

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Um breve estudo sobre o Processo de Hammersley

Gabriel Rodrigues Batista Sanfins

Rio de Janeiro

Julho de 2017

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Um breve estudo sobre o Processo de Hammersley

Gabriel Rodrigues Batista Sanfins

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Leandro Pimentel.

Rio de Janeiro

Julho de 2017

Sanfins, Gabriel Rodrigues Batista

Um breve estudo sobre o Processo de Hammersley/ Gabriel Rodrigues Batista Sanfins. — Rio de Janeiro: UFRJ/ IM 2017

vii, 54f.: il.; 31 cm.

Orientador: Leandro P. R. Pimentel

Dissertação (Mestrado) — UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017

Referências Bibliográficas: f. 57-54.

1. Processo de Hammersley. 2. Problema de Ulam. 3. Processos Estocásticos. 4. Probabilidade. I. Pimentel, Leandro P. R. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Um breve estudo sobre o Processo de Hammersley

Gabriel Rodrigues Batista Sanfins

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Leandro Pinto Rodrigues Pimentel - IM/UFRJ

Prof. Glauco Valle da Silva Coelho - IM/UFRJ

Prof. Milton David Jara Valenzuela - IMPA

Prof. Valentin Sisko - IME/UFF (Suplente)

Rio de Janeiro

Julho de 2017

Agradecimentos

Aos meus pais Marco Aurélio e Maria Alcina, por todo apoio e dedicação.

Aos meus irmãos Lucas e Clara Sanfins, por toda a amizade e carinho.

Aos meus padrinhos José, Ana e Pedro Ivo Rodrigues, por todo o incentivo e conselhos.

À minha namorada Julia Spiegel, por todo o amor e apoio incondicional durante todo o processo de redação deste trabalho.

À Henrique Frazão e Marina Heil, por toda a amizade forte e sincera construída sem nunca assistirmos sequer uma disciplina juntos.

À Caio, Bárbara e toda a família Marques, por sempre me acolherem e me tratarem como membro da própria família.

À Raphael Lourenço, Jonathas Ferreira, Claudio Verdun, Hugo Carvalho, Pedro Gil, Lucas Manoel, Paulo de Tarso e todos os outros amigos de ABC-116, pelas ótimas discussões (sejam elas matemáticas ou não) e pela ótima companhia durante minha estadia na UFRJ.

À Henrique Ralsi, Lorrane Morena, Caio Vinicius, Matheus Mourão, Evandro de Paula, Daniel Fórido, Luisa Tôres e muitos outros colegas de outros cursos, por toda a amizade e por proporcionarem conversas com pontos de vista diferentes do vivenciado por mim na universidade.

À Nelson Bernardo, Igor Rocha, Nicollas Cozzolino, Lucas Vianna, Isadora Mendes, João Amaral, Hugo Barros, Elias Ferraz, Heitor José, Lucas Barata, Pedro Machado e todos os ritmistas das baterias Descomunal e Irracional, por toda a energia e vontade de participar da melhor atividade extracurricular de todas.

Ao meu orientador Leandro Pimentel, por toda a ajuda, paciência e boas discussões matemáticas.

Aos membros da banca por terem lido o trabalho e por terem dado sugestões sólidas para sua melhoria.

A todos os meus professores, em especial Nilson Bernardes, Glauco Valle, César Niche, Felipe Acker e Fábio Ramos, por toda ajuda e paciência.

Gabriel Rodrigues Batista Sanfins
Julho de 2017

“Many of the truths that we cling
to depend greatly on our own
point of view.”

Obi-Wan Kenobi
O Retorno de Jedi

Resumo

Um breve estudo sobre o Processo de Hammersley

Gabriel Rodrigues Batista Sanfins

Resumo da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Resumo: Essa dissertação tem como objetivo introduzir a abordagem de Hammersley em sua tentativa de estudar o problema de Ulam. Esta abordagem ficou conhecida como Processo de Hammersley e, desde sua definição, em 1972, várias modificações do processo original foram introduzidas na literatura. Resultados sobre a convergência das várias modificações do processo serão exibidos e demonstrados, ajudando a entender melhor o processo original, além do próprio problema de Ulam.

Palavras-chave. Processo de Hammersley, Problema de Ulam, Processos Estocásticos, Probabilidade.

Rio de Janeiro

Julho de 2017

Abstract*A brief study on the Hammersley Process*

Gabriel Rodrigues Batista Sanfins

Abstract da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abstract: The present work intends to introduce Hammersley's approach in his attempt to study Ulam's problem. This approach is known as Hammersley's Process and, since its definition in 1972, various modifications of the original process were introduced in the literature. Results about the convergence of these modifications are shown with proofs, helping to better understand the original process, as well as Ulam's problem.

Keywords. Hammersley Process, Ulam's Problem, Stochastic Processes, Probability.

Rio de Janeiro

Julho de 2017

Sumário

Prefácio	1
1 Introdução	3
1.1 Distribuição da maior subsequência crescente	3
1.2 O Modelo Geométrico	4
1.3 O Modelo de Poisson para Percolação de Última Passagem	6
1.4 O Processo de Hammersley	8
1.5 O Processo de Hammersley em \mathbb{R}	10
1.6 O Processo de Hammersley com fontes e drenos	13
1.7 O Teorema de Burke para o processo de Hammersley	21
2 Assíntotas de Raiz Cúbica para o Processo de Hammersley	27
2.1 Introdução	27
2.2 Variância do Fluxo	27
2.3 Pontos de Saída e Partículas de Segunda Categoria	30
2.4 A ordem de $\mathbb{E}(Z(t))_+$	31
2.5 Caminhos estritamente NE e fracamente NE restritos	34
2.6 A cota inferior para $\mathbb{E}Z(t)_+$	36
2.7 Resultados de Rigidez	39
3 Flutuações Locais	42
3.1 Definindo a sequência \mathcal{A}_n	42
3.2 Comparação Local e Pontos de Saída	42
3.3 Rigidez de \mathcal{A}_n	45
3.4 Usando outra escala para Flutuações Locais	47
3.5 Comportamento local do processo de Airy	50

Prefácio

No ano de 1972, John Michael Hammersley publicou o texto “*A few seedlings of research*”[10] no Proceedings of the sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Em tal texto, ele procurou descrever seu método de abordagem nos problemas em que estudava na época, na esperança de ajudar muitos alunos de pós-graduação que, segundo o próprio Hammersley, se perguntavam “Como se faz pesquisa em probabilidade e estatística?”.

Um dos tópicos de estudo de Hammersley na época era o já famoso problema de Ulam, que consistia em achar a distribuição do tamanho da maior subsequência monótona em uma permutação aleatória dos $n^2 + 1$ primeiros números naturais. Depois de uma breve discussão sobre fatos já conhecidos sobre o problema, Hammersley introduz uma nova maneira de interpretá-lo, através de um Processo do Poisson pontual em \mathbb{R}_+^2 , enxergando uma permutação como n pontos distintos em um retângulo $[0, x] \times [0, t]$ e sua maior subsequência crescente como um caminho estritamente crescente neste retângulo.

O texto de Hammersley abriu caminho para uma vasta literatura que utilizou-se das mesmas ideias, alguns exemplos são [1], [5] e [9], que, além de discorrer sobre o processo original, introduzem modificações que permitem a demonstração de resultados importantíssimos na área de percolação.

O primeiro capítulo desta dissertação se propõe à apresentar de forma organizada o problema de Ulam e o Processo de Hammersley, além de algumas modificações de tal processo, que permitem a derivação de resultados interessantes sobre a convergência do tamanho da maior subsequência crescente na permutação aleatória dos n primeiros números naturais. Também provamos uma espécie de reversibilidade para um dos processos introduzidos.

O segundo capítulo tem como objetivo estudar o comportamento assintótico do processo, mostrando que existe uma escala ideal para se olhar o processo, que está fortemente relacionada com o expoente $1/3$ (ou raiz cúbica), conseguimos também mostrar a rigidez de dois importantes processos estocásticos introduzidos no capítulo 1. No terceiro capítulo mostramos que resultados como o do capítulo 2 podem ser conseguidos de maneira mais simples, através de uma técnica que chamamos de comparação local.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, daremos uma breve motivação para o estudo assintótico de modelos de percolação de última passagem. Veremos brevemente alguns modelos propostos para o estudo do assunto, todos baseados em uma ideia proposta por Hammersley, em 1972 [10]. Também demonstraremos alguns dos resultados importantes da área, tendo como base os textos [1], [4] e [5].

1.1 Distribuição da maior subsequência crescente

Definição 1.1. Seja $\pi : \{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$ uma permutação, diremos que i_1, \dots, i_k é uma **subsequência crescente** de π se vale que

$$i_1 < \dots < i_k; \quad \pi(i_1) < \dots < \pi(i_k).$$

Exemplo. Para $n = 10$, considere a permutação

$$7 \ 2 \ 8 \ 1 \ 3 \ 4 \ 10 \ 6 \ 9 \ 5$$

(Onde $\pi(1) = 4, \pi(2) = 2, \pi(3) = 5, \dots$) Tem a subsequência crescente

$$1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 9$$

De tamanho 5, e podemos prontamente verificar que este é o maior tamanho possível para qualquer subsequência crescente dessa permutação.

Definição 1.2. Seja π uma permutação como acima. Chamaremos de $l(\pi)$ o tamanho da maior subsequência crescente de π

Definição 1.3. Definimos por L_n o tamanho da maior subsequência crescente de uma permutação aleatória uniforme do conjunto $\{1, \dots, n\}$, ou seja, cada permutação específica é escolhida com probabilidade $1/n!$.

Um dos primeiros a pensar na distribuição de L_n foi o matemático polonês Stanislaw Ulam. O problema de Ulam consiste em encontrar a distribuição do tamanho da maior subsequência monótona em uma permutação uniforme dos $n^2 + 1$ primeiros números naturais (a definição de subsequência monótona é análoga à Definição 1.1), esta escolha se dá pelo fato que uma permutação dos $n^2 + 1$ primeiros números tem sempre uma subsequência monótona de tamanho $n + 1$ (Este fato é provado em [10]). Durante este capítulo, veremos que podemos usar um processo estocástico no plano (chamado Processo de Hammersley) para conseguirmos resultados importantes sobre o comportamento de L_n .

1.2 O Modelo Geométrico

As ideias desta seção vem de Hammersley em [10], e foram a base para que Aldous e Diaconis([1]) formalizassem a teoria e apresentassem os modelos vistos aqui. Estes dois trabalhos foram motivações para o desenvolvimento da Teoria Ergódica Subaditiva. Antes de introduzir o modelo propriamente dito, vamos pensar na permutação de um jeito diferente. Para isso, considere n pontos (x_i, t_i) no retângulo $[0, x] \times [0, t]$, todos com coordenadas distintas, ou seja, $t_i \neq t_j, x_i \neq x_j \forall i \neq j$. Este conjunto de pontos induz uma permutação π da seguinte maneira:

O ponto com a i -ésima menor coordenada em t tem a $\pi(i)$ -ésima menor coordenada em x .

Fica claro que, como todas as coordenadas são distintas, cada sequência (x_i, t_i) de n termos induz uma única permutação π em $\{1, \dots, n\}$.

Definição 1.4. Sejam $x, t > 0$ e $\mathcal{A} = \{(x_1, t_1), \dots, (x_k, t_k)\}$ k pontos no retângulo $[0, x] \times [0, t]$. Diremos que \mathcal{A} é um caminho **estritamente ao Nordeste (ou estritamente NE)** de $(0, 0)$ à (x, t) se $0 < x_1 < \dots < x_k \leq x$ e $0 < t_1 < \dots < t_k \leq t$.

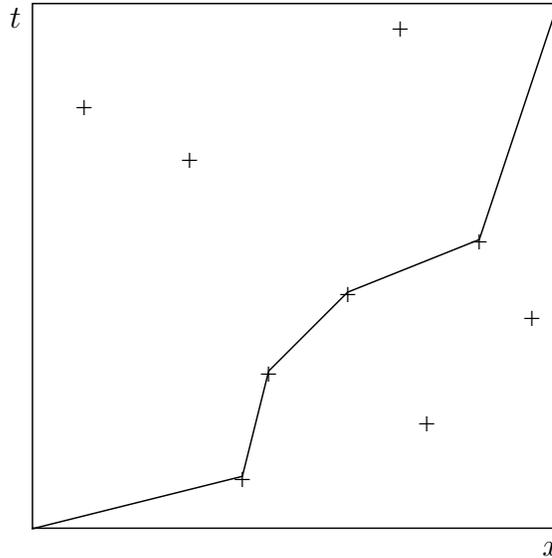


Figura 1.1: Número máximo de pontos em um caminho estritamente NE de um conjunto de pontos no retângulo $[0, x] \times [0, t]$.

Sem muita dificuldade, podemos ver, geometricamente, que o tamanho $l(\pi)$ da maior subsequência crescente de π é o número máximo de pontos (x_i, t_i) que formam algum caminho estritamente NE entre $(0, 0)$ e (x, t) . Agora considere um processo de Poisson \mathcal{N} de taxa 1 em \mathbb{R}^2 e, para $x, t \geq 0$, defina $L(x, t)$ como o maior número de pontos de Poisson que formam algum caminho estritamente NE entre $(0, 0)$ e (x, t) . Denote também o número de pontos de Poisson no retângulo $[0, x] \times [0, t]$ por $M(x, t)$. Dessa forma, vemos que $M(x, t)$ tem distribuição Poisson com parâmetro xt , e que a permutação associada em $\{1, 2, \dots, M(x, t)\}$ é uniforme. Usando a Definição 1.3, também vemos que

$$L(x, t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} L_{M(x, t)}. \quad (1.1)$$

Teorema 1.5. *Defina c por*

$$c = \sup_{t > 0} \frac{\mathbb{E}(L(t, t))}{t},$$

então vale

$$\frac{L(t, t)}{t} \rightarrow c \quad \text{q.c.} \quad (1.2)$$

Demonstração. Tome $s < t \in \mathbb{N}$ e defina $Y_{s,t}$ como o maior número de pontos de Poisson em um caminho estritamente NE de (s, s) até (t, t) . Primeiramente, note que $Y_{0,t} = L(t, t)$, além disso, temos que tal sequência é superaditiva no seguinte sentido:

$$Y_{0,s} + Y_{s,t} \leq Y_{0,t}.$$

Podemos verificar a desigualdade acima notando que, no termo da esquerda, estamos considerando os caminhos estritamente NE entre $(0, 0)$ e (t, t) que passam pelo ponto (s, s) . Já no termo da direita não temos esta restrição. Além disso, todas as outras condições do Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman para processos contínuos [12] valem, são elas:

- (i) Para todo $u > 0$, as distribuições conjuntas de $\{Y_{s+u, t+u}, 0 < s < t\}$ e $\{Y_{s,t}, 0 < s < t\}$ são iguais;
- (ii) $\mathbb{E}Y_{0,t}$ existe para todo $t > 0$ e satisfaz $\mathbb{E}Y_{0,t} \leq ct$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$;
- (iii) Existe um intervalo não degenerado $I = [a, b]$, $a, b > 0$ tal que

$$\mathbb{E} \left\{ \sup_{s < t, s, t \in I} |Y_{s,t}| \right\} < \infty.$$

Assim sendo, podemos utilizar o Teorema Ergódico Subaditivo para o processo $-Y_{s,t}$ e concluir que

$$\frac{L(t, t)}{t} = \frac{Y_{0,t}}{t} \rightarrow c \quad \text{q.c.}$$

□

Podemos utilizar este Teorema para obter um outro resultado, desta vez aplicado à maior subsequência de uma permutação aleatória. Para isso, denote por $\tau(n)$ o menor valor de t para o qual o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(0, t)$, $(t, 0)$ e (t, t) tem n pontos de Poisson em seu interior. Escreva os n pontos de $[0, \tau(n)] \times [0, \tau(n)]$ como (x_i, y_i) , e seja π_n a permutação de $\{1, \dots, n\}$ induzida por estes pontos. Pela construção de Hammersley, $l(\pi_n) = L(\tau(n), \tau(n)) = L_n$. Podemos, também, mostrar o seguinte Lema:

Lema 1.6.

$$\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 \quad \text{q.c.}$$

Demonstração. Seja S_n o número de pontos de Poisson em $[0, \sqrt{n}] \times [0, \sqrt{n}]$. Pelas propriedades do processo de Poisson no plano, sabemos que $U_n := S_n - S_{n-1}$ são variáveis aleatórias independentes, de Poisson e com média 1. Logo, pela Lei Forte dos Grandes Números, temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n} = \frac{S_n}{n} \rightarrow 1 \quad \text{q.c.}$$

Agora tome $\varepsilon > 0$. Pelo argumento acima, podemos enxergar S_n como um processo contínuo e notar que

$$\begin{aligned} \frac{S_{n(1-\varepsilon)}}{n} &\rightarrow 1 - \varepsilon & \text{q.c.} \\ \frac{S_{n(1+\varepsilon)}}{n} &\rightarrow 1 + \varepsilon & \text{q.c.} \end{aligned}$$

E notar, assim, que se n é suficientemente grande, vale $S_{n(1-\varepsilon)} < n < S_{n(1+\varepsilon)}$ e, portanto, pela definição de S_n , $\sqrt{n(1-\varepsilon)} \leq \tau(n) \leq \sqrt{n(1+\varepsilon)}$. Fazendo $\varepsilon \downarrow 0$, encerramos a demonstração. □

Corolário 1.7.

$$\frac{L_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{p} c$$

Demonstração. Podemos usar o Teorema 1.5 e o Lema 1.6 para ver que

$$\frac{L_n}{\sqrt{n}} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{L(\tau(n), \tau(n))}{\sqrt{n}} = \frac{L(\tau(n), \tau(n))}{\tau(n)} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow c \quad \text{q.c.}$$

□

Em 1972, Hammersley [10] conseguiu mostrar que $\pi/2 \leq c \leq e$, estimativa que foi melhorada para $1.59 < c < 2.49$, por Kingman em 1973 [12]. Com o avanço do trabalho em problemas de permutação aleatória, Logan e Shepp [15], e Vershik e Kerov [19] demonstraram que $c = 2$. Na seção 1.5 mostraremos que $c \leq 2$.

1.3 O Modelo de Poisson para Percolação de Última Passagem

Podemos generalizar o modelo de Hammersley visto no último capítulo. O objetivo desta seção é explorar esta generalização e expor alguns fatos decorrentes dela. Seja $\mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aleatório de Poisson no plano, com intensidade 1. Em cada ponto $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, colocaremos um peso aleatório positivo $\omega_{\mathbf{p}}$. Assumiremos que o conjunto $\{\omega_{\mathbf{p}} : \mathbf{p} \in \mathbf{P}\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição F . Tais pesos também são assumidos independentes do processo de Poisson no plano \mathbf{P} .

Definição 1.8. Seja $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, com $\mathbf{p} < \mathbf{q}$ (Aqui, a desigualdade de vetores é equivalente à desigualdade coordenada à coordenada). Definimos $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ como o conjunto de todos os caminhos **estritamente NE**, consistindo de pontos em \mathbf{P} que ligam \mathbf{p} à \mathbf{q} .

Definição 1.9. Definimos o **tempo de última passagem** L entre \mathbf{p} e \mathbf{q} , com $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$ como

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \left\{ \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \omega_{\mathbf{p}'} \right\}.$$

Como primeiro fato básico, podemos notar que L é superaditiva, pois, se $\mathbf{p} < \mathbf{z} < \mathbf{q}$, então o valor da soma máxima entre todos os caminhos entre \mathbf{p} e \mathbf{q} será certamente maior que entre todos os caminhos entre \mathbf{p} e \mathbf{q} que passem por \mathbf{z} . Matematicamente, temos que

$$\max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \left\{ \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \omega_{\mathbf{p}'} \right\} \geq \max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{z})} \left\{ \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \omega_{\mathbf{p}'} \right\} + \max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{z}, \mathbf{q})} \left\{ \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \omega_{\mathbf{p}'} \right\}.$$

A equação acima nos dá, por sua vez:

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq L(\mathbf{p}, \mathbf{z}) + L(\mathbf{z}, \mathbf{q}).$$

Além disso, podemos notar que o modelo de Hammersley, introduzido na seção anterior, é um caso particular do processo descrito acima, com cada $\omega_{\mathbf{p}}$ tendo distribuição δ_1 . Agora estamos prontos para enunciar o Teorema da Forma, defina $\mathbf{0} = (0, 0)$, $\mathbf{n} = (n, n)$ e

$$F(x) = \mathbb{P}(\omega_{\mathbf{p}} < x) \text{ e } \gamma = \gamma(F) = \sup_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, \mathbf{n})}{n} > 0.$$

Teorema 1.10. *Suponha que*

$$\int_0^\infty \sqrt{1 - F(x)} dx < +\infty$$

Então $\gamma(F) < \infty$ e, para todo $x, t > 0$, quando $r \rightarrow \infty$, vale

$$\frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, (rx, rt))}{r} \rightarrow \gamma\sqrt{xt},$$

Além disso,

$$\frac{L(\mathbf{0}, (rx, rt))}{r} \rightarrow \gamma\sqrt{xt} \quad \text{q.c.}$$

Antes de começar a demonstração, precisamos notar que o Processo de Poisson no plano que consideramos tem uma propriedade interessante. De fato, a distribuição do número de pontos num determinado conjunto é preservada por transformações que preservam volume e caminhos estritamente NE. Isto implica imediatamente que, se $x, t, \lambda > 0$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, então

$$L(\mathbf{0}, (x, t)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} L(\mathbf{p}, \mathbf{p} + (\lambda x, t/\lambda)) \quad (1.3)$$

Demonstração. A equação (1.3) mostra que é suficiente mostrar o Teorema para $(x, t) = (1, 1)$, pois se tomarmos $r' := r\sqrt{xt}$ no enunciado do Teorema, obtemos

$$\frac{L(\mathbf{0}, (rx, rt))}{r} = \frac{L(\mathbf{0}, (r\sqrt{xt}, r\sqrt{xt}))}{r} = \frac{L(\mathbf{0}, (r', r'))}{r'} \sqrt{xt}.$$

Obtendo assim o resultado geral a partir do caso $(x, t) = (1, 1)$. Neste caso específico, a convergência vira novamente uma consequência do Teorema Ergódico Subaditivo de Liggett [13], bastando provar que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, (r, r))}{r} < \infty.$$

Para provar este caso mais geral, começaremos considerando pesos Bernoulli, obtendo o resultado a partir deles. Tome $p \in [0, 1]$ e denote por \mathbb{E}_p a esperança e L_p o processo de Poisson para percolação de última passagem induzido por pesos $\omega'_{\mathbf{p}}$, onde $\mathbb{P}(\omega'_{\mathbf{p}} = 1) = p$. Logo, a probabilidade de termos n pontos com peso 1 no quadrado de lado \sqrt{r} é dada por

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-r}}{k!} r^k \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} = \frac{e^{-r}}{n!} (pr)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r^{k-n} (1-p)^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{e^{-pr}}{n!} (pr)^n$$

Dessa forma, vemos que esse processo é equivalente ao modelo de Hammersley da seção anterior, porém com intensidade p no processo de Poisson no plano. Sendo assim, vemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_p L_p(\mathbf{0}, (r, r))}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, (r\sqrt{p}, r\sqrt{p}))}{r} = \gamma(\delta_1) \sqrt{p}.$$

De fato, $\gamma(\delta_1)$ é o que nos referimos por c na última seção, onde vimos que já foi provado que esta é uma constante finita. Na seção 1.5 mostraremos que $\gamma(\delta_1) \leq 2$, mas, na verdade, já existem resultados que mostram $\gamma(\delta_1) = 2$. Agora note que

$$\begin{aligned} L(\mathbf{0}, \mathbf{p}) &= \max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{0}, \mathbf{p})} \left\{ \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \omega_{\mathbf{p}'} \right\} \\ &= \max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{0}, \mathbf{p})} \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \mathbb{1}_{\{\omega_{\mathbf{p}'} > x\}} dx \right\} \\ &\leq \int_0^{\infty} \max_{\mathcal{C} \in \Pi(\mathbf{0}, \mathbf{p})} \left\{ \sum_{\mathbf{p}' \in \mathcal{C}} \mathbb{1}_{\{\omega_{\mathbf{p}'} > x\}} \right\} dx. \end{aligned}$$

Vemos que o integrando na última linha corresponde a nada mais do que o modelo com pesos Bernoulli e $p = 1 - F(x)$. Isto significa que podemos usar o Teorema de Fubini para obter

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, (r, r))}{r} &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\mathbb{E}_{1-F(x)} L(\mathbf{0}, (r, r))}{r} dx \\ &= \gamma(\delta_1) \int_0^{\infty} \sqrt{1-F(x)} dx < \infty. \end{aligned}$$

Para obter a convergência, basta usar a equação (1.3) para obter

$$\frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, (rx, rt))}{r} = \frac{\mathbb{E}L(\mathbf{0}, (r\sqrt{xt}, r\sqrt{xt}))}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \gamma \sqrt{xt}.$$

E, assim, encerramos a demonstração. \square

Repare que o Teorema 1.5 é apenas um corolário do que acabamos de demonstrar com $c = \gamma(\delta_1)$.

