

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA



UFRJ

Charles Edgar López Vereau

O Truque de Moser em Geometria Simplética

Rio de Janeiro

Junho de 2018

O Truque de Moser em Geometria Simplética

Charles Edgar López Vereau



UFRJ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Umberto Leone Hryniewicz

Rio de Janeiro

Junho de 2018

O Truque de Moser em Geometria Simplética

Charles Edgar López Vereau

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários á obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz - IM/UFRJ, (Presidente)

Prof. Dr. Alejandro Cabrera - IM/UFRJ

Prof. Dr. Thiago Linhares Drummond - IM/UFRJ

Prof. Dr. Matias Luis del Hoyo - UFF

Rio de Janeiro

29 de Junho de 2018

Dedico este trabalho aos meus
pais Nora Vereau e Edgar López

Agradecimentos

Com a conclusão deste trabalho, deixo meus agradecimentos:

A minha família, especialmente à minha mãe, Profesora Nora Judith Vereau Churi, à meu pai, Dr. Edgar López Salvatierra e à minha irmã, Patricia Evelyn López Vereau.

Ao Dr. Umberto Leone Hryniewicz por me orientar e me mostrar esta área da matemática. À banca examinadora, Dr. Alejandro Cabrera, Dr. Thiago L. Drummond e Dr. Matias L. del Hoyo, por aceitarem o convite para avaliar este trabalho.

Ao Dr. Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão os autores do livro Introdução à Geometria Finsler o qual foi o maior livro de referência deste trabalho.

Aos meus professores de graduação da Universidade Nacional Mayor de San Marcos, especialmente aos professores Dra. Yolanda Santiago Ayala, Mg. José Pérez Arteaga e Mg. Victor Tarazona Miranda, que me incentivaram a seguir os estudos de Pós-graduação.

Aos meus amigos e companheiros de graduação e pós-graduação, especialmente a Mariana Neumann de Souza e Ricardo Jesus Ramos Castilla.

À CAPES pelo apoio financeiro em todo o processo de mestrado.

E à todos que contribuíram direta ou indiretamente de alguma forma na conclusão deste trabalho.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos o papel do Truque de Moser em Geometria Simplética. Concentraremos nosso estudo em três Teoremas de Formas Normais, que são o Teorema de Darboux para Formas Simpléticas, o Teorema de Darboux para Formas de Contato, e o Teorema da Vizinhança Lagrangiana.

Palavras-chaves: Geometria Simplética, Geometria de Contato, Teorema de Darboux, Teorema da Vizinhança Lagrangiana, Truque de Moser.

Abstract

In this work we will study the role of Moser Trick in Symplectic Geometry. We will focus our study on three Normal Form Theorems, which are the Darboux Theorem for Symplectic Forms, the Darboux Theorem for Forms of Contact, and the Lagrangian Neighborhood Theorem.

Keywords: Symplectic Geometry, Contact Geometry, Darboux's Theorem, Lagrangian Neighborhood Theorem, Moser Trick.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	2
1.1 Álgebra linear	2
1.2 A álgebra exterior de multivetores	3
1.3 Variedades Diferenciáveis	4
1.4 Formas diferenciáveis	8
1.5 A derivada de Lie e multiplicação interior	10
1.6 Integração em variedades	13
1.7 Geometria Riemanniana	13
2 Geometria Simplética e de Contato	16
2.1 Espaço Simplético	16
2.2 Variedades Simpléticas	37
2.3 Geometria de Contato	40
3 O Truque de Moser e Teoremas de Formas Normais	45
3.1 O Truque de Moser	45
3.2 O Teorema de Darboux - Formas Simpléticas	47
3.3 O Teorema de Darboux - Formas de contato	50
3.4 O Teorema da Vizinhança Lagrangiana	55
Bibliografia	61

Introdução

Estudaremos o Truque de Moser em Teoremas de Formas Normais, concentraremos o estudo no Teorema de Darboux para Formas Simpléticas, no Teorema de Darboux para Formas de Contato, e no Teorema da Vizinhança Lagrangiana.

Capítulo 1

Preliminares

Para entendermos melhor o Capítulo 2: Geometria Simplética e de Contato, faremos uma breve revisão, sem demonstração, de alguns fatos básicos de álgebra linear, álgebra exterior de multivetores, variedades diferenciáveis, formas diferenciáveis, derivada de Lie e multiplicação interior, integração em variedades e Geometria Riemanniana.

1.1 Álgebra linear

Proposição 1.1 *Sobre o corpo dos complexos toda matriz é conjugada a uma matriz triangular superior.*

Definição 1.2 *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear em um espaço vetorial V , de dimensão finita. O polinômio $p(x) = \det(T - xI)$ é chamado o polinômio característico de T .*

Teorema 1.3 *Matrizes conjugadas possuem o mesmo polinômio característico.*

Proposição 1.4 *Seja A uma matriz quadrada e simétrica. Então A é positiva definida se, e somente se, todos os seus autovalores são positivos.*

Proposição 1.5 *Se a matriz A tem inversa e seus autovalores são $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, então A^{-1} tem autovalores $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.*

Teorema 1.6 *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um espaço de dimensão finita V sobre o corpo $\mathbb{R}$, tal que o polinômio mínimo de T é um produto de fatores lineares*

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{r_k},$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ distintos. Sejam $W_i = \ker(T - \lambda_i I)^{r_i}$ os autoespaços generalizados. Então

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

(ii) Cada W_i é invariante sob T .

(iii) Se $T_i = T|_{W_i}$, então o polinômio mínimo de T_i é $(x - \lambda_i)^{r_i}$.

Além disso, se

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{d_k}$$

é o polinômio característico de T , então $\dim W_i = d_i$.

Definição 1.7 O grupo linear geral, é definido como

$$GL(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid A \text{ é invertível}\},$$

com a operação de grupo dada pela multiplicação de matrizes, onde $\mathbb{F}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.8 O grupo unitário, é definido como

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A^t}\}.$$

Definição 1.9 O grupo ortogonal complexo, é definido como

$$\begin{aligned} O(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^t\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid I = A^t A\}. \end{aligned}$$

1.2 A álgebra exterior de multivetores

Definição 1.10 Seja V um espaço vetorial, definimos o espaço dual V^* de V como:

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é aplicação linear}\}.$$

Os elementos de V^* são chamados covetores ou 1-covetor em V .

Proposição 1.11 Sejam V um espaço vetorial de dimensão n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para V e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ covetores $\alpha_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$. Então $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ forma uma base para V^* , esta base é dita ser dual à base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V , notamos também que $\dim V = \dim V^*$.

Definição 1.12 Seja k um inteiro positivo. Uma permutação do conjunto $A = \{1, \dots, k\}$ é uma bijeção $\sigma : A \rightarrow A$. A permutação cíclica $(a_1 a_2 \dots a_r)$, onde os a_i são distintos e $r \leq n$, é a permutação σ tal que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, $\dots$, $\sigma(a_{r-1}) = a_r$, $\sigma(a_r) = a_1$, e σ fixa todos os outros elementos de A . Uma transposição é um 2-ciclo, ou seja, um ciclo da forma $(a b)$ que aplica a em b e b em a , e fixa todos os outros elementos de A .

Teorema 1.13 Toda permutação se escreve como um produto de transposições. A paridade do número de transposições depende somente da permutação.

Definição 1.14 Denotamos por S_k o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, \dots, k\}$. Uma permutação é par ou ímpar, dependendo se é o produto de um número par ou ímpar de transposições.

Definição 1.15 O sinal de uma permutação σ , denotado por $\text{sgn}(\sigma)$ ou $\text{sgn}\sigma$, é definido como

$$\text{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & , \quad \sigma \text{ é par} \\ -1 & , \quad \sigma \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Definição 1.16 Um k -tensor em um espaço vetorial V é uma função k -linear

$$f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 1.17 Um k -tensor é um k -tensor alternado se

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn}\sigma) f(v_1, \dots, v_k), \quad \forall \sigma \in S_k.$$

Um k -tensor alternado em V é também chamado k -covetor em V . Denotaremos por $A_k(V)$ o conjunto de todas as funções k -lineares alternadas no espaço vetorial V para k inteiro positivo.

Definição 1.18 Seja $f \in A_k(V)$ e $g \in A_l(V)$. Definimos o produto exterior de f com g como:

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn}\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Proposição 1.19 Sejam $f \in A_k(V)$ e $g \in A_l(V)$, então $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$.

Proposição 1.20 Seja V um espaço vetorial real e f, g, h funções multilineares alternadas em V de grau k, l, m respectivamente. Então

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

Proposição 1.21 Se $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ são funções lineares no espaço vetorial V e $v_1, \dots, v_k \in V$, então

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)(v_1, \dots, v_k) = \det[\alpha^i(v_j)].$$

1.3 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.22 Definimos o cubo aberto com lados de longitude $2r$ sobre a origem em $\mathbb{R}^d$, como

$$C(r) = \{(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d \mid |a_i| < r \text{ para todo } i\}.$$

Definição 1.23 Se φ é uma função em um espaço topológico X , o suporte de φ é o subconjunto de X definido por

$$\text{Supp } \varphi = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$

Definição 1.24 A função $r_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$r_i(a) = a_i,$$

onde $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, é chamada a i -ésima função coordenada (canônica) em $\mathbb{R}^d$. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^d$, então denotamos

$$f_i = r_i \circ f,$$

onde f_i é chamada a i -ésima função componente de f .

Definição 1.25 Um espaço localmente Euclidiano M de dimensão d , é um espaço topológico Hausdorff M , para o qual cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Se φ é um homeomorfismo de um conjunto conexo aberto $U \subset M$ para um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$, φ é chamado um mapa de coordenadas. As funções $x_i = r_i \circ \varphi$ são chamadas as funções coordenadas. O par (U, φ) (às vezes denotado por $(U, x_1, \dots, x_d)$) é chamado sistema de coordenadas.

Definição 1.26 Um sistema de coordenadas (U, φ) é chamado sistema de coordenadas cúbico se $\varphi(U)$ é um cubo aberto, centrado na origem em $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.27 Uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) em um espaço localmente Euclidiano M é uma coleção de sistemas de coordenadas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ satisfazendo:

- (a) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
- (b) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ é C^k para todo $\alpha, \beta \in A$.
- (c) $\mathcal{F}$ é maximal em relação a (b).

Definição 1.28 Se um espaço X tem uma base enumerável para sua topologia, então dizemos que X satisfaz o segundo axioma de contabilidade, ou que é segundo contável.

Definição 1.29 Uma variedade diferencial de classe C^k é um par $(M, \mathcal{F})$, onde M é um espaço localmente Euclidiano d -dimensional segundo contável junto com uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de classe C^k .

Definição 1.30 Se X é um conjunto, por uma estrutura de variedade em X , queremos dizer uma escolha de uma topologia localmente Euclidiana segundo contável para X e uma estrutura diferenciável.

Notação 1.31 Referiremos a variedades diferenciáveis de classe C^∞ como variedades diferenciáveis ou simplesmente variedades, também usamos a terminologia suave para indicar diferencial de classe C^∞ .

Definição 1.32 Seja $U \subset M$ aberto. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é função C^∞ em U ($f \in C^\infty$) se $f \circ \varphi^{-1}$ é C^∞ para cada sistema de coordenadas (U, φ) em M .

Definição 1.33 Uma aplicação contínua $\Psi : M \rightarrow N$ se diz diferenciável (de classe C^∞) ou suave se $g \circ \Psi$ é função C^∞ em $\Psi^{-1}(U)$ (onde U domínio de g) para toda $g : U \subset N \rightarrow \mathbb{R}$ função C^∞ .

Observação 1.34 A aplicação contínua $\Psi : M \rightarrow N$ é C^∞ se, e somente se, $\varphi \circ \Psi \circ \tau^{-1}$ é C^∞ para cada aplicação coordenada τ em M e φ em N .

Observação 1.35 A aplicação $\Psi : M \rightarrow N$ é C^∞ se, e somente se, para cada $m \in M$, existe V_m vizinhança aberta tal que $\Psi|_{V_m}$ é C^∞ .

Definição 1.36 Uma aplicação contínua $F : N \rightarrow M$ é um difeomorfismo se é C^∞ , bijetiva com inversa F^{-1} também C^∞ .

Notação 1.37 Os conjuntos M, N, W denotam variedades e M^d denota que M é variedade de dimensão d .

Definição 1.38 Uma coleção $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M é uma cobertura de $W \subset M$ se $W \subset \bigcup U_\alpha$.

Definição 1.39 Um refinamento $\{V_\beta\}$ da cobertura $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura tal que, para cada β , existe α com $V_\beta \subset U_\alpha$.

Definição 1.40 Uma coleção $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de M é localmente finita se, para cada $m \in M$, existe V_m vizinhança tal que $V_m \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para apenas um número finito de α .

Definição 1.41 Um espaço topológico é paracompacto se cada cobertura aberta tem um refinamento aberto localmente finito.

Definição 1.42 Uma partição da unidade em M é uma coleção $\{\varphi_i : i \in I\}$ de funções C^∞ em M (onde I é um conjunto arbitrário de índices) tal que

(a) $\{\text{Supp } \varphi_i : i \in I\}$ é localmente finito (sobre M).

(b) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1 \ \forall p \in M$, e $\varphi_i(p) \geq 0 \ \forall p \in M$ e $i \in I$.

Observação 1.43 A partição da unidade $\{\varphi_i : i \in I\}$ é subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ se, para cada i , existe α tal que $\text{Supp } \varphi_i \subset U_\alpha$.

Lema 1.44 Seja X espaço topológico que é localmente compacto (i.e. para cada $x \in X$, existe V_x vizinhança compacta), Hausdorff, e segundo contável (variedade, por exemplo). Então X é paracompacto.

Lema 1.45 Existe φ uma função C^∞ não negativa em $\mathbb{R}^d$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \overline{C(1)} \\ 0 & , \ x \in (C(2))^c. \end{cases}$$

Teorema 1.46 (*Existência da partição da Unidade*) Seja M variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma partição da unidade contável $\{\varphi_i, i = 1, 2, \dots\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ com $\text{Supp } \varphi_i$ compacto para cada i . Se não requer suportes compactos, então existe uma partição da unidade $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$ (a saber, $\text{Supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$) com no máximo enumeráveis φ_α não identicamente.

Corolário 1.47 Sejam G aberto em M e A fechado em M , com $A \subset G$. Então existe uma função C^∞ , $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (a) $0 \leq \varphi(p) \leq 1, \forall p \in M$.
- (b) $\varphi(p) = 1$ se $p \in A$.
- (c) $\text{Supp } \varphi \subset G$.

Definição 1.48 Sejam M uma variedade diferenciável e $m \in M$. Funções f e g definidas em conjuntos abertos contendo m são ditas ter o mesmo germe em m se concordarem em alguma vizinhança de m . Isso introduz uma relação de equivalência nas funções C^∞ em vizinhanças de m . As classes de equivalência são chamadas de germes.

Definição 1.49 Sejam M uma variedade e $p \in M$. O espaço cotangente de M em p , denotado por T_p^*M , é definido sendo o espaço dual do espaço tangente T_pM :

$$T_p^*M = (T_pM)^* = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Definição 1.50 Seja M uma variedade C^∞ com estrutura diferencial $\mathcal{F}$. Definimos:

Fibrado tangente como $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \{(p, u) | p \in M, u \in T_pM\}$.

Fibrado cotangente como $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \alpha) | p \in M, \alpha \in T_p^*M\}$, onde T_p^*M é o dual de T_pM .

Definimos suas projeções naturais, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M, & \pi(v) &= p \text{ se } v \in T_pM, \\ \tilde{\pi} : T^*M &\rightarrow M, & \tilde{\pi}(\tau) &= p \text{ se } \tau \in T_p^*M. \end{aligned}$$

Observação 1.51 Se M é variedade diferenciável de dimensão n teremos que o fibrado tangente TM e o fibrado cotangente T^*M serão variedades diferenciáveis de dimensão $2n$.

Definição 1.52 Sejam M, N variedades diferenciáveis e $\psi : M \rightarrow N$ uma aplicação C^∞ .

- (a) ψ é uma imersão se $d\psi_m$ é injetiva para cada $m \in M$.
- (b) O par (M, ψ) é uma subvariedade de N se ψ é uma imersão injetiva.
- (c) ψ é um mergulho se ψ é uma imersão injetiva que é também um homeomorfismo de M e $\psi(M)$.

Definição 1.53 Sejam M uma variedade de dimensão d e c um inteiro, $1 \leq c \leq d$. Uma distribuição c -dimensional $\mathcal{D}$ na variedade M é uma escolha de um subespaço c -dimensional $\mathcal{D}(p)$ de $T_p M$ para cada p em M .

Definição 1.54 Um campo vetorial ou campo de vetores X em uma variedade M é uma função que atribui um vetor tangente $X_p \in T_p M$ a cada ponto $p \in M$. Em relação ao fibrado tangente, um campo vetorial em M é simplesmente uma seção do fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$ e o campo vetorial é suave se for suave como uma aplicação de M a TM . Denotamos o conjunto de todos os campos de vetores em M por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.55 Um fluxo local em um ponto p em um conjunto aberto U de uma variedade M é uma função C^∞

$$F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \rightarrow U,$$

onde ε é um número real positivo e W é uma vizinhança de p em U , tal que escrevemos $F_t(q) = F(t, q)$, e temos

- (i) $F_0(q) = q$ para todo $q \in W$,
- (ii) $F_t(F_s(q)) = F_{t+s}(q)$ sempre que ambos os lados são definidos.

Se um fluxo local F é definido em $\mathbb{R} \times M$, este é chamado um fluxo global.

Definição 1.56 Um campo vetorial com um fluxo global é chamado um campo vetorial completo. Se F é um fluxo global, então para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$F_t \circ F_{-t} = F_{-t} \circ F_t = F_0 = id_M.$$

Logo $F_t : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo. Assim, um fluxo global em M é um grupo de difeomorfismos a um parâmetro de M .

Definição 1.57 Seja $F : N \rightarrow M$ uma aplicação C^∞ entre variedades diferenciáveis. Em cada ponto $p \in N$, a aplicação F induz uma aplicação linear de espaços tangentes, chamada o diferencial em p ,

$$F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

como a seguir: se $X_p \in T_p N$, então $F_*(X_p)$ é o vetor tangente em $T_{F(p)} M$ definido por

$$(F_*(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R} \text{ para } f \text{ germe em } F(p). \quad (1.1)$$

Como (1.1) é independente do representante do germe, na prática podemos ignorar a distinção entre um germe e uma função representativa para o germe.

1.4 Formas diferenciáveis

Definição 1.58 O espaço vetorial $A_k(T_p M)$, usualmente denotado por $\bigwedge^k(T_p^* M)$, é o espaço de todos os k -tensores alternados no espaço tangente $T_p M$.

Definição 1.59 Um elemento do espaço cotangente T_p^*M é chamado um covetor em p . Assim, um covetor ω_p (ou $\omega|_p$) em p é um funcional linear

$$\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 1.60 Um campo covetor, uma 1-forma diferencial, ou mais simplesmente um 1-forma em uma variedade M , é uma aplicação ω que atribui a cada ponto $p \in M$ um covetor ω_p em p , isto é,

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow T^*M \\ p &\mapsto \omega_p. \end{aligned}$$

Definição 1.61 Um campo k -covetor em M é uma aplicação ω que atribui a cada ponto $p \in M$ um k -covetor $\omega_p \in \bigwedge^k(T_p^*M)$. Um campo k -covetor é chamado uma k -forma diferencial, uma forma diferencial de grau k , ou simplesmente uma k -forma.

Denotemos por $\Omega^k(M)$ o espaço vetorial de k -formas C^∞ na variedade M .

Definição 1.62 O espaço vetorial $\Omega^*(M)$ de formas diferenciáveis C^∞ na variedade M de dimensão n é a soma direta:

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M).$$

Definição 1.63 Uma derivada exterior em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear

$$d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$$

tal que

- (i) $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau$,
- (ii) $d \circ d = 0$,
- (iii) se f é uma função C^∞ e X um campo vetorial suave em M , então $(df)(X) = Xf$.

Definição 1.64 Uma k -forma ω em U é fechada se $d\omega = 0$.

Definição 1.65 Uma k -forma ω em U é exata se existe uma $(k-1)$ -forma τ tal que $\omega = d\tau$ em U .

Observação 1.66 Como $d^2 = 0$, temos que toda forma exata é fechada.

