



PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO EM DIMENSÃO 8. O
 E_8 -EMPACOTAMENTO

Victor Benicio Vergara Segura

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadores: Cecilia Salgado
Didier Pilod

Rio de Janeiro
Outubro de 2017

PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO EM DIMENSÃO 8. O
 E_8 -EMPACOTAMENTO

Victor Benicio Vergara Segura

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE PÓS-GRADUAÇÃO (IM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Emanuel Carneiro, Ph.D.

Prof. Bernardo Freitas, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2017

Vergara Segura, Victor Benicio

Problema de empacotamento em dimensão 8. O E_8 -empacotamento/Victor Benicio Vergara Segura. – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2017.

X, 93 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Cecilia Salgado

Didier Pilod

Dissertação (mestrado) – IM/UFRJ/Programa de Matemática, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 91 – 93.

1. Empacotamento. 2. Séries de Fourier. 3. Formas modulares. I. Salgado, Cecilia *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, Programa de Matemática. III. Título.

*Sabio Alejo Duran refirió, todo
avance que no avance yo. Pero
el dón de pensar va heredando,
Platon a Descartes, Martin al
cantor, Concepcion Loperena a
Consuelo, Gabo lo recogió de su
abuelo, Gaitan de su pueblo y así
Franco Arguelles lo de Juancho
Rois .*

Agradecimentos

A minha orientadora a Ph.D. Cecilia Salgado e o meu orientador Ph.D. Didier Pilod pela valiosa orientação, motivação, confiança demonstrada e amizade.

À capes pela financiamento econômica e me dar a oportunidade de me formar na Universidade Federal De Rio do Janeiro.

Aos meus pais; Ana Segura, Francisco Vergara, minhas irmas, Nellys, Yuli, Tatiana, Liliana e o meu irmão Hernan- pelo amor, incentivos e compreensão. Sem vocês não tera logrado avançar no caminho da formação profissional, mais ainda falta chão por trilhar.

Aos meus familiares- Aos meu tias, tios, primos, primas e todos os aqueles que torceram de forma positiva e contribuíram emocional e afetivamente durante o processo.

As pessoas da republica pelo acompanhamento-José Targino, Diana Santos, Dhoone Menezes, Martha Xavier, Regiane Késsias, Juliana Pimenta, Andres Bedyoya, Eduardo, Juan C 'cubano', David Paternina, Henry Sanchez, Edgar Medina, Miguel Soto, Roberto, Victor Rodriguez, Sebastian Forero pelo acompanhamento e os momentos de 'palacalor' nas que as cervejas foram muito importantes. Por vocês terem convivido comigo todo este tempo.

Aos companheiros de caminhada Elaine vasconcelos, Karol e amigos da sala de estudo Deniel Correa, Henrique, El saya, El cuba, El perris y Los cachacos por ser os meus amigos de estudo e bate-papos que ajudaram a moldar este trabalho e culminar com exito.

Aos grupo de Voleibol e de futebol sobre todo a Tainara Silva, Ana Chaparro, Layane Araujo, Antonio Krishnamurti, Fredy Castro, Oscar Sierra por todos esses jogos de relaxamento.

A todas esses amigos e pessoas que de alguma forma contribuiriam e estiveram

de forma ativa e que de forma positiva durante esta jornada. sobre todo ao professor Abraham Arenas, Hugo Aduen, Carlos Reales e Carlos Banquet pelas suas motivações, reflexões e apoios que sempre estiveram presentes.

Resumo da Dissertação apresentada à IM/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO EM DIMENSÃO 8. O
 E_8 -EMPACOTAMENTO

Victor Benicio Vergara Segura

Outubro/2017

Orientadores: Cecília Salgado
Didier Pilod

Programa: Matemática

Esta dissertação trata do problema de empacotamento de esferas no espaço euclidiano 8-dimensional. Estudaremos em detalhe a demonstração de que o empacotamento mais denso no espaço euclidiano 8-dimensional é o empacotamento associado ao reticulado E_8 . A prova pode ser dividida em dois passos cruciais. O primeiro é o teorema de Cohn-Elkies, que afirma que dada uma função especial em um espaço de Schwartz que assume valores não-positivos fora de uma bola de raio r , enquanto sua transformada de Fourier assume valores não-negativos sobre todo o espaço n -dimensional, então a densidade de um empacotamento no espaço euclidiano n -dimensional é limitada superiormente pelo volume da bola de raio $r/2$, por uma constante que depende da função, da sua transformada de Fourier e da dimensão n . A segunda parte consiste em produzir uma tal função para $n = 8$ e mostrar que o reticulado E_8 produz um empacotamento cuja densidade é exatamente igual à constante de limitação do teorema de Cohn-Elkies. Ao longo do texto apresentaremos em detalhe as ferramentas envolvidas nos passos mencionados acima, como preceitos na teoria de análise de Fourier, bem como conceitos básicos da teoria de formas modulares. Ao final desta dissertação, usaremos ferramentas de programação (SageMath) para obter informações de negatividade e da positividade da função produzida e da sua transformada de Fourier respectivamente.

Abstract of Dissertation presented to IM/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THE SPHERE PACKING PROBLEM IN DIMENSION 8. THE E_8 -PACKING

Victor Benicio Vergara Segura

October/2017

Advisors: Cecilia Salgado

Didier Pilod

Department: Matemática

This dissertation deals with the sphere packing problem in dimension 8. We will study in detail the demonstration that the densest packing in 8-dimensional Euclidean space is the sphere packing associated with the E_8 lattice. The proof can be divided into two crucial steps. The first is the Cohn-Elkies Theorem, which states that given a special function in a Schwartz space that assumes non-positive values outside a ball of radius r , while its Fourier transform assumes non-negative values over all n -dimensional space, then the density of a packing in the n -dimensional Euclidean space is bounded from above by the volume of the ball of radius $r/2$, times a constant that depends on the function, its Fourier transform, and the dimension n . The second part is to produce such a function for $n = 8$ and show that the lattice E_8 produces a sphere packing whose density is exactly equal to the limiting constant of the Cohn-Elkies Theorem. Throughout the text we will present in detail the tools involved in the steps mentioned above, as precepts in the theory of Fourier analysis, as well as basic concepts the theory of modular form. At the end of this dissertation, we will use programming tools (SageMath) to obtain information about the negativity and the positivity of the function produced and its Fourier transform respectively.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Empacotamentos de reticulados	5
2.1 Reticulados em \mathbb{R}^m	6
2.2 Mínimos Sucessivos	13
2.3 Empacotamentos em \mathbb{R}^n	14
2.4 Reticulado dual	19
2.5 O reticulado E_8	21
2.6 Séries de Fourier e fórmula somatória de Poisson	23
3 O grupo modular e formas modulares	32
3.1 O grupo modular	32
3.2 Formas modulares	38
3.3 Séries de Einsenstein	41
3.4 A série de Einsenstein de peso 2	49
3.5 Séries Theta	50
4 Problema de empacotamento em dimensão 8	56
4.1 O teorema de Cohn-Elkies	57
4.2 Autofunções da Transformada de Fourier	61
4.3 A função mágica	78
A Expansões assintóticas	82
B Programas em SageMath	85
Referências Bibliográficas	91

Lista de Figuras

1.1	Empilhamento	1
1.2	Arranjos de círculos	2
1.3	Empilhamento de esferas	3
2.1	Reticulados cúbico e hexagonal	8
2.2	Arranjos de esferas f.c.c e b.c.c	8
2.3	Paralelepípedos fundamentais de \mathbb{Z}^2	9
2.4	Empacotamento periódico	15
3.1	Região \mathcal{R}	42
4.1	Gráficos de $A(t)$, $A_0^{(2)}(t) = \frac{368640}{\pi^2}t^2e^{-\pi/t}$ e $A_\infty^{(2)}(t) = -\frac{72}{\pi}e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} - \frac{23328}{\pi^2}$	79
4.2	Gráficos de $B(t)$, $B_0^{(2)}(t) = \frac{368640}{\pi^2}t^2e^{-\pi/t}$ e $B_\infty^{(2)}(t) = \frac{8640}{\pi}t - \frac{23328}{\pi^2}$	80
B.1	semilogy de $h_1(t)$	87
B.2	loglog de h_1	87
B.3	semilogy de $h_2(t)$	89
B.4	loglog de h_2	90
B.5	Função $A_\infty^{(6)}(t)$	90

Capítulo 1

Introdução

Qual é a melhor forma de empilhar laranjas? Essa pergunta seria respondida intuitivamente de forma correta por qualquer fruteiro (veja Figura 1.1). Do ponto de vista científico, essa questão foi levantada primeiro no século XVII pelo matemático e astrônomo Johannes Kepler no seu pequeno livro “De Nive Sexangula” (1611) na tentativa de dar uma explicação da forma hexagonal dos flocos de neve. Ele conjecturou que a melhor maneira possível de empilhar esferas idênticas no espaço é como faria um fruteiro (ver descrição abaixo para mais detalhes).

Essa conjectura se revelou porém, muito mais complicada do que parecia inicialmente e resistiu aos matemáticos por quase quatro séculos. Uma prova satisfatória do ponto de vista do rigor matemático só foi dada recentemente por Thomas C. Halles com assistência de computadores [20].



Figura 1.1: Empilhamento

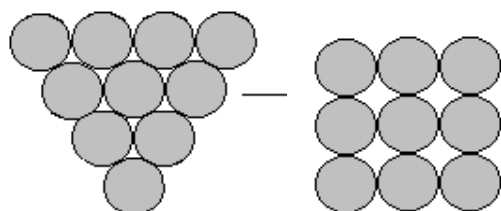
A pergunta feita por Kepler em 1611, no caso do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , pode ser estendida a outras dimensões do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Matematicamente, ela pode-se reformular da seguinte maneira: como arranjar esferas idênticas no espaço euclidiano \mathbb{R}^n de tal forma que ocupem a maior parte possível do espaço?

Este tipo de problema, conhecido como problema de empacotamento, forma uma classe de problema de otimização em geometria discreta.

Daremos agora, uma breve descrição do estado da arte em cada dimensão.

No caso $n = 1$, o problema é trivial, já que as esferas são intervalos, e portanto, elas podem ser empilhadas de forma canônica sem perda de espaço.

No caso $n = 2$, existem duas formas naturais de empilhar círculos no plano: o arranjo hexagonal e o cúbico, como na Figura 1.2 respectivamente. Foi provado por Axel Thue em 1892 que, dentre todos os empilhamentos de círculos no plano, o melhor é o empilhamento hexagonal [36].



(a) Arranjo hexagonal (b) Arranjo cubico

Figura 1.2: Arranjos de círculos

No caso tridimensional, a situação é mais complicada. Um jeito natural seria empilhar as esferas por camadas. A primeira camada pode ser colocada num arranjo hexagonal como na Figura 1.3 (esquerda). Nesta camada ficam vãos, os quais marcamos alternadamente com cores cinzas e pretos. Para colocar a segunda camada temos duas opções; os vãos cinzas ou pretos. Se escolhermos os vãos cinzas, teremos novamente duas opções para colocar a terceira camada e assim por diante. Portanto, há infinitas possibilidades de empilhar esferas com a mesma densidade. Por essa razão, a solução da conjectura de Kepler dada por Thomas Hales só conseguiu ser concluída com o uso de cálculos computacionais [20].

Quando a dimensão é maior que 3, pouco se sabia até recentemente.

Em 2003, Henry Cohn e Noam Elkies estabeleceram cotas para a melhor densidade dos empacotamentos em dimensões entre 4 e 36, usando técnicas de programação linear [9]. Eles também conjecturaram que em dimensões 8 e 24, a maior densidade de empacotamento é associada a certos reticulados com propriedades especiais (par, unimodular, autodual).

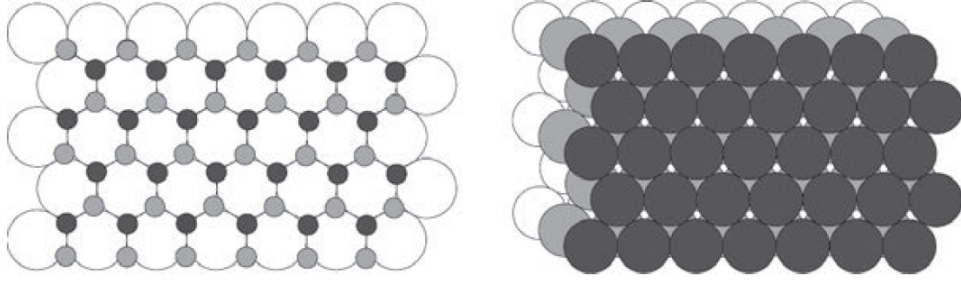


Figura 1.3: Empilhamento de esferas

Essas conjecturas foram provadas recentemente por Maryna Viazovska em dimensão 8 [37] e Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danilo Radchenko e Maryna Viazovska em dimensão 24 [10]. Essas provas combinam o uso de análise de Fourier e formas modulares.

O objetivo desta dissertação é estudar a prova do teorema de Viazovska em dimensão 8.

A seguir, descreveremos a organização da dissertação.

No Capítulo 2, estudaremos a teoria de empacotamentos de esferas e as séries de Fourier. Primeiramente, introduzimos os reticulados em \mathbb{R}^n e suas características básicas e definimos o reticulado E_8 , fundamental no teorema estudado aqui. Definimos, em seguida, os empacotamentos de esferas em \mathbb{R}^n e o conceito de densidade associado a eles. Finalmente relembramos a teoria básica das séries de Fourier associadas a funções periódicas com respeito a reticulados de \mathbb{R}^n . Em particular, provamos a fórmula de somatória de Poisson, ferramenta importante no resultado de Cohn e Elkies.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo das formas modulares. Estudaremos primeiro o grupo modular $SL_2(\mathbb{Z})$ das matrizes 2×2 com entradas inteiras e determinante 1. Em seguida, definimos as formas modulares e cuspidais de peso k associadas a subgrupos de $SL_2(\mathbb{Z})$, chamados subgrupos de congruências. Finalmente, ilustramos esses conceitos com as séries de Eisenstein G_k , a forma cuspidal Δ , a função j -elíptica invariante j , as funções theta de Jacobi $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}$ e as séries theta, associadas a reticulados pares e unimodulares Θ_Λ . Todas essas funções serão usadas na construção de uma função ótima no próximo capítulo.

No Capítulo 4, estudaremos a prova do Teorema de Viazovska em dimensão 8. Em um primeiro tempo, enunciamos e provamos o Teorema de Cohn-Elkies, que

afirma que dada uma função especial suficientemente regular que assume valores não-positivos fora de uma bola centrada na origem, enquanto sua transformada de Fourier assume valores não-negativos sobre todo o espaço n -dimensional, então a densidade dos empacotamentos de esferas no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é limitada superiormente por uma constante que depende da função, da sua transformada de Fourier e da dimensão n . Para concluir a prova do Teorema de Viazovska, precisamos então construir uma função ótima, cuja cota dada no teorema de Cohn-Elkies é exatamente igual à densidade do empacotamento associado ao reticulado E_8 descrito no Capítulo 2. A função ótima é construída a partir das séries de Eisenstein e das funções theta de Jacobi definidas no Capítulo 3. Finalmente, para verificar as condições sobre a função ótima e sua transformada de Fourier usamos o programa SageMath. Colocamos os comandos usados no apêndice.

Capítulo 2

Empacotamentos de reticulados

O material desenvolvido neste capítulo dará definições básicas da teoria de empacotamento de esferas no espaço Euclidiano. Um ponto no espaço m -dimensional \mathbb{R}^m é simplesmente um arranjo de números reais

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

O produto interno e a norma induzida por ele, chamada norma Euclidiana ou l_2 -norma, definidas para $x, y \in \mathbb{R}^m$ como

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^m x_i y_i, \quad \|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

Se $M \in \mathcal{M}_{n \times m}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o produto matricial é dado por

$$xM := (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

A bola aberta m -dimensional com centro em $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ e raio $\rho \geq 0$ é o conjunto

$$B_m(u, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - u\| < \rho\}.$$

O volume dos conjuntos aqui considerados denotado por $Vol(\cdot)$ é calculado com respeito à medida de Lebesgue em \mathbb{R}^m .

Estudaremos os reticulados, que são subgrupos de \mathbb{R}^m e os empacotamentos os quais ficam determinados pelos centros das esferas que formam um reticulado, as propriedades deles bem como seus elementos associados .

2.1 Reticulados em \mathbb{R}^m

A seguir daremos algumas definições e conceitos envolvendo a noção de reticulado no espaço Euclidiano, omitiremos algumas demonstrações e colocaremos uma boa referência onde podem ser encontradas as provas.

Definição 2.1. *Consideremos n vectores linearmente independentes em \mathbb{R}^m , digamos*

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1m})$$

$$v_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2m})$$

$$\vdots$$

$$v_n = (v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nm}),$$

onde $m \geq n$. Um **reticulado** o qual denotamos por Λ é o conjunto de combinações lineares inteiras da forma

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i v_i : \xi_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A matriz

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

no conjunto $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ é denominada **matriz geradora do reticulado**. Escreveremos $\Lambda = \mathcal{L}(M)$ para indicar que o reticulado é gerado pela matriz M . O conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é chamado **base do reticulado** e a matriz $G = MM^t$ é denominada **matriz de Gram do reticulado**.

Denotaremos por $\text{span}(\Lambda)$ ao espaço vetorial

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dizemos que o **posto** de Λ é n e sua **dimensão** é m . Quando seja $m = n$ o reticulado é de **posto completo**.

Observação 2.2. Note que da Definição 2.1, $(\Lambda, +)$ é um subgrupo do grupo $(\mathbb{R}^m, +)$ ou um \mathbb{Z} -módulo livre de posto finito. No Corolário 2.21 mostraremos que ele é um subgrupo discreto.

Exemplo 2.3. O reticulado $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z}\}$ com matriz geradora $M = I_n$ é chamado **reticulado cúbico ou integral** em \mathbb{R}^n . Toda matriz em

$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ com $\det^2(M) = 1$ gera \mathbb{Z}^n fato que mostramos no Exemplo 2.18.

Exemplo 2.4. O reticulado em \mathbb{R}^2

$$A_2 = \mathcal{L}(M) \quad \text{onde} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

é chamado **reticulado hexagonal**. É dito assim devido ao padrão hexagonal que aparenta no plano. Este reticulado é associado ao empacotamento com maior densidade em \mathbb{R}^2 ver [8]. Para fins teóricos é conveniente expressar A_2 dentro do espaço \mathbb{R}^3 gerado pela matriz (ver [12, capítulo 4]).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.5. O reticulado **f.c.c** (face-center cubic) em \mathbb{R}^3 gerado pela matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

o qual é ilustrado em todo texto de química e encontrado no padrão que seguem os centros de laranjas em forma de pirâmide nos estantes dos fruteiros. Este arranjo de esferas tem a maior densidade no espaço tridimensional (Conj. de Kepler, ver [20]). outra maneira de expressar este reticulado é via D_3 : (x, y, z) tais que x, y, z inteiros $x + y + z$ é par.

Exemplo 2.6. O reticulado **b.c.c** (body-center cubic) em \mathbb{R}^3 gerado pela matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Também é frequentemente encontrado na química. Outra definição simples é via D_3^* : (x, y, z) onde x, y, z são inteiros todos pares ou todos ímpares.

Mais detalhes destes exemplos podem ser encontrados em [12]. Nos seguintes gráficos ilustramos os exemplos anteriores

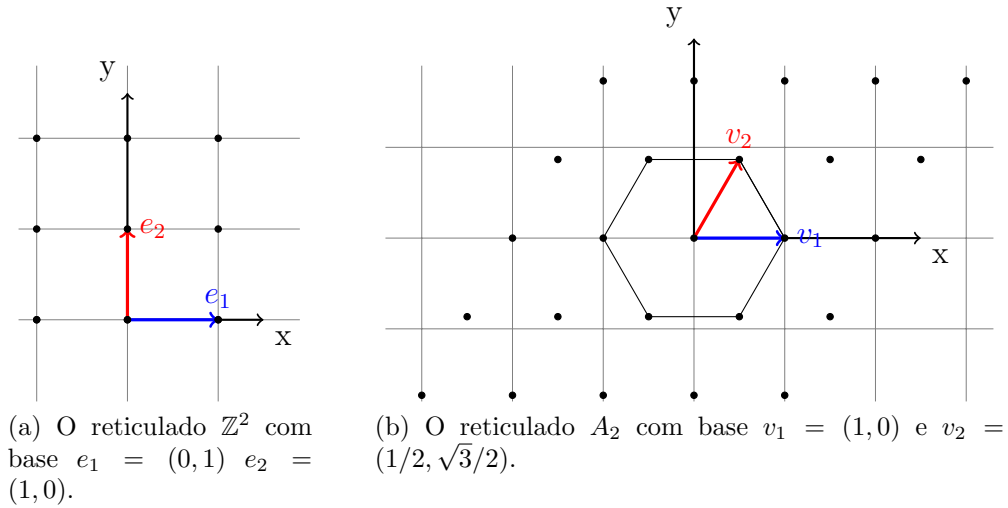


Figura 2.1: Reticulados cúbico e hexagonal

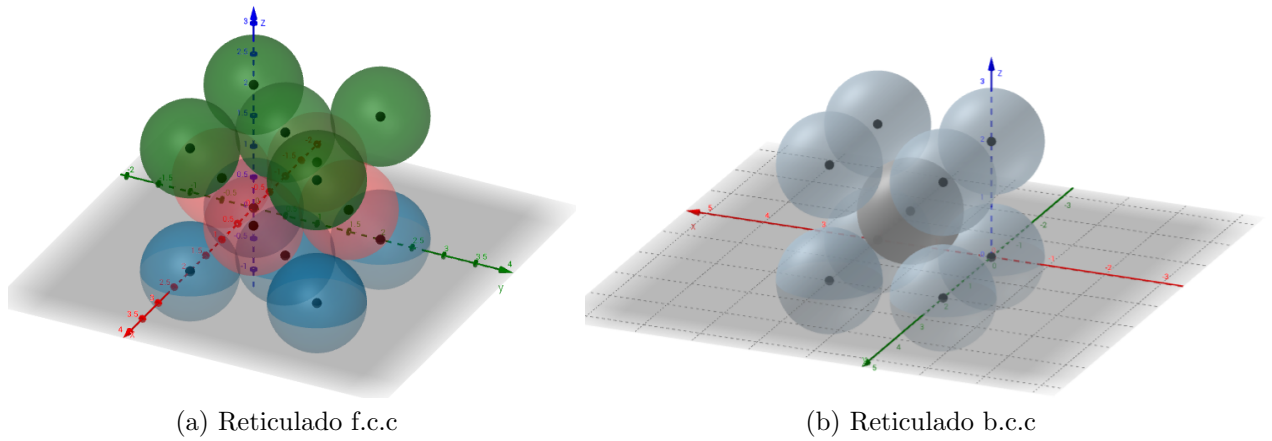


Figura 2.2: Arranjos de esferas f.c.c e b.c.c

Definição 2.7. Considere um conjunto de vetores em \mathbb{R}^m linearmente independentes $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Definimos o **Paralelepípedo fundamental** associado a \mathcal{B} como

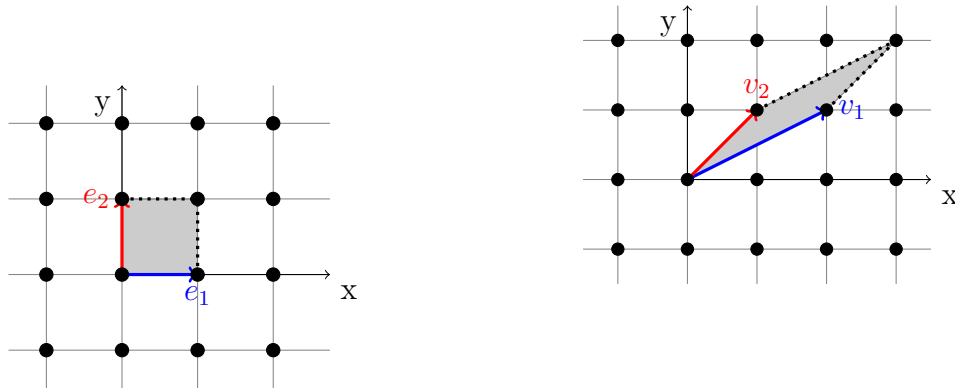
$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i=1}^n y_i v_i : 0 \leq y_i < 1 \right\}.$$

Seja Λ um reticulado com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e seja \mathcal{P} o paralelepípedo associado a \mathcal{B} . Definimos o **determinante do reticulado** como:

$$\det(\Lambda) := \text{Vol}^2(\mathcal{P})$$

Observação 2.8. Note que na definição acima o determinante depende da base e há formas diferentes de escolher uma base para um reticulado tendo diferente paralelepípedo fundamental como veremos a seguir, mas o volume desta região é unicamente determinada por Λ . Mais adiante damos uma prova deste fato no Teorema 2.17

O seguinte reticulado representa o reticulado cubico \mathbb{Z}^2 com bases distintas.



(a) O reticulado \mathbb{Z}^2 com base $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, 0)$ e seu paralelepípedo fundamental associado.

(b) O reticulado \mathbb{Z}^2 com base $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, 1)$, e seu paralelepípedo fundamental associado.

Figura 2.3: Paralelepípedos fundamentais de \mathbb{Z}^2

A seguinte proposição dá uma condição suficiente e necessária sobre um conjunto para que este seja uma base do reticulado.

Proposição 2.9. *Seja Λ um reticulado de posto n em \mathbb{R}^m e sejam $b_1, \dots, b_n \in \Lambda$ n vetores linearmente independentes. Então $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ é uma base para Λ se e só se*

$$\mathcal{P} \cap \Lambda = \{0\},$$

onde \mathcal{P} é o paralelepípedo fundamental associado a \mathcal{B} .

Demonstração. *Suponhamos que \mathcal{B} é uma base para Λ . Seja $x \in \mathcal{P} \cap \Lambda$, então como $x \in \mathcal{P}$, $x = \sum_{i=1}^n y_i b_i$ com $0 \leq y_i < 1$ e por outro lado como $x \in \Lambda$, $x = \sum_{i=1}^n \zeta_i b_i$ com $\zeta_i \in \mathbb{Z}$, logo $\zeta_i = y_i = 0$.*

Reciprocamente suponhamos que $\mathcal{P} \cap \Lambda = \{0\}$ e que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$ com $M \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$.