1.4 O Processo de Hammersley

Uma configuração de partículas em \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+ pode ser descrita pelo seu processo de contagem $n(\cdot)$, onde $n(0)$ é arbitrário e

$$n(y) - n(x) = \text{número de partículas em } [x, y),$$

onde somente um número finito de partículas existe em um intervalo de tamanho finito. Considere, assim como na Figura 1.1, um conjunto (x_i, t_i) de pontos no retângulo $[0, x^*] \times [0, t^*]$, e para (x, t) nesse retângulo, denote por $L(x, t)$ o número máximo de pontos em um caminho estritamente NE de $(0, 0)$ até (x, t) . Ou seja, segundo a notação das últimas seções, $L(x, t) := L(\mathbf{0}, (x, t))$. Agora repare que, para cada t fixo, o mapa $x \mapsto L(x, t)$ é um processo de contagem associado à alguma configuração de partículas em $[0, x^*]$ que evolui da seguinte maneira: se ordenarmos os pontos (x_i, t_i) de forma que $0 < t_1 < t_2 < \dots$ e imaginarmos a variável t como o tempo, a configuração de partículas em $[0, x^*]$ induzida pelo mapa acima só poderá mudar nos instantes t_i . Fixe t_i e imagine que a posição das partículas no instante t_i^- seja

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_m < x^*.$$

Assim sendo, certamente $x_i \in (\eta_j, \eta_{j+1})$ para algum j , aonde escrevemos $\eta_0 = 0$ e $\eta_{m+1} = x^*$. Da própria definição de $L(x, t)$, temos que os únicos valores de x para os quais $L(x, t_i) \neq L(x, t_i^-)$ são aqueles em que $x \in [x_i, \eta_{j+1})$, e, para tais x , obtemos que $L(x, t_i) - L(x, t_i^-) = 1$. Assim, no tempo t_i a configuração de partículas se transforma em

$$0 < \eta_1 < \dots < \eta_j < x_i < \eta_{j+2} < \dots$$

Podemos explicar o modelo acima de maneira mais simples: No tempo t_i , a partícula à direita mais próxima de x_i é movida para a posição x_i , e, se tal partícula não existir, então uma nova partícula é criada em x_i . Nós podemos ligar essa representação determinística no contexto da Seção 1.2, aonde $L(x, t)$ é o número máximo de pontos de um Processo de Poisson \mathcal{N} no plano em um caminho estritamente NE de $(0, 0)$ à (x, t) . Para um t fixo, o processo $x \mapsto L(x, t)$ é um processo de contagem associado à uma configuração de partículas aleatória em \mathbb{R}^+ . Se fixarmos x^* e considerarmos somente as partículas no intervalo $[0, x^*]$, sua evolução no tempo pode ser descrita da seguinte forma:

Lei 1.1. *Em tempos de um processo de Poisson (taxa x^*) no tempo, um ponto U é escolhido uniformemente em $[0, x^*]$, independente do passado, e a partícula à direita mais próxima de U é movida para U . Caso tal partícula não exista em $[0, x^*]$, uma nova partícula é criada em U .*

Definição 1.11. Se um processo de partículas evolui de acordo com a Lei 1.1, o chamaremos de **Processo de Hammersley**

Na linguagem de sistemas de interação de partículas, a construção de um processo por caminhos estritamente NE é chamada de **representação gráfica** do sistema. Em particular, $L(x, t)$ é a representação gráfica do processo de Hammersley em \mathbb{R}^+ , começando no tempo $t = 0$ e sem nenhuma partícula em sua condição inicial, pois $L(x, t)$ é justamente o número de partículas em $[0, x]$ no instante de tempo t . A Figura 1.2 mostra as trajetórias no espaço-tempo das partículas desse processo, onde os pontos marcados com um \times são os pontos do processo de Poisson no plano \mathcal{N} .

Definição 1.12. Chamaremos os pontos dos cantos inferiores esquerdos das trajetórias (marcados com um \times na Figura 1.2) de **Pontos- α** . Já os pontos dos cantos superiores direitos das trajetórias (marcados com um \bullet) serão chamados de **Pontos- β** .

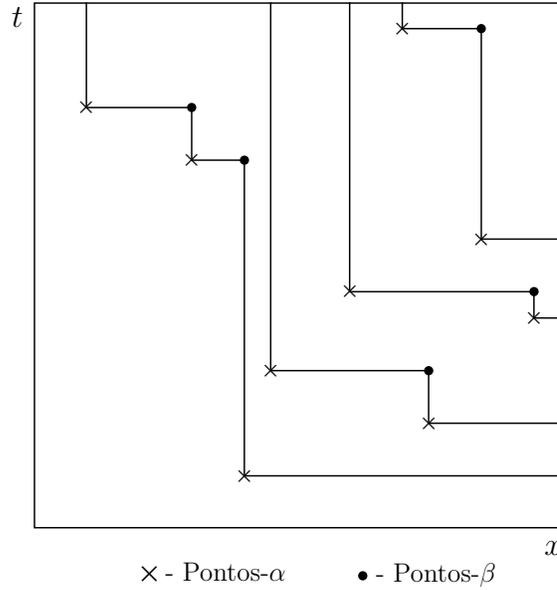


Figura 1.2: Exemplo das trajetórias no espaço tempo do Processo de Hammersley.

Nós também podemos começar o processo de Hammersley em \mathbb{R}^+ a partir do tempo 0 com alguma configuração inicial aleatória de partículas ν , chamaremos este processo de $L_\nu(x, t)$. Neste caso, enxergamos $L(x, t)$ como o processo iniciado da configuração inicial vazia. Assim, também conseguimos encontrar uma representação gráfica para $L_\nu(x, t)$.

Lema 1.13. *O processo de contagem $x \mapsto L_\nu(x, t)$ tem a seguinte representação gráfica:*

$$L_\nu(x, t) = \sup_{0 \leq z \leq x} (\nu(z) + L((z, 0), (x, t))), \quad x, t \geq 0.$$

Onde $L((z, 0), (x, t))$ é o número máximo de pontos de \mathcal{N} em um caminho estritamente NE de $(z, 0)$ à (x, t) , onde \mathcal{N} é tomado como independente de ν .

A demonstração do lema acima fica bem mais clara se vemos que o supremo é atingido quando tomamos um ponto- α em cada trajetória das partículas que passam pelo retângulo $[0, x] \times [0, t]$. A figura 1.2 ajuda a visualizar tais trajetórias. Podemos também redefinir a função L de acordo com o Lema 1.13 e, a partir de agora, podemos ver que a antiga função L pode ser vista como $L(x, t) = L((0, 0), (x, t))$. Também podemos notar que, devido às propriedades de invariância por translações e reescalamentos do processo de Poisson no plano \mathcal{N} , também são válidos os três seguintes Lemas:

Lema 1.14. (Propriedade da troca espaço-tempo) *Defina $\mathcal{L}(x, t) := L(t, x)$. Então*

$$(\mathcal{L}(x, t); x, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (L(x, t); x, t \geq 0).$$

Lema 1.15. (Propriedade do reescalamento) *Fixe $0 < k < \infty$. Então*

$$(L(x, t); x, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (L(kx, t/k); x, t \geq 0).$$

Lema 1.16. *Seja $u \in \mathbb{R}^2$, então*

$$L((0, 0), (x, t)) \stackrel{\mathcal{D}}{=} L(u, u + (x, t)).$$

Em particular, obtemos que a distribuição de $L(x, t)$ depende somente do produto tx .

1.5 O Processo de Hammersley em \mathbb{R}

Definiremos o processo de Hammersley para $-\infty < x < +\infty$ de maneira análoga à seção anterior. Novamente, o processo será a evolução de uma configuração de partículas em \mathbb{R} . Esta evolução se dará de acordo com a Lei 1.1 e, de imediato, podemos ver que sua restrição à qualquer intervalo $[x_0^*, x_1^*]$ evoluirá de acordo com as seguintes Leis:

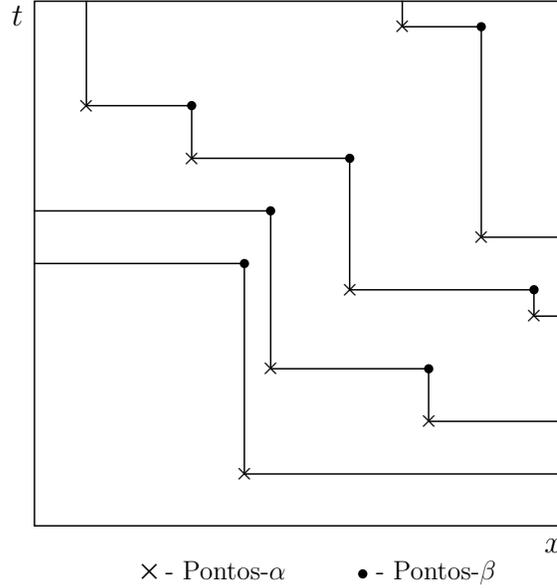


Figura 1.3: Exemplo das trajetórias do Processo de Hammersley em \mathbb{R} para um intervalo arbitrário. Aqui, as partículas escapam pelo lado esquerdo do retângulo pois existem mais pontos- α nesta direção.

Lei 1.2. *Existe um conjunto arbitrário de tempos a partícula mais à esquerda dentro do intervalo é removida da configuração.*

Lei 1.3. *Existe um processo de Poisson (taxa $x_1^* - x_0^*$) de tempos, em que um ponto U é escolhido uniformemente em $[x_0^*, x_1^*]$. Nestes tempos, a partícula mais próxima de U à direita é movida para U , com a criação de uma nova partícula caso seja necessário.*

A figura 1.3 é um exemplo da realização desta evolução de partículas. Não é tão óbvio que tal processo de fato exista, um exemplo simples é que, se começamos com uma configuração de partículas finita, elas seriam instantaneamente “puxadas” para $-\infty$. A existência só é garantida depois de provarmos o próximo resultado.

Lema 1.17. *Suponha que $\nu(x)$ representa uma configuração inicial de partículas em \mathbb{R} que satisfaz*

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{\nu(x)}{x} > 0 \quad \text{q.c.} \quad (1.4)$$

Então o processo definido por

$$L_\nu(x, t) = \sup_{-\infty < z \leq x} (\nu(z) + L((z, 0), (x, t))), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

evolui de acordo com as Leis 1.2 e 1.3.

Observação. Repare que estamos utilizando a mesma notação para representar o processo de Hammersley em \mathbb{R} e em \mathbb{R}_+ . De fato, isto não é um problema, pois os processos são definidos de maneiras

quase idênticas e, além disso, sempre explicitaremos a qual dos dois processos nos referimos. Além disso, estamos supondo que ν é uma condição inicial que satisfaz:

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0; \\ \text{número de partículas em } (0, x], & \text{se } x > 0; \\ -\text{número de partículas em } (x, 0], & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

Demonstração. Segue de imediato da definição que $L_\nu(x, t)$ é uma função crescente em x e em t , até mesmo se L_ν não for finito em todo ponto. Isto implica que, se provarmos que L_ν é finito em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ com probabilidade 1, então L_ν será finito em todo ponto quase certamente. Dito isto, precisamos somente provar que, com probabilidade 1, se tomarmos qualquer ponto $(x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$, $L_\nu(x, t)$ é finito. Em vista da condição (1.4), basta provar que, se $z \rightarrow -\infty$,

$$\frac{L((z, 0), (x, t))}{-z} \rightarrow 0 \quad \text{q.c.} \quad (1.6)$$

De fato, basta mostrar isso porque, se vale (1.6), (1.4) nos diz que $\nu(z)$ decresce muito mais rapidamente do que cresce $L((z, 0), (x, t))$, quando $z \rightarrow -\infty$. Isto nos mostra que o máximo da soma $\nu(z) + L((z, 0), (x, t))$ deve ser atingido em um compacto, e assim ficaria claro que este valor é finito. Agora nos resta, então, mostrar (1.6). Para isso, tome $\varepsilon > 0$ e, usando os Lemas 1.15 e 1.16, junto com o Teorema 1.10, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L((z, 0), (x, t)) \geq -\varepsilon z) &= \mathbb{P}(L((0, 0)(\sqrt{|x-z|t}, \sqrt{|x-z|t})) \geq -\varepsilon z) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}L((0, 0), (\sqrt{|x-z|t}, \sqrt{|x-z|t}))}{-\varepsilon z} \\ &= \frac{\mathbb{E}L((0, 0), (\sqrt{|x-z|t}, \sqrt{|x-z|t}))}{\sqrt{|x-z|t}} \frac{\sqrt{|x-z|t}}{-\varepsilon z}. \end{aligned}$$

Fazendo $z = -n^4$, $n \in \mathbb{N}$ e usando o Lema de Borel-Cantelli, percebemos que, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{L((-n^4, 0)(x, t))}{n^4} \rightarrow 0 \quad \text{q.c.}$$

Agora seja $z < 0$ e defina $n(z) := \max\{n \in \mathbb{N} : -n^4 \geq z\}$ e note que, se $z \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{L((z, 0), (x, t))}{-z} &\leq \frac{L((-n(z) + 1)^4, 0), (x, t))}{-z} \\ &= \frac{L((-n(z) + 1)^4, 0), (x, t))}{(n(z) + 1)^4} \frac{(n(z) + 1)^4}{-z} \\ &\leq \frac{L((-n(z) + 1)^4, 0), (x, t))}{(n(z) + 1)^4} \frac{(n(z) + 1)^4}{n(z)^4} \rightarrow 0 \quad \text{q.c.} \end{aligned}$$

E, assim, a demonstração do Lema está completa. \square

Estando o processo bem definido, pelo menos para um conjunto seletivo de distribuições iniciais, podemos nos perguntar quais delas são, em um certo sentido, estacionárias. Definimos isso precisamente no que se segue, enunciando também um teorema essencial para o resto do trabalho.

Definição 1.18. Suponha que a configuração inicial de partículas no processo de Hammersley em \mathbb{R} tenha uma distribuição μ . Diremos que μ é **estacionária** ou **invariante no tempo** se a distribuição da configuração de partículas se mantém μ para todo tempo $t > 0$. Chamaremos μ de **invariante por translações** se a distribuição não for alterada por mapas da forma $x \mapsto x + a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Por fim, diremos que μ tem **intensidade finita** se $\mathbb{E}|\mu(x)| < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação. Quando dizemos que uma configuração inicial de partículas tem distribuição μ , iremos, por abuso de notação, escrever $\mu(x)$ para denotar a função que representa tal configuração inicial. Ou seja, para quaisquer $x < y \in \mathbb{R}$, escrevemos

$$\mu(y) - \mu(x) = \text{número de partículas no intervalo } (x, y].$$

Dessa forma, a desigualdade $\mathbb{E}|\mu(x)| < \infty$ faz sentido na definição acima.

Definição 1.19. Seja L_ν um processo de Hammersley em \mathbb{R} , definimos $\hat{L}_\nu(x, t)$ como o número de partículas que saem do intervalo espacial (t, ∞) durante o intervalo de tempo $(0, x]$.

Quando definimos \hat{L}_ν como acima, estamos pensando num processo com as mesmas trajetórias da figura 1.3, mas com o espaço e o tempo trocados. Ou seja, na verdade pensamos nessa figura refletida no eixo de $\pi/4$, onde pensamos na configuração de partículas no eixo- y se movendo da direita para a esquerda a medida que t cresce. $\hat{L}_\nu(x, t)$ também pode ser visto como o número de caminhos espaço tempo que cruzam $\{t\} \times (0, x]$. Se denotarmos o processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$ em \mathbb{R} por ν_λ , podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.20. *Seja $\lambda > 0$. Então ν_λ é uma medida ergódica, estacionária, de intensidade finita e invariante por translações para o processo de Hammersley. Além disso, se L_λ é um processo de Hammersley em \mathbb{R} , com distribuição invariante ν_λ , para $-\infty < t < \infty$. Então \hat{L}_λ também é um processo de Hammersley em \mathbb{R} com distribuição invariante $\nu_{1/\lambda}$.*

Este resultado é demonstrado mais tarde no texto, na seção 1.7, entretanto, o que mais usaremos deste teorema é o fato de que, se começarmos com uma distribuição ν_λ em \mathbb{R} , então a distribuição de partículas se mantém ν_λ para qualquer tempo t .

Observação. De fato, vale a volta da primeira afirmação do teorema 1.20. Isto é, se uma medida μ tem intensidade finita, é estacionária e invariante por translações para o processo de Hammersley em \mathbb{R} , então ela é uma mistura das $(\nu_\lambda)_{\lambda>0}$. Este resultado também está parcialmente demonstrado em [1], onde fica claro que deve-se utilizar técnicas presentes em [14]. Apesar de interessante, a demonstração é muito prolongada e foge do escopo do texto, visto que não será utilizada em nenhum momento.

Com os resultados já obtidos, fica um tanto quanto simples de mostrar que a constante c da seção 1.2 ($\gamma(\delta_1)$ na seção 1.3) é finita.

Teorema 1.21. *Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$c = \sup_{t>0} \frac{\mathbb{E}(L(t, t))}{t}. \quad (1.7)$$

Então $c \leq 2$.

Demonstração. A ideia da demonstração é notar que o processo de Hammersley em \mathbb{R}^+ da seção 1.4 pode ser visto como o processo de Hammersley em \mathbb{R} , onde a configuração inicial consiste de um número infinito de partículas logo à esquerda de 0. Mais precisamente, definimos

$$\nu_0(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0 \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e usamos a representação gráfica em (1.5) para definir $L_0 := L_{\nu_0}(x, t)$ para todo $t > 0$. Dessa forma, o supremo em (1.5) é sempre atingido em $z = 0$, e $L_0(x, t) = L(x, t)$ para todo $x, t \geq 0$. Fixe $b > 0$ e seja L_b a versão estacionária do processo de Hammersley em \mathbb{R} com distribuição ν_b . Agora vamos utilizar a técnica do acoplamento, que consiste em enxergar as configurações L_0 e L_b utilizando o mesmo processo de Poisson no plano \mathcal{N} na representação gráfica. Fazemos $\nu_0(0) = \nu_b(0) = 0$ e a representação gráfica (1.5) implica que $L_0(x, t) \leq L_b(x, t)$ para todo $x, t \geq 0$. Sendo assim, temos que, para $x, t \geq 0$

$$\mathbb{E}L_0(x, t) \leq \mathbb{E}L_b(x, t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}L_b(x, 0) + \mathbb{E}(L_b(x, t) - L_b(x, 0)) \\
 &= bx + t/b.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Aonde utilizamos dois fatos na última igualdade. Primeiramente temos que, por definição, $L_b(\cdot, 0)$ é um processo de Poisson de taxa b , logo $\mathbb{E}L_b(x, 0) = bx$. Logo em seguida, vemos que $L_b(x, t) - L_b(x, 0)$ conta quantas partículas entraram no intervalo $(-\infty, x]$ durante o tempo $(0, t]$. Assim, por questões de simetria, podemos usar o Teorema 1.20 e notar que $L_b(x, \cdot)$ é um processo de Poisson de taxa $1/b$, e portanto $\mathbb{E}(L_b(x, t) - L_b(x, 0)) = t/b$. Agora podemos minimizar (1.8) em $b > 0$, ou seja, se $f(b) = bx + t/b$, então

$$\begin{aligned}
 f'(b) &= x - t/b^2, \\
 f''(b) &= (2t)/b^3.
 \end{aligned}$$

Assim sendo, temos que $f''(b) > 0$ se $b > 0$ e, além disso, a única solução positiva para $f'(b) = 0$ é $b = \sqrt{t/x}$, obtendo-se $f(\sqrt{t/x}) = 2\sqrt{tx}$. Utilizando-se dessa minimização junto com (1.8), obtemos $\mathbb{E}L(x, t) = \mathbb{E}L_0(x, t) \leq 2\sqrt{xt}$, e podemos assim utilizar (1.7) junto com o Lema 1.15 para obter que $c \leq 2$. \square

1.6 O Processo de Hammersley com fontes e drenos

Nesta seção, estudaremos uma nova extensão para o processo de Hammersley de interação de partículas. Nesta versão, temos novamente um processo pontual de Poisson \mathcal{N} em \mathbb{R}_+^2 , e, além disso, temos dois processos de Poisson nos eixos $(0, \infty) \times \{0\}$ e $\{0\} \times (0, \infty)$. Chamaremos o processo de Poisson do eixo- x de processo das “fontes”, já o processo de Poisson do eixo- y será chamado de processo dos “drenos”. A razão para tal nomenclatura vem da forma como este processo evolui, que é praticamente idêntica à do processo de Hammersley em \mathbb{R}^+ . A única diferença é que, ao atingirmos um ponto do processo de “drenos”, a partícula imediatamente à direita deste ponto é apagada da configuração. Geometricamente, é como se a partícula tivesse sido sugada por um dreno em 0. A figura 1.4 nos mostra mais claramente como são as trajetórias destas partículas.

