# O Jogo de Schmidt no Estudo da Dimensão de Hausdorff

Pedro Henrique Birindiba Batista
IM-UFRJ

Junho de 2017

# O Jogo de Schmidt no Estudo da Dimensão de Hausdorff

por

**Pedro Henrique Birindiba Batista**
**IM-UFRJ**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Katrin Grit Gelfert

**Rio de Janeiro**
**Junho de 2017**

.

Batista, Pedro Henrique Birindiba
B333j O Jogo de Schmidt no Estudo da Dimensão de Hausdorff / Pedro Henrique Birindiba Batista. – Rio de Janeiro, 2017.
37 f.
Orientadora: Katrin Grit Gelfert
Dissertação(mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

1. Geometria Fractal. 2. Teoria da Dimensão. 3. Sistemas Dinâmicos. I. Gelfert, Katrin Grit, orient. II. Título.

# O Jogo de Schmidt no Estudo da Dimensão de Hausdorff

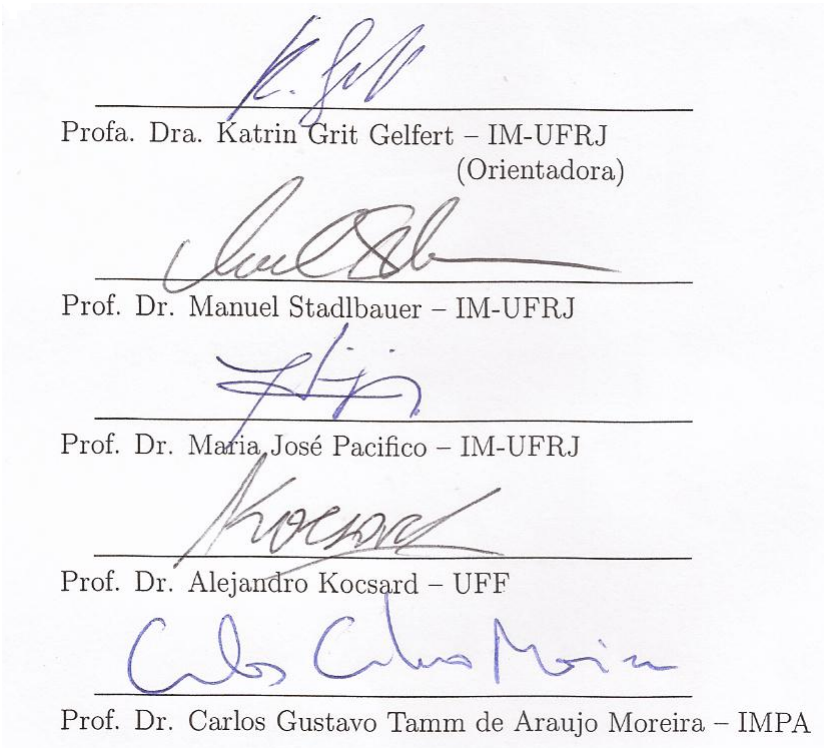
por

**Pedro Birindiba**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática

**Aprovada por:**




**Rio de Janeiro**
**Junho de 2017**

# Resumo

O objeto de estudo deste trabalho é analisar o Jogo de Schmidt com vistas a aplicações no estudo da dimensão de Hausdorff. Mais precisamente, faz-se uma análise refinada desse jogo, aqui usado como ferramenta para determinar a dimensão de Hausdorff de certa classe de conjuntos definida no contexto do jogo. O estudo é feito de maneira progressiva, a começar pelo caso onde o jogo é ambientado no espaço euclidiano, onde se pode concluir que todo conjunto vencedor do jogo de Schmidt possui dimensão de Hausdorff total, isto é, a dimensão do espaço em que se joga. O mesmo tipo de detecção tem seu êxito em casos mais gerais como é descoberto em artigos mais recentes nos trabalhos de *Fishman* e *Kleinbock-Weiss*, e também são retratados neste trabalho. Além disso, são estudados o jogos de Schmidt em atratores de sistemas iterados de funções de contrações-similaridades em dois âmbitos: espaços euclidianos e espaços métricos completos doubling. Certamente, pode-se dizer que este estudo é motivado pelos sucessos obtidos por *Dani*, *Fishman*, *Broderick-Fishman-Kleinbock*, *Weisheng Wu* em seus diversos trabalhos ao longo das últimas três décadas, onde foram desenvolvidos métodos para identificar conjuntos vencedores.

# Abstract

The aim of this work is to analyze Schmidt games from the point of view of applications in the study of Hausdorff dimension. More precisely, we make a refined analysis of the game, used here as a tool, to determine the Hausdorff dimension of a certain class of sets defined in the context of the game. The approach is step-by-step, beginning in the case where the game is set in the Euclidean space, where it can be concluded that any winning set has total Hausdorff dimension. Analogous results were achieved in more general contexts recently by *Fishman* and *Kleinbock-Weiss*. For example, there are studied Schmidt games in attractors of iterated function systems of contracting similitudes. Here two contexts are being studied: Euclidean spaces and complete metric spaces having the doubling property. This study is motivated by works of *Dani*, *Fishman*, *Broderick-Fishman-Kleinbock*, *Weisheng Wu* and many others, where methods were established to detect winning sets.

# Sumário

**1 Introdução** **8**

**2 Resultados preliminares** **10**
2.1 Dimensão de Hausdorff . . . . . 10
2.2 Propriedades básicas da dimensão de Hausdorff . . . . . 11
2.3 Exemplos clássicos . . . . . 14
2.3.1 O conjunto de Cantor standard . . . . . 14
2.3.2 Conjuntos de volume positivo . . . . . 15

**3 O jogo de Schmidt** **16**
3.1 Introdução ao Jogo de Schmidt e propriedades básicas . . . . . 16
3.2 A dimensão de Hausdorff de conjuntos vencedores em espaços euclidianos . 20
3.3 A dimensão de Hausdorff de conjuntos vencedores em espaços métricos . . 24
3.4 Conjunto vencedor atípico . . . . . 28
3.5 Conjuntos vencedores em atratores de sistemas iterados de funções . . . . . 29
3.5.1 Atratores de sistemas iterados de funções . . . . . 29
3.5.2 Medidas estacionárias para SIF's . . . . . 31
3.5.3 Medida de Hausdorff do atrator . . . . . 34
3.5.4 O caso euclidiano . . . . . 35
3.5.5 O caso doubling - uma discussão . . . . . 37
3.6 Considerações finais . . . . . 39

# 1 Introdução

Sejam $(X, \mathrm{d})$ espaço métrico completo, $S \subset X$ e $\alpha, \beta \in (0,1)$ fixados. O jogo sob os parâmetros $(\alpha, \beta) - S$ (costuma-se chamar $S$ por conjunto alvo) é disputado por dois participantes: Bob e Alice. O jogo deve iniciar com Bob ao escolher qualquer bola fechada $B_1 \subset X$ com raio $r_0 > 0$. Alice, em seguida, deve escolher por sua vez uma bola fechada $A_1 \subset B_1$ com raio $r_1 = \alpha r_0$. Novamente, já no segundo turno, Bob é obrigado a escolher uma bola fechada $B_2 \subset A_1$, cujo raio é $r_2 = \beta r_1$. Alice deve terminar o segundo turno ao escolher uma bola fechada $A_2 \subset B_2$, de raio $r_3 = \alpha r_2$, e assim por diante. Considere

$$x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

o único ponto de interseção de todas essas bolas. Se $x \in S$, então Alice é declarada a **vencedora**. Caso contrário, Bob é o **vencedor**. Além disto, $S$ é dito conjunto $(\alpha, \beta)$-**vencedor**, se existir uma estratégia na qual Alice possa garantir que, independente de como Bob faça suas escolhas durante seus turnos, $x \in S$. Por fim, $S$ é dito conjunto $\alpha$-**vencedor**, se é $(\alpha, \beta)$-vencedor, para qualquer $\beta \in (0,1)$. Para não carregar a notação, diz-se que $S$ é **vencedor** se o mesmo for $\alpha$-vencedor para algum $\alpha \in (0,1)$.

De forma geral, pode-se dizer que um conjunto vencedor deve ser "grande" num certo sentido. É fácil ver que qualquer conjunto vencedor é um conjunto denso. Por outro lado, jogando no espaço euclidiano, existem exemplos de conjuntos de medida de Lebesgue nula, mas que são vencedores. Um exemplo clássico é a observação de Schmidt em [16], onde diz que o conjunto dos números mal aproximáveis é de fato é um conjunto vencedor e, portanto, tem dimensão de Hausdorff igual a um (e medida de Lebesgue nula). É de se lembrar que $x \in \mathbb{R}$ é **mal aproximável** quando existe $c(x)$ tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{c(x)}{q^2}.$$

Em geral, tudo depende do espaço em que se joga, por isso tais afirmações tornar-se-ão mais claras ao decorrer deste trabalho. Schmidt provou o seguinte tipo de resultado:

**Teorema 1.1** ( [16])**.** *Todo subconjunto vencedor do $\mathbb{R}^n$ possui dimensão de Hausdorff total. Isto é, para $S \subset \mathbb{R}^n$ vencedor, tem-se*

$$\dim_H S = n.$$

De fato, ele provou um resultado mais geral em espaços de Hilbert, onde ficou atestado que em dimensão infinita os conjuntos vencedores possuem dimensão de Hausdorff infinita.

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento da dimensão de Hausdorff dos conjuntos vencedores em diferentes ambientes. Generalizações expressivas do teorema de Schmidt são encontradas nos artigos de Fishman [8] e mais recentemente de Kleinbock-Weiss [12] e são vistas neste trabalho, como por exemplo o seguinte (ver Teorema 3.19).

**Teorema A** ( [12])**.** *Seja $X$ espaço métrico completo suporte de uma medida doubling $\mu$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Se $S$ é conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor do jogo de Schmidt em $X$ e $\emptyset \neq U \subset X$ aberto, então existe constante positiva $c = c(K) < 1$ (onde $K$ é constante de doubling) tal que*

$$\dim_H S \cap U \geq \underline{d}_\mu(U) - \frac{\log c}{\log(\alpha\beta)}.$$

*Em particular,* $\dim_H S \cap U \geq \underline{d}_\mu(U)$*, se $S$ é vencedor.*

Faz-se necessário, é claro, justificar esta iniciativa. Afinal, por mais expressiva generalização que se obtenha, de nada serviria caso insignificante fosse a classe dos conjuntos vencedores. Todavia, as propriedades que esses conjuntos gozam ensejam esta empreitada. Notáveis e presentes em detalhes neste trabalho são:

- A propriedade de ser vencedor é preservada por interseções enumeráveis;
- A propriedade de ser ser vencedor é preservada por homeomorfismos bi-Lipschitz.

Também motivam a proposta deste trabalho resultados como os apresentados por Dani em [7], Broderick-Fishman-Kleinbock em [6] e Wu em [18] (estes são citados aqui à título de motivação e curiosidade, pois os mesmos não são objetos de estudo neste trabalho).

Isto significa que jogos de Schmidt não somente possuem interesse intrínseco, mas servem também para entender problemas em outros contextos. Em [7], S. G. Dani estudou conjuntos vencedores através de endomorfismos no toro. Especificamente, para $n > 1$ e fixado um endomorfismo sobrejetivo semisimples do toro n-dimensional, ele mostrou que o subconjunto dos pontos do toro tais que o fecho de sua órbita não contem elemento de ordem finita possui dimensão de Hausdorff $n$. Generalização deste resultado é vista mais recentemente no trabalho de Broderick-Fishman-Kleinbock em [6]. Por sua vez, Wu em [18] estuda o jogo de Schmidt ambientado na variedade instável de um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e encontra condições suficientes para detectar a presença de um conjunto vencedor.

Tudo isto oferece forte motivação para entender os jogos de Schmidt em casos mais gerais e a relação entre a propriedade de conjunto vencedor e ter dimensão de Hausdorff "grande". A generalização do teorema de Schmidt por Kleinbock-Weiss dá ensejo a estudar casos particulares onde a dimensão pontual da medida é conhecida. Sob essa ótica, o contexto do jogo de Schmidt em atratores de sistemas iterados de funções (SIF) que satisfazem a chamada open set condition (OSC) pode ser visto de maneira bastante natural. Por isso, o trabalho de Hutchinson em [10] recebe destaque na Seção 3.5.4. Nela, é apresentado o resultado que faz o link entre atrator de um SIF num espaço euclidiano e o jogo de Schmidt. Este assunto fica mais interessante quando se observa na Seção 3.5.5 que, em verdade, este resultado pode ser colocado num contexto mais geral de atratores de SIF's em espaços métricos completos com a propriedade doubling, que é o seguinte (ver Teorema 3.42).

**Teorema B.** *Sejam $X$ um espaço métrico completo doubling, $K \subset X$ atrator de um SIF de contrações-similaridades que satisfaz a OSC. Então todo subconjunto vencedor $A \subset K$ de um jogo de Schmidt em $K$ possui dimensão de Hausdorff total, isto é, igual a dimensão de Hausdorff do atrator.*

Uma base consistente em Geometria Fractal é feita no Capítulo 2. Referências nesta área foram [14], [4], [3]. Na Seção 2.1, alguns resultados são coletados para que o leitor tome familiaridade com a dinâmica do jogo. Em seguida, começa a jornada em busca do ambiente mais geral possível sobre o qual o jogo demonstra-se favorável ao interesse proposto inicialmente. Os obstáculos encontrados resultam em contra-exemplos a essa iniciativa e são expostos igualmente. No entanto, acredita-se demonstrar por aqui, que aqueles que se debruçaram sobre essa questão obtiveram êxito ao concluir com tamanha abrangência que é sintetizada na última seção do Capítulo 2 com a introdução dos espaços métricos doubling.

# 2 Resultados preliminares

Encontram-se aqui os conceitos básicos que servirão de base fundamental para entendimento de assunto ulterior. Por isso, a dimensão de Hausdorff recebe atenção privilegiada neste espaço. Resultados básicos acerca de Topologia e Medida são admitidos. Procurou-se nestas linhas iniciais expor estritamente o necessário para uso direto neste trabalho sem prejuízos do entendimento. Boas referência nesse estudo são, por exemplo, [14] e [4].

## 2.1 Dimensão de Hausdorff

**Definição 2.1** (Dimensão de Hausdorff)**.** *Seja $X$ espaço métrico qualquer. Para $K \subset X$, considere*

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{*}(K) := \inf\left\{\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^{\alpha} : K \subset \bigcup_i U_i\right\},$$

*onde $\{U_i\}$ é uma cobertura enumerável de $K$ por quaisquer conjuntos. A* ***dimensão de Hausdorff*** *de $X$ é definida por*

$$\dim_H K := \inf\{\alpha : \mathcal{H}^{\alpha}_{*}(K) = 0\}.$$

*Mais geralmente, seja*

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(K) := \inf\left\{\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^{\alpha} : K \subset \bigcup_i U_i,\ \operatorname{diam} U_i < \varepsilon\right\}.$$

*A* ***medida de Hausdorff $\alpha$-dimensional*** *é definida por*

$$\mathcal{H}^{\alpha}(K) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(K).$$

Na definição acima pode-se admitir coberturas formadas apenas por conjuntos abertos (ou fechados), sem que haja qualquer alteração no valor de $\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}$. Para ver isso, dada uma cobertura $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ qualquer, considere a coleção de coberturas $\mathcal{A}_n = \{B(A_i, \frac{1}{n})\}_{i\in\mathbb{N}}$, onde $B(A_i, r) := \{x \in E : \mathrm{d}(x, A_i) < r\}$. Passando o limite em $n$ chega-se na conclusão desejada. Mais especificamente ainda, por exemplo, utilizando bolas o valor de $\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}$ cresce no máximo sob um fator de $2^{\alpha}$, pois qualquer conjunto $K$ está contido numa bola de no máximo o dobro de seu diâmetro. Por fim, pode-se provar que a medida de Hausdorff $\alpha$-dimensional satisfaz as condições de uma medida exterior.

