{(k)}$ tal que $f^{j(i,r)}(\tilde{I}_{i,r}^{(k)}) = \bar{I}_{i,r}^{(k)}$ onde $\bar{I}_{i,r}^{(k)}$ é dado pela afirmação 3. Então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|\tilde{I}_{i,r}^{(k)}| \geq K|\bar{I}_{i,r}||J_{i,r}^{(k)}|. \quad (3.9)$$

Demonstração. Temos pelo teorema do valor médio que $|\bar{I}_{i,r}^{(k)}| = |(f^{j(i,r)})'(x)||\tilde{I}_{i,r}^{(k)}|$ para algum $x \in \tilde{I}_{i,r}^{(k)}$ e $|f^{j(i,r)}(J_{i,r}^{(k)})| = |(f^{j(i,r)})'(y)||J_{i,r}^k|$ para algum $y \in J_{i,r}^k$ e portanto

$$\frac{|\tilde{I}_{i,r}^{(k)}|}{|J_{i,r}^k|} = \frac{|(f^{j(i,r)})'(y)|}{|(f^{j(i,r)})'(x)|} \cdot \frac{|\bar{I}_{i,r}^{(k)}|}{|f^{j(i,r)}(J_{i,r}^{(k)})|}. \quad (3.10)$$

Notemos que basta limitar $\frac{|(f^{j(i,r)})'(y)|}{|(f^{j(i,r)})'(x)|}$ para todo $x, y \in J_{i,r}^k$ dado que $\frac{1}{|f^{j(i,r)}(J_{i,r}^{(k)})|} \geq 1$.

Pela afirmação 1, para todo $J_{i,r}^{(k)}$ existe $x_0 \in J_{i,r}^{(k)}$ tal que $|x_0| \geq \frac{1}{m_k^3}$ e $|J_{i,r}^{(k)}| \leq \frac{M_1}{m_k^3}$ com $0 < M_1 <$

$1/3$, o que implica que $d(\{0\}, J_{i,r}^{(k)}) \geq \frac{1-M_1}{m_k^3}$ (onde d é a função distancia), isto é $|x| \geq \frac{1-M_1}{m_k^3}$ para todo $x \in J_{i,r}^{(k)}$.

Pelo teorema do valor médio para algum $z_0 \in J_{i,r}^{(k)}$,

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{f'(y)}{f'(x)} \right| &= \left| \log f'(x) - \log f'(y) \right| \\ &\leq \left| \log \frac{f'(z_0)}{f''(z_0)} \right| \cdot |J_{i,r}^{(k)}| \leq \frac{C \cdot C_1}{|z_0|} |J_{i,r}^{(k)}| \leq C \cdot C_1 \cdot \frac{M_1}{m_k^3} \cdot \left(\frac{1-M_1}{m_k^3} \right)^{-1} = \frac{C \cdot C_1 \cdot M_1}{1-M_1}. \end{aligned}$$

dado que a equação 1.7 implica que $\frac{f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{CC_1}{|z|}$ com C, C_1 dependendo somente de f . Segue que para algum $\tilde{K} > 0$

$$\tilde{K}^{-1} \leq \frac{f'(y)}{f'(x)} \leq \tilde{K}. \quad (3.11)$$

Pelo anterior fica demonstrado a afirmação 4 para $j(i, r) = 1$. Agora suponhamos que $j(i, r) > 1$. Temos que

$$\frac{|(f^{j(i,r)})'(y)|}{|(f^{j(i,r)})'(x)|} = \prod_{s=0}^{s=j(i,r)-1} \frac{|f'(f^s(y))|}{|f'(f^s(x))|}. \quad (3.12)$$

De novo por 3.11 basta limitar o produtório a partir de $s = 1$. Dado que $j(i, r)$ é minimal satisfazendo 3.8 temos que

$$|f^s(J_{i,r}^{(k)})| < \frac{1}{3m_k^3} \quad \text{para } s = 1, \dots, j(i, r) - 1. \quad (3.13)$$