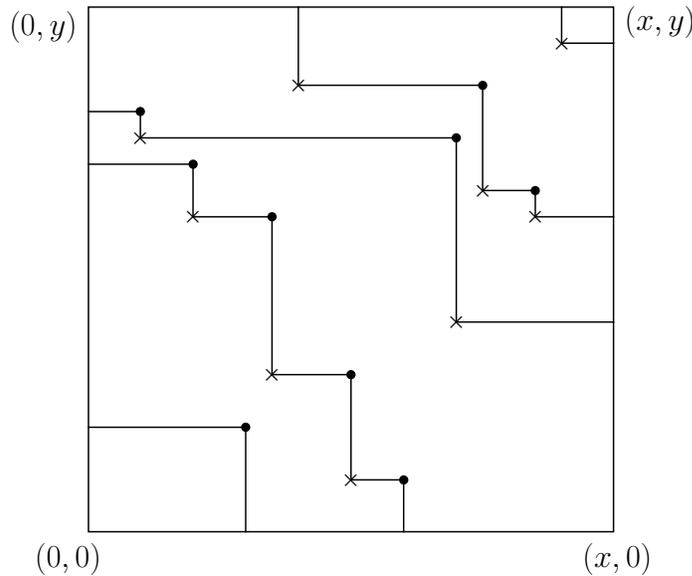


Figura 1.4: Trajetórias das partículas do processo de Hammersley com fontes e drenos. As partículas escapando à esquerda são sugadas pelos drenos no eixo- y e deixam de fazer parte da configuração.

Tal processo de interação de partículas foi estudado mais profundamente em [9], onde foi provado que se $\lambda > 0$ e a intensidade dos processos dos eixos x e y forem λ e $1/\lambda$, respectivamente, e o processo pontual de Poisson \mathcal{N} for de intensidade 1, então o processo como um todo é estacionário, no sentido de que a interseção das trajetórias das partículas com a linha $\mathbb{R}^+ \times \{y\}$ é um processo de Poisson com intensidade λ , para todo $y > 0$. Vamos provar tal resultado mais tarde na seção 1.7. Por um abuso de linguagem temporário, vamos nos referir ao processo descrito acima por estacionário. Mais precisamente, faremos a seguinte definição:

Definição 1.22. Seja $\lambda > 0$. Chamaremos o processo de Hammersley com fontes de intensidade λ , drenos de intensidade $1/\lambda$ de **Processo de Hammersley estacionário com fontes e drenos**

Fixe $\lambda > 0$ e denote por $t \mapsto L_\lambda(\cdot, t)$ o Processo de Hammersley estacionário com fontes e drenos do ponto de vista de um processo de pontos unidimensional, evoluindo no tempo t , aonde λ é a intensidade do processo de fontes. Como a segunda coordenada é quase sempre interpretada como o tempo, a partir de agora a denotaremos por t ao invés de y . Precisaremos também de mais uma definição.

Definição 1.23. Considere um processo com fontes e drenos estacionário como descrito acima. Vamos inserir uma nova partícula na configuração inicial que chamaremos de **partícula de segunda categoria isolada**. Essa nova partícula não tem nenhum efeito sobre a evolução do processo de Hammersley com fontes e drenos e, por isso, podemos nos referir à ela também como **partícula fantasma**. Denotaremos por $X(t)$ a posição de tal partícula no instante t , fixando também $X(0) = 0$. A evolução da posição desta partícula pode ser descrita pela seguinte Lei

Lei 1.4. *Se em algum tempo arbitrário t_0 uma partícula à direita da partícula de segunda categoria, digamos, na posição x_0 , é movida para a sua esquerda, então a partícula de segunda categoria passa a ocupar a posição x_0 .*

Podemos também tentar inverter o papel do espaço e do tempo, considerando um processo de partículas num eixo vertical $[0, t]$ que evolui da esquerda para a direita de acordo com as trajetórias da figura 1.4 no tempo x . Chamaremos a partícula de segunda categoria isolada referente à esse processo de **partícula de segunda categoria dual isolada**, e denotaremos sua posição no tempo x por $X'(x)$.

A figura 1.5 ajuda a entender graficamente o movimento de uma partícula de segunda categoria.

Teorema 1.24. *Seja $t \mapsto L_\lambda(\cdot, t)$ o processo estacionário de fontes e drenos, e seja $X(t)$ a posição de uma partícula de segunda categoria isolada com respeito à L_λ no tempo t , localizada em 0 no tempo $t = 0$. Então, quando $t \rightarrow \infty$,*

$$\frac{X(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{q.c.} \quad (1.9)$$

Este Teorema será demonstrado mais tarde na seção, antes daremos mais algumas definições e provaremos um lema preparatório. Denote por η_t um processo estacionário de Hammersley com fontes de intensidade $\gamma > 0$. Além disso, seja σ_t um outro processo estacionário acoplado à η_t , usando o mesmo processo pontual de Poisson \mathcal{N} de intensidade 1 no primeiro quadrante e um processo de fontes obtidos adicionando um processo de Poisson de intensidade $\delta - \gamma$ ($\delta > \gamma$) ao processo das fontes de η , independentemente de todo o resto. Esta adição de fontes é o que chamamos de **(δ/γ) - “thickening”** das fontes, dessa forma as fontes passam a ter um comportamento de Poisson com intensidade δ . Para que o processo σ seja estacionário, faremos também um **(γ/δ) - “thinning”** no processo dos drenos de η . Fazemos isso removendo cada dreno de η com probabilidade $1 - \gamma/\delta$, de maneira independente para cada dreno. Sendo assim, o processo de drenos de σ terá um comportamento de Poisson com intensidade $1/\delta$ e, portanto, o processo de Hammersley σ_t também será estacionário.

Definição 1.25. Suponha que η e σ sejam processos estacionários como descritos no parágrafo acima. Como σ tem mais fontes e menos drenos que η , existem partículas “extras” em σ com relação à η . Podemos então definir $t \mapsto \xi_t$ como o processo que indica as posições em que as partículas de σ_t diferem das partículas de η_t . Chamaremos ξ de **processo de partículas de segunda categoria** de η com respeito à σ .

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(nx\gamma)^2 + nx\gamma}{n^4 \varepsilon^4} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(x\gamma)^2}{n^2 \varepsilon^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\gamma}{n^3 \varepsilon^4} < \infty.
 \end{aligned}$$

E, logo, pelo lema de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\{|\eta_n(0, nx] - nx\gamma| > n\varepsilon \text{ infinitas vezes}\} = 0,$$

o que implica a convergência quase certa de $\eta_n(0, nx]/n$ para $x\gamma$ quando $n \rightarrow \infty$. Com o mesmo argumento, podemos ver que o número de drenos em $\{0\} \times [0, n]$ dividido por n converge quase certamente para $1/\gamma$ e, assim, obtemos a convergência da equação (1.11). De maneira análoga, obtemos também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n[0, nx]}{n} = \frac{1}{\delta} + x\delta \quad \text{q.c.} \quad (1.12)$$

Juntando (1.10), (1.11) e (1.12), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_\xi(nx, n)}{n} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\gamma} + x(\delta - \gamma) = -(\delta - \gamma) \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} - x \right\} \quad \text{q.c.} \quad (1.13)$$

Esse limite é negativo para $0 < x < 1/\gamma\delta$ e positivo para $x > 1/\gamma\delta$. Podemos também numerar as partículas do processo ξ de acordo com sua posição no tempo 0, assim, para $i > 0$, a partícula i é a i -ésima partícula de segunda categoria à direita da origem no tempo 0. Definimos então $z_i(t)$ como a posição da i -ésima partícula de segunda categoria no tempo $t \geq 0$. Se $i \leq 0$, definimos $z_i(t)$, $i = 0, -1, -2, \dots$, como a partícula de segunda categoria, no tempo t que deixou o eixo y através dos drenos removidos S_0, S_1, \dots , respectivamente, ordenando estes drenos de acordo com sua altura no eixo y . Note que $Z_t = z_0(t)$. Com essas definições, vemos que $F_\xi(x, t)$ tem a representação

$$F_\xi(x, t) = \#\{i > 0 : z_i(t) \leq x\} - \#\{i \leq 0 : z_i(t) > x\}. \quad (1.14)$$

Note que as partículas de segunda categoria $z_i(\cdot)$, $i \leq 0$ começando sua trajetória em um dreno removido em $\{0\} \times [0, t]$ e satisfazendo $z_i(t) \in [0, x]$ não contribuem para (1.14), pois elas dão contribuição para $\eta_t[0, x]$ como uma partícula de η_t em 0, e também contribuem para $\sigma_t[0, x]$ como uma partícula de σ_t no intervalo $(0, x]$. Essas duas contribuições se cancelam em (1.10). Também está claro por (1.14) que, para um t fixo, o fluxo $F_\xi(x, t)$ é não decrescente em x .

A relação (1.14) nos mostra que $F_\xi(Z_n, n) = F_\xi(z_0(n), n) = 0$ para cada instante de tempo $n \in \mathbb{N}$ e, como $F_\xi(nx, n)$ é não decrescente em x para um n fixo, obtemos por (1.13) que, para $\varepsilon > 0$, e n grande, vale

$$\left| \frac{F_\xi(Z_n, n)}{n} + (\delta - \gamma) \left\{ \frac{1}{\gamma\delta} - \frac{Z_n}{n} \right\} \right| < \varepsilon.$$

Como $F_\xi(Z_n, n) = 0$, vale que

$$\left| \frac{1}{\gamma\delta} - \frac{Z_n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{\delta - \gamma},$$

e, portanto, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{n} = \frac{1}{\gamma\delta} \quad \text{q.c.}$$

Mas como Z_t é não decrescente em t , nós também obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{t} = \frac{1}{\gamma\delta} \quad \text{q.c.}$$

□

Definição 1.28. Seja η um processo de Hammersley como na definição 1.22 e considere suas trajetórias de partículas no primeiro quadrante. Definiremos η' como o processo de Hammersley criado quando invertemos os papéis das fontes e drenos, e fazemos o eixo- y positivo correr da esquerda para a direita. Podemos descrevê-lo da seguinte maneira: Toda vez que um ponto- α é encontrado, movemos para este ponto a partícula que está imediatamente acima dele. Por simetria, vemos que η' é um processo de Hammersley assim como η , mas com as intensidades de fontes e drenos trocadas.

Lema 1.29. *Seja η' como na definição acima com drenos (no eixo- x) de intensidade $\gamma > 0$ e fontes (no eixo- y) de intensidade $1/\gamma$. Tome $0 < \delta < \gamma$, adicionamos independentemente um processo pontual de Poisson com intensidade $\delta^{-1} - \gamma^{-1}$ ao processo de fontes (intensidade γ^{-1}), fazemos também um δ/γ -thinning do Processo de drenos (intensidade γ). Defina por σ' este novo processo, e o considere acoplado à η' . Assim, σ' tem fonte de intensidade δ^{-1} e drenos de intensidade δ . Seja Z'_t a posição da partícula de segunda categoria de σ' com respeito à η' para o qual a trajetória deixa o eixo- x pelo menor dreno removido. Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z'_t}{t} = \gamma\delta \quad \text{q.c.}$$

Demonstração. O resultado é consequência direta do Lema 1.27, notando apenas que as intensidades de fontes e drenos está trocada □

Demonstração do Teorema 1.24. Acoplamos o processo $t \mapsto (L_\lambda(\cdot, t), X(t))$ com o processo $t \mapsto (\eta_t, \sigma_t)$, aonde os processos η e σ são definidos como no Lema 1.27, e, além disso, fazemos $L_\lambda(\cdot, t) = \eta_t$ com $\delta > \gamma = \lambda$. Dessa forma, vamos mostrar que $Z_t \leq X(t)$ para todo $t \leq 0$, onde Z_t é definido como no Lema 1.27. No tempo zero, temos que $Z_0 = X(0) = 0$. Como o processo σ é definido a partir de η através de um thinning de drenos e um thickening de fontes, e Z_t sai do eixo $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ no menor dreno removido, temos que esta partícula sairá em tempo maior ou igual que $X(t)$. Note também que, como σ tem mais fontes e menos drenos, temos

$$\eta_t(0, x] \leq \sigma_t(0, x], \quad t \leq 0, x > 0. \quad (1.15)$$

Isto mostra que Z_t se move para a direita mais lentamente que $X(t)$ e, portanto, com probabilidade 1, temos que $Z_t \leq X(t)$. Assim, obtemos pelo Lema 1.27

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{t} = \frac{1}{\gamma\delta} = \frac{1}{\delta\lambda}.$$

Como isto é verdade para qualquer $\delta > \gamma$, conseguimos

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \geq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Para a desigualdade reversa, consideraremos os processos η' e σ' definidos como no Lema 1.29, tomando agora o processo L_λ evoluindo da esquerda para a direita, e fazendo $L_\lambda(t, \cdot) = \eta'_t$. Lembre-se que definimos $X'(x)$ como a partícula de segunda categoria isolada do novo processo. Afirmamos que vale

$$X(X'(x)) \leq x, \quad x \geq 0, \quad (1.16)$$

Pois notamos que a equação (1.16) é equivalente à mostrar que a trajetória de $(X(t), t)$ está sempre acima da trajetória de $(x, X'(x))$. Isto segue do fato que $(X(t), t)$ intersecta a primeira trajetória de partícula em um ponto ao noroeste da interseção de $(x, X'(x))$ com a mesma trajetória e, como $X(t)$ se move

para cima e $X'(x)$ para a direita, conseguimos o resultado desejado. Pelo Lema 1.29 e a mesma linha de raciocínio da primeira desigualdade, também obtemos, com probabilidade 1,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{X'(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Z'_x}{x} = \delta\lambda. \quad (1.17)$$

Para cada $\lambda' > 1/(\delta\lambda)$, podemos usar as equações (1.16) e (1.17) para concluir que, também com probabilidade 1, vale

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t/\lambda')}{t/\lambda'} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(X'(t))}{t/\lambda'} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t/\lambda'} = \lambda'.$$

O que nos leva à conclusão que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq 1/(\delta\lambda), \quad (1.18)$$

E como a equação (1.18) vale para qualquer $\delta < \lambda$, também vale, com probabilidade 1, que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

E, assim, demonstramos o teorema. \square

Corolário 1.30. *Como a partícula de segunda categoria $X'(x)$ tem, no processo com fontes e drenos trocados, o mesmo papel que $X(t)$ tem no processo original, então ela deve satisfazer*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{X'(x)}{x} = \lambda^2.$$

O seguinte lema nos permitirá mostrar que o Teorema 1.24 implica na convergência local do processo de Hamerlsey para um processo de Poisson, além da relação $c = 2$, onde c é a constante definida pelo Teorema 1.5.

Lema 1.31. *Seja L_λ o processo de Hammersley estacionário como no Teorema 1.24. Defina L_λ^{-y} como o processo obtido através da remoção de todos os drenos de L_λ , e L_λ^{-x} como o processo obtido através da remoção de todas as fontes de L_λ . Acoplaremos L_λ^{-y} e L_λ usando o mesmo processo pontual de Poisson no interior de \mathbb{R}_+^2 e o mesmo processo de drenos e, de maneira similar, acoplamos L_λ^{-x} e L_λ usando o mesmo processo pontual de Poisson no interior de \mathbb{R}_+^2 e o mesmo processo de fontes. Então:*

- (i) *Os processos L_λ e L_λ^{-y} tem as mesmas trajetórias de partículas abaixo da trajetória $t \mapsto (X(t), t)$ da partícula de segunda categoria isolada $X(t)$ para o processo $t \mapsto L_\lambda(\cdot, t)$.*
- (ii) *Os processos L_λ e L_λ^{-x} tem as mesmas trajetórias de partículas acima da trajetória $t \mapsto (t, X'(t))$ da partícula de segunda categoria isolada $X'(t)$ para o processo $t \mapsto L_\lambda(t, \cdot)$, evoluindo da esquerda para a direita.*

Demonstração. Primeiramente, já deve estar clara a equivalência entre (i) e (ii) pelo simples fato de que podemos considerar o processo correndo da esquerda para a direita com fontes e drenos trocando de papel. Dito isto, vamos provar somente (i).

Remova somente o primeiro dreno de L_λ e suponha que este dreno está numa altura y_1 do eixo- y . Então, a trajetória da partícula de L_λ que sai do eixo- y em $(0, y_1)$ é trocada para uma trajetória viajando para cima pelo ponto- β com segunda coordenada y_1 à direita de $(0, y_1)$ até atingir a próxima trajetória do processo original. Nessa hora, a trajetória do processo mudado (por omitir somente um dreno) viajará para a esquerda, e a próxima trajetória continuará para cima (ao invés de esquerda) pelo ponto- β mais próximo à direita, e assim por diante. Como as discrepâncias nas trajetórias se dão justamente na trajetória de $X(t)$, temos que abaixo de $(X(t), t)$ as trajetórias dos dois processos são idênticas.

Podemos agora usar o mesmo argumento para remover os drenos um por um, nunca mudando as trajetórias do novo processo abaixo de $(X(t), t)$, e, assim, o Lema está demonstrado. \square

Antes do último resultado da seção, precisaremos de apenas mais uma definição.

Definição 1.32. Na versão estacionária do processo de Hammersley com fontes e drenos, um caminho **fracamente NE** entre $(0,0)$ e (x,t) é um caminho análogo ao estritamente NE da definição 1.4, mas dessa vez o caminho pode pegar pontos do processo de fontes no eixo- x ou do processo de drenos do eixo- y , antes de começar um caminho estritamente NE, tomando pontos do interior de \mathbb{R}_2^+ . O tamanho de tal caminho é definido como o número de pontos dos processos de Poisson pelos quais ele passa.

Note que o tamanho do maior caminho fracamente NE de $(0,0)$ até (x,t) no processo com fontes e drenos é exatamente o número de trajetórias de partículas intersectando $[0,x] \times [0,t]$, assim como no caso do processo de Hammersley sem fontes nem drenos (nesse caso, somente caminhos estritamente NE são possíveis).

Corolário 1.33. *Seja L o processo de Hammersley em \mathbb{R}^+ da seção 1.4, ou seja, começando com a configuração vazia nos eixos, então para cada $a > 0$ fixo, a configuração de partículas aleatórias com processo de contagem*

$$y \mapsto L(t+y, at) - L(t, at), \quad y \geq -t,$$

converge em distribuição, quando $t \rightarrow \infty$, para um processo de Poisson homogêneo em \mathbb{R} de intensidade \sqrt{a} .

Demonstração. Fixe $a' > a$ e defina $\lambda = \sqrt{a'}$. Tome L_λ^{-y} como o processo de Hammersley começando com uma intensidade de fontes λ e sem drenos. Então, pelo teorema 1.24, sabemos que, quando $t \rightarrow \infty$, $X(at) \sim (a/a')t$ e, portanto, se fixamos qualquer intervalo finito $[a, b]$, temos pelo lema 1.31, que para t grande, tal intervalo se encontra à direita da partícula de segunda categoria no tempo t e, portanto, o processo de contagem $y \mapsto L_\lambda^{-y}(t+y, at) - L_\lambda^{-y}(t, at)$ converge em distribuição para um processo de Poisson com intensidade λ .

Se acoplarmos o processo de Hammersley original L com L_λ^{-y} através do mesmo processo de pontos de Poisson no plano, vemos, para qualquer corte horizontal que fizermos, num tempo t , digamos, que o conjunto de interseções das trajetórias de L com esse corte está contido no conjunto das interseções de L_λ^{-y} , já que este último tem fontes no eixo- x e nenhum dreno no eixo- y . Sendo assim, para uma coleção finita de intervalos $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, k$ dois a dois disjuntos e números não-negativos $\theta_1, \dots, \theta_k$, obtemos

$$\mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{L(t+b_i, at) - L(t+a_i, at)\} \right\} \geq \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{L_\lambda^{-y}(t+b_i, at) - L_\lambda^{-y}(t+a_i, at)\} \right\}.$$

Mas, pela discussão no início da demonstração, o lado direito da desigualdade acima converge para

$$\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \lambda (b_i - a_i) (1 - e^{-\theta_i}) \right\},$$

e assim obtemos

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{L(t+b_i, at) - L(t+a_i, at)\} \right\} \geq e^{-\sum_{i=1}^k \lambda (b_i - a_i) (1 - e^{-\theta_i})}. \quad (1.19)$$

Para obter a desigualdade na outra direção, basta utilizar um argumento similar, comparando o processo L com o processo L_λ^{-x} do lema 1.31, com drenos de intensidade $1/\lambda = 1/\sqrt{a'}$ no eixo- y (que podem ser vistas como fontes no processo evoluindo da esquerda para a direita) e sem fontes no eixo- x . Dessa vez, o conjunto de interseções de trajetórias de L com qualquer corte horizontal contém o conjunto das interseções das trajetórias de L_λ^{-x} e, procedendo da mesma maneira, encontramos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{L(t+b_i, at) - L(t+a_i, at)\} \right\} \leq e^{-\sum_{i=1}^k \lambda (b_i - a_i) (1 - e^{-\theta_i})}. \quad (1.20)$$

Combinando (1.19) e (1.20), obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{L(t + b_i, at) - L(t + a_i, at)\} \right\} = e^{-\sum_{i=1}^k \lambda(b_i - a_i)(1 - e^{-\theta_i})}.$$

Agora podemos lembrar que a função geradora de momentos determina unicamente a distribuição de uma variável aleatória e, portanto, o resultado está demonstrado. \square

Corolário 1.34. *Nas mesmas condições do corolário anterior, vale*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(L(t, t))/t = 2.$$

Demonstração. Note que já provamos $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(L(t, t))/t \leq 2$ no teorema 1.21, resta então provar que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(L(t, t))/t \geq 2.$$

Para isso, primeiro notamos que $L(t, t)$ é o número de interseções das trajetórias de partículas com $[0, t] \times \{t\}$. Tome a partição $0, t/k, 2t/k, \dots, t$ do intervalo $[0, t]$, para algum $k > 0$. Assim, as interseções das trajetórias de partículas de L com o segmento $[(i-1)t/k, it/k] \times \{t\}$ contém as interseções do mesmo segmento com as trajetórias do processo $L_{\lambda_i}^{-x}$ com drenos de intensidade $1/\lambda_i = 1/\sqrt{a_i}$, $a_i < k/i$ no eixo- y , mas sem fontes no eixo- x .

