



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Matemática

GABRIEL DA SILVA FREITAS

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES ELÍPTICAS RACIONAIS DE
POSTO 3 COM UMA ÚNICA FIBRA DE TIPO I_6

RIO DE JANEIRO
2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Matemática

GABRIEL DA SILVA FREITAS

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES ELÍPTICAS RACIONAIS DE
POSTO 3 COM UMA ÚNICA FIBRA DE TIPO I_6

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Cecília Salgado

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO GABRIEL DA SILVA FREITAS, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. CECÍLIA SALGADO.

Assinatura da Orientadora

RIO DE JANEIRO
2017

CIP - Catalogação na Publicação

F866c Freitas, Gabriel da Silva
Construção de superfícies elípticas racionais de
posto 3 com uma única fibra de tipo I6 / Gabriel da
Silva Freitas. -- Rio de Janeiro, 2017.
84 f.

Orientadora: Cecília Salgado Guimarães da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Superfície Elíptica Racional . 2. Pencil de
Cúbicas. 3. Grupo de Mordell-Weil. I. Silva,
Cecília Salgado Guimarães da , orient. II. Título.

**CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES ELÍPTICAS RACIONAIS DE POSTO 3 COM UMA ÚNICA
FIBRA DE TIPO I_6**

GABRIEL DA SILVA FREITAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Cecilia Salgado Guimarães
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
(Orientadora)

Luciane Quoos Conte
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Luca Scala
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rodrigo Salomão
UFF - Universidade Federal Fluminense

**RIO DE JANEIRO
2017**

Abstract

In this dissertation we show all configurations pencils of cubics in $\mathbb{P}^2(k)$ that induce a rational elliptic surface with Mordell-Weil rank 3 and with a single reducible fiber of type I_6 . Moreover, using the theory of Mordell-Weil lattices we find a system of generators for the Mordell-Weil group of the surface related to each pencil of cubics. Finally, we show a result that says that all constructions of the pencils cubics obtained are equivalent.

Keywords: Rational Elliptic Surface, Pencil of Cubics, Mordell-Weil Group.

Resumo

Nesta dissertação exibimos todas as configurações de pencils de cúbricas em $\mathbb{P}^2(k)$ que induzem uma superfície elíptica racional com posto de Mordell-Weil igual a 3 e com um única fibra redutível de tipo I_6 . Além disso, utilizando a teoria de reticulado de Mordell-Weil encontramos um sistema de geradores para o grupo de Mordell-Weil da superfície relacionada a cada pencil de cúbricas. Por fim, mostramos um resultado que diz que todas as construções dos pencils de cúbricas obtidas são equivalentes.

Palavras-chave: Superfície Elíptica Racional, Pencil de Cúbricas, Grupo de Mordell-Weil.

Sumário

Agradecimentos	ix
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Definições Gerais	3
1.2 Divisores	6
1.3 Geometria das Superfícies	7
1.4 Blow-up	9
1.5 Sequência de Blow ups	10
1.6 Pencil de curvas	12
2 Superfícies Elípticas e o Reticulado de Mordell-Weil	14
2.1 Curvas Elípticas	14
2.1.1 Estrutura de Grupo	17
2.1.2 Redução módulo π	18
2.2 Superfície Elíptica	19
2.3 Fibras Singulares	22
2.3.1 Modelo de Weierstrass	22
2.3.2 Algoritmo de Tate	23
2.4 Reticulado de Mordell-Weil	26
2.4.1 Reticulados	26
2.4.2 Os grupos de Néron-Severi e Mordell-Weil	28
2.4.3 Os reticulados de Néron-Severi e de Mordell-Weil	29
2.4.4 Resultados para superfícies elípticas racionais	31
3 Construção de Superfícies Elípticas Racionais de posto 3 com uma única fibra de tipo I_6	33
3.1 Fibras redutíveis em superfícies elípticas com posto 3	33
3.2 Uma única fibra redutível	35
3.3 Pencil de cúbicas com posto 3	40
3.4 Exemplos	53
3.5 Equivalências	58

Referências	61
A Código	62
B Contrações	64

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela sua bondade e seu infinito amor. Pelo seu amparo nos momentos difíceis, dando-me forças para superá-los e continuar a caminhada. Por Ele, para Ele, são todas as coisas!

Aos professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro, que contribuíram para minha formação, particularmente, quero expressar meus sinceros agradecimentos a professora Cecília Salgado, por seu excelente trabalho de orientação; a dedicação e paciência que sempre teve para entender e atender aos meus questionamentos.

Aos meus familiares, pelo apoio, carinho e por tudo que já fizeram e fazem por mim. Em especial, a minha mãe Sandra, que mesmo distante sempre me deu o amor, a força e o suporte necessário, para chegar até aqui, a ela devo tudo.

À Laís, minha esposa amada, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo seu infinito amor e incentivo nos momentos difíceis. Sua companhia é o maior presente de Deus em minha vida.

Aos amigos Deniel Corrêa e Ana Maria Chaparro, pelos momentos que passamos juntos, alguns de muito desespero, mas todos sempre superados. Obrigado pelas conversas jogadas fora e aos cafés tomados que certamente deixarão saudades.

À CAPES, agradeço o apoio financeiro dado durante todo o mestrado.

Lista de Ilustrações

2.1	Curvas com um nó e uma cúspide na origem e suas retas tangentes (tracejadas). . .	17
2.2	Operação nos pontos de uma curva elíptica.	18
2.3	Relação entre seções e pontos na fibra genérica.	21
3.1	Configuração dos pontos de base na cúbica R	36
3.2	Configurações dos pontos de base em cada blow up.	37
3.3	Configuração das (-1) -curvas acima dos pontos de base.	37
3.4	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 1	41
3.5	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 2	44
3.6	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 3	45
3.7	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 4	47
3.8	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 5	49
3.9	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 6	50
3.10	Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a Construção 7	52
3.11	Configuração das curvas excepcionais com a (-1) -curva R	53

Lista de Tabelas

2.1	Fórmulas de mudança de variável para equações de Weierstrass por [13].	16
2.2	Classificação de Kodaira para fibras singulares	25
2.3	Valorização dos coeficientes da equação de Weierstrass por [9].	27
2.4	Contribuições locais para fibras singulares por [11].	31
3.1	Possibilidades de contrações de uma fibra redutível de tipo I_6	39

Introdução

As superfícies elípticas formam uma importante classe de superfícies algébricas, desempenhando um papel fundamental para muitas considerações aritméticas e geométricas. Nossa definição de superfície elíptica pressupõe a existência de uma seção, visando a exploração de alguns aspectos aritméticos. Para os nossos objetivos vamos trabalhar sobre um corpo k algebricamente fechado e de característica zero, nos restringindo à subclasse de superfícies elípticas racionais, isto é, superfícies elípticas que são birracionalmente equivalentes a $\mathbb{P}^2(k)$. Essa restrição implica que a curva de base da fibração elíptica é a reta projetiva $\mathbb{P}^1(k)$. Uma vez que cada superfície elíptica pode ser vista como uma curva elíptica sobre um corpo de funções de uma curva algébrica não-singular, uma superfície elíptica racional pode ser vista com uma curva elíptica sobre o corpo de funções $k(\mathbb{P}^1(k)) = k(t)$. Graças a Lang-Néron temos uma generalização do Teorema de Mordell-Weil para este contexto. Diremos então que uma superfície elíptica racional tem posto r , se a curva elíptica associada sobre o corpo de funções $k(t)$ tem posto r .

Uma outra forma de identificarmos uma superfície elíptica é como uma família de curvas elípticas sobre o corpo k .

Uma superfície elíptica racional pode ser obtida pela seguinte construção: Sejam $F, G \in k[X, Y, Z]$ polinômios homogêneos de grau 3, descrevendo cúbicas planas projetivas sem componentes em comum e com ao menos uma sendo não-singular. A aplicação

$$\mathbb{P}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad (x : y : z) \mapsto (F(x, y, z) : G(x, y, z)),$$

é racional e não está definida exatamente nos pontos de $F \cap G$, que pelo Teorema de Bézout são nove pontos contados com multiplicidades. Note que estes são exatamente os pontos de base do pencil de cúbicas gerado por F e G . Ao realizarmos o blow up desses nove pontos, resolvemos esta indeterminação e obtemos uma superfície $\mathcal{E}$ com um morfismo $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ dado pela projeção na segunda coordenada, suas fibras são quase todas, exceto um número finito, curvas elípticas. Miranda em [4] mostrou que toda superfície elíptica racional é isomorfa a uma superfície obtida pelo blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de um pencil de cúbicas, assumindo, como nós, que o corpo k é algebricamente fechado.

Com isso, dada uma superfície elíptica racional com um posto fixado, surge naturalmente a seguinte,

Pergunta: Quais pencils de cúbicas em $\mathbb{P}^2(k)$ induzem essa superfície?

Shioda em [11] respondeu essa questão para posto oito, Fusi em [1] para posto sete e seis, Salgado

em [8] para posto cinco e Pastro em [6] para posto 4. O objetivo desse trabalho é dar uma resposta parcial para o caso de superfícies elípticas racionais de posto 3.

A fórmula de Shioda-Tate (2.4.4) relaciona o grupo de Mordell-Weil de uma superfície elíptica com seu grupo de Néron-Severi. Como superfícies elípticas racionais sobre um corpo algebricamente fechado têm posto de Néron-Serevi igual a 10, somos capazes de identificar os tipos de fibras redutíveis que podem ocorrer ao fixarmos o posto do grupo de Mordell-Weil.

Nesta dissertação, vamos nos concentrar no caso de uma superfície elíptica racional de posto 3 com uma única fibra redutível de tipo I_6 . Utilizando ferramentas análogas aos artigos citados, vamos exibir todas as possíveis configurações de pencils de cúbicas para a obtenção da superfície desejada.

Shioda em [11] fornece a base para a teoria dos reticulados de Mordell-Weil para uma superfície elíptica. A ideia principal é munir o grupo de Mordell-Weil com um pareamento adequado, de modo a torna-lo um reticulado. Com auxílio dessa teoria, continuamos nosso estudo sobre superfície elíptica racional de posto 3 com uma única fibra redutível, caracterizando geradores para o grupo de Mordell-Weil da superfície elíptica relacionada a cada pencil de cúbicas. Por fim, mostraremos que todas as construções dos pencils de cúbicas induzindo uma superfície elíptica racional de posto 3 com uma única fibra redutível de tipo I_6 são equivalentes, isto é, qualquer um desses pencils de cúbicas pode ser obtido por outro após uma transformação birracional.

Essa dissertação está organizada da seguinte forma:

1. No capítulo 1, apresentamos um breve resumo de aspectos relacionados à geometria algébrica e teoria da interseção. O propósito desse capítulo é dar uma rápida exposição dos principais pontos para o entendimento do presente trabalho e fixar as notações.
2. No capítulo 2, expomos uma pequena síntese da teoria de curvas elípticas, a fim de definirmos superfícies elípticas e realizarmos seu estudo. Introduzimos uma discussão sobre fibras singulares e a classificação de Kodaira, de forma a podermos identificar e classificar as fibras singulares em uma superfície elíptica. Baseado no artigo de Shioda [11], apresentamos a noção de reticulado de Mordell-Weil e os resultados por ele obtido que são de interesse para essa dissertação.
3. No capítulo 3, iniciamos com considerações gerais sobre fibras redutíveis em superfície elípticas racionais de posto 3. Abordamos o caso particular da fibra de tipo I_6 , exibindo todas as construções de pencils de cúbicas que induzem superfícies elípticas racionais de posto 3 com uma única fibra redutível de tipo I_6 . Destinamos uma seção para fornecer exemplos explícitos de cada construção de pencil de cúbicas antes descritos. Mostramos em seguida, um teorema que nos diz que todas as construções antes exibidas são equivalentes.
4. No Apêndice A, apresentamos o código utilizado para obtenção das equações de Weierstrass e das configurações das fibras singulares nas superfícies elípticas obtidas nos exemplos expostos no Capítulo 3.
5. No Apêndice B, expomos os diagramas das contrações presentes na demonstração do Teorema 3.5.1.

Capítulo 1

Preliminares

Neste texto, presume-se conhecimentos sobre alguns conceitos e resultados elementares relacionados a geometria algébrica e teoria de interseção. Nesse primeiro capítulo vamos recapitular os principais pontos, acreditando que seja possível acompanhar o texto apenas com a leitura do mesmo. No entanto, recomendamos [3] e [2] como referências mais abrangentes sobre esses pré-requisitos. Cabe ressaltar que para todos os fatos que não são contribuições do presente texto, exibiremos seus enunciados e indicamos referências para as respectivas demonstrações.

1.1 Definições Gerais

Esta seção tem por objetivo a apresentação de um breve resumo de alguns conceitos básicos de geometria algébrica que utilizaremos ao longo do texto. Ao que se segue k denotará um corpo algebricamente fechado de característica zero.

O **espaço projetivo de dimensão n** , denotado por $\mathbb{P}^n(k)$, é o conjunto dos subespaços vetoriais de k^{n+1} de dimensão 1. Como todo subespaço vetorial de k^{n+1} de dimensão 1 é unicamente determinado por um vetor não-nulo em k^{n+1} ; temos que dois vetores não-nulos geram o mesmo espaço se, e somente se, eles são múltiplos escalar um do outro. Em outras palavras,

$$\mathbb{P}^n(k) = (k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

onde a relação de equivalência é dada por

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i = \lambda y_i \text{ para algum } \lambda \in k \setminus \{0\} \text{ e para todo } i \text{ entre } 0 \text{ e } n.$$

A classe de equivalência de $(x_0, \dots, x_n)$ será denotada por $(x_0 : \dots : x_n)$ e nesta última notação, $x_0, \dots, x_n$ são chamados de **coordenadas homogêneas**.

Dado um polinômio $F \in k[X_0, \dots, X_n]$, em geral, o valor de F em um ponto $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ não está definido, já que o ponto $(x_0 : \dots : x_n)$ não possui uma única representação. No entanto, se consideramos $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ um polinômio homogêneo de grau d a expressão $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ sempre faz sentido. Isso se deve ao fato que

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n).$$

Em particular temos que

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0 \Leftrightarrow F(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Sendo assim, faz sentido a seguinte definição.

Definição 1.1.1. *Seja $S \subset k[X_0, \dots, X_n]$ um conjunto de polinômios homogêneos. O **conjunto algébrico projetivo** definido por S é o subconjunto de $\mathbb{P}^n(k)$ dado por*

$$Z(S) := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) : F(x_0, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } F \in S\}.$$

A coleção de todos os conjuntos algébricos projetivos satisfaz os axiomas de espaço topológico para subconjuntos fechados. Mais precisamente:

1. $\emptyset$ e $\mathbb{P}^n(k)$ são conjuntos algébricos projetivos;
2. Se $Z_1, \dots, Z_r$ são conjuntos algébricos projetivos então $\cup_{i=1}^r Z_i$ é um conjunto algébrico projetivo;
3. Dada uma família arbitrária $(Z_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos algébricos projetivos temos que $\bigcap_{\lambda \in L} Z_\lambda$ é um conjunto algébrico projetivo.

Com isso, existe uma topologia em $\mathbb{P}^n(k)$ para o qual os conjuntos algébricos projetivos são conjuntos fechados, chamada de **topologia de Zariski** de $\mathbb{P}^n(k)$. Podemos estendê-la a um subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n(k)$ através da topologia induzida, isto é, os fechados de X são interseções de X com fechados de $\mathbb{P}^n(k)$.

De maneira geral, um conjunto algébrico projetivo pode se decompor como união finita de outros subconjuntos algébricos. Nesse sentido, costuma-se fazer a seguinte distinção: um conjunto projetivo Z é dito **redutível** se existem fechados próprios (na topologia de Zariski) $Z_1 \subsetneq Z$ e $Z_2 \subsetneq Z$ tais que $Z = Z_1 \cup Z_2$. Do contrário, Z se diz **irredutível**.

Definição 1.1.2. *Uma **variedade projetiva** é um conjunto algébrico projetivo irredutível. Se X é uma variedade projetiva, dizemos que $Y \subset X$ é uma **subvariedade** de X se Y com a topologia induzida é um fechado irredutível em X .*

Existe ainda uma noção de dimensão de uma variedade projetiva, vamos nos restringir apenas a definição topológica.

Definição 1.1.3. *Seja X uma variedade projetiva, a **dimensão de X** é o maior inteiro n tal que existe uma cadeia estritamente crescente*

$$\emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$$

de subvariedade de X . Uma variedades projetivas de dimensões 1 (respectivamente 2, $n - 1$) em $\mathbb{P}^n(k)$ é denominada uma curva (resp. superfície e hipersuperfície).

Se $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ é um polinômio homogêneo, vimos que a expressão $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ está bem definida. Porém, o valor de F em um ponto $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ ainda depende das coordenadas projetivas. Contudo, se tomarmos polinômios homogêneos $F, G \in k[X_0, \dots, X_n]$ de mesmo grau d , com $G(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ o quociente $\frac{F(x_0, \dots, x_n)}{G(x_0, \dots, x_n)}$ está bem definido. De fato,

$$\frac{F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)}{G(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)} = \frac{\lambda^d F(x_0, \dots, x_n)}{\lambda^d G(x_0, \dots, x_n)} = \frac{F(x_0, \dots, x_n)}{G(x_0, \dots, x_n)}.$$

Isso nos leva às seguintes definições.