Raciocinando como na demonstração da afirmação 2 obtemos que $0 \notin f^s(J_{i,r}^{(k)})$ para $s = 1, \dots, j(i, r) - 1$ e portanto $f^s|_{J_{i,r}^{(k)}}$ é um difeomorfismo para $s = 1, \dots, j(i, r) - 1$. Pela afirmação 1 para todo $s \in \{1, \dots, j(i, r) - 1\}$ existe um $x_s \in J_{i,r}^{(k)}$ tal que $f^s(x_s) \notin (-\frac{1}{m_k^3}, \frac{1}{m_k^3})$, logo pela equação 3.13

$$d(f^s(J_{i,r}^{(k)}), \{0\}) > \frac{1}{2m_k^3}. \quad (3.14)$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\left| \log \prod_{s=1}^{j(i,r)-1} \frac{|f'(f^s(y))|}{|f'(f^s(x))|} \right| &= \left| \sum_{s=1}^{j(i,r)-1} \log(f'(f^s(y))) - \log(f'(f^s(x))) \right| \\
&\leq \sum_{s=1}^{j(i,r)-1} |\log(f'(f^s(y))) - \log(f'(f^s(x)))| \\
&\leq_{TVM} \sum_{s=1}^{j(i,r)-1} \frac{|f''(f^s(z_s))|}{|f'(f^s(z_s))|} |f^s(y) - f^s(x)| \\
&\leq_{(1.7)} \sum_{s=1}^{j(i,r)-1} C \cdot C_1 \cdot \frac{1}{|f^s(z_s)|} |f^s(J_{i,r}^{(k)})| \\
&\leq_{(3.13)} \sum_{s=1}^{j(i,r)-1} C \cdot C_1 \cdot (2m_k^3) \cdot |f^s(J_{i,r}^{(k)})|.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Onde $z_s \in J_{i,r}^{(k)}$ para $s = 1 \dots j(i, r) - 1$.

Usamos que $|\frac{f''(z)}{f'(z)}| \leq \frac{C \cdot C_1}{|z|}$ onde as constantes só dependem de f . Agora dado que $|f(I)| > \sqrt{2} \cdot |I|$, $f^s|_{J_{i,r}^{(k)}}$ é um difeomorfismo para $s = 1, \dots, j(i, r) - 1$ e $f^{j(i,r)-1} < \frac{1}{3m_k^3}$, então $f^s(J_{i,r}^{(k)}) < \frac{1}{3m_k^3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{j(i,r)-1-s}$ para $s = 1, \dots, j(i, r) - 1$ obtemos que

$$\left| \log \prod_{s=1}^{j(i,r)-1} \frac{|f'(f^s(y))|}{|f'(f^s(x))|} \right| \leq C \cdot C_1 \sum_{s=1}^{j(i,r)-1} 2m_k^3 \cdot \frac{1}{3m_k^3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{j(i,r)-1-s} \leq M < \infty.$$

Portanto existe $\bar{K} > 0$ tal que

$$\bar{K}^{-1} \leq \frac{|(f^{j(i,r)})'(y)|}{|(f^{j(i,r)})'(x)|} \leq \bar{K} \tag{3.16}$$

e assim concluímos a demonstração da afirmação 4. □

O próximo passo é construir os conjuntos de Cantor com dimensão de Hausdorff perto de um. Para isso consideremos a coleção de aplicações sobrejetivas

$$\{g_{i,r} = f^{m_{i,r}^{(k)}} \circ f^{j(i,r)} : \tilde{I}_{i,r}^{(k)} \rightarrow L_1^a; r \in \mathcal{R}_i\}.$$

Seja $g_{k,i} : L_k^i = \bigcup_{r \in \mathcal{R}_i} \tilde{I}_{i,r}^{(k)} \rightarrow L_1^a$ definida por $g_{i,r}|_{\tilde{I}_{i,r}^{(k)}}$ e C_k^i os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos pelos intervalos $\tilde{I}_{i,r}^{(k)}$ e $g_{k,i}$, isto é:

$$C_k^i = \bigcap_{n \geq 1} g_{k,i}^{-n}(L_k^i).$$

O passo final é mostrar que $HD(C_k^i) \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Seja α_1 como na demonstração do teorema 2.15, isto é, $\alpha_1 \leq HD(C_k^i) < 1$ e definindo $\Lambda_{1, \tilde{I}_{i,r}^{(k)}} = \sup_{x \in \tilde{I}_{i,r}^{(k)}} |g'_{i,r}(x)|$ temos que