Por outro lado, obtemos do teorema 1.24 e do lema 1.31, que, se $X(t)$ é a partícula de segunda categoria isolada para L_{λ_i} , então $X(t) \sim t/\lambda_i^2 = t/a_i > ti/k$ e, portanto, quando $t \rightarrow \infty$, os cruzamentos de $L_{\lambda_i}^{-x}$ com o segmento $[(i-1)t/k, it/k] \times \{t\}$ pertencem à parte estacionária do processo. Temos assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E} \{L_{\lambda_i}^{-x}(it/k, t) - L_{\lambda_i}^{-x}((i-1)t/k, t)\} = \frac{\lambda_i}{k},$$

pois o conjunto de funções $\{t^{-1}L(\gamma t, t), \gamma \in (0, i/k], t \geq 0\}$ é uniformemente integrável. Assim, podemos somar todos os intervalos da partição para obter

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(L(t, t))/t \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sqrt{a_i}.$$

Fazendo $a_i \uparrow k/i$, obtemos, ainda para um k fixo,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(L(t, t))/t \geq \sum_{i=1}^k 1/\sqrt{ik} = 2(1 + O(1/k)). \quad (1.21)$$

Aonde a última igualdade pode ser vista por

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{ik}} &= \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \int_1^{k-1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \int_{1/4}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = 2 + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Assim, o corolário está provado quando fazemos $k \rightarrow \infty$ na relação (1.21). \square

1.7 O Teorema de Burke para o processo de Hammersley

O objetivo desta seção é mostrar que, na versão estacionária do processo de Hammersley com fontes e drenos, os pontos- β herdam a distribuição de Poisson dos pontos- α . Esta pode ser considerada uma versão do teorema de Burke para o processo de Hammersley. Este resultado foi demonstrado por Eric Cator e Piet Groeneboom em [5] e é totalmente baseado em propriedades de reversibilidade do tempo e não é diferente para o nosso caso.

Teorema 1.35. (Teorema de Burke para o processo de Hammersley) *Seja L_λ um processo de Hammersley estacionário em $[0, T_1] \times [0, T_2]$, com intensidade de fontes igual à λ . Sejam L_λ^β o processo pontual de pontos- β em $[0, T_1] \times [0, T_2]$, L_λ^{in} como o número de cruzamentos dos caminhos espaço-tempo com o lado do quadrado dado por $\{T_1\} \times [0, T_2]$ e L_λ^{out} como o número de cruzamentos dos caminhos espaço-tempo com o lado do quadrado $[0, T_1] \times \{T_2\}$. Então L_λ^β é um processo pontual de Poisson homogêneo de intensidade 1, L_λ^{in} é um processo de Poisson homogêneo de intensidade $1/\lambda$ e L_λ^{out} é um processo de Poisson homogêneo de intensidade λ . Além disso, todos os três processos são independentes.*

Demonstração. Definimos o espaço de estados E como todas as possíveis configurações finitas de pontos em $[0, T_1]$, então $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, aonde

$$E_n := \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq T_1\} \quad (n \geq 1),$$

e $E_0 = \{\emptyset\}$, a configuração vazia. Consideramos cada E_n com sua topologia usual, o que torna E um espaço localmente compacto. Definiremos também um processo de Markov em $(X_t)_{0 \leq t \leq T_2}$ em E de maneira que X_t é a configuração de pontos do processo de Hammersley L_λ na linha $[0, T_1] \times \{t\}$. Em particular, temos que X_0 é distribuída de acordo com um processo de Poisson de intensidade λ . Veremos que o gerador G deste processo de Markov é dado por

$$Gf(x) = \int_0^{T_1} f(\mathcal{R}_t x) dt + \frac{1}{\lambda} f(\mathcal{L}x) - \left(\frac{1}{\lambda} + T_1 \right) f(x),$$

aonde $f \in C_0(E)$, \mathcal{L} corresponde à uma saída de partícula à esquerda e \mathcal{R}_t corresponde ao surgimento de uma nova partícula de Poisson no ponto t , mais precisamente,

$$\mathcal{L} : E \mapsto E : \mathcal{L}x = \begin{cases} (x_2, \dots, x_n), & \text{se } x \in E_n \quad (n \geq 2), \\ \emptyset, & \text{se } x \in E_0 \cup E_1, \end{cases}$$

e, para $0 < t < T_1$,

$$\mathcal{R}_t : E \mapsto E : \mathcal{R}_t x = \begin{cases} (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n), & \text{se } x_{i-1} < t \leq x_i \quad (x \in E_n), \\ (x_1, \dots, x_n, t), & \text{se } x_n < t \quad (x \in E_n). \end{cases}$$

Aonde estamos utilizando a convenção de que $x_0 = 0$. Para provar que G é de fato o gerador do processo, nós fixamos $f \in C_0(E)$ e $x \in E$, e vamos olhar os operadores de transição, dados por

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_0 = x) \quad (t \geq 0).$$

Vamos considerar o processo correndo em um pequeno intervalo de tempo $[0, h]$, definindo A_h como o número de pontos de Poisson no retângulo $[0, T_1] \times [0, h]$ e S_h como o número de drenos em $\{0\} \times [0, h]$. Então

$$\begin{aligned} P_h f(x) &= f(x) \mathbb{P}(A_h = 0 \text{ e } S_h = 0) \\ &+ \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(\mathcal{R}_t x) dt \cdot \mathbb{P}(A_h = 1 \text{ e } S_h = 0) \\ &+ f(\mathcal{L}x) \mathbb{P}(A_h = 0 \text{ e } S_h = 1) + O(h^2) \end{aligned}$$

$$= f(x) \left(1 - T_1 h - \frac{h}{\lambda} \right) + h \int_0^{T_1} f(\mathcal{R}_t x) dt + \frac{h}{\lambda} f(\mathcal{L}x) + O(h^2).$$

Isto mostra que, para toda $f \in C_0(E)$ e $x \in E$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P_t f(x) = Gf(x).$$

Como X_t é um processo de Markov homogêneo, temos que, para $t \in [0, T_2]$,

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} P_s f(x) = G P_t f(x). \quad (1.22)$$

Agora note que G é um operador contínuo em $C_0(E)$, assim e^{tG} existe e também é um operador contínuo, veja que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} e^{sG} f(x) = G e^{tG} f(x),$$

nos mostra, junto com (1.22) e a unicidade de soluções para equações diferenciais, que

$$P_t f(x) = e^{tG} f(x).$$

A ideia chave para provar o teorema é considerar o processo com tempo invertido

$$\tilde{X}_s := \lim_{s' \downarrow s} X_{T_2 - s'} \quad (\tilde{X}_{T_2} := X_0).$$

Tomamos o limite à esquerda do processo original X para garantir a propriedade càdlàg de $(\tilde{X}_s)_{0 \leq s \leq T_2}$. Além disso, dado X_t , o passado do processo X é independente do futuro, e disso segue que \tilde{X} também é um processo de Markov, possivelmente não homogêneo. Porém, se definirmos μ como a medida de probabilidade em E induzida por um processo de Poisson de intensidade λ , então $X_0 \sim \mu$ e μ é uma medida estacionária para o gerador G , o que implica que \tilde{X} também é estacionário e homogêneo (a estacionariedade de X será provada no próximo resultado, o Lema 1.36, mas, por hora, vamos considerá-la como um fato sabido). Considere os operadores de transição de \tilde{X} , dados por

$$\tilde{P}_t f(x) = \mathbb{E}(f(\tilde{X}_t) | \tilde{X}_0 = x) \quad (t \geq 0).$$

Então, para $f, g \in C_0(E)$ e $h > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{t+h})g(X_t)) &= \mathbb{E}(g(X_t)\mathbb{E}(f(X_{t+h})|X_t)) \\ &= \mathbb{E}(P_h f(X_t)g(X_t)) \\ &= \int_E P_h f(x)g(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{t+h})g(X_t)) &= \mathbb{E}(f(X_{t+h})\mathbb{E}(g(X_t)|X_{t+h})) \\ &= \mathbb{E}(f(X_{t+h})\tilde{P}_h g(X_{t+h})) \\ &= \int_E f(x)\tilde{P}_h g(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

Acima usamos o fato de que o processo X é estacionário e, portanto X_t e X_{t+h} têm a mesma distribuição marginal μ . Combinando estes resultados, obtemos

$$\int_E P_h f(x)g(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\tilde{P}_h g(x)\mu(dx). \quad (1.23)$$

No Lema 1.36 calculamos o operador G^* , definido pela equação

$$\int_E Gf(x)g(x)\mu(dx) = \int_E f(y)G^*g(y)\mu(dy) \quad \text{para qualquer } f, g \in C_0(E). \quad (1.24)$$

Aonde mostramos a forma explícita de G^* , dada por

$$G^*g(y) = \int_0^{T_1} g(\mathcal{L}_s y) ds + \frac{1}{\lambda} g(\mathcal{R}y) - \left(\frac{1}{\lambda} + T_1 \right) g(y), \quad (1.25)$$

Aonde, de maneira análoga à antes, definimos $\mathcal{R} : E \mapsto E$ como a saída de uma partícula à direita e $\mathcal{L}_s : E \mapsto E$ como uma nova partícula em s , de modo que a partícula diretamente à esquerda de s ocupa agora esta posição. Usaremos a equação (1.25) várias vezes, mas, primeiramente, veja que se $g \in L^\infty(\mu)$,

$$\|G^*g\|_\infty \leq 2 \left(\frac{1}{\lambda} + T_1 \right) \|g\|_\infty,$$

o que mostra que G é um operador contínuo em $L^1(\mu)$, além de ser contínuo também em $C_0(E)$. Como $P_t = e^{tG}$, P_t também é um operador contínuo em $L^1(\mu)$. Assim sendo, (1.23) mostra que $\tilde{P}_t = P_t^* = e^{tG^*}$ e, usando o mesmo argumento de antes, vemos que o gerador do processo revertido \tilde{X} é G^* .

Definiremos então um outro processo de Hammersley revertido X^V da seguinte forma: tomamos o processo de Hammersley estacionário original e refletimos todas as trajetórias de partículas com respeito ao segmento $\{\frac{1}{2}T_1\} \times [0, T_2]$, chamamos isso de **reflexão vertical**. Assim, todas as partículas agora se movem para a direita e saem pelo lado direito do retângulo. Podemos verificar que o gerador de X^V é G^* pelo mesmo método que fizemos para X , e X^V também começa com uma distribuição de Poisson com intensidade λ , e, assim, vemos que X^V tem a mesma distribuição de \tilde{X} . Para visualizar as trajetórias das partículas de \tilde{X} , podemos fazer uma reflexão do processo de Hammersley estacionário original com respeito ao segmento $[0, T_1] \times \{\frac{1}{2}T_2\}$, chamamos isso de **reflexão horizontal**.

Como em X^V todos os pulos de partículas em $(0, T_1) \times (0, T_2)$ são feitos para pontos- α verticalmente refletidos, e em \tilde{X} os mesmos pulos são feitos para pontos- β horizontalmente refletidos, mostramos que os pontos- β são distribuídos como um processo pontual de Poisson de intensidade 1. Além disso, no processo X^V , as trajetórias escapam do lado esquerdo do triângulo de acordo com um processo de Poisson de parâmetro $1/\lambda$, e isso corresponde exatamente à L_λ^{in} horizontalmente refletido. Já o processo L_λ^{out} horizontalmente refletido corresponde às fontes de X^V e é, dessa forma, um processo de Poisson de intensidade λ . Finalmente, vemos que a independência dos 3 processos é válida pela construção de X^V . Assim terminamos a demonstração do teorema. \square

Agora provaremos o Lema que garante a estacionariedade da medida μ (como descrita acima) no processo X .

Lema 1.36. *Sejam μ e G como na demonstração do Lema acima, então μ é uma medida estacionária com respeito ao processo X e existe um operador G^* em $C_0(E)$ que satisfaz*

$$\int_E Gf(x)g(x)\mu(dx) = \int_E f(y)G^*g(y)\mu(dy),$$

para todas $f, g \in C_0(E)$. Além disso, G^* é escrito explicitamente como

$$G^*g(y) = \int_0^{T_1} g(\mathcal{L}_s y) ds + \frac{1}{\lambda} g(\mathcal{R}y) - \left(\frac{1}{\lambda} + T_1 \right) g(y),$$

Onde \mathcal{R} é uma saída de ponto para a direita e \mathcal{L}_s é a inserção de um novo ponto em s , de forma que o ponto diretamente à esquerda de s se move para a posição s , isto é

$$\mathcal{R} : E \mapsto E : \mathcal{R}x = \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n-1}), & \text{se } x \in E_n (n \geq 2), \\ \emptyset, & \text{se } x \in E_0 \cup E_1, \end{cases}$$

e, para $0 < s < T_1$,

$$\mathcal{L}_s : E \mapsto E : \mathcal{L}_s x = \begin{cases} (x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n), & \text{se } x_i \leq s < x_{i+1} \ (x \in E_n) \\ (s, x_1, \dots, x_n), & \text{se } s < x_1 \ (x \in E_n). \end{cases}$$

Demonstração. Lembre-se que

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n,$$

onde $E_0 = \emptyset$ e

$$E_n = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq T_1\}.$$

E que μ é a medida induzida em E por um processo de Poisson de intensidade λ . Denotando μ_n como a restrição de μ à E_n e notando que $m(E_n) = T_1^n/n!$ (aonde m denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n), vemos que $\mu_n(dx) = \lambda^n e^{-\lambda T_1} dx$. Lembre-se também que o gerador $G : C_0(E) \mapsto C_0(E)$ foi calculado explicitamente, e é dado por

$$Gf(x) = \int_0^{T_1} f(\mathcal{R}_t x) dt + \frac{1}{\lambda} f(\mathcal{L}x) - \left(\frac{1}{\lambda} + T_1\right) f(x).$$

Defina $G_+ f := Gf + (1/\lambda + T_1)f$, vamos então calcular o dual de G_+ . Tome $f, g \in C_0(E)$ e veja que

$$\begin{aligned} \int_E G_+ f(x) g(x) \mu(dx) &= e^{-\lambda T_1} G_+ f(\emptyset) g(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} G_+ f(x) g(x) \mu_n(dx) \\ &= e^{-\lambda T_1} \frac{1}{\lambda} f(\emptyset) g(\emptyset) + e^{-\lambda T_1} \int_0^{T_1} f(t) g(\emptyset) dt \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda^n \int_{E_n} \int_0^{T_1} f(\mathcal{R}_t x) g(x) dt dx + \lambda^{n-1} \int_{E_n} f(\mathcal{L}x) g(x) dx \right] \\ &= e^{-\lambda T_1} \frac{1}{\lambda} f(\emptyset) g(\emptyset) + e^{-\lambda T_1} \int_0^{T_1} f(t) g(\emptyset) dt \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \lambda^n \int_{\{x \in E_n, x_{i-1} < t \leq x_i\}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) g(x) dx dt \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{\{x \in E_n, t > x_n\}} f(x_1, \dots, x_n, t) g(x) dx dt \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_{E_n} f(x_2, \dots, x_n) g(x) dx. \end{aligned}$$

Agora fazemos uma mudança de variáveis em cada integral de forma que consigamos $f(y)$ em cada uma:

$$\begin{aligned} \int_E G_+ f(x) g(x) \mu(dx) &= e^{-\lambda T_1} \frac{1}{\lambda} f(\emptyset) g(\emptyset) + e^{-\lambda T_1} \int_0^{T_1} f(y) g(\emptyset) dy \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \lambda^n \int_{\{y \in E_n, y_i \leq s < y_{i+1}\}} f(y) g(y_1, \dots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \dots, y_n) dy ds \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{E_{n+1}} f(y) g(y_1, \dots, y_n) dy \\ &\quad + e^{-\lambda T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_{\{y \in E_{n-1}, s \leq y_1\}} f(y) g(s, y_1, \dots, y_{n-1}) dy ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\lambda} f(\emptyset) g(\emptyset) \mu_0(E_0) + \frac{1}{\lambda} \int_{E_1} f(y) g(\emptyset) \mu_1(dx) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \int_{\{y \in E_n, y_i \leq s < y_{i+1}\}} f(y) g(y_1, \dots, y_{i-1}, s, y_{i+1}, \dots, y_n) \mu_n(dy) ds \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{y \in E_n, s \leq y_1\}} f(y) g(s, y_1, \dots, y_n) \mu_n(dy) ds \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{E_n} f(y) g(y_1, \dots, y_{n-1}) \mu_n(dy) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f(y) \left(\int_0^{T_1} g(\mathcal{L}_s y) ds \right) \mu_n(dy) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{E_n} f(y) g(\mathcal{R}y) \mu_n(dy) \\
 &= \int_E f(y) \left(\int_0^{T_1} g(\mathcal{L}_s y) ds + \frac{1}{\lambda} g(\mathcal{R}y) \right) \mu(dy).
 \end{aligned}$$

A última conta, junto com o fato de que $G^*g = G_+^*g - (1/\lambda + T_1)g$ mostram que G^* é explicitado por

$$G^*g(y) = \int_0^{T_1} g(\mathcal{L}_s y) ds + \frac{1}{\lambda} g(\mathcal{R}y) - \left(\frac{1}{\lambda} + T_1 \right) g(y).$$

Com isto, fica bem estabelecido que vale. para $f, g \in C_0(E)$,

$$\int_E Gf(x)g(x)\mu(dx) = \int_E f(x)G^*g(x)\mu(dx),$$

e, tomando $g \equiv 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_E Gf(x)\mu(dx) &= \int_E f(x)G^*1\mu(dx) \\
 &= \int_E f(x) \left(\int_0^{T_1} ds + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - T_1 \right) \mu(dx) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

O que mostra, finalmente, que μ é uma medida estacionária com respeito ao processo X . \square

Para finalizar o capítulo, voltaremos à um teorema da seção 1.5 cuja demonstração omitimos.

Demonstração do Teorema 1.20. Considere \mathbf{N} um processo de Hammersley em \mathbb{R} começando com uma configuração de fontes ν_λ no tempo $t = 0$. Agora tome um processo de Poisson \mathcal{P} em $[0, +\infty)$, com distribuição $\nu_{1/\lambda}$. Definiremos uma sequência de processos de Hammersley com fontes e drenos acoplados à \mathbf{N} , aonde os drenos são distribuídos sempre de acordo com o processo \mathcal{P} . Mais precisamente, definiremos

$L_\lambda^n :=$ O processo de Hammersley com fontes e drenos que começa no ponto $(-n, 0)$, tem suas fontes distribuídas de acordo com ν_λ e seus drenos distribuídos de acordo com \mathcal{P} no eixo $\{-n\} \times \mathbb{R}_+$.

Seja $t > 0$ e fixe um ponto $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Vemos que, se n é suficientemente grande, o maior caminho fracamente NE de L_λ^n ligando $(-n, 0)$ à (x, t) será, com probabilidade 1, um caminho que passa por fontes e não por drenos. Como os processos estão acoplados, temos que $L_\lambda^n(x, t) = \mathbf{N}(x, t)$. Sendo assim, para quaisquer $t > 0$, coleção arbitrária de intervalos $[a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, k$) dois a dois disjuntos e constantes não-negativas $\theta_1, \dots, \theta_k$, podemos utilizar o Teorema de Convergência Dominada para obter

$$\mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{ \mathbf{N}(b_i, t) - \mathbf{N}(a_i, t) \} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \theta_i \{ L_\lambda^n(b_i, t) - L_\lambda^n(a_i, t) \} \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \lambda(b_i - a_i)(1 - e^{-\theta_i}) \right\}.$$

Isto nos mostra que, para qualquer $t > 0$, $\mathbf{N}(\cdot, t)$ tem ν_λ , pois esta é uma medida estacionária para L_λ^n e, portanto, concluímos que $\mathbf{N}(\cdot, t) \sim \nu_\lambda$ e, assim, mostramos a estacionariedade de ν_λ para \mathbf{N} . O argumento para $\tilde{\mathbf{N}}$ é muito similar ao apresentado aqui, dessa vez utilizando-se do fato de que o processo L_λ^{in} (ver o Teorema de Burke) em qualquer faixa vertical da forma $\{x\} \times \mathbb{R}_+$ tem distribuição $\nu_{1/\lambda}$. \square

Capítulo 2

Assíntotas de Raiz Cúbica para o Processo de Hammersley

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos mais ao fundo a versão do processo de Hammersley com fontes Poisson no eixo- x e drenos Poisson no eixo- y , assim como na seção 1.6. Conseguiremos alguns resultados relacionando a variância de $L_1(t, t)$ com a esperança de partículas de Segunda Categoria. Provaremos também que $L(t, t)$ tem ordem $t^{2/3}$.