Seja $x \in \Lambda \subseteq \text{span}(M)$. Como \mathcal{B} é linearmente independente, \mathcal{B} é uma base para $\text{span}(M)$. Então existem $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i.$$

Agora, temos que $x' = \sum_{i=1}^n [\alpha_i] b_i \in \Lambda$ porque Λ é um grupo. Então

$$x - x' = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - [\alpha_i]) b_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in \Lambda$$

onde $\lambda_i = \alpha_i - [\alpha_i] \in [0, 1)$. Logo $x - x' \in \mathcal{P} \cap \Lambda = \{0\}$, então $\alpha_i = [\alpha_i]$. Como consequência \mathcal{B} é uma base para Λ .

Definição 2.10. Dizemos que os conjuntos linearmente independentes \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 em \mathbb{R}^m com matrizes associadas M_1 e M_2 respectivamente, são equivalentes, se os reticulados gerados por elas são iguais. Em símbolos

$$\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2).$$

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt é um procedimento básico em álgebra linear que obtêm de um conjunto de vetores linearmente independentes um conjunto de vetores ortogonais que geram o mesmo espaço. O processo faz a projeção ortogonal de cada vetor sobre o espaço ortogonal do *span* dos anteriores.

Definição 2.11. Para um conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linearmente independentes em \mathbb{R}^m , definimos sua **ortogonalização de Gram-Schmidt** como o conjunto de vetores:

$$v_1^* = v_1, \quad v_i^* = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_i \cdot v_j^*}{v_j^* \cdot v_j^*} v_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Em outras palavras: v_i^* é a componente de v_i ortogonal a $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*$.

As matrizes cujas linhas são os vetores v_i^* e $\frac{v_i^*}{\|v_i^*\|}$, $i = 1, \dots, n$ são chamadas matrizes de ortogonalização e ortonormalização respectivamente.

Lema 2.12. Considere um reticulado Λ com base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ em \mathbb{R}^m . $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ sua ortogonalização de Gram-Schmidt. Então

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \prod_{i=1}^n \|v_i^*\|,$$

onde \mathcal{P} é o paralelepípedo associado a \mathcal{B} .

Demonstração. Consideremos N a matriz de ortonormalização de Gram-Schmidt de \mathcal{B} e M a matriz associada a Λ . Sejam

$$T_N : \text{span}(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad T_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \text{span}(\Lambda)$$

dadas por $T_N(x) := xN^t$ e $T_M(y) := yM$.

Notemos que T_N é um isomorfismo isométrico de espaços vetoriais, pois N^t tem colunas ortonormais, então $\text{Vol}(\mathcal{P}) = \text{Vol}(T_N(\mathcal{P}))$. De outro lado T_M é um isomorfismo

tal que $T_M([0, 1]^n) = \mathcal{P}$. Logo

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \text{Vol}(T_N(\mathcal{P})) = \text{Vol}(T_N T_M([0, 1]^n)) = \det(MN^t) \text{Vol}([0, 1]^n) = \det(MN^t).$$

Agora $MN^t = (a_{ij})$ com $a_{ij} = v_i \cdot \frac{v_j^*}{\|v_j^*\|}$, $i, j = 1, \dots, n$ e como os vetores v_i, v_j^* são ortogonais se $i \neq j$ pois

$$v_i \cdot v_j^* = (v_i^* + \sum_{k=1}^{i-1} \mu_{ik} v_k^*) \cdot v_j^* = v_i^* \cdot v_j^*,$$

onde $\mu_{ik} = \frac{v_i \cdot v_k^*}{v_k^* \cdot v_k^*}$. Então

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \det(a_{ij}) = \det(v_i \cdot \frac{v_j^*}{\|v_j^*\|}) = \prod_{i=1}^n \|v_i^*\|.$$

□

Lema 2.13. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ um reticulado de posto n tal que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$ e \mathcal{P} o paralelepípedo associado às linhas de M . Então*

$$\det(\Lambda) = \det(MM^t) = \det(G)$$

onde G é a matriz de Gram.

Em particular quando $m=n$, $\det(\Lambda) = \det^2(M)$.

Demonstração. Consideremos a matriz de ortogonalização de Gram-Schmidt M^* associada às filas de M . Matricialmente temos que:

$$M = TM^*,$$

onde $T = (\mu_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular inferior onde $\mu_{ii} = 1$, $\mu_{i,j} = \frac{v_i \cdot v_j^*}{v_j^* \cdot v_j^*}$ se $i > j$.

Sabemos do Lema 2.12 que $\text{Vol}(\mathcal{P}) = \prod_{j=1}^n \|v_j^*\|$, então como $\det(T) = 1$ por ser T triangular, temos

$$\det(MM^t) = \det(M^* T T^t (M^*)^t) = \det(M^* (M^*)^t) \det(T) \det(T^t) = \det(M^* (M^*)^t).$$

Agora, como a matriz $M^* (M^*)^t$ é diagonal com $d_{ii} = v_i^* \cdot v_i^* = \|v_i\|^2$, então

$$\det(M^* (M^*)^t) = \prod_{j=1}^n (v_j^* \cdot v_j^*) = \left(\prod_{j=1}^n \|v_j^*\| \right)^2 = \text{Vol}^2(\mathcal{P}) = \det(\Lambda).$$

Quando $m = n$, a matriz M é quadrada e $\det(M) = \det(M^t)$ o que conclui. □

Definição 2.14. Uma matriz $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ tal que $\det^2(U) = 1$ é chamada **unimodular**.

Note que se U é unimodular então U^{-1} também é.

As matrizes unimodulares que definimos a seguir desenvolvem um papel fundamental no capítulo 3.

Lema 2.15. Dois conjuntos linearmente independentes \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 de n vetores em \mathbb{R}^m são equivalentes se e só se existe $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ unimodular tal que $M_2 = UM_1$.

Demonstração. Sejam que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ com respectivas matrizes M_1 e M_2 . Se os conjuntos são equivalentes então $\Lambda = \mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$ e dado que $w_i \in \mathcal{L}(M_1)$, existem $m_j^i \in \mathbb{Z}$ para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$ tal que $w_i = \sum_{j=1}^n m_j^i v_j$. Considere $U = (m_j^i) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$, então $M_2 = UM_1$. Analogamente, existe $V \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ tal que $M_1 = VM_2$.

Combinando as igualdades temos que

$$M_2 M_2^t = (UV) M_2 M_2^t (UV)^t.$$

Não é difícil verificar que a matriz $M_2 M_2^t$ é invertível. Tomando determinantes obtemos: $\det^2(UV) = \det^2(U) \det^2(V) = 1$, e como $\det(U), \det(V) \in \mathbb{Z}$ temos que $\det^2(U) = \det^2(V) = 1$. Logo U é unimodular.

Reciprocamente supomos que existe uma matriz unimodular U tal que $M_2 = UM_1$, então $\mathcal{L}(M_2) \subseteq \mathcal{L}(M_1)$ e como U^{-1} também é unimodular temos que $\mathcal{L}(M_1) \subseteq \mathcal{L}(M_2)$, logo $\Lambda = \mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$. \square

Corolário 2.16. Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 conjuntos linearmente independentes em \mathbb{R}^m com matrizes associadas M_1, M_2 respectivamente. Então \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são equivalentes se e somente se M_2 pode ser obtida de M_1 a través das seguintes operações:

- 1) $b_i \rightarrow b_i + kb_j$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $b_i \leftrightarrow b_j$.
- 3) $b_i \leftrightarrow -b_i$.

Demonstração. Dado que toda matriz unimodular pode ser obtida a partir das operações acima, a conclusão segue do Lema 2.15. \square

Teorema 2.17. O determinante de um reticulado está bem definido e não depende da escolha da base.

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ duas bases de Λ e M_1, M_2 as matrizes associadas a elas respectivamente tais que $\Lambda = \mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$. Pelo Lema 2.15, existe U unimodular tal que $M_2 = UM_1$. Portanto segue-se do Lema 2.13 que

$$\det(\Lambda) = \det(M_2 M_2^t) = \det(UM_1 M_1^t U^t) = \det^2(U) \det(M_1 M_1^t) = \det(M_1 M_1^t).$$

□

Exemplo 2.18. Uma base para \mathbb{Z}^n é a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , logo \mathcal{B} é uma base de \mathbb{Z}^n se e só se a matriz associada M é unimodular.

2.2 Mínimos Sucessivos

Um parâmetro básico de um reticulado é o vetor de mínimo comprimento. Este parâmetro é denotado por λ_1 . Minkowski deu uma prova não construtiva de que: $\lambda_1 \leq \sqrt{n} \det^{1/n}(\Lambda)$ para reticulados de posto completo. Ainda não é conhecido um algoritmo eficiente para encontrar tal comprimento, este problema torna-se computacional denotado por SVP (Shortest Vector Problem). Em [22] pode-se encontrar alguns variantes do SVP e problemas discretos associados a reticulados. Aqui por comprimento denotamos a norma euclidiana ou a l_2 -norma como definimos no começo do capítulo.

Definição 2.19. Seja Λ um reticulado de posto n em \mathbb{R}^m . Para $i = 1, 2, \dots, n$ definimos o **i -ésimo mínimo sucessivo** por

$$\lambda_i(\Lambda) := \inf \left\{ r > 0 : \dim(\text{span}(\Lambda \cap \overline{B(0, r)})) \geq i \right\},$$

onde $\overline{B(0, r)} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq r\}$ a bola fechada de raio r e centro 0 .

A seguinte proposição dá uma cota inferior para a comprimento do vetor de comprimento mínimo num reticulado.

Proposição 2.20. Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^m de posto n com matriz geradora M , e seja M^* a matriz de ortogonalização de Gram-Schmidt com linhas v_i^* , $1 \leq i \leq n$. Então

$$\lambda_1(\Lambda) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \|v_i^*\| > 0.$$

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\xi \neq 0$ dado. Escolhemos j o maior inteiro tal que $\xi_j \neq 0$. Então

$$|\xi M \cdot v_j^*| = \left| \left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i \right) \cdot v_j^* \right| = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i (v_i \cdot v_j^*) \right| = |\xi_j| |v_j \cdot v_j^*| = |\xi_j| \|v_j^*\|^2.$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|v_j^*\| \leq |\xi_j| \|v_j^*\| = \frac{|\xi M \cdot v_j^*|}{\|v_j^*\|} \leq \|\xi M\|. \quad (2.1)$$

Agora, seja $r > 0$ tal que $\dim(\text{span}(\Lambda \cap \overline{B(0, r)})) \geq 1$, então existe $\xi_1 \in \mathbb{Z}^n$, $\xi_1 \neq 0$ tal que $\|\xi_1 M\| \leq r$. Portanto de (2.1) existe j tal que $r \geq \|\xi_1 M\| \geq \|v_j^*\| \geq \min_{1 \leq i \leq n} \|v_i^*\|$. Concluimos assim pela definição do ínfimo,

$$\lambda_1(\Lambda) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \|v_i^*\|.$$

□

Corolário 2.21. *Seja Λ um reticulado. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x, y \in \Lambda$ distintos*

$$\|x - y\| \geq \epsilon.$$

Em particular um reticulado é um conjunto discreto de \mathbb{R}^m

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ com $x \neq y$, então $x - y \neq 0$ com $x - y \in \Lambda$. Logo, pela Proposição 2.20 vale

$$\|x - y\| \geq \lambda_1(\Lambda).$$

Escolhendo $\epsilon = \lambda_1(\Lambda)$, concluimos a prova. □

Corolário 2.22. *O mínimo sucessivo é atingido, i.e, para cada $1 \leq i \leq n$ existe um vetor $v_i \in \Lambda$ tal que*

$$\|v_i\| = \lambda_i(\Lambda)$$

Demonstração. Pelo corolário anterior a bola de raio $2\lambda_i(\Lambda)$ tem apenas um número finito de pontos de Λ . E segue da definição de $\lambda_i(\Lambda)$ que existe um v_i em Λ tal que $\|v_i\| = \lambda_i(\Lambda)$. □

Para o caso especial $\lambda_1(\Lambda) = \min \{\|x\| : x \in \Lambda, x \neq 0\}$, o numero $\rho = \frac{1}{2}\lambda_1(\Lambda)$ é chamado raio de empacotamento do reticulado, do qual falaremos na próxima seção.

2.3 Empacotamentos em \mathbb{R}^n

Nesta seção estudaremos empacotamentos de esferas em \mathbb{R}^n . Veremos que todo reticulado dá origem a um empacotamento, mas que existem outros além destes. Mais precisamente associaremos empacotamentos a conjuntos discretos (não necessariamente grupos). Estudaremos também os empacotamentos periódicos; tais empacotamentos são associados a uma união finita de traslações de um reticulado.

Definição 2.23. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto discreto de pontos tais que $\|x - y\| \geq 2\rho$ para algum $\rho > 0$ e para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então, a união

$$\mathcal{P}_X := \bigcup_{x \in X} B_n(x, \rho) \quad (2.2)$$

é chamado **empacotamento de esferas de raio ρ** . No caso que X seja um reticulado dizemos que \mathcal{P}_X é um **empacotamento em reticulado de esferas de raio ρ** .

Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n e $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda$, um **empacotamento periódico** é definido como em (2.2) fazendo

$$X = \bigcup_{j=1}^N (x_j + \Lambda),$$

onde $x + \Lambda := \{x + v : v \in \Lambda\}$. O seguinte exemplo mostra um empacotamento periódico.

Exemplo 2.24. Considere $\Lambda = \mathcal{L}(M)$, onde $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (0, 2)$, $x_3 = (0, 3)$.

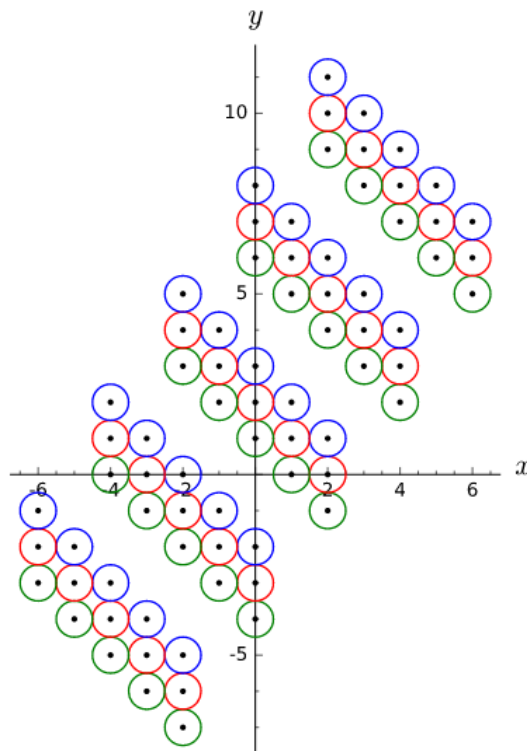


Figura 2.4: Empacotamento periódico

Dado que o conjunto associado a um empacotamento é discreto, o numero

$$\rho := \frac{1}{2} \min \{ \|x - y\| : x, y \in X, x \neq y \} > 0$$

é denominado **raio de empacotamento**. Quando X é um reticulado tem-se

$$\rho = \frac{1}{2} \min \{ \|x\| : x \in X, x \neq 0 \} = \frac{1}{2} \lambda_1(X),$$

onde λ_1 como na Definição 2.19 é o vetor de comprimento mínimo no reticulado. Se $X = \mathcal{L}(M)$, então para cada $x \in \Lambda$

$$\|x\|^2 = x \cdot x = (\xi M) \cdot (\xi M)^t = \xi G \xi^t = f(\xi), \quad (2.3)$$

onde $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $G = MM^t$ é a matriz de Gramm.

Note que f é uma forma quadrática e vale:

$$4\rho^2 = \min \{ f(\xi) : \xi \in \mathbb{Z}^n \}.$$

Tal mínimo da função f é chamado **mínimo homogêneo**. A formas definidas positivas com coeficientes racionais guardam muita relação com os reticulados, para mais detalhes ver [7].

Dado um empacotamento \mathcal{P} e $r > 0$ o número

$$\Delta_{\mathcal{P}}(r) := \frac{\text{Vol}(B_n(0, r) \cap \mathcal{P})}{\text{Vol}(B_n(0, r))}$$

é chamado **densidade finita**.

Definição 2.25. A densidade de empacotamento de um empacotamento \mathcal{P}_X é

$$\Delta_{\mathcal{P}} := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \Delta_{\mathcal{P}}(r) \quad (2.4)$$

o limite superior das densidades finitas.

A **constante de empacotamento** é definida por

$$\Delta_n := \sup_{\mathcal{P}} \Delta_{\mathcal{P}}, \quad (2.5)$$

onde o supremo é feito sobre todos os possíveis empacotamentos \mathcal{P} em \mathbb{R}^n .

Em [19, Existence Theorem] mostra-se que o valor (2.5) é atingido para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$. São poucos os valores para os que se conhece Δ_n . Em dimensão 1 é trivial $\Delta_1 = 1$. Em dimensão 2 o empacotamento associado ao reticulado

hexagonal do Exemplo 2.4 tem maior densidade no plano, fato mostrado por Axel Thue [36] em 1892 ver [16]. Em dimensão 3, torna-se mais difícil. O Problema conhecido como conjectura de Kepler desde 1611; afirma que $\Delta_3 = \frac{\pi}{\sqrt{18}}$. Em 1998 Thomas Hales deu uma prova desta conjectura e mostra que a igualdade é atingida pelo empacotamento associado ao reticulado f.c.c do Exemplo 2.5 baseada em cálculos computacionais, a revista *Annals of Mathematics* decidiu dar um 99% da veracidade da prova, já que era impossível verificar os três gigabytes de código veja [35], [20].

O número que deseja-se conhecer é Δ_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Recentemente Maryna Viazovska provou $\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.25367$ é atingido pela densidade do empacotamento em reticulado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 : \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad (2.6)$$

o qual é chamado E_8 -empacotamento que estudaremos mais em detalhe na seguinte seção.

A seguir mostraremos que a fórmula (2.4) quando \mathcal{P}_X é um empacotamento em reticulado ou periódico, tem uma expressão em termos dos elementos do reticulado. Para isto usaremos o resultado abaixo cuja prova pode ser encontrada em [18, Satz 4].

Teorema 2.26. *Seja K um conjunto compacto e convexo e \mathcal{P} um empacotamento em \mathbb{R}^n . Então vale*

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(rK)} \sum_B \text{Vol}(B),$$

onde $rK = \{rx : x \in K\}$ e a soma é feita sobre todas as bolas do empacotamento tais que $B \subset rK$.

Corolário 2.27. *Sejam Λ um reticulado em \mathbb{R}^n e \mathcal{P}_{Λ} o empacotamento em reticulado associado a Λ . Então*

$$\Delta_{\mathcal{P}_{\Lambda}} = \frac{\text{Vol}(B(0, \rho))}{\text{Vol}(\mathcal{P})} = \frac{\pi^{n/2} \rho^n}{\det^{1/2}(\Lambda) \Gamma(n/2 + 1)}. \quad (2.7)$$

Aqui ρ é o raio de empacotamento, \mathcal{P} é o paralelepípedo fundamental associado a Λ e Γ é a função Gamma.

Demonstração. Suponhamos que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$ onde M tem linhas $v_i, i = 1, \dots, n$.

Consideremos o conjunto

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i v_i : -1 \leq t_i \leq 1 \right\},$$

compacto e convexo. Note-se que $\text{Vol}(K) = 2^n |\det(M)|$. Pelo Teorema 2.26, para $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{\mathcal{P}_X} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(mK)} \sum_B \text{Vol}(B).$$

Como $mK = \{\sum_{i=1}^n t_i v_i : -m \leq t_i \leq m\}$, então $\#\{B : B \subset mK\} = (2m-1)^n$. Daí

$$\sum_B \text{Vol}(B) = (2m-1)^n \text{Vol}(B(0, \rho))$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(mK)} \sum_B \text{Vol}(B) &= \frac{1}{m^n \text{Vol}(K)} (2m-1)^n \text{Vol}(B(0, \rho)) \\ &= \frac{1}{m^n 2^n |\det(M)|} (2m-1)^n \text{Vol}(B(0, \rho)) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2m}\right)^n \frac{\text{Vol}(B(0, \rho))}{|\det(M)|} \end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos o que queremos, o que conclui a prova. \square

Corolário 2.28. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n e $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda$. Considere \mathcal{P}_X um empacotamento periódico associado a $X = \cup_{j=1}^N (x_j + \Lambda)$. Então*

$$\Delta_{\mathcal{P}_X} = \frac{N \pi^{n/2} \rho^n}{|\det^{1/2}(\Lambda)| \Gamma(n/2 + 1)},$$

onde ρ é o raio de empacotamento.

Demonstração. consideremos

$$\rho = \frac{1}{2} \min \{\|x - y\| : x, y \in X, x \neq y\}$$

o raio de empacotamento. A configuração de bolas da translação associada a x_1 é a mesma configuração associada ao reticulado, ver Figura 2.4, então vale

$$\Delta_1 = \frac{\pi^{n/2} \rho^n}{|\det^{1/2}(\Lambda)| \Gamma(n/2 + 1)},$$

mas há N configurações do mesmo tipo, logo $\Delta_{\mathcal{P}_X} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_N$. \square

2.4 Reticulado dual

Nessa seção fins definiremos o reticulado dual, os sub-reticulados, as homotetias, os reticulados inteiros, pares, unimodulares e os autoduais. Damos a seguir a definição de sub-reticulados como subgrupos do mesmo reticulado.

Seja Λ um reticulado. Dizemos que $\Lambda' \subseteq \Lambda$ é um **sub-reticulado** de Λ quando Λ' é um reticulado contido em Λ . Também podemos definir num reticulado a operação de multiplicação por uma constante não nula.

Definição 2.29. *Dado um reticulado Λ em \mathbb{R}^m , definimos a operação homotetia tal que para cada $t \in \mathbb{R}$*

$$t\Lambda = \{tv : v \in \Lambda\}$$

o qual é um reticulado em \mathbb{R}^m .

Podemos ver das definições que $\Lambda \subseteq \text{span}(\Lambda) \subseteq \mathbb{R}^m$. Portanto, podemos considerar Λ como subgrupo aditivo normal de $\text{span}(\Lambda)$. Assim podemos considerar o grupo quociente $\text{span}(\Lambda)/\Lambda = \{x + \Lambda : x \in \text{span}(\Lambda)\}$. Da mesma forma é possível para um subgrupo Λ' de Λ , $\Lambda/\Lambda' = \{x + \Lambda' : x \in \Lambda\}$.

Notemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k\Lambda \subseteq \Lambda$. A seguinte proposição nos permite descrever de maneira explícita os grupos quocientes anteriormente mencionados.

Proposição 2.30. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^m de posto n . Então*

i) $\text{span}(\Lambda)/\Lambda \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

ii) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k\Lambda$ é um subgrupo de Λ e $\Lambda/k\Lambda \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n$.

Demonstração. i) Suponhamos que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$ onde M tem linhas linearmente independentes $v_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n$. Consideremos a aplicação $\sigma : \text{span}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ dada por $\sigma(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mathbb{Z}^n$. É claro que σ é um homomorfismo de grupos com $\text{Ker}(\sigma) = \Lambda$. Logo, a conclusão segue do primeiro dos teoremas de isomorfismos.

ii) Não é difícil verificar que $k\Lambda$ é um subgrupo de Λ . definamos agora $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^n$ dada por $\psi(v_i) := e_i, i = 1, \dots, n$. Fica claro que ψ é um isomorfismo de grupos. Portanto

$$\Lambda/k\Lambda \cong \mathbb{Z}^n/k(\mathbb{Z})^n \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^n.$$

□

A seguir vamos considerar apenas reticulados de posto completo e damos nomes a alguns reticulados especiais que apareceram na teoria desenvolvida aqui.

Definição 2.31. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . O reticulado dual Λ^* é definido por*

$$\Lambda^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v \in \mathbb{Z}, \quad \forall v \in \Lambda\}. \quad (2.8)$$

O seguinte lema mostra que Λ^* é de fato um reticulado e dá uma caracterização dele a partir da matriz geradora de Λ .

Lema 2.32. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n tal que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$. Então $\Lambda^* = \mathcal{L}([M^{-1}]^t)$.*

Demonstração. Seja $\Lambda' = \mathcal{L}([M^{-1}]^t)$. Mostremos que $\Lambda' = \Lambda^*$.

Seja $w \in \Lambda'$ então $w = \xi_1 [M^{-1}]^t$ para algum $\xi_1 \in \mathbb{Z}^n$. Tome $v \in \Lambda$, então $v = \xi_2 M$ para algum $\xi_2 \in \mathbb{Z}^n$, então

$$w \cdot v = \xi_1 [M^{-1}]^t \cdot \xi_2 M = \xi_1 \cdot \xi_2 \in \mathbb{Z}$$

Assim, $w \in \Lambda^*$.

Seja agora $x \in \Lambda^*$ como $[M^{-1}]^t$ é invertível, existe $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = y [M^{-1}]^t$. Mostraremos que $y \in \mathbb{Z}^n$.

Para $\xi \in \mathbb{Z}^n$ qualquer, temos

$$y \cdot \xi = y \cdot \xi M M^{-1} = x \cdot \xi M \in \mathbb{Z}.$$

Em particular para $\xi = e_i$, temos que $y_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, então $y \in \mathbb{Z}^n$. Como consequência $x \in \Lambda'$. □

Definição 2.33. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n .*

- 1) Λ é **inteiro** se $v \cdot w \in \mathbb{Z}$ para todo $v, w \in \Lambda$
- 2) Λ é **par** se $\|v\|^2 \in 2\mathbb{Z}$ para todo $v \in \Lambda$
- 3) Λ é **umimodular** $\det(\Lambda) = 1$
- 4) Λ é **autodual** se $\Lambda^* = \Lambda$

Lema 2.34. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n inteiro. Então vale*

$$\Lambda \subseteq \Lambda^* \subseteq \frac{1}{\det(\Lambda)} \Lambda.$$

Demonstração. Seja $v \in \Lambda$, como Λ é inteiro para cada $w \in \Lambda$, $v \cdot w \in \mathbb{Z}$, então $v \in \Lambda^*$. Assim $\Lambda \subseteq \Lambda^*$.

Para a segunda inclusão: Suponhamos $\Lambda = \mathcal{L}(M)$ para alguma $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

invertível. Pelo Lema 2.32, $\Lambda^* = \mathcal{L}((M^{-1})^t)$.