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_i} (\Lambda_{1, \tilde{I}_{i,r}^{(k)}})^{-\alpha_1} = C. \quad (3.17)$$

Dado que as $g_{i,r}$ são sobrejetivas temos que $C = 1$ (ver a demonstração do teorema 2.15). Como $HD(C_k^i) \geq \alpha_1$, basta provar que $\alpha_1 \geq 1 - o(1)$ (pois a proposição 2.21 implica que $HD(C_k^i) < 1$). Sejam $h_1 = f^{m_{i,r}^{(k)}}$ and $h_2 = f^{j(i,r)}$. Dado que $g_{i,r} = f^{m_{i,r}^{(k)}} \circ f^{j(i,r)}$ tem-se que $g_{i,r} = h_1 \circ h_2$ e

$$\Lambda_{1, \tilde{I}_{i,r}^{(k)}} \leq \sup_{x \in I_{i,r}^{(k)}} |h'_1(x)| \cdot \sup_{x \in \tilde{I}_{i,r}^{(k)}} |h'_2(x)|.$$

O corolário 1.8 implica que $\sup_{I_{i,r}^{(k)}} |h'_1| \leq (E \cdot m_k^\xi)^{D \log m_k} = E^{D \cdot \log m_k} \cdot m_k^{D \cdot \xi \cdot \log m_k}$. Agora para estimar $\sup |h'_2|$ notemos que a demonstração da afirmação 3 implica que a função $h_2|_{\tilde{I}_{i,r}^{(k)}}$ tem variação limitada, e portanto

$$\sup_{\tilde{I}_{i,r}^{(k)}} |h'_2| \leq \bar{K}^{-1} \inf_{\tilde{I}_{i,r}^{(k)}} |h'_2|,$$

Onde $\bar{K}$ é dado pela equação 3.16. Dado que $h_2(\tilde{I}_{i,r}^{(k)}) = \tilde{I}_{i,r}^{(k)}$. O teorema do valor médio implica

$$\inf_{\tilde{I}_{i,r}^{(k)}} |h'_2| \leq \frac{|\tilde{I}_{i,r}^{(k)}|}{|\tilde{I}_{i,r}^{(k)}|} \stackrel{\text{por (3.9)}}{\leq} \frac{\bar{K}^{-1}}{|J_{i,r}^{(k)}|} \stackrel{\text{por (3.3)}}{\leq} \bar{K}^{-1} 2^{m_k(1+o(1))}.$$

As duas anteriores equações implicam que

$$2^{m_k-1} \cdot \left(\frac{1}{2^{(1+o(1))m_k}} \right)^{\alpha_1} \leq 1 = \sum_{r \in \mathcal{R}_i} (\Lambda_{1, \tilde{I}_{i,r}^{(k)}})^{-\alpha_1}. \quad (3.18)$$

Dado que $\#\mathcal{R}_i = 2^{m_k-1}$.

As desigualdades 3.17 e 3.18 implicam

$$\Lambda_{1, \tilde{I}_{i,r}^{(k)}} \leq \bar{K}^{-2} \cdot E^{D \cdot \log m_k} \cdot m_k^{D \cdot \xi \cdot \log m_k} \cdot 2^{m_k(1+o(1))} = 2^{m_k(1+o(1))}. \quad (3.19)$$

Portanto

$$\begin{aligned} (m_k - 1) \log 2 &\leq (1 + o(1)) \cdot m_k \cdot \alpha_1 \cdot \log 2 \implies \\ 1 - o(1) &= \frac{m_k - 1}{m_k} \leq (1 + o(1)) \cdot \alpha_1 \implies \\ 1 - o(1) &\leq (1 + o(1)) \cdot \alpha_1. \end{aligned}$$

obtemos que $1 - o(1) \leq \alpha_1 \leq 1$, assim concluímos a demonstração do Teorema 0.1.