Definição 1.1.4. *Seja X uma variedade projetiva. Uma função $f : X \rightarrow k$ é **regular no ponto** $x \in X$, se existem aberto U contendo x e polinômios homogêneos $G, H \in k[X_0, \dots, X_n]$ de mesmo grau, tais que para todo $y \in U$, $G(y) \neq 0$ e $f(y) = \frac{H(y)}{G(y)}$. Dizemos que f é **regular** em X se é regular em todos os pontos de X . Denotamos por $\mathcal{O}(X)$ o anel de todas as funções regulares em X .*

Definição 1.1.5. *Sejam X e Y variedades projetivas. A aplicação $\phi : X \rightarrow Y$ é um **morfismo** se para todo aberto $V \subset Y$ e toda função regular $f \in \mathcal{O}(V)$ temos*

1. $f^{-1}(V)$ é um aberto em X ;
2. $f \circ \phi \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.

As variedades X e Y são ditas **isomorfas** se existem morfismos $\phi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow X$ tais que $\psi \circ \phi = id_X$ e $\phi \circ \psi = id_Y$.

Definição 1.1.6. *Uma **aplicação racional** φ de variedades projetivas X e Y , denotada por $\varphi : X \dashrightarrow Y$ é uma classe de equivalência no conjunto dos pares (U, φ_U) , onde $U \subset X$ é um aberto não-vazio e $\varphi_U : U \rightarrow Y$ é um morfismo. Os pares (U, φ_U) e (V, φ_V) são considerados equivalentes se $\varphi_U = \varphi_V$ em $U \cap V$.*

Uma aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ não está definida em todos os pontos de X , mas em alguns subconjuntos abertos de X . A união de todos subconjuntos abertos onde φ está definida é chamada de **domínio de definição** de φ , sendo o maior subconjunto de X onde φ é um morfismo.

Ao tentarmos considerar aplicações racionais invertíveis, nos deparamos com um problema técnico: se $\varphi : X \dashrightarrow Y$ e $\tau : Y \dashrightarrow Z$ são aplicações racionais, em geral, não podemos compô-las. Isso porque, o fecho da imagem de φ em Y pode não intersectar o domínio de definição de τ . Portanto precisamos impor a seguinte condição para que as composições sejam bem definidas.

Definição 1.1.7. *A aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ é dita **dominante** se sua imagem contém um aberto denso de Y .*

Definição 1.1.8. *Uma aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ é **birracional** se é dominante e existe uma aplicação racional $\tau : Y \dashrightarrow X$ tal que $\tau \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \tau = id_Y$. Neste caso dizemos que X e Y são **birracionalmente equivalentes**.*

Uma aplicação racional que tem como contradomínio o corpo k é chamada de **função racional**. O conjunto das funções racionais em X forma um corpo chamado **corpo das funções de X** que denotaremos por $k(X)$.

Se $x \in X$, o **anel local de x em X** é o subanel de $k(X)$ definido por

$$\mathcal{O}_{x,X} := \{\varphi \in k(X) : \varphi \text{ é regular em } x\}.$$

Se denotarmos por $K = \mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}$ o corpo residual de $\mathcal{O}_{x,X}$, sendo $\mathfrak{m} = \{\varphi \in \mathcal{O}_{x,X} : \varphi(x) = 0\}$. O anel local $\mathcal{O}_{x,X}$ é dito **regular** se a dimensão como espaço vetorial sobre K de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ é igual a dimensão da variedade X .

Definição 1.1.9. *Seja X uma variedade projetiva. Dizemos que X é **não-singular** no ponto $x \in X$ se o anel local $\mathcal{O}_{x,X}$ é regular. X é **não-singular** se todos os seus pontos são não-singulares. Caso contrário, X é dito **singular**.*

1.2 Divisores

Seja X uma variedade projetiva de dimensão n . Um **divisor primo** Y de X é uma subvariedade irredutível de dimensão $n-1$. O grupo abeliano livre gerado pelos divisores primos de X é chamado o **grupo dos divisores** de X e será denotado por $\text{Div}X$.

Um elemento $D \in \text{Div}X$ é chamado um **divisor** de X . Por definição D se escreve de maneira única como combinação linear com coeficiente inteiros

$$D = \sum_Y n_Y Y,$$

onde Y percorre os divisores primos de X e $n_Y = 0$ exceto para um número finito de Y 's.

Definição 1.2.1. *Um divisor $D = \sum_Y n_Y Y$ é dito **efetivo** se $n_Y \geq 0$ para todo Y .*

Seja φ uma função racional não-nula em X . Para cada divisor primo Y de X denote a valorização discreta de φ associada a Y por $v_Y(\varphi)$. Temos que $v_Y(\varphi) = 0$ para quase todo Y (veja [3], Proposição 6.1, p.131), assim, podemos definir o divisor de φ por

$$\text{div}(\varphi) = \sum_Y v_Y(\varphi) Y.$$

Definição 1.2.2. *Um divisor D em X é dito **principal**, se $D = \text{div}(\varphi)$ como definido acima.*

Observe que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} k(X) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \text{Div}X \\ \varphi & \longmapsto & \sum_Y v_Y(\varphi) Y \end{array}$$

é um homomorfismo de grupos, cuja a imagem são exatamente os divisores principais. Assim o conjunto dos divisores principais é um subgrupo de $\text{Div}X$.

Definição 1.2.3. *Dois divisores D_1 e D_2 em X são ditos **linearmente equivalentes** se a diferença $D_1 - D_2$ é um divisor principal. Neste caso, escrevemos $D_1 \sim D_2$.*

A equivalência linear é uma relação de equivalência no grupo $\text{Div}X$. O grupo dos divisores módulo essa relação de equivalência é chamado **grupo de Picard** de X , denotado por $\text{Pic}X$.

Exemplo 1.2.4. Se Y é um divisor primo em $\mathbb{P}^2(k)$, então Y é uma curva irredutível em $\mathbb{P}^2(k)$. Seja $F \in k[X, Y, Z]$ o polinômio homogêneo que define Y , ou seja, $Y = Z(F)$. Assim convencionamos que o grau de Y é o grau do polinômio F e definimos o grau de um divisor $D = \sum_Y n_Y Y$, denotado por $\deg D$, pondo

$$\deg D = \sum_Y n_Y \deg Y \in \mathbb{Z},$$

onde $\deg Y$ é o grau da curva Y .

Se $G \in k[X, Y, Z]$ é um polinômio homogêneo de grau d então, podemos escrevê-lo como produto de fatores irredutíveis $G = G_1^{n_1} \cdots G_r^{n_r}$. Cada G_i define uma curva irredutível Y_i de grau d_i e podemos definir o divisor de G por $\text{div}(G) = \sum n_i Y_i$. Portanto, o grau do divisor G é igual a d . Ao considerarmos φ uma função racional não-nula em $\mathbb{P}^2(k)$ temos que $\varphi = \frac{G}{H}$, onde G e H são polinômios homogêneos de mesmo grau. Assim, $\text{div}(\varphi) = \text{div}(G) - \text{div}(H)$ e consequentemente $\deg(\varphi) = 0$.

Com isso temos um homomorfismo de grupos dado por:

$$\begin{array}{ccc} \partial : \text{Pic}(\mathbb{P}^2(k)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \bar{D} & \longmapsto & \deg D \end{array}$$

Note que ∂ está bem definido. De fato, se $\bar{D}_1 = \bar{D}_2$ então existe $\varphi \in k(\mathbb{P}^2) \setminus \{0\}$ tal que $D_1 - D_2 = \text{div}(\varphi)$. Assim,

$$\partial(\bar{D}_1) - \partial(\bar{D}_2) = \deg D_1 - \deg D_2 = \deg(D_1 - D_2) = \deg(\varphi) = 0.$$

Vamos mostrar que ∂ é na verdade um isomorfismo. Sejam $n \in \mathbb{Z}$, Y uma curva irredutível de grau 1 e tome o divisor $D = nY$. Então segue que $\partial(\bar{D}) = \deg D = n$; isso mostra que ∂ é sobrejetor. Agora, seja $D \in \ker \partial$, então podemos escrever $D = D_1 - D_2$, onde D_1 e D_2 são divisores efetivos, ambos de grau d . Logo, existem polinômios G e H homogêneos de grau d tais que $D_1 = \text{div}(G)$ e $D_2 = \text{div}(H)$. Considerando $\varphi = \frac{G}{H}$, temos que $D = \text{div}(\varphi)$ e consequentemente ∂ é injetivo. Portanto segue que $\text{Pic}(\mathbb{P}^2(k)) \cong \mathbb{Z}$.

1.3 Geometria das Superfícies

Esta seção destina-se a apresentar alguns aspectos sobre teoria de interseção. Nosso objetivo é entender como duas curvas contidas em uma superfície se intersectam e como podemos computar seus pontos de interseção. Nesta seção, X denotará uma superfície projetiva não-singular sobre um corpo k algebricamente fechado.

Começamos observando que um divisor primo Y de X é uma curva irredutível, de modo que, um divisor D em X é uma soma formal de curvas. Essas curvas irredutíveis que aparecem na soma são também chamadas **componentes do divisor D** .

Definição 1.3.1. *Seja Y um divisor primo de X e seja $x \in X$. Uma **equação local** para Y em x é uma função $\varphi \in \mathcal{O}_{x,X}$, tal que $v_Y(\varphi) = 1$ e $v_{Y'}(\varphi) = 0$ para todo divisor primo $Y' \neq Y$ com $x \in Y'$.*

Sejam Y_1 e Y_2 divisores primos de X . Se $x \in Y_1 \cap Y_2$, dizemos que Y_1 e Y_2 se intersectam **transversalmente** em x se as equações locais de Y_1 e Y_2 em x geram o ideal maximal do anel local $\mathcal{O}_{x,X}$.

Se Y_1 e Y_2 são divisores primos que se intersectam transversalmente em um número finito de pontos $p_1, \dots, p_r$ é natural definirmos o número de interseção $Y_1 \cdot Y_2$ como sendo o número r . O teorema a seguir nos diz que essa definição pode ser estendida a todos os divisores.

Teorema 1.3.2. *Existe um único pareamento*

$$\text{Div}X \times \text{Div}X \longrightarrow \mathbb{Z}, (D_1, D_2) \longmapsto D_1 \cdot D_2$$

que, para quaisquer divisores D_1, D_2 e D em $\text{Div}X$, possui as seguintes propriedades:

1. *Se D_1 e D_2 são divisores primos que se intersectam transversalmente em todos os pontos $x \in D_1 \cap D_2$, então $D_1 \cdot D_2 = \#(D_1 \cap D_2)$;*
2. *$D_1 \cdot D_2 = D_2 \cdot D_1$ (simétrico);*
3. *$(D_1 \cdot D_2) \cdot D = D_1 \cdot D + D_2 \cdot D$ (aditivo);*
4. *Se $D_1 \sim D_2$ então $D_1 \cdot D = D_2 \cdot D$.*

Demonstração. Veja ([3], Teorema 1.1, p.357). □

Dados $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ o Teorema 1.3.2 estende o cálculo do número de interseção $D_1 \cdot D_2$ da seguinte maneira: encontra-se divisores D'_1 e D'_2 se intersectando transversalmente tais que $D'_1 \sim D_1$ e $D'_2 \sim D_2$ e em seguida conta-se o número de pontos em $D'_1 \cap D'_2$. No entanto, existe uma maneira mais eficiente, que consiste em atribuir multiplicidades aos pontos de $D_1 \cap D_2$.

Definição 1.3.3. *Uma **equação local** para D em x é uma função $\varphi \in k(X) \setminus \{0\}$, com a propriedade de que $x \notin D - \text{div}(\varphi)$.*

Sejam D_1 e D_2 divisores em X . Se x é um ponto em X que não está em uma componente comum de D_1 e D_2 , então definimos a **multiplicidade de interseção** de D_1 e D_2 em x como sendo o número

$$(D_1 \cdot D_2)_x = \dim_k \mathcal{O}_{x,X} / (\varphi_1, \varphi_2);$$

onde φ_1 e φ_2 são equações locais para D_1 e D_2 em x .

Proposição 1.3.4. *Sejam $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ divisores sem componentes em comum. Então a multiplicidade de interseção é finita para todo $x \in X$ e*

$$D_1 \cdot D_2 = \sum_{x \in D_1 \cap D_2} (D_1 \cdot D_2)_x$$

Demonstração. Veja ([3], Proposição 1.4, p.360). □

Exemplo 1.3.5. Sejam C_1 e C_2 curvas projetivas de graus respectivamente d_1 e d_2 . Sejam R_1 e R_2 retas projetivas distintas. Vimos na seção anterior que a aplicação grau define um isomorfismo entre $\text{Pic}(\mathbb{P}^2)$ e $\mathbb{Z}$. Sendo assim,

$$\deg(C_i) = d_i = \deg(d_i R_i) \text{ o que implica que } C_i \sim d_i R_i.$$

Além disso, $R_1 \cdot R_2 = 1$, já que quaisquer duas retas distintas em $\mathbb{P}^2(k)$ se intersectam transversalmente em um único ponto. Com isso, podemos calcular:

$$C_1 \cdot C_2 = (d_1 R_1) \cdot (d_2 R_2) = d_1 d_2 (R_1 \cdot R_2) = d_1 d_2 = \deg C_1 \deg C_2.$$

Se C_1 e C_2 não têm componente em comum, isso pode ser interpretado em termos de multiplicidade de interseção

$$\sum_{x \in C_1 \cap C_2} (C_1 \cdot C_2)_x = \deg C_1 \deg C_2.$$

Essa igualdade é chamada de Teorema de Bézout para curvas planas.

Definição 1.3.6. *Um divisor primo D em X é uma $(-n)$ -curva, se $D \cong \mathbb{P}^1(k)$ e D tem **auto-interseção** $-n$, isto é, $D^2 = D \cdot D = -n$.*

Dizemos que D e D' são numericamente equivalentes se, e somente se, eles tem o mesmo número de interseção com qualquer curva em X . Isto é:

$$D \equiv D' \iff D \cdot C \sim D' \cdot C \text{ para qualquer curva } C \text{ em } S.$$

Essa relação é chamada de **equivalência numérica** e a utilizamos para definir o grupo $\text{Num}(X) = \text{Div}(X)/\equiv$.

1.4 Blow-up

Sejam X uma superfície não-singular e $x \in X$. O **blow-up** de X em x consiste em uma superfície X' juntamente com um morfismo $\pi : X' \rightarrow X$ que goza das seguintes propriedades:

1. $\pi^{-1}(x)$ é uma curva racional não-singular em X' ;
2. $X' \setminus \pi^{-1}(x)$ é isomorfa a $X \setminus \{x\}$.

Quando nos referimos a $\pi^{-1}(x)$ como uma curva racional, queremos dizer $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1(k)$. Essa curva é chamada de **divisor excepcional**, sendo geralmente representada por E . A auto-interseção de E em X' é -1 , isto é, E é uma (-1) -curva (veja [3], Proposição 3.1, p.387).

Seja C uma curva na superfície não-singular X . Se $\pi : X' \rightarrow X$ é o blow-up de X em $x \in X$, então a **transformada estrita** $\tilde{C}$ de C é a curva em X' dada por

$$\tilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{x\})}.$$

Quando $x \notin C$ temos que a imagem inversa total $\pi^{-1}(C)$ coincide com a transformada estrita $\tilde{C}$. Caso contrário, o divisor excepcional E aparece como componente dessa curva, mais precisamente

$$\pi^{-1}(C) = \tilde{C} \cup E.$$

Se consideramos a curva C como um divisor em X , definimos a **transformada total** $\pi^*(C)$ de C em X como sendo

$$\pi^*(C) = \tilde{C} + nE,$$

onde n é a multiplicidade de C em x .

Encerramos essa seção, ressaltando a existência de um importante teorema devido a Castelnuovo (veja [3], Teorema 5.7, p.414). Esse nos diz o seguinte: se X' é uma superfície algébrica não-singular e Y é uma (-1) -curva em X' , então existe uma superfície X (não-singular) e um ponto $x \in X$, de modo que, X' é isomorfa ao blow up de X em x , tendo como divisor excepcional a curva Y . Em outras palavras, toda (-1) -curva em uma superfície não-singular, pode ser contraída a um ponto não-singular. Esse processo é chamado de **blow down**.