Definição 1.67 Seja M uma variedade diferencial de dimensão d . Dizemos que a forma diferencial $\mu \in \Omega^d(M)$ é uma forma de volume se $\mu_p \neq 0$, $\forall p \in M$.

Definição 1.68 Uma curva suave em uma variedade M é por definição uma aplicação suave $c :]a, b[\rightarrow M$. Usualmente assumimos $0 \in]a, b[$ e dizemos que c é uma curva começando em p se $c(0) = p$.

Definição 1.69 O vetor velocidade $c'(t_0)$ da curva c no tempo $t_0 \in]a, b[$ é definido como

$$c'(t_0) := c_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)}M.$$

Também dizemos que $c'(t_0)$ é a velocidade de c no ponto $c(t_0)$. As notações alternativas para $c'(t_0)$ são

$$\frac{dc}{dt}(t_0) \quad e \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} c.$$

Definição 1.70 Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e α uma k -forma no contradomínio N . O pullback de α por φ , denotado por $\varphi^*\alpha$, é uma k -forma no domínio M de φ definida por

$$(\varphi^*\alpha)(p)((v_1)_p, \dots, (v_k)_p) = \alpha(\varphi(p))(\varphi_*(v_1)_p, \dots, \varphi_*(v_k)_p),$$

onde $(v_1)_p, \dots, (v_k)_p \in T_pM$. O pullback de uma 0-forma (função) g por φ será a composição

$$\varphi^*g = g \circ \varphi.$$

Proposição 1.71 Seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma função diferenciável.

(i) Para uma k -forma α e uma l -forma β em N ,

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta).$$

(ii) Para uma k -forma α em N ,

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha).$$

Proposição 1.72 Considere a n -forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ definido por $\Omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, onde $(x_1, \dots, x_n)$ são coordenadas para $\mathbb{R}^n$. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Então

$$f^*\Omega = (\det(f_*)) \cdot \Omega.$$

1.5 A derivada de Lie e multiplicação interior

Definição 1.73 Para X um campo vetorial suave e ω uma k -forma suave na variedade M , fixado um ponto $p \in M$ e considerando $\varphi_t : U \rightarrow M$ um fluxo de X na vizinhança U de p , definimos a derivada de Lie $\mathcal{L}_X\omega$ em $p \in M$ como

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(p)}) - \omega_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)_p.$$

Definição 1.74 Se β é um k -covetor em um espaço vetorial V e $v \in V$, para $k \geq 2$ a multiplicação interior ou contração de β com v é o $(k-1)$ -covetor $i_v\beta$ definido por

$$(i_v\beta)(v_2, \dots, v_k) = \beta(v, v_2, \dots, v_k), \quad v_2, \dots, v_k \in V.$$

Definimos $i_v\beta = \beta(v) \in \mathbb{R}$ para um 1-covetor β em V e $i_v\beta = 0$ para um 0-covetor β (uma constante), em V .

Teorema 1.75 *Seja X um campo vetorial suave na variedade diferenciável M .*

i) *A derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$ é uma derivação: é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear e se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\tau \in \Omega^l(M)$, então*

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\tau).$$

ii) *A derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ comuta com a derivada exterior d .*

iii) *(Fórmula de homotopia de Cartan) $\mathcal{L}_X = di_X + i_Xd$.*

Definição 1.76 *Uma isotopia é uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos de uma variedade M , $\varphi_t : M \rightarrow M$, tal que $\varphi_0 = Id$.*

Toda isotopia define um campo de vetores tempo-dependente X_t através da equação

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t \circ \varphi_t. \quad (1.2)$$

Reciprocamente, se os campos de vetores na família X_t forem completos, então (1.2) define uma isotopia φ_t , $t \in \mathbb{R}$.

Agora podemos definir a derivada de Lie de uma forma diferencial $\beta \in \Omega^k(M)$ com respeito a X_t como

$$\mathcal{L}_{X_t}\beta := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{t+h} \circ \varphi_t^{-1})^*\beta - \beta}{h}. \quad (1.3)$$

Então,

$$\varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\beta - \varphi_t^*\beta}{h} = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\beta). \quad (1.4)$$

Lema 1.77 *Sejam ω_t , $t \in [0, 1]$, uma família suave de k -formas diferenciáveis em uma variedade M e $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$ uma isotopia de M . Definimos um campo vetorial tempo-dependente X_t em M por $X_t \circ \varphi_t = \frac{d}{dt}\varphi_t$, (de modo que φ_t é o fluxo de X_t). Então,*

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = \varphi_t^* \left(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t \right).$$

Demonstração.

Para uma k -forma tempo-independente ω temos

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega) = \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega). \quad (\text{de (1.4)})$$

Veamos para uma k -forma tempo-dependente ω_t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\omega_{t+h} - \varphi_{t+h}^*\omega_t + \varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{t+h}^* \left(\frac{\omega_{t+h} - \omega_t}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h} \\ &= \varphi_t^* \left(\frac{d}{dt}\omega_t \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Afirmação:

$$\varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+h}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{h}. \quad (1.6)$$

De fato, denotemos $\phi_h := \varphi_{t+h} \circ \varphi_t^{-1}$, onde t fixo e h variável temporal, notamos que ϕ_h é o fluxo de $Y_h = X_{t+h}$, pois

$$\begin{aligned} (Y_h \circ \phi_h)(p) &= (Y_h \circ (\varphi_{t+h} \circ \varphi_t^{-1}))(p) \\ &= (X_{t+h} \circ (\varphi_{t+h} \circ \varphi_t^{-1}))(p) \\ &= (X_{t+h} \circ \varphi_{t+h})(\varphi_t^{-1}(p)) \\ &= (X_s \circ \varphi_s)(\varphi_t^{-1}(p))|_{s=t+h} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \varphi_s(\varphi_t^{-1}(p)) \right|_{s=t+h} \\ &= \frac{d}{dh} \varphi_{t+h}(\varphi_t^{-1}(p)) \quad (t \text{ é fixo}) \\ &= \frac{d}{dh} (\varphi_{t+h} \circ \varphi_t^{-1})(p) \quad (t \text{ é fixo}) \\ &= \frac{d}{dh} \phi_h(p). \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{d}{dh} \phi_h = Y_h \circ \phi_h$, e $\phi_0(p) = (\varphi_t \circ \varphi_t^{-1})(p) = p$, ou seja, $\phi_0 = id$, logo ϕ_h é isotopia de Y_h .

Como t é fixo, e h é variável temporal, temos que ω_t não depende de h , podemos então usar (1.3), portanto,

$$\mathcal{L}_{Y_h}\omega_t = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\phi_{h+a} \circ \phi_h^{-1})^*\omega_t - \omega_t}{a}$$

tomando $h = 0$ vamos ter que $Y_0 = X_{t+0} = X_t$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_t}\omega_t &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\phi_a \circ \phi_0^{-1})^*\omega_t - \omega_t}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\phi_a^*\omega_t - \omega_t}{a} \quad (\text{pois } \phi_0 = id) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{t+a} \circ \varphi_t^{-1})^*\omega_t - \omega_t}{a}. \end{aligned}$$

Aplicando φ_t^* em ambos os lados,

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*(\varphi_{t+a} \circ \varphi_t^{-1})^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* \circ (\varphi_t^{-1})^* \circ \varphi_{t+a}^*)\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+a}^*\omega_t - \varphi_t^*\omega_t}{a}. \end{aligned}$$

Por último, usando (1.6) em (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) &= \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t\right) + \varphi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) \\ &= \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right). \end{aligned}$$

□

1.6 Integração em variedades

Teorema 1.78 (*Teorema de Stokes*) Para toda $(n-1)$ -forma ω com suporte compacto na variedade orientada n -dimensional M com bordo,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Definição 1.79 Seja M uma variedade diferencial, o espaço quociente do espaço vetorial real de p -formas fechadas módulo o subespaço das p -formas exatas é chamado o p -ésimo grupo comológico de Rham de M , i.e.

$$H^p(M, \mathbb{R}) = \frac{\{p\text{-formas fechadas}\}}{\{p\text{-formas exatas}\}}.$$

Definição 1.80 Seja α um p -forma fechada. Representamos a classe comológica de Rham por $[\alpha]$.

Observação 1.81 Duas formas fechadas ω e ω' determinam a mesma classe comológica se, e somente se, elas diferem em uma forma exata:

$$\omega' = \omega + d\tau.$$

Teorema 1.82 Seja η uma 2-forma fechada definida em uma bola aberta B centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^k$ satisfazendo $\eta|_0 = 0$. Considere a família de aplicações $\varphi_t : B \rightarrow B$ dada por $\varphi_t(x) = (1-t)x$ e o campo não autônomo $X_t|_x = \frac{x}{t-1}$ definido para $0 \leq t < 1$. Então a 1-forma definida por

$$\lambda = - \int_0^1 \varphi_t^*(i_{X_t}\eta)dt,$$

é suave em B e satisfaz $d\lambda = \eta$, $\lambda|_0 = 0$ (note que o campo X_t não está definido para $t = 1$, mas ainda assim a fórmula integral acima define uma 1-forma suave).

1.7 Geometria Riemanniana

Os fatos apresentados aqui servirão para entender a demonstração do Teorema de Vizinhaça Lagrangiana do Capítulo 3 seção 3.4.

Definição 1.83 Um fibrado vetorial k -dimensional é um par de variedades E e M , junto com uma aplicação $\pi : E \rightarrow M$, satisfazendo as seguintes condições:

- a) Cada conjunto $E_p := \pi^{-1}(p)$, chamado o fibrado de E sobre p , é dotado da estrutura de um espaço vetorial.
- b) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, chamado de trivialização local de E , tal que $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \pi_1 \circ \varphi$ onde $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$.
- c) A restrição de φ em cada fibra, $\varphi : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$, é um isomorfismo linear.

Definição 1.84 Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M , uma seção de E é uma aplicação $F : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ F = \text{Id}_M$, ou, simplesmente, $F(p) \in E_p$, para todo p .

Definição 1.85 A seção nula ζ é uma seção que aplica cada $p \in M$ ao elemento $\zeta_p = 0$ da fibra E_p .

Observação 1.86 Seja M uma variedade n -dimensional, a seção nula de T^*M ,

$$M_0 = \{(p, \zeta) \in T^*M \mid \zeta = 0 \text{ em } T_p^*M\}$$

é uma subvariedade n -dimensional de T^*M .

Definição 1.87 Um l -tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$F : V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

O espaço de l -tensores contravariantes será denotado por $T_l(V)$.

Definição 1.88 Um tensor do tipo $\binom{k}{l}$, também chamado um tensor k -covariante, l -cotravariante, é uma aplicação multilinear

$$F : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

O espaço dos $\binom{k}{l}$ -tensores mistos será denotado por $T_l^k(V)$.

Definição 1.89 O fibrado de $\binom{k}{l}$ -tensores é definido como

$$T_l^k M := \coprod_{p \in M} T_l^k(T_p M),$$

onde $\coprod$ denota a união disjunta. O espaço de fibrado $\binom{k}{l}$ -tensores é denotado por $\mathcal{T}_l^k(M)$.

Definição 1.90 Uma métrica Riemanniana em uma variedade M é um campo 2-tensor $g \in \mathcal{T}^2(M)$ que é simétrico (i.e., $g(X, Y) = g(Y, X)$) e definido positivo (i.e., $g(X, X) > 0$ se $X \neq 0$). Uma métrica Riemanniana determina um produto interno em cada espaço tangente $T_p M$, que é escrito tipicamente $\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$ para $X, Y \in T_p M$. Uma variedade junto com uma dada métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.

Definição 1.91 Seja M uma variedade. Um campo vetorial ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma aplicação suave $V : I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$. Denotamos por $\mathcal{T}(\gamma)$ o espaço de campos vetoriais ao longo de γ .

Definição 1.92 Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade M e $\mathcal{E}(M)$ o espaço de seções de E . Uma conexão em E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) &\rightarrow \mathcal{E}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

a) $\nabla_X Y$ é linear sobre $C^\infty(M)$ em X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \quad \forall f, g \in C^\infty(M);$$

b) $\nabla_X Y$ é linear sobre $\mathbb{R}$ em Y :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

c) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Definição 1.93 Uma conexão linear em M é uma conexão em TM , isto é, uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$$

satisfazendo as propriedades a) e c) na definição de uma conexão.

Definição 1.94 Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva. Um campo vetorial V ao longo de γ é dito ser extensível se existe um campo vetorial $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$ em uma vizinhança da imagem de γ que está relacionado com V , da seguinte forma, $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$, para todo $t \in I$,

Lema 1.95 Seja ∇ uma conexão linear na variedade M . Para cada curva $\gamma : I \rightarrow M$, ∇ determina um único operador

$$D_t : \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

a) Linearidade sobre $\mathbb{R}$:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Regra do produto:

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV, \quad f \in C^\infty(I).$$

c) Se V é extensível, então para cada extensão $\tilde{V}$ de V ,

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}.$$

Para todo $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, D_tV é chamada a derivada covariante de V ao longo de γ .

Definição 1.96 Seja M uma variedade com uma conexão linear ∇ , e seja γ uma curva em M . A aceleração de γ é o campo vetorial $D_t\dot{\gamma}$ ao longo de γ . Uma curva γ é chamada uma geodésica com relação a ∇ se $D_t\dot{\gamma} \equiv 0$, ($\dot{\gamma}$ denota a derivada de γ).

Definição 1.97 Seja M uma variedade diferencial, a aplicação exponencial é definida como

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{E} \subset TM &\rightarrow M \\ V = (x, v) &\mapsto \exp_x(v) = \gamma_{(x,v)}(1), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{E} := \{V = (x, v) \in TM \mid \text{a geodésica } \gamma_{(x,v)} \text{ é definida em um intervalo contendo } [0, 1]\}$.

Capítulo 2

Geometria Simplética e de Contato

Depois de fazer uma breve revisão de alguns fatos importantes no Capítulo 1, estamos prontos para estudar Geometria Simplética e de Contato. Este capítulo servirá como base para entender o Capítulo 3, onde apresentaremos o Truque de Moser e os Teoremas de Formas Normais.

2.1 Espaço Simplético

Definição 2.1 *Seja V um espaço vetorial. Uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz*

- (i) $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v), \forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R},$
- (ii) $f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v), \forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R},$
- (iii) $f(u + w, v) = f(u, v) + f(w, v), \forall u, v, w \in V,$
- (iv) $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w), \forall u, v, w \in V,$

é chamada uma forma bilinear em V , ou simplesmente forma bilinear.

Observação 2.2 *Seja f uma função bilinear em V , temos*

$$\ker f = \{u \in V \mid f(u, v) = 0, \forall v \in V\}.$$

Definição 2.3 *Um espaço vetorial simplético (V, ω) é um espaço vetorial real V munido de uma forma bilinear $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, que é*

- (i) *antissimétrica:* $\omega(u, v) = -\omega(v, u), \forall u, v \in V,$
- (ii) *não degenerada:* $\omega(u, v) = 0, \forall v \in V$, então $u = 0$.

A forma ω é dita uma forma bilinear simplética em V ou, simplesmente, forma simplética.

Observação 2.4 *Sempre temos,*

$$\begin{aligned}\omega(u, u) &= -\omega(u, u), \quad \forall u \in V \\ 2\omega(u, u) &= 0, \quad \forall u \in V \\ \omega(u, u) &= 0, \quad \forall u \in V.\end{aligned}$$

Definição 2.5 *Sejam (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) espaços vetoriais simpléticos. Dizemos que uma transformação linear $T : V_1 \rightarrow V_2$ é simplética se $T^*\omega_2 = \omega_1$, ou seja $\omega_2(Tu, Tv) = \omega_1(u, v)$ para quaisquer $u, v \in V_1$. Se V_1 e V_2 têm a mesma dimensão, então dizemos que T é um symplectomorfismo, e que (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) são symplectomorfos.*

Exemplo 2.6 *O espaço vetorial (V, ω_0) , onde $V = \mathbb{R}^2$ e $\omega_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = u_1v_2 - u_2v_1$ é um espaço vetorial simplético.*

De fato, pois $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial real. Por outro lado ω_0 é linear e antissimétrica, só resta ver que ela é não degenerada, suponha

$$\begin{aligned}\omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &= 0, \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

tomando $v_2 = u_1$ e $v_1 = -u_2$

$$\begin{aligned}u_1^2 + u_2^2 &= 0 \\ u_1 = u_2 &= 0 \\ (u_1, u_2) &= 0,\end{aligned}$$

então ω_0 é não degenerada, logo $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ é espaço vetorial simplético.

Exemplo 2.7 *Podemos estender o exemplo anterior tomando $V = \mathbb{R}^{2n}$ e*

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k, \quad (2.1)$$

onde $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ são coordenadas, $dq_k(z) = z_k$ e $dp_k(z) = z_{n+k}$,

$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall z = (z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Para verificar que ω_0 é uma forma simplética basta mostrar que ela é não degenerada, pois ser antissimétrica é uma consequência direta da definição de produto exterior de formas.

Tomando $e_1, \dots, e_{2n}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$, seja $u = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i e_i \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$\omega_0(u, v) = 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^{2n}$. Então, em particular, temos que $\omega_0(u, e_i) = 0$, $\forall i = 1, \dots, 2n$.

Mas,

$$\begin{aligned}\omega_0(u, e_i) &= \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k(u, e_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} dq_k(u) & dq_k(e_i) \\ dp_k(u) & dp_k(e_i) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k \delta_{(k+n)i} - \alpha_{k+n} \delta_{ki}) \\ &= \begin{cases} \alpha_{i-n}, & \text{se } i = n+1, \dots, 2n \\ -\alpha_{i+n}, & \text{se } i = 1, \dots, n \end{cases},\end{aligned}$$

Em qualquer caso, resulta que $\alpha_i = 0$, para $i = 1, \dots, 2n$. Ou seja, $u = 0$ e, portanto, ω_0 é não degenerada.

A forma simplética ω_0 também pode ser escrita como $\omega_0(\cdot, \cdot) = \langle J_0 \cdot, \cdot \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano canônico de $\mathbb{R}^{2n}$ e $J_0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ é a matriz dada em blocos $n \times n$ por

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

esta forma é chamada forma simplética canônica.

Exemplo 2.8 Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n , e V^* seu espaço dual. Então $E = V \times V^*$ com a forma bilinear $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\omega((v, \alpha), (v', \alpha')) = \alpha'(v) - \alpha(v')$ é um espaço vetorial simplético.

De fato, pois E é um espaço vetorial real, ω é bilinear e antissimétrica, só resta provar ela é não degenerada, suponha

$$\begin{aligned} \omega((v, \alpha), (u, \beta)) &= 0, \quad \forall (u, \beta) \in E \\ \beta(v) - \alpha(u) &= 0, \quad \forall (u, \beta) \in E, \end{aligned} \tag{2.2}$$

tomando $\beta = \alpha$

$$\begin{aligned} \alpha(v) - \alpha(u) &= 0, \quad \forall u \in V \\ \alpha(v - u) &= 0, \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

então $\alpha = 0$, logo em (2.2) temos

$$\beta(v) = 0, \quad \forall \beta \in V^*,$$

então $v=0$. Portanto, $(v, \alpha) = (0, 0)$ o que implica que ω é não degenerada.

Definição 2.9 Os symplectomorfismos lineares de V formam um grupo de Lie denotado por $Sp(V, \omega)$ e é chamado de grupo linear simplético. No caso em que $V = \mathbb{R}^{2n}$ e $\omega = \omega_0$ como em (2.1), usa-se a notação $Sp(2n)$ em vez de $Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Definição 2.10 Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético e $L \subset V$ um subespaço vetorial. O ortogonal simplético de L é o conjunto

$$L^\perp = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \quad \forall v \in L\}.$$

É claro que $L^\perp$ é subespaço vetorial. O subespaço vetorial L é dito um subespaço

- **Isotrópico** se $L \subset L^\perp$.
- **Coisotrópico** se $L^\perp \subset L$.
- **Lagrangiano** se for isotrópico e coisotrópico, i.e., $L = L^\perp$.
- **Simplético** se ω for não degenerada em L , i.e., (L, ω) é espaço vetorial simplético.