2.2 Variância do Fluxo

Antes de alguns resultados, precisaremos relembrar nossa definição de partícula de segunda categoria isolada e partícula de segunda categoria dual isolada (Definição 1.23). Quando considerarmos um processo de Hammersley estacionário como da seção 1.6, com intensidade de fontes e drenos λ e $1/\lambda$, respectivamente, escreveremos $X_\lambda(t)$ e $X'_\lambda(t)$ para denotar as posições das partículas de segunda categoria normal e dual, respectivamente. Escreveremos também $X(t)$ e $X'(t)$ para o caso $\lambda = 1$.

A figura 1.5 do capítulo anterior ajuda a visualizar o comportamento de $X_\lambda(t)$, e, dessa forma, vemos que a trajetória de $X'_\lambda(t)$ é análoga a menos da direção inicial de deslocamento. Fixe $x, t > 0$ e considere o processo $L_\lambda(x, t)$ como na definição 1.22.

Teorema 2.1.

$$\text{Var}(L_\lambda(x, t)) = -\lambda x + \frac{t}{\lambda} + 2\lambda \mathbb{E}(x - X_\lambda(t))_+.$$

Demonstração. Para termos uma notação clara, vamos usar os 4 pontos cardeais $\mathbf{N}, \mathbf{S}, \mathbf{L}, \mathbf{O}$ para denotar o número de cruzamentos de partículas nos 4 lados do retângulo $[0, x] \times [0, t]$. Dessa forma, $L_\lambda(x, t) = \mathbf{N} + \mathbf{O}$. Temos, claramente, que $\mathbf{N} + \mathbf{O} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$, e também sabemos, usando o Teorema de Burke para o Processo de Hammersley, que o processo é reversível, o que nos leva a concluir que \mathbf{N} e \mathbf{L} são independentes, assim como \mathbf{S} e \mathbf{O} . Com isso, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Var}(L_\lambda(x, t)) &= \text{Var}(\mathbf{O} + \mathbf{N}) \\ &= \text{Var}(\mathbf{O}) + \text{Var}(\mathbf{N}) + 2 \text{Cov}(\mathbf{O}, \mathbf{N}) \\ &= \text{Var}(\mathbf{O}) + \text{Var}(\mathbf{N}) + 2 \text{Cov}(\mathbf{S} + \mathbf{L} - \mathbf{N}, \mathbf{N}) \\ &= \text{Var}(\mathbf{O}) - \text{Var}(\mathbf{N}) + 2 \text{Cov}(\mathbf{S}, \mathbf{N}) \\ &= \frac{t}{\lambda} - \lambda x + 2 \text{Cov}(\mathbf{S}, \mathbf{N}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Logo, resta analisar o termo $\text{Cov}(\mathbf{S}, \mathbf{N})$. Mas podemos fazer isso variando a intensidade de fontes apropriadamente. Tome $\varepsilon > 0$ e considere o processo com uma intensidade de fonte $\lambda + \varepsilon$. Os drenos continuam sendo um processo de Poisson de intensidade $1/\lambda$. Denotaremos a esperança com respeito a esse novo processo por \mathbb{E}_ε . Defina:

$$a_n = \mathbb{E}_\varepsilon(\mathbf{N} | \mathbf{S} = n).$$

Note que a_n não depende de ε , já que condicionamos no número de fontes em $[0, x]$ e as fontes fora deste intervalo não influenciam em \mathbf{N} . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_\varepsilon(\mathbf{N}) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x(\lambda + \varepsilon))^n}{n!} e^{-x(\lambda + \varepsilon)} a_n \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^n}{n!} e^{-x\lambda} a_n \cdot n - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^n}{n!} e^{-x\lambda} a_n \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(\mathbf{NS}) - x\mathbb{E}(\mathbf{N}). \end{aligned}$$

Esta conta, junto com o fato de que $E(S) = \lambda x$, mostra que:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{N}, \mathbf{S}) &= \mathbb{E}(\mathbf{NS}) - \mathbb{E}(\mathbf{N})\mathbb{E}(\mathbf{S}) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}_\varepsilon(\mathbf{N}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sendo assim, resta calcular esta derivada, e vamos fazer isto da seguinte maneira. Fixe, independentemente, um processo de Poisson de intensidade 1 em $(0, \infty)^2$, um processo de Poisson de fontes de intensidade λ no eixo x e um processo de Poisson de drenos de intensidade $1/\lambda$ no eixo t . Fixados esses processos, adicionamos um processo de Poisson independente e de intensidade ε ao processo das fontes. Defina \mathbf{N}_ε como o número de cruzamentos no lado Norte do quadrado (i.e., $(0, x) \times t$) do processo com as fontes adicionadas.

Imagine que, assim como na definição 1.23, inserimos uma nova fonte, mas dessa vez na posição $(z, 0)$, denotaremos a posição no tempo t da partícula de segunda categoria criada por essa nova fonte de $X_\lambda(t; z)$. Veja que, se adicionarmos uma fonte extra em $(z, 0)$, então \mathbf{N} aumenta por 1 se e somente se $X_\lambda(t; z) < x$. Isto significa que:

$$\mathbb{E}(\mathbf{N}_\varepsilon) = \mathbb{E}(\mathbf{N}_0) + \varepsilon \int_0^x \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_\lambda(t; z) < x\}}) dz + O(\varepsilon^2) \tag{2.3}$$

Assim, podemos utilizar propriedades estacionárias do processo de Hammersley para ver que:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{N}, \mathbf{S}) &= \lambda \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \mathbb{E}(\mathbf{N}_\varepsilon) \\ &= \lambda \int_0^x \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_\lambda(t; z) < x\}}) dz \\ &= \lambda \int_0^x \mathbb{P}(X_\lambda(t) < x - z) dz \\ &= \lambda \int_0^x \mathbb{P}(x - X_\lambda(t) > z) dz \\ &= \lambda \mathbb{E}(x - X_\lambda(t))_+ \end{aligned} \tag{2.4}$$

Combinando esta equação com (2.1), temos:

$$\text{Var}(L_\lambda(x, t)) = -\lambda x + \frac{t}{\lambda} + 2\lambda \mathbb{E}(x - X_\lambda(t))_+.$$

□

Corolário 2.2. *Se tomarmos $\lambda = \sqrt{t/x}$ no Teorema anterior, obtemos:*

$$\text{Var}(L_\lambda(x, t)) = 2\lambda\mathbb{E}(x - X_\lambda(t))_+.$$

Agora considere o processo estacionário de Hammersley com intensidade de fontes e drenos iguais a 1. Anteriormente, denotamos a localização no tempo t da partícula de segunda categoria (partícula dual) que partiu de $(0, 0)$ por $X(t)(X'(t))$. Note que o mapa

$$(x, t) \mapsto (x/\lambda, \lambda t)$$

Leva um processo estacionário com intensidade de fonte 1 em um processo estacionário com intensidade de fontes λ (e intensidade de drenos $1/\lambda$). Esse argumento de escala mostra que:

$$\lambda X_\lambda(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X(t/\lambda) \quad \text{e} \quad \lambda X'_\lambda(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X'(t/\lambda) \quad (2.5)$$

Aonde $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ denota igualdade em distribuição.

Gostaríamos, agora, de encontrar uma cota para $\text{Var}(L_\lambda(t, t))$ em função de $\text{Var}(L_1(t, t))$ no caso em que $\lambda \geq 1$. Mas antes, devemos provar um Lema:

Lema 2.3. *Se $\lambda \geq 1$, então vale :*

$$\text{Var}(L_1(t/\lambda, t/\lambda)) \leq \text{Var}(L_1(t, t)).$$

Demonstração. Se usarmos o Teorema 2.1 com $\lambda = 1$, obteremos:

$$\text{Var}(L_1(x, t)) = -x + t + 2 \int_0^x \mathbb{P}(X(t) \leq z) dz. \quad (2.6)$$

Sendo assim, definimos a função:

$$\phi(x, t) = \text{Var}(L_1(x, t)).$$

Claramente, ϕ é simétrica, pois as intensidades de fontes e drenos são iguais. Além disso, (2.6) mostra que ϕ é uma função continuamente diferenciável com

$$\partial_1 \phi(x, t) = -1 + 2\mathbb{P}(X(t) \leq x).$$

Assim, se mostrarmos que $\mathbb{P}(X(t) \leq t) \geq 1/2$, vamos ter demonstrado o Lema, pois para uma função simétrica ϕ , $\partial_1 \phi(t, t) \geq 0$ implica que $\phi(t, t)$ é crescente em t .

Quando refletimos o processo na diagonal, preservamos sua distribuição, trocando somente as trajetórias de X e X' , logo:

$$\mathbb{P}(X(t) > x) = \mathbb{P}(X'(x) < t) \leq \mathbb{P}(X(x) < t).$$

Escolhendo $t = x$, temos que:

$$\mathbb{P}(X(t) > t) \leq \mathbb{P}(X(t) < t) = \mathbb{P}(X(t) \leq t).$$

A equação acima, por sua vez, resulta em

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(X(t) > t) + \mathbb{P}(X(t) \leq t) \leq 2\mathbb{P}(X(t) \leq t) \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(X(t) \leq t) \geq 1/2. \end{aligned}$$

E, como mencionado acima, esta desigualdade basta para provarmos o Lema. □

Agora estamos prontos para achar uma cota para $\text{Var}(L_\lambda(t, t))$.

Teorema 2.4. *Se $\lambda \geq 1$, então:*

$$\text{Var}(L_\lambda(t, t)) \leq (\lambda - 1/\lambda)t + \text{Var}(L_1(t, t)). \quad (2.7)$$

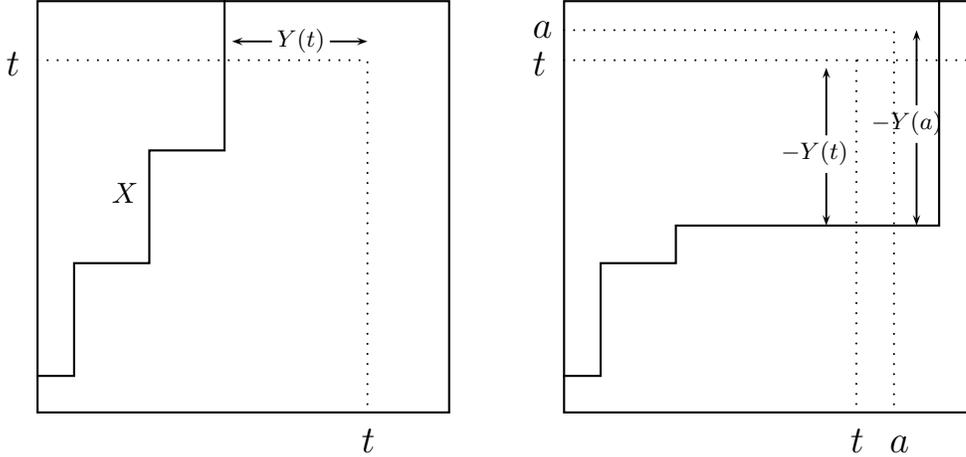


Figura 2.1: A relação entre X e Y .

Demonstração. Usando o Teorema 2.1, a equação (2.5) e a desigualdade $(A+B)_+ \leq A_+ + B_+$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(L_\lambda(t, t)) &= -\lambda t + t/\lambda + 2\mathbb{E}(\lambda t - t/\lambda + t/\lambda - X(t/\lambda))_+ \\ &\leq (\lambda - 1/\lambda)t + 2\mathbb{E}(t/\lambda - X(t/\lambda))_+ \\ &= (\lambda - 1/\lambda)t + \text{Var}(L_1(t/\lambda, t/\lambda)). \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdade com o Lema 2.3, conseguimos o resultado desejado. \square

2.3 Pontos de Saída e Partículas de Segunda Categoria

Já vimos que o processo $L_\lambda(x, t)$ tem sua representação gráfica como o tamanho do maior caminho fracamente NE de $(0, 0)$ até (x, t) . Lembremo-nos que o tamanho do caminho significa o numero de fontes, drenos e pontos- α contidos nele. Vamos trabalhar com essa representação principalmente quando as intensidades de fontes e drenos forem iguais à 1. Assim, definimos para $-t \leq z \leq t$, os processos $N(z)$ e $A_t(z)$ como

$$N(z) = \begin{cases} \text{número de fontes em } [0, z] \times \{0\}, & \text{se } z \geq 0, \\ \text{número de drenos em } \{0\} \times [0, |z|], & \text{se } z \leq 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

e

$$A_t(z) = \begin{cases} \text{o tamanho do maior caminho estritamente NE de } (z, 0) \text{ à } (t, t), & \text{se } z \geq 0, \\ \text{o tamanho do maior caminho estritamente NE de } (0, |z|) \text{ à } (t, t), & \text{se } z \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Segue da própria definição que A_t e N são independentes e que vale

$$L_1(t, t) = \sup\{N(z) + A_t(z) : -t \leq z \leq t\} \quad (2.10)$$

Outra importante definição é a de **pontos de saída**, que são denotados por $Z(t)$ e $Z'(t)$ e definidos por:

$$Z(t) := \sup\{z \in [-t, t] : N(z) + A_t(z) = L(t, t)\} \quad (2.11)$$

e

$$Z'(t) := \inf\{z \in [-t, t] : N(z) + A_t(z) = L(t, t)\}. \quad (2.12)$$

O nome ponto de saída vem do fato de existirem caminhos que atingem o supremo da equação (2.10) deixando o eixo- x em $(Z(t), 0)$ ou deixando o eixo- y em $(0, -Z'(t))$. Da definição acima e da simetria do processo e entre as fontes e drenos, podemos ver que

$$Z'(t) \leq Z(t) \quad \text{e} \quad Z(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} -Z'(t). \quad (2.13)$$

Antes de estabelecer a conexão entre as partículas de segunda classe e os pontos de saída, precisaremos de mais uma definição. Já tínhamos definido $X(t)$ e $X'(t)$ como as posições no tempo t das partículas normal e dual de segunda categoria que partiram de $(0, 0)$, respectivamente. Agora definimos

$$Y(t) := \begin{cases} t - X(t) & \text{se } X(t) \leq t, \\ \inf\{s \geq 0 : X(s) \geq t\} - t & \text{se } X(t) > t, \end{cases}$$

e também

$$Y'(t) := \begin{cases} t - X'(t) & \text{se } X'(t) \leq t, \\ \inf\{s \geq 0 : X'(s) \geq t\} - t & \text{se } X'(t) > t, \end{cases}$$

Como $X'(t) \geq X(t)$, temos que $Y'(t) \leq Y(t)$. A figura 2.1 mostra a relação entre X e Y . Seguem da definição duas relações importantes. São elas:

$$\begin{aligned} a < t &\implies \begin{cases} \{X(t) < a\} = \{Y(t) > t - a\} & \text{e} \\ \{X'(t) < a\} = \{Y'(t) > t - a\} \end{cases} \\ a > t &\implies \begin{cases} \{X(t) > a\} = \{Y(a) < t - a\} & \text{e} \\ \{X'(t) > a\} = \{Y'(a) < t - a\} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aqui considere a figura 2.2. O desenho da esquerda mostra uma realização do processo de Hammersley e dois maiores caminhos fracamente NE, correspondendo à $Z(t)$ e $Z'(t)$. Já o desenho da direita mostra a mesma realização refletida no ponto $(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t)$. Note que os maiores caminhos fracamente NE viram trajetórias de partículas de segunda categoria no processo refletido, e que $Z(t)$ corresponde à $Y(t)$, enquanto $Z'(t)$ corresponde à $Y'(t)$. O Teorema de Burke da seção 1.7 mostra que o processo refletido também é uma realização do processo de Hammersley e, portanto, podemos concluir que

$$Z(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y(t) \quad \text{e} \quad Z'(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y'(t).$$

Em particular, isso significa que podemos usar o teorema 2.1 com $\lambda = 1$ e $x = t$ para notarmos que $(t - X(t))_+ = Y(t)_+$, e assim concluir que

$$\text{Var}(L_1(t, t)) = 2\mathbb{E}Z(t)_+. \quad (2.15)$$

2.4 A ordem de $\mathbb{E}(Z(t))_+$

O objetivo desta seção é tentar controlar o ponto de saída $Z(t)$. Faremos isso considerando um processo de Hammersley auxiliar L_λ ($\lambda \geq 1$) acoplado à L_1 . Obtemos L_λ ao fazer um *thickening* das fontes e um *thinning* dos drenos de L_1 , assim como na seção 1.6. Nesse contexto, o processo A_t satisfaz o próximo Lema.

Lema 2.5. *Seja $\lambda \geq 1$ e defina $L_\lambda(x, t)$ como o fluxo de L_λ em (x, t) . Então, para $0 \leq z \leq t$, vale:*

$$A_t(z) \leq L_\lambda(t, t) - L_\lambda(z, 0)$$

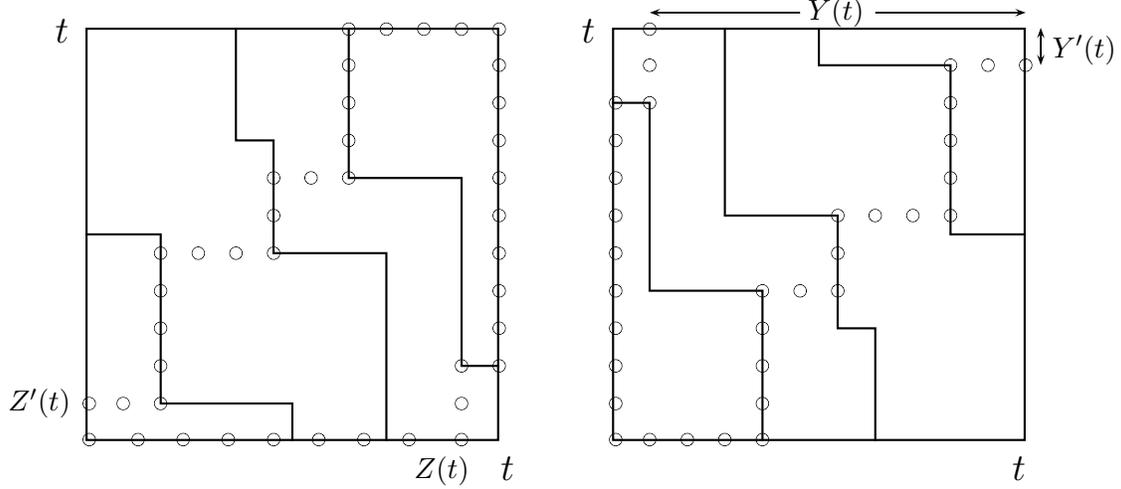


Figura 2.2: A relação entre $Z(t)$ e $Y(t)$ quando refletimos o processo.

Demonstração. É claro que um caminho estritamente NE de $(z, 0)$ até (t, t) é mais curto que o maior caminho fracamente NE de $(z, 0)$ até (t, t) . Porém esse maior caminho fracamente NE é justamente o fluxo em $(t, t)(L_\lambda(t, t))$ menos o número de fontes em $[0, z] \times \{0\}(L_\lambda(z, 0))$. \square

A partir de agora utilizaremos a notação $a(x) \lesssim b(x)$ se existir uma constante $M > 0$ tal que $a(x) \leq Mb(x)$ para todo x . Agora podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.6. *Seja $0 < c \leq t/\mathbb{E}(Z(t))_+$. Então vale*

$$\mathbb{P}\{Z(t) > c \mathbb{E}Z(t)_+\} \lesssim \frac{t^2}{(\mathbb{E}Z(t)_+)^3} \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{c^4} \right).$$

Demonstração. Note que, se $\lambda \geq 1$, podemos utilizar o Lema 2.5 para ver que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z(t) > u\} &= \mathbb{P}\{\exists z > u : N(z) + A_t(z) = L_1(t, t)\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\exists z > u : N(z) + L_\lambda(t, t) - L_\lambda(z, 0) \geq L_1(t, t)\} \\ &= \mathbb{P}\{\exists z > u : N(z) - L_\lambda(z, 0) \geq L_1(t, t) - L_\lambda(t, t)\}. \end{aligned}$$

Pela própria construção de $L_\lambda(\cdot, 0)$, temos que $\tilde{N}_{\lambda-1}(z) := L_\lambda(z, 0) - N(z)$ é um processo de Poisson de intensidade $\lambda - 1$. Isto significa que

$$\mathbb{P}\{Z(t) > u\} \leq \mathbb{P}\{\tilde{N}_{\lambda-1} \leq L_\lambda(t, t) - L_1(t, t)\}. \quad (2.16)$$

Vamos primeiro supor que $0 \leq u \leq \frac{3}{4}t$ e tentar achar uma boa cota para tais valores de u . Para isso, escolhemos λ tal que

$$\mathbb{E}\tilde{N}_{\lambda-1}(u) - \mathbb{E}\{L_\lambda(t, t) - L_1(t, t)\} = (\lambda - 1)u - t\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2\right)$$

Seja máximo (veja que a última igualdade se dá por argumentos com pontos cardeais, similares ao Teorema 2.1), isso significa que tomaremos:

$$\lambda_u = (1 - u/t)^{-1/2}.$$

Além disso, precisaremos de algumas desigualdades que valem para todo $0 \leq u \leq \frac{3}{4}t$. São elas:

$$\begin{aligned} \lambda_u &\leq 2, \\ \mathbb{E}\tilde{N}_{\lambda_u-1}(u) - \mathbb{E}\{L_{\lambda_u}(t, t) - L_1(t, t)\} &\geq \frac{1}{4}u^2/t, \\ \lambda_u - 1/\lambda_u &\leq 2u/t. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora podemos ver que, devido às desigualdades acima, (2.7) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} \text{Var}\{L_{\lambda_u}(t, t) - L_1(t, t)\} &\leq 2(\text{Var}\{L_{\lambda_u}(t, t)\} + \text{Var}\{L_1(t, t)\}) \\ &\leq 8\mathbb{E}Z(t)_+ + 2t(\lambda_u - 1/\lambda_u) \\ &\leq 8\mathbb{E}Z(t)_+ + 4u. \end{aligned}$$

Podemos, então, usar a equação (2.16) e a desigualdade de Chebyshev e conseguir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z(t) > u\} &\leq \mathbb{P}\{\tilde{N}_{\lambda_u-1}(u) \leq L_{\lambda_u}(t, t) - L_1(t, t)\} \\ &\leq \mathbb{P}\{\tilde{N}_{\lambda_u-1}(u) \leq \mathbb{E}\tilde{N}_{\lambda_u-1}(u) - u^2/(8t)\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{L_{\lambda_u}(t, t) - L_1(t, t) \geq \mathbb{E}\tilde{N}_{\lambda_u-1}(u) - u^2/(8t)\} \\ &\leq \frac{64t^2(\lambda_u - 1)u}{u^4} \\ &\quad + \mathbb{P}\{L_{\lambda_u}(t, t) - L_1(t, t) \geq \mathbb{E}\{L_{\lambda_u}(t, t) - L_1(t, t)\} + u^2/(8t)\} \\ &\lesssim \frac{t^2}{u^3} + \frac{64t^2(8\mathbb{E}Z(t)_+ + 4u)}{u^4} \\ &\lesssim \frac{t^2}{u^3} + \frac{t^2\mathbb{E}Z(t)_+}{u^4} \end{aligned} \tag{2.18}$$

E quando $t \geq u \geq \frac{3}{4}t$, vemos que

$$\mathbb{P}\{Z(t) > u\} \leq \mathbb{P}\left\{Z(t) > \frac{3}{4}t\right\} \lesssim \frac{t^2}{u^3} + \frac{t^2\mathbb{E}Z(t)_+}{u^4}$$

onde usamos (2.18). O que significa que (2.18) é válido para todo $0 \leq u \leq t$. O Teorema está demonstrado se tomarmos $u = c\mathbb{E}Z(t)_+$. \square

Com este Teorema, conseguimos mostrar que $\mathbb{E}Z(t)_+ = O(t^{2/3})$.