1.5 Sequência de Blow ups

Seja X_0 uma superfície não-singular. O blow up de X_0 em um ponto $x_0 \in X_0$ fornece uma nova superfície X_1 , um morfismo $\pi_1 : X_1 \rightarrow X_0$ e um divisor excepcional E_1 . Considerando x_1 um ponto em X_1 , ao realizarmos o blow-up de X_1 em x_1 , obtemos uma superfície X_2 , um morfismo $\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$, um divisor excepcional E_2 e a transformada estrita de E_1 em X_2 , que denotaremos por E_1^2 . Com isso, temos as seguintes possibilidades:

Caso A: $x_1 \notin E_1$. Sendo assim, a curva E_1^2 coincide com a imagem inversa total de E_1 , isto é, $E_1^2 = \pi_2^{-1}(E_1)$;

Caso B: $x_1 \in E_1$. Neste caso, o divisor excepcional E_2 aparece como componente da curva $\pi_2^{-1}(E_1)$. Assim, vamos ter as relações:

$$(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(x_0) = \pi_2^{-1}(E_1) = E_2 \cup E_1^2,$$

$$\pi_2^*(E_1) = E_2 + E_1^2.$$

Dando seguimento, ao tomarmos um ponto $x_2 \in X_2$; o blow up de X_2 nesse ponto, nos dá uma superfície X_3 , um morfismo $\pi_3 : X_3 \rightarrow X_2$ e um divisor excepcional E_3 . Supondo que no segundo blow up ocorreu o caso A, então temos os seguintes casos:

Caso A1: $x_2 \in X_2 \setminus (E_1^2 \cup E_2)$. As transformadas estritas das curvas E_1^2 e E_2 , que denotaremos respectivamente por E_1^3 e E_2^3 , coincidem com as suas respectivas imagens inversas, assim:

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_0) &= \pi_3^{-1}(\pi_2^{-1}(E_1)) = \pi_3^{-1}(E_1^2) = E_1^3, \\ (\pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_1) &= \pi_3^{-1}(E_2) = E_2^3.\end{aligned}$$

Caso A2: $x_2 \in E_1^2$. Com isso, o divisor excepcional E_3 é uma componente da curva $\pi_3^{-1}(E_1^2)$. Logo temos que:

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_0) &= \pi_3^{-1}(\pi_2^{-1}(E_1)) = \pi_3^{-1}(E_1^2) = E_1^3 \cup E_3, \\ \pi_3^*(E_1^2) &= E_1^3 + E_3.\end{aligned}$$

Caso A3: $x_2 \in E_2$. Assim, o divisor excepcional E_3 é uma componente da curva $\pi_3^{-1}(E_2)$ e teremos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}(\pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_1) &= \pi_3^{-1}(E_2) = E_2^3 \cup E_3, \\ \pi_3^*(E_2) &= E_2^3 + E_3.\end{aligned}$$

Agora se ocorre o caso B no segundo blow up teremos:

Caso B1: $x_2 \in X_2 \setminus (E_1^2 \cup E_2)$. As curvas E_1^3 e E_2^3 coincidem com as suas respectivas imagens inversas, assim:

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_0) &= \pi_3^{-1}(\pi_2^{-1}(E_1)) = \pi_3^{-1}(E_2 \cup E_1^2) = \pi_3^{-1}(E_2) \cup \pi_3^{-1}(E_1^2) = E_2^3 \cup E_1^3, \\ (\pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_1) &= \pi_3^{-1}(E_2) = E_2^3.\end{aligned}$$

Caso B2: $x_2 \in E_1^2 \setminus E_1^2 \cap E_2$. Assim, o divisor excepcional E_3 é uma componente da curva $\pi_3^{-1}(E_1^2)$. Logo temos que:

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_0) &= \pi_3^{-1}(E_2 \cup E_1^2) = \pi_3^{-1}(E_2) \cup \pi_3^{-1}(E_1^2) = E_2^3 \cup (E_3 \cup E_1^3), \\ \pi_3^*(E_1^2) &= E_3 + E_2^3 + E_1^3.\end{aligned}$$

Caso B3: $x_2 \in E_2 \setminus E_1^2 \cap E_2$. Com isso, o divisor excepcional E_3 é uma componente da curva $\pi_3^{-1}(E_2)$. Assim temos que:

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_0) &= \pi_3^{-1}(E_2 \cup E_1^2) = \pi_3^{-1}(E_2) \cup \pi_3^{-1}(E_1^2) = (E_3 \cup E_2^3) \cup E_1^3, \\ \pi_3^*(E_2) &= E_3 + E_2^3 + E_1^3.\end{aligned}$$

Caso B4: $x_2 \in E_1^2 \cap E_2$. Neste caso, o divisor excepcional E_3 é uma componente das curvas E_1^3 e E_2^3 . Logo valem as relações:

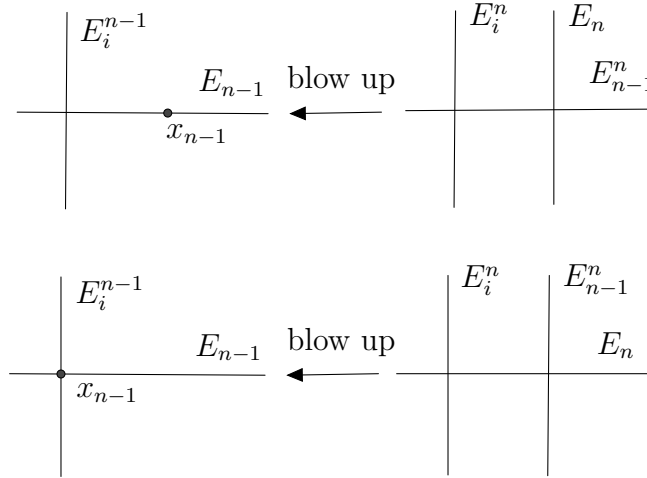
$$(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3)^{-1}(x_0) = \pi_3^{-1}(E_2 \cup E_1^2) = \pi_3^{-1}(E_2) \cup \pi_3^{-1}(E_1^2) = (E_3 \cup E_2^3) \cup (E_3 \cup E_1^3),$$

$$\pi_3^*(E_1^2 + E_2) = 2E_3 + E_2^3 + E_1^3.$$

Continuando esse processo obtemos uma sequência de blow ups

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0$$

de modo que, se $x_{n-1} \in \cap E_i$ então $(\pi_1 \circ \dots \pi_{n-1} \circ \pi_n)^{-1} = E_n \cup E_{n-1}^n \cup \dots \cup E_1^n$, onde E_i^n para $1 \leq i \leq n-1$, representa a transformada estrita da curva E_i na superfície X_n . Além disso, temos a propriedade de que o divisor excepcional E_n em X_n intersecta E_{n-1}^n e, no máximo, uma outra curva E_i^n , com $i < n-1$.



Um ponto no divisor excepcional E_1 na superfície X_1 é dito ser um **ponto infinitamente próximo de primeira ordem** para $x_0 \in X_0$. Mais geralmente, um ponto no divisor excepcional E_d na superfície X_d é dito um **ponto infinitamente próximo de ordem d** para x_0 .

1.6 Pencil de curvas

Definição 1.6.1. *Sejam F e G curvas planas projetivas de grau d . A família de curvas de grau d dada por*

$$\Lambda = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

*é chamada de **pencil de curvas gerado por F e G** .*

Exemplo 1.6.2. O conjunto $\mathcal{C}$ de todas as cônicas em $\mathbb{P}^2(k)$ passando por $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$ e $P_4 = (1 : 1 : 1)$ é um pencil gerado por $F = x(y - z)$ e $G = z(y - x)$. Com efeito, seja $C = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx$ uma cônica genérica. A condição de C passar por P_1, P_2, P_3 e P_4 é equivalente a $a = 0, b = 0, c = 0$ e $2d + 2e + 2f = 0$. Portanto, $C = dxy + eyz + fzx$ com $e + d + f = 0$, ou seja, $C = dx(y - z) + ez(y - x)$ com d e e arbitrários, mas ambos não-nulo.

Observação 1.6.3. Quando o grau das curvas F e G que geram o pencil Λ forem iguais a 3, vamos nos referir à Λ como um **pencil de cúbricas**.

Sejam F' e G' curvas distintas em um pencil gerado por curvas F e G ; então podemos escrever, $F' = \alpha F + \beta G$ e $G' = \gamma F + \delta G$ com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{P}^1$ e $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Assim, para qualquer ponto P do plano temos que

$$\begin{cases} F'(P) = \alpha F(P) + \beta G(P) \\ G'(P) = \gamma F(P) + \delta G(P). \end{cases}$$

Logo $F(P) = G(P) = 0$ se, e somente se, $F'(P) = G'(P) = 0$, e portanto, $F' \cap G' = F \cap G$. Com isso, vemos que quaisquer duas curvas distintas em um pencil gerado por F e G se intersectam nos mesmo pontos que F e G .

Definição 1.6.4. Seja $\Lambda = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ o pencil gerado por F e G . Os pontos de interseção de F e G (e portanto os pontos de interseção de quaisquer duas curva em Λ) são chamados **pontos de base** do pencil Λ .

Definição 1.6.5. Seja $\Lambda = \{\lambda F + \mu G \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$ o pencil gerado por F e G . Um ponto de base p de Λ tem **multiplicidade** d , se a multiplicidade de interseção de F e G em p for igual a d , ou seja, $(F \cdot G)_p = d$.

Usando a terminologia dos pontos infinitamente próximos, um ponto de base p é dito **infinitamente próximo de ordem d** ; se a imagem de p após os d blow ups está no divisor excepcional E_d .

Capítulo 2

Superfícies Elípticas e o Reticulado de Mordell-Weil

Neste capítulo, reunimos os conceitos imprescindíveis para a compreensão do resultado obtido por esse trabalho. Nele faremos um resumo dos conceitos e resultados sobre curvas elípticas, a fim de definirmos superfícies elípticas e realizarmos seu estudo. Na seção 2.3, faremos uma discussão sobre fibras singulares e a classificação de Kodaira, de forma a podermos identificar e classificar as fibras singulares em uma superfície elíptica. Ao fim, apresentamos a noção de reticulado de Mordell-Weil juntamente com alguns resultados obtidos por Shioda em [11].

2.1 Curvas Elípticas

Definição 2.1.1. *Uma **curva elíptica** sobre um corpo k é um par (E, O) , onde E é uma cúbica plana projetiva não-singular e O é um ponto em $E(k)$. O ponto O é dito a **origem** de uma curva elíptica.*

Na prática omitimos o ponto O e escrevemos E/k no lugar de (E, O) , ou simplesmente E quando não houver dúvida sobre corpo em que se está trabalhando.

Definição 2.1.2. *Duas curvas elípticas (E, O) e (E', O') são ditas isomorfas, se existe um isomorfismo $\varphi : E \rightarrow E'$ satisfazendo $\varphi(O) = O'$.*

Uma **equação de Weierstrass** é uma expressão do tipo

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3Z^3 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

com os coeficientes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \bar{k}$. Além disso, definimos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
b_2 &:= a_1^2 + 4a_2, \\
b_4 &:= 2a_4 + a_1a_3, \\
b_6 &:= a_3^2 + 4a_6, \\
b_8 &:= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2, \\
c_4 &:= b_2^2 - 24b_4, \\
c_6 &:= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6, \\
\Delta &:= -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6,
\end{aligned}$$

sendo Δ chamado de discriminante da equação de Weierstrass.

Em geral, para facilitar a notação escrevemos a equação de Weierstrass em coordenadas não homogêneas (fazendo $Z = 1$),

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

com um ponto extra $O = (0 : 1 : 0)$ no infinito.

A próxima proposição mostra que existe uma relação entre curvas elípticas e curvas definidas por equações de Weierstrass.

Proposição 2.1.3. *(i) Se C é uma cúbica não-singular dada por uma equação Weierstrass então C define uma curva elíptica com origem $O = (0 : 1 : 0)$;*

(ii) Seja E uma curva elíptica qualquer, então existe uma curva elíptica C como em (i) tal que E é isomorfa a C ;

(iii) Quaisquer duas equações de Weierstrass para uma mesma curva elíptica estão relacionadas por uma mudança de variáveis da forma

$$(x, y) \rightarrow (u^2x + r, u^3y + su^2x + tu)$$

com $u, r, s, t \in \bar{k}$ e $u \neq 0$.

Demonstração. Veja ([13], Proposição 3.1, p.59). □

Se as equações de Weierstrass

$$\begin{aligned}
y^2 + a_1xy + a_3y &= x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\
y^2 + a'_1xy + a'_3y &= x^3 + a'_2x^2 + a'_4x + a'_6
\end{aligned}$$

estão relacionadas como na Proposição 2.1.3, então a Tabela 2.1 mostra como os coeficientes e os valores da equação de Weierstrass se relacionam.

Supondo que a característica do corpo k é diferente de 2 e 3, a equação de Weierstrass, após uma mudança de variáveis adequada, assume a forma

$$y^2 = x^3 + Ax + B \tag{2.1.1}$$

onde $A, B \in \overline{k}$. Associado a esta equação temos o valor

$$\Delta = -16(4A^3 + 27B^2).$$

Além disso, a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (u^2x, u^3y)$ preserva a forma da equação (2.1.1) e estão relacionadas da seguinte maneira

$$u^4A' = A, \quad u^6B' = B, \quad u^{12}\Delta' = \Delta. \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} ua'_1 &= a_1 + 2s \\ u^2a'_2 &= a_2 - sa_1 + 3s - s^2 \\ u^3a'_3 &= a_3 + ra_1 + 2t \\ u^4a'_4 &= a_4 - sa_3 + 2ra_2t + rs)a_1 + 3r^2 \\ u^6a'_6 &= a_6 + ra_4 + r^2a_2 + r^3 - ta_3 - t^2 - rta_1 \\ \hline u^2b'_2 &= b_2 + 12r \\ u^4b'_4 &= b_4 + rb_2 + 6r^2 \\ u^6b'_6 &= b_6 + 2rb_4 + r^2b_2 + 4r^3 \\ u^8b'_8 &= b_8 + 3rb_6 + 3r^2b_4 + r^3b_2 + 3r^4 \\ \hline u^4c'_4 &= c_4 \\ u^6c'_6 &= c_6 \\ u^{12}\Delta' &= \Delta \end{aligned}$$

Tabela 2.1: Fórmulas de mudança de variável para equações de Weierstrass por [13].

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto singular da curva associada a equação de Weierstrass

$$f(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3 - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0.$$

Como P é singular temos que $f_x(P) = f_y(P) = 0$. Fazendo a expansão de Taylor de f em torno do ponto P obtemos a seguinte equação:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = ((y - y_0) - \alpha(x - x_0))((y - y_0) - \beta(x - x_0)) - (x - x_0)^3$$

com $\alpha, \beta \in \overline{k}$.

Definição 2.1.4. Se $\alpha \neq \beta$ diremos que o ponto P é um **nó** e suas retas tangentes em P são dada por

$$y - y_0 = \alpha(x - x_0) \quad e \quad y - y_0 = \beta(x - x_0).$$

Por outro lado, se $\alpha = \beta$ então o ponto P é dito uma **cúspide** e a sua reta tangente em P é dada por

$$y - y_0 = \alpha(x - x_0)$$

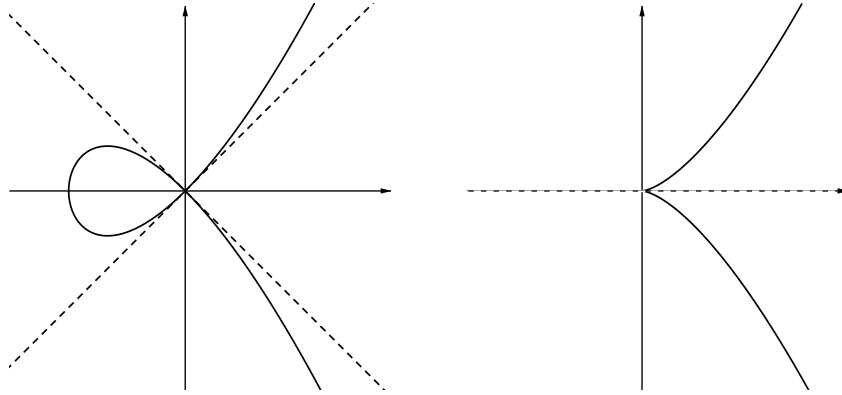


Figura 2.1: Curvas com um nó e uma cúspide na origem e suas retas tangentes (tracejadas).

Proposição 2.1.5. *Uma curva dada por uma equação de Weierstrass é singular se, e somente se, o seu discriminante $\Delta = 0$. Se for singular existe um único ponto singular que será um nó se $c_4 \neq 0$; ou uma cúspide quando $c_4 = 0$.*

Demonstração. Veja ([13], Proposição 1.4, p.45). □

2.1.1 Estrutura de Grupo

Seja E uma curva elíptica. Assim, a curva E consiste nos pontos (x, y) que satisfazem a equação de Weierstrass juntamente com o ponto $O = (0 : 1 : 0)$. Podemos então definir a operação $\oplus : E \times E \rightarrow E$ da seguinte maneira: dado $(P, Q) \in E \times E$, denotemos por $R \in E$ o terceiro ponto de interseção de E com a reta passando por P e Q (ou a reta tangente a E em P caso se tenha $P = Q$). Definimos $P \oplus Q$ como sendo o terceiro ponto de interseção da reta passando por R e O (ou a reta tangente a E em O caso se tenha $O = R$). Em outras palavras, $P \oplus Q$ é a reflexão do ponto R em torno do eixo x .

Observação 2.1.6. Como E é uma cúbica plana, o Teorema de Bézout nos garante que E intersecta qualquer reta em exatamente três pontos levando em consideração as multiplicidades de interseção. Além disso, o fato de E ser não-singular garante que há uma única reta tangente à curva em cada ponto P da mesma, logo o ponto $P \oplus P$ está bem definido.

Proposição 2.1.7. $(E, \oplus)$ é um grupo abeliano com elemento neutro O .

Demonstração. Veja ([13], Proposição 2.2, p.51). □

O conjunto dos pontos racionais $E(k)$ é um subgrupo de E . O próximo resultado revela uma importante propriedade desse grupo.