De outro lado a matriz de Gram $G = MM^t = (v_i \cdot v_j) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ tem inversa

$$G^{-1} = \frac{1}{\det(\Lambda)} \text{Adj}(G),$$

onde $\text{Adj}(G)$ é a matriz adjunta de G . Logo, dado $w \in \Lambda^*$, existe $\xi \in \mathbb{Z}^n$ tal que

$$\begin{aligned} w &= \xi(M^{-1})^t = \xi(M^{-1})^t M^{-1} M = \xi(M^t)^{-1} M^{-1} M = \xi(MM^t)^{-1} M \\ &= \xi G^{-1} M = \frac{1}{\det(\Lambda)} \xi \text{Adj}(G) M = \frac{1}{\det(\Lambda)} \xi' M, \end{aligned}$$

onde $\xi' = \xi \text{Adj}(G) \in \mathbb{Z}^n$. Assim $\Lambda^* \subseteq \frac{1}{\det(\Lambda)} \Lambda$. □

Teorema 2.35. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Se Λ é inteiro e unimodular então, Λ é autodual.*

Demonstração. Dado que Λ inteiro e $\det(\Lambda) = 1$. Pelo Lema 2.34 temos $\Lambda = \Lambda^*$. Isto é Λ é autodual. □

Corolário 2.36. *Todo reticulado par e unimodular é autodual.*

Demonstração. Segue-se da identidade, $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ para todo $v, w \in \Lambda$, que todo reticulado par é inteiro. Logo, do Teorema 2.35, Λ é autodual. □

Na seguinte seção damos o mais importante exemplo de reticulado sobre o qual é baseado o principal resultado nesta dissertação.

2.5 O reticulado E_8

O reticulado E_8 é um reticulado gerado por vetores $x \in E_8$ tais que $\|x\|^2 = 2$, também conhecido como **Gosset lattice**. Este pode ser caracterizado como o único, par e unimodular de posto 8 em \mathbb{R}^8 cuja forma quadrática 2.3 é definida positiva veja [32]. O grupo das isometrias (transformações ortogonais dele mesmo em ele mesmo) é gerado pelas reflexões e tem ordem $2^{14} 3^5 5^2 7$ veja [30, Teorema 6].

O seguinte teorema provado por Mordell, afirma a unicidade do reticulado E_8 em \mathbb{R}^8 . Uma prova pode ser encontrada em [31], [17].

Teorema 2.37. *Seja Λ um reticulado de posto $n \leq 8$, integral e unimodular. Então $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$, ou $n = 8$ e $\Lambda \cong E_8$.*

A seguir damos uma definição do reticulado E_8 .

$$E_8 := \left\{ (x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 : \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}. \quad (2.9)$$

Mostramos a seguir que E_8 é de fato um reticulado.

Lema 2.38. *Temos que $E_8 = \mathcal{L}(M)$ onde*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Demonstração. Seja $\Lambda = \mathcal{L}(M)$. Mostraremos que $E_8 = \Lambda$.

Como as linhas de M estão em E_8 , temos que $\Lambda \subseteq E_8$. Para a outra inclusão seja $X = E_8 \setminus \Lambda$. Mostraremos que $X = \emptyset$. Suponhamos $X \neq \emptyset$. Seja $v \in X$, então $v \in E_8$ e $v \notin \Lambda$. Como Λ contém a $(1/2, 1/2, \dots, 1/2)$ podemos supor que v tem coordenadas inteiras. Por inspeção verificamos que Λ contém os vetores da forma $2e_i, i = 1, 2, \dots, 8$. Portanto os elementos de X são da forma $v = (v_i)$ onde $v_i \in \{0, 1\}$. Isto força $v = (0, \dots, 0)$ ou $v = (1, 1, \dots, 1)$ o qual é um absurdo. Logo, $X = \emptyset$. Assim $E_8 = \Lambda$. \square

Corolário 2.39. *O reticulado E_8 é unimodular.*

Demonstração. Um calculo simples mostra que $\det(M) = 1$ \square

Lema 2.40. *O reticulado E_8 é par.*

Demonstração. Seja $v = (v_i) \in E_8$. Mostraremos que $\|v\|^2 \in 2\mathbb{Z}$. Como $v \in E_8$,

$$(v_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \text{ e } \sum_{i=1}^8 v_i \equiv 0 \pmod{2}. \quad (2.11)$$

Suponhamos que $\sum_{i=1}^8 v_i = 2s$, para algum $s \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^8 v_i \right)^2 = \|v\|^2 + 2 \sum_{j \neq k} v_j v_k = 4s^2, j, k = 1, \dots, 8 \quad (2.12)$$

De (2.11) resultam os dois casos:

- Se $v \in \mathbb{Z}^8$, de (2.12) temos: $\|v\|^2 = 4s^2 - 2 \sum_{j \neq k} v_j v_k \equiv 0 \pmod{2}$
- Se $v \in (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8$, então existem $m_i \in \mathbb{Z}$ tais que $2v_i = 2m_i + 1, i = 1, \dots, 8$.
Logo,

$$16s^2 = \left(\sum_{i=1}^8 (2v_i) \right)^2 = \|2v\|^2 + 2 \sum_{j \neq k} (2v_j)(2v_k) = 4\|v\|^2 + 2 \sum_{j \neq k} (2m_j + 1)(2m_k + 1) \quad (2.13)$$

Dado que $(2m_j + 1)(2m_k + 1) = 4t_{jk} + 2s_{jk} + 1$ para alguns $t_{jk}, s_{jk} \in \mathbb{Z}, j, k = 1, \dots, 8$. Então de (2.13) temos que

$$\begin{aligned} 4\|v\|^2 &= 16s^2 - 2 \sum_{j \neq k} (4t_{jk} + 2s_{jk} + 1) \\ &= 16s^2 - 8 \sum_{j \neq k} t_{jk} - 4 \sum_{j \neq k} s_{jk} - 2 \sum_{j \neq k} 1 \end{aligned}$$

Assim, $\|v\|^2 \in 2\mathbb{Z}$, o que conclui a prova. □

Lema 2.41. *Existem 240 vetores em E_8 com norma mínima $\lambda_1(E_8) = \sqrt{2}$.*

Demonstração. As únicas formas possíveis de escolher estes vetores com norma $\sqrt{2}$ são:

- $(\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ e permutações.
- $(\pm 1/2, \pm 1/2, \dots, \pm 1/2)$ e permutações.

No segundo caso o número dos signos $(-)$ deve ser par e o número dos signos $(+)$ também é par. Para o primeiro caso há $2^2 \binom{8}{2} = 112$ vetores e para o segundo caso há $2^7 = 128$ vetores, para um total de 240 vetores. □

2.6 Séries de Fourier e fórmula somatória de Poisson

Estudaremos Séries de Fourier para funções Λ -periódicas onde Λ é um reticulado de posto completo em \mathbb{R}^n , nosso objetivo será dar as condições suficientes para ter a convergência da série derivar a fórmula somatória de Poisson.

Dado Λ um reticulado de posto completo em \mathbb{R}^n . Diremos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é Λ -periódica se

$$f(x + v) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall v \in \Lambda$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $v \in \Lambda$. Tais funções podem ser identificadas como funções definidas em $T^n := \mathbb{R}^n / \Lambda$ chamado **Toro n-dimensional** com respeito a Λ . Quando $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ escreveremos \mathbb{T}^n . Como toda função periódica fica completamente determinada pelos valores sobre o paralelepípedo fundamental, vamos considerar apenas o paralelepípedo \mathcal{P} associado a Λ e o cubo n -dimensional $\mathcal{Q}_n = [0, 1]^n$ associado a \mathbb{Z}^n . Faremos a identificação de integração e mesurabilidade sobre o toro com a mesurabilidade e integração no paralelepípedo \mathcal{P} com respeito da medida de Lebesgue da seguinte forma

$$\int_{T^n} f(x) dx := \int_{\mathcal{P}} f(x) dx.$$

Para simplificar a escrituras das derivadas adotamos a notação de Laurent Schwartz. Para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$

$$|I| := \sum_{j=1}^n i_j, \quad \partial^I f := \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}}, \quad x^{|I|} = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Definimos os espaços

$$C^k(T^n) := \{f : T^n \rightarrow \mathbb{C} : \partial^I f \text{ é contínua, } |I| \leq k\}.$$

No caso $k = 0$, $C^0(T^n)$ é o conjunto das funções contínuas sobre T^n .

$$L^p(T^n) := \left\{ f : T^n \rightarrow \mathbb{C} : \left(\int_{T^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

onde $1 \leq p < \infty$.

A convolução de $f, g \in L^1(T^n)$ é dada por

$$f * g(x) := \int_{T^n} g(x - y) f(y) dy$$

para todo $x \in T^n$.

A transformada de Fourier (contínua) de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é definida como se faz usualmente

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Dado um reticulado Λ em \mathbb{R}^n . Dizemos que a expressão

$$P(x) := \sum_{v \in \Lambda^*} a_v e^{2\pi i x \cdot v}, \quad a_v \in \mathbb{C},$$

é um polinômio trigonométrico sobre Λ , se todos os termos na soma são nulos exceto

uma quantidade finita deles. Definimos

$$\mathcal{A}_\Lambda := \{P : T^n \longrightarrow \mathbb{C} : P \text{ é polinômio trigonométrico sobre } \Lambda\}$$

o conjunto dos polinômios trigonométricos sobre Λ . Nesta seção vamos entender quando uma função Λ -periódica pode ser representada como limite de polinômios trigonométricos.

Definição 2.42. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Consideramos o conjunto*

$$P_\Lambda := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ é } \Lambda\text{-periódica}\}.$$

Para $f \in P_\Lambda$ e para cada $v \in \Lambda^*$, definimos o v -ésimo coeficiente de Fourier de f

$$\widehat{f}(v) := \frac{1}{|\Lambda|} \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot v} dx,$$

onde $|\Lambda| := \text{Vol}(\mathcal{P})$. A série

$$\sum_{v \in \Lambda^*} \widehat{f}(v) e^{2\pi i x \cdot v}$$

é chamada **série de Fourier de f** .

A seguinte proposição mostra algumas propriedades da transformada de Fourier.

Proposição 2.43. *Sejam Λ um reticulado em \mathbb{R}^n , $f, g \in P_\Lambda$. Então*

i) *O operador $\widehat{\cdot} : L^1(T^n) \longrightarrow \ell^\infty(\Lambda^*)$ é linear e limitado, e vale*

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty(\Lambda^*)} \leq \frac{1}{|\Lambda|} \|f\|_{L^1(T^n)}.$$

ii) *Para $f \in L^1(T^n)$, tem-se $\widehat{\tau_h f}(v) = e^{-2\pi i v \cdot h} \widehat{f}(v)$ onde $\tau_h f(x) := f(x - h)$.*

iii) *Se $f \in C^k(T^n)$ então $\widehat{(D^I f)}(v) = (2\pi i v)^{|I|} \widehat{f}(v)$ para todo $I \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$ com $|I| \leq k$.*

iv) *Se $f, g \in L^1(T^n)$, $\widehat{f * g}(v) = |\Lambda| \widehat{f}(v) \widehat{g}(v)$.*

v) *Para $f \in L^1(T^n)$, temos*

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \widehat{f}(v) = 0.$$

A asserção v) é chamado lema de Riemann-Lebesgue.

Demonstração. i) e ii) são imediatos da definição. Para verificar iii), aplicamos integração por partes. Para provar iv) utilizamos o teorema de Fubini.

Vamos provar v). Suponhamos que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$. Para cada $v \in \Lambda^*$, vale

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot v} dx.$$

Pelo Lema 2.32, existe $\xi \in \mathbb{Z}^n$ tal que $v = \xi(M^{-1})^t$. Então

$$\widehat{f}(v) = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi(M^{-1})^t} dx.$$

Fazendo a mudança de variável

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \longmapsto uM.$$

Temos um isomorfismo tal que $T(\mathcal{Q}_n) = \mathcal{P}$ e $\det(T) = \det(M)$. Pelo Lema 2.13, $\text{Vol}(\mathcal{P}) = |\det(M)|$, então

$$\widehat{f}(v) = \frac{|\det(M)|}{|\Lambda|} \int_{\mathbb{T}^n} f(uM) e^{-2\pi i u \cdot \xi} du = \int_{\mathbb{T}^n} \widetilde{f}(x) e^{-2\pi i v \cdot \xi} dx, \quad \text{onde } \widetilde{f}(x) := f(xM).$$

Além disso, $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{T}^n) \Leftrightarrow f \in L^1(T^n)$.

Então, sem perda de generalidade vamos supor que $\Lambda = \mathbb{Z}^n$. Agora, como o conjunto das funções em escada é denso em $L^1(\mathbb{T}^n)$, dado $\epsilon > 0$, existe uma função em escada s tal que $\|f - s\|_{L^1(T^n)} < \epsilon/2$. Logo

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|\widehat{f - s}\|_{l^\infty(\Lambda^*)} + |\widehat{s}(\xi)| \leq \|f - s\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\widehat{s}(\xi)| < \epsilon/2 + |\widehat{s}(\xi)|.$$

Então, é suficiente mostrar que o lema vale para funções em escadas. Para isso é suficiente mostrar que:

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x_j \cdot \xi} dx_j = 0 \quad (2.14)$$

para todo retângulo $\mathcal{R} = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \subseteq \mathcal{Q}_n$.

Com efeito, como $\|\xi\| \rightarrow \infty$, existe j , $1 \leq j \leq n$ tal que $|\xi_j| \rightarrow \infty$ então

$$\left| \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right| = \left| \frac{1}{2\pi i \xi_j} \{e^{-2\pi i a_j \cdot \xi} - e^{-2\pi i b_j \cdot \xi}\} \right| \leq \frac{1}{\pi |\xi_j|} \longrightarrow 0 \text{ quando } |\xi_j| \rightarrow \infty,$$

que prova (2.14). □

Vários resultados são parecidos ao caso uni-dimensional. Aqui o produto interno que faz de $L^2(T^n)$ um espaço de Hilbert é definido como se faz usualmente

$$\langle f, g \rangle := \int_{T^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

O conjunto de polinômios trigonométricos é um conjunto denso nos espaços $C^0(T^n)$ e $L^2(T^n)$. A seguir mostraremos este e outros fatos.

Lema 2.44. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n tal que $\Lambda = \mathcal{L}(M)$. Para cada $v \in \Lambda^*$ definimos*

$$f_v(x) := e^{2\pi i x \cdot v}$$

para $x \in T^n$. Então $f_v \in P_\Lambda$ para cada $v \in \Lambda^*$ e o conjunto $\{f_v\}_{v \in \Lambda^*}$ é um conjunto ortogonal.

Demonstração. Sejam Λ^* o reticulado dual de Λ , \mathcal{P} o paralelepípedo fundamental associado a Λ . É claro que $f_v \in P_\Lambda$ para cada $v \in \Lambda^*$.

Sejam $v, w \in \Lambda^*$. Se $v = w$, então $\langle f_v, f_w \rangle = \text{Vol}(\mathcal{P})$. Suponhamos que $h = w - v \neq 0$, $h \in \Lambda^*$, pelo Lema 2.32 sabemos que $\Lambda^* = \mathcal{L}([M^{-1}]^t)$. Então existe $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\xi \neq 0$ tal que $h = \xi[M^{-1}]^t$. Sabemos que a mudança de variável

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \longrightarrow uM = x$$

é um isomorfismo tal que $T(\mathcal{Q}_n) = \mathcal{P}$ e $\det(T) = \det(M)$. Então, pelo teorema de mudança de variáveis temos que:

$$\langle f_v, f_w \rangle = \int_{T^n} e^{-2\pi i x \cdot v} e^{2\pi i x \cdot w} dx = \int_{T^n} e^{2\pi i x \cdot \xi [M^{-1}]^t} dx = |\det M| \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Como existe $\xi_j \in \mathbb{Z}$ tal que $\xi_j \neq 0$. Então

$$\int_{T^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} dx = \prod_{i=1}^n \int_0^1 e^{2\pi i x_i \xi_i} dx_i = 0.$$

Assim o conjunto $\{f_v\}_{v \in \Lambda^*}$ é ortogonal. □

Proposição 2.45. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Então,*

- i) *O conjunto \mathcal{A}_Λ é denso em $C^0(T^n)$ e $L^p(T^n)$, para $1 \leq p < \infty$.*
- ii) *Se $f \in L^1(T^n)$ tal que $\widehat{f}(v) = 0$ para todo $v \in \Lambda^*$, então $f(x) = 0$ em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$.*
- iii) *Se $f \in L^1(T^n)$ e $\widehat{f} \in l^1(\Lambda^*)$, então*

$$f(x) = \sum_{v \in \Lambda^*} \widehat{f}(v) e^{2\pi i x \cdot v} \tag{2.15}$$

para quase todo $x \in T^n$. Em particular f pode ser modificada num conjunto de medida nula tal que $f \in C^0(T^n)$ e vale ainda (2.15).

Demonstração. i) Consideremos o conjunto \mathcal{A}_Λ dos polinômios trigonométricos sobre Λ . Então \mathcal{A}_Λ é um álgebra em $C^0(T^n)$ que separa pontos, contem as constantes e é fechado pela conjugação complexa. Então, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, \mathcal{A}_Λ é denso em $C^0(T^n)$. Como $C^0(T^n)$ é denso em $L^p(T^n)$

para $1 \leq p < \infty$, isso conclui a prova de i).

ii) Suponhamos que $\widehat{f} = 0$, então

$$\int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot v} dx = 0 \quad \forall v \in \Lambda^*.$$

Logo, $\int_{T^n} f(x) P(x) dx = 0$ para todo $P \in \mathcal{A}_\Lambda$. Isto implica

$$\int_{T^n} f(x) g(x) dx = 0 \tag{2.16}$$

para toda função $g \in C^0(T^n)$.

Agora, sejam $a \in \text{int}(\mathcal{P})$ e $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset \mathcal{P}$. Definimos

$$h(x) := \chi_{B(a, r)}(x), \quad \forall x \in \mathcal{P}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos a sequência de funções $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dadas por

$$f_m(x) := \frac{\text{dist}(x, \mathcal{P} \setminus B(a, r))}{\text{dist}(x, \mathcal{P} \setminus B(a, r)) + \text{dist}(x, B(a, r_n))}, \quad x \in \mathcal{P},$$

$$f_m(x + v) := f_m(x), \quad \forall x \in \mathcal{P} \quad \forall v \in \Lambda,$$

onde a sequência $\{r_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ satisfaz: $0 < r_m < r_{m+1} < r$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = r$. Não é difícil verificar que $f_m \in C^0(T^n)$, $\forall m \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Agora, por (2.16) e o teorema da convergência dominada de Lebesgue [28, Teorema 1.34]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{P}} f(x) f_m(x) dx = \int_{\mathcal{P}} f(x) \chi_{B(a, r)}(x) dx = \int_{\mathcal{P}} f(x) \chi_{B(0, r)}(a - x) dx = 0. \tag{2.17}$$

Logo, pelo teorema de diferenciação de Lebesgue [29, Corolário 2.13] e (2.17)

temos

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(B(a, r))} \int_{B(a, r)} f(x) dx \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(B(r, 0))} \int_{\mathcal{P}} f(x) \chi_{B(r, 0)}(a - x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

em q.t.p $a \in \mathbb{R}^n$.

iii) Dado que $\sum_{v \in \Lambda^*} |\widehat{f}(v)| < \infty$, temos que a função

$$g(x) = \sum_{v \in \Lambda^*} \widehat{f}(v) e^{2\pi i x \cdot v}$$

é o limite uniforme de funções contínuas. Logo $g \in C^0(T^n) \subset L^1(T^n)$ e $\widehat{g}(v) = \widehat{f}(v)$ para cada $v \in \Lambda^*$, pelo Lema 2.44 temos então, que $h = f - g \in L^1(T^n)$ com $\widehat{h} = 0$. Por ii) se segue que $h = 0$ em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$, isto é $f = g$ em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$. □

A seguir vamos provar um teorema de grande importância e aplicações na matemática.¹

Proposição 2.46. (Parseval)

Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n . Se $f \in L^2(T^n)$, então $\widehat{f} \in \ell^2(\Lambda^*)$ e vale

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^2(\Lambda^*)} = \frac{1}{|\Lambda|} \|f\|_{L^2(T^n)}.$$

Mais ainda, o operador $\widehat{\cdot} : L^2(T^n) \rightarrow \ell^2(\Lambda^*)$ é sobrejetivo.

Demonstração. Seja $f \in L^2(T^n)$ e consideremos o conjunto de funções em $L^2(T^n)$

$$M := \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} f_w(x) : w \in \Lambda^* \right\}.$$

Sabemos M é um conjunto ortonormal pelo Lema 2.44 e pela Proposição 2.45, $\overline{\text{span} M} = L^2(T^n)$ na norma de $L^2(T^n)$. Por [34, Teorema 2.3] parte iii), a sequência

$$S_N(f)(x) := \sum_{\|w\| \leq N} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} f_w(x) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} f_w(x) = \sum_{\|w\| \leq N} \widehat{f}(w) e^{2\pi i x \cdot w}$$

¹Porém, esse resultado não será usado nesta dissertação.

é tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - f\|_{L^2(T^n)} = 0$$

Daí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 \Leftrightarrow \sum_{w \in \Lambda^*} |\widehat{f}(w)|^2 = \frac{1}{|\Lambda|} \|f\|_{L^2(T^n)}^2 \Leftrightarrow \|\widehat{f}\|_{\ell^2(\Lambda^*)} = \frac{1}{|\Lambda|} \|f\|_{L^2(T^n)}$$

Seja $\{a_v\}_{v \in \Lambda^*}$ em $\ell^2(\Lambda^*)$, consideremos $s_N(x) = \sum_{|v| \leq N} a_v e^{2\pi i x \cdot v}$ então para $M, N \in \mathbb{N}$ com $N < M$

$$\|s_M - s_N\|_{L^2} \leq \sum_{N < |v| \leq M} |a_v|^2.$$

Portanto, $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $g \in L^2(T^n)$ tal que $g(x) = \sum_{v \in \Lambda^*} a_v e^{2\pi i x \cdot v}$. Como $\widehat{s_N}(v) = \int_{\Pi} s_N(x) e^{2\pi i x \cdot v} dx = a_v$, temos que $a_v = \widehat{g}(v)$ para cada $v \in \Lambda^*$ se segue que o operador transformada de Fourier é sobrejetivo, o que conclui a prova. \square

Vamos apresentar agora um resultado que relaciona a transformadas discretas e contínuas de Fourier conhecido como fórmula de somatória de Poisson. Aqui precisa-se de um decaimento das funções f e $\mathcal{F}(f)$.

Teorema 2.47. [Fórmula somatória de Poisson]

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Suponha que existam $C, \epsilon > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq C \frac{1}{(1 + \|x\|)^{n+\epsilon}} \quad e \quad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq C \frac{1}{(1 + \|\xi\|)^{n+\epsilon}}, \quad (2.18)$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Então vale

$$\sum_{v \in \Lambda} f(x + v) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{w \in \Lambda^*} \mathcal{F}(f)(w) e^{2\pi i x \cdot w} \quad (2.19)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular

$$\sum_{v \in \Lambda} f(v) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{w \in \Lambda^*} \mathcal{F}f(w).$$

Demonstração. Da condição (2.18) temos que $f, \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Portanto que $\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$F(x) := \sum_{v \in \Lambda} f(x + v), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Notemos que $F \in \mathbb{P}_\Lambda$. Pela condição (2.18) e $v \in \Lambda$ com $\|v\|$ o suficientemente

grande

$$|f(x+v)| \leq C \frac{1}{(1+\|x+v\|)^{n+\epsilon}} \leq C \frac{1}{(1-R+\|v\|)^{n+\epsilon}}, \quad R = \max_{x \in \mathcal{P}} \|x\|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então $\sum_{v \in \Lambda} |f(x+v)|$ converge absolutamente e uniformemente em \mathbb{R}^n . Logo $F \in C^0(T^n)$.

Por outro lado

$$\int_{T^n} \left| \sum_{v \in \Lambda} f(x+v) \right| dx = \sum_{v \in \Lambda} \int_{\mathcal{P}} |f(x+v)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \quad (2.20)$$

Então, $F \in L^1(T^n)$. Deduzimos de (2.20) e o teorema de Fubini que

$$\int_{T^n} \left\{ \sum_{v \in \Lambda} f(x+v) e^{-2\pi i x \cdot w} \right\} dx = \sum_{v \in \Lambda} \left\{ \int_{T^n} f(x+v) e^{-2\pi i x \cdot w} dx \right\} \quad (2.21)$$

para todo $w \in \Lambda^*$.

Os coeficientes de Fourier de F . Obtemos usando (2.21) que

$$\begin{aligned} \widehat{F}(w) &= \frac{1}{|\Lambda|} \int_{T^n} F(x) e^{-2\pi i x \cdot w} dx = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{v \in \Lambda} f(x+v) e^{-2\pi i x \cdot w} \right\} dx \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{v \in \Lambda} \left\{ \int_{\mathcal{P}} f(x+v) e^{-2\pi i x \cdot w} dx \right\} = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot w} dx \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{F}(f)(w) \quad \text{para todo } w \in \Lambda^*. \end{aligned}$$

A condição (2.18) para $\mathcal{F}(f)$ implica que

$$|\widehat{F}(w)| = \frac{1}{|\Lambda|} |\mathcal{F}(f)(w)| \leq \frac{C}{|\Lambda|} \frac{1}{(1+\|w\|)^{n+\epsilon}}$$

para todo $w \in \Lambda^*$. Então, $\widehat{F} \in l^1(\Lambda^*)$ e deduzimos da Proposição 2.45 parte iii)

$$F(x) = \sum_{w \in \Lambda^*} \widehat{F}(w) e^{2\pi i x \cdot w} \quad (2.22)$$

em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$. Como $F \in C^0(T^n)$, (2.22) vale em todo $x \in \mathbb{R}^n$, o que conclui a prova do teorema. \square

Observação 2.48. A fórmula (2.19) da Teorema 2.47 vale em q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$ ainda sem supor f continua.

Para um estudo mais detalhado do análise da convergência das Séries de Fourier quando $\Lambda = \mathbb{Z}^n$, ver [6].

Capítulo 3

O grupo modular e formas modulares

Neste capítulo encontraremos transformações do tipo

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

onde a, b, c, d são inteiros com $ad - bc = 1$. Definiremos as formas modulares como as Séries de Eisenstein $G_k(\tau)$, a função determinante $\Delta(\tau)$ e função elíptica j -invariante $j(\tau)$.

3.1 O grupo modular

Definição 3.1. *O grupo modular é o grupo das matrizes 2×2 com entradas inteiras e determinante 1,*

$$SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) : ad - bc = 1 \right\}.$$

Proposição 3.2. *O grupo modular $SL_2(\mathbb{Z})$ é gerado pelas matrizes*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

isto é, para cada $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ existem $r \in \mathbb{N}_{>0}$ e inteiros $n_i, i = 1, \dots, r$ tais que

$$\alpha = T^{n_1} S^{n_2} T^{n_3} \dots S^{n_{r-1}} T^{n_r} \tag{3.1}$$

(a representação não é única)

Demonstração. Primeiramente não é difícil verificar as duas seguintes identidades :

$$S^2 = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Seja $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Sem perda de generalidade vamos supor que $c \geq 0$.