**Lema 2.2.** *Se $\mathcal{H}^{\alpha}(K) < \infty$, então $\mathcal{H}^{\beta}(K) = 0$, para todo $\beta > \alpha$.*

*Demonstração.* Da definição de $\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}$, obtem-se $\mathcal{H}^{\beta}_{\varepsilon}(K) \leq \varepsilon^{\beta-\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varepsilon}(K)$, donde segue o resultado ao tomar $\varepsilon \to 0$. □

**Lema 2.3.** *$\mathcal{H}^{\alpha}(K) = 0$, se e somente, se $\mathcal{H}^{\alpha}_{*}(K) = 0$. Ademais,*

$$\begin{aligned}\dim_H K &= \inf\{\alpha : \mathcal{H}^{\alpha}(K) = 0\} = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^{\alpha}(K) < \infty\} \\ &= \sup\{\alpha : \mathcal{H}^{\alpha}(K) > 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^{\alpha}(K) = \infty\}.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Como $\mathcal{H}^\alpha(K) \geq \mathcal{H}^\alpha_*(K)$ (a variedade maior de coberturas que a definição de $\mathcal{H}^\alpha_*$ permite só faz com que seu ínfimo possa manter-se ou diminuir em relação a $\mathcal{H}^\alpha$), é suficiente provar que se $\mathcal{H}^\alpha_*(K) = 0$ então $\mathcal{H}^\alpha(K) = 0$. De fato, se $\mathcal{H}^\alpha_*(K) = 0$, então para cada $\delta > 0$, existe uma cobertura de $K$ por conjuntos $\{U_k\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_k)^\alpha < \delta.$$

Esses conjuntos possuem diâmetro menor que $\delta^{1/\alpha}$, portanto $\mathcal{H}^\alpha_{\delta^{1/\alpha}}(X) < \delta$. Tomando $\delta \to 0$, segue que $\mathcal{H}^\alpha(K) = 0$. Por último, a equivalência imediatamente implica que

$$\dim_H X = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(K) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(K) > 0\}.$$

As outras igualdades seguem do Lema 2.2. □

## 2.2 Propriedades básicas da dimensão de Hausdorff

**I. Monotonicidade.** Se $Y \subset Z \subset X$, então $\dim_H Y \leq \dim_H Z$.

**II. Estabilidade por uniões enumeráveis.** Seja $\{A_i\}$ coleção enumerável de subconjuntos de $X$. Então $\dim_H \bigcup_{i=1} A_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H A_i$.

**III. Conjuntos enumeráveis.** Se $X$ é enumerável, então $\dim_H X = 0$.

**IV. Transformações de Hölder.** Se $f : X \to Y$ é uma transformação $\alpha$-Hölder entre espaços métricos, então $\dim_H f(X) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H X$.

**V. Invariância bi-Lipschitz.** Se $f : X \to Y$ é uma transformação bi-Lipschitz entre espaços métricos, então $\dim_H X = \dim_H Y$.

*Demonstrações - propriedades básicas.*

**I.** É imediata ao observar que $\mathcal{H}^\alpha(Y) \leq \mathcal{H}^\alpha(Z)$, para cada $\alpha$.

**II.** Seja $\{A_i\}$ coleção enumerável de subconjuntos de $X$. Então

$$\dim_H \bigcup_{i=1} A_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H A_i.$$

É claro que $\dim_H \bigcup_i A_i \geq \dim_H A_j$, para cada $j$ pela monotonicidade. Por outro lado, se $s > \dim_H A_i$ para todo $i$, então tem-se $\mathcal{H}^s(A_i) = 0$. Donde segue que

$$\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) = 0.$$

**III.** Por sua vez segue como corolário da propriedade **II** com a ressalva de que todo ponto, como conjunto, possui dimensão de Hausdorff nula.

**IV.** Considere $\{U_i\}$ uma cobertura de $X$ tal que $\operatorname{diam} U_i < \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Da condição de Hölder, existem $c, \alpha$ tais que

$$\operatorname{diam} f(X \cap U_i) \leq c \cdot (\operatorname{diam} X \cap U_i)^\alpha \leq c \cdot (\operatorname{diam} U_i)^\alpha.$$

Isto implica que $\{f(X \cap U_i)\}$ é uma $c\delta^\alpha$-cobertura de $f(X)$. Logo, para qualquer $s \geq 0$,

$$\sum_i (\operatorname{diam} f(X \cap U_i))^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^s.$$

Portanto,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s_\delta(X).$$

Tomando $\delta \to 0$, conclui-se que

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}(X).$$

Para $s > \dim_H X$ obtem-se $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(X)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}(X) = 0$, que implica $\dim_H f(X) \leq \dfrac{s}{\alpha}$.

**V.** É corolário imediato da propriedade anterior. Merece destaque, no entanto, pelo seu significado. Do ponto de vista da dimensão de Hausdorff, não basta que dois objetos sejam homeomorfos para serem equivalentes. É necessário que o homeomorfismo também seja bi-Lipschitz. □

Na maior parte das ocasiões o cálculo direto da dimensão de Hausdorff é inviável. Uma prática comum é estimá-la através de desigualdades que oferecem verdadeiras limitações (superiores e/ou inferiores do valor da dimensão). Nesse sentido, alguns resultados como o Princípio da Distribuição de Massa (caso particular do Teorema 2.5) servem de auxílio.

**Definição 2.4.** *Sejam $X$ espaço métrico e $\mu$ medida de Borel. A* ***dimensão pontual inferior*** *e* ***superior*** *de $\mu$ em $x$ são dadas respectivamente por*

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \quad e \quad \overline{d}_\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}$$

*Se os limites coincidirem, denote-os por $d_\mu(x)$, que é chamado* ***dimensão pontual*** *de $\mu$ em $x$.*

**Teorema 2.5** (Princípio da Distribuição de Massa Não-uniforme)**.** *Sejam $X$ espaço métrico, $\mu$ medida de Borel e $A \subset X$ subconjunto $\mu$-mensurável tal que $\mu(A) > 0$. Suponha que para todo $x \in A$*

$$\alpha \leq \underline{d}_\mu(x).$$

*Então $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$ e $\alpha \leq \dim_H A$. Ainda mais, se*

$$\overline{d}_\mu(x) \leq \beta,$$

*então $\dim_H A \leq \beta$.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{U}_r = \{B(x,r) : x \in A\}$ e defina

$$\begin{aligned} M_\mu(A,d,r) &:= \inf\Big\{ \sum_i \mu(U_i)^d : U_i \in \mathcal{U}_r,\ \bigcup_i U_i \supset A \Big\} \\ M_\mu(A,d) &:= \lim_{r\to 0} M_\mu(A,d,r) \\ M_\mu(A) &:= \inf\{d : M_\mu(A,d) = 0\}. \end{aligned}$$

Como $\mu(A) > 0$, segue que $M_\mu(A) = 1$.

*Afirmação: Se existir $\varepsilon_0 >$ e $A \subset X$ $\mu$-mensurável tais que $\mu(A) > 0$ e para todo $x \in A$ e para todo $r \in (0, \varepsilon_0)$ tem-se*

$$s \leq \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r},$$

*então $\mathcal{H}^s(A) > 0$ e $s \leq \dim_H A$. Ainda mais, se para todo $r \in (0, \varepsilon_0)$ tem-se*

$$\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq t,$$

*então $\dim_H A \leq t$.*

*Demonstração.* De fato, como $M_\mu(A) = 1$, por definição, para $d > 1$ obtem-se $M_\mu(A, d) = 0$. Portanto, existe $\varepsilon_1$ tal que para todo $r \in (0, \varepsilon_1)$, $M_\mu(A, d, r) < \delta$. Isto significa que para todo $r \in (0, \varepsilon_1)$, existe cobertura $\{B(x_i, r) : x_i \in A\}$ de $A$ tal que $\sum_i \mu(B(x_i, r)^d < \delta$. Por hipótese, $r^t \leq \mu(B(x_i, r)) \leq r^s$. Com isso,

$$\sum_i r^{dt} \leq \sum_i \mu(B(x_i, r))^d \leq \delta.$$

Logo $\mathcal{H}^{dt}(A) < \infty$, que implica $\dim_H A \leq dt$. Como $d > 1$ é arbitrário, conclui-se $\dim_H A \leq t$.

Analogamente, seja $\{U_i\}$ cobertura de $A$. Para $\{r_i\}$, onde $r_i > \operatorname{diam} U_i$, considere $x_i \in U_i$ e $B(x_i, r_i)$. Por hipótese,

$$\mu(U_i) \leq \mu(B(x_i, r_i)) \leq r_i^s.$$

É claro que $\mu(U_i) \leq (\operatorname{diam} U_i)^s$, pois, do contrário, $\mu(U_i) > (\operatorname{diam} U_i)^s$ e com isso haveria de ter $(\operatorname{diam} U_i)^s < \mu(U_i) \leq \mu(B(x_i, \operatorname{diam} U_i)) \leq (\operatorname{diam} U_i)^s$. Uma contradição. Logo,

$$\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^s \geq \sum_i \mu(U_i) \geq \mu(A) > 0.$$

Portanto, $\mathcal{H}^s(A) \geq 2^s \mu(A) > 0$ e que $\dim_H A \geq s$. □

Para $N \geq 1$, considere

$$A_N := \left\{ x \in A : s - \frac{1}{N} \leq \frac{\log \mu(B(x, \frac{1}{N}))}{\log \frac{1}{N}} \leq t + \frac{1}{N} \right\}.$$

É fácil ver que cada $A_N$ é mensurável e $A_N \subset A_{N'}$, se $N \leq N'$. Além disto, $A = \bigcup_N A_N$ e pela $\sigma$-aditividade de $\mu$ tem-se $\mu(A) = \lim_N \mu(A_N)$. Pela afirmação, para todo $N \geq 1$,

$$\mathcal{H}^s(A_N) > 0 \quad \text{e} \quad s - \tfrac{1}{N} \leq \dim_H A_N \leq t + \tfrac{1}{N}$$

e esta desigualdade ainda vale tomando o supremo em $N$. Portanto, pela estabilidade por uniões enumeráveis da dimensão de Hausdorff,

$$s \leq \dim_H A \leq t.$$

Além disso, tem-se $\mathcal{H}^s(A) \geq \mathcal{H}^s(A_N) > 0$. Isso termina a demonstração do teorema. □

**Corolário 2.6.** *Sejam $X$ espaço métrico, $\mu$ medida de Borel e $A \subset X$ subconjunto $\mu$-mensurável tal $\mu(A) > 0$ e tal que para $\mu$-quase todo ponto $x \in A$*

$$\alpha \leq \underline{d}_\mu(x) \leq \overline{d}_\mu(x).$$

*Então $\alpha \leq \dim_H A$.*

## 2.3 Exemplos clássicos

Como já dito, em geral, o cálculo direto (sem auxílio de outros resultados) da dimensão de Hausdorff não rende muitos frutos. Há exceções todavia. Uma delas é o Conjunto de Cantor - definido abaixo - certamente o fractal mais famoso.

### 2.3.1 O conjunto de Cantor standard

Seja $E_0$ o intervalo $[0,1]$. Considere ainda $E_1$ obtido a partir da remoção do meio-terno de $E_0$, isto é,

$$E_1 = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Repetindo o processo, obtem-se $E_2$ a partir da remoção dos meio-ternos de $E_1$ e

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Continuando desta forma, obtem-se $E_k$ a partir da remoção de todos os meio-ternos de $E_{k-1}$. Logo $E_k$ consite de $2^k$ intervalos de comprimento $3^{-k}$. O conjunto de Cantor consiste nos números pertencentes a $E_k$ para todo $k$. Matematicamente, é expressado por $\cap_{k=0}^{\infty} E_k$. De um ponto de vista mais prático, o conjunto de Cantor é composto pelos números cuja representação na base 3 não contêm o dígito 1. Não se deseja aqui estudar as propriedades peculiares de tal conjunto, mas o fato de serem tantas a coexistir pacificamente é digno de nota: o conjunto de Cantor standard é não enumerável, totalmente desconexo, perfeito, compacto. Em verdade, um resultado clássico diz que qualquer espaço métrico com estas propriedades é homeomorfo ao conjunto de Cantor standard (e formam portanto uma classe chamada espaços de Cantor).

No que segue, os intervalos de nível $k$ são aqueles intervalos que compõem o conjunto $E_k$ no processo de construção do conjunto de Cantor, que por sua vez é denotado por $F$. Assim, $E_k$ consite de $2^k$ intervalos de comprimento $3^{-k}$. Tomando os intervalos de $E_k$ como uma cobertura de $F$, segue que

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1,$$

para $s = \log 2 / \log 3$. Daí, quando $k \to \infty$, conclui-se que $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$. Mostra-se agora que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$ e isso é suficiente para concluir que $\dim_H(F) = s$. De fato, como observado na definição da dimensão de Hausdorff, é possível restringir apenas ao uso de coberturas por intervalos. Observe ainda que pela compacidade de $F$, em verdade basta o uso de coberturas finitas. Seja então $\{U_i\}$ uma cobertura finita de $F$ por intervalos. Para cada $U_i$, seja $k$ inteiro tal que

$$3^{-k-1} \leq \operatorname{diam} U_i \leq 3^{-k}.$$

Então $U_i$ intersecta no máximo um intervalo de nível $k$, pois os mesmos estão separados entre si por uma distância não menor que $3^{-k}$. Se $j \geq k$, então por construção $U_i$ intersecta no máximo $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s (\operatorname{diam} U_i)^s$ intervalos de nível $j$ de $E_j$ pela desigualdade anterior. Agora, escolhendo $j$ grande o suficiente tal que $3^{-j-1} \leq \operatorname{diam} U_i$ para todo $U_i$, então como $\{U_i\}$ intersecta no máximo $2^j$ intervalos de comprimento $3^{-j}$, obtem-se que $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s (\operatorname{diam} U_i)^s$. Logo $\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$.

### 2.3.2 Conjuntos de volume positivo

O Princípio da Distribuição de Massa pode ser usado para concluir que todo conjunto de medida volume positivo em $\mathbb{R}^n$ possui dimensão de Hausdorff total. Em particular, todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ possuem dimensão de Hausdorff total. Em outro sentido, existem conjuntos de medida nula que possuem dimensão de Hausdorff positiva (o conjunto de Cantor standard é um desses exemplos). Isso mostra, de certa maneira, que medida e dimensão de Hausdorff são ferramentas de medição de conjuntos de diferentes calibres.

# 3 O jogo de Schmidt

Na Seção 3.1 constam alguns resultados estruturais acerca do jogo de Schmidt presentes em seu artigo [16] no sentido de tomar familiaridade com esses objetos. São observadas as limitações dos conjuntos vencedores a medida que variam os parâmetros para o jogo. Em seguida, no sentido oposto, são vistas noções a respeito do quão grandes são esses conjuntos e quão grande é a classe que eles formam. Logo após, a Seção 3.2 apresenta o resultado principal que diz quando um conjunto $\alpha$-vencedor num espaço euclidiano possui dimensão de Hausdorff total, isto é, dimensão do espaço euclidiano. Generalizações deste resultado são consideradas posteriormente na Seção 3.3 onde se acompanha [12], porém, sabe-se que em espaços métricos em geral tal resultado não é válido. Quanto a essa expectativa, o contra-exemplo também contido em [12] é exposto na Seção 3.4 e finalmente faz-se o estudo dos jogos de Schmidt em atratores de sistemas iterados de funções na Seção 3.5. Durante todo este capítulo $X$ denotará sempre um espaço métrico completo, a menos que se diga o contrário.