Exemplo 2.11 Sejam $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ espaço vetorial simplético e $L = \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, vamos ver que L é subespaço Lagrangiano. Sabemos que

$$L^\perp = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \omega_0(u, v) = 0 \ \forall v \in L\},$$

seja $u = (u_1, u_2) \in L^\perp$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_0((u_1, u_2), v), \ \forall v \in L \\ &= \omega_0((u_1, u_2), (\lambda, 0)), \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &= -u_2\lambda, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

então $u_2 = 0$, logo

$$L^\perp = \{(u_1, 0), \ \forall u_1 \in \mathbb{R}\},$$

assim $L = L^\perp$, portanto L é subespaço Lagrangiano.

Proposição 2.12 Na notação da Definição 2.10 vale que

$$\dim L + \dim L^\perp = \dim V.$$

Demonstração.

Consideremos o espaço dual V^* de V e o anulador

$$L^0 = \{\theta \in V^* \mid L \subset \ker \theta\}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto T(v) = \omega(v, \cdot) \end{aligned}$$

é linear.

Além disso, tem núcleo trivial, pois se

$$\begin{aligned} u \in \ker T &\text{ e } \omega \neq 0 \\ T(u) &= 0 \\ \omega(u, \cdot) &= 0 \quad (\omega \text{ não degenerada}) \\ u &= 0, \end{aligned}$$

logo $\ker(T) = \{0\}$.

Portanto, T é injetiva e $\dim(\ker(T)) = 0$, para ver que T é sobrejetiva, é suficiente notar que

$$\dim(V^*) = \dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T)),$$

concluimos que T é isomorfismo.

Por outro lado

$$L^\perp = T^{-1}(L^0), \text{ onde } T^{-1}(L^0) = \{v \in V \mid T(v) \in L^0\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 v \in L^\perp &\iff \omega(v, u) = 0 \quad \forall u \in L \\
 &\iff T(v)(u) = 0 \quad \forall u \in L \\
 &\iff L \subset \ker(T(v)) \\
 &\iff T(v) \in L^0 \\
 &\iff v \in T^{-1}(L^0).
 \end{aligned}$$

Portanto, como $T(L^\perp) = L^0$ e T é um isomorfismo

$$\begin{aligned}
 \dim L^\perp = \dim(T(L^\perp)) &= \dim L^0 \\
 \dim L^\perp &= \dim L^0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Além disso, temos

$$\dim L + \dim L^0 = \dim V. \tag{2.4}$$

De fato, sejam $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base de L , logo $\{v_1^*, \dots, v_r^*\}$ é uma base de L^* .

Para $i = r+1, \dots, n$, $v_i^*(v_j) = 0$ para $j = 1, \dots, r$, então

$$L \subset \ker(v_i^*) \quad , \quad i = r+1, \dots, n,$$

logo

$$\{v_{r+1}^*, \dots, v_n^*\} \text{ é base de } L^0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \dim L^* + \dim L^0 &= \dim V^* \\
 \dim L + \dim L^0 &= \dim V.
 \end{aligned}$$

Por último, de (2.3) e (2.4), temos

$$\dim L + \dim L^\perp = \dim V.$$

□

Definição 2.13 *Se W é um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então a codimensão de W em V é dado por:*

$$\text{codim}(W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Proposição 2.14 *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e L um subespaço de V , segue que:*

- i) $(L^\perp)^\perp = L$.
- ii) *Se L tem codimensão 1, então L é coisotrópico.*
- iii) $L \oplus L^\perp = V \iff L$ é simplético.

iv) Se L é isotrópico $\implies 2 \dim L \leq \dim V$.

v) L é simplético $\iff L^\perp$ é simplético.

Demonstração.

i) $(L^\perp)^\perp = L$.

De fato, pela Proposição 2.12, temos L subespaço de V , então

$$\dim L + \dim L^\perp = \dim V,$$

como $L^\perp$ é também um subespaço de V , então

$$\dim L^\perp + \dim (L^\perp)^\perp = \dim V,$$

logo

$$\dim L = \dim (L^\perp)^\perp. \quad (2.5)$$

Por outro lado, dado $v \in L$ temos

$$\begin{aligned} \omega(v, u) &= 0, \quad \forall u \in L^\perp \\ v &\in (L^\perp)^\perp \\ L &\subset (L^\perp)^\perp, \end{aligned} \quad (2.6)$$

de (2.5) e (2.6), concluímos que $(L^\perp)^\perp = L$

ii) Se L tem codimensão 1, então L é coisotrópico.

De fato, temos

$$\begin{aligned} \text{codim}(L) &= 1 \\ \dim V - \dim L &= 1 \\ \dim V - 1 &= \dim L, \end{aligned} \quad (2.7)$$

além disso, como

$$\begin{aligned} \dim L + \dim L^\perp &= \dim V \\ \dim V - 1 + \dim L^\perp &= \dim V && (\text{de (2.7)}) \\ \dim L^\perp &= 1. \end{aligned}$$

Seja $\{u_1\}$ a base de $L^\perp$, provaremos que $L^\perp \subset (L^\perp)^\perp = L$. Seja $u \in L^\perp$, então $u = \lambda u_1$.

Afirmção: $\omega(u, w) = 0, \quad \forall w \in L^\perp$.

De fato, dado $w \in L^\perp$, então $w = \alpha u_1$

$$\begin{aligned} \omega(u, w) &= \omega(\lambda u_1, \alpha u_1) = \lambda \alpha \omega(u_1, u_1) = 0 \\ \omega(u, w) &= 0, \quad \forall w \in L^\perp. \end{aligned}$$

Então $u \in (L^\perp)^\perp$, logo $L^\perp \subset (L^\perp)^\perp = L$. Portanto, L é coisotrópico.

iii) $L \oplus L^\perp = V \iff L$ é simplético.

($\Rightarrow$)

Como $L \oplus L^\perp$ é soma direta, temos $L \cap L^\perp = \{0\}$.

Por outro lado, seja $u \in L$, provaremos que, se $\omega(u, v) = 0, \forall v \in L$, então $u = 0$. Temos

$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= 0, \forall v \in L \\ u &\in L^\perp \\ u \in L \cap L^\perp &= \{0\},\end{aligned}$$

então $u = 0$, logo L é simplética.

($\Leftarrow$)

Provaremos que $L \cap L^\perp = \{0\}$.

($\supseteq$) Como L e $L^\perp$ são subespaços de V , então $0 \in L \cap L^\perp$ i.e. $\{0\} \subset L \cap L^\perp$.

($\subseteq$) Se $u \in L \cap L^\perp$, então

$$\begin{aligned}u \in L \quad \text{e} \quad u \in L^\perp \\ u \in L \quad \text{e} \quad \omega(u, v) = 0, \forall v \in L \\ u = 0 \quad (L \text{ é simplético}) \\ L \cap L^\perp \subset \{0\}.\end{aligned}$$

Logo, $L \cap L^\perp = \{0\}$, e como $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$, temos

$$L \oplus L^\perp = V.$$

iv) Se L é isotrópico $\Rightarrow 2 \dim L \leq \dim V$.

De fato, como L é isotrópica $L \subset L^\perp$, então

$$\begin{aligned}\dim L &\leq \dim L^\perp \\ \dim L + \dim L &\leq \dim L^\perp + \dim L \\ 2 \dim L &\leq \dim V.\end{aligned}$$

v) L é simplético $\iff L^\perp$ é simplético.

De fato,

$$\begin{aligned}L \text{ é simplético} &\iff L \oplus L^\perp = V && (\text{ de iii}) \\ &\iff L^\perp \oplus L = V && (V \text{ é espaço vetorial}) \\ &\iff L^\perp \oplus (L^\perp)^\perp = V && (\text{ de i}) \\ &\iff L^\perp \text{ é simplético} && (\text{ de iii) e } L^\perp \text{ é subespaço de } V)\end{aligned}$$

□

Lema 2.15 *Sejam E, F subespaços de V , então $E^\perp \cap F^\perp = (E + F)^\perp$.*

Demonstração.

($\subseteq$)

Seja $u \in E^\perp \cap F^\perp$, então $u \in E^\perp$ e $u \in F^\perp$, além disso, temos

$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= \omega(u, v_1 + v_2), \quad \forall v = v_1 + v_2 \in E + F, \\ &= \omega(u, v_1) + \omega(u, v_2) \quad \forall v = v_1 + v_2 \in E + F, \\ &= 0 \quad \forall v \in E + F \quad (u \in E^\perp \text{ e } u \in F^\perp),\end{aligned}$$

então $u \in (E + F)^\perp$, logo $E^\perp \cap F^\perp \subseteq (E + F)^\perp$

($\supseteq$)

Seja $u \in (E + F)^\perp$, temos

$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= \omega(u, v + 0), \quad 0 \in F, \forall v \in E \\ &= 0, \quad \forall v \in E \quad (u \in (E + F)^\perp)\end{aligned}$$

logo $u \in E^\perp$, também temos

$$\begin{aligned}\omega(u, w) &= \omega(u, 0 + w), \quad 0 \in E, \forall w \in F \\ &= 0, \quad \forall w \in F \quad (u \in (E + F)^\perp)\end{aligned}$$

logo $u \in F^\perp$, portanto, $u \in E^\perp \cap F^\perp$, isto é, $(E + F)^\perp \subseteq E^\perp \cap F^\perp$. Logo tem-se que $E^\perp \cap F^\perp = (E + F)^\perp$.

□

Proposição 2.16 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético não trivial. Então existem $n \geq 1$ e uma base*

$$\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$$

de V tal que

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij},$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Em particular, $\dim V$ é par.

Uma base com estas propriedades é chamada de uma base simplética de (V, ω) .

Demonstração.

Afirmamos que $\dim V \geq 2$, pois se $\dim V = 1$, existe $v \in V$ tal que $\{v\}$ é base de V .

Tomando $e_1 \in V$ com $e_1 \neq 0$, como ω é não degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Como $\{v\}$ é base de V , então existem λ e α tais que $e_1 = \lambda v$ e $f_1 = \alpha v$, logo $\omega(e_1, f_1) = \lambda\alpha\omega(v, v) = 0$ que é uma contradição.

Para o caso $\dim V = 2$, tomemos $\{e_1, f_1\}$ base de V , por ser ω não degenerada temos $\omega(e_1, e_1) = 0$ e $\omega(f_1, f_1) = 0$, além disso, temos que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$, pois se $\omega(e_1, f_1) = 0$, ao tomar $u \in V$ temos $u = \lambda e_1 + \alpha f_1$, então $\omega(e_1, u) = \omega(e_1, \lambda e_1 + \alpha f_1) = \lambda\omega(e_1, e_1) + \alpha\omega(e_1, f_1) = 0$, como u é arbitrário temos $\omega(e_1, u) = 0$, $\forall u \in V$, então $e_1 = 0$, que é uma contradição. Então $\omega(e_1, f_1) \neq 0$, podemos assumir $\omega(e_1, f_1) = 1$, pois se $\omega(e_1, f_1) = \beta$, onde β é um número real, só temos que definir $e'_1 = \frac{e_1}{\beta}$, então temos $\omega(e'_1, f_1) = \omega(\frac{e_1}{\beta}, f_1) =$

$$\frac{1}{\beta}\omega(e_1, f_1) = 1.$$

Para $\dim V = N > 2$, provaremos por indução, assumamos que é válido para espaços simpléticos de dimensão $< N$, seja $e_1 \in V$ um vetor não nulo.

Como ω é não degenerada e e_1 não nulo, existe $f_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

Seja $V_1 \subset V$ o subespaço gerado por e_1 e f_1 . Claramente (V_1, ω) é simplético (ver Exemplo 2.18).

Logo, como $V_1^\perp$ também é subespaço de V do item v), da Proposição 2.14, temos que

$(V_1^\perp, \omega)$ é simplético, então do item iii), da Proposição 2.14, temos $V_1 \oplus V_1^\perp = V$.
Então

$$\begin{aligned}\dim V_1 + \dim V_1^\perp &= \dim V \\ 2 + \dim V_1^\perp &= N \\ \dim V_1^\perp &= N - 2,\end{aligned}$$

como $\dim V_1^\perp = N - 2 < N$, da hipótese de indução, temos que existe $n \geq 2$, tal que

$$\dim V_1^\perp = N - 2 = 2n - 2,$$

e além disso, existe uma base simplética

$$\{e_2, \dots, e_n, f_2, \dots, f_n\} \text{ de } (V_1^\perp, \omega).$$

Portanto, como

$$\begin{aligned}\dim V_1 + \dim V_1^\perp &= \dim V \\ 2 + 2n - 2 &= \dim V \\ 2n &= \dim V,\end{aligned}$$

então $\dim V$ é par e $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base simplética de (V, ω) .

□

Exemplo 2.17 Uma base para o espaço simplético $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ é $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$, onde

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \text{ com } 1 \text{ na primeira coordenada} \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0), \text{ com } 1 \text{ na } n\text{-ésima coordenada} \\ f_1 &= (0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0), \text{ com } 1 \text{ na } n+1\text{-ésima coordenada} \\ &\vdots \\ f_n &= (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1), \text{ com } 1 \text{ na } 2n\text{-ésima coordenada}\end{aligned}$$

Exemplo 2.18 Se $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ é uma base simplética de (V, ω) então

• O gerado por e_1, f_1 é simplético.

De fato, seja V_1 o gerado por e_1, f_1 , provaremos que ω é não degenerada em V_1 .

Seja $u \in V_1$ tal que $\omega(u, v) = 0$, $\forall v \in V_1$.

Como $u \in V_1$, então existem $\lambda_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tais que $u = \lambda_1 e_1 + \alpha_1 f_1$, temos

$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= 0, \quad \forall v \in V_1 \\ \omega(u, \lambda e_1 + \alpha f_1) &= 0, \quad \forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{pois } v \in V_1) \\ \omega(\lambda_1 e_1 + \alpha_1 f_1, \lambda e_1 + \alpha f_1) &= 0, \quad \forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda \alpha_1 + \alpha \lambda_1 &= 0, \quad \forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{definição de base simplética}) \\ \lambda_1 = \alpha_1 &= 0 \\ u &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, V_1 é simplética.

- O gerado por e_1, e_2 é isotrópico.

De fato, seja V_2 o gerado por e_1, e_2 , provaremos que $V_2 \subset V_2^\perp$.

Temos

$$\begin{aligned} V_2^\perp &= \{u \in V / \omega(u, v) = 0, \forall v \in V_2\} \\ V_2^\perp &= \{u \in V / \omega(u, \lambda e_1 + \alpha e_2) = 0, \forall \lambda, \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Seja $u_1 \in V_2$, então existem $\lambda_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tais que $u_1 = \lambda_1 e_1 + \alpha_1 e_2$, logo para todo $v \in V_2$

$$\begin{aligned} \omega(u_1, v) &= \omega(\lambda_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \lambda e_1 + \alpha e_2) \\ &= 0, \quad (\text{definição de base simplética}) \end{aligned}$$

portanto, $u_1 \in V_2^\perp$, então $V_2 \subset V_2^\perp$.

Logo, V_2 é isotrópico.

- O gerado por $e_1, \dots, e_n, f_1, f_2$ é coisotrópico.

De fato, seja V_3 o gerado por $e_1, \dots, e_n, f_1, f_2$, provaremos que $V_3^\perp \subset V_3$

$$V_3^\perp = \{u \in V / \omega(u, v) = 0, \forall v \in V_3\}.$$

Seja $u \in V_3^\perp$, como $u \in V_3^\perp \subset V$, temos que existem $\lambda'_i, \alpha'_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ tais que

$$u = \lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_n e_n + \alpha'_1 f_1 + \dots + \alpha'_n f_n.$$

Além disso, como $u \in V_3^\perp$, temos que

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= 0, \quad \forall v \in V_3 \\ \omega(u, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= 0, \quad \forall \lambda_i, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \lambda'_1 \alpha_1 + \lambda'_2 \alpha_2 + \alpha'_1 \lambda_1 + \dots + \alpha'_n \lambda_n &= 0, \quad \forall \lambda_i, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ (\lambda'_1)^2 + (\lambda'_2)^2 + (\alpha'_1)^2 + \dots + (\alpha'_n)^2 &= 0 \\ \lambda'_1 = \lambda'_2 = \alpha'_1 = \dots = \alpha'_n &= 0, \end{aligned}$$

logo $u = \lambda'_3 e_3 + \dots + \lambda'_n e_n$ e, assim, $u \in V_3$, ou seja, $V_3^\perp \subset V_3$, portanto, V_3 é coisotrópico.

Proposição 2.19 *Todo espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ é symplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Demonstração. Seja (V, ω) o espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ e, então pela Proposição 2.16, possui base simplética $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$.

Seja $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$, dada por

$$T(z) = \sum_{i=1}^n z_i u_i + \sum_{i=1}^n z_{n+i} v_i,$$

onde $z = (z_1, \dots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Afirmção: T é um symplectomorfismo.

- T é linear. De fato, sejam $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\begin{aligned}
T(z+w) &= \sum_{i=1}^n (z_i + w_i)u_i + \sum_{i=1}^n (z_{n+i} + w_{n+i})v_i \\
&= \sum_{i=1}^n z_i u_i + \sum_{i=1}^n z_{n+i} v_i + \sum_{i=1}^n w_i u_i + \sum_{i=1}^n w_{n+i} v_i \\
&= T(z) + T(w). \\
T(\lambda z) &= \sum_{i=1}^n (\lambda z_i)u_i + \sum_{i=1}^n (\lambda z_{n+i})v_i \\
&= \lambda \left(\sum_{i=1}^n z_i u_i + \sum_{i=1}^n z_{n+i} v_i \right) \\
&= \lambda T(z).
\end{aligned}$$

- T é isomorfismo, pois $T(e_i) = u_i$ e $T(f_i) = v_i$, $\forall i = 1, \dots, n$, onde $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é a base simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$. Logo T é isomorfismo.
- $T^*\omega = \omega_0$, pois dados $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, temos que

$$\begin{aligned}
\omega_0(z, w) &= \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k(z, w) \\
&= \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} dq_k(z) & dq_k(w) \\ dp_k(z) & dp_k(w) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} z_k & w_k \\ z_{k+n} & w_{k+n} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^n (z_k w_{n+k} - z_{n+k} w_k). \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\omega(Tz, Tw) &= \omega\left(\sum_{j=1}^n z_j u_j + \sum_{j=1}^n z_{n+j} v_j, \sum_{k=1}^n w_k u_k + \sum_{k=1}^n w_{n+k} v_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (z_j w_k \omega(u_j, u_k) + z_j w_{n+k} \omega(u_j, v_k) + z_{n+j} w_k \omega(v_j, u_k) \\
&\quad + z_{n+j} w_{n+k} \omega(v_j, v_k)) \quad (\omega \text{ é bilinear}) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (z_j w_{n+k} \delta_{jk} - z_{n+j} w_k \delta_{jk}) \quad (\text{definição de base simplética}) \\
&= \sum_{j=1}^n (z_j w_{n+j} - z_{n+j} w_j). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

De (2.8) e (2.9), $\omega(Tz, Tw) = \omega_0(z, w)$, $\forall z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, portanto, $T^*\omega = \omega_0$ e T é um symplectomorfismo entre $\mathbb{R}^{2n}$ e V .

□

Observação 2.20 A Proposição 2.19 quer dizer que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, a menos de isomorfismos, é o único exemplo de espaço vetorial simplético de dimensão $2n$.

Observação 2.21 Seja (V, ω) espaço vetorial simplético não trivial, da Proposição 2.16, a matriz de ω relativa à base simplética é

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{pmatrix} \omega(e_1, e_1) & \cdots & \omega(e_1, e_n) & \omega(e_1, f_1) & \cdots & \omega(e_1, f_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega(e_n, e_1) & \cdots & \omega(e_n, e_n) & \omega(e_n, f_1) & \cdots & \omega(e_n, f_n) \\ \omega(f_1, e_1) & \cdots & \omega(f_1, e_n) & \omega(f_1, f_1) & \cdots & \omega(f_1, f_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega(f_n, e_1) & \cdots & \omega(f_n, e_n) & \omega(f_n, f_1) & \cdots & \omega(f_n, f_n) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

e dados $u, v \in V$ podemos expressar $\omega(u, v)$ na forma matricial como $\omega(u, v) = u^t J v$, ou também podemos expressar por $\omega(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle$, onde $J_0 = J^t$, J^t denota a transposta de J e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano canônico de $\mathbb{R}^{2n}$.

Lema 2.22 $T \in Sp(2n) \iff T^t J_0 T = J_0$, onde T^t denota a transposta de T .

Demonstração.