Corolário 3.1. *A dimensão de Hausdorff de Λ_P (Veja 1.3 para a definição dele) é estritamente maior do que 1.*

Seja $\Gamma = \{(x, y, 1) : x = 0\}$ e

$$\Lambda_P = \overline{\bigcap_{i \geq 1} P^i(S \setminus \Gamma)} \text{ como na equação 1.3.}$$

Para cada $k > 0$ sejam C_k o conjunto de Cantor regular dado pelo teorema A e

$$\Lambda_P^k = \{(x, y) : x \in C_k\}. \quad (3.20)$$

Dado que cada C_k é um conjunto de Cantor regular para todo k então, Λ_P^k é um conjunto hiperbólico para P. Além disso, $\Lambda_P^k \subset \Lambda_P^{k+1}$ e

$$HD(\Lambda_P^k) = HD({}_u K_P^k) + HD({}_s K_P^k) = HD(C_k) + HD({}_s K_P^k),$$

Onde ${}_s K_P^k$ e ${}_u K_P^k$ são os estável e instável conjuntos de Cantor associados ao conjunto hiperbólico transitivo Λ_P^k (Vide [8].) Dado que ${}_s K_P^k$ é um conjunto de Cantor regular, existe $\xi > 0$ tal que $HD({}_s K_P^1) > \xi$. Portanto

$$HD(\Lambda_P^k) = HD(C_k) + HD({}_s K_P^k) \geq HD(C_k) + HD({}_s K_P^1) > HD(C_k) + \xi.$$

O teorema 0.1 implica que para k grande $HD(\Lambda_P^k) > 1$. Dado que $\Lambda_P^k \subset \Lambda_P$, fica demonstrado o corolário 3.1. Agora vejamos a prova do teorema principal deste texto.

Demonstração do Teorema A.

Notemos que o atrator geométrico de Lorenz Λ satisfaz

$$\Lambda = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X^t(\Lambda_P) \right) \cup O, \text{ Onde } O \text{ é a singularidade.}$$

Logo $HD(\Lambda) \geq 1 + HD(\Lambda_P) > 2$.

Assim termina a demonstração do Teorema A.

Capítulo 4

O espectro de Lagrange

O objetivo deste capítulo é a indicar a demonstração do teorema B, que é uma aplicação importante de que a dimensão de Hausdorff de o Atrator geométrico de Lorenz é maior que dois.

O enunciado preciso do teorema B é o seguinte:

Teorema 4.1. *Seja Λ o atrator geométrico de Lorenz associado ao fluxo X^t e U um conjunto aberto onde X^t esteja definido. Então arbitrariamente perto de X^t existe um fluxo X_0^t e uma vizinhança $\mathcal{W}$ de X_0^t tal que se Λ_Y denota o atrator de Lorenz associado a algum $Y \in \mathcal{W}$, então existe um subconjunto aberto $\mathcal{H}_Y \subset C^1(U, \mathbb{R})$ tal que para qualquer $f \in \mathcal{H}_Y$ temos que*

$$\text{int } \mathcal{L}(f, \Lambda_Y) \neq \emptyset \text{ e } \text{int } \mathcal{M}(f, \Lambda_Y) \neq \emptyset$$

onde $\text{int } A$ denota o interior de A .

A prova deste teorema precisa de alguns resultados que podem encontrar-se em [3] e que anunciamos aqui "por completos" e porque são muito importantes.

Seja k fixo tal que $HD(\Lambda_P^k) > 1$, $\Gamma = \{(x, y, 1) \mid x = 0\}$ e a aplicação de Poincaré dada em 1.2, pela construção do atrator geométrico de Lorenz, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(\Lambda_P^k, \Gamma) > 2\epsilon$, onde $d(A, B)$ representa a distância de A a B . Seja $\mathcal{U}_P$ uma vizinhança C^2 de P tal que se $\tilde{P} \in \mathcal{U}_P$ e $\Lambda_{\tilde{P}^k}$ é a continuação hiperbólica de Λ_P^k então $d(\Lambda_{\tilde{P}^k}, \Gamma) > \epsilon$. O lema a seguir nos dá uma interessante propriedade local.