## 3.1 Introdução ao Jogo de Schmidt e propriedades básicas

**Definição 3.1** (O jogo de Schmidt)**.** *Sejam $(X, d)$ espaço métrico completo, $S \subset X$ e $\alpha, \beta \in (0,1)$ fixados. O jogo sob os parâmetros $(\alpha, \beta) - S$ (costuma-se chamar $S$ por conjunto alvo) é disputado por dois participantes; a começar por Bob que escolhe qualquer bola fechada $B_1 \subset X$ com raio $r_0 > 0$. Alice, a outra jogadora, deve escolher por sua vez uma bola fechada $A_1 \subset B_1$ com raio $r_1 = \alpha r_0$. Novamente, já no segundo turno, Bob é obrigado a escolher uma bola fechada $B_2 \subset A_1$, cujo raio é $r_2 = \beta r_1$. Alice deve terminar o segundo turno escolhendo uma bola fechada $A_2 \subset B_2$, de raio $r_3 = \alpha r_2$, e assim por diante. Considere*

$$x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

*o único ponto de interseção de todas essas bolas. Se $x \in S$, então Alice é declarada a* ***vencedora****. Caso contrário, Bob é o* ***vencedor****. Além disto, $S$ é dito conjunto $(\alpha, \beta)$-**vencedor**, se existir uma estratégia na qual Alice possa garantir (pelas escolhas feitas em seus turnos) que, independente de como Bob faça suas escolhas durante seus turnos, $x \in S$. Por fim, $S$ é dito conjunto $\alpha$-**vencedor**, se é $(\alpha, \beta)$-vencedor, para qualquer $\beta \in (0,1)$. Para não carregar a notação, diz-se que $S$ é* ***vencedor*** *se o mesmo for $\alpha$-vencedor para algum $\alpha \in (0,1)$.*

Denote por $\Omega$ o conjunto de todas as bolas fechadas $B[c, \rho]$, onde $\rho > 0$, $c \in X$. Dado $B = B[c, \rho] \in \Omega$, $\gamma \in (0,1)$, seja $B^\gamma \subset \Omega$ o conjunto de todas as bolas fechadas com raio $\gamma\rho$ contidas em $B$. Para qualquer $B = B[c, \rho]$ em $\Omega$ e $x \in X$, escreve-se

$$e(x, B) := \mathrm{d}(x, c)\rho^{-1}.$$

Note que $e(x, B) = 0$ se, e somente se, $x = c$. Além disto, $x \in B$ se, e somente se, $e(x, B) \leq 1$.

**Lema 3.2.** *Para todos $\alpha$,$\beta \in (0,1)$ satisfazendo $2\alpha \geq 1 + \alpha\beta$, o único conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor é o próprio $X$.*

*Demonstração.* Sejam $x \in X$, $S \subset X$ conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor. Bob pode escolher $B_1 = B[x, r]$ como sua jogada inicial. Repare que $A_1 \in B_1^\alpha$ satisfaz $e(x, A_1) \leq (1-\alpha)\alpha^{-1}$,

pois, de fato, $\mathrm{d}(x, a_1) \leq r - r\alpha$, onde $a_1$ é centro de $A_1$. Então

$$e(x, A_1) = \mathrm{d}(x, a_1)(r\alpha)^{-1} \leq (1-\alpha)\alpha^{-1}.$$

Mas,

$$\beta \leq \beta + (2\alpha - 1 - \alpha\beta)\alpha^{-1} \leq 2 - \alpha^{-1} \leq 1 - (1-\alpha)\alpha^{-1} \leq 1 - e(x, A_1),$$

então $e(x, A_1) \leq 1 - \beta \leq 1$. Portanto, $x \in A_1$. Provar-se-á agora que Bob pode tomar $B_2 \in B_1^{\beta}$ com centro em $x$. Isso segue, pois para qualquer $y \in B[x, r\alpha\beta]$, tem-se que

$$\mathrm{d}(y, a_1) \leq \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(x, a_1) \leq r\alpha\beta + r - r\alpha \leq 2r\alpha - r\alpha \leq r\alpha,$$

pois $a_1$ satisfaz $B[a_1, r\alpha] \subset B[x, r]$. Assim, Bob pode escolher $B_2 = B[x, r\alpha\beta]$.

Agora admita, por hipótese de indução, que Bob pode escolher $B_n$ centrada em x no $n$-ésimo turno, isto é, $B_n = B[x, r\beta^{n-1}\alpha^n]$. Mostrar-se-á que no turno seguinte Bob pode ainda tomar $B_{n+1}$ centrada em $x$. Pela hipótese de indução segue

$$\mathrm{d}(x, a_n) \leq r\alpha^{n-1}\beta^{n-1} - r\alpha^n\beta^{n-1},$$

que implica

$$e(x, A_n) = \mathrm{d}(x, a_n)(r\alpha^n\beta^{n-1})^{-1} \leq (1-\alpha)\alpha^{-1},$$

portanto $x \in A_n$. Logo basta concluir que

$$B[x, r\beta^n\alpha^n] \in A_n^{\beta}.$$

Para tal, seja $y \in B[x, r\beta^n\alpha^n]$. Da desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(y, a_n) &\leq \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(x, a_n) \\
&\leq r\beta^n\alpha^n + r\alpha^{n-1}\beta^{n-1} - r\alpha^n\beta^{n-1} \\
&\leq r\beta^{n-1}\alpha^{n-1}(1 + \alpha\beta) - r\beta^{n-1}\alpha^n \\
&\leq 2r\beta^{n-1}\alpha^n - r\beta^{n-1}\alpha^n \leq r\beta^{n-1}\alpha^n,
\end{aligned}$$

logo $B[x, r\beta^n\alpha^n] \subset A_n$. Com isso, se $S$ é vencedor, então $x \in S$ (caso contrário, Bob poderia vencer o jogo através desses movimentos, que seria uma contradição com o fato de $S$ ser um conjunto vencedor para Alice). Logo $S = X$, pois $x$ é arbitrário. □

**Corolário 3.3.** *Para $\alpha > \frac{1}{2}$, o único conjunto $\alpha$-vencedor é o próprio $X$.*

**Proposição 3.4.** *Para todos $\alpha$,$\beta \in (0,1)$ satisfazendo $2\beta \geq 1 + \alpha\beta$, qualquer conjunto denso em $X$ é $(\alpha, \beta)$-vencedor.*

*Demonstração.* Seja $S$ conjunto denso e considere $B_1 = B[c, r]$, escolha arbitrária de Bob em sua primeira jogada. Existe $x_c \in S$ tal que $\mathrm{d}(x_c, c) \leq (1-\alpha)r$. O procedimento é semelhante ao do Lema 3.2. Desta vez, Alice pode escolher $A_1 \in B_1^{\alpha}$ com centro em $x$: para qualquer $y \in B[x_c, r\alpha]$, tem-se $\mathrm{d}(y, c) \leq \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(x, c) \leq r\alpha + r - r\alpha \leq r$. Repetindo o processo em todo turno, Alice pode considerar suas bolas $A_n$ centradas em $x_c$ (veja que desta vez $e(x, B_n) \leq (1-\beta)\beta^{-1}$ vale para todo $n > 1$). Com isso, chega-se uma estratégia vencedora para Alice, uma vez que $B_1 = B[c, r]$ foi dada arbitrariamente. Isto demonstra o resultado. □

**Lema 3.5.** *Sejam $E$ espaço de Banach, $\alpha$,$\beta \in (0,1)$, tais que $2\alpha < 1 + \alpha\beta$. Então, todo conjunto obtido ao remover-se um número finito de pontos de um conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor é também um conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor.*

*Demonstração.* Sejam $\alpha, \beta \in (0,1)$, $S$ um conjunto $(\alpha,\beta)$-vencedor e $x \in S$. Se Bob escolher $B_1$ de tal maneira que $x \notin B_1$, é claro que Alice pode vencer. E mais, se em algum turno, Bob escolher $B_n$ tal que $x \notin B_n$ , Alice pode certamente vencer. Portanto, basta provar que Alice pode jogar de tal maneira que $x \notin B_n$, para algum $n$.

Assuma então $x \in B_1 = B[b_1, r]$. Daí, $e_1 := e(x, B_1) \leq 1$. Observe que Alice pode escolher $A_1$ tal que $e_1' = e(x, A_1) = (e_1 + 1 - \alpha)\alpha^{-1}$. De fato, tomando $A_1 = B[a_1, r\alpha]$, onde $a_1 = b_1 + e_1^{-1}(\alpha - 1)(x - b_1)$, obtem-se que

$$\begin{aligned} e_1' &= d(x, a_1)(r\alpha)^{-1} \\ &= \mathrm{d}(x, b_1)(1 - (\alpha - 1)e_1^{-1})(r\alpha)^{-1} \\ &= (e_1 + 1 - \alpha)\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Se $e_1' > 1$, então $x \notin A_1$ implica que $x \notin B_2$. Caso contrário, se $e_1' \leq 1$, note que que $e_2 = e(x, B_2) \geq (e_1' + \beta - 1)\beta^{-1}$, pois

$$\begin{aligned} e_2 &\geq (d(x, a_1) - d(a_1, b_2))(r\alpha\beta)^{-1} \\ &\geq (d(x, a_1) - r\alpha + r\alpha\beta)(r\alpha\beta)^{-1} \\ &= (e_1' + \beta - 1)\beta^{-1}. \end{aligned}$$

Com isso, $e_2 = e(x, B_2) \geq e_1\beta^{-1} + (1 + \alpha\beta - 2\alpha)(\alpha\beta)^{-1} > e_1(\alpha\beta)^{-1}$. Analogamente, segue que $e(x, B_{n+1}) > (\alpha\beta)^{-1}e(x, B_n)$.

Finalmente, tem-se

$$e(x, B_{n+1}) > (\alpha\beta)^{-1}e(x, B_n) > ... > (\alpha\beta)^{-n}e(x, B_1).$$

Como $(\alpha\beta)^{-1} > 1$, em algum $m$-ésimo turno haverá $e(x, B_{m+1}) > (\alpha\beta)^{-m}e(x, B_1) > 1$, que implica $x \notin B_{m+1}$ . □

**Observação:** É importante ressaltar o uso da estrutura de espaço vetorial durante a demonstração e, por isso, cabe perguntar para quais espaços métricos em geral essa propriedade continua válida. É claro que a mesma vale em variedades topológicas.

**Teorema 3.6.** *Seja $X$ espaço métrico completo. A interseção enumerável de conjuntos $\alpha$-vencedores, $\alpha \in (0,1)$, é um conjunto $\alpha$-vencedor.*

*Demonstração.* Considere $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos $\alpha$-vencedores em $X$, para algum $\alpha > 0$. Fixe $\beta > 0$. Alice deve obter uma estratégia para vencer em $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i$ sob tais parâmetros. Por hipótese, para cada $i \in \mathbb{N}$ e $\beta' > 0$ qualquer, Alice possui estratégia para vencer o jogo $(\alpha, \beta') - S_i$ .

Agora considere a seguinte decomposição dos naturais dada por $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_i$, onde

$$\begin{aligned} &N_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}, \\ &N_2 = \{2, 6, 10, 14, 18, ...\}, \\ &N_3 = \{4, 12, 20, 28, 36, ...\}, \\ &\vdots \\ &N_i = \{x \in N_i, \text{ se e somente se, } x = 2^{i-1} \pmod{2^i}\}. \end{aligned}$$

Cada $\mathrm{N}_i$ é infinito e dois a dois disjuntos. Em seguida, para cada $i \in \mathbb{N}$ será criado um cenário virtual. Os jogos $(\alpha, \beta_i) - S_i$ correspondem a cada cenário virtual, onde $\alpha$ é

dado e $\beta_i$ será definido posteriormente. Naturalmente, o cenário real corresponde ao jogo $(\alpha, \beta) - \bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i$, para o qual deseja-se encontrar uma estratégia vencedora para Alice.

Prosseguindo, para $j \in \mathbb{N}$, existe único $i \in \mathbb{N}$ tal que $j \in N_i$, pois cada $N_i$ é disjunto dois a dois. No $j$-ésimo turno do cenário real, Alice pode utilizar sua estratégia para vencer no $i$-ésimo cenário virtual, no qual se joga o $(\alpha, \beta_i) - S_i$, onde $\beta_i = \beta^{d_i}\alpha^{d_i-1}$ , $d_i = 2^i$ a razão da progressão aritmética $N_i$. Assim, considere que a escolha de Alice no $j$-ésimo turno do cenário real seja igual a sua escolha no $(j - 2^{i-1} + d_i)/(d_i)$ - ésimo turno do $i$-ésimo cenário virtual, no qual ela considera

$$B_{2^{i-1}}, B_{2^{i-1}+d_i}, ..., B_{j-d_i}, B_j$$

como os movimentos anteriores de Bob. Isso implica que as bolas do cenário real convergem para um ponto em $S_i$, pois a estratégia de Alice é vencedora por hipótese. Como para cada $i$, existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $j \in N_i$, segue que existe estratégia vencedora para Alice em $(\alpha, \beta) - \bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Portanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i$ é $(\alpha, \beta)$-vencedor. Como $\beta > 0$ foi tomado arbitrariamente, conclui-se o resultado. □

**Corolário 3.7.** *Todo conjunto obtido a partir da remoção de uma quantidade enumerável de pontos de um conjunto vencedor num espaço de Banach é também um conjunto vencedor.*

*Demonstração.* É imediata ao Lema 3.5 e Teorema 3.6 □

**Corolário 3.8.** *Nenhum conjunto vencedor num espaço de Banach é enumerável.*

*Demonstração.* Também imediata ao Corolário 3.7 e Teorema 3.6. □

O Corolário 3.8 garante que para algum par $(\alpha, \beta)$ Alice certamente não possui estratégia que possa garantir sua vitória. Na verdade, pode-se concluir mais. Schmidt prova que se um conjunto $S$ é $(\alpha, \beta)$-vencedor e $\alpha'$,$\beta' \in (0, 1)$ satisfazem $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, com $\alpha' \leq \alpha$, então $S$ é também $(\alpha', \beta')$-vencedor. Analogamente, para $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, com $\beta' \leq \beta$, então $S$ é $(\alpha', \beta')$-vencedor. No contexto de espaços de Banach de base enumerável, sabe-se da existência de um subconjunto denso enumerável. Pelo Lema 3.4, tal subconjunto enumerável denso é $(\alpha, \beta)$-vencedor para certos parâmetros, porém não o é $\alpha$-vencedor pelo Corolário 3.8, seja qual for $\alpha \in (0, 1)$. Portanto, para um subconjunto enumerável denso nesse espaço, existe uma quantidade não enumerável de pares $(\alpha, \beta)$ para os quais Alice não possui estratégia para vencer em tal conjunto o respectivo jogo de Schmidt sob tais parâmetros. Mais detalhes em [16].

**Teorema 3.9.** *Sejam $X$, $Y$ espaços métricos completos e $f : X \to Y$ homeomorfismo tal que $f$ e $f^{-1}$ são a-Lipschitz e b-Lipschitz respectivamente. Se para $\alpha, \beta \in (0, 1)$, onde $0 < \beta < (ab)^{-1}$, tem-se que $S \subset Y$ é conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor em $Y$, então $f^{-1}(S)$ é $(\alpha(ab)^{-1}, \beta ab)$-vencedor em $X$.*

*Demonstração.* O objetivo é construir uma estratégia vencedora em $X$. Sejam d e d' as métricas em $X$ e $Y$ respectivamente e $B_1 = B[b_1, r]$ a primeira escolha de Bob em $X$. Considere agora Alice e Bob jogando em $Y$ o jogo de Schmidt sob os parâmetros $(\alpha, \beta)-S$, no qual Bob toma como primeira escolha a bola $B'_1 = B[b'_1, rb^{-1}]$, onde $b'_1 = f(b_1)$. Provar-se-á que, de fato, $B'_1 \subset f(B_1)$. Para tal, veja que segue da condição de Lipschitz de $f^{-1}$ que

$$\mathrm{d}(b_1, y) \leq b \cdot \mathrm{d'}(b'_1, f(y)) \leq r, \text{ para todo } y \in f^{-1}(B'_1).$$

Logo, $f^{-1}(B'_1) \subset B_1$. Alice pode seguir de acordo com sua estratégia vencedora em $Y$ e com base nisso escolher $A'_1 = B[a'_1, \alpha rb^{-1}] \subset B'_1$. Tome $a_1 = f^{-1}(a'_1)$. Da desigualdade de Lipschitz de $f$, segue que

$$\mathrm{d'}(a'_1, f(y)) \leq a \cdot \mathrm{d}(a_1, y) \leq \alpha r b^{-1}, \text{ para todo } y \in B[a_1, r\alpha(ab)^{-1}].$$

Isso garante que $A_1 = B[a_1, r\alpha(ab)^{-1}] \subset f^{-1}(A'_1) \subset B_1$. No $n$-ésimo turno em $X$, Bob escolhe $B_n = B[b_n, r\alpha^{n-1}\beta^{n-1}]$. Seja $b'_n = f(b_n)$. Considere novamente o jogo em $Y$, onde Bob toma como sua $n$-ésima escolha a bola $B'_n = B[b'_n, rb^{-1}\alpha^{n-1}\beta^{n-1}]$. Novamente pela condição de Lipschitz de $f^{-1}$

$$\mathrm{d}(b_n, y) \leq b \cdot \mathrm{d'}(b'_n, f(y)) \leq brb^{-1}\alpha^{n-1}\beta^{n-1} \leq r\alpha^{n-1}\beta^{n-1}, \text{ para todo } y \in f^{-1}(B'_n),$$

segue que $B'_n \subset f(B_n)$. Alice, por sua vez, ao considerar sua estratégia vencedora escolhe a bola $A'_n = B[a'_n, rb^{-1}\alpha^n\beta^{n-1}]$. Denote $a_n = f^{-1}(a'_n)$. Da condição de Lipschitz para $f$,

$$\mathrm{d'}(a'_n, f(y)) \leq a \cdot \mathrm{d}(a_n, y) \leq rb^{-1}\alpha^n\beta^{n-1}, \text{ para todo } y \in A_n. \text{ Logo } f(A_n) \subset A'_n.$$

Em outras palavras, no $n$-ésimo turno em $X$ Alice pode escolher

$$A_n = B[a_n, r(\beta ab)^{n-1}\alpha^n(ab)^{-n}] = B[a_n, r\alpha^n\beta^{n-1}(ab)^{-1}] \subset f^{-1}(A'_n) \subset B_{n-1}.$$

Por indução, Alice pode prosseguir da maneira acima em todos os turnos do jogo em $X$. Como

$$f^{-1}(A'_{n+1}) \subset A_n \subset f^{-1}(A'_n)$$

e $\bigcap_n A'_n \in S$, conclui-se que

$$\bigcap_n A_n \in f^{-1}(S)$$

e, portanto, Alice possui estratégia vencedora em $X$. □

Diante do Teorema 3.9 é possível traçar uma analogia entre os conceitos de conjunto vencedor e conjunto de dimensão de Hausdorff total. Isto induz de maneira natural a pergunta: é possível estabelecer uma relação entre os dois conceitos?