Teorema 2.1.8. (Mordell-Weil) *Seja k um corpo de números. Se E/k é uma curva elíptica, então o grupo $E(k)$ é finitamente gerado.*

Demonstração. Veja ([13], Teorema 6.7, p.239). □

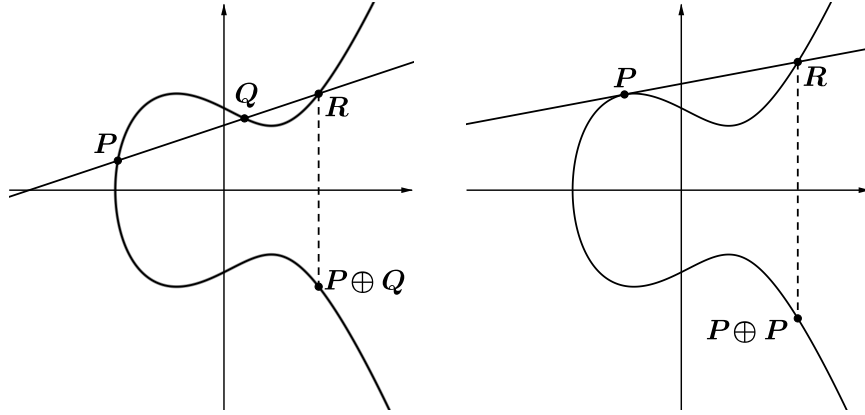


Figura 2.2: Operação nos pontos de uma curva elíptica.

2.1.2 Redução módulo π

Podemos estudar curvas elípticas definidas sobre um corpo completo com respeito a uma valorização discreta. Para isso utilizaremos as seguintes notações:

K um corpo local, completo com respeito a valorização discreta e normalizada v ;

$R = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$, o anel local de inteiros;

$R^* = \{x \in K : v(x) = 0\}$, o grupo de unidades de R ;

$\mathcal{M} = \{x \in K : v(x) > 0\}$, o ideal maximal de R ;

$k = R/\mathcal{M}$, o corpo residual de R .

Seja E/K uma curva elíptica dada pela seguinte equação de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

Se $u \in K$, a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (u^2x, u^3y)$ nos permite encontrar uma equação similar com coeficientes $u^i a_i$. Assim, escolhendo u de modo que $v(u)$ é suficientemente grande, podemos obter uma equação de Weierstrass para E onde os coeficientes estão todos em R . Feito isso, o discriminante satisfaz $v(\Delta) \geq 0$ e uma vez que a valorização é discreta, podemos escolher entre todas as equações de Weierstrass com coeficientes em R a que minimize o valor de $v(\Delta)$. Isso nos leva a seguinte definição.

Definição 2.1.9. *Seja E/K uma curva elíptica. Uma equação de Weierstrass para E é dita uma equação mínima de Weierstrass para E em v , se $v(\Delta)$ é mínimo entre todas as equações de Weierstrass que definem E , sujeito a condição que todos os coeficientes estejam em R . Se Δ é o discriminante de uma equação mínima, então $v(\Delta)$ é a valorização do discriminante mínimo.*

Dado uma equação mínima de Weierstrass temos que os seus coeficientes estão todos em R , conseqüentemente o discriminante está em R . Por outro lado, se a equação não é mínima então existe uma mudança de variáveis que nos conduz a uma equação mínima cujo discriminante $\Delta' =$

$u^{-12}\Delta$. Assim, $v(\Delta) = v(\Delta') + 12v(u)$; como a equação inicial não é mínima temos que $v(u) > 0$ e portanto, $v(\Delta) \geq 12$. Com isso, vemos que a seguinte afirmação é verdadeira.

Proposição 2.1.10. *Uma equação de Weierstrass com coeficientes em R é mínima se o seu discriminante satisfaz a condição $v(\Delta) < 12$.*

Seja π um parâmetro uniformizador para R , isto é, $\mathcal{M} = \pi R$. Denotaremos por $\sim$ o homomorfismo de redução módulo π , $R \rightarrow k = R/\pi R$ dado por $t \mapsto \tilde{t}$.

Definição 2.1.11. *Seja E/K uma equação mínima de Weierstrass dada pela forma $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$. A redução $\tilde{E}$ de E módulo π é dada por*

$$y^2 + \tilde{a}_1xy + \tilde{a}_3y = x^3 + \tilde{a}_2x^2 + \tilde{a}_4x + \tilde{a}_6.$$

Pelo fato de iniciarmos com uma equação mínima de Weierstrass; segue que a redução é única a menos de mudança de variáveis. Ao reduzimos um curva elíptica E módulo π podemos classifica-la de três maneiras. A saber:

Definição 2.1.12. *Seja E/K uma curva elíptica dada por uma equação mínima de Weierstrass. Então E/K é dita ter **boa redução**, se $\tilde{E}/k$ é não-singular. Caso contrario dizemos que E/K tem **redução ruim**. No caso de E/K ter redução ruim existe ainda a seguinte distinção:*

- (a) E/K tem uma redução multiplicativa, se $\tilde{E}/k$ tem um nó.
- (b) E/K tem uma redução aditiva, se $\tilde{E}/k$ tem uma cúspide.

Proposição 2.1.13. *Seja E/K uma curva elíptica dada por uma equação mínima de Weierstrass. Então:*

1. E/K tem boa redução se, e somente se, $v(\Delta) = 0$.
2. E/K tem redução multiplicativa, se e somente se, $v(\Delta) > 0$ e $v(c_4) = 0$.
3. E/K tem redução aditiva, se e somente se, $v(\Delta) > 0$ e $v(c_4) > 0$.

Demonstração. Veja ([13], Proposição 5.1, p.196). □

2.2 Superfície Elíptica

Esta seção é dedicada a apresentação do conceito de superfície elíptica. Nela veremos que uma superfície elíptica sobre um corpo k corresponde a uma curva elíptica sobre um corpo de funções. Lembramos que estamos trabalhando sobre um corpo k algebricamente fechado de característica zero.

Definição 2.2.1. *Seja C uma curva projetiva não-singular. Uma **superfície elíptica** $\mathcal{E}$ sobre C é uma superfície projetiva equipada com:*

1. Um morfismo $\pi : \mathcal{E} \rightarrow C$ tal que, para quase todos os pontos $t \in C$, a fibra $\mathcal{E}_t = \pi^{-1}(t)$ é uma curva elíptica.
2. Um morfismo $\sigma : C \rightarrow \mathcal{E}$, chamado de seção, tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_C$.

Além disso, $\mathcal{E}$ é relativamente mínima, isto é, as fibras não contém curvas de auto-interseção -1 .

Usualmente quando falamos de uma superfície elíptica $\mathcal{E}$ sobre C , muitas vezes omitimos o morfismo π , a seção σ , ou até mesmo a curva de base C , escrevendo simplesmente $\mathcal{E}$.

As fibras $\mathcal{E}_t$ que não são curvas elípticas são chamadas de **fibras singulares**; daremos uma atenção especial a essas fibras na próxima seção. Para nossos objetivos, vamos assumir que toda superfície elíptica possui ao menos uma fibra singular. Isso porque não estamos interessados em superfícies como do exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.2. Sejam E/k uma curva elíptica e C uma curva projetiva não-singular. A superfície S dada pelo produto $E \times C$ juntamente com o morfismo de projeção de S na segunda coordenada, define uma superfície elíptica sobre C , cuja as fibras são todas isomorfas a E .

Definição 2.2.3. Uma superfície elíptica $\mathcal{E}$ sobre C é **split** se existe uma curva elíptica E_0 e um isomorfismo birracional

$$i: \mathcal{E} \longrightarrow E_0 \times C$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{i} & E_0 \times C \\ & \searrow \pi & \downarrow \text{proj}_2 \\ & & C \end{array}$$

Observação 2.2.4. Ao impormos que toda superfície elíptica $\mathcal{E}$ sobre C possui a menos uma fibra singular, temos como consequência que $\mathcal{E}$ não é isomorfa ao produto $E \times C$. Em particular $\mathcal{E}$ não é split, a seguir veremos a importância desse fato.

Dada uma superfície elíptica $\mathcal{E}$ sobre C , pode-se encontrar $A, B \in k(C)$ tais que $\mathcal{E}$ é birracionalmente equivalente a superfície $\mathcal{E}(A, B) = \{((x : y : z), t) \in \mathbb{P}^2 \times C : Y^2Z = X^3 + A(t)XZ^2 + B(t)Z^3\}$. Assim, a curva elíptica $E : y^2 = x^3 + Ax + B$ sobre o corpo de funções $k(C)$ é unicamente determinada, a menos de $k(C)$ -isomorfismos, por $\mathcal{E}$. Dizemos que a curva elíptica E é a **fibra genérica** de $\mathcal{E} \rightarrow C$. Essa relação pode ser vista com mais detalhes em ([12], Proposição 3.8, p.206).

Teorema 2.2.5. (Lang-Néron) Seja $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica sobre C e E a fibra genérica de $\mathcal{E} \rightarrow C$. Se $\mathcal{E}$ não é split então o grupo $E(k(C))$ é finitamente gerado.

Demonstração. Veja ([12], Teorema 6.1, p.230). □

Esse teorema generaliza o Teorema de Mordell-Weil visto em 2.1.8, para curvas elípticas sobre corpos de funções. Somando-o a um resultado de estrutura para grupos finitamente gerados, podemos concluir que

$$E(k(C)) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T$$

onde T é um grupo de torção e r é um inteiro não-negativo chamado **posto** da curva elíptica $\mathcal{E}$.

Se $\pi : \mathcal{E} \rightarrow C$ é uma superfície elíptica, então existe uma correspondência entre o conjunto das seções de π e pontos racionais na fibra genérica E . Essa relação é expressa no seguinte:

Teorema 2.2.6. *Sejam $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica sobre C e E a fibra genérica de $\mathcal{E} \rightarrow C$. O conjunto definido por*

$$\mathcal{E}(C) = \{\text{seções } \sigma : C \rightarrow \mathcal{E}\}$$

é um grupo abeliano. Além disso, existe um isomorfismo de grupos

$$E(k(C)) \cong \mathcal{E}(C)$$

Demonstração. Veja ([12], Proposição 3.10, p.210). □

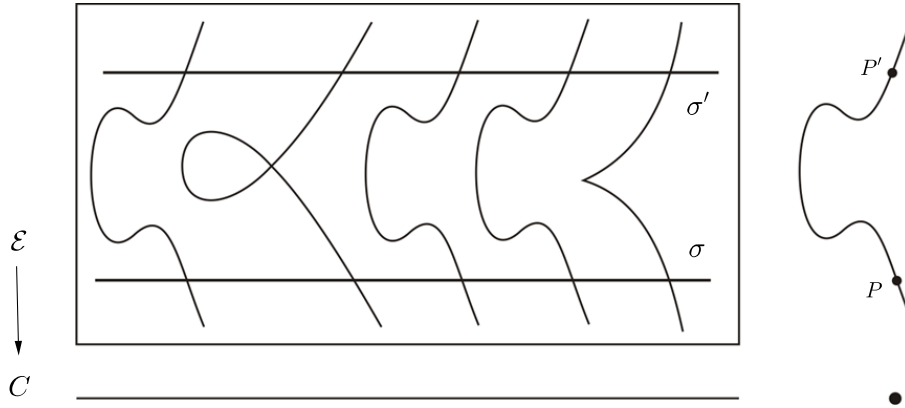


Figura 2.3: Relação entre seções e pontos na fibra genérica.

O grupo $\mathcal{E}(C)$ é chamado o **grupo de Mordell-Weil** de $\mathcal{E}$, que será denotado por $MW(\mathcal{E})$. Além disso, passamos a fazer referência ao posto da fibra genérica de $\mathcal{E} \rightarrow C$ como o posto do grupo de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

Definição 2.2.7. *Uma superfície elíptica é dita **racional** se é birracionalmente equivalente a $\mathbb{P}^2(k)$.*

Observação 2.2.8. Se $\mathcal{E}$ é uma superfície elíptica sobre C , então o morfismo $\pi : \mathcal{E} \rightarrow C$ induz uma inclusão de corpos de funções $k(C) \subset k(\mathcal{E})$. Assim, no caso em que $\mathcal{E}$ é uma superfície elíptica racional temos que $C \cong \mathbb{P}^1(k)$. Portanto, toda superfície elíptica racional pode ser vista como uma curva elíptica sobre o corpo de funções de $\mathbb{P}^1(k)$.

Exemplo 2.2.9. Sejam $F, G \in k[X, Y, Z]$ polinômios homogêneos de grau 3, descrevendo cúbicas planas projetivas sem componentes em comum e com ao menos uma sendo não-singular.

Considere a aplicação

$$\varphi: \mathbb{P}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad \varphi(x : y : z) = (F(x, y, z) : G(x, y, z)).$$

Esta aplicação é racional e não está definida exatamente nos pontos de $F \cap G$, que pelo Teorema de Bézout são nove pontos contados com multiplicidade. Estes são exatamente os pontos de base do pencil de cúbicas gerado por F e G . Ao realizarmos o blow up desses nove pontos obtemos uma superfície $\mathcal{E}$ com um morfismo $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ dado pela projeção na segunda coordenada, suas fibras são quase todas, exceto um número finito, curvas elípticas.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \swarrow & & \searrow \pi \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Assim, a superfície $\mathcal{E}$ é elíptica e racional, tendo como seções as curvas acima dos pontos de base do pencil. Observe que se houver um ponto de base infinitamente próximo, além da seção, aparecerem (-2) -curvas que são divisores excepcionais oriundos do processo de resolução da singularidade.

Por outro lado, como estamos sobre um corpo algebricamente fechado, temos a seguinte:

Proposição 2.2.10. *Seja $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica racional. Então existe um pencil de cúbicas planas tal que a superfície obtida pelo blow up de $\mathbb{P}^2$ nos seus pontos de base é isomorfa a $\mathcal{E}$.*

Demonstração. Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em [4]. □

2.3 Fibras Singulares

2.3.1 Modelo de Weierstrass

Seja C uma curva projetiva sobre k . Dada uma curva elíptica E sobre $k(C)$, existem diferentes maneiras de estender E a uma superfície elíptica $\mathcal{E}$ sobre C , de modo que, a fibra genérica de $\mathcal{E}$ seja exatamente E . No entanto, todos esses modelos são birracionalmente equivalentes. Vamos descrever um modelo que é baseado na equação de Weierstrass não homogênea para a curva elíptica E .

Começamos adicionando o ponto $O = (0 : 1 : 0)$ a cada fibra não-singular para obtermos uma curva elíptica com origem O ; isso é suficiente para o caso em que a fibra é não-singular. Falta agora preencher as fibras em cada ponto onde o discriminante de E se anula.

Seja t_0 um ponto em C tal que $\Delta(t_0) = 0$, então a fibra em t_0 determina uma curva com um nó ou uma cúspide. Nessa situação, torna-se importante distinguir se o ponto singular da fibra é ou não uma singularidade da superfície definida pela equação de Weierstrass. No caso em que a singularidade não ocorre na superfície, o próximo passo para nossa construção é simplesmente manter a fibra singular (com um nó ou uma cúspide) em t_0 . Agora, se o ponto singular da fibra é realmente uma singularidade da superfície, então devemos resolver a singularidade. Após a resolução da singularidade preenchemos a fibra singular em t_0 com a curva obtida no processo de desingularização.

Em síntese, se a singularidade é um ponto duplo racional as curvas excepcionais originadas dos sucessivos blow-ups são todas (-2) -curvas e formam configurações conforme a Tabela 2.2. Por outro lado, se a singularidade é pior que um ponto duplo racional então a forma de Weierstrass não é mínima, fazendo uma mudança de variáveis podemos encontrar uma nova fórmula de Weierstrass para obter nossa construção. Isso é basicamente o algoritmo de Tate.

2.3.2 Algoritmo de Tate

Vamos apresentar brevemente o algoritmo de Tate, tal algoritmo nos dá uma descrição das possíveis configurações das fibras singulares no modelo de Néron. Para completar os detalhes omitidos pode-se consultar a seguinte referência [12]. Exibiremos um resumo do que consta em [9].

Seja E uma curva elíptica sobre $k(C)$. Apesar de estarmos trabalhando com um corpo de característica 0, esse resultado vale para características diferente de 2 e 3. Iniciamos supondo que a característica de k é diferente de 2, o que nos permitindo utilizar a seguinte equação de Weierstrass para E :

$$y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

com discriminante dado por $\Delta = -27a_6^2 + 18a_2a_4a_6 + a_2^2a_4^2 - 4a_2^3a_6 - 4a_4^3$.

Trabalhando localmente, fixamos um parâmetro uniformizador t em C com valorização normalizada v . Suponha que exista uma fibra singular em $t = 0$. Fazendo uma translação em x , podemos mover a singularidade para a origem, obtendo a equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + a_2x^2 + ta'_4x + ta'_6. \quad (2.3.1)$$

Se $t \nmid a_2$ então a equação (2.3.1) descreve uma curva racional com um nó em $t = 0$. Intitulamos esse tipo de fibra como **multiplicativa**. No caso em que $t \mid a_2$ então (2.3.1) configura uma curva racional com uma cúspide em $t = 0$, denominamos esse tipo de fibra como **aditiva**. Nos dois casos expostos, o ponto singular é uma singularidade da superfície definida por (2.3.1) se, e somente se, $t \mid a'_6$.