($\implies$) Seja $T \in Sp(2n)$, temos

$$\begin{aligned}
 \omega_0(u, v) &= \omega_0(Tu, Tv) \quad , \quad \forall u, v \in V & (T^* \omega_0 = \omega_0) \\
 \langle J_0 u, v \rangle &= \langle J_0 Tu, Tv \rangle \quad , \quad \forall u, v \in V & (\text{definição de } \omega_0) \\
 &= \langle T^t J_0 Tu, v \rangle \quad , \quad \forall u, v \in V \\
 J_0 &= T^t J_0 T.
 \end{aligned}$$

($\impliedby$) Seja $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ espaço simplético e $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ transformação linear, temos

$$\begin{aligned}
 \omega_0(u, v) &= \langle J_0 u, v \rangle \quad , \quad \forall u, v \in V & (\text{definição de } \omega_0) \\
 &= \langle T^t J_0 Tu, v \rangle \quad , \quad \forall u, v \in V & (T^t J_0 T = J_0) \\
 &= \langle J_0 Tu, Tv \rangle \quad , \quad \forall u, v \in V \\
 &= \omega_0(Tu, Tv) \quad , \quad \forall u, v \in V,
 \end{aligned}$$

então $T \in Sp(2n)$.

□

Lema 2.23 Seja V um espaço vetorial real de dimensão $2n$. Uma forma bilinear alternada ω em V é forma simplética se, e somente se, $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n fatores) é forma de volume.

Demonstração. $(\implies)$

Se ω for simplética, então pela Proposição 2.16 encontramos uma base simplética $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$. Das propriedades de base simplética se conclui que $\omega^n(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) = n!$, logo $\omega^n \neq 0$. De fato, como $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ é base simplética de V , temos que $\{e_1^*, f_1^*, \dots, e_n^*, f_n^*\}$ é base de V^* . Com isto temos

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(e_i, e_j) e_i^* \wedge e_j^* + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(e_i, f_j) e_i^* \wedge f_j^* + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega(e_i, f_j) f_i^* \wedge f_j^* \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \quad (\text{definição de base simplética}) \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \omega^n &= \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \right)^n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S(n)} e_{\sigma(1)}^* \wedge f_{\sigma(1)}^* \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)}^* \wedge f_{\sigma(n)}^* \\ &= n! (e_1^* \wedge f_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \wedge f_n^*). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \omega^n(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) &= \\ &= (e_1^* \wedge f_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \wedge f_n^*)(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1^* \wedge f_1^*(e_1, f_1) & \dots & e_1^* \wedge f_1^*(e_n, f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^* \wedge f_n^*(e_1, f_1) & \dots & e_n^* \wedge f_n^*(e_n, f_n) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e_1^*(e_1) & e_1^*(f_1) \\ f_1^*(e_1) & f_1^*(f_1) \end{pmatrix} & \dots & \det \begin{pmatrix} e_1^*(e_n) & e_1^*(f_n) \\ f_1^*(e_n) & f_1^*(f_n) \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \det \begin{pmatrix} e_n^*(e_1) & e_n^*(f_1) \\ f_n^*(e_1) & f_n^*(f_1) \end{pmatrix} & \dots & \det \begin{pmatrix} e_n^*(e_n) & e_n^*(f_n) \\ f_n^*(e_n) & f_n^*(f_n) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{pois } e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, f_i^*(f_j) = \delta_{ij}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega^n(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) = n!$ $(\impliedby)$ Para cada j denotemos por $S(j)$ o grupo das permutações de $\{1, \dots, j\}$.

Recapitulando a fórmula do produto exterior: se α é k -forma alternada e β é l -forma alternada, então

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} \text{signal}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

onde $S(k, l)$ denota o subconjunto de $S(k+l)$ das permutações σ satisfazendo $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$.

Como ω é uma forma bilinear alternada em V , só resta provar que ω é não degenerada. Para isso provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação: Se ω é degenerada, então $\omega^n = 0$.

De fato, suponha que existe $u_1 \in V \setminus \{0\}$ tal que

$$\omega(u_1, v) = 0, \quad \forall v \in V. \quad (2.10)$$

Completemos u_1 a uma base $B = \{u_1, \dots, u_{2n}\}$ de V .

Provemos por indução em j que para todo subconjunto $B' = \{w_1, \dots, w_{2j}\} \subset B$ com $2j$ elementos vale que, se $u_1 \in B' \implies \omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) = 0$.

Para $j = 1$, temos $B' = \{w_1, w_2\}$, como $u_1 \in B'$, seja $w_1 = u_1$. Então, de (2.10) segue que $\omega(u_1, w_2) = 0, \quad \forall w_2 \in V$.

Agora suponha válido para $N < j$, provaremos que é válido para j . Temos

$$\begin{aligned} \omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) &= \omega^1 \wedge \omega^{j-1}(w_1, \dots, w_{2j}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(2, 2(j-1))} \text{sign}(\sigma) \omega(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}) \omega^{j-1}(w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}). \end{aligned}$$

Se $u_1 \in \{w_1, \dots, w_{2j}\}$, então como $\{w_1, \dots, w_{2j}\} = \{w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}\} \cup \{w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}\}$ temos que ou $u_1 \in \{w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}\}$ ou $u_1 \in \{w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}\}$. Pela hipótese de indução, ou $\omega(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}) = 0$ ou $\omega^{j-1}(w_{\sigma(3)}, \dots, w_{\sigma(2j)}) = 0$, então $\omega^j(w_1, \dots, w_{2j}) = 0$.

Logo, se cumpre $\omega^n(u_1, \dots, u_{2n}) = 0$.

Portanto, como $\{u_1, \dots, u_{2n}\}$ é base de V e $\omega^n(u_1, \dots, u_{2n}) = 0$, concluímos que $\omega^n(u) = 0, \quad \forall u \in V$, então $\omega^n = 0$. Demonstramos que se ω é degenerada, então $\omega^n = 0$. O recíproco é $\omega^n \neq 0$, então ω é não degenerada. Portanto, ω é simplética.

□

Lema 2.24 $T \in Sp(2n) \implies \det T = 1$.

Demonstração.

Seja ω_0^n a forma de volume em $\mathbb{R}^{2n}$ determinada por ω_0 . Então, pela definição de determinante através de formas, temos que

$$T^* \omega_0^n(v_1, \dots, v_{2n}) = (\det T) \omega_0^n(v_1, \dots, v_{2n}), \quad (\text{Proposição 1.72 e } T_* = T) \quad (2.11)$$

para todo $v_1, \dots, v_{2n} \in \mathbb{R}^{2n}$. Mas

$$\begin{aligned} T^* \omega_0^n &= T^*(\omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0) \\ &= (T^* \omega_0) \wedge \dots \wedge (T^* \omega_0) \quad (\text{Proposição 1.71(ii)}) \\ &= \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0 \quad (T \text{ é simplética}) \\ &= \omega_0^n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Logo de (2.11) e (2.12) temos que $\det T = 1$.

□

Definição 2.25 Se chama espectro de T , e o denotaremos por $\sigma(T)$, ao conjunto de autovalores de T ; i.e.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} / \lambda \text{ é um autovalor de } T\}.$$

Lema 2.26 Uma matriz simplética $T \in Sp(2n)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- i) T e T^{-1} são conjugadas e, conseqüentemente, vale que $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(T)$.
- ii) Se $\lambda, \lambda' \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$, $v \in \ker(T - \lambda I)$, $v' \in \ker(T - \lambda' I)$ e $\lambda\lambda' \neq 1$, então $\omega_0(v, v') = 0$.

Demonstração.

i) Pelo Lema 2.22 temos

$$\begin{aligned} T^t J_0 T &= J_0 \\ T^t &= J_0 T^{-1} J_0^{-1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

logo T^t e T^{-1} são conjugados.

Sabemos que T^t e T são sempre conjugados. Então existe B tal que

$$T^t = B^{-1} T B. \quad (2.14)$$

Logo, de (2.13) e (2.14), temos

$$\begin{aligned} B^{-1} T B &= J_0 T^{-1} J_0^{-1} \\ T &= B J_0 T^{-1} J_0^{-1} B^{-1} \\ T &= (B J_0) T^{-1} (B J_0)^{-1} \end{aligned}$$

e, assim T e T^{-1} são conjugados, e possuem o mesmo polinômio característico (ver Teorema 1.3).

Portanto, sabemos que os autovalores de T são as raízes de seu polinômio característico, como T e T^{-1} possuem o mesmo polinômio característico, também possuem os mesmos autovalores, i.e.

$$\beta \in \sigma(T) \iff \beta \in \sigma(T^{-1}). \quad (2.15)$$

Por último,

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(T) &\iff \lambda \text{ é autovalor de } T \\ &\iff T x = \lambda x \\ &\iff x = \lambda T^{-1} x \\ &\iff \lambda^{-1} x = T^{-1} x \\ &\iff \lambda^{-1} \text{ autovalor de } T^{-1} \\ &\iff \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1}) \quad (\text{de (2.15)}) \\ &\iff \lambda^{-1} \in \sigma(T). \end{aligned}$$

ii) Temos $\lambda, \lambda' \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$ autovalores, com seus respectivos autovetores $v \in \ker(T - \lambda I)$ e $v' \in \ker(T - \lambda' I)$, portanto, $Tv = \lambda v$, $Tv' = \lambda' v'$. Por último,

$$\begin{aligned} \omega_0(v, v') &= \omega_0(Tv, Tv') \quad (T \in Sp(2n)) \\ &= \omega_0(\lambda v, \lambda' v') \\ &= \lambda \lambda' \omega_0(v, v') \\ (1 - \lambda \lambda') \omega_0(v, v') &= 0 \quad (\lambda \lambda' \neq 1) \\ \omega_0(v, v') &= 0. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.27 *Se $T \in Sp(2n)$, então as multiplicidades algébricas de 1 e de -1 como (possíveis) autovalores de T são pares.*

Demonstração.

Seja λ autovalor de T . Como T é invertível (pois $\det T = 1 \neq 0$) temos que λ^{-1} é autovalor de T^{-1} com a mesma multiplicidade de λ em T . Além disso, do Lema 2.26 i), temos que se λ é autovalor de T , então λ^{-1} é autovalor de T , portanto, o número de autovalores diferentes de ± 1 é par. Portanto, as multiplicidades algébricas dos autovalores diferentes de ± 1 é par.

Logo, se -1 for autovalor, então sua multiplicidade deve ser par, pois

$$\det T = \lambda_1^{q_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{2r}^{q_{2r}},$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{2r}$ são autovalores de T e $q_1, \dots, q_{2r}$ suas multiplicidades algébricas. Logo, se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ temos

$$\begin{aligned} 1 &= (1)^{q_1} (-1)^{q_2} \lambda_3^{q_3} \cdot \dots \cdot \lambda_{2r}^{q_{2r}} \quad (\text{pois } \lambda \text{ e } \lambda^{-1} \in \sigma(T)) \\ 1 &= (-1)^{q_2}, \end{aligned}$$

portanto, q_2 é par. Logo as somas das multiplicidades algébricas dos autovalores diferentes de 1 é um número par, digamos $2m$. Logo,

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \dots + q_r &= 2n = \dim(Sp(2n)) \\ q_1 + 2m &= 2n \\ q_1 &= 2(n - m) \end{aligned}$$

e assim q_1 é par.

□

Lema 2.28 *Se $T \in Sp(2n)$ é simétrica e positiva definida, então $T^s \in Sp(2n)$ para todo número real $s > 0$.*

Demonstração.

Como T é simétrica e positiva, da Proposição 1.4, temos que todos seus autovalores são positivos i.e. $\sigma(T) \subset (0, +\infty)$.

Pelo Teorema 1.6 (Teorema Espectral) existe decomposição

$$\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{\lambda \in \sigma(T)} M_\lambda,$$

onde M_λ é o autoespaço do autovalor λ . Denote $\sigma' = \sigma(T) \cap (0, 1]$, e para cada $\lambda \in \sigma'$ escreva

$$E_\lambda = M_\lambda + M_{\lambda^{-1}}.$$

Pelo Lema 2.26 vale que se $\lambda, \mu \in \sigma'$, $\lambda \neq \mu$, então $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$.

De fato, pois dado $v \in M_\lambda$, como $\lambda, \mu \in \sigma'$ e $\lambda \neq \mu$, temos que $\lambda \cdot \mu \neq 1$. Do Lema 2.26, temos

$$\omega_0(u, w) = 0 \quad , \quad \forall u \in M_\lambda \quad \forall w \in M_\mu,$$

então

$$\omega_0(v, w) = 0 \quad , \quad \forall w \in M_\mu,$$

logo $v \in M_\mu^\perp$, isto é, $M_\lambda \subset M_\mu^\perp$. Também temos

$$\begin{aligned} \omega_0(v, u) &= \omega_0(Tv, Tu), \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ &= \omega_0(\lambda v, \mu^{-1}u), \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ &= \lambda \mu^{-1} \omega_0(v, u), \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ (1 - \lambda \mu^{-1}) \omega_0(v, u) &= 0, \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}}, \end{aligned}$$

então $v \in M_{\mu^{-1}}^\perp$, isto é, $M_\lambda \subset M_{\mu^{-1}}^\perp$, logo $M_\lambda \subset M_\mu^\perp \cap M_{\mu^{-1}}^\perp = (M_\mu + M_{\mu^{-1}})^\perp = E_\mu^\perp$ (do Lema 2.15).

Por outro lado, seja $v \in M_{\lambda^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned} \omega_0(v, u) &= \omega_0(Tv, Tu) \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \quad (T \in Sp(2n)) \\ &= \omega_0(\lambda^{-1}v, \mu^{-1}u) \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ &= \lambda^{-1} \mu^{-1} \omega_0(v, u) \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ (1 - \lambda^{-1} \mu^{-1}) \omega_0(v, u) &= 0 \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ (1 - (\lambda \mu)^{-1}) \omega_0(v, u) &= 0 \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \\ \omega_0(v, u) &= 0 \quad \forall u \in M_{\mu^{-1}} \quad (\lambda \mu \neq 1), \end{aligned}$$

então $v \in M_{\mu^{-1}}^\perp$, logo $M_{\lambda^{-1}} \subset M_{\mu^{-1}}^\perp$, também temos

$$\begin{aligned} \omega_0(v, u) &= \omega_0(Tv, Tu), \quad \forall u \in M_\mu \\ &= \omega_0(\lambda^{-1}v, \mu u), \quad \forall u \in M_\mu \\ &= \lambda^{-1} \mu \omega_0(v, u), \quad \forall u \in M_\mu \\ (1 - \lambda^{-1} \mu) \omega_0(v, u) &= 0, \quad \forall u \in M_\mu \\ \omega_0(v, u) &= 0, \quad \forall u \in M_\mu \quad (\lambda \neq \mu), \end{aligned}$$

então $v \in M_\mu^\perp$, isto é, $M_{\lambda^{-1}} \subset M_\mu^\perp$, logo $M_{\lambda^{-1}} \subset M_{\mu^{-1}}^\perp \cap M_\mu^\perp = (M_{\mu^{-1}} + M_\mu)^\perp = E_\mu^\perp$ (do Lema 2.15).

Portanto, como $M_\lambda \subset E_\mu^\perp$ e $M_{\lambda^{-1}} \subset E_\mu^\perp$, temos $E_\lambda = M_\lambda + M_{\lambda^{-1}} \subset E_\mu^\perp$.

Do resultado anterior podemos deduzir que cada E_λ é espaço simplético. De fato, vamos provar que

$$\forall u \in E_\lambda \text{ com } u \neq 0, \exists v \in E_\lambda \text{ tal que } \omega_0(u, v) \neq 0.$$

Seja $u \in E_\lambda$, como ω é não degenerada em $\mathbb{R}^{2n}$ temos que existe $v \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega_0(u, v) \neq 0$. Além disso, como $\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{\mu \in \sigma'(T)} E_\mu$, temos que $v = \sum_{\mu \in \sigma'(T)} v_\mu$, com $v_\mu \in E_\mu$. Então

temos $\omega_0(u, v) \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \omega_0(u, v) &= \omega_0(u, \sum_{\mu \in \sigma'(T)} v_\mu) \\ &= \sum_{\mu \in \sigma'(T)} \omega_0(u, v_\mu) \\ &= \omega_0(u, v_\lambda) \quad (\text{pois } u \in E_\lambda \text{ e se } \lambda \neq \mu, \text{ então } E_\lambda \subset E_\mu^\perp) \end{aligned}$$

e assim $\omega_0(u, v_\lambda) \neq 0$, ou seja, existe $v_\lambda \in E_\lambda$ tal que $\omega_0(u, v_\lambda) \neq 0$, ou seja, E_λ é simplético.

Obviamente $\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{\lambda \in \sigma'} E_\lambda$ e $\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}$, então $E_\lambda = M_\lambda \oplus M_{\lambda^{-1}}$.

Por definição sabemos que T^s é aquela que atua em cada M_λ pela multiplicação por λ^s e, consequentemente, cada E_λ é T^s -invariante.

Os fatos descritos até aqui implicam que T^s é simplético se, e somente se, $T^s|_{E_\lambda}$ é simplético em $(E_\lambda, \omega_0|_{E_\lambda \times E_\lambda})$, para todo $\lambda \in \sigma'$.

Afirmção 1: $T^s|_{E_\lambda}$ é simplética

De fato,

- Se $\lambda = 1$, $E_1 = M_1 \oplus M_1 = M_1$, agora seja $u, v \in M_1$, então $\omega_0(T^s u, T^s v) = \omega_0(u, v)$, logo $T^s|_{E_1} = T^s|_{M_1}$ é simplético.
- Se $\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}$, temos que M_λ é Lagrangiano, pois se $u \in M_\lambda$ temos

$$\begin{aligned} \omega_0(u, v) &= \omega_0(Tu, Tv), \quad \forall u \in M_\lambda \quad (T \in Sp(2n)) \\ &= \omega_0(\lambda u, \lambda v), \quad \forall u \in M_\lambda \\ &= \lambda^2 \omega_0(u, v), \quad \forall u \in M_\lambda \\ 0 &= (\lambda^2 - 1) \omega_0(u, v), \quad \forall u \in M_\lambda \quad (\lambda \in \sigma' \setminus \{1\}) \\ 0 &= \omega_0(u, v), \quad \forall u \in M_\lambda, \end{aligned}$$

então $u \in M_\lambda^\perp$, logo $M_\lambda \subset M_\lambda^\perp$, e como $\dim M_\lambda = \dim M_\lambda^\perp$ temos que $M_\lambda = M_\lambda^\perp$, ou seja, M_λ é Lagrangiano, do mesmo modo $M_{\lambda^{-1}}$ é Lagrangiano.

Por último tome vetores $u, v \in E_\lambda = M_\lambda \oplus M_{\lambda^{-1}}$ e escreva $u = u_0 + u_1$ e $v = v_0 + v_1$ com $u_0, v_0 \in M_\lambda$ e $u_1, v_1 \in M_{\lambda^{-1}}$. Então

$$\begin{aligned} \omega_0(T^s u, T^s v) &= \omega_0(T^s(u_0 + u_1), T^s(v_0 + v_1)) \\ &= \omega_0(T^s u_0 + T^s u_1, T^s v_0 + T^s v_1) \\ &= \omega_0(T^s u_0, T^s v_0) + \omega_0(T^s u_0, T^s v_1) + \omega_0(T^s u_1, T^s v_0) + \omega_0(T^s u_1, T^s v_1) \\ &= \omega_0(\lambda^s u_0, \lambda^s v_0) + \omega_0(\lambda^s u_0, \lambda^{-s} v_1) + \omega_0(\lambda^{-s} u_1, \lambda^s v_0) + \omega_0(\lambda^{-s} u_1, \lambda^{-s} v_1) \\ &= \omega_0(\lambda^s u_0, \lambda^{-s} v_1) + \omega_0(\lambda^{-s} u_1, \lambda^s v_0) \quad (\text{pois } M_\lambda = M_\lambda^\perp \text{ e } M_{\lambda^{-1}} = M_{\lambda^{-1}}^\perp) \\ &= \lambda^s \lambda^{-s} (\omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0)) \\ &= \omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0) \\ &= \omega_0(u_0, v_1) + \omega_0(u_1, v_0) + \omega_0(u_0, v_0) + \omega_0(u_1, v_1) \\ &= \omega_0(u_0 + u_1, v_0 + v_1) \\ &= \omega_0(u, v), \end{aligned}$$

portanto, $T^s|_{E_\lambda}$ é simplético.