## 3.2 A dimensão de Hausdorff de conjuntos vencedores em espaços euclidianos

O seguinte é um dos resultados principais da teoria de jogos de Schmidt.

**Teorema 3.10** ( [16]). *Todo subconjunto vencedor do $\mathbb{R}^n$ possui dimensão de Hausdorff total. Isto é, para $S \subset \mathbb{R}^n$ vencedor, tem-se*

$$\dim_H S = n.$$

Os dois resultados auxiliares abaixo ajudam na demonstração deste teorema.

**Lema 3.11.** *Sejam $H$ espaço de Hilbert e $w_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. Dado qualquer $r \in \mathbb{R}_+$, considere $M = \{B[x_i, r]; i \in \mathbb{N}, x_i \in H\}$ tal que $B(x_i, r) \cap B(x_j, r) = \emptyset$ para $i \neq j$.*

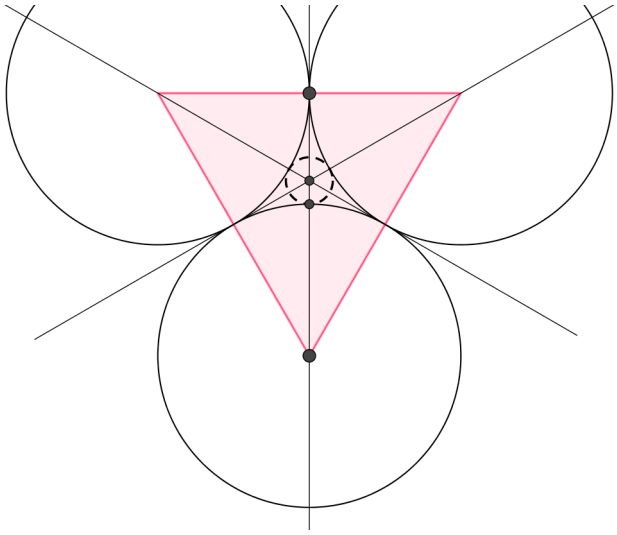
*Então para cada $x \in H$ e $r_0 < w_0 r$, a bola $B[x, r_0]$ possui interseção não vazia com no máximo duas bolas de $M$.*

O Lema 3.11 é usado por Schmidt em [16]. Além de, claro, indispensável na demonstração do Teorema 3.10, o mesmo é interessante por si só. Ele apresenta um resultado similar ao Lema de Besicovitch para cobertura, com algumas vantagens em relação ao próprio resultado de Besicovitch, que são o espaço ambiente mais geral e o trazer precisamente a relação entre a cobertura e o espaço; por outro lado, apresenta uma restrição maior imposta sob as coberturas. Mais detalhes acerca do Lema de Besicovitch para cobertura podem ser vistos em [14, Chapter 2].

*Demonstração (Lema 3.11).* Assuma sem perda de generalidade que $r = 1$ (homotetias preservam as interseções de bolas duas a duas). Pode-se também tratar apenas do caso em que $x$ é a origem de $H$ (o caso geral segue via translação). Assim, seja $r_0 < w_0$. Suponha, por hipótese absurda, que exista interseção não vazia de $B(0, r_0)$ com três elementos de $M$, a saber, $B(x_1, 1)$, $B(x_2, 1)$ e $B(x_3, 1)$. Das hipóteses segue que $|x_i| < 1 + r_0 < 1 + w_0$ e $2 \leq |x_i - x_j|$ para $i \neq j$. Daí,
$(i)$ $|x_i|^2 < (1 + w_0)^2 = \frac{4}{3}$
$(ii)$ $4 \leq |x_i - x_j|^2 = |x_i|^2 + |x_j|^2 - 2x_i \cdot x_j < \frac{8}{3} - 2x_i \cdot x_j$.
De $(i)$ e $(ii)$ segue que $x_i \cdot x_j < -\frac{2}{3}$. Portanto, $x_1 \cdot (x_2 + x_3) < -\frac{4}{3}$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} |x_1 \cdot (x_2 + x_3)|^2 \leq |x_1|^2 |x_2 + x_3|^2 &= |x_1|^2 (|x_2|^2 + |x_3|^2 + 2x_2 \cdot x_3) \\ &< \frac{4}{3}\left(\frac{8}{3} + 2x_2 \cdot x_3\right) < \frac{16}{9}, \end{aligned}$$

que é uma contradição. □



**Definição 3.12.** *Seja $X$ espaço métrico. Uma medida de Borel $\mu$ é $\delta$-**regular**, se existem constantes $a, b$ reais positivas tais que*

$$ar^\delta \leq \mu(B(x, r)) \leq br^\delta,$$

*para algum $\delta > 0$, para todo $x \in X$ e algum $r_* > 0$ tal que $0 < r < r_* \leq \operatorname{diam} X$.*

Resultados acerca deste tipo de medida podem ser vistos em [4, 8, 9, 14]. É claro que a medida volume em $\mathbb{R}^n$ (ou em variedades Riemmanianas) é um exemplo. Outros exemplos serão vistos posteriomente. A existência de medidas $\delta$-regulares impõe sérias restrições na estrutura do espaço métrico $X$. Por exemplo, pode-se provar que todo espaço métrico que suporta tal medida é necessariamente separável (vide Definição 3.17 e Proposição 3.38). O próximo resultado diz mais a respeito da estrutura de espaços métricos com tais medidas.

**Observação:** Destaca-se que como o suporte de uma medida $\delta$-regular é separável, então é bem definido como o menor fechado tal que seu complementar possui medida nula.

**Notação:** Dados $X$ espaço métrico, $x \in X$, $\beta > 0$, denote por $N(\beta, x, r)$ o número máximo de bolas disjuntas de raio $\beta r$ contidas em $B(x, r)$.

**Lema 3.13.** *Se $X$ é o suporte de uma medida $\delta$-regular, então existem constantes $C$ e $r_*$ positivas tais que*

$$N(\beta, x, r) \geq C\beta^{-\delta}, \text{ para todo } x \in X \text{ e } 0 < r \leq r_* \leq \operatorname{diam} X.$$

*Demonstração.* Sejam $0 < r \leq r_* \leq \operatorname{diam} X$, $0 < \beta < 1$, onde $r_*$ é tal qual na definição de medida $\delta$-regular e fixe $B(x, r)$ para algum $x \in X$. Denote por $x_i$ os centros das $N(\beta, x, r)$ bolas, onde $i \in \{1, ..., N(\beta, x, r)\}$. Assuma também que $\beta \leq \frac{1}{2}$, caso contrário, para $\frac{1}{2} < \beta < 1$, escolha $M \leq 2^{-\delta}$, que implica $M\beta^{-\delta} \leq 1$. Assim, considere também $x_i \in B(x, (1-\beta)r) \supset B(x, \beta r)$. A coleção $\{B(x_i, 3\beta r)\}$ é uma cobertura de $B(x, (1-\beta)r)$, pois, do contrário, existiria $y \in B(x, (1-\beta)r)$ tal que $\mathrm{d}(y, x_i) \geq 3\beta r$ para cada i, logo $B(y, \beta r)$ poderia ser adicionada a coleção inicial de bolas disjuntas, que é uma contradição com a maximalidade de $N(\beta, x, r)$. Daí,

$$a(1-\beta)^\delta r^\delta \leq \mu(B(x, r-\beta r)) \leq N(\beta, x, r)\mu(B(x_i, 3\beta r) \leq N(\beta, x, r) b 3^\delta \beta^\delta r^\delta.$$

Logo,

$$N(\beta, x, r) \geq ab^{-1}3^{-\delta}(1-\beta)^\delta \beta^{-\delta} \geq ab^{-1}3^{-\delta}2^{-\delta}\beta^{-\delta}.$$

Por fim, as condições do enunciado são satisfeitas com $C = ab^{-1}3^{-\delta}2^{-\delta}$. □

*Demonstração (Teorema 3.10).* A medida volume em $\mathbb{R}^n$ é evidentemente $n$-regular. Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ conjunto $\alpha$-vencedor, $\beta > 0$ tal que $N(\beta, x, r) \geq 2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e

$$N(\beta) := \min\{N(\beta, x, r) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < r \leq 1\} \geq 2.$$

Assim, com o Lema 3.13, pode-se concluir que

$$\log(N(\beta)) \geq \log(c\beta^{-n}) = \log c + n|\log \beta|. \tag{1}$$

Assuma, sem perda de generalidade, que Bob inicie o jogo com $B_0$ de raio $r = 1$. Nos turnos seguintes, $k \geq 1$, considere ao acaso $N(\beta)$ bolas disjuntas que Bob pode escolher e admita que ele esteja restringido a escolher apenas a uma dessas bolas em cada jogada. Fixe uma enumeração de tais bolas em cada turno. Para cada $k \geq 1$, seja $B_k = B_k(j_1, ..., j_k)$ a $k+1$-ésima bola escolhida por Bob, onde $j_i \in \{0, ..., N(\beta) - 1\}$, $i = 1, ..., k$. Note que para cada sequência $j_1, j_2, ...$, existe único ponto $x = x(j_1, j_2, ...)$ pertencente a todas as bolas $B_k(j_1, ..., j_k)$. Por hipótese, $x \in S$. Considere a aplicação

$$f : \{0, ..., N(\beta) - 1\}^{\mathbb{N}} \to S, \quad (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k(t_1, ..., t_k) = \{x(t)\}$$

Como todo número real no intervalo $[0, 1]$ possui ao menos uma representação na base $N(\beta)$, a aplicação

$$g : S^* \to [0, 1] \ ; \ x(t) \mapsto 0.t_1 t_2 ...$$

é sobrejetiva, onde $S^*$ é a imagem de $S$ por $f$. Repare que $g$ está bem definida, pois $f$ é injetiva, todavia é fácil ver que $g$ não é injetiva. Seja $C = \{C_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ cobertura de $S$ por bolas de raio $p_l$ e $m$ medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Em particular, $C$ cobre $S^*$. Daí,

$$\sum_{l=1}^{\infty} m(g(C_l \cap S^*)) \geq m(\bigcup_{l=1}^{\infty} g(C_l \cap S^*)) \geq 1 \tag{2}$$

Seja $k_l = [k_l^*]$, onde $k_l^* = \log_{\alpha\beta}(2w^{-1}p_l)$. Assim,

$$(\alpha\beta)^{-k_l^*} = (2w^{-1}p_l)^{-1}$$

e portanto

$$N(\beta)^{-k_l^* \log_{N(\beta)} \alpha\beta} = (2w^{-1}p_l)^{-1}$$

que implica

$$N(\beta)^{-k_l^*} = (2w^{-1}p_l)^{-\log_{\alpha\beta} N(\beta)} = (2w^{-1}p_l)^{\frac{\log N(\beta)}{|\log \alpha\beta|}}$$

e como $k_l* < k_l + 1$, segue que

$$N(\beta)^{-k_l} < N(\beta)N(\beta)^{-k_l} = N(\beta)(2w^{-1}p_l)^{\frac{\log N(\beta)}{|\log \alpha\beta|}}.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $p_l \leq \frac{w}{2}$, para cada $l$, existe único $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{w}{2}(\alpha\beta)^{n_0+1} < p_l \leq \frac{w}{2}(\alpha\beta)^{n_0}.$$

Por definição de $k_l$ e como $\alpha\beta < 1$, tem-se que

$$(\alpha\beta)^{k_l+1} < (\alpha\beta)^{k_l^*} = 2w^{-1}p_l \leq (\alpha\beta)^{k_l},$$

então $k_l = n_0$ e, portanto,

$$p_l < w(\alpha\beta)^{k_l} < w_0(\alpha\beta)^{k_l}.$$

Pelo Lema 3.11, cada bola $C_l$ intersecta no máximo a duas bolas da coleção

$$\{B_{k_l}(j_1, ..., j_{k_l}) : j_1, ..., j_{k_l} \in \{0, ..., N(\beta) - 1\}\}.$$

Como $\operatorname{diam} g(B_{k_l}(j_1, ..., j_{k_l})) \cap S^* \leq N(\beta)^{-k_l}$, segue que

$$m(g(C_l \cap S^*)) \leq 2N(\beta)^{-k_l}.$$

Substituindo em (2) ,

$$1 \leq \sum_{l=1}^{\infty} m(g(C_l \cap S^*)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2N(\beta)^{-k_l} \leq 2N(\beta)(2w^{-1})^{-\frac{\log N(\beta)}{|\log(\alpha\beta)|}} \sum_{l=1}^{\infty} p_l^{\frac{\log N(\beta)}{|\log(\alpha\beta)|}}$$

Então, usando (1), tem-se

$$\dim_H S \geq \dim_H S^* \geq \frac{\log(N(\beta))}{|\log(\alpha\beta)|} \geq \frac{\log c + n|\log \beta|}{|\log \alpha| + |\log \beta|} \to n \text{ quando } \beta \to 0.$$

Isso termina a demonstração do teorema. □

O assunto da próxima seção é tratar de generalizações a este tipo de resultado. Uma leitura atenta a demonstração do Teorema 3.10 (ver (1)) indica que, em verdade, o mesmo poderia ser enunciado em subconjuntos fechados do $\mathbb{R}^n$ que suportam medidas $\delta$-regulares para algum $0 < \delta \leq n$. Assim, conclui-se o seguinte resultado que segue imediatamente da demonstração anterior.

**Corolário 3.14.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ suporte de uma medida $\mu$ $\delta$-regular. Então para todo $A \subset X$ vencedor em $(X, d)$, onde $d$ é a métrica induzida de $\mathbb{R}^n$ em $X$, tem-se*

$$\dim_H A = \delta.$$

De fato, este é o enunciado proposto por Fishman em [8]. Não é crível, todavia, que tamanha a generalidade de espaços métricos possa-se obter sempre semelhante resultado como o obtido acima. Neste sentido, o Corolário 3.8 dá uma sugestão de como obter um contra-exemplo para o mesmo. Ressalta-se ainda que Schmidt, sob certas hipóteses adicionais, oferece resultado análogo em espaços de Hilbert de dimensão positiva e também infinita (veja [16, Theorem 6]).

## 3.3 A dimensão de Hausdorff de conjuntos vencedores em espaços métricos

Aqui trata-se da abordagem proposta por [12] para estimar a dimensão de conjuntos vencedores em espaços métricos mais gerais. Mantem-se aqui o conceito de suporte de uma medida como menor subconjunto fechado cujo complementar possui medida nula.