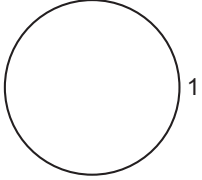
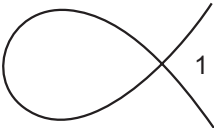
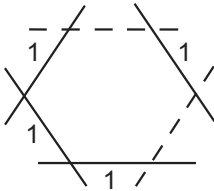
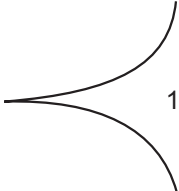
Suponha que $t \nmid a_2$. Assim, devido ao termo $a_2^3a_6$ que aparece em Δ temos que $(0, 0)$ é uma singularidade da superfície se, e somente se, $v(\Delta) > 1$. Se $v(\Delta) = 1$ segue que $(0, 0)$ é uma singularidade apenas da fibra. Portanto a fibra singular em $t = 0$ é uma curva racional com um nó. Para esse tipo de fibra Kodaira introduziu a notação $\mathbf{I}_1$.

Assumindo que $v(\Delta) = n > 1$, deve-se resolver a singularidade em $(0, 0)$ da superfície. Após o processo de desingularização são adicionada $(n - 1)$ curvas racionais de auto-interseção -2 . Sendo assim, a fibra singular consiste em um ciclo de curvas racionais que se intersectam transversalmente, a qual Kodaira atribuiu o símbolo $\mathbf{I}_n$.

No caso em que $t \mid a_2$ e $(0, 0)$ não é uma singularidade da superfície, a fibra singular em $t = 0$ é uma curva racional com um cúspide. Kodaira atribuiu o símbolo $\mathbf{II}$ para esse tipo de fibra. Agora, se $(0, 0)$ é uma singularidade da superfície existem três possibilidades para o divisor excepcional do primeiro blow up:

1. Uma curva racional intersectando de maneira tangencial a transformada estrita da curva cuspidal;
2. Duas retas intersectando a transformada estrita de curva cuspidal em um ponto;
3. Uma reta dupla.

Nos casos (1) e (2), resolveu-se a singularidade e Kodaira classifica essas fibras singulares como sendo de tipo $\mathbf{III}$ e $\mathbf{IV}$ respectivamente. Já o ultimo caso serão necessários novos blow ups, que introduzirão retas de multiplicidade no máximo seis e auto-interseção -2 . À essas fibras Kodaira utilizou o simbolo $*$ para fazer suas classificações.

<i>Símbolos de Kodaira</i>	<i>Número de Componentes</i>	<i>Configuração (com multiplicidade)</i>
I_0	1	
I_1	1	
I_n	n	
II	1	

III	2	
IV	3	
I_0^*	5	
I_n^*	$n + 5$	
IV^*	7	
III^*	8	
II^*	9	

Tabela 2.2: Classificação de Kodaira para fibras singulares

Se a característica do corpo k é diferente de 2 ou 3, já vimos que equação de Weierstrass assume uma forma mais agradável, a saber:

$$y^2 = x^3 + Ax + B, \quad A, B \in k.$$

Com essa simplificação podemos determinar o tipo de fibra singular considerando apenas a valorização dos coeficientes A e B juntamente com a do discriminante Δ . Supondo que $v(\Delta) = n > 0$,

tem-se que o tipo de fibra singular pode ser identificada a partir da Tabela 2.3.

Além disso, temos a seguinte relação:

$$\# \begin{pmatrix} \text{Componentes da} \\ \text{fibra singular} \end{pmatrix} = \begin{cases} v(\Delta), & \text{no caso multiplicativo;} \\ v(\Delta) - 1, & \text{no caso aditivo.} \end{cases}$$

Exemplo 2.3.1. Considere a superfície elíptica sobre $\mathbb{P}^1(k)$ dada pela equação Weierstrass

$$\mathcal{E} : y^2 = x^3 + tx + t^2(t + 1).$$

A fim de determinar as fibras singulares em $\mathcal{E}$, primeiro calculamos o discriminante da equação de Weierstrass

$$\Delta = -16t^3(3t + 1)^2(3t + 4).$$

Assim, as fibras singulares estão acima dos pontos onde Δ se anula, isto é, $t = 0$, $t = -1/3$ e $t = -4/3$. Quando $t = 0$ temos que $v_t(\Delta) = 3$, $v_t(A) = 1$ e $v_t(B) = 2$, portanto, de acordo com a Tabela 2.3, a fibra singular é de tipo *III*. Para $t = -1/3$ segue que $v_{(t+1/3)}(\Delta) = 2$, $v_{(t+1/3)}(A) = 0$ e $v_{(t+1/3)}(B) = 0$; conseqüentemente a fibra singular é de tipo I_2 . No caso em que $t = -4/3$ as valorizações são dadas por $v_{(t+4/3)}(\Delta) = 1$, $v_{(t+4/3)}(A) = 0$ e $v_{(t+4/3)}(B) = 0$, logo de acordo com a Tabela 2.3, temos uma fibra singular de tipo I_1 . Por fim, para $t = \infty$ efetuamos a seguinte mudança de variáveis:

$$t \mapsto 1/s, \quad x \mapsto x/s^2, \quad y \mapsto y/s^3.$$

Obtendo de acordo com (2.1.2) os seguintes valores,

$$\Delta' = -48s^6(s + 1)^2(4s + 3), \quad A' = s^3 \text{ e } B' = s^3(s + 1)(s^2 - s + 1).$$

Isso resulta que $v_s(\Delta') = 6$, $v_s(A') = 3$ e $v_s(B') = 3$; há portanto uma fibra de tipo I_0^* .

2.4 Reticulado de Mordell-Weil

2.4.1 Reticulados

Seja L um $\mathbb{Z}$ -módulo livre de posto finito. Um pareamento bilinear simétrico

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

é dito **não-degenerado** se para cada $x \in L \setminus \{0\}$ existir um $y \in L$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Definição 2.4.1. O $\mathbb{Z}$ -módulo L juntamente com o pareamento bilinear simétrico não-degenerado $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado **reticulado**.

<i>Tipo de fibra</i>	$v(A)$	$v(B)$
I_0	$\begin{cases} 0 \\ \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \geq 0 \\ 0 \end{cases}$
$I_n(n > 0)$	0	0
II	≥ 1	1
III	1	≥ 2
IV	≥ 2	2
I_0^*	$\begin{cases} 2 \\ \geq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \geq 3 \\ 3 \end{cases}$
$I_{n-6}^*(n > 6)$	2	3
IV^*	≥ 3	4
III^*	≥ 3	≥ 5
IV	≥ 4	5

Tabela 2.3: Valorização dos coeficientes da equação de Weierstrass por [9].

No caso em que o pareamento assume apenas valores inteiros, isto é $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$, dizemos que o reticulado é **integral**.

Sejam L um reticulado e $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ uma $\mathbb{Z}$ -base de L . Dados $x, y \in L$, podemos escrever $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_i$ e $y = \sum_{j=1}^r \beta_j \xi_j$, com $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$. Portanto obtemos uma forma bilinear

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_j \langle \xi_i, \xi_j \rangle,$$

a matriz $G_L = (\langle \xi_i, \xi_j \rangle)$ é chamada **matriz de Gram** de L com respeito a base $\{\xi_i\}$.

Definição 2.4.2. O determinante $\det L$ do reticulado L é definido pelo valor absoluto do determinante da matriz de Gram G_L .

Observação 2.4.3. O determinante do reticulado L não depende da escolha de base.

Um reticulado L é **definido-positivo** se

$$\langle x, x \rangle > 0 \text{ para todo } x \in L, \text{ com } x \neq 0,$$

de maneira equivalente, se a matriz de Gram é definida-positiva. Analogamente definimos reticulado **definido-negativo**.

Um **subreticulado** T de L é um submódulo de L tal que a restrição do pareamento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $T \times T$ é não-degenerado. Se um subreticulado T tem índice finito em L , então temos a seguinte relação:

$$\det T = \det L \cdot [L : T]^2. \quad (2.4.1)$$

Definição 2.4.4. Um reticulado L é dito **par** se $\langle x, x \rangle \in 2\mathbb{Z}$ para todo $x \in L$. Se $\det L = 1$ então o reticulado L é chamado **unimodular**.

O **dual** de um reticulado L , denotado por L^* , é um reticulado definido por

$$L^* = \{x \in L \otimes \mathbb{Q} : \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \text{ para todo } y \in L\}.$$

Valem as seguintes igualdades:

$$[L^* : L] = \det L, \quad (2.4.2)$$

$$\det L^* = 1/\det L. \quad (2.4.3)$$

2.4.2 Os grupos de Néron-Severi e Mordell-Weil

Quando trabalhamos com uma superfície elíptica $\mathcal{E}$, definida de acordo com a seção 2.2, podemos definir o grupo de Néron-Severi de $\mathcal{E}$ por

$$NS(\mathcal{E}) = D(\mathcal{E})/\equiv,$$

onde $D(\mathcal{E})$ denota o grupo de divisores de $\mathcal{E}$ e $\equiv$ a equivalência numérica.

Observação 2.4.5. Essa definição é válida, pois em uma superfície elíptica, a equivalência numérica coincide com a equivalência algébrica. Uma prova desse resultado pode ser vista em [11].

Shioda mostrou em [11] que $NS(\mathcal{E})$ é um grupo finitamente gerado e livre de torção. Nesse caso denotamos o posto de $NS(\mathcal{E})$ por $\rho(\mathcal{E})$.

Nossos próximos passos vão na direção de exibir uma relação entre os grupo de Néron-Severi $NS(\mathcal{E})$ e o grupo de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})$. Mas antes vamos fixar as notações que utilizaremos a partir de agora. Se $\pi : \mathcal{E} \rightarrow C$ é uma superfície elíptica denotaremos por:

- F_v a fibra $\pi^{-1}(v)$ sobre $v \in C$;
- O a seção neutra;
- m_v o número de componentes da fibra F_v ;
- R os pontos de C abaixo das fibras redutíveis, isto é, $R = \{v \in C \mid F_v \text{ é redutível}\}$;
- $\Theta_{v,0}$ a componente de F_v que intersecta a seção neutra, a componente zero de F_v ;
- $\Theta_{v,i}$ as outras componentes de F_v , com $i \in \{1, \dots, m_v - 1\}$.

Definição 2.4.6. O subgrupo T de $NS(\mathcal{E})$ gerado pela seção neutra e as componentes das fibras é chamado de **subgrupo trivial**.

Como duas fibras são numericamente equivalentes, basta considerar uma fibra geral F e as componentes que não intersectam a seção neutra. Assim, se $T_v = \langle \Theta_{v,i}; 1 \leq i \leq m_v - 1 \rangle$ podemos escrever $T \subset NS(\mathcal{E})$ como a soma

$$T = \langle \bar{O}, F \rangle \bigoplus_{v \in R} T_v.$$

Proposição 2.4.7. *A classe dos divisores de $\{\bar{O}, F, \Theta_{v,i}; v \in R, \leq i \leq m_v - 1\}$ forma uma $\mathbb{Z}$ -base de T . Em particular,*

$$\text{posto}(T) = 2 + \sum_{v \in R} (m_v - 1).$$

Demonstração. Veja ([11], Proposição 2.3, p.216). □

O resultado que faz a conexão entre os dois grupos é o

Teorema 2.4.8. *(Shioda-Tate) Seja T o subgrupo trivial de $NS(\mathcal{E})$. Então o mapa $P \mapsto \bar{P} \mod T$ define um isomorfismo*

$$MW(\mathcal{E}) = NS(\mathcal{E})/T.$$

Demonstração. Veja ([11], Teorema 1.3, p.214). □

Se r é o posto do grupo de Mordell-Weil da superfície elíptica $\mathcal{E}$, então pelo teorema anterior temos que

$$r = \rho(\mathcal{E}) - \text{posto}(T),$$

mas pela Proposição 2.4.7 segue que

$$r = \rho(\mathcal{E}) - 2 - \sum_{v \in R} (m_v - 1). \quad (2.4.4)$$

Essa igualdade é chamada **fórmula de Shioda-Tate**.

2.4.3 Os reticulados de Néron-Severi e de Mordell-Weil

Dada uma superfície elíptica $\mathcal{E}$, vimos na seção anterior que o grupo de Néron-Severi de $\mathcal{E}$ é finitamente gerado. Shioda em [11] mostrou que o pareamento de interseção, descrito na seção 1.3, é não-degenerado. Assim, o par $(NS(\mathcal{E}); \cdot)$ define um reticulado chamado **reticulado de Néron-Severi**.

O Teorema 2.4.8 nos diz que o grupo de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})$ é isomorfo ao grupo quociente $NS(\mathcal{E})/T$. Com isso, vamos incorporar $MW(\mathcal{E})$ em $NS(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Q}$ para definir um pareamento em $MW(\mathcal{E})$. Começamos destacando o seguinte resultado:

Teorema 2.4.9. *Existe um único homomorfismo $\varphi : MW(\mathcal{E}) \rightarrow NS(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Q}$ tal que*

1. $\varphi(P) \equiv (P) \mod (T \otimes \mathbb{Q});$
2. $\varphi(P) \perp T.$

Além disso, temos que $\ker \varphi = MW(\mathcal{E})_{\text{tor}}$, onde $MW(\mathcal{E})_{\text{tor}}$ é o grupo de torção de $MW(\mathcal{E})$.

Demonstração. Veja ([11]; Lema 8.1 e 8.2, pg.226-227). □

Teorema 2.4.10. Para todo $P, Q \in MW(\mathcal{E})$, seja

$$\langle P, Q \rangle = -(\varphi(P) \cdot \varphi(Q)). \quad (2.4.5)$$

Então isso define um pareamento bilinear simétrico em $MW(\mathcal{E})$, que induz uma estrutura de reticulado definido-positivo em $MW(\mathcal{E})/MW(\mathcal{E})_{tor}$.

Demonstração. veja ([11], Teorema 8.4, p.227). □

Definição 2.4.11. O pareamento (2.4.5) no grupo de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})$ é denominado **pareamento de altura** e o par $(MW(\mathcal{E})/MW(\mathcal{E})_{tor}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de **reticulado de Mordell-Weil**.

A fórmula explícita do pareamento altura, de acordo com ([11], Teorema 8.6, p.228), tem a seguinte forma:

$$\langle P, Q \rangle = \chi + (P \cdot O) + (Q \cdot O) - (P \cdot Q) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P, Q),$$

onde χ é a característica de Euler da superfície, $(P \cdot O)$ o número de interseção das seções P e O , analogamente para $(Q \cdot O)$, $(P \cdot Q)$ e o termo $\text{contr}_v(P, Q)$ representa a **contribuição local** em v , de acordo com a interseção de P e Q com a fibra F_v : se P intersecta a componente $\Theta_{v,i}$ e Q a $\Theta_{v,j}$, então o termo de contribuição local é dado por

$$\text{contr}_v(P, Q) = \begin{cases} -(A_v^{-1})_{i,j}, & \text{se } i \geq 1, j \geq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo $(A_v^{-1})_{i,j}$ a (i, j) -entrada da matriz inversa de $A_v = ((\Theta_{v,i} \cdot \Theta_{v,j}))_{1 \leq i, j \leq m_v - 1}$.

A seguir vamos exibir os valores explícitos das contribuições locais para cada tipo de fibra singular. Mas antes, assumiremos as seguintes convenções:

- $0 < i \leq j$, se necessário realize uma troca entre P e Q ;
- Para uma fibra do tipo I_n numeramos $\Theta_i = \Theta_{v,i}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ciclicamente;
- Para uma fibra do tipo I_n^* numeramos $\Theta_i = \Theta_{v,i}$ ($i = 0, 1, \dots, n+4$) de modo que as quatro componentes simples sejam $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$ e Θ_3 e Θ_1 e Θ_0 intersectem a mesma componente.
- Para outras fibras aditivas, apenas numeramos Θ_0 para ser a componente que intersecta a seção neutra.

Observação 2.4.12. A característica de Euler χ é um invariante topológico da superfície. Para nossos objetivos basta sabermos a propriedade descrita na Proposição 2.4.13. Para mais detalhes consulte ([10], Seção 5.12).

<i>Tipo de fibra</i>	$i = j$	$i < j$
	$\frac{i(n-i)}{n}$	$\frac{i(n-j)}{n}$
$I_n(n > 1)$		
I_n^*	$\begin{cases} 1, i = 1 \\ 1 + n/4, i = 2, 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/2, i = 1 \\ 1/2 + n/4, i = 2 \end{cases}$
III	$1/2$	-
III^*	$3/2$	-
IV	$2/3$	$1/3$
IV^*	$4/3$	$2/3$

Tabela 2.4: Contribuições locais para fibras singulares por [11].

Vamos agora definir um importante subgrupo de $MW(\mathcal{E})$, que será denominado **grupo estreito de Mordell-Weil**, sendo definido da seguinte maneira:

$$MW(\mathcal{E})^0 = \{P \in MW(\mathcal{E}) : P \text{ intersecta } \Theta_{v,0} \text{ para todo } v \in R\}.$$

Esse subgrupo é livre de torção e tem índice finito em $MW(\mathcal{E})$. Visto como um reticulado em relação ao pareamento altura, é um reticulado integral positivo-definido chamado **reticulado estreito de Mordell-Weil** (veja [11], Teorema 8.7, p.229). Além disso, temos a seguinte relação:

$$\det MW(\mathcal{E})^0 = \det NS(\mathcal{E}) \cdot [MW(\mathcal{E}) : MW(\mathcal{E})^0]^2 / \det T. \quad (2.4.6)$$

2.4.4 Resultados para superfícies elípticas racionais

A partir de agora vamos aplicar os resultados gerais desenvolvido anteriormente ao reticulado de Mordell-Weil de superfícies elípticas racionais. Estes resultados serão fundamentais para o que vamos desenvolver no próximo capítulo.