Afirmção 2: $T^s|_{E_\lambda}$ é simplético, então T^s é simplético

De fato, Sejam $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, como $\mathbb{R}^{2n} = \oplus_{\lambda \in \sigma'} E_\lambda$ temos que $u = \sum_{\mu \in \sigma'(T)} u_\mu$, $u_\mu \in E_\mu$ e

$$v = \sum_{\lambda \in \sigma'(T)} v_\lambda, \quad v_\lambda \in E_\lambda, \quad \text{portanto, temos}$$

$$\begin{aligned}
\omega_0(T^s u, T^s v) &= \omega_0 \left(T^s \sum_{\mu \in \sigma'(T)} u_\mu, T^s \sum_{\lambda \in \sigma'(T)} v_\lambda \right) \\
&= \omega_0 \left(\sum_{\mu \in \sigma'(T)} T^s u_\mu, \sum_{\lambda \in \sigma'(T)} T^s v_\lambda \right) \\
&= \sum_{\mu \in \sigma'(T), \lambda \in \sigma'(T)} \omega_0(T^s u_\mu, T^s v_\lambda) \quad (\omega_0 \text{ é bilinear}) \\
&= \sum_{\mu \in \sigma'(T), \lambda \in \sigma'(T)} \omega_0(u_\mu, v_\lambda) \quad (T^s|_{E_\lambda} \text{ é simplética}) \\
&= \omega_0(u, v),
\end{aligned}$$

logo T^s é simplético.

□

Toda matriz $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pode ser escrita como $M = A + iB$, com $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

A inclusão $\mathbb{C}^{n \times n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ dada por

$$A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

é $\mathbb{R}$ -linear e respeita multiplicação matricial.

Além disso,

$$(A + iB)^* \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}^t,$$

onde $(A + iB)^*$ denota a transposta conjugada.

Deste modo podemos enxergar $GL(n, \mathbb{C})$ e todos os seus subgrupos como subgrupos de $GL(2n, \mathbb{R})$. A matriz iI é mapeada na matriz $\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} = J_0$ via esta identificação.

Logo,

$$GL(n, \mathbb{C}) \simeq \{T \in GL(2n, \mathbb{R}) / TJ_0 = J_0T\}$$

Lema 2.29

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n).$$

Demonstração.

Seja T uma matriz real $2n \times 2n$, ela satisfaz o seguinte:

$$\begin{aligned}
T \in GL(n, \mathbb{C}) &\iff TJ_0 = J_0T, \\
T \in Sp(2n) &\iff T^t J_0 T = J_0, \\
T \in O(2n) &\iff T^t T = I.
\end{aligned}$$

Notamos que, qualquer duas destas condições implica a terceira, assim fica demonstrado as duas primeiras igualdades do Lema. Para terminar, demostremos que $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$, o subgrupo $Sp(2n) \cap O(2n)$ consiste das matrizes

$$T = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in GL(2n, \mathbb{R}),$$

com

$$X^t Y = Y^t X, \quad X^t X + Y^t Y = I_{n \times n}.$$

Pois $T \in O(2n)$, i.e.

$$\begin{aligned} I_{2n \times 2n} &= T^t T, \\ I_{2n \times 2n} &= \begin{pmatrix} X^t & Y^t \\ -Y^t & X^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \\ I_{2n \times 2n} &= \begin{pmatrix} X^t X + Y^t Y & -X^t Y + Y^t X \\ -Y^t X + X^t Y & Y^t Y + X^t X \end{pmatrix} \\ X^t Y &= Y^t X, \quad X^t X + Y^t Y = I_{n \times n}. \end{aligned}$$

Isto é precisamente a condição em $U = X + iY$ para ser unitário. Portanto, $Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$.

□

Logo,

$$U(n) = \{T \in GL(2n, \mathbb{R}) / T J_0 = J_0 T \text{ e } T^t = T^{-1}\}$$

Segue que $U(n) \subset Sp(2n)$ é subgrupo.

Definição 2.30 *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$, dizemos que A é retração por deformação de X se existe uma aplicação contínua $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ satisfazendo:*

- i) $F(0, x) = x, \forall x \in X$.
- ii) $F(t, x) = x, \forall x \in A, \forall t \in [0, 1]$.
- iii) $F(1, x) \in A, \forall x \in X$.

Lema 2.31 $U(n)$ é uma retração por deformação de $Sp(2n)$.

Demonstração.

Para todo $T \in GL(2n, \mathbb{R})$ vale que $U = (TT^t)^{-\frac{1}{2}} T \in O(2n)$.

De fato, provaremos que $U^t U = I$

$$\begin{aligned} U^t U &= ((TT^t)^{-\frac{1}{2}} T)^t (TT^t)^{-\frac{1}{2}} T \\ &= T^t ((TT^t)^{-\frac{1}{2}})^t (TT^t)^{-\frac{1}{2}} T \\ &= T^t ((TT^t)^t)^{-\frac{1}{2}} (TT^t)^{-\frac{1}{2}} T \\ &= T^t (TT^t)^{-\frac{1}{2}} (TT^t)^{-\frac{1}{2}} T \\ &= T^t (TT^t)^{-1} T \\ &= T^t (T^t)^{-1} T^{-1} T \\ &= I. \end{aligned}$$

Denotando $P = (TT^t)^{\frac{1}{2}}$, então $T = PU$ é a decomposição polar de T . Se $T \in Sp(2n)$, então $T^t \in Sp(2n)$. Pelo Lema 2.28 temos

$$\begin{aligned} TT^t &\in Sp(2n) \\ P &= (TT^t)^{\frac{1}{2}} \in Sp(2n) \\ U &= (TT^t)^{-\frac{1}{2}} T \in Sp(2n) \\ T &= PU \in Sp(2n). \end{aligned}$$

Em particular $U \in O(2n) \cap Sp(2n) = U(n)$

Defina

$$\begin{aligned} r : [0, 1] \times Sp(2n) &\longrightarrow Sp(2n) \\ (s, T) &\longmapsto r(s, T) = P^{1-s}U. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O mapa r é contínua. Vamos ver se r cumpre com as propriedades *i*), *ii*) e *iii*) da definição 2.30, tomando $s = 0$ temos

$$r(0, T) = PU = T, \quad \forall T \in Sp(2n)$$

i.e $r(0, \cdot)$ é identidade em $Sp(2n)$ e assim cumpre *i*), e se $T \in U(n)$

$$\begin{aligned} r(s, T) &= P^{1-s}U \\ &= (TT^t)^{\frac{1}{2}(1-s)}(TT^t)^{-\frac{1}{2}}T \\ &= (TT^t)^{-\frac{1}{2}s}T \quad (T \in U(n)) \\ &= (I)^{-\frac{1}{2}s}T \\ &= T, \end{aligned}$$

então $r(s, T) = T$, $\forall T \in U(n)$ i.e. $r(s, \cdot)|_{U(n)}$ é identidade em $U(n)$ $\forall s \in [0, 1]$, com isto temos *ii*). Por último, tomando $s = 1$ temos

$$r(1, T) = P^{1-1}U = U \in U(n), \quad \forall T \in Sp(2n)$$

com isto cumpre *iii*). Logo $U(n)$ é uma retração por deformação de $Sp(2n)$.

□

Corolário 2.32 $Sp(2n)$ é conexo.

Demonstração.

Provaremos que qualquer elemento de $Sp(2n)$ pode ser conectado à identidade por um caminho contínuo que se encontra em $Sp(2n)$. Então, qualquer dois elementos A e B de $Sp(2n)$ pode ser conectado por um caminho que vai de A para a identidade e depois da identidade para B . Seja $T \in Sp(2n)$, da Proposição 1.1, temos que existe uma matriz quadrada C de ordem n invertível tal que

$$A = CBC^{-1},$$

onde B é uma matriz triangular superior:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$$

Como $\det T = 1$ e $\det T = \det B = \lambda_1 \cdots \lambda_{2n}$, temos que $\lambda_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq 2n$. Seja $B(t)$ obtido multiplicando a parte acima da diagonal de B por $(1-t)$ para $0 \leq t \leq 1$ e seja $A(t) = CB(t)C^{-1}$, $A(0) = T$ e $A(1) = CDC^{-1}$, onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}.$$

Além disso, o $\det A(t) = \lambda_1 \cdots \lambda_{2n} = \det A = 1$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Portanto, $A(t)$ é um caminho que está em $Sp(2n)$.

Agora, podemos definir $\lambda_i(t)$ que conecta cada λ_i a 1 em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no intervalo $1 \leq t \leq 2$ para cada $1 \leq i \leq 2n-1$, notamos que $\lambda_i(1) = \lambda_i$ e $\lambda_i(2) = 1$, e definimos $\lambda_{2n}(t) = (\lambda(t) \cdots \lambda_{n-1}(t))^{-1}$ para $1 \leq t < 2$ e $\lambda_{2n}(2) = \lambda_{2n}$. Temos então

$$A(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n}(t) \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Este é um caminho contínuo que começa em CDC^{-1} quando $t = 1$ e termina em $CIC^{-1} = I$ quando $t = 2$. Como $\det A(t) = \lambda_1(t) \cdots \lambda_{2n-1}(t) \lambda_{2n}(t) = \lambda_1(t) \cdots \lambda_{2n-1}(t) (\lambda_1(t) \cdots \lambda_{2n-1}(t))^{-1} = 1$, temos que $A(t)$ esta em $Sp(2n)$. Vemos então que toda $T \in Sp(2n)$ pode ser conectada à identidade por um caminho contínuo de $Sp(2n)$. Portanto, $Sp(2n)$ é conexo.

□

2.2 Variedades Simpléticas

Definição 2.33 *Seja W uma variedade diferenciável. Uma forma simplética em W é uma 2-forma diferenciável $\omega \in \Omega^2(W)$ satisfazendo:*

- i) ω é fechado, ou seja, $d\omega = 0$.
- ii) ω não degenerada, ou seja, $\forall x \in W$ temos que $\omega|_x(u, v) = 0 \ \forall v \in T_x W \implies u = 0$.

Definição 2.34 *Uma variedade simplética é um par (W, ω) formado por uma variedade W e uma forma simplética ω em W .*

Definição 2.35 *Seja X um espaço topológico. Dada $x \in X$, denotamos por C_x a união dos subconjuntos conexos de X que contém x . Então C_x é o maior subconjunto conexo de X que contém x . Diremos que C_x é a componente conexa de X que contém x .*

Pela Proposição 2.16 as componente conexas de uma variedade simplética (W, ω) tem dimensão par. Se W é $2n$ -variedade, então o Lema 2.23 nos diz que a $2n$ -forma ω^n é uma forma de volume em W e, portanto, W é orientável.

Lema 2.36 *Se (W, ω) é uma variedade simplética fechada (compacta), então $[\omega] \neq 0$ em $H^2(W, \mathbb{R})$.*

Demonstração.

Seja $[\omega] \in H^2(W, \mathbb{R})$, como $\omega^n \in \Omega^{2n}(W)$ é uma forma de volume (do Lema 2.23), temos $\omega^n \neq 0$, logo

$$\int_W \omega^n \neq 0.$$

Por outro lado, se $[\omega]^n = 0$ temos que ω^n é exata, então existe uma $(n-1)$ -forma θ tal que $\omega^n = d\theta$. Pelo Teorema de Stokes (Teorema 1.78), temos

$$\int_W \omega^n = \int_W d\theta = \int_{\partial W} \theta = 0 \quad (W \text{ não tem bordo}),$$

que é uma contradição, então $[\omega]^n \neq 0$.

□

O seguinte Lema nos diz que não toda variedade de dimensão par admite forma simplética.

Lema 2.37 *Se $k \geq 3$, então S^k não admite forma simplética.*

Demonstração.

Como $H^2(S^k, \mathbb{R}) = 0$, $\forall k \geq 3$, então $[\omega] = 0$ em $H^2(S^k, \mathbb{R})$. Do Lema 2.36, temos que a variedade S^k não admite forma simplética.

□

Apresentaremos alguns exemplos de variedades simpléticas

Exemplo 2.38 *Sejam a 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e $p \in S^2$, definimos a 2-forma ω em S^2 , como*

$$\omega_p(u, v) = \langle u \times v, p \rangle \text{ para todo } u, v \in T_p S^2.$$

O par (S^2, ω) é uma variedade simplética.

Exemplo 2.39 *Considere $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e*

$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$. *Temos que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética. De fato, pois $\mathbb{R}^{2n}$ é uma variedade diferencial e ω_0 é uma 2-forma diferencial, no exemplo 2.7 mostramos que ω_0 é não degenerada, resta provar que ω_0 é fechada, mas*

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= d\left(\sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n d(dq_i) \wedge dp_i + (-1)^{\deg(dq_i)} dq_i \wedge d(dp_i) \\ &= 0 \quad (d^2 = 0). \end{aligned}$$

Logo $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética.

Exemplo 2.40 *Sejam X uma variedade, $T^*(X)$ seu fibrado cotangente e a projeção natural,*

$$\tilde{\pi} : T^*X \rightarrow X, \quad \tilde{\pi}(\tau) = m \text{ se } \tau \in T_m^*(X).$$

*Seja $U \subset X$ um aberto com coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$. Então temos 1-formas $dx^i \in \Omega^1(U)$ associadas e, para cada $q \in U$, o conjunto $\{dx^1|_q, \dots, dx^n|_q\}$ é uma base para T_q^*X . Se*

$\xi \in T_q^*X$, então $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i|_q$, onde $\xi_i \in \mathbb{R}$ são unicamente determinados por ξ . Temos, portanto, coordenadas naturais

$$(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

em T^*U . Podemos considerar as 1-formas $\widetilde{dx}^i := \widetilde{\pi}^* dx^i \in \Omega^1(T^*U)$ e definir a 1-forma tautológica α_{taut} e a forma simplética canônica ω_{can} em T^*U por

$$\alpha_{taut} := \sum_{i=1}^n \xi_i \widetilde{dx}^i, \quad \omega_{can} := d\alpha_{taut} = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge \widetilde{dx}^i.$$

Para que (T^*X, ω_{can}) seja uma variedade simplética, provemos a seguinte proposição.

Proposição 2.41 *As formas α_{taut} e ω_{can} não dependem das coordenadas e, portanto, estão globalmente definidas em T^*X .*

Demonstração.

Como $\omega_{can} = d\alpha_{taut}$, basta verificar que α_{taut} não depende das coordenadas. Seja $V \subset X$ outro aberto munido de coordenadas $(y^1, \dots, y^n)$. Temos então um sistema de coordenadas naturais $(y^1, \dots, y^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ definidas em T^*V . Como

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \text{ em } U \cap V, \quad (2.17)$$

e $\widetilde{dy}^j = \widetilde{\pi}^* dy^j$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy}^j &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{\pi}^* dy^j \\ &= \widetilde{\pi}^* \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \\ &= \widetilde{\pi}^* dx^i \quad (\text{ de (2.17) }) \\ &= \widetilde{dx}^i. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\widetilde{dx}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy}^j \text{ em } T^*(U \cap V). \quad (2.18)$$

Então, obtemos

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \quad (\text{ de (2.17) }) \\ &= \sum_{j=1}^n \zeta_j dy^j, \end{aligned}$$

onde $\zeta_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$. Logo

$$\begin{aligned} \alpha_{taut} &= \sum_{i=1}^n \xi_i \widetilde{dx^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \widetilde{dy^j} \quad (\text{ de (2.18) }) \\ &= \sum_{j=1}^n \zeta_j \widetilde{dy^j}. \end{aligned}$$

Portanto, α_{taut} não depende das coordenadas, então ω_{can} não depende das coordenadas. $\square$

Portanto, o fibrado cotangente T^*X se torna variedade simplética quando munido da forma simplética $\omega_{can} = d\alpha_{taut}$.

Definição 2.42 *Uma aplicação simplética $\varphi : (W_1, \omega_1) \rightarrow (W_2, \omega_2)$ entre variedades simpléticas é uma aplicação diferenciável satisfazendo $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Se φ for um difeomorfismo, então diz-se que φ é um symplectomorfismo.*

2.3 Geometria de Contato

Definição 2.43 *Seja M uma variedade de dimensão $2n + 1$, onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dizemos que a 1-forma λ em M é de contato se*

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \text{ nunca se anula.} \quad (2.19)$$

Por definição, se λ é forma de contato, então $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ define uma forma de volume em M e, portanto, M deve ser orientável.

Definição 2.44 *O campo de Reeb X_λ associado à forma de contato λ em M é definido implicitamente por*

$$\begin{cases} i_{X_\lambda} d\lambda = 0 \\ i_{X_\lambda} \lambda = 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Definição 2.45 *Seja M uma variedade. Uma 1-forma λ é dita de contato se $d\lambda|_p$ é não degenerada em $\ker \lambda|_p$, $\forall p \in M$.*

Observação 2.46 *Na definição 2.45 temos uma 2-forma $d\lambda|_p$ não degenerada no espaço vetorial $\ker \lambda|_p$, portanto, $(\ker \lambda|_p, d\lambda|_p)$ é um espaço vetorial simplético.*

Lema 2.47 *Seja M uma variedade carregada de uma 1-forma de contato λ , no sentido da definição 2.45. Então $\dim \ker \lambda = \dim M - 1$.*

Demonstração.

Seja $p \in M$. Sabemos que $\lambda|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, então $Im \lambda|_p \subset \mathbb{R}$. Logo $\dim Im \lambda|_p \leq \dim \mathbb{R} = 1$ e, assim, $\dim Im \lambda|_p = 1$ ou 0 .

Se $\dim \operatorname{Im} \lambda|_p = 0$, então $\operatorname{Im} \lambda|_p = \{0\}$, isto é, $\lambda|_p(u) = 0, \forall u \in T_p M$, logo $\lambda|_p = 0$ e como p é arbitrário em M temos que $\lambda = 0$. Logo $d\lambda = 0$, mas $d\lambda|_p$ é não degenerada em $\ker \lambda|_p$ que é uma contradição, portanto, $\dim \operatorname{Im} \lambda|_p = 1$.

Assim, como

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} \lambda|_p + \dim \ker \lambda|_p &= \dim T_p M \\ 1 + \dim \ker \lambda|_p &= \dim M \\ \dim \ker \lambda|_p &= \dim M - 1. \end{aligned}$$

Como p é arbitrário temos $\dim \ker \lambda|_p = \dim M - 1, \forall p \in M$.

Lema 2.48 *Seja M uma variedade que carrega uma 1-forma de contato no sentido da definição 2.45. Então $\dim M$ é ímpar.*

Demonstração.

Fixando $p \in M$ arbitrariamente, a 1-forma não pode se anular identicamente em uma vizinhança qualquer U de p pois, caso contrário, teríamos $d\lambda|_U = 0$, portanto, $d\lambda|_p$ é degenerada, o que é impossível já que λ é de contato. Logo existe p' arbitrariamente próximo de p tal que $\lambda|_{p'} \neq 0$. Suponha que $\dim T_{p'} M = \dim M$ é par. Do Lema 2.47, temos que $\dim \ker \lambda|_{p'} = \dim T_{p'} M - 1$, portanto, $\dim \ker \lambda|_{p'}$ é ímpar, que é uma contradição, pois na observação 2.46 vimos que $(\ker \lambda|_{p'}, d\lambda|_{p'})$ é um espaço vetorial simplético, ou seja, $\ker \lambda|_{p'}$ é de dimensão par, logo $\dim M$ é ímpar.

□

Lema 2.49 *Seja M uma variedade que carrega uma 1-forma de contato no sentido da definição 2.45. Então $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$ e $T_p M = \ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p, \forall p \in M$.*

Demonstração.

Pelo Lema 2.48 sabemos que $\dim M$ é ímpar, vamos supor que $\dim M = 2n + 1$, onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Considere $p \in M$. Do Lema 2.47, temos que $\dim \ker \lambda|_p = (2n + 1) - 1 = 2n$. Por outro lado, lembremos como se definem os núcleos de $\lambda|_p$ e $d\lambda|_p$

$$\begin{aligned} \ker \lambda|_p &= \{u \in T_p M \mid \lambda|_p(u) = 0\} \\ \ker d\lambda|_p &= \{u \in T_p M \mid d\lambda|_p(u, v) = 0, \forall v \in T_p M\}, \end{aligned}$$

portanto, $\ker \lambda|_p$ e $\ker d\lambda|_p$ são subconjuntos de $T_p M$.