**Definição 3.15.** *Seja $X$ espaço métrico completo equipado com uma medida de Borel $\mu$. Uma família enumerável $\mathcal{A}$ de subconjuntos compactos de $X$ é do* ***tipo árvore com respeito a*** *$\mu$, se $\mathcal{A}$ é a união de subfamílias finitas $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{A}_1 = \{A_1\}$, $\mu(A_1) < \infty$ e satisfaz as seguintes quatro condições:*

*(TA0)* $\mu(A) > 0$, *para todo* $A \in \mathcal{A}$;

*(TA1)* $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall A, B \in \mathcal{A}_k$, *ou* $A = B$ *ou* $\mu(A \cap B) = 0$;

*(TA2)* $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall B \in \mathcal{A}_k\ \exists A \in \mathcal{A}_{k-1}$, *tal que* $B \subset A$;

*(TA3)* $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall A \in \mathcal{A}_{k-1}\ \exists B \in \mathcal{A}_k$, *tal que* $B \subset A$, *ou equivalentemente,*

*(TA3')* $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall B \in \mathcal{A}_{k-1}$ *tem-se* $\mathcal{A}_k(B) \neq \emptyset$, *onde*

$$\mathcal{A}_k(B) := \{A \in \mathcal{A}_k : A \subset B\}.$$

*Denote*

$$\cup\mathcal{A}_k := \cup_{A \in \mathcal{A}_k} A.$$

*É claro que, pela propriedade (TA2),*

$$A_1 \supset \cup\mathcal{A}_2 \supset \cup\mathcal{A}_3 \supset ...$$

*é uma sequência encaixante de subconjuntos compactos de $X$. Defina o* ***conjunto limite*** *de $\mathcal{A}$ por*

$$A_\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \cup\mathcal{A}_k.$$

*Considere também o* $k$***-ésimo nível de diâmetro*** $d_k(\mathcal{A})$ *de $\mathcal{A}$:*

$$d_k(\mathcal{A}) := \max_{A \in \mathcal{A}_k} \operatorname{diam} A.$$

*Diz-se que $\mathcal{A}$ é* ***fortemente do tipo árvore****, se é do tipo árvore e também satisfaz*

$$\lim_{k \to \infty} d_k(\mathcal{A}) = 0.$$

*Para $k \in \mathbb{N}$, a* $k$***-ésima geração*** *de $\mathcal{A}$ é dada por*

$$\Delta_k(\mathcal{A}) := \min_{B \in \mathcal{A}_k} \frac{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B))}{\mu(B)},$$

*que é sempre positiva devido a $(TA3)$.*

**Notação:** Dados $X$ espaço métrico, $\mu$ medida e $U \subset X$ com $\mu(U) > 0$, considere

$$\underline{d}_\mu(U) := \inf_{x \in U} \underline{d}_\mu(x).$$

**Lema 3.16.** *Seja $\mathcal{A}$ uma família fortemente do tipo árvore relativamente a $\mu$ de subconjuntos de $A_0$. Então, para qualquer aberto $U$ de interseção não-vazia com $A_\infty$ vale que*

$$\dim_H A_\infty \cap U \geq \underline{d}_\mu(U) - \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \log \Delta_i(\mathcal{A})}{\log d_k(\mathcal{A})}.$$

*Demonstração.* Seja $\nu_k$ definida indutivamente como segue: $\nu_1 = \mu_{|A_1}$, e dada $\nu_{k-1}$, tome

$$\nu_k(A) := \sum_{B\in\mathcal{A}_{k-1}} \frac{\mu(\cup\mathcal{A}_k(B)\cap A)}{\mu(\cup\mathcal{A}_k(B))}\nu_{k-1}(B) \tag{3}$$

A definição dada faz sentido, pois por $(TA0)$ e $(TA3')$ sabe-se que $\mu(\cup\mathcal{A}_k(B)) > 0$ para qualquer $B \in \mathcal{A}_{k-1}$. É fácil ver que $\nu_k$ é $\sigma$-aditiva. Da própria definição de $\nu_k$ segue que

$$\nu_k(\cup\mathcal{A}_k) = \nu_{k-1}(\cup\mathcal{A}_{k-1}) = ... = \mu(A_0) \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Pela equação (4), todas as medidas possuem igual massa. Daí pode-se considerá-las como medidas de probabilidade sem perda de generalidade. Denote por $\mathcal{M}(A_0)$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade em $A_0$. Como $A_0$ é compacto, segue que $\mathcal{M}(A_0)$ é um espaço métrico compacto. Portanto, existe uma subsequência de $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente (mais informações sobre convergência fraca em [3, Section 1-3]). Denote tal limite por $\nu \in \mathcal{M}(A_0)$. Pretende-se agora obter uma relação entre as dimensões pontuais de $\nu$ e $\mu$. Para isto, observe que $\nu_l(A) = \nu_k(A)$ para qualquer $A \in \mathcal{A}_k$ e $l \geq k$, pois

$$\nu_{k+1}(A) = \sum_{B\in\mathcal{A}_k} \frac{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B)\cap A)}{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B))}\nu_k(B) = \frac{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(A)\cap A)}{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(A))}\nu_k(A) = \nu_k(A),$$

visto que $0 \leq \mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B)\cap A) \leq \mu(B\cap A) = 0$, para $A, B \in \mathcal{A}_k$ distintos. Daí, por indução segue que

$$\nu_l(A) = \nu_k(A), \tag{5}$$

para cada $A \in \mathcal{A}_k$ e $l \geq k$. Ademais, $\operatorname{supp}\nu = A_\infty$ e por (5) satisfaz

$$\nu(A) = \nu_k(A) \text{ para qualquer } A \in \mathcal{A}_k. \tag{6}$$

Agora por indução, provar-se-á que $\nu(A) \leq \dfrac{\mu(A)}{\prod_{i=1}^{k-1}\Delta_i(\mathcal{A})}$ para qualquer $A \in \mathcal{A}_k$.

De fato, por (6) e como $\Delta_1(\mathcal{A}) < 1$, segue que $\nu(A_1) = \mu(A_1) \leq \mu(A_1)/\Delta_1(\mathcal{A})$. Admitida a hipótese indutiva, segue que para $A \in \mathcal{A}_{k+1}$,

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu_{k+1}(A) &= \sum_{B\in\mathcal{A}_k} \frac{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B)\cap A)}{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B))}\nu_k(B)\\ &\leq \sum_{B\in\mathcal{A}_k} \frac{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B)\cap A)}{\mu(\cup\mathcal{A}_{k+1}(B))}\frac{\mu(B)}{\prod_{i=0}^{k-1}\Delta_i(\mathcal{A})} \leq \frac{\mu(A)}{\prod_{i=0}^{k}\Delta_i(\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

Finalmente, chega-se à relação entre as dimensões pontuais. Seja $x \in A_\infty$ e $0 < r < \sup_k d_k(\mathcal{A}) = \operatorname{diam} A_0$. Como $(d_k(\mathcal{A}))_k$ é uma sequência não crescente e $\lim_{k\to\infty} d_k(\mathcal{A}) = 0$, existe $k = k(r)$ tal que $d_{k+1}(\mathcal{A}) \leq r < d_k(\mathcal{A}) < 1$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}\nu(B(x,r)) &\leq \nu(\bigcup\{A \in \mathcal{A}_{k+1} : A\cap B(x,r) \neq \emptyset\})\\ &\leq \frac{\mu(\bigcup\{A \in \mathcal{A}_{k+1} : A\cap B(x,r) \neq \emptyset\})}{\prod_{i=1}^{k}\Delta_i(\mathcal{A})}\\ &\leq \frac{\mu(B(x,2r))}{\prod_{i=1}^{k}\Delta_i(\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

Repare que, $\log r < 0$ e $\log d_k(\mathcal{A}) < 0$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r} &\geq \frac{\log \mu(B(x,2r)) - \sum_{i=1}^{k} \log \Delta_i(\mathcal{A})}{\log r} \\ &\geq \frac{\log \mu(B(x,2r))}{\log(2r)} \left(1 + \frac{\log 2}{\log r}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{k} \log \Delta_i(\mathcal{A})}{\log d_k(\mathcal{A})}.\end{aligned}$$

Pela condição forte do tipo árvore $\lim_{r\to 0} k(r) = \infty$. Daí, tomando $\liminf_{r\to 0}$ nos dois lados da inequação acima e o limite superior em $k$, obtem-se

$$\underline{d}_\nu(x) \geq \underline{d}_\mu(x) - \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} \log \Delta_i(\mathcal{A})}{\log d_k(\mathcal{A})},$$

para todo $x \in A_\infty$. É claro que a desigualdade se mantem com a troca de $\underline{d}_\mu(x)$ por $\underline{d}_\mu(U)$, pois $\underline{d}_\mu(x) \geq \underline{d}_\mu(U)$ e em seguida aplicando o Princípio da Distribuição de Massa não uniforme (Teorema 2.5) em relação a $\nu$ chega-se a

$$\dim_H A_\infty \cap U \geq \underline{d}_\mu(U) - \limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \log \Delta_i(\mathcal{A})}{\log d_k(\mathcal{A})}.$$

□

A seguinte propriedade claramente é satisfeita para medidas $\delta$-regulares (mas certamente não vale o contrário em geral). Para mais detalhes ver [9] ou ver exemplos estudados em [12].

**Definição 3.17.** *Seja $X$ espaço métrico. Uma medida de Borel localmente finita $\mu$ é **doubling** (ou **Federer**), se existem constantes $K > 0$ e $\rho > 0$ tal que para todo $x \in X$ e $0 < r < \rho$,*

$$\mu(B(x,2r)) \leq K\mu(B(x,r)).$$

Cabe aqui chamar a atenção sobre o uso da notação $B^\gamma$ estabelecida no início da Seção 3.1 para expressar tipos de subconjuntos do conjunto de todas as bolas de um espaço.

**Lema 3.18.** *Seja $\mu$ medida doubling. Para qualquer $\alpha \in (0,1)$, existem $c, \rho > 0$ com a seguinte propriedade:*
*Para todo $B \in \Omega$ com $\operatorname{diam} B \leq \rho$ e para todo $\beta \in (0,1)$, existem $B_1, ..., B_N \in B^\beta$ tal que $B_1, ..., B_N$ são essencialmente disjuntas e para cada $B_i' \in B_i^\alpha$, $i = 1, ..., N$, tem-se*

$$\mu(\bigcup_i B_i') \geq c\mu(B).$$

*Demonstração.* Fixe $0 < \alpha < 1$ e considere $\rho > 0$ tal qual na definição de medida doubling.

*Afirmação: Existe $c' > 0$ tal que para cada $x, x' \in X$ e $0 < r < \rho$ tem-se*

$$B(x', \alpha r) \subset B(x,r), \text{ então } \mu(B(x', \alpha r)) \geq c'\mu(B(x,r)).$$

*Demonstração.* De fato, escolha $m \in \mathbb{N}$ e $c' > 0$ tais que $\frac{\alpha}{4} < 2^{-m} \leq \frac{\alpha}{2}$ e $c' = K^{-m}$. Da definição de medida doubling encontra-se $\mu(B(x', \alpha r)) \geq c'\mu(B(x', 2r))$ para todo $x' \in X$ e todo $r > 0$ (basta iterar a desigualdade). Como para cada $x' \in B(x,r)$, tem-se que $B(x,r) \subset B(x', 2r)$, a afirmação segue. □

Agora considere $0 < \beta < \frac{1}{2}$, com $0 < r < \rho$, $x \in X$, $x_i = 1, ..., N$, a coleção maximal de pontos tais que $B(x_i, \beta r) = B_i \subset B(x, r)$ e tais que as bolas $B_i$ são duas a duas disjuntas. Observe que $N$ não é necessariamente constante, no entanto, sempre tem-se $N \geq 1$. Por maximalidade,

$$B(x, (1-\beta)r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 2\beta r).$$

Isso ocorre, pois do contrário, existiria $y \in B(x, (1-\beta)r)$ com $\mathrm{d}(y, x_i) > 2\beta r$, que implica $B(y, \beta r) \subset B(x, r)$ e $B(y, \beta r)$ é disjunta de $B(x_i, \beta r)$ para cada $i$, que é uma contradição. Prosseguindo, para qualquer escolha de $B_i' \in B_i^{\alpha}$, segue imediatamente da afirmação que $\mu(B_i')) \geq c'\mu(B_i)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup B_i') &= \sum \mu(B_i) \geq c' \sum \mu(B_i) \\
&\geq \frac{c'}{K} \sum \mu(B(x_i, 2\beta r)) \geq \frac{c'}{K} \mu(B(x, (1-\beta)r) \\
&\geq \frac{c'}{K} \mu(B(x, \frac{r}{2})) \geq \frac{c'}{K^2} \mu(B(x, r),
\end{aligned}$$

que mostra o lema. □

Finalmente, chega-se ao resultado já anunciado na Introdução.

**Teorema 3.19** ( [12])**.** *Seja $X$ espaço métrico completo que suporta uma medida doubling $\mu$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Se $S$ é conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor do jogo de Schmidt em $X$ e $\emptyset \neq U \subset X$ aberto, então existe constante positiva $c = c(K) < 1$ (onde $K$ é constante de doubling) tal que*

$$\dim_H S \cap U \geq \underline{d}_{\mu}(U) - \frac{\log c}{\log(\alpha\beta)}.$$

*Em particular,* $\dim_H S \cap U \geq \underline{d}_{\mu}(U)$*, se $S$ é vencedor.*

*Demonstração.* O objetivo na demonstração deste resultado é construir uma coleção de conjuntos fortemente do tipo árvore, cujo limite é um subconjunto de $S$. Tal coleção será construida considerando os possíveis movimentos de Bob a cada turno do jogo e a respectiva resposta de Alice de acordo com sua estratégia vencedora ao movimento de Bob. No entanto, a princípio, não se poderia garantir que tais bolas fechadas sejam compactas. Então, deve-se provar primeiro que tal família é formada por conjuntos compactos de $X$.

De fato, de acordo com o Teorema 3.37, $X$ é um espaço doubling (ver Definição 3.35), donde segue que todo conjunto limitado é totalmente limitado (para ver isso, aplique iteradas vezes a definição de espaço doubling). Pela condição forte do tipo árvore, a menos de desconsiderar finitos níveis, pode-se assumir que todos os conjuntos de todas as subfamílias são limitados (portanto totalmente limitados). Assim, as bolas são completas e totalmente limitadas; portanto compactas como se queria demonstrar.

Agora fixe $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $S$ conjunto $(\alpha, \beta)$-vencedor e considere o jogo de Schmidt $S - (\alpha, \beta)$. É claro que Bob pode propor que sua bola inicial seja $B_1$ com medida finita e que $\operatorname{diam} B_1 < \rho$ para que esteja em acordo com o Lema 3.18 também. Como $S$ é $(\alpha, \beta)$-vencedor, Alice pode escolher $A_1 \in B_1^{\alpha}$ tal que $A_1 \cap S \neq \emptyset$. Tome $\mathcal{A}_1 = \{A_1\}$.

Agora seja $B_{2_1}, ..., B_{2_N} \in A_0^{\beta}$ como no Lema 3.18. Cada uma dessas bolas podem ser escolhidas por Bob no próximo turno do jogo. Como $S$ é $(\alpha, \beta)$-vencedor, para cada uma de tais escolhas, Alice pode escolher $A_{2_i} \in B_{2_i}^{\alpha}$ tal que toda sequência de movimentos posteriores de Bob podem ser contrabalanceados por Alice culminando na sua vitória. Seja $\mathcal{A}_2 = \{A_{2_1}, ..., A_{2_N}\}$. Repetindo o mesmo argumento, obtem-se $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ etc.