Lema 4.2. *Dado $\tilde{P} \in \mathcal{U}_P$ existe um fluxo geométrico de Lorenz $\tilde{X}^t$, C^2 -próximo a X^t , tal que a restrição a $\Lambda_{\tilde{P}^k}$ da aplicação de Poincaré associada a $\tilde{X}^t$ coincide com a restrição de $\tilde{P}$ a $\Lambda_{\tilde{P}^k}$.*

Seja U um conjunto aberto onde o fluxo atua, e $\Lambda \subset U$, Onde Λ é o atrator de Lorenz inicial. Dado $F \in C^0(U, \mathbb{R})$, definamos a função $\max F_X : S^* \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\max F_X(x) := \max_{t_-(x) \leq t \leq t_+(x)} F(X^t(x))$$

onde $t_-(x), t_+(x)$ são tais que $P^{-1}(x) = X^{t_-(x)}(x)$ e $P(x) = X^{t_+(x)}(x)$.

Notemos que esta função é contínua e claramente depende do fluxo X^t .

Lema 4.3. *Seja Λ_P^k como na equação 3.20. Então existe um conjunto C^2 -aberto e denso $\mathcal{B}_X \subset C^\infty(U, \mathbb{R})$ tal que dado $\beta > 0$, para qualquer $F \in \mathcal{B}_X$ existem umas sub-ferraduras¹ ${}_k\Lambda_F^{s,u} \subset \Lambda_P^k$ com $HD({}_kK_F^s) \geq HD(K_k^s) - \beta$, $HD({}_kK_F^u) \geq HD(K_k^u) - \beta$ e uma partição de Markov ${}_k\mathcal{R}_F^{s,u}$ de ${}_k\Lambda_F^{s,u}$, tal que a aplicação $\max F_X|_{S \cap {}_k\mathcal{R}_F^{s,u}} \in C^1(S^* \cap {}_k\mathcal{R}_F^{s,u}, \mathbb{R})$, onde ${}_kK_F^s$ e ${}_kK_F^u$ são os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos que descrevem a transversal geométrica das folhas estável/instável de $W^{u,s}({}_k\Lambda_F^{s,u})$ e $W^{u,s}(\Lambda_P^k)$ respectivamente.*

A prova do lema anterior encontra-se em [20, Lemma 18, pág 35-37].

Observação 1. Seja $x \in \text{int}(S^*)$ tal que $P(x) = X^{t_+(x)}(x) \in \text{int}(S^*)$. O teorema do fluxo tubular implica que existem uma vizinhança $U_x \subset S^*$ de x e um difeomorfismo $\psi : U_x \times (-\epsilon, t_+(x) + \epsilon) \rightarrow \psi(U_x \times (-\epsilon, t_+(x) + \epsilon)) \subset U$ tal que $D\psi_{(z,t)}(0, 0, 1) = X(\psi(z, t))$ para todo $(z, t) \in U_x \times (-\epsilon, t_+(x) + \epsilon)$. Além disso, os elementos da partição de Markov são disjuntos, têm diâmetro pequeno e Λ_P^k é compacto. Sem perda de generalidade podemos supor que existe uma coleção finita de subconjuntos abertos U_{x_i} tais que $U_{x_i} \cap U_{x_j} = \emptyset$ e $\Lambda_P^k \subset \bigcup U_{x_i}$ para alguns $x_i \in \Lambda_P^k$. Denotemos por $\psi_i : U_{x_i} \times (-\epsilon, t_+(x_i) + \epsilon) \rightarrow \psi_i(U_{x_i} \times (-\epsilon, t_+(x_i) + \epsilon)) \subset U$ tal que $(D\psi_i)_{(z,t)}(0, 0, 1) = X(\psi_i(z, t))$.

Também temos o seguinte corolário relativo ao lema anterior.