Procederemos por indução sobre c .

Se $c = 0$, temos que $ad = 1$, então $a = d = \pm 1$ e portanto $\alpha = T^b$ ou S^2T^{-b} .

Se $c = 1$, $b = ad - 1$, então

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & ad - 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = T^a S T^d.$$

Vamos supor que vale (3.1) para todo $0 \leq k < c$. Como $ad - bc = 1$, então $(c, d) = 1$, pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = cq + r \text{ com } 0 < r < c.$$

Como

$$\alpha T^{-q} S = \begin{pmatrix} -aq + b & -q \\ r & -c \end{pmatrix},$$

deduzimos pela hipóteses de indução que: $\alpha T^{-q} S = T^{n_1} S^{n_2} T^{n_3} \dots S^{n_{r-1}} T^{n_r}$, isto prova que (3.1) vale para c . □

O seguinte exemplo mostra duas decomposições diferentes para a mesma matriz em $SL_2(\mathbb{Z})$

Exemplo 3.3.

$$\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = T^2 S T^{-3} S T^{-2} S T^{-2} S T = T^3 S T^2 S T^4 S T^2.$$

Os elementos do grupo modular podem também ser vistos como automorfismos da esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, como as transformações fracionais

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}}. \tag{3.2}$$

Temos em particular que a transformação acima satisfaz o seguinte:

Se $c \neq 0$, $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$, e $\infty \mapsto \frac{a}{c}$. Se $c = 0$, $\infty \mapsto \infty$.

A matriz identidade I e sua negativa $-I$ são enviadas na mesma transformação

identidade. Mais geralmente, cada par $\pm\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ é enviado em uma única transformação. O grupo das transformações assim definidas pelo grupo modular, i.e, fazendo a identificação (3.2) é finitamente gerado pelas transformações

$$z \mapsto z + 1, \quad z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

Este grupo é conhecido como $PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$.

O **semiplano superior** complexo \mathcal{H} será denotado por

$$\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}.$$

O grupo modular age sobre \mathcal{H} da seguinte maneira:

$$SL_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\tau).$$

Não é difícil verificar que se cumprem as condições:

$$i) \quad \text{Im}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\tau)\right) = \frac{\text{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}, \quad ii) \quad I(\tau) = \tau, \quad iii) \quad \alpha(\beta(\tau)) = (\alpha\beta)(\tau).$$

Para um estudo mais completo desta ação, o leitor pode consultar [23, pag.19-22].

A seguir vamos definir certos subgrupos do grupo modular.

Para simplificar a nossa notação escreveremos Γ_1 como o grupo modular $SL_2(\mathbb{Z})$.

Definição 3.4. *Seja N um inteiro positivo. O subgrupo de congruência de nível N é*

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

onde a congruência é tomada entrada a entrada.

Notemos que $\Gamma(1) = \Gamma_1$ e para cada $N \in \mathbb{N}$, a aplicação natural

$$\beta : \Gamma_1 \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

que associa a classe módulo N a cada entrada de uma matriz em Γ_1 é tal que $\Gamma(N) = \ker(\beta)$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, o subgrupo $\Gamma(N)$ tem índice finito em Γ_1 , dado exatamente por

$$[\Gamma_1 : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

onde o produto percorre todos os números primos p que dividem N (veja [15, Capítulo 1]).

Definição 3.5. Um subgrupo Γ de Γ_1 é chamado um **subgrupo de congruência** se existe um inteiro positivo N tal que $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Em tal caso dizemos que Γ é um **subgrupo de nível N** .

Entre tais subgrupos se destacam:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

onde $*$ denota não especificado ou não ter em conta essa entrada. Observamos que

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq \Gamma_1$$

e pode-se verificar que

$$\Gamma_1(N) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \text{ com } \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := b \pmod{N}$$

é um epimorfismo. Logo, $\ker(\varphi) = \Gamma(N) \trianglelefteq \Gamma_1(N)$ e $[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)] = N$. Analogamente temos que

$$\Gamma_0(N) \xrightarrow{\psi} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \text{ com } \psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := d \pmod{N}$$

é um epimorfismo com $\ker(\psi) = \Gamma_1(N) \trianglelefteq \Gamma_0(N)$, e portanto $[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)] = \phi(N)$, onde ϕ é a função totiente de Euler. E como consequência

$$[\Gamma_0 : \Gamma_1(N)] = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Proposição 3.6. As matrizes $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geram o subgrupo de congruência $\Gamma_0(2)$.

Demonstração. Observemos que $\alpha_i \in \Gamma_0(2), i = 0, 1$ e $-I \in \Gamma_0(2)$. Logo, $\langle -I, \alpha_0, \alpha_1 \rangle \subseteq \Gamma_0(2)$.

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$. Se $b = 0$, então $ad = 1$, daí $a = d = \pm 1$ e como $c \equiv 0 \pmod{2}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = 2k$. Assim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 2k & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \alpha_0^{\pm 2k} \in \langle -I, \alpha_0, \alpha_1 \rangle.$$

Suponhamos que $b \neq 0$. Notemos que $a \neq 0$ porque $c \equiv 0 \pmod{2}$. Dado que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \alpha_0^n = \begin{pmatrix} a + 2nb & b \\ c + 2nd & d \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \alpha_1^m = \begin{pmatrix} a & am + b \\ c & cm + d \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Multiplicaremos por potências adequadas de α_0 e α_1 até reduzir a matriz a uma do tipo considerado anteriormente. Consideramos os casos:

- i) Se $|a| > |b|$, pelo algoritmo da divisão modificado, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2bq + r$, $|r| < |b|$. De (3.3) fica,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \alpha_0^n = \begin{pmatrix} r & b \\ c - 2qd & d \end{pmatrix}.$$

- ii) Se $|b| \geq |a|$, pelo algoritmo da divisão, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tais que $b = aq + r$, $0 \leq r < q$. De (3.4) fica,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \alpha_1^{-q} = \begin{pmatrix} a & r \\ c & -cq + d \end{pmatrix}.$$

Aplicando estes passos alternadamente, chegamos ao caso onde $b = 0$. Logo, existe uma matriz $g \in \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} g \in \langle -I, \alpha_0, \alpha_1 \rangle.$$

Assim $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} gg^{-1} \in \langle -I, \alpha_0, \alpha_1 \rangle$. Como consequência temos que $\Gamma_0(2) \subseteq \langle -I, \alpha_0, \alpha_1 \rangle$. \square

Da mesma forma podemos mostrar que o subgrupo de congruência $\Gamma(2)$ é finita-

mente gerado. Deixamos este resultado como uma proposição cuja prova pode ser encontrada em [11, Teorema 3.1].

Proposição 3.7. *As matrizes $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\alpha_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geram o subgrupo de congruência $\Gamma(2)$.*

Seja Γ um subgrupo de congruência de Γ_1 . Consideremos a ação de Γ sobre $\widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\Gamma \times \widehat{\mathbb{Q}} \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}, \quad (G, s) \mapsto Gs.$$

Não é difícil verificar que esta ação é transitiva. Portanto a relação

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow \exists G \in \Gamma : s_2 = Gs_1,$$

define uma relação de equivalência sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$. Denominaremos “ \sim ” uma **Γ -equivalência**.

Definição 3.8. *Seja Γ um subgrupo de congruência Γ_1 . Uma classe de uma Γ -equivalência é chamada uma **cúspide** de Γ .*

A seguir escreveremos uma classe de equivalência \bar{s} de uma Γ -equivalência simplesmente por s .

Observação 3.9. *Note que para cada $s \in \mathbb{Q}$, existe $G \in \Gamma_1$ tal que $s = G\infty$. Como Γ_1 é uma união finita de classes laterais $\Gamma\alpha$, digamos*

$$\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^n \Gamma\alpha_i$$

existe $G' \in \Gamma$ e i_0 tal que $G = G'\alpha_{i_0}$. Logo, $s = G'\alpha_{i_0}\infty$, e assim o número de cúspides de Γ é limitado por $[\Gamma_1 : \Gamma] < \infty$. Para mais discussões sobre as cúspides, sua finitude e resultados importantes (veja [15, seção 3.8]).

A seguinte proposição determina as cúspides de Γ_1 .

Proposição 3.10. *O grupo modular Γ_1 tem uma única cúspide, a saber ∞ .*

Demonstração. Seja \mathcal{C} o conjunto das cúspides de Γ_1 . Mostremos que $\mathcal{C} = \{\infty\}$.

Com efeito:

Seja $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Como $T\infty = \infty$, vale $\{\infty\} \subseteq \mathcal{C}$.

Reciprocamente, peguemos $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ com $(m, n) = 1$. Então, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $mr + ns = 1$. Seja $\alpha = \begin{pmatrix} m & -s \\ n & r \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Tomemos $\beta = \alpha T \alpha^{-1} \in \Gamma_1$, temos que $\beta\infty = \alpha(T\infty) = \alpha\infty = \frac{m}{n}$, logo $\frac{m}{n} \sim \infty$ e portanto se tem $\mathcal{C} \subseteq \{\infty\}$. \square

3.2 Formas modulares

Nesta seção estudaremos as formas modulares, funções de importância no estudo da teoria analítica dos números, curvas elípticas e geometria discreta como é nosso caso (veja [15]).

Duas funções importantes no estudo das formas modulares são:

O **fator automórfico** $j(\gamma, \tau) \in \mathbb{C}$ definido por

$$j(\gamma, \tau) := c\tau + d, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1, \quad \tau \in \mathcal{H},$$

e o **operador de k -peso**, $k \in \mathbb{Z}$, denotado por $|_k \gamma$, $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ agindo sobre funções $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$(f|_k \gamma)(\tau) := j(\gamma, \tau)^{-k} f(\gamma\tau), \quad \tau \in \mathcal{H}.$$

O seguinte lema mostra algumas das propriedades do fator automórfico e do operador de k -peso.

Lema 3.11. *Para todo $\gamma, \gamma' \in \Gamma_1$ e $\tau \in \mathcal{H}$, então*

- i) $j(\gamma\gamma', \tau) = j(\gamma, \gamma'\tau)j(\gamma', \tau)$,
- ii) *dadas $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in PSL_2(\mathbb{Z})$, vale*

$$(f|_k \alpha)|_k \beta = f|_k(\alpha\beta).$$

Demonstração. i) é consequência da definição. Para ii), temos

$$\begin{aligned} (f|_k \alpha)|_k \beta(\tau) &= j(\beta, \tau)^{-k} (f|_k \alpha)(\beta\tau) = j(\beta, \tau)^{-k} j(\alpha, \beta\tau)^{-k} f(\alpha\beta\tau) \\ &= (j(\beta, \tau)j(\alpha, \beta\tau))^{-k} f(\alpha\beta\tau) = j(\alpha\beta, \tau)^{-k} f((\alpha\beta)\tau) = f|_k(\alpha\beta)(\tau). \end{aligned}$$

□

Definição 3.12. *Sejam k um inteiro, Γ um subgrupo de congruência de Γ_1 e $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa. Dizemos que f é **fracamente modular de peso k com respeito a Γ** ou que f é meromórfica e de k -peso invariante com respeito a Γ se*

$$f|_k \gamma = f, \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Se f é fracamente modular de peso k respeito a Γ , então seus zeros e polos são Γ -invariantes como conjuntos.

Observação 3.13. Quando $\Gamma = \Gamma_1$, se f é de k -peso invariante com respeito a Γ , para $\alpha = -I$ temos

$$(-1)^k f = f.$$

Em particular, não existem funções não nulas meromórficas de k -peso invariante com respeito a Γ_1 quando k é ímpar.

A seguir, dada uma função f meromorfa sobre \mathcal{H} e de k -peso, invariante com respeito a Γ . Estudaremos quando f é holomorfa nas cúspides de Γ .

Como Γ é um subgrupo de congruência, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Vamos tomar m mínimo. Logo, f é $m\mathbb{Z}$ -periódica, e portanto, existe $g : D^* \rightarrow \mathbb{C}$, onde D^* é o disco unitário sem o 0 tal que $f(\tau) = g(q_m)$, onde $q_m = e^{2\pi i\tau/m}$. Note que :

$$\tau \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |q_m| = e^{-2\pi \text{Im}(\tau)/m} < 1 \Leftrightarrow q_m \in D^*.$$

Se f é holomorfa em \mathcal{H} , então g é holomorfa em D^* e tem expansão em séries de Laurent. Diremos que f é **holomorfa no ∞** , se g pode ser estendida holomorficamente à origem do disco unitário D . Nesse caso, f possui uma expansão em série de Fourier

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_m^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i\tau n/m}.$$

Considere agora $s \in \mathbb{Q}$ uma cúspide de Γ , então existe $\alpha \in \Gamma_1$ tal que $s = \alpha\infty$. Defina $\bar{f} := f|_k\alpha$. Pode-se verificar sem dificuldade que: f é holomorfa sobre \mathcal{H} implica \bar{f} é holomorfa sobre \mathcal{H} e \bar{f} é de peso k invariante com respeito a Γ . Diremos que f é **holomorfa em s** se \bar{f} é holomorfa no ∞ .

Definição 3.14. Seja k um inteiro e Γ um subgrupo de congruência de Γ_1 . Uma função $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma modular de peso k com respeito a Γ** se

- 1) f é holomorfa em \mathcal{H} ,
- 2) f é de k -peso invariante com respeito a Γ ,
- 3) f é holomorfa nas cúspides de Γ .

Se, além disso,

4) $a_0 = 0$ na expansão em Séries de Fourier de $f|_k\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$, então f é dita uma **forma cuspidal de k -peso com respeito a Γ** .

O conjunto das formas modulares de peso k com respeito a Γ é denotado por $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ e o conjunto das formas cuspidaes por $\mathcal{S}_k(\Gamma)$.

Se mudamos as palavras holomorfa em (1) e (3) por meromorfa, diremos que f é uma **forma modular fracamente-holomorfa de peso k com respeito a Γ** . O espaço das formas modulares fracamente-holomorfas de k -peso é denotado por $\mathcal{M}_k^!(\Gamma)$.

Observação 3.15. A condição (3) e (4) na definição acima só precisa ser verificada para um número finito de α 's pela Observação 3.9.

Quando $\Gamma = \Gamma_1$, a Proposição 3.10 nos diz que a única cúspide é ∞ . Além disso

$$q_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{Im}(\tau) \rightarrow \infty.$$

Note que, para mostrar que uma função $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e fracamente modular com respeito a Γ_1 é holomorfa no ∞ , não é necessário exibir a sua expansão em série de Fourier, basta mostrar que $\lim_{\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty} f(\tau)$ existe ou que $f(\tau)$ é limitada quando $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$.

Observação 3.16. Na condição (3), a expansão em série de Fourier de f não é única. Com efeito, seja $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ uma cúspide de Γ , então existe $\alpha \in \Gamma_1$ tal que

$$\alpha(\infty) = s.$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ a matriz $\pm\alpha\beta$ onde $\beta = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é tal que $\pm\alpha\beta(\infty) = s$ e

$$f|_k(\pm\alpha\beta)(\tau) = (\pm 1)^k (f|_k\alpha)(\tau + j).$$

Seja $h \in \mathbb{N}_{>0}$ mínimo tal que $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \alpha^{-1}\Gamma\alpha$. Como $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ para algum $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $\Gamma(N)$ é normal em Γ_1 , temos que $\Gamma(N) \subseteq \alpha^{-1}\Gamma\alpha$ e h divide N .

Logo, se

$$(f|_k\alpha)(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_h^n, \quad q_h = e^{2\pi i\tau/h}$$

temos que

$$(f|_k(\pm\alpha\beta))(\tau) = (\pm 1)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i(\tau+n)/h} = (\pm 1)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_h^{nj} q_h^n$$

onde $\mu_h = e^{2\pi i/h}$ é a raiz h -ésima da unidade. Tais expansões em Séries de Fourier são igualmente válidas para f .

Notemos que o produto de duas formas modulares em $\mathcal{M}_{k_i}(\Gamma)$, $i = 1, 2$ respectivamente pertence ao espaço $\mathcal{M}_{k_1+k_2}(\Gamma)$. Assim, a soma direta

$$\mathcal{M}(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_k(\Gamma)$$

é um anel graduado.

As formas cuspidais $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ formam um subespaço do espaço vectorial $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ e o anel graduado

$$\mathcal{S}(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_k(\Gamma)$$

é um ideal graduado de $\mathcal{M}(\Gamma)$.

A seguir vamos estudar em detalhe algumas formas modulares de peso par com respeito a Γ_1 que possuem um papel especial na teoria.

3.3 Séries de Einsenstein

Definiremos no que segue as series de Einsenstein, que são formas modulares fracamente holomorfas, pertencentes a $\mathcal{M}_k(\Gamma_1)$ para $k \geq 3$. Utilizaremos então tais series para construir uma forma modular cuspidal, o discriminante. Finalmente, vamos combinar tais funções para definir a função J de Klein que é uma forma modular fracamente holomorfa de peso 0 respeito a Γ_1 .

Definição 3.17. *Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$. Seja*

$$\Omega := \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

o reticulado gerado por ω_1, ω_2 (conjunto de períodos). Para $k \in \mathbb{Z}$, a série

$$G_k := \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^k} \tag{3.5}$$

é chamada **Série de Einsenstein de ordem k** .

Lema 3.18. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^\alpha}$$

converge absolutamente se e só se $\alpha > 2$.

Demonstração. Considere a região \mathcal{R} da Figura 3.1, $r = \min_{z \in \partial \mathcal{R}} |z|$ e $R = \max_{z \in \partial \mathcal{R}} |z|$.

Observemos que temos $r \leq |\omega| \leq R$ para 8 ω 's em $\Omega \cap \partial \mathcal{R}$.

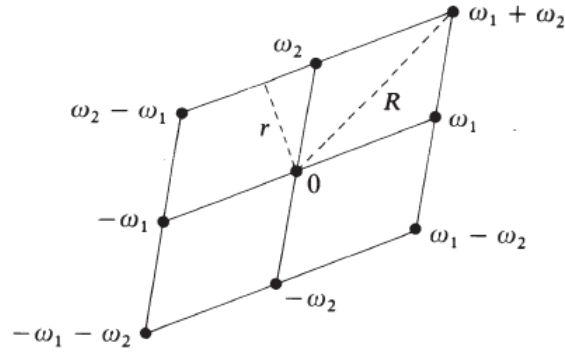


Figura 3.1: Região \mathcal{R}

No seguinte paralelogramo concêntrico $2\mathcal{R}$, temos $2r \leq |\omega| \leq 2R$ para 16 ω 's em $\Omega \cap \partial(2\mathcal{R})$.

Indutivamente para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, nos paralelogramos $n\mathcal{R}$ concêntricos a \mathcal{R} , temos $nr \leq |\omega| \leq nR$ para $8n$ ω 's em $\Omega \cap \partial(n\mathcal{R})$.

Consideremos

$$S(n) = \sum_{\omega \in \partial(n\mathcal{R})} \frac{1}{|\omega|^\alpha}.$$

Então,

$$\frac{8}{R^\alpha} + \frac{16}{(2R)^\alpha} + \dots + \frac{8n}{(nR)^\alpha} \leq S(n) \leq \frac{8}{r^\alpha} + \frac{16}{(2r)^\alpha} + \dots + \frac{8n}{(nr)^\alpha}$$

isto é

$$\frac{8}{R^\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{\alpha-1}} \leq S(n) \leq \frac{8}{r^\alpha} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{\alpha-1}}.$$

Portanto, $\{S(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge se e só se $\alpha > 2$. □

Agora, pelo Lema 3.18, a série $G_k(\omega_1, \omega_2) = G_k$ converge para cada $k \geq 3$ inteiro. Em particular quando $\tau \in \mathcal{H}$, temos que

$$G_k(\tau) := G_k(1, \tau) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} := \sum_{m, n} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \quad (3.6)$$

converge absolutamente.

A seguir mostraremos que $G_k(\tau)$, $k \geq 3$ define uma função holomorfa sobre \mathcal{H} .

Lema 3.19. *Para $\alpha > 2$, a função*

$$f(\tau) = \sum_{m,n} \frac{1}{(m\tau + n)^\alpha} \quad (3.7)$$

define uma função holomorfa sobre \mathcal{H} .

Demonstração. Suponha $\alpha > 2$ fixo. Mostraremos que a série (3.7) converge normalmente sobre \mathcal{H} .

Seja $A, \delta > 0$ e consideremos a faixa

$$F_{A,\delta} := \{s + it \in \mathcal{H} : |s| \leq A \text{ e } 0 < \delta < t\}. \quad (3.8)$$

Mostraremos que existe uma constante $M = M(A, \delta) > 0$ tal que

$$\frac{1}{|m\tau + n|^\alpha} \leq \frac{M}{|mi + n|^\alpha}, \quad (3.9)$$

para todo $\tau \in F_{A,\delta}$ e todo $(m, n) \neq (0, 0)$ e depois concluiremos pelo Lema 3.18.

Para provar (3.9) é suficiente mostrar que

$$K|mi + n|^2 \leq |m\tau + n|^2$$

para alguma constante $K = K(A, \delta) > 0$, o que é equivalente a

$$K(m^2 + n^2) \leq (ms + n)^2 + (mt)^2, \quad \forall \tau = s + it \in F_{A,\delta}. \quad (3.10)$$

Consideremos os seguintes casos:

- Se $m = 0$ então (3.10) vale para $0 < K \leq 1$.
- Se $m \neq 0$, seja $q = \frac{n}{m}$, então (3.10) é equivalente a mostrar que existe $K > 0$ tal que

$$K \leq \frac{(s+q)^2 + t^2}{1+q^2}, \quad \forall \tau = s + it \in F_{A,\delta}, \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \quad (3.11)$$

Vamos mostrar que (3.11) vale para $K = \frac{\delta^2}{1+(A+\delta)^2} > 0$.

Consideremos os subcasos:

- $|q| \leq (A + \delta)$. Como $(q + \delta)^2 \geq 0$ e $t^2 \geq \delta^2$, então

$$K = \frac{\delta^2}{1 + (A + \delta)^2} \leq \frac{t^2}{1 + q^2} \leq \frac{(s + q)^2 + t^2}{1 + q^2}.$$

- $|q| > (A + \delta)$. Como $|\frac{s}{q}| \leq \frac{|s|}{A + \delta} < \frac{A}{A + \delta} < 1$ e $|1 + \frac{s}{q}| \geq 1 - |\frac{s}{q}| \geq \frac{\delta}{A + \delta}$, temos $|q + s| \geq \frac{q\delta}{A + \delta}$. Então vale

$$\frac{(s + q)^2 + t^2}{1 + q^2} \geq \frac{\delta^2}{(A + \delta)^2} \frac{q^2}{1 + q^2} \quad (3.12)$$

Como a função $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, é crescente, tem-se

$$\frac{q^2}{1 + q^2} \geq \frac{(A + \delta)^2}{1 + (A + \delta)^2}. \quad (3.13)$$

Logo, as desigualdades (3.12) e (3.13) implicam (3.11) .

Como cada compacto de \mathcal{H} está contido numa faixa do tipo $F_{A,\delta}$ para certos $A, \delta > 0$, a série converge uniformemente sobre os compactos de \mathcal{H} e como cada função $f_{m,n}(\tau) = \frac{1}{(m\tau+n)^\alpha}$ é holomorfa sobre \mathcal{H} , segue que f é holomorfa. Em particular para $k \geq 3$ inteiro, a série de Einsenstein G_k é holomorfa sobre \mathcal{H} . \square

O lema a seguir é uma ferramenta para encontrar a expansão em séries de Fourier de G_k para $k > 2$ inteiro par.

Lema 3.20. *Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vale:*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right].$$

Demonstração. Sejam $f(z), g(z)$ os lados esquerdo e direito respectivamente da igualdade acima. Mostraremos que $f = g$.

As funções f e g funções são meromorfas em \mathbb{C} com polos simples em cada inteiro com resíduo 1 e \mathbb{Z} -periódicas.

Pode-se verificar que a expansão em Séries de Laurent de f em torno de $z = 0$ é dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + h_1(z),$$

para alguma função h_1 holomorfa em $z = 0$, com $h_1(0) = 0$.

Além disso, $g(z) = \frac{1}{z} + h_2(z)$ para alguma função h_2 holomorfa em $z = 0$, com $h_2(0) = 0$. Logo, $f - g$ é limitada numa vizinhança de $z = 0$. Como f, g

são \mathbb{Z} -periódicas, então $f - g$ é limitada numa vizinhança de cada inteiro $d \in \mathbb{Z}$ e portanto é inteira.

Mostraremos agora que $f - g$ é limitada. Como $f - g$ é limitada na direção do eixo x é suficiente mostrar que f e g são limitadas quando $|Im(z)| \rightarrow \infty$.

Como

$$\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi i - \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi iz}}. \quad (3.14)$$

Então

$$\lim_{Im(z) \rightarrow \infty} f(z) = -\pi i,$$

e como f é impar

$$\lim_{Im(z) \rightarrow -\infty} f(z) = \pi i.$$

Como consequência f é limitada quando $|Im(z)| \rightarrow \infty$.

Por outro lado para $z = x + iy$ com $0 \leq x < 1$ e $|y| > 1$, temos as desigualdades

$$|y| \leq |z| \leq |y| + 1$$

e

$$|z^2 - d^2| = |x^2 - y^2 - d^2 + 2xyi| \geq y^2 + d^2 - x^2 \geq y^2 + d^2 - 1.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \frac{1}{|y|} + \left| \sum_{d=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - d^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{|y|} + 2(|y| + 1) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{y^2 + d^2 - 1}. \end{aligned}$$

Seja $t = \lfloor y \rfloor \in \mathbb{N}_{>0}$. Então, pelo algoritmo da divisão euclidiana

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{y^2 + d^2 - 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^t \frac{1}{y^2 + (mt + r)^2 - 1}.$$

Para $m \in \mathbb{N}_{>0}$, temos

$$\sum_{r=1}^t \frac{1}{y^2 + (mt + r)^2 - 1} \leq \frac{t}{t^2 + (mt)^2} = \frac{1}{t(1 + m^2)}.$$

Logo,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{|y|} + 2 \frac{(1 + |y|)}{|y|} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + m^2}.$$

Portanto, g é limitada quando $Im(z) \rightarrow \infty$. Logo, pelo Teorema de Liouville, $f - g = c$ para alguma $c \in \mathbb{C}$. Fazendo $z = \frac{1}{2}$, obtemos $c = 0$, o que conclui a prova. \square

Lema 3.21. Para $k \geq 3$ inteiro e par temos

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}$$

onde ζ é a função zeta de Riemann e σ_α é a função aritmética $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$.