*Afirmação:* $\cup\mathcal{A}_k = \cup_{A\in\mathcal{A}_k} A$ *é uma coleção fortemente do tipo árvore.*

*Demonstração.* De fato, a propriedade $(TA0)$ segue do Lema 3.18, enquanto $(TA1)$ segue da construção de $\mathcal{A}_k$ e $(TA2-3)$ seguem das regras do jogo de Schmidt e também da construção de $\mathcal{A}_k$. Novamente pelas regras do jogo de Schmidt pode-se concluir que o $k$-ésimo estágio diamétrico de $\mathcal{A}$ converge para zero, pois $\operatorname{diam}(B_1) < \rho$ e para $A \in \mathcal{A}_k$ tem-se $\operatorname{diam} A < \rho\alpha^{k+1}\beta^k \to 0$, quando $k \to +\infty$, pois $\alpha\beta < 1$. □

Como Alice escolhe segundo sua estratégia vencedora, o conjunto limite $A_\infty$ de $\mathcal{A}$ satisfaz $A_\infty \subset S$. Pelo Lema 3.18, existe constante $c$ que não depende de $k$ tal que $\Delta_k(\mathcal{A}) \geq c$. Pelo Lema 3.16 (ver observação ao Lema 3.16 e que $X$ é separável pelo Teorema 3.37 e Proposição 3.38) segue que

$$\begin{aligned}\dim_H A_\infty \cap U &\geq \underline{d}_\mu(U) - \limsup_{k\to+\infty} \frac{(k+1)\log c}{\log\rho + k\cdot\log(\alpha\beta) + \log\alpha} \\ &= \underline{d}_\mu(U) - \frac{\log c}{\log(\alpha\beta)}.\end{aligned}$$

Tomando o limite $\beta \to 0$, segue a segunda afirmação. □

Considerando novamente o Corolário 3.14, percebe-se que o mesmo pode ser colocado num contexto mais geral através do resultado acima. Ou seja, o ambiente euclidiano não é mais imprescindível.

**Corolário 3.20.** *Seja $X$ espaço métrico completo suporte de uma medida $\delta$-regular. Então todo conjunto vencedor $A \subset X$ possui dimensão de Hausdorff igual a $\delta$.*

*Demonstração.* É imediato da definição de medida $\delta$-regular que a dimensão pontual é constante igual a $\delta$. Portanto o resultado segue do Teorema 3.19. □

## 3.4 Conjunto vencedor atípico

O seguinte resultado consta em [12] e mostra que a propriedade ser vencedor depende intimamente da relação entre estrutura topológica do espaço e de medidas que podem ser suportadas no conjunto. E, de fato, torna-se um exemplo de um espaço métrico completo que não suporta uma medida $\delta$-regular para qualquer $\delta$ positivo.

**Teorema 3.21.** *Existe um espaço métrico completo com dimensão de Hausdorff positiva contendo um subconjunto enumerável vencedor para o jogo de Schmidt.*

*Demonstração.* Seja $X = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ equipado com a métrica

$$\mathrm{d}((x_n),(y_n)) = 3^{-k}, \text{ onde } k = \min\{j : x_j \neq y_j\}.$$

Considere $Y \subset E$ o conjunto de sequências tais que o dígito 0 aparece apenas, quando seguido por outro 0, isto é,

$$\text{se } x_l = 0 \text{ para algum } l \in \mathbb{N}, \text{ então } x_k = 0 \text{ para } k \geq l.$$

É claro que $Y$ é um subconjunto fechado de $X$ e portanto completo, quando equipado com a restrição da métrica d. Denote por $S$ o subconjunto de $Y$ das sequências nas quais o dígito 0 aparece. Também é claro que $S$ é um subconjunto denso enumerável de $Y$, pois

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x_n) : x_1, ..., x_{n-1} \neq 0,\ x_k = 0,\ k \geq n\}$$

é uma união enumerável de conjuntos finitos. Em particular, $\dim_H S = 0$. Além disto, para $(y_n) \in Y$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-m} < \varepsilon$. Portanto,

$$\mathrm{d}((y_n), (y_1, ..., y_m, 0, 0, 0, ...)) < 3^{-m} < \varepsilon, \text{ com } (y_1, ..., y_m, 0, 0, ...) \in S.$$

*Afirmação:* $\dim_H Y = \frac{\log 2}{\log 3} > 0$.

*Demonstração.* De fato, $Y = S \cup (Y \backslash S)$. Logo, $\dim_H Y = \dim_H Y \backslash S$, pois $S$ é enumerável. Via representação na base 3 considere $Y$ como subconjunto do intervalo $[0, 1]$ (isto é, $X = ([0, 1], \mathrm{d})$, d definida acima). O cálculo da dimensão de $Y \backslash S$ é completamente similar ao cálculo da dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor standard apresentado na Introdução. □

Em seguida, o jogo de Schmidt é considerado em $Y$ e se deseja concluir que $S$ é um conjunto vencedor para algum $\alpha > 0$.

Sejam $\alpha = 3^{-3}$, $\beta > 0$ qualquer. Considere o jogo de Schmidt sob os parâmetros $(\alpha, \beta) - S$ em $Y$. Suponha que Bob escolha uma bola $B_1 = B[(x_n), r]$. A menos de descartar alguns turnos (nos quais Alice pode jogar de maneira aleatória), considere $r < 1$. Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-(l+1)} < r \leq 3^{-l}$. Veja que $B_1$ contem todas as sequências $(y_n)$ tais que $y_i = x_i$, para todo $i \leq l$, e em particular, a sequência $z = (x_1, ..., x_l, x_{l+1}, 0, 0, ...) \in S$. Agora, Alice pode escolher $A_1 = B[z, r\alpha]$, pois dado $(y_n) \in A_1$, tem-se que

$$\mathrm{d}((y_n), (x_n)) \leq \mathrm{d}((y_n), z) + \mathrm{d}(z, (x_n)) \leq 3^{-(l+2)} + 3^{-(l+2)} < 3^{-(l+1)} < r$$

Além do mais, $A_1 = B[z, r\alpha] = \{z\} = (x_1, ..., x_{l+1}, 0, 0, ...)$ pois para qualquer outro ponto $y = (y_n) \in A_1 \subset Y$, tem-se $y_n = x_n$, para $1 \leq n \leq l + 1$ e $y_{l+2} = 0$. Portanto $(y_n) = z$. Com isso, o resultado do jogo é $z$ e Alice a vencedora. □

## 3.5 Conjuntos vencedores em atratores de sistemas iterados de funções

Nesta Seção os jogos de Schmidt são vistos em atratores de sistemas iterados de funções. Para isso introduz-se antes os conceitos relacionados. É importante frisar novamente que, a menos que se explicite o contrário, $X$ sempre será um espaço métrico completo.

### 3.5.1 Atratores de sistemas iterados de funções

**Definição 3.22** (Sistemas Iterados de Funções - SIF)**.** *Considere uma* ***família de contrações*** $\{f_i\}_{i=1}^L$ *de um espaço métrico* $(X, d)$*, isto é, para todo* $x, y \in X$*,*

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leq r_i d(x, y), \text{ com } r_i < 1, \ i = 1, ..., L.$$

*Tal família recebe o nome de* ***sistema iterado de funções****. Cada* $r_i$ *é chamado* ***raio de contração*** *de* $f_i$*. Um compacto* $\emptyset \neq K \subset X$ *é* ***invariante*** *em relação a família* $\{f_i\}_{i=1}^L$*, se*

$$K = \bigcup_{i=1}^{L} f_i(K).$$

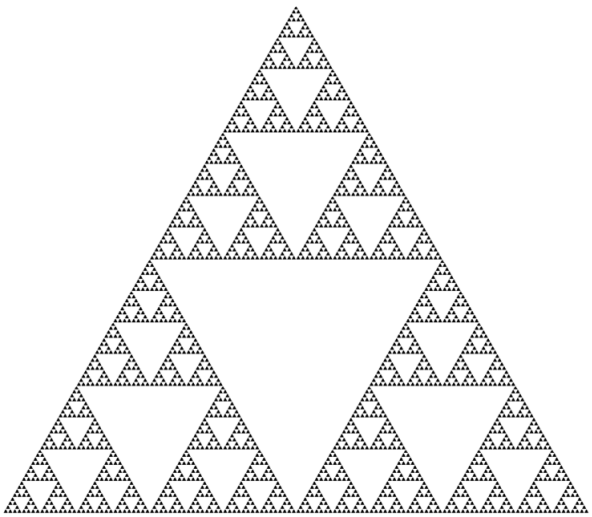
*Chama-se a $K$ também de* ***atrator*** *do SIF.*

*Uma família finita de contrações $\{f_i\}_{i=1}^{L}$ satisfaz a* ***open set condition*** *(OSC), se existe um aberto não vazio e limitado $V \subset X$ tal que*

$$f_i(V) \subset V \text{ para } 1 \leq i \leq L \quad e \quad f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

São exemplos de atratores de SIF's:

- *O conjunto de Cantor standard*, que é um atrator para $f_1(x) = \frac{x}{3}$, $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$;
- *O triângulo de Sierpinski*, que é um atrator para $f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x+1,y)$ e $f_3(x,y) = \frac{1}{2}(x,y+1)$.



O triângulo de Sierpinski. Fonte: Wikipédia.

Ressalta-se que a OSC é uma propriedade da família $\{f_1, f_2, ..., f_L\}$ e não do atrator $K$. Por exemplo, $K = [0,1]$ é um atrator para a família $F_1 = \left\{\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right\}$ e $F_2 = \left\{\frac{3x}{4}, \frac{3x+1}{4}\right\}$. Verifica-se que $F_1$ satisfaz a OSC, mas $F_2$ não.

Hutchinson prova em [10, Section 3.1] que dada uma família finita de contrações $\{f_i\}_{i=1}^{L}$ num espaço métrico completo **existe um único atrator** para tal família. Em vias de descrevê-lo explicitamente é que se dirige a atenção para a construção de certos conceitos abaixo.

Denote $\Sigma := \{1, 2, ..., L\}^{\mathbb{N}}$. Para qualquer sequência infinita

$$\xi = \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Sigma,$$

os diâmetros dos termos da sequência de compactos $K_{\xi(1)} \subseteq K_{\xi(2)} \subseteq ... \subseteq K_{\xi(n)}...$, onde

$$K_{\xi(n)} = f_{a_1} \circ f_{a_2} \circ ... \circ f_{a_n}(K),$$

convergem para zero, e por isso tais compactos convergem para um ponto

$$\Theta(\xi) := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\xi(n)}.$$

Assim, a aplicação

$$\Theta : \Sigma \to K$$

está bem definida. Considere a topologia produto em $\Sigma$. Pelo Teorema de Tychonoff, $\Sigma$ é compacto. Pode-se provar ainda que tal topologia é metrizável via

$$\mathrm{d}(\eta, \zeta) = e^{-|\eta,\zeta|},$$

onde $|\eta, \zeta|$ denota o tamanho do segmento inicial em que $\eta$ e $\zeta$ coincidem. Com isso,

$$\mathrm{d}(\Theta(\eta), \Theta(\zeta)) \leq \operatorname{diam} K \cdot r_{\max}^{|\eta,\zeta|} = \operatorname{diam} K \cdot \mathrm{d}(\eta, \zeta)^{-\log r_{\max}}$$

Observe que $r_{\max} = \max\{r_i : i = 1, ..., L\} < 1$, e portanto, $-\log r_{\max} > 0$. Isto significa que $\Theta$ é contínua; mais do que isso, é Hölder.

O próximo passo agora é obter uma representação do atrator $K$ via aplicação $\Theta$. Considere, antes, a seguinte aplicação

$$\varphi_i : \Sigma \to \Sigma, \quad a_1 a_2 ... a_k ... \mapsto i a_1 a_2 ... a_k ...$$

**Proposição 3.23.** *$Im(\Theta) = K$ e $\Theta \circ \varphi_i = f_i \circ \Theta$ para qualquer $i = 1, ..., L$.*

*Demonstração.* Para isso, veja que $Im(\Theta)$ é um compacto que satisfaz

$$\begin{cases} f_i(Im(\Theta)) \subseteq Im(\Theta) \text{ para } i = 1, ..., L \text{ e} \\ \bigcup_{i=1}^{L} f_i(Im(\Theta)) = Im(\Theta) \end{cases}$$

De fato, para $x \in Im(\Theta)$, existe $\xi \in \Sigma$ tal que $\Theta(\xi) = x$, e

$$f_i(\Theta(\xi)) = f_i\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\xi(n)}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{i\xi(n)} = \Theta(i\xi),$$

onde $K_{i\xi(n)} = f_i(K_{\xi(n)})$. Pela unicidade do atrator do SIF, segue que $Im(\Theta) = K$. □

**Definição 3.24.** *Uma aplicação $f : X \to X$ é uma **similaridade**, se existe $r > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, tem-se $d(f(x), f(y)) = r \cdot d(x, y)$.*

*Considere uma família de contrações-similaridades $\{f_i\}_{i=1}^{L}$ de raios $\{r_i\}_{i=1}^{L}$, define-se a **dimensão de similaridade** de um atrator $K$ como a única solução em $\alpha$ da equação*

$$\sum_{i=1}^{L} r_i^{\alpha} = 1 \quad \textbf{\textit{(fórmula de Moran)}} \ . \tag{7}$$

### 3.5.2 Medidas estacionárias para SIF's

Novamente Hutchinson, em [10, Section 4.4], prova que para qualquer vetor de probabilidade $p = (p_1, ..., p_L)$ com $p_i > 0$ para todo $i \leq L$, existe uma única medida de probabilidade $\mu_p$ cujo suporte é $K$ e tal que

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{L} p_i \mu_p f_i^{-1}, \tag{8}$$

onde $\mu_p f_i^{-1}$ é o push-foward de $\mu_p$. Esta medida é chamada **medida estacionária**.

Uma vez mais procura-se expressar o objeto que teve sua existência e unicidade atestada (a medida de probabilidade). Os resultados abaixo dão conta desse papel.

Dado uma palavra finita $w_1 ... w_m \in W^*$, define-se o seguinte conjunto

$$[w_1 ... w_m] := \{a_1 a_2 ... \in \Sigma \colon a_i = w_i \text{ para } i = 1, ..., m\},$$

que usualmente é chamado **cilindro** (relativamente a palavra $w_1 ... w_m$).

**Proposição 3.25.** *$\mu_p = \nu_p\Theta^{-1}$, onde $\nu_p\Theta^{-1}$ o push-foward da medida produto*

$$\nu_p = (p_1, ..., p_L)^{\mathbb{N}}.$$

*Demonstração.* Considere a aplicação

$$\varphi_i : \Sigma \to \Sigma, \quad a_1a_2...a_k... \mapsto ia_1a_2...a_k...$$

Pela Proposição 3.23, tem-se que $\Theta \circ \varphi_i = f_i \circ \Theta$. Além disto,

$$\nu_p = \sum_{k=1}^{L} p_i \nu_p \varphi_i^{-1}.$$

De fato, basta provar esta igualdade em cilindros $[a_1a_2...a_m]$, e, neste caso, a igualdade é trivial, pois $\varphi_i^{-1}([a_1a_2...a_m]) = \emptyset$, se $a_1 \neq i$ e $\varphi_i^{-1}([a_1a_2...a_m]) = [a_2...a_m]$, se $a_1 = i$.