Corolário 4.4. *A propriedade de existência de B_X no lema 4.3 é robusta no sentido que se Y é um campo vetorial C^1 -próximo de X então $B_X = B_Y$ e para todo $F \in B_Y$, tem-se que $\max F_Y \in C^1(S^* \cap {}_k\mathcal{R}_F^{s,u}, \mathbb{R})$.*

Demonstração do teorema 4.1. Seja k o suficientemente grande para que a dimensão da ferradura transitiva Λ_P^k (Dada no corolário 3.1) seja maior que 1. Sejam $F \in B_X$, ${}_k\Lambda_F^{s,u}$ e ${}_kK_F^s$ como no lema 4.3 com

$$HD({}_k\Lambda_F^{s,u}) \geq HD(K_k^{s,u}) - \beta$$

onde podemos supor que β é suficientemente pequeno para que $HD({}_k\Lambda_F^s \cup {}_k\Lambda_F^u) > 1$. Tomemos a sub-ferradura $\Lambda_F := {}_k\Lambda_F^s \cup {}_k\Lambda_F^u$ de Λ_P^k e seja $\mathcal{R}_F := {}_k\mathcal{R}_F^s \cup {}_k\mathcal{R}_F^u$. Consideremos o par (P, Λ_F) , temos que $HD(\Lambda_F) > 1$ então por [19, Main Theorem] existe $\tilde{P} \in \mathcal{U}_P$, onde $\mathcal{U}_P$ é como no lema 4.2, tal que se $\tilde{\Lambda}_F$ é a continuação hiperbólica de Λ_F , então o par $(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_P)$ satisfaz as conclusões do teorema [19, Main Theorem], isto é, se

$$M_f(\tilde{\Lambda}_F) = \{x \in \tilde{\Lambda}_F : f(x) \geq f(y) \text{ para todo } y \in \Lambda_F^w\}$$

¹Aqui uma ferradura é um conjunto compacto, localmente maximal, transitivo hiperbólico de tipo sela.

é o conjunto de pontos máximos de f em $\tilde{\Lambda}_P$ e $e^{s,u}$ são os vetores unitários da fibra estável e instável respetivamente, então o conjunto

$$\mathcal{H}_1(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_F) := \{f \in C^1(S^* \cap \mathcal{R}_F, \mathbb{R}) \mid \#M_f(\tilde{\Lambda}_F) = 1 \text{ para } z \in M_f(\tilde{\Lambda}_F), \ (Df)_z(e_z^{s,u}) \neq 0\}$$

é aberto e denso.

Notemos que $\mathcal{H}_1(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_F)$ é o conjunto de funções f tais que se $z \in M_f(\tilde{\Lambda}_F)$, então o gradiente $\nabla(f(z))$ não é colinear à direção estável nem à direção instável de z . Portanto, por [19, Main Theorem], para cada $f \in \mathcal{H}_1(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_F)$ o espectro dinâmico de Markov tem interior não vazio, isto é,

$$\text{int}(\mathcal{M}(f, \tilde{\Lambda}_F)) \neq \emptyset \text{ e } \text{int}(\mathcal{L}(f, \tilde{\Lambda}_F)) \neq \emptyset. \quad (4.1)$$

Agora vamos usar as aplicações dadas pelo corolário 4.4 para recuperar a mesma propriedade para o espectro de alguma perturbação de F , e dessa maneira também recuperar a mesma propriedade para as perturbações do fluxo. Lembremos a definição de F dada acima. Para isso procedemos assim:

Pelo corolário 4.4, a função $\max F_{\tilde{X}}(x)|_{S^* \cap \mathcal{R}_F}$ é C^1 , onde $\tilde{X}$ é dado pelo lema 4.2, e dado que $\mathcal{H}_1(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_F)$ é aberto e denso. Usando coordenadas locais como na observação do 1 com respeito ao fluxo $\tilde{X}$, podemos encontrar uma função $g \in C^2(S^*, \mathbb{R})$ tal que

$$\max F_{\tilde{X}}(x)|_{S^* \cap \mathcal{R}_F}(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_1(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_F). \quad (4.2)$$

Agora pelo lema 4.2 a aplicação associada a $\tilde{X}^t$ restrita a $\tilde{\Lambda}_F$ é igual a $\tilde{P}$ restrita a $\tilde{\Lambda}_F$. Seja $H(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2)$. Como o g não depende da coordenada x_3 , temos que $\max H_{\tilde{X}}(x)|_{S^* \cap \mathcal{R}_F} = \max F_{\tilde{X}}(x)|_{S^* \cap \mathcal{R}_F} + g$. Portanto, o 4.2 implica que $\max H_{\tilde{X}}(x)|_{S^* \cap \mathcal{R}_F} \in \mathcal{H}_1(\tilde{P}, \tilde{\Lambda}_F)$.