Demonstração. Do Lema (3.20) e da igualdade (3.14) temos que

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\tau + d} = \frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - d} + \frac{1}{\tau + d} \right] = \pi i - 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} q^j,$$

onde $q = e^{2\pi i \tau}$ e $\tau \in \mathcal{H}$. Derivando $(k-1)$ -vezes esta identidade e usando o fato que k é par, obtemos

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + d)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} s^{k-1} q^s. \quad (3.15)$$

Agora, mudando τ por $m\tau$, em (3.15) deduzimos:

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \sum_{m,n} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \\ &= 2\zeta(k) + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \\ &= 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{\infty} j^{k-1} q^{jm} \right) \\ &= 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j^{k-1} q^{jm}. \end{aligned}$$

Por outro lado, um reordenamento mostra que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s^{k-1} q^{sm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Isto conclui a prova. \square

Teorema 3.22. Para $k \geq 3$ inteiro par, $G_k \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1)$.

Demonstração. Seja $k \geq 3$ inteiro par. Vamos mostrar que G_k satisfaz as três condições da Definição 3.14.

A condição (1) vale pelo Lema 3.19. Para verificar a condição (2), seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1$,

$$\begin{aligned} G_k\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau\right) &= G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \sum_{m,n} \frac{1}{(m\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + n)^k} \\ &= (c\tau + d)^k \sum_{m,n} \frac{1}{((ma + nc)\tau + (mb + dn))^k}. \end{aligned}$$

Agora, se $(m, n) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ma + nc, mb + nd) = (m', n')$, então pelo Exemplo 2.18 temos que $\mathbb{Z}^2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ e portanto

$$G_k\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau\right) = (c\tau + d)^k \sum_{m',n'} \frac{1}{(m'\tau + n')^k} = (c\tau + d)^k G_k(\tau).$$

Em outras palavras, $G_k|_k \alpha = G_k$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$, o que prova a condição (2). A condição (3) é o Lema 3.21. \square

Observação 3.23. *Note que*

$$\lim_{Im(\tau) \rightarrow \infty} G_k(\tau) = 2\xi(k).$$

Definimos a série de **Eisenstein normalizada** por:

$$E_k(\tau) := \frac{G_k(\tau)}{2\zeta(k)}. \quad (3.16)$$

Em [3, Seção 12.12] mostra-se $\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2k!} B_k$ e $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$ para $k > 0$, onde B_k são os números de Bernoulli. Daí

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau} \quad (3.17)$$

$$= 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}. \quad (3.18)$$

Exemplo 3.24. *A função $\Delta(\tau)$.*

Para um exemplo da forma modular cuspidal consideremos as funções

$$g_2(\tau) = 60G_4(\tau) \quad e \quad g_3(\tau) = 140G_6(\tau).$$

Definimos a **função discriminante** $\Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau).$$

Da definição de Δ , vemos que $\Delta \in \mathcal{M}_{12}(\Gamma_1)$. Mais ainda, pode-se mostrar que

$$\Delta(\tau) \neq 0, \quad \text{para todo } \tau \in \mathcal{H} \quad \text{e} \quad \Delta(\tau) = (12\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n \tau}$$

(veja [2, Teoremas 1.14, 1.19]). Daí temos que $\Delta \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma_1)$. A função aritmética $\tau(n)$ é chamada **função tau de Ramanujan**.

Exemplo 3.25. A função $j(\tau)$

Definimos a **função J de Klein** $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Note que J é holomorfa sobre \mathcal{H} e fracamente modular de peso $k = 0$ com respeito a Γ_1 . Pode-se verificar que

$$12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i \tau} + 144 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n \tau}$$

(veja [2, Teorema 1.20]) onde $c(n)$ são inteiros. Isto nos permite definir a **função elíptica j -invariante** como

$$j(\tau) := 12^3 J(\tau)$$

a qual pertence a $\mathcal{M}_0^1(\Gamma_1)$, pois tem um polo no infinito. Com manipulações algébricas pode-se verificar que

$$j(\tau) = \frac{12^3 E_4^3(\tau)}{E_4^3(\tau) - E_6^2(\tau)}.$$

Uma consequência do Teorema de Riemann-Roch é o teorema a seguir, que dá uma fórmula para a dimensão dos espaços vetoriais $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ e $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ no caso em que $\Gamma = \Gamma_1$ e que não provaremos aqui (veja [15, Teorema 3.5.2]), mais detalhes em [2, seção 6.4, 6.5].

Teorema 3.26. As formas modulares de peso 0 são $\mathcal{M}_0(\Gamma_1) = \mathbb{C}$. Para $k < 4$, $\mathcal{M}_k(\Gamma_1) = \{0\}$ e $\mathcal{S}_k(\Gamma_1) = \{0\}$. Para todo inteiro par $k \geq 4$ temos que

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1) = \mathcal{S}_k(\Gamma_1) \oplus \mathbb{C}E_k,$$

onde E_k é a série de Eisenstein normalizada e

$$\dim(\mathcal{S}_k(\Gamma_1)) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & \text{se } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

O anel das formas modulares $\mathcal{M}(\Gamma_1)$ e o ideal $\mathcal{S}(\Gamma_1)$ das formas cuspidais são polinômios em duas variáveis e um ideal principal respectivamente, isto é

$$\mathcal{M}(\Gamma_1) = \mathbb{C}[E_4, E_6] \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(\Gamma_1) = \mathcal{M}(\Gamma_1)\Delta,$$

onde Δ é a forma cuspidal discriminante.

Como consequência deste teorema; dada uma forma modular f de peso k com respeito a Γ_1 , $k \geq 4$ par, temos

$$f = \sum_{a,b} c_{a,b} G_4^a G_6^b,$$

onde $c_{a,b} \in \mathbb{C}$ e a soma estende-se sobre os inteiros $a, b \geq 0$ tais que $4a + 6b = k$.

3.4 A série de Eisenstein de peso 2

A série definida em (3.6) converge absolutamente somente para $k > 2$ e define uma forma modular respeito a Γ_1 para $k > 2$ inteiro par. A fórmula para G_k no Lema 3.21 define uma função holomorfa sobre \mathcal{H} também no caso quando $k = 2$ (veja [39, seção 2.3]).

Definição 3.27. Definimos a série de Eisenstein de peso 2 $G_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$G_2(\tau) := \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

A série de Eisenstein normalizada de peso 2 é

$$E_2(\tau) = \frac{G_2(\tau)}{2\zeta(2)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

Mais precisamente em [39, Proposição 6], mostra-se que G_2 satisfaz a equação funcional

$$G_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - \pi i c(c\tau + d)$$

para todo $\tau \in \mathcal{H}$ e todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Daí

$$\tau^{-2} E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \frac{1}{\tau} \quad (3.19)$$

para todo $\tau \in \mathcal{H}$.

A série de Eisenstein normalizada de peso dos E_2 é um exemplo de forma quase-modular (veja [39, Seção 5.1]).

3.5 Séries Theta

Nesta seção vamos considerar uma função em duas variáveis complexas que será usada no capítulo seguinte, chamada **função theta de Jacobi**.

Definição 3.28. *A função theta de Jacobi é dada por*

$$\theta(\xi/\tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2im\xi + \pi im^2\tau}, \quad \xi \in \mathbb{C}, \tau \in \mathcal{H}.$$

Mostraremos a seguir que a função theta é holomorfa.

Lema 3.29. *Para cada $\xi \in \mathbb{C}$, a função $\theta(\xi/\cdot)$ define uma função holomorfa sobre \mathcal{H} .*

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{C}$ fixo. Definimos para cada $m \in \mathbb{Z}$

$$f_m(\tau) := e^{2\pi im\xi + \pi im^2\tau}.$$

Note que para todo m , f_m é holomorfa sobre \mathcal{H} .

Para $A, \delta > 0$ consideremos a faixa $F_{A,\delta}$ como em (3.8). Então como

$$|f_m(\tau)| = e^{-m\pi(m\text{Im}(\tau) + 2\text{Im}(\xi))} \leq e^{-\pi|m|^\delta}, \quad \text{para } |m| \text{ grande}$$

e a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi|m|^\delta}$ é convergente, pelo M-critério de Weierstrass, a série

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\tau)$$

converge e uniformemente sobre $F_{A,\delta}$. Como cada compacto K de \mathcal{H} está contido numa faixa $F_{A,\delta}$ para algum $A > 0$ e algum $\delta > 0$, a série converge uniformemente sobre os compactos de \mathcal{H} . Isso nos permite concluir que $\theta(\xi/\cdot)$ é holomorfa sobre \mathcal{H} . \square

Para alguns valores de ξ a função theta define funções especiais as quais desempenham um papel crucial na construção de algumas funções que são de vital importância nesta dissertação. Listaremos tais funções abaixo.

Definimos

$$\theta_2(\tau) := e^{\frac{\pi}{4}\tau} \theta\left(\frac{\pi}{2}\tau/\tau\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(m+\frac{1}{2})^2 \tau}. \quad (3.20)$$

$$\theta_3(\tau) := \theta(0/\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i m^2 \tau}. \quad (3.21)$$

$$\theta_4(\tau) := \theta\left(\frac{\pi}{2}/\tau\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m e^{\pi i m^2 \tau}. \quad (3.22)$$

Outros tipos de funções importantes são:

$$\psi_k(\tau) := e^{\frac{\pi}{k^2}i\tau} \theta\left(\frac{\pi}{k}\tau/\tau\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i(m+\frac{1}{k})^2 \tau}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.23)$$

As funções (3.20)-(3.22) estão relacionadas por um labirinto de identidades. A mais profunda foi descoberta por Poisson (1827) e Jacobi (1828) e é enunciada no teorema abaixo.

Teorema 3.30. *Para cada $\xi \in \mathbb{C}$ e $\tau \in \mathcal{H}$ temos*

$$\theta(\xi/\tau) = (-i\tau)^{-1/2} e^{\frac{\xi^2}{\pi i \tau}} \theta\left(\frac{\xi}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right),$$

onde a raiz quadrada é tomada no argumento principal.

Demonstração. Ver [38, pag.468] e [4, pag.4]. □

As seguintes identidades são consequências do teorema acima e mostram a simetria das funções θ_2, θ_3 e θ_4 :

$$\theta_2(\tau + 1) = \sqrt{i}\theta_2(\tau), \theta_3(\tau + 1) = \theta_4(\tau), \theta_4(\tau + 1) = \theta_3(\tau)$$

$$\theta_2(-1/\tau) = (\tau/i)^{1/2}\theta_2(\tau), \theta_3(-1/\tau) = (\tau/i)^{1/2}\theta_3(\tau), \theta_4(-1/\tau) = (\tau/i)^{1/2}\theta_4(\tau)$$

Aqui vamos utilizar a seguinte notação $\theta_{00} := \theta_3, \theta_{10} := \theta_2$ e $\theta_{01} := \theta_4$ e das anteriores igualdades segue que

$$\tau^{-2}\theta_{00}^4(-1/\tau) = -\theta_{00}^4(\tau) \quad (3.24)$$

$$\tau^{-2}\theta_{01}^4(-1/\tau) = -\theta_{10}^4(\tau) \quad (3.25)$$

$$\tau^{-2}\theta_{10}^4(-1/\tau) = -\theta_{01}^4(\tau) \quad (3.26)$$

e

$$\theta_{00}^4(\tau + 1) = \theta_{01}^4(\tau) \quad (3.27)$$

$$\theta_{01}^4(\tau + 1) = \theta_{00}^4(\tau) \quad (3.28)$$

$$\theta_{10}^4(\tau + 1) = -\theta_{10}^4(\tau). \quad (3.29)$$

Mais ainda, elas cumprem a identidade de Jacobi

$$\theta_{01}^4 + \theta_{10}^4 = \theta_{00}^4. \quad (3.30)$$

As funções theta de Jacobi estão ligadas a funções associadas a reticulados como veremos a seguir.

Definição 3.31. *Associamos a cada reticulado par Λ de \mathbb{R}^n uma função chamada Θ -série definida por*

$$\Theta_\Lambda(\tau) := \sum_{v \in \Lambda} e^{\pi i \|v\|^2 \tau}, \quad \tau \in \mathcal{H}. \quad (3.31)$$

Verificaremos a seguir que a série é convergente e daremos uma nova formulação.

Lema 3.32. *Seja Λ um reticulado em \mathbb{R}^n par. Então Θ_Λ define uma função holomorfa sobre \mathcal{H} e vale*

$$\Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_n(m) e^{2\pi i m \tau}, \quad (3.32)$$

onde $c_n(m) = \#\{v \in \Lambda : \|v\|^2 = 2m\}$.

Demonstração. Mostraremos que a série (3.31) converge normalmente sobre \mathcal{H} .

Sejam $M, \delta > 0$ e consideremos a faixa

$$F_{M,\delta} := \{\tau \in \mathcal{H} : |Re(\tau)| \leq M, \quad 0 < \delta < Im(\tau)\}.$$

Primeiro, vamos mostrar que a série (3.31) converge uniformemente sobre $F_{M,\delta}$.

Para cada $v \in \Lambda$ considere $f_v(\tau) := e^{\pi i \|v\|^2 \tau}$, então

$$|f_v(\tau)| \leq e^{-\pi \|v\|^2 \delta}, \quad \tau \in F_{M,\delta}.$$

É suficiente mostrar que a série:

$$\sum_{v \in \Lambda} e^{-\pi \|v\|^2 \delta}$$

é convergente. Consideramos as somas parciais $S_m = \sum_{v \in R_m} e^{-\pi \|v\|^2 \delta}$, onde

$$R_m = \{v \in \Lambda : \|v\|^2 \leq 2m\}.$$

Então

$$S_m \leq \sum_{k=0}^m c_n(k) e^{-2\pi k \delta} \leq \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k) e^{-2\pi k \delta}.$$

Provaremos que esta última série é convergente.

Primeiro mostramos que : $c_n(m) = \mathcal{O}(m^{n/2})$.

Com efeito, sejam $m \in \mathbb{N}$ e $v \in \Lambda$ tal que a igualdade $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 \dots + v_n^2 = 2m$ vale. Então para cada $1 \leq j \leq n$, vale $|v_j| \leq (2m)^{1/2}$. Assim, $|v_j| \leq [(2m)^{1/2}] + 1$, onde $[\cdot]$ denota a parte inteira. Portanto

$$|v_j| \leq [(2m)^{1/2}] + 1 \leq 2 [(2m)^{1/2}].$$

Isto nos dá uma cota superior para o número de v_j 's que podemos escolher para igualdade acima, a saber $4 [(2m)^{1/2}]$,

$$c_n(m) \leq (4 [(2m)^{1/2}])^n \leq 4^n 2^{n/2} m^{n/2}.$$

Como $\sum_{m=0}^{\infty} m^{n/2} e^{-2\pi m \delta} < \infty$, a estimativa anterior garante que

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_n(m) e^{-2\pi m \delta} < \infty.$$

Podemos concluir, pelo M-critério de Weierstrass, que a série $\sum_{v \in \Lambda} f_v(\tau)$ converge uniformemente sobre $F_{M,\delta}$. Como cada compacto de \mathcal{H} está contido numa faixa do tipo $F_{M,\delta}$, temos que a convergência da série (3.31) é normal. Dado que cada f_v é holomorfa sobre \mathcal{H} temos que Θ_Λ é holomorfa sobre \mathcal{H} . Um reordenamento dos termos nos dá a igualdade (3.32). \square

Dado que Λ é par, temos que :

$$\Theta_\Lambda(\tau + 1) = \Theta_\Lambda(\tau). \quad (3.33)$$

Mostraremos que para certos valores de n , supondo que existem reticulados pares e unimodulares dentro do espaço \mathbb{R}^n , as Θ -Séries associadas a estes reticulados são formas modulares com respeito a Γ_1 para algum peso k .

Lema 3.33. *Suponha que Λ é um reticulado par e unimodular de \mathbb{R}^n . Então, para*

$s > 0$,

$$\Theta_{\Lambda}(is) = s^{-n/2}\Theta_{\Lambda}(i/s).$$

Demonstração. Sabemos do Corolário 2.36 que Λ é autodual. Consideremos a função

$$F(s) := \Theta_{\Lambda}(is) = \sum_{v \in \Lambda} e^{-\pi\|v\|^2 s}, \quad s > 0$$

e a homotetia $s^{1/2}\Lambda$. Então $(s^{1/2}\Lambda)^* = s^{-1/2}\Lambda^* = s^{-1/2}\Lambda$.

Agora, sabemos que a gaussiana $\gamma(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ é tal que $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mathcal{F}(\gamma)(\xi) = \gamma(\xi).$$

Logo, pela fórmula de somatória de Poisson (Teorema 2.47), vale

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{v \in \Lambda} \gamma(s^{1/2}v) \\ &= \sum_{v \in s^{1/2}\Lambda} \gamma(v) \\ &= \frac{1}{|s^{1/2}\Lambda|} \sum_{w \in s^{-1/2}\Lambda} \gamma(w) \\ &= s^{-n/2} \sum_{w \in \Lambda} \gamma(s^{-1/2}w) \\ &= s^{-n/2} F(1/s). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.34. *Suponha que Λ é um reticulado par e unimodular de \mathbb{R}^n . Então*

$$\Theta_{\Lambda}(\tau) = (-i\tau)^{-n/2}\Theta_{\Lambda}(-1/\tau), \quad \tau \in \mathcal{H}. \quad (3.34)$$

Demonstração. Sabemos do Lema 3.33 que

$$\Theta_{\Lambda}(is) = s^{-n/2}\Theta_{\Lambda}(i/s) = (-i(is))^{-n/2}\Theta_{\Lambda}(-1/is).$$

Então, (3.34) vale para todo $\tau = is$ com $s > 0$. Como ambos lados de (3.34) definem funções holomorfas em \mathcal{H} , a conclusão segue do princípio de extensão analítica. □

Corolario 3.35. *Seja Λ um reticulado par e unimodular em \mathbb{R}^n . Se $n \equiv 0 \pmod{8}$, então $\Theta_{\Lambda} \in \mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_1)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que Θ_{Λ} cumpre as três condições da Definição 3.14 com $k = n/2$.

A condição (1) segue de Lema 3.32. A condição (2) segue de (3.33) e (3.34), que são equivalentes a

$$\Theta_\Lambda|_{n/2}T = \Theta_\Lambda$$

$$\Theta_\Lambda|_{n/2}S = \Theta_\Lambda,$$

já que Γ_1 é gerado por T, S pela Proposição 3.2. Finalmente, a condição (3) segue da igualdade (3.32). \square

Um estudo mais profundo das Θ -séries associadas a reticulados pode ser encontrado em [12, capítulo 4].

Exemplo 3.36. *Considere o reticulado $\Lambda = E_8$ em \mathbb{R}^8 . Pelo Lema 2.40 e o Corolário 2.39, Λ é par e unimodular. Logo, pelo Corolário 3.35, $\Theta_\Lambda \in \mathcal{M}_4(\Gamma_1)$.*

Por outro lado, o Teorema 3.26, nos diz que $\dim(\mathcal{M}_4(\Gamma_1)) = 1$, o que implica, $\Theta_\Lambda = \lambda G_4$, para alguma constante $\lambda \in \mathbb{C}$. Podemos determinar tal constante explicitamente. Com efeito, note que o premer coeficiente da série de Fourier em (3.32) satisfaz

$$c_8(0) = \lim_{\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty} \Theta_\Lambda(\tau) = 1.$$

Pela Observação (3.23), temos que $\lambda = \frac{1}{2\zeta(4)}$ e portanto $\Theta_{E_8} = \frac{45}{\pi^4}G_4$.

Capítulo 4

Problema de empacotamento em dimensão 8

Neste capítulo apresentamos uma prova, devida a Viazovska [37], que não há empacotamento de esferas unitárias no espaço Euclidiano \mathbb{R}^8 com densidade maior que o empacotamento associado a uma homotetia do reticulado E_8 .

Para isto mostraremos que a constante de empacotamento (2.5) em \mathbb{R}^8 é:

$$\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \cong 0.25367.$$

Consideremos o empacotamento associado ao reticulado em \mathbb{R}^8 dado por:

$$E_8 = \left\{ (x_i) \in \mathbb{Z}^8 \cup \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 : \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Lembremos que E_8 é o único reticulado par e unimodular de posto 8 em \mathbb{R}^8 . Sabemos do Lema 2.41 que o vector de comprimento mínimo em E_8 é $\lambda_1(E_8) = \min \{\|x\| : x \in E_8 \setminus \{0\}\} = \sqrt{2}$. O **E_8 -empacotamento** é o empacotamento associado homotetia $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8$. O principal resultado provado recentemente pela Maryna Viazovska nos diz que o E_8 -empacotamento é o mais denso possível em \mathbb{R}^8 .

Teorema 4.1. *(Viazovska) Não há empacotamento de esferas unitárias no espaço Euclidiano \mathbb{R}^8 com maior densidade que o E_8 -empacotamento.*

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 4.1 provaremos o teorema de Cohn-Elkies. Na Seção 4.2 construímos funções suplementares $a, b : \mathbb{R}^8 \rightarrow i\mathbb{R}$ as quais são auto-funções da transformada de Fourier e que têm zeros duplos em quase todo ponto de E_8 . Esta construção é crucial para a prova do Teorema 4.1. Finalmente na seção 4.3 completamos a prova.

4.1 O teorema de Cohn-Elkies

A prova do Teorema 4.1 é baseada no teorema de Cohn-Elkies. Este teorema junto com um método de programação linear foi usado para dar cotas das densidades de empacotamentos nos espaços euclidianos n -dimensionais para um conjunto de valores de n . O nome “programação linear” refere-se á optimização de uma função linear sujeita a restrições lineares. A técnica desenvolvida por eles “linear programming bounds” foi usada com êxito para aproximar soluções num amplo número de problemas de otimização discreta tais como: ”error-correcting codes” [13], “equal weight quadrature formulas” [14] e “sphere code” [21], [26].

Em 2003 Cohn e Elkies [9] aplicaram “linear programming bound” ao problema de empacotamento de esferas. Usando seu novo método, eles melhoraram as cotas previamente conhecidas para a constante do empacotamento de esferas em dimensões entre 4 e 36. Os mais surpreendentes resultados obtidos por esta técnica foram para as dimensões 8 e 24. Isso que permitiu fazer conjecturas com respeito de Δ_8 e Δ_{24} (veja[9]).

Precisaremos de uma classe ampla de funções para começar nosso.

Dizemos que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é **admissível** se existem $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^{-\epsilon-n}, \quad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq C(1 + \|\xi\|)^{-\epsilon-n}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

O seguinte teorema é uma ferramenta importante para a prova do Teorema 4.1 .

Teorema 4.2. (Cohn-Elkies) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, admissível, não identicamente nula, satisfazendo*

$$f(x) \leq 0 \quad \text{para} \quad \|x\| \geq 1 \tag{4.1}$$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Então, a densidade dos empacotamentos n -dimensionais de esferas Δ_n é limitado superiormente por

$$\frac{f(0)}{\mathcal{F}(f)(0)} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Demonstração. Notemos primeiro que pela admissibilidade de f , temos que $f, \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Além $\mathcal{F}(f)$ é contínua, e pelo teorema de inversão da trans-

formada de Fourier vale

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Dado que $\mathcal{F}(f)(\xi) \geq 0$ e f é não nula, temos que $f(0) > 0$. Se $\mathcal{F}(f)(0) = 0$, então escrevemos $\frac{f(0)}{\mathcal{F}(f)(0)} = \infty$ e o teorema segue imediatamente. Vamos supor então que $\mathcal{F}(f)(0) > 0$.

Mostraremos que a cota vale para empacotamentos periódicos que será suficiente para concluir a prova (veja [9][Apêndice A]). Sejam Λ um reticulado em \mathbb{R}^n de posto completo, x_1, \dots, x_N pontos em \mathbb{R}^n tais que $x_i \notin \Lambda, i = 1, \dots, N$,

$$X = \bigcup_{j=1}^N (x_j + \Lambda)$$

e \mathcal{P}_X o empacotamento (periódico) associado a X . Escolhemos uma escala tal que o raio de empacotamento é $\rho = \frac{1}{2}$. Sabemos do Corolário 2.28 que

$$\Delta_{\mathcal{P}_X} = \frac{NV_n}{2^n |\Lambda|}, \quad (4.3)$$

onde $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ é o volume da esfera de raio 1.

Do Teorema 2.47 (Fórmula somatória de Poisson), temos

$$\sum_{v \in \Lambda} f(x + v) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{w \in \Lambda^*} \mathcal{F}(f)(w) e^{2\pi i x \cdot w},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Fazendo $x = x_j - x_k$, temos

$$\sum_{v \in \Lambda} f(v + x_j - x_k) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{w \in \Lambda^*} \mathcal{F}(f)(w) e^{2\pi i x_j \cdot w} e^{-2\pi i x_k \cdot w}.$$

Somando respeito de j e k ,

$$\sum_{1 \leq j, k \leq N} \sum_{v \in \Lambda} f(v + x_j - x_k) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{w \in \Lambda^*} \mathcal{F}(f)(w) \left| \sum_{1 \leq j \leq N} e^{2\pi i x_j \cdot w} \right|^2.$$

O termo para $w = 0$ na parte direita da igualdade acima é $\frac{N^2 \mathcal{F}(f)(0)}{|\Lambda|}$, então pela condição (4.2)

$$\sum_{1 \leq j, k \leq N} \sum_{v \in \Lambda} f(v + x_j - x_k) \geq \frac{N^2 \mathcal{F}(f)(0)}{|\Lambda|}.$$

Agora, para a soma do lado esquerdo a diferença entre os vetores $v + x_j$ e x_k é uma diferença entre centros de esferas do empacotamento. Portanto

$$\|v + x_j - x_k\| < 1 \Leftrightarrow v = 0, x_j = x_k.$$

Para $j \neq k$, temos $\|v + x_j - x_k\| \geq 1$ para todo $v \in \Lambda$. Assim,

$$\sum_{1 \leq j, k \leq N} \sum_{\substack{v \in \Lambda \\ v \neq 0}} f(v + x_j - x_k) + Nf(0) \geq \frac{N^2 \mathcal{F}(f)(0)}{|\Lambda|}.$$

Logo, pela condição (4.1)

$$Nf(0) \geq \frac{N^2 \mathcal{F}(f)(0)}{|\Lambda|}. \quad (4.4)$$

Multiplicando por V_n e dividindo por $2^n \mathcal{F}(f)(0)$, concluímos a prova do teorema combinando (4.3) e (4.4). \square

Suponhamos que existe uma função f radial como no Teorema 4.1. Dado que E_8 é unimodular, pelo Lema 2.32 temos que:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8\right)^* = \sqrt{2}E_8, \quad e \quad \left|\frac{1}{\sqrt{2}}E_8\right| = 2^{-4}.$$

Usando o Teorema 2.47 (fórmula somatória de Poisson), deduzimos então

$$\sum_{v \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8} f(v) = 2^4 \sum_{v \in \sqrt{2}E_8} \mathcal{F}(f)(v).$$

Logo, se f satisfaz (4.1) e (4.2), então

$$\frac{f(0)}{\mathcal{F}(f)(0)} \geq 2^4.$$

Dizemos que uma função admissível $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ é **ótima** se satisfaz (4.1), (4.2) e além disso

$$\frac{f(0)}{\mathcal{F}(f)(0)} = 2^4.$$

O grande passo na nossa prova do Teorema 4.1 é a construção de uma função ótima. Para a nossa conveniência normalizaremos o domínio das funções por $\sqrt{2}$.