Corolário 2.7. *Suponha que $Z(t)_+$ e $L(t, t)$ sejam definidos como em (2.15). Então*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Z(t)_+}{t^{2/3}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(L_1(t, t))}{2t^{2/3}} < +\infty$$

Demonstração. Usando (2.15), só precisamos provar a afirmação para $\mathbb{E}Z(t)_+$. Para isso, suponho que existe uma sequência $t_n \uparrow +\infty$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Z(t_n)_+}{t_n^{2/3}} = +\infty.$$

Usando o Teorema 2.6, vemos que

$$\mathbb{P}\{Z(t_n)_+ > c\mathbb{E}Z(t_n)_+\} \lesssim \frac{t_n^2}{(\mathbb{E}Z(t_n)_+)^3} \left(\frac{1}{c^3} + \frac{1}{c^4}\right) \wedge 1.$$

Note que $t_n^2/(\mathbb{E}Z(t_n)_+)^3$ é uma sequência limitada. Assim, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para ver que

$$\int_0^\infty \mathbb{P}\{Z(t_n)_+ > c\mathbb{E}Z(t_n)_+\} dc \rightarrow 0,$$

que, por sua vez, implicaria no absurdo

$$\mathbb{E} \left\{ \frac{Z(t_n)_+}{\mathbb{E}Z(t_n)_+} \right\} \rightarrow 0.$$

□

Como corolário, obtemos:

Corolário 2.8. *Seja $c \geq 1$. Então*

$$\mathbb{P}\{Z(t) > ct^{2/3}\} \lesssim \frac{1}{c^3}.$$

Demonstração. Este resultado decorre imediatamente do Teorema 2.6 e do Corolário 2.7. □

2.5 Caminhos estritamente NE e fracamente NE restritos

O corolário 2.7 nos dá uma espécie de cota superior para $\mathbb{E}Z(t)_+$ quando visto em ordem $2/3$. O objetivo desta seção é justamente conseguir uma espécie de cota inferior, para isso teremos de controlar a diferença entre os tamanhos de um caminho estritamente NE e um caminho fracamente NE restrito no processo de Hammersley estacionário L_1 . Aqui, chamaremos de **caminho fracamente NE restrito** qualquer caminho fracamente NE que só passa por fontes no intervalo $[0, \varepsilon t^{2/3}] \times \{0\}$. Durante esta seção, consideraremos um novo processo L_λ em $[0, t]^2$, com intensidade de fontes λ , intensidade de drenos $1/\lambda$ e intensidade de pontos- α igual à 1. Para tal processo, as fontes, drenos e pontos- α são considerados independentes dos seus correspondentes em L_1 . Acoplaremos à L_λ o processo L , que é na verdade um processo de Hammersley sem fontes e drenos que utiliza os mesmos pontos- α de L_λ . Note que, como a distribuição da posição das partículas em $[0, t] \times \{t\}$ é uniforme, vale para $0 < z < t$,

$$A_t(0) - A_t(z) \stackrel{D}{=} L(t, t) - L(t - z, t). \quad (2.19)$$

Note também que $\{N(z) : z \in (0, t)\}$ e $\{L_\lambda(t, t) - L_\lambda(t - z, t)\}$ são dois processos de Poisson independentes. Considere agora a partícula de segunda categoria dual $X'_\lambda(t)$ para o processo L_λ , sabemos, pelo Lema 1.31, que vale

$$x < y < X'_\lambda(t) \implies L_\lambda(y, t) - L_\lambda(x, t) = L_\lambda^{-x}(y, t) - L_\lambda^{-x}(x, t).$$

Lembre-se que L_λ^{-x} é o processo obtido ao se retirar todas as fontes de L_λ e, assim, o conjunto das partículas de L_λ^{-x} em um intervalo arbitrário é sempre um subconjunto das partículas de L no mesmo intervalo, para qualquer tempo t , visto que L é um processo sem fontes nem drenos. Dessa forma, temos que

$$x < y < X'_\lambda(t) \implies L_\lambda(y, t) - L_\lambda(x, t) \leq L(y, t) - L(x, t). \quad (2.20)$$

Teorema 2.9. *Fixe $M > 0$. Então*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} \{N(z) + A_t(z)\} - A_t(0) \geq Mt^{1/3} \right\} = O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Demonstração. Usaremos o processo de Hammersley auxiliar L_λ que construímos acima tomando

$$\lambda = 1 - rt^{-1/3}.$$

Aonde o valor de $r > 0$ será definido mais tarde na demonstração. Se $X'_\lambda(t) \geq t$, (2.20) nos mostra que, para $0 < z < t$,

$$L_\lambda(t, t) - L_\lambda(t - z, t) \leq L(t, t) - L(t - z, t).$$

Podemos então, definir

$$\tilde{N}_\lambda(z) = L_\lambda(t, t) - L_\lambda(t - z, t),$$

e usar a equação (2.19), junto com o fato que N e A_t são independentes, para ver que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} \{N(z) + A_t(z)\} - A_t(0) \geq Mt^{1/3} \right\} \\ & \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} \geq Mt^{1/3} \right\} + \mathbb{P}\{X'_\lambda(t) < t\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O segundo termo no lado direito de (2.21) pode ser estimado se $r \in [1, t^{-1/3}]$, usando (2.5), (2.14) e o corolário 2.8:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X'_\lambda(t) < t\} &= \mathbb{P}\{X'(t/\lambda) < \lambda t\} \\ &= \mathbb{P}\{Z'(t/\lambda) > t(1/\lambda - \lambda)\} \\ &\leq \mathbb{P}\{Z(t/\lambda) > t(1/\lambda - \lambda)\} \\ &= \mathbb{P}\{Z(t/(1 - rt^{-1/3})) > rt^{2/3}(2 - rt^{1/3})/(1 - rt^{-1/3})\} \\ &\leq \mathbb{P}\{Z(\tilde{t}) > r\tilde{t}^{2/3}\} \lesssim r^{-3}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde definimos $\tilde{t} = t/(1 - rt^{1/3})$, e a desigualdade da quinta linha pode ser justificada por $(2 - rt^{1/3}) \geq 1 \geq (1 - rt^{1/3})^{2/3}$. Já o primeiro termo do lado direito de (2.21) está relacionado à um tempo de chegada para a diferença de dois processos de Poisson independentes. Depois do reescalonamento, podemos escrever tal termo como

$$\mathbb{P}\{\exists_{0 \leq z \leq \varepsilon} : t^{-1/3}\{N(zt^{2/3}) - \tilde{N}_\lambda(zt^{2/3})\} \geq M\}.$$

O processo $t \mapsto t^{-1/3}\{N(zt^{2/3}) - \tilde{N}_\lambda(zt^{2/3})\}$ converge, quando $t \rightarrow \infty$, para o movimento Browniano com drift dado por

$$W_r(z) := W(2z) + rz, \quad z \geq 0, \quad (2.23)$$

na topologia da convergência uniforme em compactos, aonde estamos usando W como o movimento Browniano padrão em \mathbb{R}_+ . Assim, obtemos, por uma aplicação direta do teorema de Donsker, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\exists_{0 \leq z \leq \varepsilon} : t^{-1/3}\{N(zt^{2/3}) - \tilde{N}_\lambda(zt^{2/3})\} \geq M\} = \mathbb{P}\left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon]} W_r(z) \geq M \right\}. \quad (2.24)$$

Obtemos agora, utilizando o princípio da reflexão para $r < M/\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon]} W_r(z) \geq M \right\} &\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{z \in [0, 2\varepsilon]} W(z) \geq M - \varepsilon r \right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \sup_{z \in [0, 1]} W(2\varepsilon z)/\sqrt{2\varepsilon} \geq (M - \varepsilon r)/\sqrt{2\varepsilon} \right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{ \sup_{z \in [0, 1]} W(z) \geq (M - \varepsilon r)/\sqrt{2\varepsilon} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{(M - \varepsilon r)/\sqrt{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-(1/2)u^2} du. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tomando $r = M/(2\varepsilon)$, temos

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{(M - \varepsilon r)/\sqrt{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-(1/2)u^2} du = 2 \int_{M/\sqrt{8\varepsilon}}^{\infty} \frac{e^{-(1/2)u^2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

$$= \frac{2e^{M^2/(16\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi}} R\left(\frac{M}{\sqrt{8\varepsilon}}\right),$$

aonde $R(x)$ é a famosa razão de Mill, dada explicitamente por

$$R(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt.$$

Uma conta que utiliza somente a regra de L'Hospital mostra que, quando $x \rightarrow \infty$, $R(x) \rightarrow 0$ e $xR(x) \rightarrow 1$. Sendo assim, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sup_{z \in [0, \varepsilon]} W_r(z) \geq M\right\} &\leq \frac{2e^{M^2/(16\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi}} R\left(\frac{M}{\sqrt{8\varepsilon}}\right) \\ &\sim \frac{2\sqrt{8\varepsilon} e^{-M^2/(16\varepsilon)}}{M\sqrt{2\pi}}, \quad \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Isto significa que, com a escolha de $r = M/(2\varepsilon)$, nossa estimativa em (2.22) é dominante em (2.21) e, portanto, o Teorema está demonstrado. \square

2.6 A cota inferior para $\mathbb{E}Z(t)_+$

Para conseguir uma boa cota para $\mathbb{E}Z(t)_+$, queremos estimar a probabilidade que $Z(t) \in [0, \varepsilon t^{2/3}]$. Com esse objetivo em mente, novamente usaremos um processo auxiliar L_λ , mas agora com intensidade $\lambda > 1$. Mais precisamente, trabalharemos com

$$\lambda = 1 + rt^{-1/3}.$$

Acoplaremos também, como na seção anterior, o processo L_λ ao processo L sem fontes nem drenos, mas utilizando os mesmos pontos- α . Usando novamente o lema 1.31 e, raciocinando da mesma forma que em (2.20), obtemos

$$y > x > X_\lambda(t) \implies L(y, t) - L(x, t) \leq L_\lambda(y, t) - L_\lambda(x, t). \quad (2.26)$$

E usaremos novamente

$$\tilde{N}_\lambda(z) = L_\lambda(t, t) - L_\lambda(t - z, t),$$

para provar o seguinte resultado.

Teorema 2.10.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{0 \leq Z(t) \leq \varepsilon t^{2/3}\} = 0.$$

Demonstração. Seja $\eta > 0$. Para demonstrarmos o teorema, é suficiente encontrar um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{0 < Z(t) < \varepsilon t^{2/3}\} < 3\eta.$$

Para isso, tome $M, r > 0$ e $\lambda = 1 + rt^{-1/3}$ e note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{0 \leq Z(t) \leq \varepsilon t^{2/3}\} &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{z > \varepsilon t^{2/3}} (N(z) + A_t(z)) < \sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} (N(z) + A_t(z))\right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{z > \varepsilon t^{2/3}} \{N(z) - (A_t(0) - A_t(z))\} < Mt^{1/3}\right\} \\ &\quad + \mathbb{P}\left\{\sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} \{N(z) - (A_t(0) - A_t(z))\} > Mt^{1/3}\right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Já que, para qualquer $M \in \mathbb{R}$, $X < Y$ implica que $X < M$ ou $Y > M$, então

$$\mathbb{P}(X < Y) \leq \mathbb{P}(\{X < M\} \cup \{Y > M\}) \leq \mathbb{P}(X < M) + \mathbb{P}(Y > M),$$

e podemos assim, tentar otimizar a estimativa escolhendo um bom valor de M . Para o primeiro termo de (2.27), usaremos (2.26), o que implica que, no evento $\{X_\lambda(t) \leq t - rt^{2/3}\}$, temos para todo $z < rt^{2/3}$,

$$L(t, t) - L(t - z, t) \leq L_\lambda(t, t) - L_\lambda(t - z, t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{0 \leq Z(t) \leq \varepsilon t^{2/3}\} &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{z \in [\varepsilon t^{2/3}, rt^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} < Mt^{1/3}\right\} + \mathbb{P}\{X_\lambda(t) > t - rt^{2/3}\} \\ &\quad + \mathbb{P}\left\{\sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} \{N(z) - (A_t(0) - A_t(z))\} > Mt^{1/3}\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\sup_{z \in [\varepsilon t^{2/3}, rt^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} < Mt^{1/3}\right\} + \mathbb{P}\{X(t/\lambda) > \lambda t - \lambda rt^{2/3}\} \\ &\quad + \mathbb{P}\left\{\sup_{z \in [0, \varepsilon t^{2/3}]} \{N(z) - (A_t(0) - A_t(z))\} > Mt^{1/3}\right\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

o que nos deixa com três termos para estimar. Vamos começar com o segundo termo, usaremos (2.14) (notando que $\lambda t - \lambda rt^{2/3} \geq t/\lambda$ quando tomamos $r \leq \frac{1}{2}t^{1/3}$), $Z'(t) \leq Z(t)$ e $-Z'(t) \stackrel{D}{=} Z(t)$ para conseguir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(t/\lambda) > \lambda t - \lambda rt^{2/3}\} &= \mathbb{P}\{Z(\lambda t - \lambda rt^{2/3}) < (1/\lambda - \lambda)t + \lambda rt^{2/3}\} \\ &\leq \mathbb{P}\{Z'(\lambda t - \lambda rt^{2/3}) < (1/\lambda - \lambda)t + \lambda rt^{2/3}\} \\ &= \mathbb{P}\{-Z'(\lambda t - \lambda rt^{2/3}) > (\lambda - 1/\lambda)t - \lambda rt^{2/3}\} \\ &= \mathbb{P}\{Z(\lambda t - \lambda rt^{2/3}) > (\lambda - 1/\lambda)t - \lambda rt^{2/3}\} \\ &= \mathbb{P}\left\{Z(t(1 - r^2t^{-2/3})) > \frac{rt^{2/3}}{1 + rt^{-1/3}} - r^2t^{1/3}\right\}. \end{aligned}$$

Isto significa que podemos começar escolhendo r suficientemente grande, de forma que o segundo termo de (2.28) seja menor que η , pois, pelo corolário 2.8 temos

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{Z(t(1 - r^2t^{-2/3})) > \frac{rt^{2/3}}{1 + rt^{-1/3}} - r^2t^{1/3}\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{Z(t + O(t^{1/3})) > rt^{2/3} + O(t^{1/3})\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{Z(t + O(t^{1/3}))}{Z(t)} \cdot \frac{Z(t)}{t^{2/3}} \cdot \frac{t^{2/3}}{t^{2/3} + O(t^{1/3})} > r\right\} = O(r^{-3}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o primeiro termo de (2.28), este termo é muito parecido com um dos encontrados nos cálculos da última seção. Temos que, assim como no teorema 2.9, que o processo

$$z \mapsto t^{-1/3}\{N(z t^{2/3}) - \tilde{N}_\lambda(z t^{2/3})\}$$

converge, quando $t \rightarrow \infty$, para um movimento Browniano com drift dado por

$$W_r(z) := W(2z) - rz, \quad z \geq 0, \tag{2.29}$$

na topologia da convergência uniforme em compactos, onde W é o movimento Browniano padrão em \mathbb{R}_+ (note que agora o drift é negativo ao invés de positivo). Sendo assim, obtemos novamente, pelo teorema

de Donsker,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [\varepsilon t^{2/3}, r t^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} \leq M t^{1/3} \right\} \\
 &= \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [\varepsilon, r]} W_r(z) \leq M \right\} \\
 &= \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, r]} W_r(z) \leq M \right\} + \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [\varepsilon, r]} W_r(z) \leq M, \sup_{z \in [0, \varepsilon]} W_r(z) > M \right\} \\
 &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, r]} W_r(z) \leq M \right\} + \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon]} W_r(z) > M \right\}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Agora podemos usar o fato que

$$\lim_{M \downarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, r]} W_r(z) \leq M \right\} = 0,$$

para escolher $M = M(\eta)$ suficientemente pequeno, de forma que

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, r]} W_r(z) \leq M \right\} < \eta/2.$$

Também está claro, pela demonstração do teorema 2.9 (veja (2.25)), que para o valor de $M = M(\eta)$ fixo que tomamos, existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para garantir que

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon]} W_r(z) > M \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, \varepsilon]} W(2z) > M \right\} < \eta/2,$$

e assim o primeiro termo de (2.28) está limitado superiormente por η (lembre-se que já fixamos um valor de r para a cota do segundo termo de (2.28) e, portanto, não poderíamos ter modificado esta escolha aqui). Finalmente, para o terceiro termo em (2.28), podemos, pelo teorema 2.9, escolher $\varepsilon > 0$ tão pequeno de forma que tal termo seja menor que η . Dessa forma, o teorema está provado. \square

Corolário 2.11. *Seja $Z(t)_+$ e $L(t, t)$ definidos como em (2.15). Então*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}Z(t)_+}{t^{2/3}} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(L_1(t, t))}{2t^{2/3}} > 0.$$

Demonstração. Usando (2.15), vemos que só precisamos demonstrar a desigualdade para $\mathbb{E}Z(t)_+$. Para isso, suponha que exista $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\frac{\mathbb{E}Z(t_n)_+}{t_n^{2/3}} \rightarrow 0.$$

Então

$$\mathbb{P}\{Z(t_n) > \varepsilon t_n^{2/3}\} \leq \frac{\mathbb{E}Z(t_n)_+}{\varepsilon t_n^{2/3}} \rightarrow 0.$$

Como $-Z'(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} Z(t)$ e $Z'(t) \leq Z(t)$, temos que $\mathbb{P}\{Z(t) \geq 0\} \geq 1/2$ para todo $t > 0$. Isto significa que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{0 \leq Z(t_n) \leq \varepsilon t_n^{2/3}\} \geq \frac{1}{2},$$

o que contradiz o teorema 2.10. \square

2.7 Resultados de Rigidez

Com os resultados das seções anteriores mostramos que, para o processo de Hammersley estacionário com fontes, drenos, e pontos- α de intensidade 1, a variância do tamanho do maior caminho fracamente NE $L_1(t, t)$ tem ordem $t^{2/3}$. Mais precisamente,

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-2/3} \text{Var}(L_1(t, t)) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-2/3} \text{Var}(L_1(t, t)) < \infty. \quad (2.31)$$

Isto significa, em particular, que, para qualquer $t > 0$, a sequência

$$n^{-1/3} \{L_1(nt, nt) - 2nt\}, \quad n = 1, \dots,$$

é rígida. Vamos agora tentar utilizar este fato para provar um resultado parecido para L . Lembre-se que $L(x, t)$ representa o processo de Hammersley original que, no escopo deste capítulo, pode ser interpretado como o processo sem fontes e drenos nos eixos.

Teorema 2.12. *Para o processo L , vale*

$$\mathbb{E}|L(t, t) - 2t| = O(t^{1/3}),$$

o que, por sua vez, implica que, para qualquer $t > 0$ fixo, a sequência

$$n^{-1/3} \{L(nt, nt) - 2nt\}, \quad n = 1, \dots,$$

é rígida.