Portanto, para $A \subseteq X$ mensurável tem-se

$$\sum_{i=1}^{L} p_i \nu_p \Theta^{-1} f_i^{-1}(A) = \sum_{i=1}^{L} p_i \nu_p \varphi^{-1}\Theta^{-1}(A) = \nu_p\Theta^{-1}(A).$$

Pela unicidade, segue que $\mu_p = \nu_p\Theta^{-1}$. □

**Definição 3.26.** *Seja $W^k = \{1, ..., L\}^k = \{w_1...w_k : w_j \in \{1, ..., L\}, 1 \leq j \leq k\}$ e para $k = 0$, convenciona-se que $W^0 = \{\emptyset\}$, onde $\emptyset$ é a palavra vazia. Considere também o conjunto de palavras finitas*

$$\Sigma^* := \bigcup_{k=0}^{\infty} W^k.$$

*Para $A \subseteq X$, $\{f_i\}_{i=1}^L$ e $w = w_1...w_k \in \Sigma^*$, seja*

$$A_w := f_w(A) := f_{w_1} \circ f_{w_2} \circ ... \circ f_{w_k}(A). \tag{9}$$

*e $r_w := r_{w_1} \cdot r_{w_2} \cdot ... \cdot r_{w_k}$, $f_w = f_{w_1} \circ f_{w_2} \circ ... \circ f_{w_k}$.*

*Duas palavras $u, v \in \Sigma^*$ são **incomparáveis**, se uma não é o prefixo da outra e vice-versa, isto é, se não existem $w \in \Sigma^*$ tal que $u = vw := v_1...v_kw_1...w_m$ ou $w' \in \Sigma^*$ tal que $v = uw'$.*

*Um conjunto de palavras finitas $\Pi \subset \Sigma^*$ **corta** $\Sigma^*$, se e somente, se*

$$\bigcup_{w \in \Pi} \Sigma_w = \Sigma,$$

*onde, para $w = w_1...w_m \in W^m$, $\Sigma_w = [w_1...w_m]$. Mais ainda, $\Pi$ **corta minimalmente** $\Sigma^*$, se, além de cortar $\Sigma^*$, tem-se*

$$\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset \text{ para } w \neq v \in \Pi.$$

*Em outras palavras, um conjunto de palavras finitas $\Pi \subset \Sigma^*$ **corta** $\Sigma^*$, se toda sequência infinita em $\Sigma$ possui prefixo em $\Pi$, isto é, seu início corresponde a uma palavra em $\Pi$. O conjunto de palavras $\Pi$ **corta minimalmente** $\Sigma^*$, se, além de cortar $\Sigma^*$, nenhum elemento de $\Pi$ possui prefixo em outro elemento distinto de $\Pi$.*

**Lema 3.27.** *Sejam $p = (p_1, p_2, ..., p_L)$ vetor de probabilidade e $\Pi \subset \Sigma^*$ tal que $\Pi$ corta minimalmente $\Sigma^*$. Então,*

*(a)* $\sum_{\sigma\in\Pi} p_\sigma = 1$;

*(b) Se $\mu$ é uma medida, que satisfaz $\mu = \sum_{i=1}^{L} p_i \mu f_i^{-1}$, então*

$$\mu = \sum_{\sigma\in\Pi} p_\sigma \mu f_\sigma^{-1}.$$

*Demonstração.* (*a*) *Afirmação: Todo conjunto de palavras finitas $\Pi$ que corta minimalmente $\Sigma^*$ induz uma cobertura de cilindros disjuntos em $\Sigma$ e tem cardinalidade finita.*

*Demonstração:* De fato, para cada $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_k \in \Pi$, basta considerar o cilindro $[\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k]$. Como $\Pi$ corta minimalmente $\Sigma^*$, segue que tais cilindros formam uma cobertura aberta de $\Sigma$. Pela compacidade de $\Sigma$, os cilindros existem em quantidade finita, donde segue a afirmação. □

Por definição da medida produto,

$$\nu_p([\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k]) = p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} ... p_{\sigma_k} = p_\sigma,$$

Pela afirmação acima,

$$1 = \nu_p(\Sigma) = \nu_p(\sum_{\sigma\in\Pi} [\sigma]) = \sum_{\sigma\in Pi} p_\sigma.$$

(*b*) Pelo item anterior, $\Pi$ é finito. A prova agora segue por indução na cardinalidade de $\Pi$. De fato, se a concatenação $\tau j$ é a palavra de maior tamanho em $\Pi$, da afirmação no item anterior segue que $\tau 1, ..., \tau L \in \Pi$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{L} p_{\tau i} \mu f_{\tau i}^{-1} = p_\tau \cdot \left( \sum_{i=1}^{L} \pi \mu f_i^{-1} \right) \circ f_\tau^{-1} = p_\tau \mu f_\tau^{-1}.$$

Consequentemente, $\Pi' = \Pi \cup \{\tau\} \setminus \{\tau 1, ..., \tau L\}$ corta minimalmente $\Sigma^*$ e possui cardinalidade inferior a $\Pi$. Logo,

$$\sum_{\sigma\in\Pi} p_\sigma \mu f_\sigma^{-1} = \sum_{\sigma\in\Pi'} p_\sigma \mu f_\sigma^{-1} = \mu$$

que termina a demonstração do lema. □

**Lema 3.28.** *Sejam $\{f_i\}_{i=1}^{L}$ família contrações-similaridades e $K$ seu atrator. Vale que:*

*(a) Se $A$ é não vazio, fechado, limitado e $f_i(A) \subseteq A$ para todo $i = 1, ..., L$, então $K \subseteq A$;*

*(b) Se $\{f_i\}_{i=1}^{L}$ satisfaz a OSC através de algum aberto $V \subset X$ e $\Pi \subset \Sigma^*$ corta minimalmente, então os conjuntos $f_\sigma(V)$, para $\sigma \in \Pi$, são disjuntos entre si.*

*Demonstração:* (*a*) Seja $k \in K$. É claro que $k = \Theta(i_1...i_n...) = k_{i_1...i_n...}$ para alguma sequência $i_1...i_n... \in \Sigma$. Daí, usando a notação (9), tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A_{i_1...i_n}, k_{i_1...i_n...}) &= \mathrm{d}(f_{i_1...i_n}(A), f_{i_1...i_n}(k_{i_{n+1}...})) \\ &\leq r_{i_1...i_n} \mathrm{d}(A, k_{i_{n+1}...}) \\ &\leq r_{i_1...i_n} \sup\{\mathrm{d}(a, b) : a \in A,\ b \in K\} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, dado qualquer $y \in A$, tem-se

$$k_{i_1 \ldots i_p \ldots} = \lim_{p \to \infty} f_{i_1 \ldots i_p}(y) \in A,$$

pois $A$ é fechado. Logo $K \subseteq A$.

($b$) Para $\lambda, \tau \in \Pi$ distintos, defina $q$ o maior inteiro para o qual a sequência $i_1 \ldots i_q$ é prefixo de $\lambda$ e $i_1 \ldots i_q$ é prefixo de $\tau$. Como $\Pi$ corta minimalmente $\Sigma^*$, existe $i_{q+1} \neq j_{q+1}$ tal que $i_1 \ldots i_q i_{q+1}$ é prefixo de $\lambda$ e $i_1 \ldots i_q j_{q+1}$ é prefixo de $\tau$. Mas então $V_\lambda \subset V_{i_1 \ldots i_q i_{q+1}}$, $V_\tau \subset V_{i_1 \ldots i_q i_{q+1}}$ e portanto

$$V_\lambda \cap V_\tau \subset f_{i_1 \ldots i_q}(V_{i_{q+1}} \cap V_{j_{q+1}}) = \emptyset,$$

e o Lema está provado. □

### 3.5.3 Medida de Hausdorff do atrator

A seguir, um resultado técnico que diz respeito ao comportamento do SIF com seu atrator e a sua respectiva medida de Hausdorff. Para mais detalhes, ver o trabalho de Brandt e Graf em [2].

**Lema 3.29.** *Sejam $\{f_i\}_{i=1}^L$ SIF de contrações-similaridades, $K$ seu atrator e $\alpha$ sua dimensão de similaridade. Então,*

*(a)* $\mathcal{H}^\alpha(A) = \mathcal{H}^\alpha_*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_i)^\alpha : \{U_i\} \text{ cobertura aberta de } A\right\}$, *para qualquer conjunto $\mathcal{H}^\alpha$-mensurável $A \subseteq K$. Em particular, $\mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$;*

*(b)* $\mathcal{H}^\alpha(K_\sigma \cap K_\tau) = 0$ *para quaisquer duas palavras finitas incomparáveis $\sigma, \tau \in \Sigma^*$*

*Demonstração.* ($a$) Considere primeiro $A = K$. Pela definição de medida de Hausdorff, tem-se $\mathcal{H}^\alpha_* \leq \mathcal{H}^\alpha$ e é suficiente provar que para cada cobertura aberta $\{U_i\}$ de $K$ e cada $\delta > 0$ existe outra cobertura $\{V_i\}$ com $\operatorname{diam} V_j < \delta$ para cada $j$ e $\sum(\operatorname{diam} V_j)^\alpha = \sum(\operatorname{diam} U_i)^\alpha$. Para isto, seja $n$ tal que $s = s_1 \ldots s_n$ e $r_s < \delta \cdot \operatorname{diam} \bigcup U_i$ para cada $s \in W^n$. Tal $n$ existe, pois $r_s = r_{s_1} r_{s_2} \cdot \ldots \cdot r_{s_n}$, e cada $r_{s_k} < 1$. Substitua cada $U_i$ pela família $\{f_s(U_i) : s \in W^n\}$. Cada uma dessas famílias cobre $f_s(K)$ e portanto a cobertura gerada pela união de todas estas famílias cobre $K$. Ademais, usando (7), tem-se

$$\sum_i \sum_{s \in W^n} (\operatorname{diam} f_s(U_i))^\alpha = \sum_i \sum_{s \in W^n} (r_{s_1} \cdot \ldots \cdot r_{s_n})^\alpha \cdot (\operatorname{diam} U_i)^\alpha = \sum_i 1 \cdot (\operatorname{diam} U_i)^\alpha.$$

Donde segue que $\mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha_*(K) < \infty$. Para um conjunto qualquer mensurável $A \subset K$, observa-se que

$$\mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha(A) + \mathcal{H}^\alpha(K \setminus A) \geq \mathcal{H}^\alpha_*(A) + \mathcal{H}^\alpha_*(K \setminus A) \geq \mathcal{H}^\alpha_*(K) = \mathcal{H}^\alpha(K),$$

que implica $\mathcal{H}^\alpha_*(A) = \mathcal{H}^\alpha(A)$.

($b$) Repare que

$$\mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha\left(\bigcup_{i=1}^L f_i(K)\right) \leq \sum_{i=1}^L \mathcal{H}^\alpha(f_i(K)) = \sum_{i=1}^L r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha(K).$$

Isto implica que

$$\mathcal{H}^\alpha(f_i(K) \cap f_j(K)) = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

Para palavras de mesmo tamanho $k > 1$ o argumento é análogo:

$$\mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha\left(\bigcup_{\sigma\in W^k} f_\sigma(K)\right) \leq \sum_{\sigma\in W^k} \mathcal{H}^\alpha(f_\sigma(K)) = \sum_{\sigma\in W^k} r_\sigma^\alpha \mathcal{H}^\alpha(K) = \mathcal{H}^\alpha(K).$$

Por fim, para palavras de tamanho distinto, é fácil ver que recai sobre caso de palavras de mesmo tamanho. □

### 3.5.4 O caso euclidiano

Através do trabalho de Hutchinson em [10] pode-se obter resultados interessantes a respeito de conjuntos vencedores em atratores de SIF's do espaço euclidiano. O maquinário anterior foi desenvolvido com o objetivo de encontrar a dimensão de Hausdorff de atratores. Feito isto, volta-se a atenção para o estudo dos conjuntos vencedores dentro de tais atratores que por sua vez estão no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

**Lema 3.30.** *Sejam $U_1, ..., U_d$ abertos disjuntos do $\mathbb{R}^n$ que intersectam uma bola aberta de raio $\rho$ fixada. Assuma que cada $U_k$ contenha uma bola de raio $a\rho$ e esteja contido numa bola de raio $b\rho$. Então $d \leq \left(\frac{1+2b}{a}\right)^n$.*

*Demonstração.* A união $\bigcup_{j=1}^d U_j$ contem $d$ bolas disjuntas de raio $a\rho$ e está contida numa bola de raio $(1+2b)\rho$. Logo, $d(a\rho)^n \leq ((1+2b)\rho)^n$, donde segue o resultado. □

**Proposição 3.31** ( [10])**.** *Sejam $(X, d)$ um espaço métrico completo, $\{f_i\}_{i=1}^L$ um SIF de contrações-similaridades, $K$ seu atrator correspondente e $\alpha$ sua dimensão de similaridade. Então existe $c > 0$ tal que $\mu = \nu_p\Theta^{-1}$ onde $p = (r_1^\alpha, ..., r_L^\alpha)$ satisfaz*

$$\mu(B(x, r)) \geq cr^\alpha,$$

*para qualquer $r > 0$ e $x \in K$.*

*Demonstração.* Seja $p = (r_1^\alpha, ..., r_L^\alpha)$. Repare que por (7), $p$ é vetor de probabilidade. Seja $\mu = \nu_p\Theta^{-1}$ a única probabilidade cujo suporte é o atrator e que satisfaz

$$\mu = \sum_{i=1}^L r_i^\alpha \mu f_i^{-1}$$

(lembre-se de (8)). Observe que

$$\begin{aligned}\mu(K_{i_1\ldots i_n}) &\geq r_{i_1}^\alpha \cdot \ldots \cdot r_{i_n}^\alpha \mu(f_{i_1\ldots i_n}^{-1}(K_{i_1\ldots i_n})) \\ &\geq r_{i_1}^\alpha \cdot \ldots \cdot r_{i_n}^\alpha \mu(K) = r_{i_1}^\alpha \cdot \ldots \cdot r_{i_n}^\alpha.\end{aligned}$$

Seja $k = k_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots}$ e considere $B(k, \delta)$, $\delta > 0$. Escolha o menor $n$ tal que $K_{i_1\ldots i_n} \subset B(k, \delta)$. Portanto, tem-se $r_{i_1} \cdot \ldots \cdot r_{i_n}(\operatorname{diam} K) \geq \delta r_{\min}$, onde $r_{\min} = \min\{r_i : j = 1, ..., L\}$. Logo,

$$\mu(B(k, \delta)) \geq \mu(K_{i_1\ldots i_n}) \geq r_{i_1}^\alpha \cdot \ldots \cdot r_{i_n}^\alpha \geq \frac{r_{\min}^\alpha \delta^\alpha}{(\operatorname{diam} K)^\alpha},$$

onde $k \in K$ é arbitrário e $\delta > 0$. □

**Proposição 3.32** ( [10])**.** *Sejam $(X, d)$ um espaço métrico completo e $\{f_i\}_{i=1}^L$ um SIF de contrações-similaridades, $K$ seu atrator correspondente e $\alpha$ sua dimensão de similaridade. Se $\mathcal{H}^\alpha(K) > 0$, então a restrição de $\mathcal{H}^\alpha$ a $K$ coincide com $\mu = \nu_p\Theta^{-1}$ onde $p = (r_1^\alpha, ..., r_L^\alpha)$.*

*Demonstração.* Provar-se-á que

$$\mathcal{H}^\alpha_{|K} = \sum_{i=1}^{L} \mathcal{H}^\alpha_{|K_i} = \sum_{i=1}^{L} r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha_{|K} f_i^{-1}$$

Primeiramente, observe que $\mathcal{H}^\alpha_{|K_i} = r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha_{|K} f_i^{-1}$. De fato, para $A \subset K$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\alpha_{|K_i}(A) &= \mathcal{H}^\alpha(K_i \cap A) = \mathcal{H}^\alpha(f_i(K \cap f^{-1}(A))) \\ &= r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha(K \cap f^{-1}(A)) = r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha_{|K}(f^{-1}(A)) \\ &= r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha_{|K} f_i^{-1}(A).\end{aligned}$$

Além disto, pelo Lema 3.29, $\mathcal{H}^\alpha(K_i \cap K_j) = 0$ para $i \neq j$. Logo,

$$\mathcal{H}^\alpha_{|K} = \sum_{i=1}^{L} \mathcal{H}^\alpha_{|K_i} = \sum_{i=1}^{L} r_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha_{|K} f_i^{-1}.$$

Pela unicidade da medida de probabilidade estacionária relacionada a SIF $\{f_i\}_{i=1}^L$ segue que $\mu = (\mathcal{H}^\alpha(K))^{-1}\mathcal{H}^\alpha_{|K}$. □

**Teorema 3.33** ( [10]). *Sejam $\{f_i\}_{i=1}^L$ um SIF de contrações-similaridades do espaço euclidiano $\mathbf{R}^n$, $K$ seu atrator correspondente $\alpha$ sua dimensão de similaridade. Se $\{f_i\}_{i=1}^L$ satisfaz OSC, então $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$ e, além disso, a restrição de $\mathcal{H}^\alpha$ a $K$ é $\alpha$-regular.*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.29 (a) tem-se $\mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$.