Se $\ker d\lambda|_p = \{0\}$. Então $d\lambda|_p$ é não degenerada em $T_p M$, logo $(T_p M, d\lambda|_p)$ é um espaço vetorial simplético, portanto, $\dim T_p M$ é par, que é uma contradição, pois $\dim T_p M = \dim M$ a qual é ímpar. Logo $\ker d\lambda|_p \neq \{0\}$ e, assim, $\dim \ker d\lambda|_p \geq 1$. Por outro lado também temos que $\ker \lambda|_p \cap \ker d\lambda|_p = \{0\}$, pois se existe $u \neq 0$ tal que $u \in \ker \lambda|_p \cap \ker d\lambda|_p$, então

$$\begin{aligned} u &\in \ker \lambda|_p \text{ e } u \in \ker d\lambda|_p \\ u &\in \ker \lambda|_p \text{ e } d\lambda|_p(u, v) = 0 \quad \forall v \in T_p M \\ u &\in \ker \lambda|_p \text{ e } d\lambda|_p(u, v) = 0 \quad \forall v \in \ker \lambda|_p \subset T_p M \end{aligned}$$

e como $d\lambda|_p$ é não degenerada em $\ker \lambda|_p$, temos que $u = 0$, que é uma contradição. Portanto, $\ker \lambda|_p \cap \ker d\lambda|_p = \{0\}$ e, assim,

$$\ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p \subseteq T_p M. \quad (2.21)$$

Logo

$$\begin{aligned} \dim(\ker \lambda|_p) + \dim(\ker d\lambda|_p) &\leq \dim T_p M \\ 2n + \dim(\ker d\lambda|_p) &\leq 2n + 1 \\ \dim(\ker d\lambda|_p) &\leq 1, \end{aligned}$$

mas temos $\dim(\ker d\lambda|_p) \geq 1$, então $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$. Por último, temos

$$\dim(\ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p) = \dim(\ker \lambda|_p) + \dim(\ker d\lambda|_p) = 2n + 1 = \dim T_p M, \quad (2.22)$$

portanto, de (2.21) temos $\ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p = T_p M$, como p é arbitrário em M temos que $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$ e $T_p M = \ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p$, $\forall p \in M$.

□

Lema 2.50 *As definições 2.43 e 2.45 de forma de contato são equivalentes.*

Demonstração.

Seja $\dim M = 2n + 1$, onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se λ satisfaz a definição 2.43, temos que

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \text{ nunca se anula.}$$

Se $(d\lambda|_p)^n$ se anula no $\ker \lambda|_p$, então $\lambda|_p \wedge (d\lambda|_p)^n$ se anula no $\ker \lambda|_p$, que é uma contradição, pois $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ nunca se anula, portanto, $(d\lambda|_p)^n$ não se anula em $\ker \lambda|_p$, e, assim, do Lema 2.23, temos que $d\lambda|_p$ é forma simplética, ou seja, $d\lambda|_p$ é não degenerada em $\ker \lambda|_p$. Por último, como p é arbitrário, temos que λ satisfaz a definição 2.45. Reciprocamente, suponha que λ satisfaz a definição 2.45. Fixe $p \in M$, como $(\ker \lambda|_p, d\lambda|_p)$ é um espaço vetorial simplético, escolhendo uma base simplética $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ de $(\ker \lambda|_p, d\lambda|_p)$ temos que

$$d\lambda|_p(e_i, e_j) = d\lambda|_p(f_i, f_j) = 0, \quad d\lambda|_p(e_i, f_j) = \delta_{ij},$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Além disso, sabemos do Lema 2.49 que a $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$ e $T_p M = \ker \lambda|_p \oplus \ker d\lambda|_p$, então existe $v \in T_p M \setminus \ker \lambda|_p$ tal que $\ker d\lambda|_p = \mathbb{R}v$, portanto,

$$\begin{aligned} \lambda|_p \wedge (d\lambda|_p)^n(v, e_1, f_1, \dots, e_n, f_n) &= \lambda|_p(v) d\lambda|_p(e_1, f_1) \cdots d\lambda|_p(e_n, f_n) + 0 + \dots + 0 \\ &= \lambda|_p(v) \neq 0 \quad (\text{pois } v \in T_p M \setminus \ker \lambda|_p), \end{aligned}$$

logo $\lambda|_p \wedge (d\lambda|_p)^n$ nunca se anula e, assim, λ satisfaz a definição 2.43.

□

Lema 2.51 *Seja M uma variedade que carrega uma 1-forma de contato λ . Então o campo de Reeb X_λ existe e é único.*

Demonstração.

Como $\lambda|_p \neq 0$, $\forall p \in M$, temos que existe um campo Z tal que $\lambda|_p(Z_p) \neq 0$, $\forall p \in M$. Consideramos agora $W_p = \frac{Z_p}{\lambda|_p(Z_p)} \in T_p M$ e notamos que

$$\begin{aligned} \lambda|_p(W_p) &= \lambda|_p\left(\frac{Z_p}{\lambda|_p(Z_p)}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda|_p(Z_p)} \lambda|_p(Z_p) = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $T_p M = \ker \lambda|_p \oplus d\lambda|_p$ temos que $W_p = Y_p + X_p$, onde $Y_p \in \ker \lambda|_p$ e $X_p \in d\lambda|_p$. Logo

$$\begin{aligned}\lambda|_p(W_p) &= \lambda|_p(Y_p + X_p) \\ &= \lambda|_p(Y_p) + \lambda|_p(X_p) \\ &= 0 + \lambda|_p(X_p) \quad (Y_p \in \ker \lambda|_p)\end{aligned}$$

e, assim, $\lambda|_p(X_p) = \lambda|_p(W_p) = 1$, com $X_p \in \ker d\lambda|_p$.

Para ver que é único, suponha que existe $\tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p$ tal que $\lambda|_p(\tilde{X}_p) = 1$. Então

$$\begin{aligned}\lambda|_p(X_p) &= \lambda|_p(\tilde{X}_p) = 1 \\ \lambda|_p(X_p - \tilde{X}_p) &= 0,\end{aligned}$$

logo $X_p - \tilde{X}_p \in \ker \lambda|_p$, e como $X_p, \tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p$ temos $X_p - \tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p$, portanto, $X_p - \tilde{X}_p \in \ker d\lambda|_p \cap \ker \lambda|_p = \{0\}$, ou seja, $X_p = \tilde{X}_p$. Por último, como $p \in M$ é arbitrário e $i_{X_p} \lambda|_p = \lambda|_p(X_p) = 1$ e $X_p \in \ker d\lambda|_p$ ($i_{X_p} d\lambda|_p = d\lambda|_p(X_p, \cdot) = 0$), temos que

$$\begin{cases} i_X d\lambda = 0 \\ i_X \lambda = 1, \end{cases}$$

portanto, X é o campo de Reeb associado à forma de contato λ em M .

□

Exemplo 2.52 A 1-forma

$$\lambda_0 = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i,$$

onde $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ são coordenadas em $\mathbb{R}^{2n+1}$ é uma forma de contato em $\mathbb{R}^{2n+1}$. De fato, pois

$$\begin{aligned}d\lambda_0 &= d(dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i) \\ &= d(dz) + \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge dy_i + x_i \wedge d(dy_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i \quad (d^2 = 0),\end{aligned}$$

logo

$$(d\lambda_0)^n = n!(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n).$$

Por último,

$$\begin{aligned}\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n &= (dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i) \wedge n!(dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n) \\ &= n!(dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n),\end{aligned}$$

então $\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n$ nunca se anula e, assim, λ_0 é uma forma de contato em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Exemplo 2.53 A 1-forma $\alpha = (\cos z)dx + (\sin z)dy$ onde (x, y, z) são coordenadas em $\mathbb{R}^3$ é uma forma de contato em $\mathbb{R}^3$. De fato

$$d\alpha = (\sin z)dx \wedge dz - (\cos z)dy \wedge dz,$$

logo

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha &= ((\cos z)dx + (\sin z)dy) \wedge ((\sin z)dx \wedge dz - (\cos z)dy \wedge dz) \\ &= (\sin z)^2 dy \wedge dx \wedge dz - (\cos z)^2 dx \wedge dy \wedge dz \\ &= -dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

então $\alpha \wedge d\alpha$ nunca se anula e, assim, α é uma forma de contato em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.54 A 1-forma $\alpha = (\cos r)dz + r(\sin r)d\theta$ onde (r, θ, z) são coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$ é uma forma de contato em $\mathbb{R}^3$. Para a prova ver [2].

Definição 2.55 Uma estrutura de contato em uma variedade M é uma distribuição $\xi \subset TM$ de codimensão 1 localmente definida por formas de contato. O par (M, ξ) é dito uma variedade de contato.

Observação 2.56 Se λ é forma de contato em M , então

$$\xi := \ker \lambda$$

é estrutura de contato.

Definição 2.57 Sejam $(M_1, \xi_1), (M_2, \xi_2)$ variedades de contato. Dizemos que um difeomorfismo $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um contactomorfismo se $\varphi_*\xi_1 = \xi_2$.

Capítulo 3

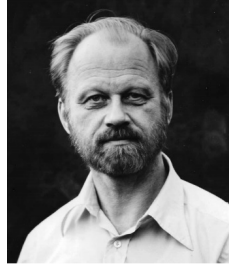
O Truque de Moser e Teoremas de Formas Normais

3.1 O Truque de Moser

Jürgen Kurt Moser (Konigsberg 1928 - Schwerzenbach 1999) foi um matemático alemão - estadunidense cuja pesquisa teve um efeito profundo na matemática, assim como na astronomia e na física. Ele fez contribuições profundas e importantes para uma gama extremamente ampla de questões em sistemas dinâmicos e mecânica celeste, equações diferenciais parciais, análise funcional não linear, geometria diferencial e complexa e o cálculo de variações.

Moser nasceu em Königsberg, Alemanha no ano 1928. Aos 15 anos foi recrutado em uma força auxiliar militar, que o ajudou a ele nesses momentos difíceis foi o hábito de buscar refúgio na matemática que ele desenvolveu pela primeira vez no quartel. “Eu me esqueci do mundo exterior e pensei em um problema matemático que inventei e tentei resolver na minha cabeça”, lembrou ele. “Isso foi muito reconfortante, os policiais poderiam gritar comigo o que quisessem.” Após a guerra, ele passou dois anos terminando o ensino médio no que, mais tarde, se tornou a Alemanha Oriental. Ele fugiu para o oeste em 1947 para estudar em Göttingen.

Uma Bolsa Fulbright permitiu que o Dr. Moser passasse um ano em Nova York. Depois ele retornaria brevemente a Göttingen para trabalhar como assistente de Siegel, escrevendo um livro sobre mecânica celeste com seu mentor. Em setembro de 1955, voltou a N.Y.U. e se casou com Gertrude Courant. Dois anos depois, ele aceitou um cargo no M.I.T. Tornou-se cidadão dos EUA em 1959 e, um ano depois, aceitou uma oferta para retornar ao Instituto Courant como professor. Em 1965 publicou seu artigo “On the volume elements on a manifold” onde ele usou o truque de Moser pela primeira vez. Em 1967, assumiu a direção do Instituto Courant de Ciências Matemáticas, servindo três anos, e no ano 1984 foi diretor do Instituto de Investigação de Matemática da ETH. Aposentou-se em 1995, ano em que recebeu o prêmio Wolf de matemática. Ele também serviu como presidente da União Internacional de Matemática de 1983 a 1986. O Dr. Moser morreu em Schwerzenbach, Suíça no ano 1999.



O truque de Moser foi usado por Moser, como mencionamos na biografia, em um de seus artigos “On the volume elements on a manifold”, publicado em 1965, para provar que em qualquer variedade orientável compacta, quaisquer duas formas de volume normalizadas são equivalentemente difeomórficas. Este teorema será enunciado a seguir:

Teorema 3.1 *Seja M variedade compacta, conexa e orientada de dimensão n . Sejam $\tau_0, \tau_1 \in \Omega^n(M)$ formas de volume tais que*

$$\int_M \tau_0 = \int_M \tau_1.$$

Então existe um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ tal que $\varphi^ \tau_1 = \tau_0$.*

Demonstração.

Definamos a família de n -formas em M dada pelas combinações convexas de τ_1 e τ_0

$$\tau_t = (1 - t)\tau_0 + t\tau_1, \quad t \in [0, 1],$$

notando que cada τ_t é forma de volume e $d\tau_t = 0$ pois, o grau $d\tau = n + 1 > n = \dim M$. A hipótese de que τ_0 e τ_1 tem a mesma integral sobre M assegura que essas formas são comohomólogas, ou seja, existe $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ tal que $\tau_1 = \tau_0 + d\beta$, de modo que

$$\begin{aligned} \tau_t &= (1 - t)\tau_0 + t\tau_1 \\ &= (1 - t)\tau_0 + t(\tau_0 + d\beta) \\ &= \tau_0 + td\beta. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Queremos encontrar uma isotopia $\varphi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, tal que $\varphi_0 = id$ e

$$\varphi_t^* \tau_t = \tau_0, \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{3.2}$$

Desta forma φ_1 satisfaz $\varphi_1^* \tau_1 = \tau_0$.

A isotopia será obtida integrando-se um campo de vetores X_t , $t \in M$. Para isto, derivemos (3.2)

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* \tau_t) &= \varphi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \tau_t + \frac{d\tau_t}{dt} \right) && \text{(do Lema 1.77)} && (3.3) \\ &= \varphi_t^* (i_{X_t} d\tau_t + di_{X_t} \tau_t + \frac{d}{dt}(\tau_0 + td\beta)) && \text{(Teorema 1.6 iii) e (3.1))} \\ &= \varphi_t^* (di_{X_t} \tau_t + d\beta) && (d\tau_t = 0) \\ &= \varphi_t^* (d(i_{X_t} \tau_t + \beta)). \end{aligned}$$

Então, para poder ter $\varphi_t^*(d(i_{X_t}\tau_t + \beta)) = 0$, devemos encontrar X_t , $t \in [0, 1]$, satisfazendo $d(i_{X_t}\tau_t + \beta) = 0$, ou seja,

$$i_{X_t}\tau_t + \beta = 0. \quad (3.4)$$

Como τ_t é uma forma de volume, a aplicação $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^{n-1}(M)$, $X \mapsto i_X\tau_t$, é um isomorfismo para cada t . Portanto, para cada t , (3.4) tem solução única. O fluxo de X_t define uma isotopia φ_t satisfazendo $\varphi_t^*\tau_t = \tau_0$, por ultimo, tomando $\varphi = \varphi_1$ temos o difeomorfismo desejado.

□

O truque de Moser consiste essencialmente na forma na qual foi obtido o difeomorfismo φ na demonstração do Teorema 3.1. Veremos como este método será usado nas demonstrações dos teorema de formas normais, e assim veremos que ele é peça fundamental na demonstração de vários resultados de rigidez local. Neste trabalho nos centraremos em três destes resultados, os quais são o Teorema de Darboux para Forma Simpléticas, o Teorema de Darboux para Formas de Contato, e o Teorema da Vizinhança Lagrangiana. O Truque de Moser aproveita as principais características de uma forma simplética e formas de contato para mostrar a equivalência de estruturas simpléticas e de contato respectivamente.

3.2 O Teorema de Darboux - Formas Simpléticas

O seguinte teorema, chamado o Teorema de Darboux, nos diz que variedades simpléticas não possuem invariantes locais, isto é, localmente todas elas são symplectomorfas ao espaço simplético padrão $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. O teorema de Darboux foi provado pela primeira vez, em uma forma ligeiramente diferente, por Gaston Darboux em 1882, em conexão com seu trabalho sobre equações diferenciais ordinárias que surgem na mecânica clássica.

Teorema 3.2 (Darboux) *Seja (W, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e seja $p \in W$. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ munido da forma simplética canônica ω_0 (2.1). Então existem vizinhanças $U \subset W$ de p , $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e um symplectomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $\varphi(p) = 0$ e $\varphi^*\omega_0 = \omega$.*

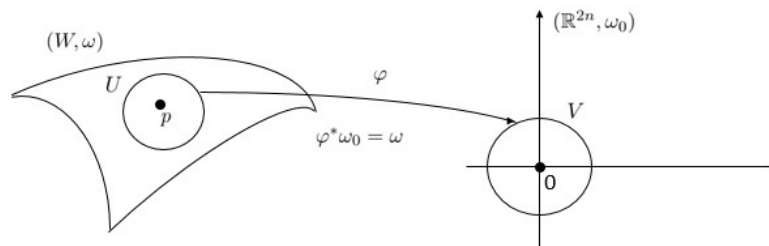


Figura 3.1: Symplectomorfismo φ

Demonstração.

Como W é uma variedade diferencial e $p \in W$, existe um homeomorfismo $\psi : U_1 \rightarrow V$,

onde $U_1 \subset W$ vizinhança de p , $V = \psi(U_1) \subset \mathbb{R}^{2n}$ vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\psi(p) = 0$. Além disso, como $\psi^{-1} : V \rightarrow U_1$ e $\omega \in \Omega^2(U_1)$, temos $\Omega = (\psi^{-1})^*\omega \in \Omega^2(V)$ (Figura 3.2). Por outro lado, como T_0V é um espaço vetorial real e $\Omega|_0$ é forma bilinear antissimétrica

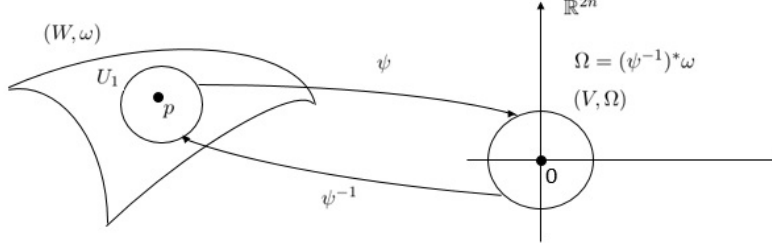


Figura 3.2: Amplificação ψ

e não degenerada temos que $(T_0V, \Omega|_0)$ é um espaço vetorial simplético. Da Proposição 2.19, existe

$$M : (T_0V, \Omega|_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0), \text{ com } M(0) = 0 \text{ e } \Omega|_0 = M^*\omega_0.$$

Como $T_0V \approx \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$M : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega|_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0), \text{ com } M(0) = 0 \text{ e } \Omega|_0 = M^*\omega_0,$$

além disso, como $M^{-1} : M(V) \rightarrow V$ e $\Omega \in \Omega^2(V)$ temos $\Omega' = (M^{-1})^*\Omega \in \Omega^2(M(V))$ (Figura 3.3).

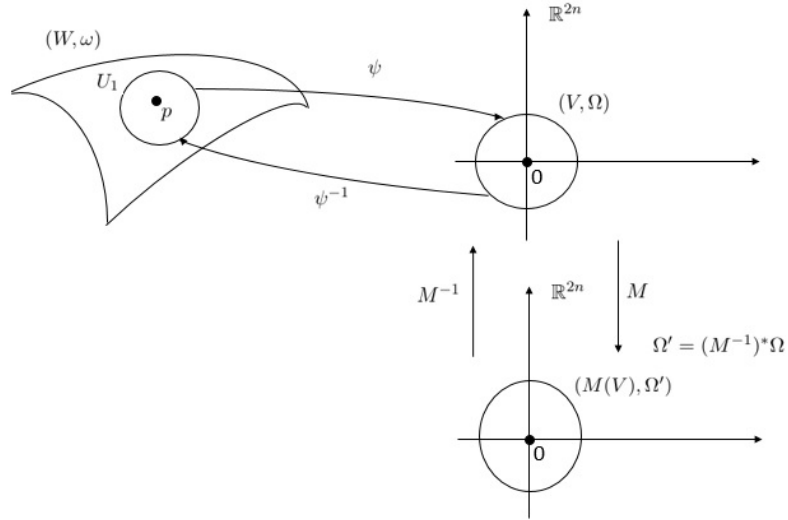


Figura 3.3: Aplicação M

Como $\Omega|_0 = M^*\omega_0$, temos

$$\begin{aligned} \Omega|_0(\alpha, \beta) &= M^*\omega_0(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{2n} \\ &= \omega_0(M\alpha, M\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{definição de } M^*) \end{aligned}$$

trocando α com $M^{-1}\alpha$ e β com $M^{-1}\beta$ temos

$$\Omega|_0(M^{-1}\alpha, M^{-1}\beta) = \omega_0(\alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.5)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \Omega'|_0(u, v) &= ((M^{-1})^*\Omega)|_0(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \\
 &= \Omega|_{M^{-1}(0)}(M^{-1}u, M^{-1}v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{definição de } (M^{-1})^*) \\
 &= \Omega|_0(M^{-1}u, M^{-1}v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \\
 &= \omega_0(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{de 3.5}),
 \end{aligned}$$

então $\Omega'|_0 = \omega_0$.