Portanto, dado que $\mathcal{M}(\max H_{\tilde{X}}, \tilde{\Lambda}_F) = \left\{ \sup_{n \in \mathbb{R}} \max H_{\tilde{X}}(\tilde{P}^n(x)) : x \in \tilde{\Lambda}_F \right\} \subset \mathcal{M}(H, \tilde{X})$, 4.1 implica que

$$\text{int } \mathcal{M}(H, \tilde{X}) \neq \emptyset.$$

Da mesma maneira obtém-se que $\mathcal{L}(\max H_{\tilde{X}}, \tilde{\Lambda}_F) \subset \mathcal{L}(H, \tilde{X})$. A prova do teorema 4.1 está terminada. $\square$

Referências

- [1] Afraimovich, Valentin S.; Bykov, V.V; Shilnikov, Leonid P, Stochastic dynamics of deterministic systems, Akademiia Nauk SSSR Doklady, volume 234, paginas 336-339, 1977.
- [2] Araújo, Vítor; Pacifico, Maria José; Three-dimensional flows, volume 53, 2010, editora Springer Science & Business Media.
- [3] C. G. MOREIRA, M. J. PACIFICO AND S. ROMANA, *Hausdorff Dimension, Lagrange and Markov Dynamical Spectra for Geometric Lorenz Attractors*. Submetido nov 2016, arXiv:1611.01174 [math.DS].
- [4] Lorenz, Edward N.; Deterministic nonperiodic flow Journal of the atmospheric sciences, volume 20, página 130-141, 1963.
- [5] S. Galatolo and I. Nisoli. Rigorous computation of invariant measures and fractal dimension for maps with contracting fibers: 2D Lorenz-like maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36(6):1865–1891, set 2016.
- [6] Guckenheimer, John; Williams, Robert F.; Structural stability of Lorenz attractors, Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques, volume 50, páginas 59-72, 1979.
- [7] L. Mora and C. Lizana. Lower Bounds for the Hausdorff dimension of the Geometric Lorenz attractor the homoclinic case. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(3):699–709, November 2008.
- [8] J. PALIS AND F. TAKENS, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge studies in advance mathematics, 35, 1993.
- [9] T. Steingenberg. Hausdorff Dimension of Attractor for Two Dimensional Lorenz Transformations. *Israel Journal of Mathematics*, 116:253–269, 2000
- [10] M. VIANA, *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*. 21 colóquio brasileiro de Matemática. IMPA edition, 1997.

- [11] D. Viswanath. The fractal property of the Lorenz attractor. *El Sivier- Physica*, 190:115–128, 2004.
- [12] FOLLAND, G. B.. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Wiley-Interscience, 1999.
- [13] J. C. ROBINSON. *Dimensions, Embeddings, and Attractors*, Cambridge University Press. New York, 2011.
- [14] K. FALCONER. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Second Edition*. Jhon Wiley & Sons Lta., 2003.
- [15] K.J. FALCONER. *The geometry of fractal sets* Cambridge University Press ,1995 .
- [16] T. W. Cusick and M. E. Flahive. *The Markoff and Lagrange Spectra*. Math surveys and Monographs. No 30, A.M.S., providence, RI, 1989.
- [17] C. G. Moreira and C. Matheus $HD(M \setminus L) < 0.986927$. *arXiv:1708.06258*.
- [18] C. G. Moreira and C. Matheus Markov spectrum near Freiman’s isolated points in $M \setminus L$. *arXiv:1802.02454* .
- [19] S. Romaña and C. G. Moreira. On the Lagrange and Markov Dynamical Spectra. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 37, 1570–1591, 2016 pages 1–22, 2015.
- [20] S. Romaña and C. G. Moreira. On the Lagrange and Markov Dynamical Spectra for Geodesic Flows in Surfaces with Negative Curvature. <http://arxiv.org/pdf/1505.05178v1.pdf>, 2015.
- [21] F. Willians. The structure of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math*, 50:73–99, 1979.