Demonstração. Primeiramente, note que $L(t, t)$ é o tamanho do maior caminho estritamente NE de $(0, 0)$ à (t, t) é exatamente o que definimos como $A_t(0)$ na demonstração do Teorema 2.9. Portanto, podemos tomar $\lambda = 1 - rt^{-1/3}$ para algum $r > 0$ e definir L_λ como no Teorema 2.9, obtendo assim, por (2.21), temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, Kt^{2/3}]} \{N(z) + A_t(z)\} - A_t(0) \geq Mt^{1/3} \right\} \\ & \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, Kt^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} \geq Mt^{1/3} \right\} + \mathbb{P}\{X'_\lambda(t) < t\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Veja que o segundo termo do lado direito da desigualdade já foi tratado em (2.22), aonde obtivemos que

$$\mathbb{P}\{X'_\lambda(t) < t\} = O(r^{-3}), \quad (2.33)$$

uniformemente para $r \in [1, \frac{1}{2}t^{1/3}]$. Para lidar com o primeiro termo do lado direito de (2.32) vamos notar que $t^{-1/3}N(z) - zt^{1/3}$ e $t^{-1/3}\tilde{N}_\lambda(z) - \lambda zt^{1/3}$ são martingais de média zero, e, portanto, podemos definir

$$z \mapsto M_r(z) := t^{-1/3} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} - rz, \quad z \geq 0,$$

e vemos que $M_r(z)$ também é martingal de média zero. Fazendo contas simples, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [-Kt^{2/3}, Kt^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} \geq Mt^{1/3} \right\} & \leq 2\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, Kt^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} \geq Mt^{1/3} \right\} \\ & = 2\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, K]} \{M_r(z) + rz\} \geq M \right\} \\ & \leq 2\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, K]} M_r(z) \geq M - rK \right\}. \end{aligned}$$

Tomando $r = M/(2K)$ e utilizando a desigualdade de Doob para submartingais, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, Kt^{2/3}]} \{N(z) - \tilde{N}_\lambda(z)\} \geq Mt^{1/3} \right\} &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, K]} \{M_r(z) \geq M/2\} \right\} \\ &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [0, K]} M_r(z)^2 \geq M^2/4 \right\} \\ &\leq \frac{4\mathbb{E}[M_r(K)^2]}{M^2} \lesssim \frac{K}{M^2}, \end{aligned}$$

Aonde a última desigualdade se dá apenas por cálculos de segundo momento utilizando-se a definição de $M_r(K)$. Temos também, pelo corolário 2.8, que

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [-Kt^{2/3}, Kt^{2/3}]} \{N(z) + A_t(z)\} \neq \sup_{z \in [-t, t]} \{N(z) + A_t(z)\} \right\} \leq \mathbb{P}\{Z(t) > Kt^{2/3}\} \lesssim 1/K^3.$$

Então, tomando $K = M^{7/12}$ (note que isto significa que $r = M/(2K) = \frac{1}{2}M^{5/12} \leq \frac{1}{2}t^{1/3}$, para todo $M \leq t^{4/5}$), conseguimos

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{z \in [-t, t]} \{N(z) + A_t(z)\} - A_t(0) \geq Mt^{1/3} \right\} = \mathbb{P} \left\{ L_1(t, t) - A_t(0) \geq Mt^{1/3} \right\} \lesssim M^{-5/4},$$

para todo $M \leq t^{4/5}$. Para o caso $M > t^{4/5}$, notaremos primeiro que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ L_1(t, t) - A_t(0) \geq Mt^{1/3} \right\} &\leq \mathbb{P} \left\{ L_1(t, t) \geq Mt^{1/3} \right\} \\ &\leq 2\mathbb{P} \left\{ P_t \geq \frac{1}{2}Mt^{1/3} \right\} \\ &\leq 2\mathbb{P} \left\{ P_t \geq \frac{1}{2}M^{1/6}t \right\}, \end{aligned}$$

aonde P_t é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro t . Usando $[x]$ para denotar a parte inteira de x e fixando $a = \frac{1}{2}M^{1/6}$, podemos usar o resto de Lagrange na expansão de e^t para concluir que $\exists \theta \in (0, 1)$ tal que

$$\mathbb{P} \left\{ P_t \geq \frac{1}{2}M^{1/6}t \right\} \leq \mathbb{P} \{P_t \geq [at]\} = \frac{t^{[at]}e^{-(1-\theta)t}}{[at]!} \leq \frac{t^{[at]}}{[at]!}.$$

A fórmula de Stirling para a função gamma nos mostra que, uniformemente em $t \geq 1$,

$$\frac{t^{at}}{\Gamma(at+1)} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-a(\log a - 1)t}, \quad a \rightarrow \infty.$$

Isto implica que, se $M > t^{4/5}$, então $\mathbb{P}\{P_t \geq \frac{1}{2}Mt^{1/3}\}$ tende à zero mais rapidamente que qualquer potência negativa de M uniformemente para todo t suficientemente grande. Portanto, concluímos que

$$\mathbb{P}\{L_1(t, t) - A_t(0) \geq Mt^{1/3}\} = O(M^{-5/4}),$$

para todo $M \geq 1$, implicando assim que

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2t - \mathbb{E}A_t(0) = \mathbb{E}\{L_1(t, t) - A_t(0)\} \\ &\leq t^{1/3} \left\{ 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\{L_1(t, t) - A_t(0) \geq Mt^{1/3}\} dM \right\} \\ &\lesssim t^{1/3} \left\{ 1 + \int_1^\infty M^{-5/4} dM \right\} = O(t^{1/3}). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sendo assim, obtemos,

$$\mathbb{E}|L(t, t) - 2t| = \mathbb{E}|A_t(0) - 2t| = O(t^{1/3}),$$

o que encerra a demonstração. □

Capítulo 3

Flutuações Locais em Modelos de Percolação de Última Passagem

3.1 Definindo a sequência \mathcal{A}_n

Neste capítulo, construiremos o modelo de Hammersley de percolação de última passagem com a notação um pouco diferente, com o intuito de compactar as expressões que escrevemos. Primeiro, faremos como antes, considerando um processo de Poisson homogêneo e bidimensional de intensidade 1. Por questões de clareza iremos, no decorrer deste capítulo, utilizar a notação $[x]_t := (x, t) \in \mathbb{R}^2$. Definiremos também que uma sequência $[x_1]_{t_1}, [x_2]_{t_2}, \dots, [x_k]_{t_k}$ de pontos em \mathbb{R}^2 é estritamente crescente (ou estritamente NE) se $x_j < x_{j+1}$ e $t_j < t_{j+1}$ para todo $j = 1, \dots, k-1$. O tempo de última passagem $L([x]_s, [y]_t)$ entre $[x]_s < [y]_t$ pode ser visto como o maior número de pontos de Poisson entre todas as sequências crescentes de pontos de Poisson no retângulo $(x, y) \times (s, t)$. Denote ainda $L[x]_t := L([0]_0, [x]_t)$ e defina \mathcal{A}_n por:

$$u \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{A}_n(u) := \frac{L[n + 2un^{2/3}]_n - (2n + 2un^{2/3}) + u^2n^{1/3}}{n^{1/3}} \quad (3.1)$$

Prähofer e Spohn [16] provaram, em 2002, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n(\cdot) \stackrel{dist.}{=} \mathcal{A}(\cdot), \quad (3.2)$$

No sentido das distribuições finito-dimensionais, onde $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}(u))_{u \in \mathbb{R}}$ é um processo chamado de Airy_2 . Tal processo é unidimensional, estacionário, contínuo e com distribuições finito-dimensionais dadas por um determinante de Fredholm. Pode-se achar mais detalhes em [11].

A ideia da seção é apresentar uma técnica chamada de Comparação Local, e utilizá-la para mostrar a rigidez da sequência \mathcal{A}_n . Além disso, usaremos tal técnica para ver que a escala $n^{2/3}$ é a ideal para obtermos a convergência para o processo de Airy. Por fim, mostramos que tal processo tem comportamento localmente Browniano.

3.2 Comparação Local e Pontos de Saída

Vamos usar o modelo de Hammersley para percolação de última passagem como visto na seção 1.5. Ou seja, ainda continuaremos com um processo de Poisson \mathcal{N} no semiplano superior, com intensidade 1. No eixo x vamos considerar um processo de Poisson ν_λ independente do primeiro com intensidade $\lambda > 0$. Os dois processos de Poisson são tomados de maneira independente. Para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, defina

$$L_\lambda[x]_t := L_{\nu_\lambda}[x]_t = \sup_{z \in (-\infty, x]} \{\nu_\lambda(z) + L([z]_0, [x]_t)\},$$

onde, para $z \leq x$,

$$\nu_\lambda(z) = \begin{cases} \text{o número de pontos de Poisson em } (0, z] \times 0 & \text{para } z > 0 \\ \text{menos o número de pontos de Poisson em } (z, 0] \times 0 & \text{para } z \leq 0 \end{cases}$$

O processo $(M_{\nu_\lambda}^t)_{t \geq 0}$, dado por

$$M_{\nu_\lambda}^t(x, y) \equiv M_\lambda^t(x, y) := L_\lambda[y]_t - L_\lambda[x]_t \quad \text{para } x < y,$$

É um processo de Markov no espaço das medidas de contagem localmente finitas em \mathbb{R} . Como visto na seção 1.5, o processo de Poisson é uma medida invariante desse sistema de partículas no sentido de que

$$M_\lambda^t \stackrel{\text{dist.}}{=} \text{processo de Poisson de intensidade } \lambda \text{ para todo } t \geq 0$$

Notamos, também na seção 1.5, que o tempo de última passagem L , ao qual também nos referimos por L_{ν_0} , pode ser recuperado para $x, t \geq 0$ se escolhermos uma medida ν_0 que não tenha pontos à direita de 0, e que tenha um número infinito de pontos em qualquer intervalo $(-\varepsilon, 0)$, $\forall \varepsilon > 0$. A partir de agora, consideraremos sempre que L_λ e L estão acoplados com o mesmo processo pontual de Poisson no plano \mathcal{N} . Podemos definir, também, os pontos de saída para esse novo tipo de modelo. Defina

$$Z_\lambda[x]_t := \sup\{z \in (-\infty, x] : L_\lambda[x]_t = \nu_\lambda(z) + L([z]_0, [x]_t)\}$$

e

$$Z'_\lambda[x]_t := \inf\{z \in (-\infty, x] : L_\lambda[x]_t = \nu_\lambda(z) + L([z]_0, [x]_t)\}$$

Usando a invariância de L por translações e pelo mapa $(x, t) \mapsto (\lambda x, t/\lambda)$, obtemos

$$Z_\lambda[x+h]_t \stackrel{\text{dist.}}{=} Z_\lambda[x]_t + h \quad \text{e} \quad Z_\lambda[x]_t \stackrel{\text{dist.}}{=} \lambda Z_1[\lambda x]_{t/\lambda} \quad (3.3)$$

Precisamos de somente mais uma simetria. Na seção 1.6, vimos que o Processo de Hammersley pode ser definido no primeiro quadrante através de fontes no eixo- x e drenos no eixo- t . Na notação desse capítulo, isto significa que o processo $t \mapsto L_\lambda[0]_t$ é de Poisson com intensidade $1/\lambda$, independente do processo ν_λ restrito ao eixo- x positivo e independente de \mathcal{N} restrito ao primeiro quadrante. Podemos agora utilizar a reflexão no primeiro quadrante para notar que vale a seguinte igualdade:

$$\mathbb{P}(Z'_\lambda[x]_t < 0) = \mathbb{P}(Z_{1/\lambda}[t]_x > 0). \quad (3.4)$$

Onde usamos que $Z'_\lambda[x]_t < 0$ é equivalente ao fato de que o caminho maximizador estritamente NE mais à esquerda cruza o eixo- t , e não o eixo- x . A técnica de comparação local consiste em limitar, por cima e por baixo, as diferenças locais de L pelas diferenças locais de L_λ . Tais cotas dependem da posição dos pontos de saída. Conseguimos fazer isso pelo seguinte Lema:

Lema 3.1. *Sejam $0 \leq x \leq y$ e $t \geq 0$. Se $Z'_\lambda[x]_t \geq 0$, então*

$$L[y]_t - L[x]_t \leq L_\lambda[y]_t - L_\lambda[x]_t$$

e se $Z_\lambda[y]_t \leq 0$, então

$$L[y]_t - L[x]_t \geq L_\lambda[y]_t - L_\lambda[x]_t$$

Demonstração. Nesta demonstração, quando considerarmos um caminho ω de $[x]_s$ até $[y]_t$ de pontos crescentes, vamos ver ω como o caminho contínuo crescente "mais abaixo" que conecta todos os pontos, começando em $[x]_s$ e terminando em $[y]_t$. Com essa definição, podemos falar de cruzamento de caminhos ou cruzamento de um caminho com uma linha. Definimos também a geodésica entre $[x]_s$ e $[y]_t$ como o caminho mais abaixo que atinge o máximo na definição de $L([x]_s, [y]_t)$. Vamos denotar esta geodésica por $\omega([x]_s, [y]_t)$. Note agora que

$$L([x]_s, [y]_t) = L([x]_s, [z]_r) + L([z]_r, [y]_t)$$

para todo $[z]_r \in \omega([x]_s, [y]_t)$. Suponha agora que $Z'_\lambda[x]_t \geq 0$ e seja \mathbf{c} o cruzamento entre as geodésicas $\omega([0]_0, [y]_t)$ e $\omega([z']_0, [x]_t)$, onde $z' := Z'_\lambda[x]_t$. Tal cruzamento sempre existe pois $x \leq y$ e $z' \geq 0$. Note agora que, pela definição de L_λ e \mathbf{c} , temos que:

$$L_\lambda[y]_t \geq \nu_\lambda(z') + L([z']_0, [y]_t) \geq \nu_\lambda(z') + L([z']_0, \mathbf{c}) + L(\mathbf{c}, [y]_t).$$

Notando que $\mathbf{c} \in \omega([z']_0, [x]_t)$, também podemos ver que

$$\nu_\lambda(z') + L([z']_0, \mathbf{c}) - L_\lambda[x]_t = -L(\mathbf{c}, [x]_t).$$

Usando os dois fatos acima, conseguimos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} L_\lambda[y]_t - L_\lambda[x]_t &\geq \nu_\lambda(z') + L([z']_0, \mathbf{c}) + L(\mathbf{c}, [y]_t) - L_\lambda[x]_t \\ &= L(\mathbf{c}, [y]_t) - L(\mathbf{c}, [x]_t). \end{aligned}$$

Temos também que

$$-L(\mathbf{c}, [x]_t) \geq L([0]_0, \mathbf{c}) - L[x]_t$$

E, portanto

$$\begin{aligned} L_\lambda[y]_t - L_\lambda[x]_t &\geq L(\mathbf{c}, [y]_t) - L(\mathbf{c}, [x]_t) \\ &\geq L(\mathbf{c}, [y]_t) + L([0]_0, \mathbf{c}) - L([0]_0, [x]_t) \\ &= L[y]_t - L[x]_t. \end{aligned}$$

A prova da segunda desigualdade é muito similar. De fato, defina $z := Z_\lambda[y]_t$ e seja \mathbf{c} o cruzamento entre $\omega([0]_0, [x]_t)$ e $\omega([z]_0, [y]_t)$. Assim, pela definição de L_λ , temos

$$L_\lambda[x]_t \geq \nu_\lambda(z) + L([z]_0, [x]_t) \geq \nu_\lambda(z) + L([z]_0, \mathbf{c}) + L(\mathbf{c}, [x]_t),$$

que, por sua vez, implica em

$$\begin{aligned} L_\lambda[y]_t - L_\lambda[x]_t &\leq L_\lambda[y]_t - \nu_\lambda(z) - L([z]_0, \mathbf{c}) - L(\mathbf{c}, [x]_t) \\ &= L(\mathbf{c}, [y]_t) - L(\mathbf{c}, [x]_t) \\ &\leq L[y]_t - L([0]_0, \mathbf{c}) - L(\mathbf{c}, [x]_t) \\ &= L[y]_t - L[x]_t. \end{aligned}$$

Na equação acima, utilizamos o fato de $\mathbf{c} \in \omega([0]_0, [x]_t)$ no último passo, e assim encerramos a demonstração. \square

Apesar da técnica de comparação local estar no Lema 3.1, para aplicá-la com eficácia, é necessário controlar a posição dos pontos de saída. Isto pode ser feito com o próximo resultado.

Lema 3.2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que,*

$$\mathbb{P}\left(Z_1[n]_n > rn^{2/3}\right) \leq \frac{C}{r^3}$$

Demonstração. Na verdade, este Lema é só um jeito de reescrever o Corolário 2.8 \square

3.3 Rigidez de \mathcal{A}_n

O objetivo desta seção é provar o seguinte Teorema:

Teorema 3.3. *Seja \mathcal{A}_n como em (3.1), então $\{\mathcal{A}_n\}$ é um conjunto rígido no espaço das funções cadlag em $[a, b]$. Além disso, qualquer limite fraco de \mathcal{A}_n está no espaço das funções contínuas em $[a, b]$.*

Antes de dar a demonstração de Teorema 3.3, vamos precisar de mais dois Lemas. Durante toda esta seção, vamos supor, sem perda de generalidade, que $[a, b] = [0, 1]$.

Lema 3.4. *Fixe $\beta \in (1/3, 1)$ e, para cada $\delta \in (0, 1)$ e $n \geq 1$, seja*

$$\lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}(n, \delta) := 1 \pm \frac{\delta^{-\beta}}{n^{1/3}}.$$

Defina também o evento

$$E_n(\delta) := \left\{ Z'_{\lambda_+}[n]_n \geq 0 \text{ e } Z_{\lambda_-}[n + 2n^{2/3}]_n \leq 0 \right\}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que, para δ suficientemente pequeno, vale

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n(\delta)^c) \leq C\delta^{3\beta}.$$

Demonstração. Defina $r := \delta^{-\beta}$ e seja

$$n_+ := \lambda_+ n < 2n \text{ e } h_+ := \left(\lambda_+ - \frac{1}{\lambda_+} \right) n > rn^{2/3} > rn_+^{2/3}/2.$$

Onde as desigualdades acima valem somente se n for suficientemente grande. Usando (3.3) e (3.4),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z'_{\lambda_+}[n]_n < 0) &= \mathbb{P}(Z_{1/\lambda_+}[n]_n > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[n/\lambda_+]_{\lambda_+ n} > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[\lambda_+ n - h_+]_{\lambda_+ n} > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[\lambda_+ n]_{\lambda_+ n} > h_+) \\ &\leq \mathbb{P}(Z_1[n_+]_{n_+} > rn_+^{2/3}/2). \end{aligned}$$

Analogamente, à n_+ e λ_+ , defina

$$n_- := \frac{n}{\lambda_-} < 2n \text{ e } h_- := \left(\frac{1}{\lambda_-} - \lambda_- \right) n > rn^{2/3} > rn_-^{2/3}/2,$$

e teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{\lambda_-}[n + 2n^{2/3}]_n > 0) &= \mathbb{P}(Z_{\lambda_-}[n]_n > -2n^{2/3}) \\ &= \mathbb{P}(\lambda_- Z_1[\lambda_- n]_{n/\lambda_-} > -2n^{2/3}) \\ &\leq \mathbb{P}(Z_1[n_- - h_-]_{n/\lambda_-} > -2n^{2/3}) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[n_-]_{n_-} > h_- - 2n^{2/3}) \\ &\leq \mathbb{P}(Z_1[n_-]_{n_-} > (r - 4)n_-^{2/3}/2). \end{aligned}$$

Agora podemos usar o Lema 3.2 para finalizar a prova. □

Lema 3.5. *Seja $\delta > 0$ e $u \in [0, 1 - \delta]$. Então, no evento $E_n(\delta)$, para todo $v \in [u, u + \delta]$ temos que*

$$\mathcal{B}_{n,-}(v) - \mathcal{B}_{n,-}(u) - 2\delta^{1-\beta} \leq \mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u) \leq \mathcal{B}_{n,+}(v) - \mathcal{B}_{n,+}(u) + 4\delta^{1-\beta},$$

onde

$$\mathcal{B}_{n,\pm}(u) := \frac{L_{\lambda\pm}[n + 2un^{2/3}]_n - L_{\lambda\pm}[n]_n - \lambda_{\pm}2un^{2/3}}{n^{1/3}}.$$

Demonstração. Para um t fixo, $Z'_{\lambda}[x]_t$ e $Z_{\lambda}[x]_t$ são funções não-decrescentes de x . Portanto, no evento $E_n(\delta)$, temos

$$Z'_{\lambda_+}[n + 2un^{2/3}]_n \geq 0 \quad \text{e} \quad Z_{\lambda_-}[n + 2(u + \delta)n^{2/3}]_n \leq 0$$

Pois $u + \delta < 1$. Pelo Lema 3.1, podemos afirmar que, para todo $v \in [u, u + \delta]$, valem as duas desigualdades:

$$\begin{aligned} L[n + 2vn^{2/3}]_n - L[n + 2un^{2/3}]_n &\leq L_{\lambda_+}[n + 2vn^{2/3}]_n - L_{\lambda_+}[n + 2un^{2/3}]_n, \\ L[n + 2vn^{2/3}]_n - L[n + 2un^{2/3}]_n &\geq L_{\lambda_-}[n + 2vn^{2/3}]_n - L_{\lambda_-}[n + 2un^{2/3}]_n. \end{aligned}$$

Da definição de λ_- e λ_+ e lembrando que $v - u \leq \delta$ e $u + v < 2$, podemos conseguir mais outras duas desigualdades:

$$\begin{aligned} (\lambda_+ - 1)(2v - 2u)n^{1/3} + v^2 - u^2 &\leq 2\delta^{1-\beta} + 2\delta \leq 4\delta^{1-\beta} \\ (\lambda_- - 1)(2v - 2u)n^{1/3} + v^2 - u^2 &\geq -2\delta^{1-\beta}, \end{aligned}$$

Das quatro desigualdades acima, podemos concluir que, no evento $E_n(\delta)$, vale

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u) &= \mathcal{B}_{n,+}(v) - \mathcal{B}_{n,+}(u) + (\lambda_+ - 1)(2v - 2u)n^{1/3} + v^2 - u^2 \\ &\leq \mathcal{B}_{n,+}(v) - \mathcal{B}_{n,+}(u) + 4\delta^{1-\beta}. \end{aligned}$$

E que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u) &= \mathcal{B}_{n,-}(v) - \mathcal{B}_{n,-}(u) + (\lambda_- - 1)(2v - 2u)n^{1/3} + v^2 - u^2 \\ &\geq \mathcal{B}_{n,-}(v) - \mathcal{B}_{n,-}(u) - 2\delta^{1-\beta}, \end{aligned}$$

para todo $v \in [u, u + \delta]$, e assim encerramos a demonstração. \square

Agora já estamos prontos para provar o Teorema 3.3.