Se conseguirmos Ψ um symplectomorfismo tal que $\Psi(0) = 0$ e $\Psi^*\omega_0 = \Omega'$, teremos

$$\begin{aligned}
 \Psi^*\omega_0 &= \Omega' \\
 &= (M^{-1})^*\Omega \\
 &= (M^{-1})^*(\psi^{-1})^*\omega \\
 (\psi)^*(M)^*\Psi^*\omega_0 &= \omega \\
 (\Psi \circ M \circ \psi)^*\omega_0 &= \omega.
 \end{aligned}$$

Tomando $\varphi = \Psi \circ M \circ \psi$, vamos ter um symplectomorfismo φ tal que $\varphi^*\omega_0 = \omega$ e $\varphi(p) = (\Psi \circ M \circ \psi)(p) = \Psi(M(\psi(p))) = \Psi(M(0)) = \Psi(0) = 0$ e o Teorema ficaria demonstrada. Então vamos mostrar que existe esse symplectomorfismo. Temos duas formas simpléticas ω_0 e Ω' definidas em uma vizinhança $\mathcal{U} = M(V)$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ tais que $\omega_0|_0 = \Omega'|_0$, isto é, $(\omega_0 - \Omega')|_0 = 0$.

Por uma versão do Lema de Poincaré (Teorema 1.82), existem $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ vizinhança de 0, e 1-forma μ definida em $\mathcal{U}_0$, tais que $(\omega_0 - \Omega')|_{\mathcal{U}_0} = d\mu$ e $\mu|_0 = 0$. Seja

$$\begin{aligned}
 \Omega_t &= (1-t)\Omega' + t\omega_0 \\
 &= \Omega' + t(\omega_0 - \Omega') \\
 &= \Omega' + td\mu, \quad t \in [0, 1].
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Além disso, de $(\omega_0 - \Omega')|_{\mathcal{U}_0} = d\mu$ e $(\omega_0 - \Omega')|_0 = 0$, temos $d\mu|_0 = 0$. Portanto, podemos diminuir $\mathcal{U}_0$ a $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$, se necessário, de modo que para cada $p \in \mathcal{U}_1$, $\Omega_t|_p$ seja simplética para todo $t \in [0, 1]$. De fato, para $t = 0$ temos

$$(\Omega_0|_0)^n = (\Omega'|_0)^n = (\omega_0)^n \neq 0 \quad (\text{pois } \omega_0 \text{ é simplética e do Lema 2.23}).$$

Logo, do Lema 2.23, temos que $\Omega_0|_0$ é simplético. Por outro lado, da continuidade de Ω_t em t e diferenciabilidade de Ω_t , existe $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$ tal que $(\Omega_t|_p)^n \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \forall p \in \mathcal{U}_1$, logo Ω_t é simplético em $\mathcal{U}_1$ para todo $t \in [0, 1]$.

Por outro lado, afirmamos que, para $p \in \mathcal{U}_1$ e para todo $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 \Omega_t|_p : T_p\mathcal{U}_1 &\rightarrow T_p^*\mathcal{U}_1 \\
 u &\mapsto \Omega_t|_p(u, \cdot)
 \end{aligned}$$

é isomorfismo. De fato, como $\Omega_t|_p(u, \cdot) = 0$, temos que $u = 0$, pois $\omega_t|_p$ é não degenerada, portanto, $Nu(\Omega_t|_p) = \{0\}$ e, assim, $\Omega_t|_p$ é injetiva. Como $\dim(T_p\mathcal{U}_1) = \dim(T_p^*\mathcal{U}_1)$, temos que $\Omega_t|_p$ é sobrejetiva, logo $\Omega_t|_p$ é isomorfismo.

Então, dado $-\mu|_p \in T_p^*\mathcal{U}_1$, existe um único $X_t|_p \in T_p\mathcal{U}_0$ tal que

$$\begin{aligned}
 \Omega_t|_p(X_t|_p, \cdot) &= -\mu|_p \\
 i_{X_t|_p}\Omega_t|_p &= -\mu|_p,
 \end{aligned}$$

logo como tomamos $p \in \mathcal{U}_1$ qualquer, temos

$$i_{X_t}\Omega_t = -\mu, \quad (3.7)$$

para todo $t \in [0, 1]$ em $\mathcal{U}_1$ e depende suavemente de t .

Agora, note que $X_t|_0 = 0, \forall t \in [0, 1]$. De fato,

$$\begin{aligned} i_{X_t|_0}\Omega_t|_0 &= -\mu|_0 \\ \Omega_t|_0(X_t|_0, \cdot) &= 0 \quad (\Omega_t \text{ é não degenerada}) \\ X_t|_0 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, para $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ suficientemente pequena, podemos integrar X_t até $t = 1$ e obter uma isotopia $\rho_t : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$, $t \in [0, 1]$, satisfazendo $\rho_0 = id$, $\frac{d\rho_t}{dt} = X_t \circ \rho_t$ e $\rho_t(0) = 0$ (a partir de (1.2) e da definição de isotopia).

Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_t^*\Omega_t &= \rho_t^*\left(\frac{d\Omega_t}{dt} + \mathcal{L}_{X_t}\Omega_t\right) && \text{(do Lema 1.77)} \\ &= \rho_t^*\left(\frac{d}{dt}(\Omega' + t d\mu) + \mathcal{L}_{X_t}\Omega_t\right) && \text{(de (3.6))} \\ &= \rho_t^*(d\mu + \mathcal{L}_{X_t}\Omega_t) \\ &= \rho_t^*(d\mu + d(i_{X_t}\Omega_t) + i_{X_t}d\Omega_t) && \text{(Teorema 1.75 iii)} \\ &= \rho_t^*(d\mu + d(i_{X_t}\Omega_t) + i_{X_t}0) && (\Omega_t \text{ é simplética}) \\ &= \rho_t^*d(\mu + i_{X_t}\Omega_t) \\ &= \rho_t^*d(\mu - \mu) && \text{(de (3.7))} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos $\frac{d}{dt}\rho_t^*\Omega_t = 0$ e integrando temos

$$\rho_t^*\Omega_t = c, \quad c \text{ constante,}$$

tomando $t = 0$

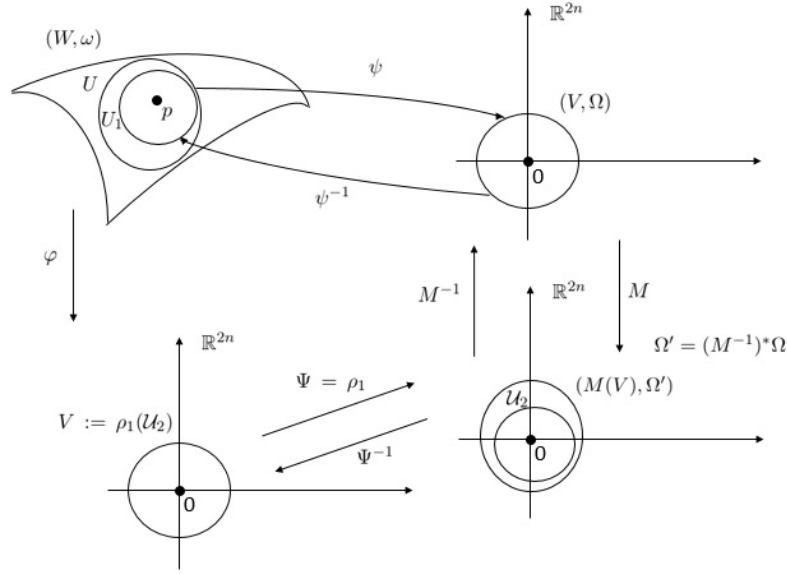
$$\begin{aligned} \rho_0^*\Omega_0 &= c \\ id\Omega' &= c \\ \Omega' &= c, \end{aligned}$$

então $\rho_t^*\Omega_t = \Omega'$. Agora, tomando $t = 1$, temos $\rho_1^*\Omega_1 = \Omega'$, isto é, $\rho_1^*\omega_0 = \Omega'$ com $\rho_1 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \rho_1(\mathcal{U}_2) \subset \mathcal{U}_1$ e $\rho_1(0) = 0$. Tomando $U := (\psi^{-1} \circ M^{-1})(\mathcal{U}_2)$, $V := \rho_1(\mathcal{U}_2)$ e $\Psi = \rho_1$ (Figura 3.4), concluímos a demonstração.

□

3.3 O Teorema de Darboux - Formas de contato

O Teorema de Darboux 3.2 para formas simpléticas nos diz que variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente symplectomorfas. Veremos que o mesmo tipo de flexibilidade local vale em geometria de contato. Veremos que toda estrutura de contato em uma vizinhança de uma variedade de dimensão $2n + 1$ tem o mesmo comportamento que a estrutura de contato canônica em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Figura 3.4: Aplicação ρ_1

Teorema 3.3 (Darboux - formas de contato) *Seja λ uma forma de contato em uma variedade M sem bordo de dimensão $2n + 1$. Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ tal que nessas coordenadas $p = (0, \dots, 0)$ e $\lambda|_U \simeq dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$.*

Demonstração.

Seja $U_0 \subset M$ uma vizinhança aberta de p com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ tal que $p = (0, \dots, 0)$. Sabemos que $T_p M = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ e, do Lema 2.49, temos $T_p M = \ker \lambda|_p \oplus d\lambda|_p$, com $\dim(\ker \lambda|_p) = 2n$ e $\dim(\ker d\lambda|_p) = 1$, portanto, por uma mudança de coordenadas linear em $\mathbb{R}^{2n+1}$, podemos assumir que $\ker \lambda|_p = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, i = 1 \dots n\}$, $\frac{\partial}{\partial z} \in \ker d\lambda|_p$ e $\lambda|_p(\frac{\partial}{\partial z}) = 1$. Mais ainda, como $(\ker \lambda|_p, d\lambda|_p)$ é um espaço simplético, pela Proposição 2.19, temos que $(\ker \lambda|_p, d\lambda|_p)$ é symplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, ou seja, $d\lambda|_p = \sum_{i=1}^n ds_i \wedge dr_i$, onde $(s_1, \dots, s_n, r_1, \dots, r_n)$ são coordenadas em $\ker \lambda|_p$. Podemos também assumir, por uma nova transformação linear, que $d\lambda|_p = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$, logo $\lambda|_p = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$.

Seja agora λ_0 a 1-forma em U_0 escrita nestas coordenadas como $dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$, isto é,

$$\lambda_0|_q = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i, \forall q \in U_0, \text{ portanto, } d\lambda_0|_q = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i, \forall q \in U_0, \text{ em particular,}$$

como $p \in U_0$, temos $\lambda_0|_p = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$ e $d\lambda_0|_p = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$, a qual é uma forma de contato em U , pois $\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n$ nunca se anula em U_0 . Temos então duas formas de contato λ e λ_0 em U_0 com $\lambda|_p = \lambda_0|_p$ e $d\lambda|_p = d\lambda_0|_p$.

Seja $\lambda_t = (1 - t)\lambda_0 + t\lambda$, $t \in [0, 1]$, a família de 1-formas em U_0 dada pelas combinações

convexas de λ e λ_0 . Pela observação anterior,

$$\begin{aligned}\lambda_t|_p &= ((1-t)\lambda_0 + t\lambda)|_p \\ &= (1-t)\lambda_0|_p + t\lambda|_p \\ &= (1-t)\lambda_0|_p + t\lambda|_0 \quad (\lambda_0|_p = \lambda|_p) \\ &= \lambda_0|_p,\end{aligned}$$

então $\lambda_t|_p = \lambda_0|_p = \lambda|_p$ e $d\lambda_t|_p = d\lambda_0|_p = d\lambda|_p$. Temos então $(\lambda_t \wedge (d\lambda_t)^n)|_{t=0} = \lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n$ nunca se anula. Pela continuidade de $\lambda_t \wedge (d\lambda_t)^n$ e a compacidade de $[0, 1]$, temos que existe uma vizinhança $U_1 \subset U_0$ suficientemente pequena de p , tal que $\lambda_t \wedge (d\lambda_t)^n$ nunca se anula em U_1 , para todo $t \in [0, 1]$, portanto, λ_t é uma forma de contato em U_1 , para todo $t \in [0, 1]$.

Queremos encontrar uma vizinhança $U_2 \subset U_1$ suficientemente pequena de p e uma isotopia $\rho_t : U_2 \rightarrow U_1$, $t \in [0, 1]$, tal que $\rho_0 = id$,

$$\rho_t(p) = p \text{ e } \rho_t^* \lambda_t = \lambda_0, \forall t \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

Desta forma ρ_1 satisfaz $\rho_1^* \lambda = \lambda_0$, e basta tomarmos coordenadas em $U := \rho_1(U_2)$ dadas por $\bar{x}_i = x_i \circ \rho_1^{-1}$, $\bar{y}_i = y_i \circ \rho_1^{-1}$ e $\bar{z} = z \circ \rho_1^{-1}$ para obtermos $\lambda = d\bar{z} + \sum_{i=1}^n \bar{x}_i d\bar{y}_i$ e concluir a demonstração (Figura 3.5).

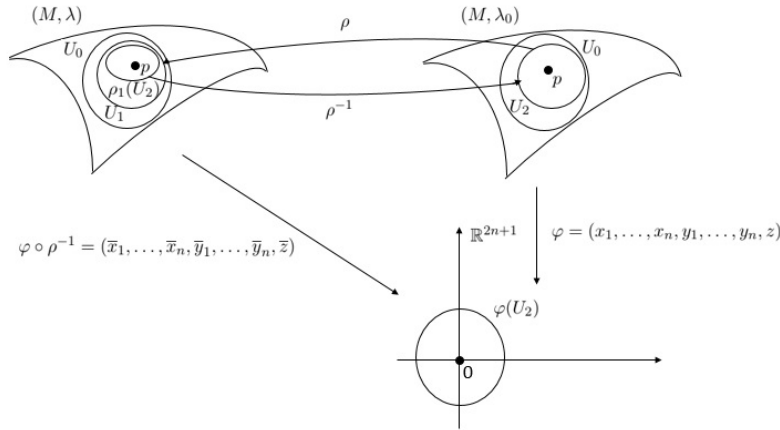


Figura 3.5: Aplicação $\varphi \circ \rho^{-1}$

A isotopia será obtida integrando-se um campo de vetores X_t , $t \in [0, 1]$ em U_1 . Para ver que forma deveria ter X_t , derivemos (3.8)

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{dt}(\rho_t^* \lambda_t) &= \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \lambda_t + \frac{d\lambda_t}{dt} \right) && \text{(do Lema 1.77)} \quad (3.9) \\ &= \rho_t^* (i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \frac{d}{dt}((1-t)\lambda_0 + t\lambda)) && \text{(Teorema 1.6 iii)} \\ &= \rho_t^* (i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0).\end{aligned}$$

Então, para poder ter $\rho_t^* (i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0) = 0$, devemos encontrar X_t , $t \in [0, 1]$, satisfazendo

$$i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0 = 0. \quad (3.10)$$

Como $X_t|_q \in T_q M = \ker d\lambda|_q \oplus \ker \lambda|_q$, $\forall q \in U_1$, temos $X_t = A_t R_t + B_t$, onde R_t com $R_t|_q \in \ker d\lambda_t|_q$, $\forall q \in U_1$, é o campo de Reeb de λ_t (ou seja, $i_{R_t} d\lambda_t = 0$ e $i_{R_t} \lambda_t = 1$), isto vem do Lema 2.51, $B_t \in \ker \lambda_t$ em U_1 para cada $t \in [0, 1]$ e A_t é uma família de funções. Calculando (3.10) em R_t , obtemos

$$\begin{aligned}
i_{R_t}(i_{X_t} d\lambda_t + di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0) &= 0 \\
i_{R_t}(i_{X_t} d\lambda_t) + i_{R_t}(di_{X_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0) &= 0 \\
i_{R_t}(d\lambda_t(X_t, \cdot)) + i_{R_t}(d(\lambda_t(X_t)) + \lambda - \lambda_0) &= 0 \quad (\text{da definição de } i) \\
0 + i_{R_t}(d(\lambda_t(A_t R_t + B_t)) + \lambda - \lambda_0) &= 0 \quad (i_{R_t} d\lambda_t = 0) \\
i_{R_t}(d(A_t \lambda_t(R_t) + \lambda_t(B_t)) + \lambda - \lambda_0) &= 0 \\
i_{R_t}(d(A_t i_{R_t} \lambda_t) + \lambda - \lambda_0) &= 0 \quad (B_t \in \ker \lambda_t) \\
i_{R_t}(dA_t + \lambda - \lambda_0) &= 0 \quad (i_{R_t} \lambda_t = 1) \\
i_{R_t} dA_t &= i_{R_t}(\lambda_0 - \lambda),
\end{aligned}$$

logo denotando por $f_t = i_{R_t}(\lambda_0 - \lambda)$, temos

$$f_t = i_{R_t} dA_t. \quad (3.11)$$

Esta é uma família suave a 1-parâmetro $t \in [0, 1]$ de equações lineares a derivadas parciais de primeira ordem não homogêneas para a família de funções A_t . É sempre possível, através do método das curvas características, encontrar uma família suave de soluções A_t , $t \in [0, 1]$, em U_1 desde que U_1 seja uma vizinhança suficientemente pequena de p . Note que podemos também assumir que $A_t|_p = dA_t|_p = 0$ para todo $t \in [0, 1]$; veja o Lema 3.5. Encontraremos agora a componente B_t de X_t . De (3.10) temos também

$$\begin{aligned}
i_{A_t R_t + B_t} d\lambda_t + di_{A_t R_t + B_t} \lambda_t + \lambda - \lambda_0 &= 0 \quad (X_t = A_t R_t + B_t) \\
d\lambda_t(A_t R_t + B_t, \cdot) + d(\lambda_t(A_t R_t + B_t, \cdot) + \lambda - \lambda_0) &= 0 \quad (\text{da definição de } i) \\
A_t d\lambda_t(R_t, \cdot) + d\lambda_t(B_t, \cdot) + d(A_t \lambda_t(R_t, \cdot) + \lambda_t(B_t, \cdot)) + \lambda - \lambda_0 &= 0 \\
A_t i_{R_t} d\lambda_t + i_{B_t} d\lambda_t + d(A_t i_{R_t} \lambda_t + 0) + \lambda - \lambda_0 &= 0 \quad (B_t \in \ker \lambda_t) \\
i_{B_t} d\lambda_t + d(A_t i_{R_t} \lambda_t) + \lambda - \lambda_0 &= 0 \quad (i_{R_t} d\lambda_t = 0) \\
i_{B_t} d\lambda_t + dA_t + \lambda - \lambda_0 &= 0 \quad (i_{R_t} \lambda_t = 1). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}
(d\lambda_t)^+ : \ker \lambda_t &\rightarrow (\ker \lambda_t)^* \\
v &\longmapsto i_v d\lambda_t = d\lambda_t(v, \cdot).
\end{aligned}$$

Notamos que $(d\lambda_t)^+$ é injetiva, pois se $d\lambda_t(v, u) = 0$, $\forall u \in \ker \lambda_t$, temos que $v = 0$, afinal, $d\lambda_t$ é não degenerada em $\ker \lambda_t$. Então $\ker((d\lambda_t)^+) = \{0\}$, que significa que $(d\lambda_t)^+$ é injetiva, além disso, temos $\dim(\ker \lambda_t) = \dim(\ker \lambda_t)^*$, logo $(d\lambda_t)^+$ é um isomorfismo. Por outro lado, como $-(dA_t + \lambda - \lambda_0)|_q \in (T_q M)^*$ e $\ker \lambda_t|_q \subset T_q M$, $\forall q \in U_1$, temos $-(dA_t + \lambda - \lambda_0)|_{\ker \lambda_t} \in (\ker \lambda_t)^*$, e como $(d\lambda_t)^+$ é isomorfismo, existe um único $v \in \ker \lambda_t$, tal que $i_v d\lambda_t = -(dA_t + \lambda - \lambda_0)$, restringindo (3.12) a $\ker \lambda_t$, obtemos finalmente $v = B_t$, $t \in [0, 1]$, que fica unicamente determinado.