Proposição 2.4.13. *Seja $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica racional. Então:*

- (a) *A característica de Euler χ de $\mathcal{E}$ é igual 1.*
- (b) *O reticulado de Néron-Severi $NS(\mathcal{E})$ é unimodular (isto é, $\det NS(\mathcal{E}) = 1$) de posto $\rho(\mathcal{E}) = 10$.*

Demonstração. Veja ([11], Lema 10.1, p.234). □

O fato de $NS(\mathcal{E})$ ser unimodular para uma superfície elíptica racional $\mathcal{E}$, implica que o reticulado de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})/MW(\mathcal{E})_{tor}$ é isomorfo ao dual do reticulado estreito de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})^0$ (consulte [11], Teorema 9.1, p.232). Com isso, se supormos $MW(\mathcal{E})$ livre de torção, teremos $MW(\mathcal{E}) \cong (MW(\mathcal{E})^0)^*$ e pelas igualdades (2.4.2) e (2.4.3) segue que:

$$[MW(\mathcal{E}) : MW(\mathcal{E})^0] = \det MW(\mathcal{E})^0 \text{ e } \det MW(\mathcal{E}) = 1/\det MW(\mathcal{E})^0.$$

Substituindo na expressão (2.4.6) chegamos na seguinte igualdade:

$$\det MW(\mathcal{E}) = 1/\det T. \quad (2.4.7)$$

A partir dessa última expressão, obtemos uma maneira de verificar se um dado conjunto de elementos do reticulado de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})$ é um conjunto de geradores. De fato, se G é um subreticulado de $MW(\mathcal{E})$, por conta de (2.4.1) e (2.4.7) temos que:

$$\det G = \frac{[MW(\mathcal{E}) : G]^2}{\det T}.$$

Agora, G é um conjunto de geradores de $MW(\mathcal{E})$ se, e somente se, $[MW(\mathcal{E}) : G] = 1$. Portanto, G é um conjunto de geradores de $MW(\mathcal{E})$ se, e somente se,

$$\det G = 1/\det T. \quad (2.4.8)$$

Finalizamos esta seção, observando que o posto de uma superfície elíptica racional está compreendido entre 0 e 8 (veja [10], Lema 7.6, p. 144). A classificação das possíveis configurações das fibras singulares em uma superfície elíptica racional com relação ao seu posto foi exposta por Persson em [7]. São 354 configurações combinatorialmente possíveis, sendo que a maioria dos casos efetivamente ocorrem. Nessa dissertação vamos concentrar no caso de posto 3, dessa forma, temos 57 configurações possíveis. Daremos a construção explícita para superfície elíptica racional de posto 3 como uma única fibra redutível de tipo I_6 . Assim, as seguintes configurações podem ocorrer: $(I_6 \text{ } 3II)$, $(I_6 \text{ } 2II \text{ } 2I_1)$, $(I_6 \text{ } II \text{ } 4I_1)$ e $(I_6 \text{ } 6I_1)$.

Capítulo 3

Construção de Superfícies Elípticas Racionais de posto 3 com uma única fibra de tipo I_6

O objetivo desse capítulo é demonstrar o Teorema 3.5.1, que nos diz que qualquer superfície elíptica racional com posto de Mordell-Weil igual a 3 e com uma única fibra redutível de tipo I_6 , pode ser obtida a partir de um pencil de cúbicas específico construído na seção 3.3. Até onde sabemos, esse é o primeiro resultado dessa natureza para superfícies elípticas racionais com posto 3. Iniciamos o capítulo com considerações gerais sobre fibras redutíveis nessa superfície, para na seção 3.2, abordamos o caso particular da fibra de tipo I_6 . As duas últimas seções são destinadas às construções e a demonstração do teorema em questão.

3.1 Fibras redutíveis em superfícies elípticas com posto 3

Seja $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica racional com posto de Mordell-Weil igual a 3. Vimos na Proposição 2.4.13 que o grupo de Néron-Severi $NS(\mathcal{E})$ tem posto 10. Assim, usando a fórmula de Shioda-Tate (2.4.4) podemos concluir que as contribuições locais das fibras redutíveis são dadas por

$$\sum_{v \in R} (m_v - 1) = 10 - 3 - 2 = 5.$$

Com isso, somos capazes de determinar quais valores de m_v podem ocorrer; sendo eles:

1. $m_v = 6$: uma única fibra redutível com 6 componentes;
2. $m_{v_1} = 2$ e $m_{v_2} = 5$: duas fibras redutíveis, uma fibra com 2 componentes e outra com 5 componentes;
3. $m_{v_1} = 3$ e $m_{v_2} = 4$: duas fibras redutíveis, uma fibra com 3 componentes e outra com 4 componentes;

4. $m_{v_1} = 4$ e $m_{v_2} = m_{v_3} = 2$: três fibras redutíveis, uma fibra com 4 componentes e outras duas com 2 componentes;
5. $m_{v_1} = 2$ e $m_{v_2} = m_{v_3} = 3$: três fibras redutíveis, uma fibra com 2 componentes e outras duas com 3 componentes;
6. $m_{v_1} = 3$ e $m_{v_2} = m_{v_3} = m_{v_4} = 2$: quatro fibras redutíveis, uma fibra com 3 componentes e outras três com 2 componentes;
7. $m_{v_1} = \dots = m_{v_5} = 2$: cinco fibras redutíveis com 2 componentes.

Shioda e Ogusio em [5] fornecem um importante resultado que nos ajuda a compreender os casos que acabamos de listar. Vamos enunciá-lo apenas para posto de Mordell-Weil igual a 3.

Teorema 3.1.1. *Seja $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica racional com posto de Mordell-Weil igual a 3. Então o reticulado trivial T , o reticulado estreito de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})^0$ e o reticulado de Mordell-Weil $MW(\mathcal{E})$ são dados pela seguinte tabela.*

T	$\det T$	$MW(\mathcal{E})^0$	$MW(\mathcal{E})$
A_5	6	$A_2 \oplus A_1$	$A_2^* \oplus A_1^*$
D_5	4	A_3	A_3^*
$A_4 \oplus A_1$	10	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
$D_4 \oplus A_1$	8	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3}$
$A_3 \oplus A_2$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$	18	$A_2 \oplus \langle 6 \rangle$	$A_2^* \oplus \langle 1/6 \rangle$
$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	16	A_3	$A_3^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	16	$A_1^{\oplus 2} \oplus \langle 4 \rangle$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus \langle 1/4 \rangle$
$A_2 \oplus A_1^{\oplus 3}$	24	$A_1 \oplus \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$A_1^* \oplus \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$A_1^{\oplus 5}$	32	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Observação 3.1.2. Os símbolos A_i e D_j que aparecem no Teorema 3.1.1 representam diagramas de Dynkin. Esses diagramas definem uma estrutura de reticulado definido-negativo e se relacionam com os tipos de fibra redutível da seguinte forma:

<i>Tipo de fibra</i>	$I_n(n > 1)$	$I_n^*(n \geq 0)$	III	IV	II^*	III^*	IV^*
<i>Diagrama de Dynkin</i>	A_{n-1}	D_{n+4}	A_1	A_2	E_8	E_7	E_6

Para detalhes mais abrangentes sobre esse conceito, veja a seção 5.5 de [10].

Dessa forma, temos as seguintes correspondências:

- $T = A_5$: uma única fibra do tipo I_6 ;
- $T = D_5$: uma única fibra do tipo I_1^* ;
- $T = A_4 \oplus A_1$: uma fibra do tipo I_5 e outra do tipo I_2 ou III ;
- $T = D_4 \oplus A_1$: uma fibra do tipo I_0^* e outra do tipo I_2 ou III ;
- $T = A_3 \oplus A_2$: uma fibra do tipo I_4 e outra do tipo I_3 ou IV ;
- $T = A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$: duas fibras do tipo I_2 ou III e uma do tipo I_4 ;
- $T = A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$: duas fibras do tipo I_3 ou IV e uma do tipo I_2 ou III ;
- $T = A_2 \oplus A_1^{\oplus 3}$: uma fibra do tipo I_3 ou IV e três fibras do tipo I_2 ou III ;
- $T = A_1^{\oplus 5}$: cinco fibras do tipo I_2 ou III .

3.2 Uma única fibra redutível

Na seção anterior discutimos as possíveis configurações para uma superfície elíptica racional com posto de Mordell-Weil igual a 3. Observamos que existem apenas duas possibilidades para fibras redutíveis com 6 componentes, a saber, I_6 ou I_1^* . Nesse trabalho, vamos nos restringir ao caso de uma única fibra do tipo I_6 .

Lembramos ao leitor que existe uma correspondência entre pencil de cúbicas em $\mathbb{P}^2(k)$ e uma superfície elíptica racional. De maneira mais precisa, fazendo o blow up nos nove pontos de base de um pencil de cúbicas, obtemos uma superfície elíptica racional. Reciprocamente, dada uma superfície elíptica racional obtemos um pencil de cúbicas fazendo o blow down nove vezes. Essa correspondência fornece uma relação específica, que associa cada fibra da superfície elíptica racional a um membro específico do pencil, cuja imagem após os blow ups é exatamente essa fibra.

Seja p um ponto de base do pencil de cúbicas Λ , com multiplicidade $m_p = d$. A fim de obtermos a fibra correspondente a um membro C em Λ , executamos os seguintes passos:

Passo 1: Se $m_p > 0$, realize o blow up no ponto de base p ; caso contrário pare.

Passo 2: Atribua a multiplicidade de p' , que é a imagem de p na transformada própria C' de C , o valor $d - 1$;

Passo 3: Façam $p' = p$, $C' = C$ e recomece o procedimento do Passo 1.

Exemplo 3.2.1. Neste exemplo, vamos mostrar em detalhes como obter a fibra correspondente a um membro do pencil de cúbicas Λ , utilizando o algoritmo acima. Esse procedimento será empregado com frequência no decorrer do trabalho.

Suponha que o pencil de cúbricas Λ contenha um membro R dado pela união de três retas e apenas um (entre os três) pontos de interseção das retas é um ponto de base com multiplicidade 4, que denotaremos p_0 . Suponha também, que os outros cinco pontos de base p_i de Λ tenham multiplicidade 1. Uma vez que a multiplicidade de p_0 é 4, uma das retas que compõem R , digamos r , é tangente a todas as cúbricas lisas do pencil em p_0 . A configuração dos pontos de base na cúbrica R pode ser visualizada na Figura 3.1.

Ao realizarmos o primeiro blow up no ponto p_0 , a imagem p_0^1 de p_0 será um ponto de interseção entre a transformada estrita r^1 de r e o divisor excepcional E_1 proveniente do blow up (nessa etapa E_1 é uma (-1) -curva). A transformada própria R^{1*} de R é dada pela transformada estrita de R juntamente com o divisor excepcional E_1 acima de p_0 . Realizando o blow up no ponto p_0^1 , a imagem p_0^2 de p_0^1 será um ponto de interseção entre a transformada estrita r^2 de r^1 e o divisor excepcional E_2 acima de p_0^1 (nessa etapa E_2 é uma (-1) -curva e a imagem de E_1 é uma (-2) -curva, que também denotaremos por E_1). A transformada própria R^{2*} de R^{1*} é dada pela transformada estrita de R^{1*} juntamente com o divisor excepcional E_2 . Fazendo o blow up no ponto p_0^2 , a imagem p_0^3 de p_0^2 é um ponto na curva excepcional E_3 (nessa etapa E_3 é uma (-1) -curva e a imagem de E_2 é agora uma (-2) -curva, que denotaremos novamente por E_2). A transformada própria R^{3*} de R^{2*} é dada pela transformada estrita de R^{2*} juntamente com o divisor excepcional E_3 .

Nessa altura, todas as imagens dos pontos de base p_i^j através dos blow ups têm multiplicidade 1 (vide Figura 3.2). Desse modo, o blow up em cada um desses pontos não altera a configuração da fibra, apenas fornece uma (-1) -curva P_i intersectando transversalmente a componente da fibra onde cada ponto p_i se encontra. Vale observar que ao realizamos o blow up no ponto p_0^3 , a curva E_3 passa a ser uma (-2) -curva. A configuração final da fibra de tipo I_6 obtida no procedimento é dada conforme a Figura 3.3.

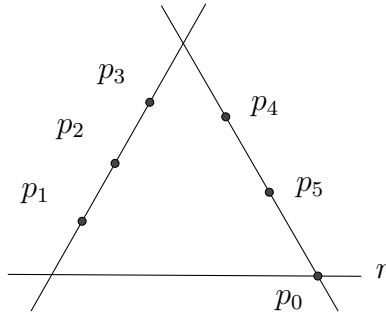


Figura 3.1: Configuração dos pontos de base na cúbrica R .

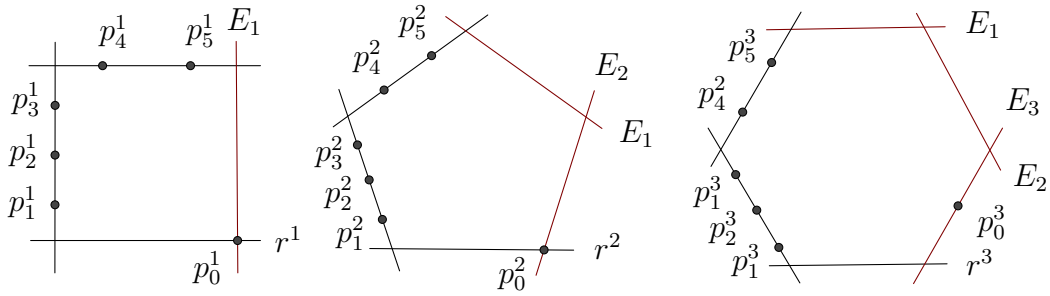


Figura 3.2: Configurações dos pontos de base em cada blow up.

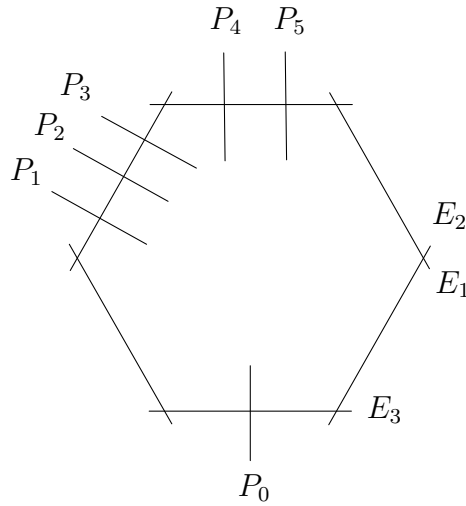


Figura 3.3: Configuração das (-1) -curvas acima dos pontos de base.

Dada uma superfície elíptica racional de posto 3 com uma única fibra redutível de tipo I_6 , veremos a seguir quais são os possíveis pencils de cúbicas planas em correspondência com ela.

Proposição 3.2.2. *Se $\mathcal{E}$ é uma superfície elíptica racional de posto 3 com uma fibra do tipo I_6 . Então o pencil de cúbicas deve conter um membro com uma das seguintes configurações:*

1. *Uma cúbica nodal, cujo ponto singular é um ponto de base com multiplicidade 6.*
2. *Uma cúbica redutível dada pela união de uma cônica irredutível e uma reta, de modo que:*
 - (a) *Os pontos de interseção da reta e a cônica são ambos pontos de base com multiplicidade 3, ou*
 - (b) *Um ponto de interseção da reta com a cônica é ponto de base com multiplicidade 4 e o outro com multiplicidade 2, ou*
 - (c) *Apenas um ponto de interseção é ponto de base com multiplicidade 5.*
3. *Uma cúbica redutível dada pela união de três retas, tal que:*

- (a) Os pontos de interseção das retas duas a duas são pontos de base com multiplicidade 2, ou
- (b) Um dos pontos de interseção não é ponto de base, enquanto os outros dois são pontos de base com multiplicidade 2 e 3, ou
- (c) Um ponto de interseção é ponto de base com multiplicidade 4 e os outros não são pontos de base.

Demonstração. As (-1) -curvas da superfície são seções da fibração elíptica, de modo que, o processo de blow down se inicia com a contração de uma seção. A componente da fibra I_6 que a seção contraída intersectava se transforma em uma (-1) -curva. Ao contrairmos essa componente, obtemos um ciclo com cinco curvas racionais que se intersectam transversalmente, exceto em um ponto que terá multiplicidade 2, as componentes adjacentes a componente contraída são agora curvas de auto-interseção -1 . Nesse momento, pode ser que exista uma outra seção intersectando uma componente distinta das que são (-1) -curvas. Desse modo, temos duas possibilidades de curvas na qual podemos contrair.

Caso 1: Contraindo uma das componentes que são (-1) -curva, obtemos um ciclo de quatro curvas racionais com um ponto de interseção com multiplicidade 3, assim uma das componentes ligada a essa curva se torna uma (-1) -curva.