Demonstração do Teorema 3.3. Para um $u \in [0, 1]$ fixo. tome $\delta > 0$ tal que $u + \delta \leq 1$. Assim, pelo Lema 3.5, temos

$$\sup_{v \in [u, u + \delta]} |\mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u)| \leq \max \left\{ \sup_{v \in [u, u + \delta]} |\mathcal{B}_{n,\pm}(v) - \mathcal{B}_{n,\pm}(u)| \right\} + 4\delta^{1-\beta},$$

No evento $E_n(\delta)$. Logo, para todo $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{v \in [u, u + \delta]} |\mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u)| > \eta \right) &\leq \mathbb{P}(E_n(\delta)) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{v \in [u, u + \delta]} |\mathcal{B}_{n,+}(v) - \mathcal{B}_{n,+}(u)| > \eta - 4\delta^{1-\beta} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{v \in [u, u + \delta]} |\mathcal{B}_{n,-}(v) - \mathcal{B}_{n,-}(u)| > \eta - 4\delta^{1-\beta} \right). \end{aligned}$$

Temos também que:

$$P_n(x) := L_\lambda[n+x]_n - L_\lambda[n]_n, \quad \text{para } x \geq 0,$$

É um processo de Poisson de intensidade λ . Como $\lambda_\pm \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $\mathcal{B}_{n,-}(u/2)$ e $\mathcal{B}_{n,+}(u/2)$ convergem em distribuição para o movimento Browniano padrão \mathcal{B} . Assim, pelo Lema 3.4, para $\delta < (\eta/8)^{1/(1-\beta)}$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u)| > \eta \right) &\leq C\delta^{3\beta} + 2\mathbb{P} \left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{B}(2v) - \mathcal{B}(2u)| > \eta - 4\delta^{1-\beta} \right) \\ &\leq C\delta^{3\beta} + 2\mathbb{P} \left(\sup_{v \in [0, \delta]} |\mathcal{B}(2v)| > \frac{\eta}{2} \right) \\ &= C\delta^{3\beta} + 2\mathbb{P} \left(\sup_{v \in [0, 2\delta]} |\mathcal{B}(v)| > \frac{\eta}{2} \right) \\ &= C\delta^{3\beta} + 2\mathbb{P} \left(\sup_{v \in [0, 1]} |\mathcal{B}(v)| > \frac{\eta}{2\sqrt{2\delta}} \right), \end{aligned}$$

Podemos agora utilizar a desigualdade de Doob para submartingais para notar que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{v \in [0, 1]} |\mathcal{B}(v)| > \frac{\eta}{2\sqrt{2\delta}} \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{v \in [0, 1]} |\mathcal{B}(v)|^3 > \frac{\eta^3}{16\sqrt{2}\delta^{3/2}} \right) \leq \frac{\mathbb{E}(|\mathcal{B}(1)|^3) 16\sqrt{2}\delta^{3/2}}{\eta^3}.$$

Lembrando agora que $\beta \in (1/3, 1)$, podemos concluir que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}_n(v) - \mathcal{A}_n(u)| > \eta \right) \right) = 0. \quad (3.5)$$

O último passo da demonstração é mostrar que $\{\mathcal{A}_n(0), n \geq 1\}$ é um conjunto rígido. Para isso, primeiramente veja que

$$\mathcal{A}_n(0) = \frac{L[n]_n - 2n}{n^{1/3}},$$

e use o Teorema 2.12 junto com a desigualdade de Markov para obter

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|\mathcal{A}_n(0)| > M \right) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{|L[n]_n - 2n|}{n^{1/3}} > M \right) \\ &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}|L[n]_n - 2n|}{Mn^{1/3}} = 0. \end{aligned}$$

A desigualdade acima mostra que $\{\mathcal{A}_n(0), n \geq 1\}$ é rígida e, junto com (3.5) e o Teorema 15.5 de [3], mostra que a coleção $\{\mathcal{A}_n, n \geq 1\}$ é rígida no espaço de funções cadlag em $[0, 1]$ e que todo limite fraco de \mathcal{A}_n vive no espaço de funções contínuas. \square

3.4 Usando outra escala para Flutuações Locais

Nas duas últimas seções, definimos \mathcal{A}_n utilizando uma escala de $n^{2/3}$. Agora vamos estudar o comportamento das Flutuações Locais quando utilizamos uma escala de n^γ com $\gamma \in (0, 2/3)$. Seja, agora, $\mathcal{B} \equiv (\mathcal{B}(u))_{u \geq 0}$ o movimento Browniano padrão em $(-\infty, \infty)$.

Teorema 3.6. *Fixe $\gamma \in (0, 2/3)$ e $s > 0$. Defina Δ_n por*

$$u \in \mathbb{R} \mapsto \Delta_n(u) := \frac{L[sn + un^\gamma]_n - L[sn]_n - \mu un^\gamma}{\sigma n^{\gamma/2}}, \quad (3.6)$$

onde $\mu := s^{-1/2}$ e $\sigma := s^{-1/4}$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(\cdot) \stackrel{\text{dist.}}{=} \mathcal{B}(\cdot),$$

no sentido da convergência fraca no espaço de funções cadlag.

Antes de demonstrar o Teorema acima, vamos novamente precisar de alguns Lemas. Durante toda esta seção, vamos considerar, sem perda de generalidade, que $s = 1$ e nos restringir ao intervalo $[0, 1]$. Podemos supor isso pois o resultado geral segue do fato que, para $s > 0$, vale

$$L[sn]_n \stackrel{\text{dist.}}{=} L[s^{1/2}n]_{s^{1/2}n}.$$

Para ver isto, suponha válido o teorema no caso $s = 1$ e veja que o mesmo nos dá a convergência quando andamos pela diagonal, ou seja, estamos vendo a diferença de L entre os pontos $(n + un^\gamma, n)$ e (n, n) . Sendo assim, temos que transferir o caso $s > 0$ qualquer para a diagonal, obtendo

$$L[sn + un^\gamma]_n - L[sn]_n \stackrel{\text{dist.}}{=} L[s^{1/2}n + s^{-1/2}un^\gamma]_{s^{1/2}n} - L[s^{1/2}n]_{s^{1/2}n}.$$

Assim, se quisermos obter a convergência para o movimento Browniano, devemos subtrair o incremento $(s^{-1/2}un^\gamma)$ e dividir pela raiz da escala do incremento $(\sqrt{s^{-1/2}n^\gamma} = s^{-1/4}n^{\gamma/2})$, conseguindo assim provar o teorema para s qualquer.

Lema 3.7. *Fixe $\gamma' \in (\gamma, 2/3)$ e defina*

$$\lambda_\pm = \lambda_\pm(n) := 1 \pm \frac{1}{n^{\gamma'/2}}.$$

Defina também o evento

$$E_n := \left\{ Z'_{\lambda_+}[n]_n \geq 0 \quad e \quad Z_{\lambda_-}[n + n^\gamma]_n \leq 0 \right\}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(E_n^c) \leq \frac{C}{n^{1-3\gamma'/2}}$$

para todo n suficientemente grande.

Demonstração. Denote $r := n^{1/3-\gamma'/2}$ e defina

$$n_+ := \lambda_+ n < 2n \quad e \quad h_+ := \left(\lambda_+ - \frac{1}{\lambda_+} \right) n > rn^{2/3} > rn_+^{2/3}/2,$$

Onde as desigualdades acima valem apenas se n é suficientemente grande. Por (3.3) e (3.4), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z'_{\lambda_+}[n]_n < 0) &= \mathbb{P}(Z_{1/\lambda_+}[n]_n > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[n/\lambda_+]_{\lambda_+ n} > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[\lambda_+ n - h_+]_{\lambda_+ n} > 0) \\ &= \mathbb{P}(Z_1[\lambda_+ n]_{\lambda_+ n} > h_+) \\ &\leq \mathbb{P}(Z_1[n_+]_{n_+} > rn_+^{2/3}/2). \end{aligned}$$

Analogamente, podemos definir

$$n_- := \frac{n}{\lambda_-} < 2n \text{ e } h_- := \left(\frac{1}{\lambda_-} - \lambda_- \right) n > rn^{2/3} > rn_-^{2/3}/2,$$

e, com contas análogas, chegamos à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{\lambda_-}[n + n^\gamma]_n > 0) &= \mathbb{P}(Z_{\lambda_-}[n]_n > -n^\gamma) \\ &= \mathbb{P}(\lambda_- Z_1[\lambda_- n]_{n/\lambda_-} > -n^\gamma) \\ &\leq \mathbb{P}(Z_1[n_-]_{n_-} > h_- - n^\gamma) \\ &\leq \mathbb{P}(Z_1[n_-]_{n_-} > (r - n^{\gamma-2/3})n_-^{2/3}/2), \end{aligned}$$

Agora, assim como no Lema 3.4, podemos usar o Lema 3.2 para completar a demonstração. \square

Lema 3.8. *No evento E_n , temos que, para todo $u < v$ em $[0, 1]$, vale*

$$\Gamma_n^-(v) - \Gamma_n^-(u) - \frac{1}{n^{(\gamma'-\gamma)/2}} \leq \Delta_n(v) - \Delta_n(u) \leq \Gamma_n^+(v) - \Gamma_n^+(u) + \frac{1}{n^{(\gamma'-\gamma)/2}},$$

onde

$$\Gamma_n^\pm := \frac{L_{\lambda_\pm}[n + un^\gamma]_n - L_{\lambda_\pm}[n]_n - \lambda_\pm un^\gamma}{n^{\gamma/2}}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1, se $Z'_{\lambda_+}[n]_n \geq 0$, então

$$L[n + vn^\gamma]_n - L[n + un^\gamma]_n \leq L_{\lambda_+}[n + vn^\gamma]_n - L_{\lambda_+}[n + un^\gamma]_n,$$

e se $Z_{\lambda_-}[n + n^\gamma]_n \leq 0$, então

$$L[n + vn^\gamma]_n - L[n + un^\gamma]_n \geq L_{\lambda_-}[n + vn^\gamma]_n - L_{\lambda_-}[n + un^\gamma]_n.$$

Agora podemos usar o fato que $\lambda_\pm = 1 \pm n^{-\gamma'/2}$ e fazer as contas para finalizar a demonstração do lema. \square

Demonstração do Teorema 3.6. Usando o Lema 3.8, vemos que no evento E_n^c , vale

$$|\Delta_n(v) - \Delta_n(u)| \leq \max \{ |\Gamma_n^\pm(v) - \Gamma_n^\pm(u)| \} + \frac{1}{n^{(\gamma'-\gamma)/2}}.$$

Dessa forma, pelo Lema 3.7, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\Delta_n(v) - \Delta_n(u)| > \eta \right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\Gamma_n^+(v) - \Gamma_n^+(u)| + \frac{1}{n^{(\gamma'-\gamma)/2}} > \eta \right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\Gamma_n^-(v) - \Gamma_n^-(u)| + \frac{1}{n^{(\gamma'-\gamma)/2}} > \eta \right) \\ &\quad + \mathbb{P}(E_n^c). \end{aligned}$$

Assim como na demonstração do Teorema 3.3, $\lambda_\pm \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, o que implica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\Delta_n(v) - \Delta_n(u)| > \eta \right) \leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{v \in [0, \delta]} |\mathcal{B}(v)| > \eta \right) = 2\mathbb{P}\left(\sup_{v \in [0, 1]} |\mathcal{B}(v)| > \frac{\eta}{\sqrt{\delta}} \right),$$

E, assim como no Teorema 3.3, temos

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\Delta_n(v) - \Delta_n(u)| > \eta \right) \right) = 0. \quad (3.7)$$

Como $\Delta_n(0) = 0$ para todo n , 3.7 implica que a coleção $\{\Delta_n, n \geq 1\}$ é rígida no espaço das funções cadlag em $[0, 1]$. E também que qualquer limite fraco desta coleção vive no espaço das funções contínuas [3]. Para obter as distribuições finito-dimensionais, podemos notar que, usando os Lemas 3.7, 3.8 e tomando $u_1, \dots, u_k \in [0, 1]$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{\Delta_n(u_i) \leq a_i\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\Gamma_n^+(u_i) \leq a_i - \frac{1}{n^{(\gamma' - \gamma)/2}}\right\}\right) - \mathbb{P}(E_n^c)$$

e

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{\Delta_n(u_i) \leq a_i\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\Gamma_n^-(u_i) \leq a_i + \frac{1}{n^{(\gamma' - \gamma)/2}}\right\}\right) + \mathbb{P}(E_n^c).$$

O que mostra que as distribuições finito-dimensionais de Δ_n convergem para as distribuições finito-dimensionais do Movimento Browniano padrão. Sendo assim, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(\cdot) \stackrel{dist.}{=} \mathcal{B}(\cdot).$$

E isto finaliza a demonstração. \square

3.5 Comportamento local do processo de Airy

O objetivo desta seção é de mostrar que o processo de Airy₂ se comporta localmente como um processo Browniano. Vamos novamente usar a técnica de comparação local para dar uma demonstração um pouco mais rápida deste fato. Lembre-se da Seção 3.1, aonde denotamos $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}(u))_{u \in \mathbb{R}}$ como tal processo. Além disso, o Teorema 3.3 implica (3.2). Com isto em mente, vamos para o Teorema que queremos demonstrar.

Teorema 3.9. *Defina \mathcal{A}^ε por*

$$u \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{A}^\varepsilon(u) := \varepsilon^{1/2}(\mathcal{A}(\varepsilon u) - \mathcal{A}(0)).$$

Então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}^\varepsilon(\cdot) \stackrel{dist.}{=} \sqrt{2}\mathcal{B}(\cdot),$$

No sentido de convergência fraca de medidas de probabilidade no espaço das funções contínuas.

Assim como em todos os teoremas desse capítulo, vamos precisar demonstrar dois lemas auxiliares.

Lema 3.10. *Fixe $\beta \in (0, 1/2)$ e, para $\varepsilon \in (0, 1)$, seja*

$$\lambda_\pm = \lambda_\pm(n, \varepsilon) := 1 \pm \frac{\varepsilon^{-\beta}}{n^{1/3}}.$$

Defina também o evento

$$E_n(\varepsilon) := \left\{ Z'_{\lambda_+}[n]_n \geq 0 \quad e \quad Z_{\lambda_-}[n + n^{2/3}]_n \leq 0 \right\}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n(\varepsilon)^c) \leq C\varepsilon^{3\beta}$$

Demonstração. Assim como no Lema 3.4, denotamos $r := \varepsilon^{-\beta}$ e definimos

$$n_+ := \lambda_+ n < 2n \quad e \quad h_+ := \left(\lambda_+ - \frac{1}{\lambda_+} \right) n > rn^{2/3} > rn_+^{2/3}/2,$$

e

$$n_- := \frac{n}{\lambda_-} < 2n \quad \text{e} \quad h_- := \left(\frac{1}{\lambda_-} - \lambda_- \right) n > rn^{2/3} > rn_-^{2/3}/2.$$

Onde, novamente, as desigualdades acima valem somente para n suficientemente grande. Podemos agora usar as mesmas ideias do Lema 3.4 para notar que

$$\mathbb{P}\left(Z'_{\lambda_+}[n]_n < 0\right) \leq \mathbb{P}\left(Z_1[n_+]_{n_+} > rn_+^{2/3}/2\right).$$

E também

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z_{\lambda_-}[n + n^{2/3}]_n > 0\right) &= \mathbb{P}\left(Z_{\lambda_-}[n]_n > -n^{2/3}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lambda_- Z_1[\lambda_- n]_{n/\lambda_-} > -n^{2/3}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(Z_1[n_- - h_-]_{n/\lambda_-} > -n^{2/3}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z_1[n_-]_{n_-} > h_- - n^{2/3}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(Z_1[n_-]_{n_-} > (r-2)n_-^{2/3}/2\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos usar o Lema 3.2 para finalizar a prova. \square

Lema 3.11. *No evento $E_n(\varepsilon)$ temos que, para todo $u \in [0, 1 - \delta]$ e $v \in [u, u + \delta]$, vale*

$$\mathcal{B}_{n,-}(\varepsilon v) - \mathcal{B}_{n,-}(\varepsilon u) - 2\delta\varepsilon^{1-\beta} \leq \mathcal{A}_n(\varepsilon v) - \mathcal{A}_n(\varepsilon u) \leq \mathcal{B}_{n,+}(\varepsilon v) - \mathcal{B}_{n,+}(\varepsilon u) + 4\delta\varepsilon^{1-\beta}$$

Demonstração. A mesma demonstração do Lema 3.5 se aplica, desta vez usando o Lema 3.10 e o fato que $\lambda_{\pm} = 1 \pm \varepsilon^{-\beta}/n^{1/3}$. \square

Demonstração do Teorema 3.9. Para $u \in [0, 1]$, seja

$$\mathcal{A}_n^\varepsilon(u) := \varepsilon^{1/2}(\mathcal{A}_n(\varepsilon u) - \mathcal{A}_n(0)) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{n,\pm}^\varepsilon(u) := \varepsilon^{1/2}\mathcal{B}_{n,\pm}(\varepsilon u).$$

Pelo Lema 3.11 temos que, no evento $E_n(\varepsilon)$, para todo $v \in [u, u + \delta]$, vale

$$\mathcal{B}_{n,-}^\varepsilon(v) - \mathcal{B}_{n,-}^\varepsilon(u) - 2\delta\varepsilon^{1/2-\beta} \leq \mathcal{A}_n^\varepsilon(v) - \mathcal{A}_n^\varepsilon(u) \leq \mathcal{B}_{n,+}^\varepsilon(v) - \mathcal{B}_{n,+}^\varepsilon(u) + 4\delta\varepsilon^{1/2-\beta},$$

que, por sua vez, mostra que

$$\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}_n^\varepsilon(v) - \mathcal{A}_n^\varepsilon(u)| \leq \max \left\{ \sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{B}_{n,\pm}^\varepsilon(v) - \mathcal{B}_{n,\pm}^\varepsilon(u)| \right\} + 4\delta\varepsilon^{1/2-\beta}.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}_n^\varepsilon(v) - \mathcal{A}_n^\varepsilon(u)| > \eta\right) &\leq \mathbb{P}(E_n(\varepsilon)^c) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{[u, u+\delta]} |\mathcal{B}_{n,+}^\varepsilon(v) - \mathcal{B}_{n,+}^\varepsilon(u)| > \eta - 4\delta\varepsilon^{1/2-\beta}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\sup_{[u, u+\delta]} |\mathcal{B}_{n,-}^\varepsilon(v) - \mathcal{B}_{n,-}^\varepsilon(u)| > \eta - 4\delta\varepsilon^{1/2-\beta}\right). \end{aligned}$$

Repare agora que $\mathcal{A}_n^\varepsilon$ converge em distribuição para \mathcal{A}^ε e que, assim como no Teorema 3.3, $\mathcal{B}_{n,\pm}^\varepsilon(u/2)$ converge para o movimento Browniano padrão \mathcal{B} . Sendo assim, a desigualdade acima implica

$$\mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}^\varepsilon(v) - \mathcal{A}^\varepsilon(u)| > \eta\right) \leq C\varepsilon^{3\beta} + 2\mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{B}(2v) - \mathcal{B}(2u)| > \eta - 4\delta\varepsilon^{1/2-\beta}\right).$$

Portanto, assim como no Teorema 3.3, vemos que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}^\varepsilon(v) - \mathcal{A}^\varepsilon(u)| > \eta\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{v \in [0, 1]} |\mathcal{B}(v)| > \frac{\eta}{\sqrt{2\delta}}\right)$$

Passando o *limsup* em δ , obtemos

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta} \left(\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{P}\left(\sup_{v \in [u, u+\delta]} |\mathcal{A}^\varepsilon(v) - \mathcal{A}^\varepsilon(u)| > \eta\right) \right) = 0 \quad (3.8)$$

E como $\mathcal{A}^\varepsilon(0) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, temos que, por (3.8), a coleção $\{\mathcal{A}^\varepsilon, \varepsilon \in (0, 1]\}$ é rígida [3].

Para encontrarmos as distribuições finito-dimensionais do processo limite, podemos ver que, pelo Lema 3.11, para $u_1, \dots, u_k \in [0, 1]$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, temos que

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \{\mathcal{A}_n^\varepsilon(u_i) \leq a_i\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \left\{\mathcal{B}_{n,-}^\varepsilon(u_i) \leq a_i + 4\varepsilon^{1/2-\beta}\right\}\right) + \mathbb{P}(E_n(\varepsilon)^c),$$

e que

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \{\mathcal{A}_n^\varepsilon(u_i) \leq a_i\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \left\{\mathcal{B}_{n,+}^\varepsilon(u_i) \leq a_i - 4\varepsilon^{1/2-\beta}\right\}\right) - \mathbb{P}(E_n(\varepsilon)^c),$$

Sendo assim, podemos usar o Lema 3.10 para ver que:

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \{\mathcal{A}^\varepsilon(u_i) \leq a_i\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \left\{\mathcal{B}(2u_i) \leq a_i + 4\varepsilon^{1/2-\beta}\right\}\right) + C\varepsilon^{3\beta},$$

e

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \{\mathcal{A}^\varepsilon(u_i) \leq a_i\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \left\{\mathcal{B}(2u_i) \leq a_i - 4\varepsilon^{1/2-\beta}\right\}\right) - C\varepsilon^{3\beta}.$$

E as duas desigualdades acima, por sua vez, mostram que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \{\mathcal{A}^\varepsilon(u_i) \leq a_i\}\right) = \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^k \left\{\sqrt{2}\mathcal{B}(u_i) \leq a_i\right\}\right). \quad (3.9)$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] D. Aldous and P. Diaconis. Hammersley’s interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probability Theory and Related Fields*, 103(2):199–213, 1995.
- [2] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4):1119–1178, 1999.
- [3] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in probability and Mathematical Statistics: Tracts on probability and statistics. Wiley, 1968.
- [4] E.A. Cator and L.P.R. Pimentel. *Hydrodynamical Methods in Last Passage Percolation Models*. Publicações matemáticas. 2011.
- [5] Eric Cator and Piet Groeneboom. Hammersley’s process with sources and sinks. *Ann. Probab.*, 33(3):879–903, 05 2005.
- [6] Eric Cator and Piet Groeneboom. Second class particles and cube root asymptotics for hammersley’s process. *Ann. Probab.*, 34(4):1273–1295, 07 2006.
- [7] Eric Cator and Leandro P.R. Pimentel. On the local fluctuations of last-passage percolation models. *Stochastic Processes and their Applications*, 125(2):538 – 551, 2015.
- [8] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2010.
- [9] Piet Groeneboom. Hydrodynamical methods for analyzing longest increasing subsequences. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 142(1):83 – 105, 2002. Probabilistic Methods in Combinatorics and Combinatorial Optimization.
- [10] J. M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Theory of Statistics*, Berkeley, Calif., 1972. University of California Press.
- [11] Kurt Johansson. Discrete polynuclear growth and determinantal processes. *Communications in Mathematical Physics*, 242(1):277–329, 2003.
- [12] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.*, 1(6):883–899, 12 1973.
- [13] Thomas M. Liggett. An improved subadditive ergodic theorem. *Ann. Probab.*, 13(4):1279–1285, 11 1985.
- [14] Thomas M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1985.
- [15] B.F Logan and L.A Shepp. A variational problem for random young tableaux. *Advances in Mathematics*, 26(2):206 – 222, 1977.

- [16] Michael Prähofer and Herbert Spohn. Scale invariance of the png droplet and the airy process. *Journal of Statistical Physics*, 108(5):1071–1106, 2002.
- [17] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1964.
- [18] Timo Seppäläinen. Second-order fluctuations and current across characteristic for a one-dimensional growth model of independent random walks. *Ann. Probab.*, 33(2):759–797, 03 2005.
- [19] A. M. Vershik and S. V. Kerov. Asymptotics of the plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of young tables. *Soviet Math. Dokl.*, 18:527 – 531, 1977.