Para verificar a $\alpha$-regularidade de $\mu = \nu_p \Theta^{-1}$ para $p = (r_1^\alpha, ..., r_L^\alpha)$, busca-se primeiro a estimativa superior. Para cada sequência $j_1...j_q... \in \Sigma$, considere o menor $q$ tal que $r_{\min}\delta \leq r_{j_1...j_q} \leq \delta$. Seja $\Pi = \{j_1...j_q : r_{\min}\delta \leq r_{j_1...j_q} \leq \delta\}$. Repare que $\Pi$ corta minimalmente $\Sigma^*$, pois para $k = k_{j_1 j_2 ... j_q j_{q+1}...}$ tem-se que $j_1...j_q j_{q+1}... \in [j_1, ..., j_q]$, logo por minimalidade de $q$, o prefixo de $k$ em $\Pi$ é único. Como $V$ é aberto, existe bola de raio $a$ contida em $V$ e por ser limitado está contido numa bola de raio $b$. Ademais, cada $V_{j_1...j_q}$ são disjuntos entre si e contem uma bola de raio $r_{\min}\delta a \leq r_{j_1...j_q} a$ e está contido numa bola de raio $\delta b \geq r_{j_1...j_q} b$. Do Lema 3.30, segue que no máximo $(1+2b)^n (r_{\min} a)^{-n}$ dos $\overline{V}_{j_1...j_q}$ intersectam $B(k, \delta)$. Como $\overline{V} \supset \bigcup_{i=1}^L f_i(\overline{V})$ e $\overline{V}$ fechado e limitado, pelo Lema 3.28 segue que $\overline{V} \supset K$. Assim, no máximo $(1+2b)^n (r_{\min} a)^{-n}$ dos $K_{j_1...j_q}$ intersectam $B(k, \delta)$. Pelo Lema 3.27,

$$\mu = \sum_{\sigma \in \Pi} r_\sigma^\alpha \mu f_\sigma^{-1}.$$

Com isso,

$$\mu(B(k,\delta)) = \sum_{\sigma \in \Pi} r_\sigma^\alpha \mu f_\sigma^{-1}(B(k,\delta)) \leq \sum_{\sigma \in \Pi} \delta^\alpha \Phi(\sigma) \leq (1+2b)^n (r_{\min} a)^{-n} \delta^\alpha,$$

Portanto, junto com Proposição 3.31, tem-se que $\mu$ é $\alpha$-regular. Ademais, pelo Princípio da Distribuição de Massa (Teorema 2.5) aplicado para $\mu$ segue $\mathcal{H}^\alpha(K) > 0$. Finalmente, pela Proposição 3.32, a restrição de $\mathcal{H}^\alpha$ a $K$ coincide com $\mu$. □

Abaixo encontra-se outro dois resultados principais anunciado na Introdução, a partir do qual pode-se exprimir uma grande diversidade de exemplos onde o espaço em que se joga é favorável à estimativa da dimensão de Hausdorff de conjuntos vencedores.

**Teorema 3.34.** *Todo subconjunto vencedor de um atrator de um SIF que satisfaz a OSC de contrações-similaridades do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ possui dimensão de Hausdorff total, isto é, igual a sua dimensão de similaridade.*

*Demonstração.* Seja $\alpha$ a dimensão de similaridade do atrator $K$ relativo ao SIF. Observe que pelo Teorema 3.33, $\mathcal{H}^\alpha_{|K}$ é uma medida $\alpha$-regular, cujo suporte é $K$. Pelo Corolário 3.20 segue o resultado. □

### 3.5.5 O caso doubling - uma discussão

O Teorema 3.33 (tratado no contexto de $\mathbb{R}^n$) que estabelece quando a medida de Hausdorff é do atrator é positiva foi elevado a um novo patamar quando Balogh e Rohner [1] provararam o mesmo num contexto mais abragente, dos espaços com a propriedade doubling, que serão agora assunto deste trabalho. De fato, como pode-se ver abaixo, a equivalência entre os conceitos da OSC e atrator com medida de Hausdorff positiva é mantida. Nesta Seção se discute, em geral, a validade dos resultados obtidos anteriormente para espaços euclidianos no contexto de espaços doubling.

**Definição 3.35** (Espaços doubling)**.** *Um espaço métrico $(X, d)$ é **doubling**, se existe $N \in \mathbb{N}$ que satisfaz: para todo $x \in X$ e todo $r > 0$ existem $x_1, ..., x_N \in X$ tais que*

$$B(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r).$$

Observe que a constante doubling $N$ de $(X, \mathrm{d})$ é universal para $X$: não depende da escolha de $x$ ou $r$. Uma questão importante em Análise em Espaços Métricos é caracterizar os espaços métricos que podem ser mergulhados em algum espaço euclidiano por um homeomorfismo bi-Lipschitz. Os resultados expostos em [9] indicam que, aparentemente, espaços métricos com a propriedade doubling têm maior possibilidade de trazer bons resultados nesse sentido, apesar de já ser sabido que não vale em geral para o mesmo. Semmes mostrou em [17] que, como consequência do Teorema da Diferenciabilidade de Pansu, o grupo de Heisenberg ($\mathbb{R}^3$ munido de soma não usual) com a métrica de Carnot é um espaço métrico doubling que não pode ser mergulhado em qualquer espaço euclidiano. Outros exemplos já conhecidos podem ser vistos nos trabalhos de Laakso [13] e de Bourdon-Pajot [5]. Há razões, todavia, que justificam essa expectativa. Os próximos dois resultados corroboram essa ideia. Para mais detalhes, ver [9].

**Teorema 3.36** (Teorema do Mergulho de Assouad)**.** *Seja $(X, d)$ um espaço métrico doubling. Então para cada $\alpha \in (0, 1)$, o espaço $(X, d^\alpha)$ admite um mergulho bi-Lipschitz em $\mathbb{R}^N$, para algum $N$ (onde $N$ depende de $\alpha$).*

**Teorema 3.37.** *Todo espaço métrico completo doubling suporta uma medida doubling. Reciprocamente, todo espaço métrico suporte de uma medida doubling é doubling.*

**Proposição 3.38.** *Todo espaço métrico doubling é separável.*

*Demonstração.* De fato, sejam $X$ espaço métrico doubling, $x_0 \in X$ um ponto qualquer e $X = \bigcup_{n\geq 1} B(x_0, 2^n)$. A ideia é encontrar um subconjunto enumerável e denso. Veja que pela propriedade doubling, toda bola de raio $2^n$ pode ser coberta por $K^n$ bolas de raio 1, onde $K$ é a constante doubling. Assim, $X = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{i=1}^{K^n} B(x_{in}, 1)$. Por sua vez, cada bola $B(x_{in}, 1)$ pode ser coberta por $K$ bolas de raio $1/2$. Assim, para cada $j$ pode-se cobrir $X$ com uma quantidade enumerável de bolas de raio $1/2^j$. Considere $C_j$ o conjunto formado pelos centros de cada uma dessas coberturas. $C_j$ é enumerável, logo $\bigcup_{j\geq 1} C_j$ é enumerável e denso. □

Retornando a atenção para a relação dos conceitos de open set condition (OSC), dimensão de Hausdorff positiva do atrator etc, segue abaixo a generalização de Balogh e Rohner (em [1]) ao contexto dos espaços doubling. Antes, porém, introduz-se algumas notações.

Fixe $r_1, ..., r_L$ como os raios de contração do SIF $\{f_i\}_{i=1}^L$. Para $0 < \rho < 1$, seja

$$\Pi_\rho := \{z_1...z_k \in \Sigma^* : r_{z_1...z_k} \leq \rho < r_{z_1...z_{k-1}}\}.$$

É claro que $\Pi_\rho$ corta minimalmente $\Sigma^*$, pois para $\sigma \in \Sigma$, considere $k \in \mathbb{N}$ o único inteiro tal que $r_{\sigma_1...\sigma_k} \leq \rho < r_{\sigma_1...\sigma_{k-1}}$. Assim $\sigma_k \in \Pi_\rho$. Pela unicidade de $k$ segue também a minimalidade.

**Teorema 3.39** ( [1]). *Sejam $X$ espaço métrico completo doubling, $K \subset X$ atrator de um SIF de contrações-similaridades $\{f_i\}_{i=1}^L$ e $\alpha$ sua dimensão de similaridade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) A OSC vale para $\{f_i\}_{i=1}^L$;*

*(b) A condição de Kigami é satisfeita, isto é, existem constantes positivas $c_1$, $c_2$, $c_*$ e $M$ tais que*

$$\operatorname{diam} K_w \leq c_1 \cdot r_w, \tag{10}$$

*para todo $w \in \Sigma^*$ e*

$$\#\{w : w \in \Pi_a, d(x, K_w) \leq c_2 \cdot a\} \leq M, \tag{11}$$

*onde $x \in K$ e qualquer $a \in (0, c_*)$;*

*(c) $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$. Em particular, $\dim_H K = \alpha$.*

É relevante mencionar que Schief em [15] já havia demonstrado no contexto de espaços métricos completos que $(c) \Rightarrow (a)$. No mesmo contexto, Kigami em [11] introduziu as hipóteses (10) e (11) e mostrou $(b) \Rightarrow (c)$. Essencialmente, o trabalho de Balogh e Rohner em [1] consistiu em demonstrar $(a) \Rightarrow (b)$ para espaços doubling. Abaixo, reproduz-se em verdade a demonstração feita por Kigami de $(b) \Rightarrow (c)$. O que se propõe aqui com isso é atentar para outra conclusão não destacada por Kigami na sua demonstração. Explicitamente falando, em muita das vezes para se demonstrar que $\mathcal{H}^s(K) > 0$ para algum parâmetro $s > 0$, faz-se uso do Princípio da Distribuição de Massa. Todavia, para utilizá-lo é necessário mostrar antes a estimativa superior da $s$-regularidade de alguma medida boreliana que dá medida positiva para o conjunto em questão. É exatamente isto que Kigami fez e a medida que ele usou é uma já bem conhecida.

**Proposição 3.40.** *Sejam $X$ espaço métrico completo, $K \subset X$ atrator de um SIF de contrações-similaridades $\{f_i\}_{i=1}^L$ e $\alpha$ sua dimensão de similaridade. Se a condição de Kigami vale, então para $p = (r_1^\alpha, ..., r_L^\alpha)$ e $\mu = \nu_p \Theta^{-1}$ tem-se*

$$\mu(B(x, r)) \leq cr^\alpha,$$

*para todo $x \in K$ e $r > 0$ suficientemente pequeno. Ademais, $\mathcal{H}^\alpha(K) > 0$.*

*Demonstração.* Para $0 < \rho < 1$, considere $\Pi_\rho$ e $r_{\min} = \min\{r_1, ..., r_L\}$.

Sejam $c_*$ tal qual na hipótese (11) e $0 < \rho < c_*$. Para $p = (r_1^\alpha, ..., r_L^\alpha)$ considere $\nu_p$ a medida produto em $\Sigma$. Para cada $x \in K$,

$$\Theta^{-1}(B[x, c_2\rho]) \subset \bigcup_{w \in \Pi_{\rho,x}} \Sigma_w,$$

onde $\Pi_{\rho,x} := \{w : w \in \Pi_\rho,\ \mathrm{d}(x, K_w) \leq c_2\rho\}$. Seja $\mu = \nu_p\Theta^{-1}$. Então,

$$\mu(B[x, c_2\rho]) \leq \sum_{w\in\Pi_{\rho,x}} \nu_p(\Sigma_w).$$

Repare que para $w \in \Pi_\rho$ tem-se $\nu_p(\Sigma_w) = r_w^\alpha \leq \rho^\alpha$ e que $\#\Pi_{\rho,x} \leq M$ pela hipótese (11). Logo

$$\mu(B[x, c_2\rho]) \leq Mc_2^{-\alpha}(c_2\rho)^\alpha.$$

Então, pelo Princípio da Distribução de Massa (Teorema 2.5), segue que

$$\mathcal{H}^\alpha(K) > 0.$$

Isso termina a demonstração. □

**Teorema 3.41.** *Sejam $X$ espaço métrico completo doubling, $K \subset X$ atrator de um SIF de contrações-similaridades $\{f_i\}_{i=1}^L$ satisfazendo a OSC e $\alpha$ sua dimensão de similaridade. Então, a restrição da medida de Hausdorff $\alpha$-dimensional a $K$ é uma medida $\alpha$-regular.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.40, $\mathcal{H}^\alpha(K) > 0$ e existe $c > 0$ tal que para qualquer $r > 0$ e $x \in K$ tem-se

$$\mu(B(x, r)) \leq cr^\alpha.$$

onde $\mu = \nu\Theta^{-1}$. Este fato mais a Proposição 3.31 permite concluir que $\mu$ é $\alpha$-regular. Pela Proposição 3.32 segue que $\mu = \mathcal{H}^\alpha|_K$ e portanto $\mathcal{H}^\alpha|_K$ é $\alpha$-regular. □

Com o resultado acima, está provado o resultado final deste trabalho.

**Teorema 3.42.** *Sejam $X$ um espaço métrico completo doubling, $K \subset X$ atrator de um SIF de contrações-similaridades que satisfaz a OSC. Então todo subconjunto vencedor $A \subset K$ de um jogo de Schmidt em $K$ possui dimensão de Hausdorff total, isto é, igual a dimensão de similaridade do SIF.*

## 3.6 Considerações finais

A condição de Kigami, portanto, mostra-se fundamental no processo de generalização do resultado de Hutchinson sobre a regularidade das medidas de Hausdorff em atratores de SIF's em espaços euclidianos para espaços métricos doubling completos. Ela faz o típico papel de um lema de cobertura que à essa altura, em espaços métricos completos mais gerais, seriam difíceis, talvez improváveis, de serem obtidos.

Restam, todavia, perguntas a serem respondidas. O desejado Teorema com enunciado *Em todo espaço métrico doubling completo, os conjuntos vencedores possuem dimensão de Hausdorff total* não foi concretizado (é de se ressaltar que espaços doubling são caracterizados por possuirem dimensão de Assouad finita e como consequência, dimensão de Hausdorff finita, como pode ser visto em [9, Definition 10.15]). Este seria um tipo de resultado que faria de todos os outros um mero caso particular. Um obstáculo a sua concretização, como pode ser visto na demonstração do Teorema 3.19, é o comportamento pouco conhecido da dimensão pontual de uma medida doubling.

Ainda pode-se perguntar sob quais condições é verdade que num espaço doubling a medida de Hausdorff sob o parâmetro da dimensão de Hausdorff (que é finita por sinal como já dito) é uma medida doubling. No caso específico de atratores de SIF's, constatou-se que a OSC é uma condição suficiente para garantir a $\delta$-regularidade da medida de Hausdorff.

# Referências


[1] Zoltán M. Balogh and Heiner Rohner. Self-similar sets in doubling spaces. *Illinois J. Math.*, 51(4):1275–1297, 2007.

[2] Christoph Bandt and Siegfried Graf. Self-similar sets. VII. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114:995–1001, 1992.

[3] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley-Interscience, Chicago, second edition, 1999.

[4] Christopher J. Bishop and Yuval Peres. *Fractals in Probability and Analysis*. Cambridge University Press, first edition, 2016.

[5] Marc Bourdon and Hervé Pajot. Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(8):2315–2324, 1999.

[6] Ryan Broderick, Lior Fishman, and Dmitry Kleinbock. Schmidt's game, fractals, and orbits of toral endomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(4):1095–1107, 2011.

[7] S. G. Dani. On orbits of endomorphisms of tori and the Schmidt game. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8(4):523–529, 1988.

[8] Lior Fishman. Schmidt's game on fractals. *Israel J. Math.*, 171:77–92, 2009.

[9] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[10] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.

[11] Jun Kigami. Hausdorff dimensions of self-similar sets and shortest path metrics. *J. Math. Soc. Japan*, 47(3):381–404, 1995.

[12] Dmitry Kleinbock and Barak Weiss. Modified Schmidt games and Diophantine approximation with weights. *Adv. Math.*, 223(4):1276–1298, 2010.

[13] Tomi J. Laakso. Plane with $A_\infty$-weighted metric not bi-Lipschitz embeddable to $\mathbb{R}^N$. *Bull. London Math. Soc.*, 34(6):667–676, 2002.

[14] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[15] Andreas Schief. Self-similar sets in complete metric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(2):481–490, 1996.

[16] Wolfgang M. Schmidt. On badly approximable numbers and certain games. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 123:178–199, 1966.

[17] Stephen Semmes. On the nonexistence of bi-Lipschitz parameterizations and geometric problems about $A_\infty$-weights. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 12(2):337–410, 1996.

[18] Weisheng Wu. Schmidt games and non-dense forward orbits of certain partially hyperbolic systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 36(5):1656–1678, 2016.