Caso 2: Contraído a seção, a componente na qual ela intersectava se transforma em uma (-1) -curva, que ao ser contraída, gera um ciclo de quatro curvas racionais com dois pontos de interseção com multiplicidade 2. Neste caso, ao menos duas curvas desse ciclo são (-1) -curvas.

Continuando esse processo, teremos outras duas possibilidades ligadas aos casos anteriores, que são:

Caso 1.1: Contraindo a (-1) -curva obtida no primeiro caso, obtemos um ciclo de três curvas racionais com um ponto de interseção com multiplicidade 4 e com umas das curvas presente no ciclo sendo uma (-1) -curva.

Caso 2.1: Contraindo uma das (-1) -curvas obtida no segundo caso, obtemos um ciclo de três curvas racionais com um ponto de interseção com multiplicidade 2 e outro ponto de interseção com multiplicidade 3, onde ao menos uma das curvas é uma (-1) -curva. Existe ainda a possibilidade, que no caso 2, uma seção intersectava a (-2) -curva que compõe o ciclo, de modo que ao contrai-la, essa curva passa ser uma (-1) -curva. Assim, contraindo essa curva obtemos um ciclo de três curvas racionais cujos os pontos de interseção tem multiplicidade 2.

Dando seguimento a esse processo, vamos obter todos os casos listados no enunciado da proposição. O diagrama abaixo ilustra cada passo do processo.

□

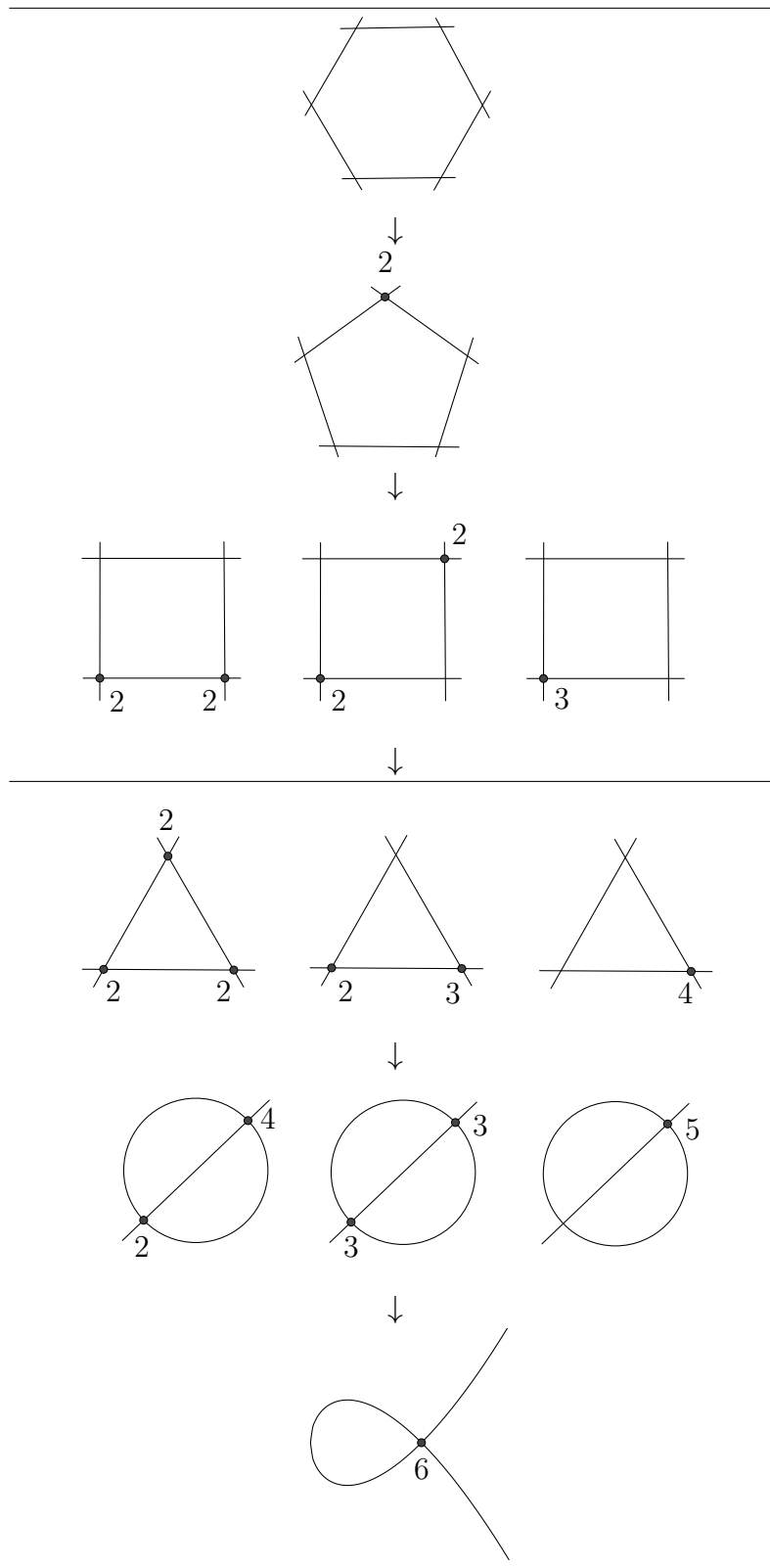


Tabela 3.1: Possibilidades de contrações de uma fibra redutível de tipo I_6 .

3.3 Pencil de cúbricas com posto 3

Nesta seção vamos construir pencils de cúbricas em $\mathbb{P}^2(k)$ que induzem superfícies elípticas racionais com posto de Mordell-Weil igual a 3 com uma única fibra redutível de tipo I_6 . As construções se baseiam nos casos abordados na Proposição 3.2.2, através delas vamos exibir um sistema de geradores para os grupos de Mordell-Weil correspondente a cada superfície. Mas antes introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.3.1. *Sejam C e D duas curvas projetivas. O conjunto $\mathcal{P}$ dos pontos interseção de C e D está em **posição geral** se quaisquer três pontos em $\mathcal{P}$ são não colineares e seis pontos em $\mathcal{P}$ não estão em uma mesma cônica.*

Observação 3.3.2. A definição acima se estende a conjuntos contendo pontos infinitamente próximos. Por exemplo, se p e p' são pontos infinitamente próximos em $C \cap D$, então a reta passando por p e p' não pode conter outros pontos de $\mathcal{P}$, ou ainda, qualquer cônica passando por p e p' , contém no máximo mais três pontos de $\mathcal{P}$.

Em cada construção a seguir, vamos supor:

Hipótese [H]: O conjunto $\mathcal{P}$ dos pontos de base do pencil, exceto pelas relações entre os pontos expostas na construção, está em posição geral.

Construção 1. Seja E uma cúbrica plana não-singular. Tome uma reta r_1 no plano de modo a intersectar a cúbrica E em três pontos distintos p_0, p_1 e p_2 . Seja r_2 a reta passando por p_0 e intersectando E em outros dois pontos distintos p_3 e p_4 . Tome a reta r_3 que passa por p_2 e p_4 e intersecta a cúbrica E em um novo ponto p_5 . Por fim, considere o pencil de cúbricas Λ dado por $tE + u(r_1r_2r_3) = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmação 1. *A cúbrica $R = r_1r_2r_3$ é a única redutível em Λ .*

Demonstração. Seja C uma cúbrica redutível em Λ , então C é constituída de uma cônica Q , possivelmente redutível, e uma reta r . Suponha que Q seja irreduzível. Como existem três pontos de base com multiplicidade 2, então Q deve tangenciar E em pelo menos um ponto p_i , $i \in \{0, 2, 4\}$. Considere inicialmente que Q tangencia E em apenas um ponto. Sem perda de generalidade, podemos admitir que o ponto de tangência é p_0 . Desse modo, temos as seguintes possibilidades:

1. $p_i \notin Q$, $i \in \{2, 4\}$. Como p_2 e p_4 são pontos de base com multiplicidade 2, a cônica Q deve passar ao menos por um desses pontos. Dessa forma, r deve tangenciar E em p_i e passar por p_{6-i} , o que contraria a Hipótese [H].
2. $p_2, p_4 \in Q$. Uma vez que, p_2 e p_4 são pontos de base com multiplicidade 2 e Q tangencia E apenas no ponto p_0 ; a reta r deve passar pelos pontos p_2 e p_4 . Assim, $r = r_3$, o que é um absurdo, pois quaisquer duas cúbricas em Λ têm como pontos de interseção apenas os pontos de base.

Portanto, Q é redutível ou Q tangencia E em mais de um ponto. Suponha que Q é irreduzível e tangencie E em dois pontos. Suponha, sem perda de generalidade, que esses pontos sejam p_0 e p_4 . Pela Hipótese [H], a cônica Q só pode passar por mais um ponto de base. Uma vez que p_0, p_3 e p_4 são colineares então Q não contém p_3 , logo r deve passar por p_3 e por pelo menos mais dois pontos de base distintos de p_0 e p_4 , levando-nos a um absurdo. Sendo assim, Q irreduzível implica que Q deve tangenciar E nos pontos p_0, p_2 e p_4 , mas isso contraria a Hipótese [H]. Desse modo concluímos que Q é redutível. Com isso, C é constituída de três retas e pelas relações de colinearidade dos pontos de base dadas na **Construção 1**, temos que $C = R$. $\square$

Ao realizarmos o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que R corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Como R é a única cúbica redutível em Λ e não existem cúbicas com singularidades nos pontos de base, temos que a fibra correspondente a R é a única redutível na superfície elíptica. Se denotarmos por $P_0, \dots, P_5$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_5$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e fixarmos P_0 como a seção neutra. Ao numerarmos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas $P_1, \dots, P_5$ são dadas conforme a figura abaixo.

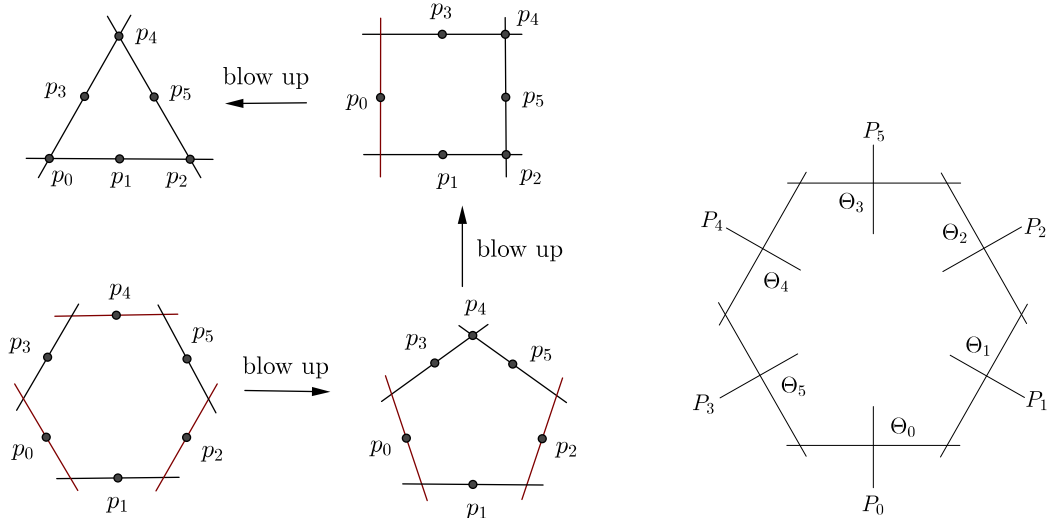


Figura 3.4: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 1**.

Se P e Q são elementos no grupo de Mordell-Weil da superfície associada a Λ , supondo que P intersecta a componente Θ_i e Q a componente Θ_j , com $i \leq j$, então a contribuição da fibra I_6 para $\langle P, Q \rangle$ é dada, de acordo com a Tabela 2.4, por

$$\text{contr}(P, Q) = \frac{i(6-j)}{6} \quad (3.3.1)$$

Usando a fórmula de contribuição que acabamos de mencionar, temos que

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 5/6 & 2/3 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 5/6 & 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 4/3 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 5\}.$$

Uma vez que a curva P_i não intersecta P_j para $i \neq j$, a fórmula explícita do pareamento de altura (2.4.5) mostra que para quaisquer $i, j \geq 1$:

$$\langle P_i, P_j \rangle = \chi - (P_i \cdot P_j) - \text{contr}(P_i, P_j) = \begin{cases} 2 - \text{contr}(P_i, P_i), & \text{se } i = j; \\ 1 - \text{contr}(P_i, P_j), & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Considerando os pontos P_1, P_2 e P_3 , a matriz altura associada a esses pontos, isto é, a matriz cujas as entradas são dadas pelas alturas $\langle P_i, P_j \rangle$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$, assume a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 7/6 & 1/3 & 5/6 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 5/6 & 2/3 & 7/6 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz A é igual a $1/6$ e pelo Teorema 3.1.1 coincide com o número $1/\det T$. Assim, por (2.4.8) temos que P_1, P_2 e P_3 geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

Construção 2. Seja E uma cúbica plana não-singular. Dado um ponto p_4 em E , denote por r_1 a reta tangente a E em p_4 . Logo existe um outro ponto p_0 tal que r_1 intersecta E exatamente em p_0 e p_4 . Seja r_2 uma reta passando por p_4 de modo a intersectar a cúbica E em outros dois pontos distintos p_3 e p_5 . Por fim, tome uma reta r_3 passando por p_0 e intersectando a cúbica E em outros pontos distintos p_1 e p_2 . Feito isso, considere o pencil de cúbicas Λ dado por $tE + u(r_1 r_2 r_3) = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmção 2. A cúbica $R = r_1 r_2 r_3$ é a única redutível em Λ .

Demonstração. Seja C uma cúbica redutível em Λ , assim, C é composta de uma cônica Q , possivelmente redutível, e uma reta r . Suponha que Q seja irredutível e não tangencia a cúbica E . Como os pontos p_0 e p_4 são pontos de base com multiplicidades 2 e 3 respectivamente, a cônica Q deve passar por esses pontos e a reta r deve tangenciar E em p_4 passando pelo ponto p_0 , ou seja, $r = r_1$. Mas isso é um absurdo, pois quaisquer duas cúbicas em Λ têm como interseção apenas os pontos de base. Sendo assim, Q irredutível implica que Q deve tangenciar E em p_0 ou p_4 . Inicialmente assumamos que Q tangencie E apenas no ponto p_0 . Como p_4 é um ponto de base com multiplicidade 3, então r deve tangenciar E em p_4 . A Hipótese de E ser não-singular nos garante que existe uma única reta tangente em p_4 , logo $r = r_1$ e temos novamente um absurdo. Se Q tangencia E apenas no ponto p_4 , temos duas possibilidades:

1. $p_0 \in Q$. Com isso, a reta r deve passar por p_0 e p_4 e consequentemente $r = r_1$ o que é um absurdo;

2. $p_0 \notin Q$. Diante disso, r deve tangenciar o ponto p_0 e passar por p_4 , mas isso contraria a Hipótese [H].

No caso em que Q tangencia E nos pontos p_0 e p_4 , temos que a reta r deve intersectar transversalmente E em p_4 , logo r deve conter os pontos p_3 e p_5 e portanto $r = r_2$ que é um absurdo. Agora, se Q é tal que $(E \cdot Q)_{p_4} = 3$, então temos os seguintes casos a considerar:

1. $p_0 \notin Q$. Desse modo, a reta r deve tangenciar p_0 e pela Hipótese [H] não pode conter nenhum outro ponto de base. Logo Q deve passar por p_3, p_4 e p_5 , mas isso é um absurdo com a irredutibilidade de Q .
2. $p_0 \in Q$. Nesse caso, pela Hipótese [H], a cônica Q só pode passar por mais um ponto de base. Assim, r deve passar por p_0 e por pelo menos mais três pontos de base, mas isso é claramente um absurdo.

Resta-nos o caso em que $(E \cdot Q)_{p_2} = 2$ e $(E \cdot Q)_{p_4} = 3$. Pela Hipótese [H], Q não pode conter nenhum outro ponto de base e consequentemente, r deve passar pelos pontos p_1, p_2, p_3 e p_5 , o que é um absurdo. Com isso, Q é redutível e C é constituída de três retas e pelas relações de colinearidade nos pontos de base dadas na **Construção 2**, temos que $C = R$. $\square$

Realizando o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que R corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Voltamos a denotar por $P_0, \dots, P_5$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_5$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e a fixar P_0 como a seção neutra. Ao numerarmos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas $P_1, \dots, P_5$ são dadas conforme a Figura 3.5.