Teorema 4.3. *Existe uma função radial pertencente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$, $g : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ que*

satisfaz

$$g(x) \leq 0 \quad \text{para} \quad \|x\| \geq \sqrt{2} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{F}(g)(\xi) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^8 \quad (4.6)$$

$$g(0) = \mathcal{F}(g)(0) = 1. \quad (4.7)$$

O Teorema 4.3 aplicado à função ótima $f(x) = g(\sqrt{2}x)$ imediatamente implica o Teorema 4.1 já que

$$\|x\| \geq 1 \Leftrightarrow \|\sqrt{2}x\| \geq \sqrt{2}, \quad \frac{g(0)}{\mathcal{F}(g)(0)} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(0)}{\mathcal{F}(f)(0)} = 2^4.$$

Notemos que, assumindo a existência de uma tal função f , o supremo das densidades Δ_8 satisfaz

$$\Delta_8 \leq \frac{f(0)}{\mathcal{F}f(0)} \cdot \frac{\pi^4}{2^8\Gamma(5)} = \frac{\pi^4}{2^4\Gamma(5)} = \frac{\pi^4}{384}.$$

Esta última é a densidade do E_8 -empacotamento dada pelo Corolário 2.27 .

Daremos uma breve explicação da estratégia para a prova do Teorema 4.3 dada por Maryna Viazovska ver [37]. Observemos que as condições (4.5)-(4.7) implicam propriedades adicionais da função g . Suponhamos que existe uma função g no espaço de Schwartz que satisfaz (4.5)-(4.7). A fórmula somatória de Poisson implica:

$$\sum_{v \in E_8} g(v) = \sum_{v \in E_8} \mathcal{F}(g)(v). \quad (4.8)$$

Desde que $\|v\| \geq \sqrt{2}$ para todo $v \in E_8 \setminus \{0\}$ então (4.5) e (4.7) implicam

$$\sum_{v \in E_8} g(v) \leq g(0) = 1. \quad (4.9)$$

Por outro lado, a condição (4.6) e (4.7) implicam

$$\sum_{\ell \in E_8} \mathcal{F}(g)(\ell) \geq \mathcal{F}g(0) = 1 \quad (4.10)$$

Como consequência de (4.8), (4.9) e (4.10), $\mathcal{F}(g)(v) = g(v) = 0$ para todo $v \in E_8 \setminus \{0\}$.

Mais precisamente, construiremos uma função g tal que as primeiras derivadas $\frac{d}{dr}g(r)$ e $\frac{d}{dr}\mathcal{F}(g)(r)$ também se anulam com multiplicidade dois em todos os pontos do reticulado E_8 de comprimento maior que $\sqrt{2}$. Na seção 4.3 uma função g que satisfaz (4.5)-(4.7) é dada em forma fechada. A saber, esta é definida como uma transformação integral (transformada de Laplace) de uma forma modular.

4.2 Autofunções da Transformada de Fourier

Nesta seção construiremos duas funções $a, b : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\mathcal{F}(a) = a \quad (4.11)$$

$$\mathcal{F}(b) = -b. \quad (4.12)$$

Com zeros duplos em todos os vetores de E_8 com comprimento maior que $\sqrt{2}$, lembrando que cada vetor de E_8 tem comprimento $\sqrt{2m}$ para algum $m \in \mathbb{N}_{>0}$ (por ser E_8 par).

Na seção 4.3 mostramos que uma adequada combinação de a e b satisfaz as condições (4.5)-(4.7).

Primeiro definimos a função a . Para isto consideremos as series de Eisenstein E_4, E_6 definidas em (3.16) e as formas modulares fracamente holomorfas

$$\varphi_{-2} := \frac{-12^3 E_4 E_6}{E_4^3 - E_6^2} \quad (4.13)$$

$$\varphi_{-4} := \frac{12^3 E_4^2}{E_4^3 - E_6^2}. \quad (4.14)$$

Sabemos do Exemplo 3.25 que $\varphi_0 := j \in \mathcal{M}_0^1(\Gamma_1)$. Dado que $E_4^3 - E_6^2 = c\Delta$ onde $\Delta(\tau)$ é a função discriminante do Exemplo 3.24 e $c \in \mathbb{C}$. Temos que $\varphi_{-2}, \varphi_{-4}$ não tem polos em \mathcal{H} , mais ainda, $\varphi_{-2} \in \mathcal{M}_{-2}^1(\Gamma_1)$, $\varphi_{-4} \in \mathcal{M}_{-4}^1(\Gamma_1)$ e usando o método dos círculos de Hardy-Ramanujan [27, p. 460-461] ou as séries não-holomórficas de Poincaré [25] pode-se mostrar que os coeficientes de Fourier satisfazem

$$c_{\varphi_\kappa}(n) = 2\pi n^{\frac{\kappa-1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j(n)}{j} I_{1-\kappa}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{j}\right) \quad (4.15)$$

onde $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\kappa = 0, -2, -4$ e $I_\alpha(x)$ é a primeira solução da equação de Bessel modificada (veja [1]) e

$$A_j(n) = \sum_{\substack{h \bmod j \\ (h,j)=1}} e^{\frac{-2\pi i}{j}(nh+h')}, \quad hh' \equiv -1 \pmod{j},$$

e a soma é feita sobre todos as classes h em $\mathbb{Z}_j = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{j-1}\}$ tais que $(h, j) = 1$.

Consideremos:

$$\phi_{-4} := \varphi_{-4} \quad (4.16)$$

$$\phi_{-2} := \varphi_{-4} E_2 + \varphi_{-2} \quad (4.17)$$

$$\phi_0 := \varphi_{-4} E_2^2 + 2\varphi_{-2} E_2 + j - 1728. \quad (4.18)$$

A função ϕ_0 não é modular, mas a identidade (3.19) implica a seguinte transformação

$$\phi_0\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \phi_0(\tau) - \frac{12i}{\pi} \frac{1}{\tau} \phi_{-2}(\tau) - \frac{36}{\pi^2} \frac{1}{\tau^2} \phi_{-4}(\tau). \quad (4.19)$$

Mais precisamente, temos que

$$\phi_{-2} = -3D(\varphi_{-4}) + 3\varphi_{-2}, \quad (4.20)$$

$$\phi_0 = 12D^2(\varphi_{-4}) - 36\varphi_{-2} + 24j - 17856, \quad (4.21)$$

onde $Df := \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} f$. Estas identidades combinadas com (4.15) dão uma fórmula assintótica para os coeficientes de Fourier de $c_{\phi_{-4}}(n)$, $c_{\phi_{-2}}(n)$ e $c_{\phi_0}(n)$. Os primeiros termos das correspondentes expansões em Séries de Fourier são

$$\phi_{-4}(\tau) = q^{-1} + 504 + 73764q + 2695040q^2 + 54755730q^3 + \mathcal{O}(q^4), \quad (4.22)$$

$$\phi_{-2}(\tau) = 720 + 203040q + 9417600q^2 + 223473600q^3 + 3566782080q^4 + \mathcal{O}(q^5), \quad (4.23)$$

$$\phi_0(\tau) = 518400q + 31104000q^2 + 870912000q^3 + 15697152000q^4 + \mathcal{O}(q^5), \quad (4.24)$$

onde $q = e^{2\pi i \tau}$.

Definição 4.4. Para $x \in \mathbb{R}^8$ definimos

$$\begin{aligned} a(x) := & \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) (z+1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz + \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) (z-1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \\ & - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i \|x\|^2 z} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Vejamos que a função a está bem definida. Para isto mostraremos que cada integral de (4.25) converge absolutamente e uniformemente. De (4.24) existem $C, \delta > 0$ tais que

$$|\phi_0(z)| \leq C e^{-2\pi \text{Im}(z)}, \text{ se } \text{Im}(z) > \frac{1}{2\delta} > 1. \quad (4.26)$$

Parametrizando o contorno de integração da primeira integral de (4.25) por:

$$z(t) = (-1 + t) + it, \quad 0 < t < 1.$$

Então,

$$\int_0^1 \left| \phi_0\left(-\frac{1}{z(t)+1}\right) (z(t)+1)^2 e^{\pi i \|x\|^2 z(t)} z'(t) \right| dt = 2\sqrt{2} \left\{ \int_0^\delta \left| \phi_0\left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}i\right) \right| t^2 e^{-\pi \|x\|^2 t} dt + \int_\delta^1 \left| \phi_0\left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}i\right) \right| t^2 e^{-\pi \|x\|^2 t} dt \right\}.$$

Sabemos que a segunda integral desta última igualdade existe pela continuidade do integrando. Para a primeira temos:

$$\int_0^\delta \left| \phi_0\left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}i\right) \right| t^2 e^{-\pi \|x\|^2 t} dt \leq C \int_0^\delta t^2 e^{-\pi/t - \pi \|x\|^2 t} dt \leq C \int_{1/\delta}^\infty t^{-4} e^{-\pi t} dt < \infty.$$

Isto mostra a convergência absoluta e uniforme do primeiro somando de (4.25). Analogamente se mostra a convergência para o segundo e terceiro somando de (4.25). Para a última integral de (4.25), parametrizamos o contorno de integração: $z(t) = it, 0 < t < \infty$. Então

$$\int_1^\infty \left| \phi_0(z(t)) e^{\pi i \|x\|^2 z(t)} z'(t) \right| dt = \int_1^\infty \left| \phi_0(it) \right| e^{-\pi \|x\|^2 t} dt \leq C \int_1^\infty e^{-2\pi t} dt < \infty.$$

Logo, a quarta integral de (4.25) converge absolutamente e uniformemente. Assim a função a está bem definida.

Mostremos que a satisfaz (4.11).

Proposição 4.5. *A função a definida por (4.25) encontra-se no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$ e satisfaz*

$$\mathcal{F}(a)(\xi) = a(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^8.$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$. Com efeito, de (4.15) e (4.21) deduzimos que

$$|c_{\phi_0}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}}, \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}.$$

Agora, seja $\tau \in \mathcal{H}$ com $Im(\tau) > \frac{1}{2}$. Então,

$$|\phi_0(z)| \leq C e^{-2\pi Im(z)} \quad \text{para } Im(z) > \frac{1}{2}, \quad (4.27)$$

onde $C = \sum_{n=1}^\infty a_n > 0$ e $a_n := e^{4\pi\sqrt{n} - \pi(n-1)}, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Denotamos por a_1, a_2, a_3 e a_4 as integrais de (4.25) respectivamente. Mostraremos que $a_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8), j = 1, 2, 3, 4$. Notemos que para cada j , $a_j(x) = f_j(\|x\|^2)$ onde $f_j : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Agora, para cada multi índice $J \in \mathbb{N}_{\geq 0}^8$, existem $C_k \in \mathbb{R}, J_k \in \mathbb{N}_{\geq 0}^8$ tais que:

$$\partial^J a_j(x) = \sum_{k \leq |J|} C_k x^{J_k} \frac{d^k}{dt^k} f_i(t), \quad e \quad t = \|x\|^2.$$

Então, se $I \in \mathbb{N}_{\geq 0}^8$ e $\|x\| > 1$ temos

$$|x^I \partial^J a_i(x)| \leq C \sum_{k \leq |J|} \|x\|^{2(I+J_k)} \left| \frac{d^k}{dt^k} f_i(t) \right| = C \sum_{k \leq |J|} t^{m_k} \left| \frac{d^k}{dt^k} f_i(t) \right|,$$

onde $m_k = |I + J_k|$ e $C = \max_k C_k$.

Para mostrar que $a_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$ é suficiente mostrar que:

$$\sup_{t>1} t^m \left| \frac{d^k}{dt^k} f_i(t) \right| < \infty, \quad \text{para todo } m, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}. \quad (4.28)$$

A seguir provaremos (4.28). Sejam $m, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Para f_1 , parametrizamos o contorno de integração $:z(s) = -1 + s + is, 0 \leq s \leq 1$

$$f_1(t) = \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{1+z}\right) (z+1)^2 e^{\pi itz} dz = (1+i)^3 \int_0^1 \phi_0\left(-\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}i\right) s^2 e^{-\pi t(-1+s+is)} ds.$$

Então

$$\frac{d^k}{dt^k} f_1(t) = (\pi i)^k (1+i)^3 \int_0^1 \{(-1+s) + is\}^k s^2 \phi_0\left(-\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s}i\right) e^{-\pi ts + \pi t(-1+s)i} ds.$$

De (4.27), temos

$$\begin{aligned} |t^m \frac{d^k}{dt^k} f_1(t)| &\leq C_k t^m \int_0^1 \{(s-1)^2 + s^2\}^{k/2} s^2 e^{-\pi/s - \pi ts} ds \leq C t^m \int_0^1 s^{2-k} e^{-\pi/s - \pi ts} ds \\ &\leq C_0 t^m \int_0^\infty s^{2-k} e^{-\pi/s - \pi ts} ds \leq C_0 t^{m + \frac{k-3}{2}} K_{k-3}(2\pi\sqrt{t}), \end{aligned}$$

mas a função K_{k-3} cai mais rápido que qualquer polinômio. Daí, temos que $\sup_{t>1} |t^m \frac{d^k}{dt^k} f_1(t)| < \infty$ e como consequência $a_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$. Analogamente, mostramos que $a_2, a_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$. Para a_4 , temos

$$f_4(t) = \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi itz} dz = \int_1^\infty \phi_0(is) e^{-\pi ts} i ds.$$

Logo, de (4.27)

$$\begin{aligned} |t^m \frac{d^k}{dt^k} f_4(t)| &= t^m \left| \int_1^\infty (-\pi s)^k \phi_0(is) e^{-\pi t s} i ds \right| \leq C \pi^k t^m \int_1^\infty s^k e^{-\pi(2+t)s} ds \\ &= C_1 t^m e^{-2\pi(2+t)} P_{k+1} \left(\frac{1}{\pi(2+t)} \right), \end{aligned}$$

onde P_{k+1} é um polinômio de grau $k+1$.

Portanto $\sup_{t>1} |t^m \frac{d^k}{dt^k} f_4(t)| < \infty$. Assim, concluímos que $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$.

Da definição no Capítulo 1 da transformada de Fourier, pode-se mostrar que:

$$\mathcal{F}(e^{-\pi s \|x\|^2})(\xi) = s^{-n/2} e^{-\pi s^{-1} \|\xi\|^2}, \quad \forall s > 0. \quad (4.29)$$

Baseado nessa propriedade mostraremos que: Para $\xi \in \mathbb{R}^8$ fixo,

$$\int_{\mathbb{R}^8} e^{-\pi i \tau \|x\|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \tau^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/\tau)}, \quad \forall \tau \in \mathcal{H}. \quad (4.30)$$

Para isto mostramos que ambos lados de (4.30) são funções holomorfas e usaremos o princípio de extensão analítica.

Com efeito, é claro que o lado direito de (4.30) define uma função holomorfa sobre \mathcal{H} . Para o lado esquerdo, consideremos $F(x, \tau) := e^{-\pi i \tau \|x\|^2 - 2\pi i x \cdot \xi}$, $\tau \in \mathcal{H}$ e seja

$$H(\tau) := \int_{\mathbb{R}^8} F(x, \tau) dx = \int_{\mathbb{R}^8} e^{\pi i \tau \|x\|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Verifiquemos que H é holomorfa sobre \mathcal{H} .

A função F satisfaz a seguintes propriedades:

- i) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a função $F(x, \cdot)$ é holomorfa sobre \mathcal{H} .
- ii) $|F(x, \tau)| \leq e^{-\pi \delta \|x\|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^8$ e $\delta > 0$ tal que $Im(\tau) > \delta$ para todo $\tau \in \mathcal{H}$

Então, usando [33, Teorema 5.4], temos que H é holomorfa sobre \mathcal{H} .

Agora, para cada $s > 0$, temos $H(is) = \mathcal{F}(e^{-\pi \|s^{1/2} x\|^2})(\xi) = s^{-4} e^{-\pi s^{-1} \|\xi\|^2}$. Então, por (4.29) e o princípio de extensão analítica segue (4.30).

A seguir usamos o teorema de Fubini para mudar o contorno de integração de z e da transformada de Fourier com respeito a x em (4.25) e usamos a identidade

(4.30) para obter :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a)(\xi) &= \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)}(\xi) dz + \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz - 2 \int_1^{i\infty} \phi_0(z) z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz\end{aligned}$$

Fazendo $w = -\frac{1}{z}$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a)(\xi) &= \int_1^i \phi_0\left(-1 - \frac{1}{w-1}\right)\left(1 - \frac{1}{w}\right)^2 w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw + \int_{-1}^i \phi_0\left(-1 - \frac{1}{w+1}\right)\left(\frac{1}{w} + 1\right)^2 w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw \\ &\quad - 2 \int_{i\infty}^i \phi_0(w) e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw + 2 \int_i^0 \phi_0\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw.\end{aligned}$$

Dado que ϕ_0 é \mathbb{Z} -periódica, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a)(\xi) &= \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{w-1}\right)(w-1)^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw + \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{w+1}\right)(w+1)^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw \\ &\quad + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(w) e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw \\ &= a(\xi).\end{aligned}$$

Isto termina a prova da proposição. □

Daremos outra representação integral para a função a .

Proposição 4.6. *Para $r > \sqrt{2}$, podemos expressar $a(r)$ na seguinte forma:*

$$a(r) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz, \quad (4.31)$$

onde $r = \|x\|$.

Demonstração. Consideremos o lado direito de (4.31) como:

$$d(r) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz.$$

De (4.19) e das expansões (4.22)-(4.24) para $z(t) = it$, $0 < t < \infty$, temos que

$$\left|\phi_0\left(-\frac{1}{it}\right)\right| \leq C e^{-\frac{2\pi}{t}}, \quad t \rightarrow 0^+, \quad (4.32)$$

$$\left|\phi_0\left(-\frac{1}{it}\right)\right| \leq C t^{-2} e^{-2\pi t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

Como

$$d(r) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \underbrace{\int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz}_i + \underbrace{\int_i^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz}_{ii}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \right| &\leq C t^2 e^{-\frac{2\pi}{t}} e^{-\pi r^2 t}, \quad t \rightarrow 0^+ \\ \left| \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \right| &\leq C e^{2\pi t} e^{-2\pi r^2 t} = C e^{2\pi t(2-r^2)}, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim, as integrais i) e ii) são absolutamente convergentes. Portanto, para $r > \sqrt{2}$, $d(r)$ esta bem definida.

Agora, escrevemos $-4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = e^{i\pi r^2} - 2 + e^{-i\pi r^2}$, então

$$\begin{aligned} d(r) &= \int_{-1}^{i\infty-1} \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) (z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad + \int_1^{i\infty-1} \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) (z-1)^2 e^{2\pi i r^2 z} dz. \end{aligned}$$

Segue da estimativa (4.33) que $\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \rightarrow 0$ quando $Im(z) \rightarrow \infty$, para todo $r > \sqrt{2}$.

Então, podemos mudar os contornos de integração e reescrever

$$\begin{aligned} d(r) &= \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) (z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) (z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad - 2 \left\{ \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \right\} \\ &\quad + \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) (z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) (z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz. \end{aligned}$$

Agora, de (4.19) e da \mathbb{Z} -periodicidade das funções $\phi_0, \phi_{-2}, \phi_{-4}$ temos

$$\begin{aligned} &\phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right) (z+1)^2 - 2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 + \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right) (z-1)^2 \\ &= \phi_0(z+1)(z+1)^2 - 2\phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 + \phi_0(z-1)(z-1)^2 \\ &\quad - \frac{12i}{\pi} \{ \phi_{-2}(z+1)(z+1) - 2\phi_{-2}(z)z + \phi_{-2}(z-1)(z-1) \} \\ &\quad - \frac{36}{\pi^2} \{ \phi_{-4}(z+1) - 2\phi_{-4}(z) + \phi_{-4}(z-1) \} \\ &= 2\phi_0(z). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
d(r) &= \int_{-1}^i \phi_0\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \phi_0\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\
&\quad + \int_1^i \phi_0\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i r^2 z} dz \\
&= a(r).
\end{aligned}$$

Isto finaliza a prova da proposição. \square

Finalmente, vamos encontrar outra expressão para $a(r)$ com $r \geq 0$ e avaliar os valores $a(r)$ em $r = 0$ e $r = \sqrt{2}$.

Proposição 4.7. *Para $r \geq 0$, temos*

$$\begin{aligned}
a(r) &= 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(\frac{36}{\pi^2(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty \left(t^2 \phi_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

A integral converge absolutamente para $r \geq 0$.

Demonstração. Suponha $r > \sqrt{2}$. Pela Proposição 4.6

$$a(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^\infty \phi_0\left(\frac{i}{t}\right) t^2 e^{-\pi r^2 t} dt.$$

De (4.19) obtemos:

$$\begin{aligned}
\phi_0\left(\frac{i}{t}\right) &= \phi_0(it) - \frac{12i}{\pi} \frac{1}{it} \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \frac{1}{(it)^2} \phi_{-4}(it) \\
&= \phi_0(it) - \frac{12}{\pi t} \phi_{-2}(it) + \frac{36}{\pi^2 t^2} \phi_{-4}(it),
\end{aligned}$$

então, segue de (4.22)-(4.24) que:

$$\phi_0\left(\frac{i}{t}\right) t^2 = t^2 \phi_0(it) - \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) + \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) \tag{4.35}$$

$$= \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi it} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} + \mathcal{O}(t^2 e^{-2\pi t}), \tag{4.36}$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Além disso, calculamos para $r > \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \\
&= \frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

o que implica a identidade (4.7) para $r > \sqrt{2}$.

Por outro lado, de (4.25), implica que a é analítica em qualquer vizinhança de $[0, \infty)$. A expressão assintótica (4.35) implica que o lado direito também é analítico em qualquer vizinhança de $[0, \infty)$. Portanto do principio de extensão analítica segue que a identidade vale para qualquer $r > 0$, o que conclui a prova da proposição. \square

De (4.7) vemos que $a(r) \in i\mathbb{R}$ para todo $r \geq 0$. Em particular, o caso $r = 0$ é obtido por continuidade.

Proposição 4.8. *Temos:*

$$a(0) = -\frac{i8640}{\pi}, \quad a(\sqrt{2}) = 0, \quad a'(\sqrt{2}) = \frac{i72\sqrt{2}}{\pi}.$$

Demonstração. Da Proposição 4.7, temos para $r \geq 0$

$$a(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left\{ \frac{36}{\pi^2(r^2 - 2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left(t^2 \phi_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt \right\}.$$

Sabemos que $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-2} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = 0$ e a integral imprópria é limitada numa vizinhança de $r = 0$, então

$$a(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} 4i \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(-\frac{8640}{\pi^3 r^4}\right) \\ = -\frac{i8640}{\pi^3} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin(\pi r^2)}{\left(\frac{r^2}{2}\right)} \right\}^2 = -\frac{i8640}{\pi^3} (\pi^2) \\ = -\frac{i8640}{\pi}.$$

Analogamente, usando a regra do L'Hopital temos que

$$a(\sqrt{2}) = \frac{144}{\pi^2} i \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}{(r^2 - 2)} = \frac{74}{\pi} i \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \sin(\pi r^2) = 0.$$

Agora, calculamos a derivada da função a

$$a'(r) = 4i \left\{ \pi r \sin(\pi r^2) \left(\frac{36}{\pi^3 (r^2 - 2)^2} + p_1(r) \right) + \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(-\frac{72r}{\pi^3 (r^2 - 2)} + p_2(r) \right) \right\},$$

onde

$$p_1(r) = -\frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} + \int_0^\infty \left(t^2 \phi_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt$$

$$p_2(r) = \frac{34560}{\pi^3 r^5} - \frac{36288}{\pi^3 r^3} - 2\pi r \int_0^\infty t \left(t^2 \phi_0\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi r^2 t} dt,$$

são funções limitadas numa vizinhança de $r = \sqrt{2}$. Logo

$$a'(\sqrt{2}) = 4i \left\{ \frac{36\sqrt{2}}{\pi^2} \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin(\pi r^2)}{(r^2 - 2)} - \frac{72\sqrt{2}}{\pi^3} \frac{\sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}{(r^2 - 2)} \right\}$$

$$= 4i \left\{ \frac{36\sqrt{2}}{\pi} - \frac{18\sqrt{2}}{\pi^2} \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin(\pi r^2)}{(r^2 - 2)} \right\} = 4i \left\{ \frac{36\sqrt{2}}{\pi} - \frac{18\sqrt{2}}{\pi} \right\} = \frac{i72\sqrt{2}}{\pi}.$$

□

Agora, passaremos à construção da função b . Consideremos a forma modular

$$h := 128 \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8}, \quad (4.38)$$

onde

$$\theta_{00}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}, \quad \theta_{01}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2 \tau}, \quad \theta_{10}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n + \frac{1}{2})^2 \tau} \quad (4.39)$$

são as theta funções de Jacobi como da Seção 3.5.

Verifiquemos que $h \in \mathcal{M}_{-2}^!(\Gamma_0(2))$. Temos que verificar que h satisfaz as três condições da Definição 3.14.

Para verificar (1), dado que θ_{10} não tem zeros em \mathcal{H} (veja [24, Capítulo I, Lema 4.1]) e θ_{00} , θ_{01} , θ_{10} são holomorfas sobre \mathcal{H} , tem-se que h é holomorfa em \mathcal{H} em particular, meromorfa.

Para verificar (2), pela Proposição 3.6, $\Gamma_0(2)$ é gerado pelas matrizes

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então é suficiente verificar que $h|_{-2}\alpha_0 = h$ e $h|_{-2}\alpha_1 = h$.

Pelas relações (3.24)-(3.29), temos θ_{00}^4 , θ_{01}^4 , $\theta_{10}^4 \in \mathcal{M}_2(\Gamma(2))$. Logo, como $\alpha_0 \in \Gamma(2)$ temos que: $h|_{-2}\alpha_0 = h$.