O campo X_t assim definido é tal que $X_t|_p = 0$, para todo $t \in [0, 1]$. De fato, pois de (3.12)

temos

$$\begin{aligned}
i_{B_t} d\lambda_t &= -(dA_t + \lambda - \lambda_0) \\
i_{B_t} d\lambda_t|_p &= -(dA_t + \lambda - \lambda_0)|_p \\
(d\lambda_t(B_t, \cdot))|_p &= -dA_t|_p - \lambda|_p + \lambda_0|_p \\
((1-t)d\lambda_0 + t\lambda)|_p(B_t|_p, \cdot) &= 0 \quad (dA_t|_p = 0, \lambda|_p = \lambda_0|_p) \\
((1-t)d\lambda_0|_p + t\lambda|_p)(B_t|_p, \cdot) &= 0 \\
(d\lambda_0|_p)(B_t|_p, \cdot) &= 0 \\
B_t|_p &= 0 \quad (d\lambda_0|_p \text{ não degenerada}).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
X_t|_p &= (A_t R_t + B_t)|_p \\
&= A_t|_p R_t|_p + B_t|_p \\
&= 0 \quad (A_t|_p = 0, B_t|_p = 0)
\end{aligned}$$

temos então $X_t|_p = 0$ e, portanto, a isotopia ρ_t , obtida integrando-se X_t , deixa p fixo. Mais ainda, em uma vizinhança $U_2 \subset U_1$ suficientemente pequena, $\rho_t|_{U_2}$ está definida para todo $t \in [0, 1]$, com valores em U_1 e satisfaz $\frac{d}{dt}(\rho_t^* \lambda_t) = 0$. Em vista de (3.9) integrando este último temos

$$\rho_t^* \lambda_t = c, \quad c \text{ constante}, \quad (3.13)$$

tomando $t = 0$

$$\begin{aligned}
\rho_0^* \lambda_0 &= c \\
id\lambda_0 &= c \\
\lambda_0 &= c,
\end{aligned}$$

então $\rho_t^* \lambda_t = \lambda_0$. Agora, tomando $t = 1$ temos $\rho_1^* \lambda_1 = \lambda_0$, isto é, $\rho_1^* \lambda = \lambda_0$. Isso completa a demonstração.

□

Corolário 3.4 *Sejam M_1, M_2 variedades de mesma dimensão com formas de contato λ_1, λ_2 , respectivamente. Então para quaisquer dois pontos $p_i \in M$, $i = 1, 2$, existem vizinhanças $U_i \subset M_i$ de p_i e um difeomorfismo $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ satisfazendo $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi^* \lambda_2 = \lambda_1$.*

Lema 3.5 *Considere funções suaves $b_1, \dots, b_k, f$ definidas em uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{R}^k$. Se b_k não se anula em $V \cap \{x_k = 0\}$, então dada qualquer função u_0 definida perto de $0 \in \mathbb{R}^{k-1}$ existe uma “única” solução $u(x_1, \dots, x_k)$ de*

$$\sum_{i=1}^k b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f,$$

satisfazendo $u(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) = u_0(x_1, \dots, x_{k-1})$.

3.4 O Teorema da Vizinhança Lagrangiana

Definição 3.6 *Seja (M, ω) uma variedade simplética, uma subvariedade Y de M é uma subvariedade lagrangiana se, para todo $p \in Y$, $T_p Y$ é um subespaço lagrangiano de $T_p M$, i.e., $\omega_p|_{T_p Y} \equiv 0$ e $\dim T_p Y = \frac{1}{2} \dim T_p M$.*

Definição 3.7 *Uma estrutura complexa em um espaço vetorial V é um automorfismo $J : V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -\text{id}$. Com tal estrutura V torna-se um espaço vetorial complexo por $i = \sqrt{-1}$ correspondendo a J*

$$\mathbb{C} \times V \rightarrow V : (s + it, v) \mapsto sv + tJv.$$

Em particular, V é necessariamente de dimensão par sobre os reais. Denotamos o espaço de estruturas complexas em V por $\mathcal{J}(V)$.

Definição 3.8 *Seja M uma variedade $2n$ -dimensional real. Uma estrutura quase complexa em M é uma estrutura complexa J no fibrado tangente TM . Um 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ é dita compatível com J se é compatível com J como uma forma bilinear simplética no fibrado vetorial TM . Isto significa que a forma bilinear*

$$\langle v, w \rangle = \omega(v, Jw)$$

define uma métrica Riemanniana em M . Uma métrica Riemanniana $g(v, w) = \langle v, w \rangle$ é dita compatível com J se

$$\langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle$$

para $v, w \in T_q M$. Neste caso a 2-forma $\omega(v, w) = \langle Jv, w \rangle$ é não degenerada e compatível com J e o triplo (ω, J, g) é dito compatível. Assim existe uma correspondência bijetiva de 2-formas não degeneradas compatíveis com J e métricas Riemannianas compatíveis com J .

Lema 3.9 *Sejam M uma variedade de dimensão $2n$ e $Q \subset M$ uma subvariedade compacta. Suponha que os $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ são 2-formas fechadas tais que em cada ponto q de Q as formas ω_0 e ω_1 são iguais e não degeneradas em $T_q M$. Então existem vizinhanças abertas $\mathcal{N}_0$ e $\mathcal{N}_1$ de Q e um difeomorfismo $\psi : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{N}_1$ tal que*

$$\phi|_Q = \text{id}, \quad \phi^* \omega_1 = \omega_0.$$

Observação 3.10 *Tomando Q como um ponto em M no Lema 3.9, obtemos o Teorema de Darboux para Formas Simpléticas (Teorema 3.2).*

Lema 3.11 *Seja L uma subvariedade n -dimensional da variedade M . Então*

$$T_{(q,0)} T^* L \cong T_q L \oplus T_q^* L.$$

Demonstração.

Escolhemos coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em uma vizinhança de $q \in L$, de modo que $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ são coordenadas correspondentes em $T^* L$. Sabemos que o fibrado

cotangente T^*M tem projeção natural $\pi^* : TM \rightarrow M$, logo temos seu diferencial $(\pi^*)_* : T(T^*M) \rightarrow TM$, note que

$$\ker((\pi^*)_*) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}.$$

Por outro lado, como $T_q^*L \cong T_{(q,0)}(T_q^*L)$ e $T_{(q,0)}(T_q^*L) \cong \ker((\pi^*)_*)$, existe um isomorfismo

$$\phi : T_q^*L \rightarrow \ker((\pi^*)_*) \subset T(T^*M),$$

portanto existe

$$\phi^{-1} : \ker((\pi^*)_*) \subset T(T^*M) \rightarrow T_q^*L.$$

Como $T_{(q,0)}(T^*L) \subset T_{(q,0)}(T^*M)$ e $T_{(q,0)}(T_q^*L) \cong \ker((\pi^*)_*)$ teremos

$$\pi_*|_{T_{(q,0)}(T^*L)} : T_{(q,0)}(T^*L) \rightarrow T_qL.$$

Podemos definir

$$\begin{aligned} \Psi : T_{(q,0)}(T^*L) &\rightarrow T_qL \oplus T_q^*L \\ v &\mapsto \Psi(v) = ((\pi^*)_*(v), \phi^{-1}(v)) \end{aligned}$$

que é um isomorfismo, logo $T_{(q,0)}(T^*L) \cong T_qL \oplus T_q^*L$.

□

Teorema 3.12 (Teorema da Vizinhança Lagrangiana) *Seja (M, ω) uma variedade simplética e $L \subset M$ uma subvariedade Lagrangiana compacta. Então existem uma vizinhança $L_0 \subset T^*L$ da seção nula, uma vizinhança $V \subset M$ de L , e um difeomorfismo $\varphi : L_0 \rightarrow V$ tal que*

$$\varphi^*\omega = -d\alpha_{\text{taut}}, \quad \varphi|_L = \text{id},$$

onde α_{taut} é a 1-forma canônica em T^*L .

Demonstração.

Como $L \subset M$, temos $TL \subset TM|_L$, pois

$$\begin{aligned} TL &= \{(x, u) \mid x \in L, u \in T_xL \subset T_xM\} \text{ e} \\ TM|_L &= \{(x, v) \mid x \in L, v \in T_xM\}. \end{aligned}$$

Seja $J : TM \rightarrow TM$, com $J^2 = -\text{id}$, uma estrutura complexa no fibrado tangente TM .

Afirmção: $\omega \in \Omega^2(M)$ é compatível com J .

De fato, para provar isso vejamos que a forma bilinear $\langle u, v \rangle = \omega(u, Jv)$ define uma métrica Riemanniana em M .

Sejam $u, v \in T_xM$,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \omega(u, Jv) \\ &= -\omega(Jv, u) \\ &= -\omega(-v, Ju) \\ &= \omega(v, Ju) \\ &= \langle v, u \rangle, \end{aligned}$$

logo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrica. Agora tomando $u \in T_x M$ com $u \neq 0$,

$$\langle u, u \rangle = \omega(u, Ju) > 0, \quad (\omega \text{ é não degenerada})$$

logo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida positiva. Portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica Riemanniana em M .

Afirmção. $J(T_x L) \perp T_x L$ em $T_x M$

De fato, sejam $Jv \in J(T_x L)$ e $u \in T_x L$, notamos que

$$\begin{aligned} \langle u, Jv \rangle &= \omega(u, J(Jv)) \\ &= \omega(u, -v) \\ &= 0, \quad (u, v \in T_x L \text{ e } T_x L \text{ é Lagrangiano}) \end{aligned}$$

então $J(T_x L) \perp T_x L$.

Afirmção. $T_x M = J(T_x L) \oplus T_x L$.

De fato, seja $u \in J(T_x L) \cap T_x L$, então

$$\langle u, u \rangle = 0, \quad (J(T_x L) \perp T_x L)$$

ou seja, $u = 0$, logo $J(T_x L) \perp T_x L = \{0\}$. Portanto $J(T_x L) \oplus T_x L \subset T_x M$.

Por outro lado, temos que M é uma variedade simplética, portanto tem dimensão par,

seja $\dim M = 2n$, além disso temos L subvariedade Lagrangiana de M , então

$\dim L = \frac{1}{2} \dim M = n$ e portanto $\dim T_x L = n$, e como J é injetiva, temos $\dim J(T_x L) = n$.

Logo

$$2n = \dim J(T_x L) + \dim T_x L = \dim(J(T_x L) \oplus T_x L) \leq \dim T_x M = 2n,$$

ou seja, $T_x M = J(T_x L) \oplus T_x L$.

Agora definamos

$$\begin{aligned} \psi_x : T_x L &\rightarrow (T_x L)^* \\ v &\mapsto \langle \cdot, v \rangle \end{aligned}$$

que é linear pois $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_x L}$ é bilinear. Como ψ_x é injetiva e $\dim T_x L = \dim T_x^* L$ temos que ψ_x é um isomorfismo, logo definimos

$$\phi_x = (\psi_x)^{-1} : (T_x L)^* \rightarrow T_x L,$$

com isto podemos definir

$$\begin{aligned} \phi_1 : T^* L &\rightarrow TL \\ (x, \kappa) &\mapsto (x, \phi_x(\kappa)). \end{aligned}$$

Temos a aplicação exponencial

$$\begin{aligned} \exp : TM &\rightarrow M \\ (x, v) &\mapsto \exp_x(v), \end{aligned}$$

lembre que $\exp_x(0) = x$.

Considere agora a seguinte composição

$$\begin{aligned} \Phi := \exp \circ J \circ \phi_1 : T^* L &\rightarrow M \\ (x, \kappa) &\mapsto \exp_x(J(\phi_x(\kappa))). \end{aligned}$$

Sua diferencial é

$$d\Phi_{(x,0)} : T_{(x,0)}(T^*L) \rightarrow T_x M.$$

Do Lema 3.11 temos $T_{(x,0)}(T^*L) \cong T_x L + T_x^* L$, então

$$\begin{aligned} d\Phi_{(x,0)} : T_x L + T_x^* L &\rightarrow T_x M \\ v + \beta &\mapsto d\Phi_{(x,0)}(v + \beta). \end{aligned}$$

Vejamos como está definida. Para isto, primeiro vejamos como está definida $d\Phi_{(x,0)}(v + 0)$, para $v \in T_x L$. Considere

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow L$$

com $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$ e, assim, definimos

$$\begin{aligned} \Gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow T^*L \\ t &\mapsto (\gamma(t), 0) \end{aligned}$$

com $\Gamma(0) = (x, 0)$ e $\Gamma'(0) = v + 0$, portanto

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Gamma(t) &= \Phi(\gamma(t), 0) = \gamma(t) \\ \Phi \circ \Gamma(0) &= \gamma(0) = x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Gamma)'(t) &= \gamma'(t) \\ (\Phi \circ \Gamma)'(0) &= \gamma'(0) = v \\ d\Phi_{\Gamma(0)}\Gamma'(0) &= v \\ d\Phi_{(x,0)}(v + 0) &= v. \end{aligned}$$

Agora vejamos como está definida $d\Phi_{(x,0)}(0 + \beta)$ para $\beta \in T_x^* L$. Para isto, definamos

$$\begin{aligned} \eta : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow T^*L \\ t &\mapsto \eta(t) = (x, t\beta) \end{aligned}$$

com $\eta(0) = (x, 0)$ e $\eta'(0) = 0 + \beta$, logo

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \eta)(t) &= \Phi(x, t\beta) \\ &= \exp_x(J(\phi_x(t\beta))) \\ &= \exp_x(tJ(\phi_x(\beta))). \end{aligned}$$

Notamos que $(\Phi \circ \eta)(0) = \exp_x(0) = x$ e

$$(\Phi \circ \eta)'(t) = d(\exp)_{\exp_x(tJ(\phi_x(\beta)))}J(\phi_x(\beta)),$$

logo $(\Phi \circ \eta)'(0) = d(\exp)_{\exp_x(0)}J(\phi_x(\beta)) = d(\exp)_x J(\phi_x(\beta)) = J(\phi_x(\beta))$ e, assim,

$$d\Phi_{(x,0)}(0 + \beta) = (\Phi \circ \eta)'(0) = J(\phi_x(\beta)),$$

consequentemente

$$d\Phi_{(x,0)}(v + \beta) = v + J(\phi_x(\beta)).$$

Por outro lado, sejam $v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2 \in T_x L + T_x^* L$

$$\begin{aligned} \Phi^* \omega_{(x,0)}(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2) &= \omega_{\Phi(x,0)}(d\Phi_{(x,0)}(v_1 + \beta_1), d\Phi_{(x,0)}(v_2 + \beta_2)) \\ &= \omega_x(v_1 + J(\phi_x(\beta_1)), v_2 + J(\phi_x(\beta_2))) \\ &= \omega_x(v_1, v_2) + \omega_x(v_1, J(\phi_x(\beta_2))) + \omega_x(J(\phi_x(\beta_1)), v_2) \\ &\quad + \omega_x(J(\phi_x(\beta_1)), J(\phi_x(\beta_2))) \\ &= \omega_x(v_1, J(\phi_x(\beta_2))) - \omega_x(v_2, J(\phi_x(\beta_1))) \\ &= \langle v_1, \phi_x(\beta_2) \rangle - \langle v_2, \phi_x(\beta_1) \rangle. \end{aligned}$$

Lembre que $\phi_x = (\psi_x)^{-1}$, logo

$$\begin{aligned} \psi_x(\phi_x(\beta)) &= \beta \\ \psi_x(\phi_x(\beta))(u) &= \beta(u) \\ \langle u, \phi_x(\beta) \rangle &= \beta(u), \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \Phi^* \omega_{(x,0)}(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2) &= \langle v_1, \phi_x(\beta_2) \rangle - \langle v_2, \phi_x(\beta_1) \rangle \\ &= \beta_2(v_1) - \beta_1(v_2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sabemos que $\dim L = n$, logo $n = \dim T_x L = \dim T_x^* L$, então

$$\dim T^* L = \dim T_{(x,0)}(T^* L) = \dim T_x L + \dim T_x^* L = 2n.$$

Seja $x = (q_1, \dots, q_n)$ coordenadas em $L_1 \subset L$, logo

$$\begin{aligned} T_x L &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n} \right\} \\ T_x^* L &= \text{span} \{ dq_1, \dots, dq_n \}. \end{aligned}$$

Se $\kappa \in T_x^* L$, temos $\kappa = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$. Logo, como $(x, \kappa) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in T^* L$, então $T_{(x,\kappa)}(T^* L) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \right\}$ e uma vez que

$T_{(x,\kappa)}(T^* L) = T_x L + T_x^* L$ também temos $T_x^* L = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \right\}$. Seja agora $d\alpha_{\text{taut}}$ a

2-forma canônica nestas coordenadas $d\alpha_{\text{taut}(x,\kappa)} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Como $v_1, v_2 \in T_x L$ e

$$\beta_1, \beta_2 \in T_x^* L, \text{ temos que } v_1 = \sum_{k=1}^n v_1^k \frac{\partial}{\partial q_k}, v_2 = \sum_{f=1}^n v_2^f \frac{\partial}{\partial q_f}, \beta_1 = \sum_{r=1}^n \beta_1^r \frac{\partial}{\partial p_r} \text{ e}$$

$$\beta_2 = \sum_{l=1}^n \beta_2^l \frac{\partial}{\partial q_l}. \text{ Logo}$$

$$\begin{aligned} d\alpha_{\text{taut}(x,0)}(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2) &= \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \left(\sum_{k=1}^n v_1^k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{r=1}^n \beta_1^r \frac{\partial}{\partial p_r}, \sum_{f=1}^n v_2^f \frac{\partial}{\partial q_f} + \sum_{q=1}^n \beta_2^q \frac{\partial}{\partial q_l} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\beta_1^i v_2^i - \beta_2^i v_1^i) \\ &= \beta_1(v_2) - \beta_2(v_1). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Logo de (3.14) e (3.15), temos

$$\Phi^*\omega_{(x,0)}(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2) = -d\alpha_{taut(x,0)}(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2).$$

Portanto tenho $\Phi^*\omega$, $-d\alpha_{taut}$ duas 2-formas fechadas tais que são não degeneradas e $\Phi^*\omega = -d\alpha_{taut}$ em $T_x L_1$, para todo $x \in L_1$, então pelo Lema 3.9 sabemos que existe V_1 e V_2 vizinhanças de L_1 em T^*L e um difeomorfismo $\Psi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\Psi|_{L_1} = id_{L_1}$ e $\Psi^*(\Phi^*\omega) = -d\alpha_{taut}$. Basta tomar $\varphi = \Phi \circ \Psi$ e $L_0 = V_1$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] A. Cannas Da Silva, Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry, Notes for a Short Course at IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [2] A. McInerney, First Steps in Differential Geometry, Springer, New York, 2013.
- [3] B. Hall, Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, Springer, New York, 2004.
- [4] E. Lages, Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [5] E. Meinrenkem, Simplectic Geometry, Lecture Notes, University of Toronto, Ontario, 2000.
- [6] D. McDuff e D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Oxford University Press, New York, 1998.
- [7] F. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, Berlin, 1983.
- [8] F. Zuñiga, A curvatura Gaussiana via ângulo de contato de superfícies imersas em S^3 , Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.
- [9] H. Bursztyn e L. Macarini, Introdução a Geometria Simplética, 2006.
- [10] H. Geiges, An Introduction to Contact Topology, Cambridge University Press, New York, 2008.
- [11] J. Chaidez, Solutions to Introduction To Symplectic Topology (2nd Ed.) by Dusa McDuff and Dietmar Salamon, 2016.
- [12] L. TU, An Introduction to Manifold, Springer, New York, 2010.
- [13] J. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer, New York, 2003.
- [14] J. Lee, Riemannian Manifolds, Springer, New York, 1997.
- [15] J. Moser, On the volume elements on manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 120, 1965, 286-294.
- [16] J. Munkres, Topology, Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
- [17] P. Rabinowitz, Jürgen K. Moser Biographical Memoirs, National Academy of Sciences, 2015.

- [18] R. Biezuner, Notas de Aula Álgebra Linear, Departamento de Matemática, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [19] R. Chicalé, Propriedades Genéricas de Sistemas Hamiltonianos, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2013.
- [20] U. Hryniewicz e P. Salomão, Introdução à Geometria Finsler, 2013.
- [21] S. Nasar, Jurgen Moser, Who proved Celestial Theory, Dies at 71, The New York Times, U.S. 21 Dezembro 1999.