Por outro lado,

$$(h|_{-2}\alpha_1)(\tau) = h(\tau + 1) = \frac{\theta_{00}^4(\tau + 1) + \theta_{01}^4(\tau + 1)}{\theta_{10}^8(\tau + 1)} = \frac{\theta_{01}^4(\tau) + \theta_{00}^4(\tau)}{\theta_{10}^8(\tau)} = h(\tau).$$

Para verificar (3), h poderia ter polos nas cúspides de $\Gamma_0(2)$. Pode-se verificar que na cúspide ∞ , h tem expansão em séries de Fourier da forma

$$h(\tau) = q^{-1} + 16 - 132q + 640q^2 - 2550q^3 + \mathcal{O}(q^4).$$

Consideremos as matrizes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

elementos em Γ_1 . Definimos

$$\psi_I := h - h|_{-2}ST \tag{4.40}$$

$$\psi_T := \psi_I|_{-2}T \tag{4.41}$$

$$\psi_S := \psi_I|_{-2}S. \tag{4.42}$$

Mais exatamente

$$\psi_I = 128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8} + \frac{\theta_{01}^4 - \theta_{10}^4}{\theta_{00}^4} \right\} \tag{4.43}$$

$$\psi_T = 128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4}{\theta_{10}^8} + \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{10}^4}{\theta_{01}^4} \right\} \tag{4.44}$$

$$\psi_S = -128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4 + \theta_{10}^4}{\theta_{01}^4} + \frac{\theta_{10}^4 - \theta_{01}^4}{\theta_{00}^8} \right\}, \tag{4.45}$$

que resultam da definição de h . De (4.39) as expansões em Séries de Fourier são

$$\psi_I(\tau) = q^{-1} + 144 - 5120q^{\frac{1}{2}} + 70524q - 626688q^{\frac{3}{2}} + 4265600q^2 + \mathcal{O}(q^{\frac{5}{2}}), \tag{4.46}$$

$$\psi_T(\tau) = q^{-1} + 144 + 5120q^{\frac{1}{2}} + 70524q + 626688q^{\frac{3}{2}} + 4265600q^2 + \mathcal{O}(q^{\frac{5}{2}}), \tag{4.47}$$

$$\psi_S(\tau) = -10240q^{\frac{1}{2}} - 1253376q^{\frac{3}{2}} - 48328704q^{\frac{5}{2}} - 1059078144q^{\frac{7}{2}} + \mathcal{O}(q^{\frac{9}{2}}). \tag{4.48}$$

Estas funções satisfazem seguintes propriedades:

$$\psi_T|_{-2}S = -\psi_T, \tag{4.49}$$

$$\psi_I|_{-2}S = \psi_S, \tag{4.50}$$

$$\psi_S|_{-2}S = \psi_I, \tag{4.51}$$

$$\psi_T + \psi_S = \psi_I. \tag{4.52}$$

Com efeito, para mostrar a igualdade (4.49), da definição de ψ_T temos

$$\begin{aligned}\psi_T|_{-2}S &= (\psi_I|_{-2}S)|_{-2}S \\ &= \{(h - h|_{-2}ST)|_{-2}T\}|_{-2}S \\ &= (h|_{-2}T)|_{-2}S - \{(h|_{-2}ST)|_{-2}T\}|_{-2}S.\end{aligned}$$

Sabemos que as funções theta tem as propriedades (3.24)-(3.29), então

$$\begin{aligned}(h|_{-2}T)S(\tau) &= h|_{-2}TS(\tau) \\ &= \tau^2 h\left(-\frac{1}{\tau} + 1\right) \\ &= 128\tau^2 \left\{ \frac{\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{\tau} + 1\right) + \theta_{01}^4\left(-\frac{1}{\tau} + 1\right)}{\theta_{10}^8\left(-\frac{1}{\tau} + 1\right)} \right\} \\ &= 128\tau^2 \left\{ \frac{\theta_{10}^4(\tau) + \theta_{00}^4(\tau)}{\theta_{01}^8(\tau)} \right\}.\end{aligned}$$

Além disso, seja

$$h_0(\tau) := (h|_{-2}ST)|_{-2}T(\tau) = h|_{-2}ST(\tau+1) = h|_{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\tau+1) = (\tau+1)^2 h\left(-\frac{1}{\tau+1}\right).$$

então,

$$\begin{aligned}h_0(\tau) &= 128(\tau+2)^2 \left\{ \frac{\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{\tau+2}\right) + \theta_{01}^4\left(-\frac{1}{\tau+2}\right)}{\theta_{10}^8\left(-\frac{1}{\tau+2}\right)} \right\} \\ &= -128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4(\tau) + \theta_{10}^4(\tau)}{\theta_{01}^8(\tau)} \right\}.\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}\{(h|_{-2}ST)|_{-2}T\}|_{-2}S(\tau) &= \tau^2 h_0\left(-\frac{1}{\tau}\right) \\ &= -128\tau^2 \left\{ \frac{\theta_{00}^4\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \theta_{10}^4\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\theta_{01}^8\left(-\frac{1}{\tau}\right)} \right\} \\ &= 128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4(\tau) + \theta_{01}^4(\tau)}{\theta_{10}^8(\tau)} \right\}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\psi_T|_{-2}S &= -128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4(\tau) + \theta_{10}^4(\tau)}{\theta_{01}^8(\tau)} \right\} - 128 \left\{ \frac{\theta_{00}^4(\tau) + \theta_{01}^4(\tau)}{\theta_{10}^8(\tau)} \right\} \\ &= -\psi_T.\end{aligned}$$

A igualdade (4.50) segue de (4.42). Para mostrar (4.51), temos

$$\psi_S|_{-2}S = (\psi_I|_{-2}S)|_{-2}S = \psi_I|_{-2}S^2 = \psi_I|_{-2}I = \psi_I.$$

Procedamos a mostrar agora (4.52).

$$\begin{aligned} \psi_T + \psi_S &= \psi_I|_{-2}T + \psi_I|_{-2}S \\ &= (h - h|_{-2}ST)|_{-2}T + (h - h|_{-2}ST)|_{-2}S \\ &= h|_{-2}T + h|_{-2}ST^2 + h|_{-2}S - h|_{-2}STS \\ &= h|_{-2}T + h|_{-2}ST^2S^2 + h|_{-2}S - h|_{-2}STS \\ &= h|_{-2}T + (h - h|_{-2}ST^2S)|_{-2}S - h|_{-2}STS. \end{aligned}$$

Por outro lado, $(h - h|_{-2}ST^2S) = 0$, porque $ST^2S = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$ e $h \in \mathcal{M}_{-2}^1(\Gamma_0(2))$. Então,

$$\psi_T + \psi_S = h|_{-2}T - h|_{-2}STS = h|_{-2}T - h|_{-2}STS(ST)^{-1}(ST).$$

Por outro lado, observe que

$$STS(ST)^{-1} = STST^{-1}S^{-1} = STST^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(2)$$

e $T \in \Gamma_0(2)$. Portanto

$$\psi_T + \psi_S = h - h|_{-2}ST = \psi_I.$$

Isto que conclui a prova das identidades (4.49)-(4.52).

A partir destas funções vamos definir a função b .

Definição 4.9. Para $x \in \mathbb{R}^8$ definimos

$$\begin{aligned} b(x) &:= \int_{-1}^i \psi_T(z)e^{\pi i\|x\|^2z} dz + \int_1^i \psi_T(z)e^{\pi i\|x\|^2z} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \psi_I(z)e^{\pi i\|x\|^2z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z)e^{\pi i\|x\|^2z} dz. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Mostremos que b satisfaz (4.12).

Proposição 4.10. A função b definida por (4.53) encontra-se no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$ e satisfaz

$$\mathcal{F}(b)(\xi) = -b(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^8$$

Demonstração. Utilizamos a identidade (4.30) e mudando a ordem de integração da transformada de Fourier em x e o contorno da integração em z temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(b)(\xi) &= \int_{-1}^i \psi_T(z) z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz + \int_1^i \psi_T(z) z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \psi_I(z) z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz - 2 \int_1^{i\infty} \psi_S(z) z^{-4} e^{\pi i \|\xi\|^2 (-1/z)} dz.\end{aligned}$$

Fazendo $w = -\frac{1}{z}$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(b)(\xi) &= \int_1^i \psi_T\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw + \int_{-1}^i \psi_T\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw \\ &\quad - 2 \int_{i\infty}^i \psi_I\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw - 2 \int_i^0 \psi_S\left(-\frac{1}{w}\right) w^2 e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw.\end{aligned}$$

De (4.49)-(4.51), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(b)(\xi) &= - \int_1^i \psi_T(w) e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw - \int_{-1}^i \psi_T(w) e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw \\ &\quad + 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(w) e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw + 2 \int_0^i \psi_T(w) e^{\pi i \|\xi\|^2 w} dw \\ &= -b(\xi),\end{aligned}$$

o que termina a prova da Proposição. □

Proposição 4.11. Para $r > \sqrt{2}$ a função $b(r)$ pode ser expressa como

$$b(r) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^\infty \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz. \quad (4.54)$$

Demonstração. Denotemos por $c(r)$ o lado direito de (4.25). Mostremos que $c(r)$ está bem definida. Com efeito, temos da identidade (4.51) e da expansão em séries de Fourier de ψ_S em (4.48),

$$\psi_I(z) = z^2 \{c_1 q^{1/2} + c_3 q^{3/2} + c_5 q^{5/2} + c_7 q^{7/2} + \mathcal{O}(q^{9/2})\},$$

onde $q = e^{-2\pi i / z}$, fazendo $z = it$ com $t > 0$ fica

$$\psi_I(it) = -t^2 \{c_1 e^{-\pi/t} + c_3 e^{-3\pi/t} + c_5 e^{-5\pi/t} + c_7 e^{-7\pi/t} + \mathcal{O}(e^{-9\pi/t})\}.$$

Então, $\psi_I(it) = \mathcal{O}(t^2 e^{-\pi/t})$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Por outro lado, pela expansão em Séries de Fourier de ψ_I em (4.46),

$$\psi_I(z) = c_{-1}q^{-1} + c_0 + c_1q^{1/2} + c_2q + c_3q^{3/2} + c_4q^2 + \mathcal{O}(q^{5/2}),$$

onde $q = e^{2\pi iz}$, fazendo $z = it$ com $t > 0$ temos que $\psi_I(it) = \mathcal{O}(e^{2\pi t})$, $t \rightarrow \infty$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz &= i \int_0^\infty \psi_I(it)e^{-\pi r^2 t} dt \\ &= \underbrace{\int_0^1 \psi_I(it)e^{-\pi r^2 z} dt}_i + \underbrace{\int_1^\infty \psi_I(it)e^{-\pi r^2 z} dt}_{ii}, \end{aligned}$$

Então

$$|\psi_I(it)e^{\pi ir^2 z}| \leq Ct^2 e^{-\pi r^2 t} e^{-\pi/t} \quad t \rightarrow 0^+$$

e

$$|\psi_I(it)e^{\pi ir^2 z}| \leq Ce^{\pi(2-r^2)t} \quad t \rightarrow \infty.$$

Portanto as integrais $i)$ e $ii)$ são convergentes para $r > \sqrt{2}$. Como consequência, a função $c(r)$ está bem definida.

Usando a identidade $-4 \sin^2(\frac{\pi r^2}{2}) = e^{-\pi ir^2} - 2 + e^{\pi ir^2}$, observamos que

$$\begin{aligned} c(r) &= -4 \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz \\ &= \int_0^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2(z+1)} dz - 2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz + \int_0^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2(z-1)} dz \\ &= \int_1^{1+i\infty} \psi_I(z-1)e^{\pi ir^2(z)} dz - 2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz + \int_{-1}^{-1+i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2(z-1)}, \end{aligned}$$

de (4.46), temos que

$$\psi_I(\tau) = e^{-2\pi Im(\tau)} + \mathcal{O}(1) \quad \text{quando } Im(\tau) \rightarrow \infty,$$

pela hipótese $r > \sqrt{2}$, podemos mudar os contornos de integração e escrever

$$\int_{-1}^{-1+i\infty} \psi_I(z+1)e^{\pi ir^2 z} dz = \int_{-1}^i \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz \quad (4.55)$$

$$\int_1^{1+i\infty} \psi_I(z-1)e^{\pi ir^2 z} dz = \int_1^i \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \psi_I(z)e^{\pi ir^2 z} dz. \quad (4.56)$$

Temos então:

$$c(r) = \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz \quad (4.57)$$

$$- 2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 (z+1)} dz + 2 \int_i^{i\infty} (\psi_T(z) - \psi_I(z)) e^{\pi i r^2 z} dz \quad (4.58)$$

e da identidade (4.52), $\psi_T + \psi_S = \psi_I$

$$\begin{aligned} c(r) &= \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad - 2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{\pi i r^2 z} dz \\ &= b(r). \end{aligned}$$

□

Mostramos outra representação integral para a função $b(r)$ para $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e avaliaremos os valores de $b(r)$ em $r = 0$ e $r = \sqrt{2}$.

Proposição 4.12. *Para $r \geq 0$ temos*

$$b(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left\{ \frac{144}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right\}. \quad (4.59)$$

Demonstração. A prova será análoga á prova da Proposição 4.7. Suponhamos que $r > \sqrt{2}$, então pela Proposição 4.11

$$b(r) = -4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^\infty \psi_I(it) e^{-\pi r^2 t} dt.$$

De (4.46) temos que

$$\psi_I(it) = e^{2\pi t} + 144 + \mathcal{O}(e^{-\pi t}) \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.60)$$

Também, temos que para $r > \sqrt{2}$

$$\int_0^\infty (e^{2\pi t} + 144) e^{-\pi r^2 t} dt = \frac{144}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi(r^2 - 2)}. \quad (4.61)$$

Portanto (4.59) vale para todo $r > \sqrt{2}$.

De outra parte vemos que da definição (4.53), $b(r)$ é analítica em alguma vizinhança de $[0, \infty)$. A fórmula assintótica (4.60) também diz que o lado direito de (4.59) é também analítica em alguma vizinhança em $[0, \infty)$. Por tanto, pelo princípio de extensão analítica, segue que (4.59) vale para todo $r \in (0, \infty)$. □

Notemos que $b(r) \in i\mathbb{R}$ para todo $r \in (0, \infty)$. Uma consequência desta Proposição 4.12 é:

Proposição 4.13. *Temos*

$$b(0) = 0, \quad b(\sqrt{2}) = 0, \quad b'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi i \quad (4.62)$$

Demonstração. Da Proposição 4.12 temos que

$$b(r) = 4i \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left\{ \frac{144}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t})e^{-\pi r^2 t} dt \right\}.$$

Sabemos que $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-2} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) = 0$ e a integral imprópria é limitada numa vizinhança de $r = 0$, então

$$b(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} 4i \left\{ \frac{144 \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}{\pi r^2} \right\} = 0.$$

Analogamente, usando a regra do L'Hopital temos que

$$b(\sqrt{2}) = 4i \left\{ \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}{(r^2 - 2)} \right\} = 2i \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \sin(\pi r^2) = 0.$$

Agora, calculamos a derivada da função b ,

$$b'(r) = 4i \left\{ \pi r \sin(\pi r^2) \left(\frac{1}{\pi(r^2 - 2)^2} + p_2(r) \right) + \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(-\frac{2r}{\pi(r^2 - 2)^2} + p_3(r) \right) \right\},$$

onde

$$p_2(r) = \frac{144}{\pi r^2} + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t})e^{-\pi r^2 t} dt,$$

$$p_3(r) = -\frac{288}{\pi r^3} - 2\pi r \int_0^\infty t(\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t})e^{-\pi r^2 t} dt,$$

são funções limitadas numa vizinhança de $r = \sqrt{2}$. Logo

$$\begin{aligned} b'(\sqrt{2}) &= 4i \left\{ \sqrt{2} \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin(\pi r^2)}{(r^2 - 2)} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}{(r^2 - 2)^2} \right\} \\ &= 4i \left\{ \sqrt{2}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{r \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sin(\pi r^2)}{(r^2 - 2)} \right\} = 4i \left\{ \sqrt{2}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \right\} = 2\sqrt{2}\pi i. \end{aligned}$$

□

4.3 A função mágica

Estamos preparados para dar uma prova do Teorema 4.3.

Teorema 4.14. *A função*

$$g(x) := \frac{\pi i}{8640}a(x) + \frac{i}{240\pi}b(x)$$

satisfaz as condições (4.5)-(4.7). Em particular g e $\mathcal{F}(g)$ se anulam apenas nos pontos do reticulado E_8 .

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que vale (4.5). Pela Proposição 4.6 e Proposição 4.11 sabemos que para $r > \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{\pi i}{8640}a(r) + \frac{i}{240\pi}b(r) \\ &= -\frac{4\pi}{8640}\sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\int_0^\infty \phi_0\left(-\frac{1}{it}\right)t^2e^{-\pi r^2 t}dt - \frac{4\pi}{240}\sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\int_0^\infty \psi_I\left(-\frac{1}{it}\right)e^{-\pi r^2 t}dt \\ &= \frac{\pi}{2160}\sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left\{-\int_0^\infty \left(\phi_0\left(-\frac{1}{it}\right)t^2 + \frac{36}{\pi^2}\psi_I(t)\right)e^{-\pi r^2 t}dt\right\}. \end{aligned}$$

Então,

$$g(r) = \frac{\pi}{2160}\sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\int_0^\infty A(t)e^{-\pi r^2 t}dt, \quad (4.63)$$

onde

$$A(t) = -\left(t^2\phi_0\left(-\frac{1}{it}\right) + \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it)\right).$$

Verificaremos que $A(t) < 0$ para todo $t > 0$. Com efeito;

De (4.19) e (4.42) segue que:

$$A(t) = -t^2\phi_0\left(-\frac{i}{t}\right) + \frac{36}{\pi^2}\psi_S\left(\frac{i}{t}\right), \quad t \rightarrow 0^+, \quad (4.64)$$

$$A(t) = -t^2\phi_0(it) + \frac{12}{\pi}t\phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2}\phi_{-4}(it) - \frac{36}{\pi^2}\psi_I(it), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.65)$$

Do Lema A.1, temos que existem funções $A_0^{(m)}(t)$, $A_\infty^{(m)}(t)$ tais que:

$$A(t) = A_0^{(m)}(t) + \mathcal{O}(t^2e^{-\pi m/t}), \quad t \rightarrow 0^+ \quad (4.66)$$

$$A(t) = A_\infty^{(m)}(t) + \mathcal{O}(t^2e^{-\pi mt}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.67)$$

Além disso, deduzimos de (4.22)-(4.24) e (4.48) que.

$$A_0^{(6)}(t) = t^2\left(-\frac{368640}{\pi^2}e^{-\pi/t} - 5184000e^{-2\pi/t} - \frac{45121536}{\pi^2}e^{-3\pi/t} - 31104000e^{-4\pi/t} - \frac{45121536}{\pi^2}e^{-5\pi/t}\right) \quad (4.68)$$

e de (4.22)-(4.24) e (4.46) que

$$A_{\infty}^{(6)}(t) = -\frac{72}{\pi^2}e^{2\pi t} - \frac{23328}{\pi^2} + \frac{184320}{\pi^2}e^{-\pi t} - \frac{5194368}{\pi^2}e^{-2\pi t} + \frac{22560768}{\pi^2}e^{-3\pi t} - \frac{250583040}{\pi^2}e^{-4\pi t} + \frac{869916672}{\pi^2}e^{-5\pi t} \\ + t\left(\frac{8640}{\pi} + \frac{2436480}{\pi}e^{-2\pi t} - \frac{113011200}{\pi}e^{-4\pi t}\right) - t^2(518400e^{-2\pi t} + 31104000e^{-4\pi t}).$$

Gráficos das funções $A(t)$, $A_0^{(2)}(t)$ e $A_{\infty}^{(2)}(t)$ são mostrados na Figura 4.1

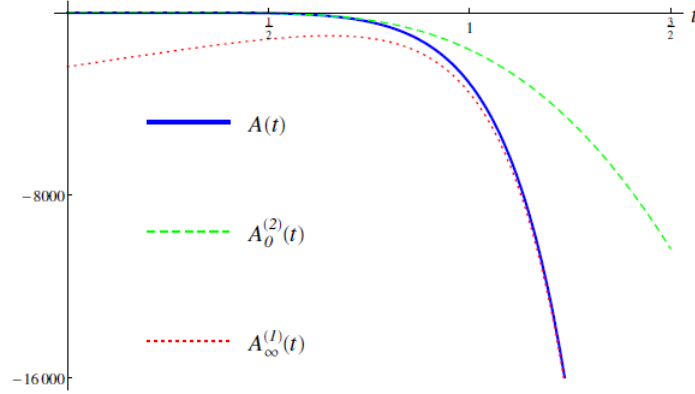


Figura 4.1: Gráficos de $A(t)$, $A_0^{(2)}(t) = \frac{368640}{\pi^2}t^2e^{-\pi/t}$ e $A_{\infty}^{(2)}(t) = -\frac{72}{\pi}e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} - \frac{23328}{\pi^2}$.

Do Corolário A.2, para cada $m \in \mathbb{N}_{>0}$ podemos estimar o erro das expansões assintóticas de $A(t)$:

$$|A(t) - A_0^{(m)}(t)| \leq R_0^{(m)}(t), \quad t \longrightarrow 0^+$$

e

$$|A(t) - A_{\infty}^{(m)}(t)| \leq R_{\infty}^{(m)}(t), \quad t \longrightarrow \infty,$$

onde

$$R_0^{(m)}(t) := t^2\left(1 + \frac{36}{\pi^2}\right) \sum_{j=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}}e^{-\frac{\pi j}{t}}, \quad t \longrightarrow 0^+$$

e

$$R_{\infty}^{(m)}(t) := \left(t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2}\right) \sum_{j=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}}e^{-\pi jt}, \quad t \longrightarrow \infty.$$

Do Lema B.1 temos que valem as desigualdades:

$$R_0^{(6)}(t) \leq |A_0^{(6)}(t)|, \quad t \in (0, 1]; \quad (1')$$

$$R_{\infty}^{(6)}(t) \leq |A_{\infty}^{(6)}(t)|, \quad t \in [1, \infty); \quad (2')$$

$$A_0^{(6)}(t) < 0, \quad t \in (0, 1]; \quad (3')$$

$$A_{\infty}^{(6)}(t) < 0, \quad t \in [1, \infty). \quad (4')$$

Assim, de (1') – (4') obtemos que $A(t) < 0$ para todo $t \in (0, \infty)$. Das identidades (4.63) implicam que vale a condição (4.5). A seguir mostraremos que vale (4.6). Da

Proposição 4.7, 4.12, e Proposição 4.6, 4.11, para $r \geq 0$ temos

$$\mathcal{F}(g)(r) = \frac{\pi}{2160} \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \int_0^\infty B(t) e^{-\pi r^2 t} dt \quad (4.69)$$

onde

$$B(t) = -t^2 \phi_0(i/t) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it).$$

Verificaremos que $B(t) > 0$ para todo $t > 0$. Da mesma forma que a função $A(t)$, a função $B(t)$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} B(t) &= -t^2 \phi_0\left(-\frac{i}{t}\right) - \frac{36}{\pi^2} \psi_S\left(\frac{i}{t}\right), \quad t \rightarrow 0^+ \\ B(t) &= -t^2 \phi_0(it) + \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Então, para cada $m \in \mathbb{N}_{>0}$ existem funções $B_0^{(m)}$ e $B_\infty^{(m)}$ tais que

$$\begin{aligned} B(t) &= B_0^{(m)}(t) + \mathcal{O}(t^2 e^{-\pi m/t}), \quad t \rightarrow 0^+ \\ B(t) &= B_\infty^{(m)}(t) + \mathcal{O}(t^2 e^{-\pi m t}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Gráficos das funções $B(t), B_0^{(2)}(t)$ e $B_\infty^{(2)}(t)$ são mostrados na Figura 4.2

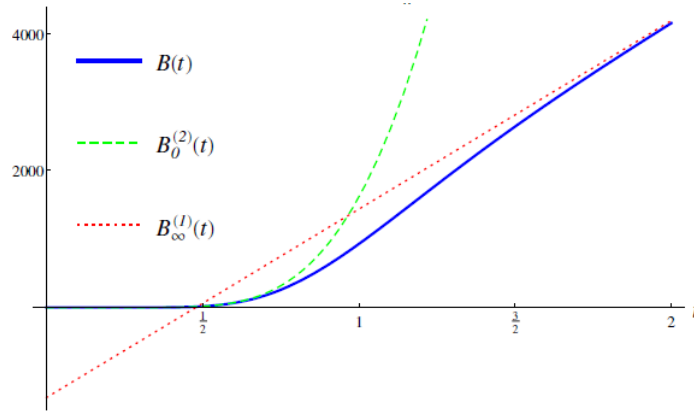


Figura 4.2: Gráficos de $B(t), B_0^{(2)}(t) = \frac{368640}{\pi^2} t^2 e^{-\pi/t}$ e $B_\infty^{(2)}(t) = \frac{8640}{\pi} t - \frac{23328}{\pi^2}$.

Análogo às desigualdades (1') – (4') pode-se mostrar que vale:

$$\begin{aligned} R_0^{(6)}(t) &\leq |B_0^{(6)}(t)|, \quad t \in (0, 1] \\ R_\infty^{(6)}(t) &\leq |B_\infty^{(6)}(t)|, \quad t \in [1, \infty) \\ B_0^{(6)}(t) &> 0, \quad t \in (0, 1] \\ B_\infty^{(6)}(t) &> 0, \quad t \in [1, \infty). \end{aligned}$$

Daí, temos que $B(t) > 0$ para todo $t \in (0, \infty)$. Logo, a identidade (4.69) implica

(4.6). Agora, para verificar (4.7) usamos a Proposição 4.8 e a Proposição 4.13.

$$g(0) = \frac{\pi i}{88640}a(0) + \frac{i}{240}b(0) = 1$$
$$\mathcal{F}(g)(0) = \frac{\pi i}{88640}a(0) + \frac{i}{240}b(0) = 1.$$

Isto finaliza a prova do Teorema 4.14 e como consequência fica provado o Teorema 4.3. □

Apêndice A

Expansões assintóticas

Neste apêndice daremos expansões assintóticas para as funções $A(t)$ e $B(t)$ que foram usadas para deduzir desigualdades na Seção 4.3. Tais funções ficaram expressas em termos das funções ϕ_0, ψ_I e ψ_S . Estabeleceremos formulas assintóticas para $A(t)$ e $B(t)$ quando t é “pequeno” e t é “grande”.

Lema A.1. *Para $m \geq 1$ existem funções $A_0^{(m)}$ e $A_\infty^{(m)}$ tais que*

$$A(t) = A_0^{(m)}(t) + \mathcal{O}(t^2 e^{-\pi m/t}), \quad t \rightarrow 0^+,$$

$$A(t) = A_\infty^{(m)}(t) + \mathcal{O}(t^2 e^{-\pi m t}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Demonstração. De (4.19) e (4.42) segue que:

$$A(t) = -t^2 \phi_0\left(-\frac{i}{t}\right) + \frac{36}{\pi^2} \psi_S\left(\frac{i}{t}\right), \quad t \rightarrow 0^+, \quad (\text{A.1})$$

$$A(t) = -t^2 \phi_0(it) + \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it), \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2})$$

Das expansões em séries de Fourier (4.22)-(4.24) de ϕ_{-4}, ϕ_{-2} e ϕ_0 temos:

$$\begin{aligned} \phi_{-4}(\tau) &= \sum_{n=-1}^{\infty} c_{\phi_{-4}}(n) q^n = \sum_{k \geq -2, \text{par}} C_{\phi_{-4}}(k) e^{k\pi i \tau}, \\ \phi_{-2}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{\phi_{-2}}(n) q^n = \sum_{k \geq 0, \text{par}} C_{\phi_{-4}}(k) e^{k\pi i \tau}, \\ \phi_0(\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{\phi_0}(n) q^n = \sum_{k > 0, \text{par}} C_{\phi_0}(k) e^{k\pi i \tau}, \end{aligned}$$

onde

$$C_{\phi_{-2}}(k) := c_{\phi_{-2}}\left(\frac{k}{2}\right), C_{\phi_{-4}}(k) := c_{\phi_{-4}}\left(\frac{k}{2}\right), C_{\phi_0}(k) := c_{\phi_0}\left(\frac{k}{2}\right).$$

E as expansões (4.46)-(4.48) de ψ_I, ψ_T e ψ_S :

$$\begin{aligned}\psi_I(\tau) &= c_{\psi_I}(-1)q^{-1} + \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} c_{\psi_I}(n)q^n = C_{\psi_I}(-1)e^{-2\pi i\tau} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{\psi_I}(k)e^{k\pi i\tau}, \\ \psi_T(\tau) &= c_{\psi_T}(-1)q^{-1} + \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} c_{\psi_T}(n)q^n = C_{\psi_T}(-1)e^{-2\pi i\tau} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{\psi_T}(k)e^{k\pi i\tau}, \\ \psi_S(\tau) &= \sum_{\substack{k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0} \\ k \text{ impar}}} c_{\psi_S}\left(\frac{k}{2}\right)q^{\frac{k}{2}} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{>0} \\ k \text{ impar}}} C_{\psi_S}(k)e^{k\pi i\tau},\end{aligned}$$

onde

$$C_{\psi_I}(k) := c_{\psi_I}\left(\frac{k}{2}\right), C_{\psi_T}(k) := c_{\psi_T}\left(\frac{k}{2}\right), C_{\psi_S}(k) := c_{\psi_S}\left(\frac{k}{2}\right). \quad (\text{A.3})$$

Mais precisamente, da expansão convergente em Séries de Fourier de uma forma modular fracamente holomorfa (veja [5, Proposição 1.12]) encontramos que o n -ésimo coeficiente de Fourier $c_{\psi_I}(n)$ de ψ_I satisfaz

$$|c_{\psi_I}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}}, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0} \Leftrightarrow |C_{\psi_I}(k)| \leq e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{ímpar}. \quad (\text{A.4})$$

Desigualdades similares seguem para os coeficientes de Fourier de $\psi_S, \phi_0, \phi_{-2}$ e ϕ_{-4} :

$$|c_{\psi_S}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}}, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0} \Leftrightarrow |C_{\psi_S}(k)| \leq 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{ímpar} \quad (\text{A.5})$$

$$|c_{\phi_0}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}}, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0} \Leftrightarrow |C_{\phi_0}(k)| \leq 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{par} \quad (\text{A.6})$$

$$|c_{\phi_{-2}}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}}, n \in \mathbb{Z}_{>0} \Leftrightarrow |C_{\phi_{-2}}(k)| \leq e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{par} \quad (\text{A.7})$$

$$|c_{\phi_{-4}}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}}, n \in \mathbb{Z}_{>0} \Leftrightarrow |C_{\phi_{-4}}(k)| \leq e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{par}. \quad (\text{A.8})$$

Agora das identidades (A.1), (A.2) obtemos:

$$A(t) = -t^2 \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{>0} \\ k \text{ par}}} C_{\phi_0}(k)e^{-\frac{k\pi}{t}} + \frac{36}{\pi^2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_{>0}, \\ k \text{ impar}}} C_{\psi_S}(k)e^{-\frac{k\pi}{t}} \right\}, \quad t \rightarrow 0^+ \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}A(t) &= -t^2 \sum_{k > 0, \text{par}} C_{\phi_0}(k)e^{-k\pi t} + \frac{12}{\pi} t \sum_{k \geq 0, \text{par}} C_{\phi_{-2}}(k)e^{-k\pi t} - \frac{36}{\pi^2} \sum_{k \geq -2, \text{par}} C_{\phi_{-4}}(k)e^{-k\pi t} \\ &\quad - \frac{36}{\pi^2} \left\{ C_{\psi_I}(-1)e^{2\pi t} + \sum_{k \geq 0} C_{\psi_I}(k)e^{-k\pi t} \right\}, \quad t \rightarrow \infty.\end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De (A.9) e (A.10) definimos para cada $m \in \mathbb{N}_{>0}$

$$A_0^{(m)}(t) := t^2 \left\{ - \sum_{\substack{2 \leq j \leq j_1(m) \\ \text{par}}} C_{\phi_0}(j) e^{-\frac{j\pi}{t}} + \frac{36}{\pi^2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq j_2(m) \\ \text{impar}}} C_{\psi_S}(j) e^{-\frac{j\pi}{t}} \right\}$$

e

$$A_\infty^{(m)}(t) := -t^2 \sum_{\substack{2 \leq j \leq j_1(m) \\ \text{par}}} C_{\phi_0}(j) e^{-j\pi t} + \frac{12}{\pi} t \sum_{\substack{0 \leq j \leq j_1(m) \\ \text{par}}} C_{\phi_{-2}}(j) e^{-j\pi t} \\ - \frac{36}{\pi^2} \sum_{\substack{-2 \leq j \leq j_1(m) \\ \text{par}}} C_{\phi_{-4}}(j) e^{-j\pi t} - \frac{36}{\pi^2} \left\{ C_{\psi_I}(-1) e^{2\pi t} + \sum_{1 \leq j \leq m-1} C_{\psi_I}(j) e^{-j\pi t} \right\},$$

onde

$$j_1(m) := \begin{cases} m-2 & m \text{ par} \\ m-1 & m \text{ ímpar} \end{cases}, \quad j_2(m) := \begin{cases} m-1 & m \text{ par} \\ m-2 & m \text{ ímpar} \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}_{>0}.$$

□

Daqui, podemos ter uma fórmula para os erros de aproximações para a função $A(t)$ através das expansões assintóticas $A_0^{(m)}(t)$ para $t \in (0, 1]$ e $A_\infty^{(m)}(t)$ para $t \in [1, \infty)$.

Corolário A.2. Para $m \in \mathbb{N}_{>0}$, existem funções $R_0^{(m)}$, $R_\infty^{(m)}$ tais que

$$|A(t) - A_0^{(m)}(t)| \leq R_0^{(m)}(t), \quad t \in (0, 1], \\ |A(t) - A_\infty^{(m)}(t)| \leq R_\infty^{(m)}(t), \quad t \in [1, \infty)$$

Demonstração. É consequência do Lema A.1, (A.4)-(A.8) a desigualdade triangular. De fato, para cada $m \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$R_0^{(m)}(t) := t^2 \left(1 + \frac{36}{\pi^2} \right) \sum_{j=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}} e^{-\frac{\pi j}{t}}, \quad t \in (0, 1]$$

e

$$R_\infty^{(m)}(t) := \left(t^2 + \frac{12}{\pi} t + \frac{36}{\pi^2} \right) \sum_{j=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}} e^{-\pi j t}, \quad t \in [1, \infty).$$

□

Apêndice B

Programas em SageMath

Neste apêndice vamos mostrar alguns resultados numéricos para a verificação de desigualdades da Seção 4.3 que envolvem funções dadas por séries definidas nos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$. Tais desigualdades seguem das seguintes estimativas:

Lema B.1. *Valem as desigualdades:*

$$R_0^{(6)}(t) \leq |A_0^{(6)}(t)|, \quad t \in (0, 1]; \quad (1')$$

$$R_\infty^{(6)}(t) \leq |A_\infty^{(6)}(t)|, \quad t \in [1, \infty); \quad (2')$$

$$A_0^{(6)}(t) < 0, \quad t \in (0, 1]; \quad (3')$$

$$A_\infty^{(6)}(t) < 0, \quad t \in [1, \infty). \quad (4')$$

Demonstração. Para mostrar (1'). Lembremos que $A_0^{(6)}(t) = -t^2 \sum_{m=1}^5 a(m)e^{-\pi m/t}$, onde $a(m) > 0$. Então

$$R_0^{(6)}(t) \leq |A_0^{(6)}(t)| \Leftrightarrow \sum_{j=6}^{\infty} e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}-\pi j/t} \leq \frac{\sum_{j=1}^5 a(j)e^{-\pi j/t}}{2(1 + \frac{36}{\pi^2})}, \quad \forall t \in (0, 1]. \quad (B.1)$$

Dado que $2\sqrt{2}\pi\sqrt{j} - \pi j/t \leq -\pi j/2t$ quando $j \geq 32$. Para mostrar que (1') vale é suficiente provar que:

$$\sum_{j=6}^{31} e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}-\pi j/t} + \frac{e^{-16\pi/t}}{1 - e^{-\pi/2t}} \leq \frac{\sum_{j=1}^5 a(j)e^{-\pi j/t}}{2(1 + \frac{36}{\pi^2})}, \quad 0 < t \leq 1. \quad (B.2)$$

Sejam $f(t), g(t)$ os lados direito e esquerdo da desigualdade (B.2) respectivamente. Verificaremos que $h_1(t) = f(t) - g(t) \geq 0, \forall t \in (0, 1)$. Note que $\lim_{t \rightarrow 0^+} h_1(t) = 0$. Implementamos um programa em sage que calcule $(\min_{x \in (0,1)} h_1(x), x_0)$ o mínimo local e o ponto onde é atingido da função h_1 no intervalo $(0, 1)$ com uma tolerância de $\epsilon = 1.48e - 08$ e um máximo de 500 valores da função pra o método usado junto com o gráficos escalados.

```

In [3]:
# Variável t.
t=var('t')
In [4]:
# Constante.
c=2*(1+36/(pi^2))
# Vetor de Coeficientes.
a=vector([368640/pi^2, 518400, 45121536/pi^2, 31104000, 1739833344/pi^2])
In [5]:
def f(t):
    return sum(a[i]*e^(-pi*(i+1)/t) for i in range (0,5))/c
In [6]:
f(0.2).n()
Out[6]:
0.000605573143306811
In [7]:
def g(t):
    t1 = sum( exp(2*sqrt(2)*sqrt(j)*pi-j*pi/t) for j in range(6,32))
    return t1 + e^(-16*pi/t)/(1-e^(-pi/(2*t)))
In [8]:
(f(0.1)/g(0.1)).n()
Out[8]:
2.34524650391897e62
In [9]:
def h1(t): return (f(t)-g(t))
In [10]:
print( find_local_minimum(h1(t),0,1))
(0.0, 0.0029544001645663816)
\% time h1(0.1).n()
Out[10]:
CPU times: user 252 ms, sys: 0 ns, total: 252 ms
Wall time: 277 ms
9.12607279655736e-11
In [11]:
ts = range(1,200)
\%time fts = [f(t/200).n() for t in ts]
\%time gts = [g(t/200).n() for t in ts]

```


CPU times: user 304 ms, sys: 20 ms, total: 324 ms

Wall time: 343 ms

CPU times: user 3.35 s, sys: 68 ms, total: 3.42 s

Wall time: 3.46 s

In [12]:

```
import numpy
```

```
list_plot([fi - gi for fi,gi in zip(fts,gts)], scale="semilogy")
```

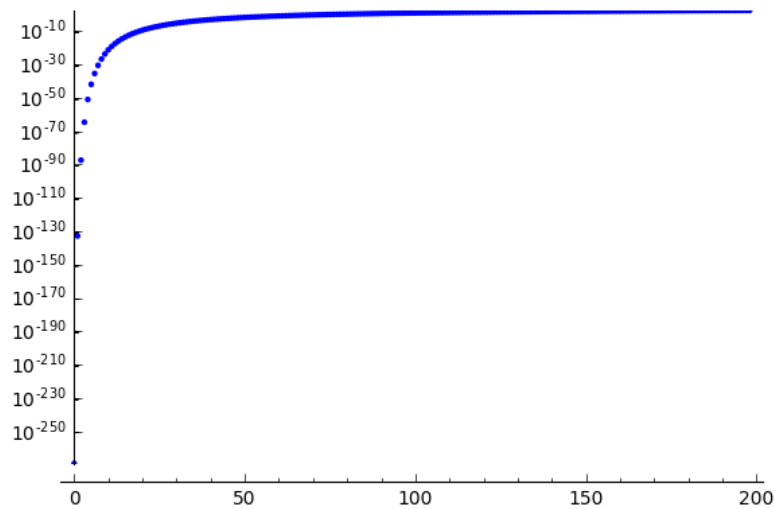


Figura B.1: semilogy de $h_1(t)$

In [18]:

```
log_quotes = [log(fi/gi) for fi,gi in zip(fts,gts)]
```

In [19]:

```
list_plot(zip(ts,log_quotes), scale="loglog")
```

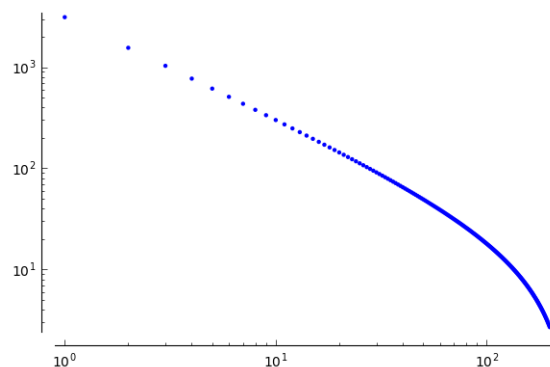


Figura B.2: loglog de h_1

Esto muestra que vale (1').

Para (2'). Observemos que

$$R_{\infty}^{(6)}(t) \leq |A_{\infty}^{(6)}(t)| \Leftrightarrow \sum_{j=6}^{\infty} e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}-\pi jt} \leq \frac{|A_{\infty}^{(6)}(t)|}{2(t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2})}. \quad (\text{B.3})$$

Portanto é suficiente verificar que :

$$\sum_{j=6}^{31} e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{j}-\pi jt} + \frac{e^{-16\pi t}}{1 - e^{-\pi t/2}} \leq \frac{|A_{\infty}^{(6)}(t)|}{2(t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2})}. \quad (\text{B.4})$$

Consideremos $h_2(t)$ a diferença das funções dos lados direito e esquerdo de (B.4) respectivamente. Verificaremos que $h_2(t) \geq 0$, $t \in (1, 100)$. Usando Sage temos:

In [62]:

```
def A6(t): return -(72/pi^2)*exp(2*pi*t)-(23328/pi^2)+
(184320/pi^2)*exp(-pi*t)-(5194368/pi^2)*exp(-2*pi*t)+
(22560768/pi^2)*exp(-3*pi*t)-(250583040/pi^2)*exp(-4*pi*t)+
(869916672/pi^2)*exp(-5*pi*t)+t*(8640/pi+(2436480/pi)*exp(-2*pi*t))+
(113011200/pi)*exp(-4*pi*t))-(t^2)*(518400*exp(-2*pi*t)+31104000*exp(-4*pi*t))
```

3 hours ago

0.003 seconds

In [55]:

```
def f0(t): return (abs(A6(t))/(2*(t^2+(12/pi)*t+(36/pi^2))))
```

In [66]:

```
def g0(t):
    t1 = sum( exp(2*sqrt(2)*sqrt(j)*pi-j*pi*t) for j in range(6,32))
    return (t1 + e^(-16*pi*t)/(1-e^(-pi*t/2)))
```

In [67]:

```
def h2(t) : return (f0(t)-g0(t))
```

In [68]:

```
print( find_local_minimum(h2(t),1,100))
2 minutes from now
0.063 seconds
(5.019420899850819e+266, 99.99999703462143)
%time h2(10).n()
#ts = range(1,200)
\%time f0ts = [f0(t/200).n() for t in ts]
\%time g0ts = [g(t/200).n() for t in ts]
```

Out [68]:

CPU times: user 24 ms, sys: 0 ns, total: 24 ms

```

Wall time: 22.2 ms
4.98559009953025e25
In [69]:
t0s = range(1,100)
\%time f0ts = [f0(t).n() for t in t0s]
\%time g0ts = [g0(t).n() for t in t0s]
CPU times: user 296 ms, sys: 12 ms, total: 308 ms
Wall time: 299 ms
CPU times: user 1.65 s, sys: 36 ms, total: 1.69 s
Wall time: 1.74 s
In [70]:
list_plot([fi - gi for fi,gi in zip(f0ts,g0ts)], scale="semilogy")

```

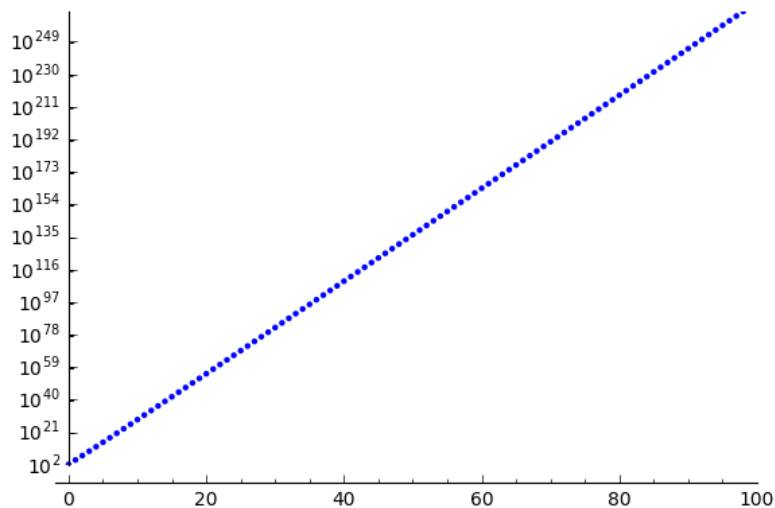


Figura B.3: semilogy de $h_2(t)$

```

In [35]:
log_quotes = [log(fi/gi) for fi,gi in zip(f0ts,g0ts)]
In [36]:
list_plot(zip(ts,log_quotes), scale="loglog")

```

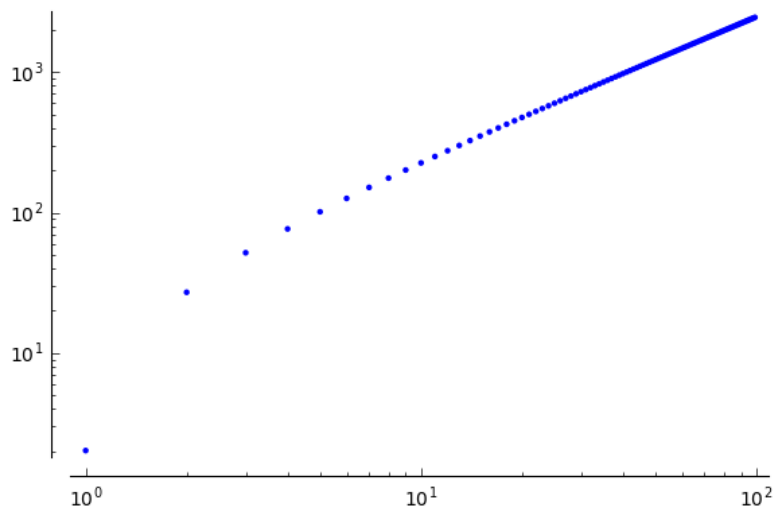


Figura B.4: loglog de h_2

O que prova (2'). A desigualdade (3') é imediata da definição de $A_0^{(6)}(t)$.

Para (4'). Notemos que $A_\infty^{(6)}(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Mostraremos que $A_\infty^{(6)}(t) < 0$ para t grande. Sera suficiente verificar $-A_\infty^{(6)}(t) > 0$ no intervalo $[1,100)$. Usamos o programa em Sage e obtemos

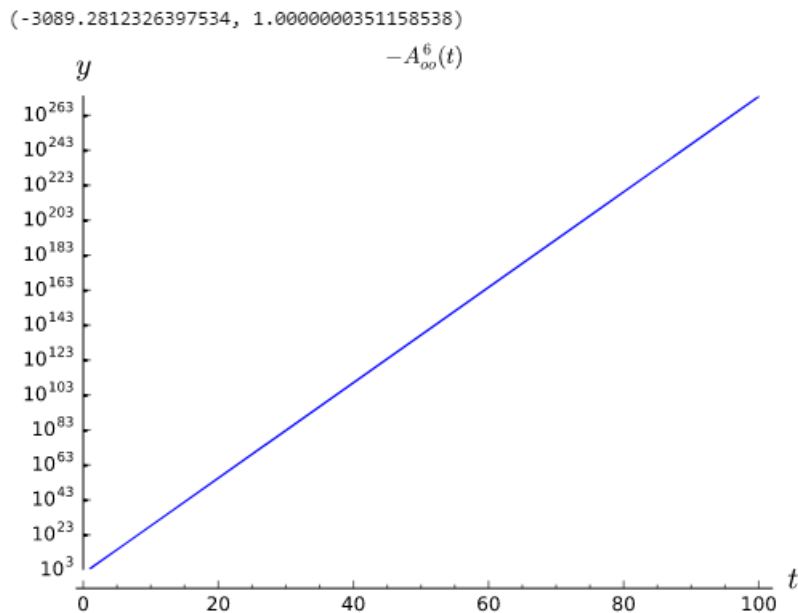


Figura B.5: Função $A_\infty^{(6)}(t)$

Aqui, escalamos o eixo y . Isto mostra que vale (4').

□

Referências Bibliográficas

- [1] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [2] Tom M Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Tom M Apostol. *Introduction to analytic number theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Richard Bellman. *A brief introduction to theta functions*. Courier Corporation, 2013.
- [5] Jan Hendrik Bruinier. *Borcherds products on $O(2, l)$ and Chern classes of Heegner divisors*, volume 1780. Springer-Verlag Berlin Heidelberg Platz 3, D-14197 Berlin, Germany, 2002.
- [6] Emanuel Carneiro. Teoria básica das séries de fourier. http://w3.impa.br/~carneiro/Teaching_files/Series_Fourier.pdf, 2015-I.
- [7] John William Scott Cassels. *An introduction to the geometry of numbers*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Hai-Chau Chang and Lih-Chung Wang. A simple proof of thue’s theorem on circle packing. *arXiv preprint arXiv:1009.4322*, 2010.
- [9] Henry Cohn and Noam Elkies. New upper bounds on sphere packings I. *Annals of Mathematics*, pages 689–714, 2003.
- [10] Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D Miller, Danylo Radchenko, and Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. *arXiv preprint arXiv:1603.06518*, 2016.
- [11] Keith Conrad. $SL_2(\mathbb{Z})$. *Expository Papers*, <http://www.math.uconn.edu/kconrad/blurbs>.

- [12] John Horton Conway and Neil James Alexander Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] Philippe Delsarte. Bounds for unrestricted codes, by linear programming. *Philips Res. Rep*, 27:272–289, 1972.
- [14] Philippe Delsarte, Jean-Marie Goethals, and Johan Jacob Seidel. Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6(3):363–388, 1977.
- [15] Fred Diamond and Jerry Michael Shurman. *A first course in modular forms*, volume 140. Springer, 2005.
- [16] Lazslo Fejes. Über die dichteste kugellagerung. *Mathematische Zeitschrift*, 48(1):676–684, 1942.
- [17] Robert L Griess. Positive definite lattices of rank at most 8. *Journal of Number Theory*, 103(1):77–84, 2003.
- [18] Helmut Groemer. Existenzsätze für lagerungen im euklidischen raum. *Mathematische Zeitschrift*, 81(3):260–278, 1963.
- [19] Helmut Groemer. Some basic properties of packing and covering constants. *Discrete & Computational Geometry*, 1(1):183–193, 1986.
- [20] Thomas C Hales. A proof of the kepler conjecture. *Annals of mathematics*, 162(3):1065–1185, 2005.
- [21] Grigorii Anatol’evich Kabatiansky and Vladimir Iosifovich Levenshtein. On bounds for packings on a sphere and in space. *Problemy Peredachi Informatzii*, 14(1):3–25, 1978.
- [22] Daniele Micciancio and Shafi Goldwasser. *Complexity of lattice problems: a cryptographic perspective*, volume 671. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] James S Milne. Modular functions and modular forms. *University of Michigan lecture notes*, 1997.
- [24] D Mumford. with the assistance of c. musili, m. nori, e. previato and m. stillman, tata lectures on theta i, 1983.
- [25] Hans Petersson. Über die entwicklungskoeffizienten der automorphen formen. *Acta Mathematica*, 58(1):169–215, 1932.

- [26] Florian Pfender and Günter M Ziegler. Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs. *Notices-American Mathematical Society*, 51:873–883, 2004.
- [27] Hans Rademacher and Herbert S Zuckerman. On the fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension. *Annals of Mathematics*, pages 433–462, 1938.
- [28] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [29] Martin Schechter. *Principles of functional analysis*, volume 2. Academic press New York, 1971.
- [30] Jean-Pierre Serre. A course in arithmetic springer verlag. *Berlin etc*, 1973.
- [31] Jean-Pierre Serre. *A course in arithmetic*, volume 7. Springer Science & Business Media, 2012.
- [32] HJ Stephen Smith. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. *Proceedings of the Royal Society of London*, 16:197–208, 1867.
- [33] Elias M Stein and Rami Shakarchi. Complex analysis. princeton lectures in analysis, ii, 2003.
- [34] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Princeton lectures in analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [35] Ian Stewart. *Visions of infinity: The great mathematical problems*. Basic Books, 2013.
- [36] Axel Thue. Om nogle geometrisk taltheoretiske theoremer. *Forandlingerneved de Skandinaviske Naturforskeres*, 14:352–353, 1892.
- [37] Maryna Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. *arXiv preprint arXiv:1603.04246*, 2016.
- [38] Edmund Taylor Whittaker and George Neville Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge university press, 1996.
- [39] Don Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, pages 1–103. Springer, 2008.