Usando a fórmula de contribuição (3.3.1), temos que:

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 5/6 & 5/6 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 5\}.$$

Considerando os pontos P_1, P_3 e P_4 , a matriz altura associada a esses pontos, assume a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 7/6 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz A é igual a $1/6$ e coincide com o número $1/\det T$. Portanto P_1, P_2 e P_3 geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

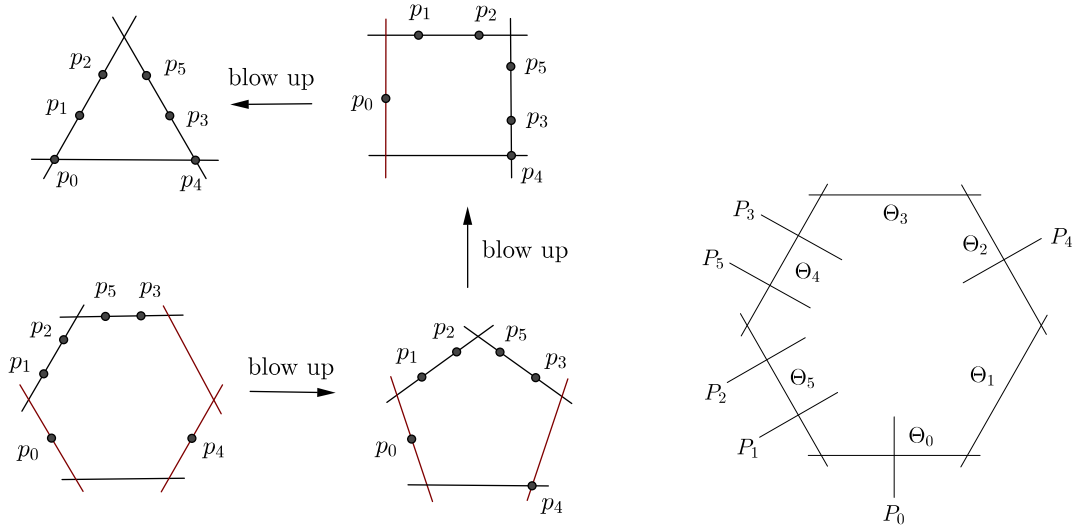


Figura 3.5: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 2**.

Construção 3. Seja E uma cúbica não-singular. Considere p_0 um ponto de inflexão em E e seja r_1 a reta tangente a E em p_0 , assim $(E \cdot r_1)_{p_0} = 3$. Tome uma reta r_2 intersectando E em três pontos distintos p_1, p_2 e p_3 . Agora, tome uma reta r_3 passando por p_0 e intersectando E em outros dois pontos distintos p_4 e p_5 . Finalmente, considere o pencil de cúbicas dado por $tE + u(r_1r_2r_3) = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmção 3. A cúbica $R = r_1r_2r_3$ é a única redutível em Λ .

Demonstração. Seja C uma cúbica redutível em Λ , então C é dada por de uma cônica Q , possivelmente redutível, e uma reta r . Suponha inicialmente que Q é irredutível e $(E \cdot Q)_{p_0} = 1$, logo a reta r deve tangenciar E em p_0 . Mas E é uma cúbica não-singular, sendo assim, a reta tangente a E em p_0 é única e portanto $r = r_1$, o que é um absurdo. Dessa forma, Q é redutível ou $(E \cdot Q)_{p_0} \geq 2$. Vamos continuar supondo que Q é irredutível, portanto temos os seguintes casos a considerar:

1. $(E \cdot Q)_{p_0} = 2$. Nesse caso, r deve tangenciar E em p_0 , pois p_0 é um ponto de base com multiplicidade 4. Isso nos dá novamente $r = r_1$, o que é absurdo.
2. $(E \cdot Q)_{p_0} = 3$. Diante disso, r deve intersectar transversalmente E em p_0 , consequentemente existem outros dois pontos de interseção de r e E . Pela Hipótese [H], esses pontos devem ser p_4 e p_5 , assim $r = r_3$ levando-nos a um absurdo.
3. $(E \cdot Q)_{p_0} = 4$. Pela Hipótese [H], a cônica Q pode passar por apenas mais um ponto de base e consequentemente r deve passar por quatro dos pontos p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 , o que é claramente um absurdo.

Sendo assim, Q é redutível e C é dada pela união de três retas, logo pelas relações de colinearidade descritas na **Construção 3**, temos que $C = R$. $\square$

Ao realizarmos o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que R corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Denotando por $P_0, \dots, P_5$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_5$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e fixando P_0 como a seção neutra. Ao numerarmos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas $P_1, \dots, P_5$ são dadas conforme a figura abaixo.

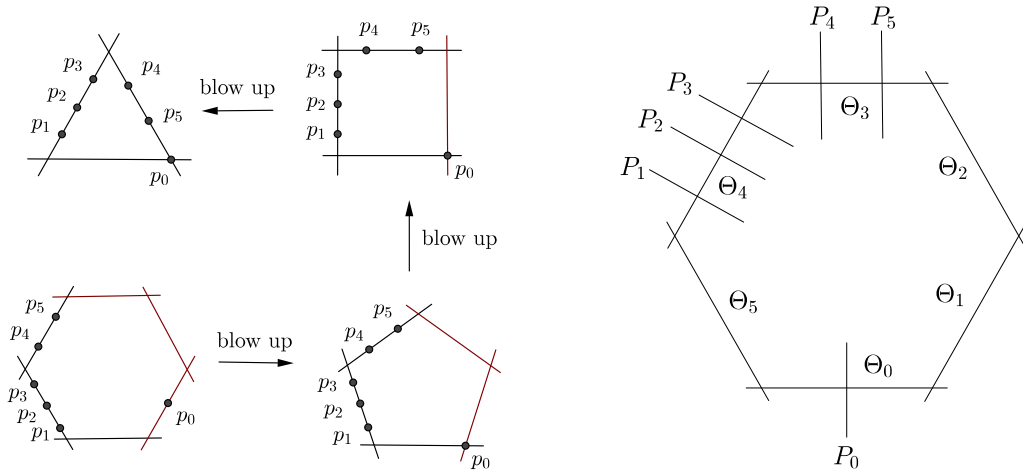


Figura 3.6: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 3**.

Usando a fórmula de contribuição (3.3.1), temos que:

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1 & 1 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1 & 1 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 5\}.$$

Considerando os pontos P_1, P_2 e P_4 , a matriz altura associada a esses pontos assume a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz A é igual a $1/6$ e coincide com o número $1/\det T$. Portanto P_1, P_2 e P_4 geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

Construção 4. Seja E uma cúbica plana não-singular. Tome um ponto p_0 em E e seja r a reta tangente a E em p_0 . Então existe um outro ponto p_4 tal que r intersecta E exatamente em p_0 e p_4 . Agora, tome uma cônica irreduzível Q passando por p_0 e p_4 , tangenciando E apenas no ponto p_4 . Então existem pontos p_1, p_2 e p_3 tais que os pontos de interseção de E e Q são dados por p_0, p_1, p_2, p_3 e p_4 . Considere o pencil de cúbicas Λ dado por $tE + u(Qr) = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmação 4. A cúbica $R = Qr$ é a única redutível em Λ .

Demonstração. Seja C uma cúbica redutível em Λ , isto é, C é composta de uma cônica Q' e uma reta r' . Como três pontos de base nunca são colineares, segue que a cônica Q' é irreduzível. Assim, temos os seguintes casos a considerar:

1. $(E \cdot Q')_{p_i} = 2, i \in \{0, 4\}$. Como p_0 e p_4 são pontos de base com multiplicidade 3, a reta r' deve intersectar transversalmente E nos pontos p_0 e p_4 ; daí r' deve conter outro ponto de base, mas isso é impossível pois não existem pontos de bases colineares.
2. $(E \cdot Q')_{p_i} = 2$ e $(E \cdot Q')_{p_{4-i}} = 3, i \in \{0, 4\}$. Nesses casos, a cônica Q não pode conter nenhum outro ponto de base. Logo, r' deve passar pelo ponto p_i e pelos pontos p_1, p_2 e p_3 , o que é claramente um absurdo.
3. $(E \cdot Q')_{p_i} = 3, i \in \{0, 4\}$. Dessa forma, existem seis pontos (contados com multiplicidade) em uma mesma cônica, mas isso é um absurdo pela Hipótese [H].
4. $(E \cdot Q')_{p_i} = 1$ e $(E \cdot Q')_{p_{4-i}} = 3, i \in \{0, 4\}$. Assim, a reta r' deve tangenciar E no ponto p_i . Como E é não-singular, a reta tangente nesse ponto é única e portanto $r' = r$, o que é um absurdo.

Resta-nos apenas os casos em que a cônica Q' tangencia E no ponto $p_i, i \in \{0, 4\}$. Dessa forma r' deve tangenciar o ponto p_i e passar por p_{4-i} . No entanto, pela Hipótese [H], não existe outro ponto de base na reta tangente a E em p_4 , logo r' tangencia E no ponto p_0 . Portanto $r' = r$ e a cônica Q' deve passar por p_0, p_1, p_2 e p_3 . Isso nos leva a concluir que $Q' = Q$ e portanto $C = R$. $\square$

Ao realizarmos o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que R corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Denotando por $P_0, \dots, P_4$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_4$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e fixando P_0 como a seção neutra. Ao numerarmos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas $P_1, \dots, P_4$ são dadas conforme a Figura 3.7.

Usando a fórmula de contribuição (3.3.1), temos que:

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}, i, j \in \{0, \dots, 4\}.$$

Considerando os pontos P_1 , P_2 e P_4 , a matriz altura associada a esses pontos assume a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz A é igual a $1/6$ e coincide com o número $1/\det T$. Portanto P_1, P_2 e P_4 geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

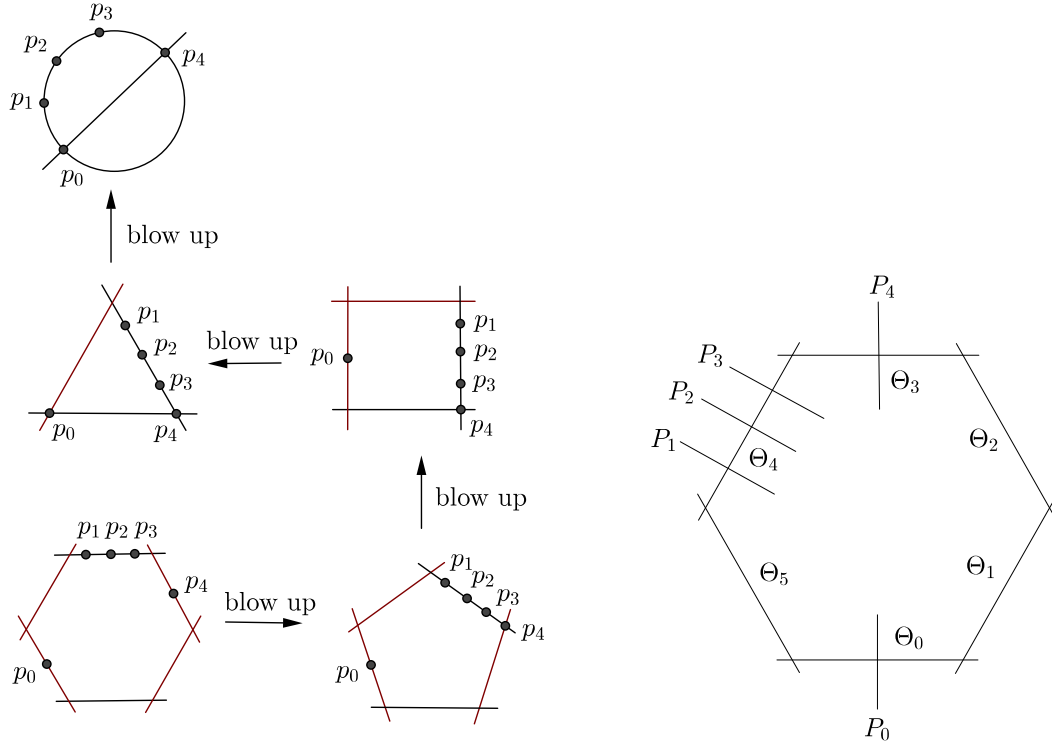


Figura 3.7: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 4**.

Construção 5. Seja E uma cúbica plana não-singular. Tome r uma reta no plano, de modo a intersectar E em três pontos distintos p_0, p_1 e p_4 . Agora, suponha que exista uma cônica Q tal que $(E \cdot Q)_{p_4} = 3$, passando por p_0 e contendo outros dois pontos distintos p_2 e p_3 . Feito isso, considere o pencil de cúbicas Λ dado por $tE + u(Qr) = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmção 5. A cúbica R é a única redutível em Λ .

Demonstração. Suponha que exista uma outra cúbica C redutível em Λ . Uma vez que os únicos pontos de base colineares são p_0, p_1 e p_4 , segue que $C = Q'r'$, onde Q' é uma cônica irreduzível e r' é uma reta. Assim, temos os seguintes casos a considerar:

1. $(E \cdot Q')_{p_0} = 2$. Visto que p_4 é um ponto de base com multiplicidade 4, a reta r' deve satisfazer $(E \cdot r')_{p_4} = 3$, mas isso é um absurdo pela Hipótese [H].
2. $(E \cdot Q')_{p_4} = 2$. Com isso, r' deve tangenciar p_4 e passar por p_0 , que é impossível visto que a reta tangente a qualquer ponto de base não contém outro ponto de base.
3. $(E \cdot Q')_{p_i} = 2, i \in \{0, 4\}$. Desse modo, a reta r' deve tangenciar E em p_4 , mas pela Hipótese [H], r' não pode passar por outro ponto de base. Logo Q' intersecta E em sete pontos contados com multiplicidades, o que é claramente um absurdo.
4. $(E \cdot Q')_{p_0} = 2$ e $(E \cdot Q')_{p_4} = 3$. Pela Hipótese [H], Q' não pode conter nenhum outro ponto de base. Logo r' deve passar por p_4 e conter os outros três pontos de base, o que é novamente um absurdo.
5. $(E \cdot Q')_{p_4} = 3$. Dessa maneira, r' deve passar por p_0 e p_4 , portanto $r' = r$. Como quaisquer duas cúbicas em Λ se intersectam apenas nos pontos de base, temos um absurdo.

Tendo em vista que esses são os únicos casos possíveis, temos que R é o único membro redutível em Λ . □

Ao realizarmos o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que R corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Denotando por $P_0, \dots, P_4$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_4$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e fixando P_0 como a seção neutra. Ao numeramos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas $P_1, \dots, P_4$ são dadas conforme a Figura 3.8.

Considerando os pontos P_1, P_2 e P_4 , a matriz altura associada a esses pontos, assume a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 7/6 & 5/6 & 2/3 \\ 5/6 & 7/6 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Usando a fórmula de contribuição (3.3.1), temos que:

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 5/6 & 2/3 \\ 1/6 & 5/6 & 5/6 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 4\}.$$

O determinante da matriz A é igual a $1/6$ e coincide com o número $1/\det T$. Portanto P_1, P_2 e P_4 geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

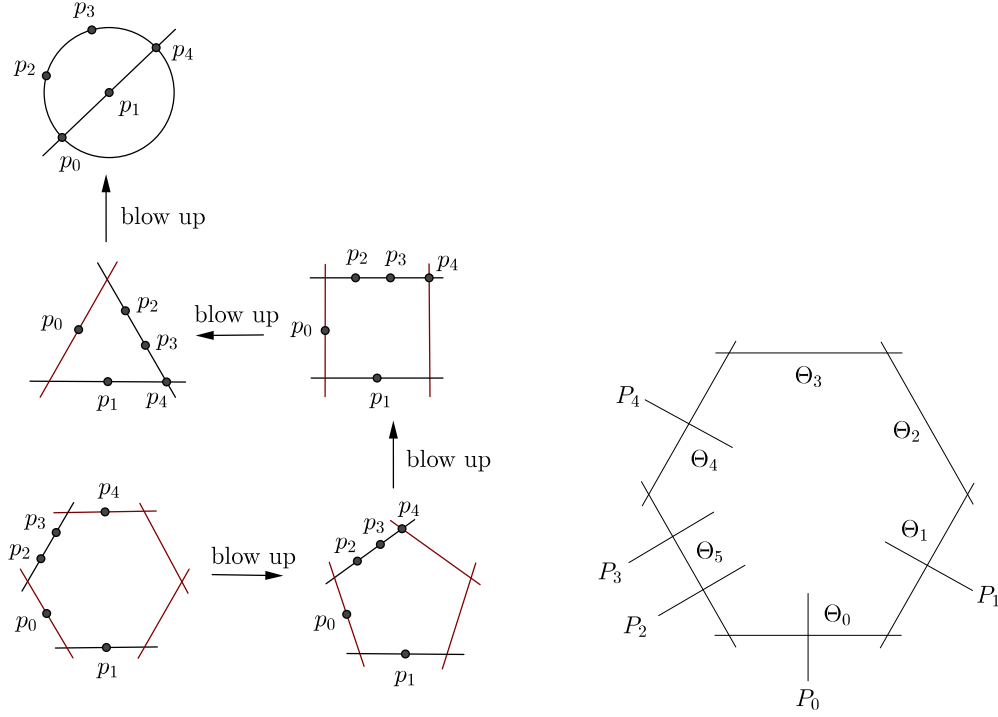


Figura 3.8: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 5**.

Construção 6. Seja E uma cúbica plana não-singular. Tome um ponto p_0 em E e suponha que exista uma cônica Q tal que $(E \cdot Q)_{p_0} = 4$. Então existem outros pontos p_3 e p_4 tais que Q intersecta E exatamente em p_0, p_3 e p_4 . Agora, tome r uma reta passando por p_0 e intersectando a cúbica E em outros dois pontos distintos p_1 e p_2 . Por fim, considere o pencil de cúbicas dado por $tE + u(Qr) = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmção 6. A cúbica $R = Qr$ é a única redutível em Λ .

Demonstração. Suponha que exista uma outra cúbica C em Λ redutível. Como os únicos pontos de bases colineares são p_0, p_1 e p_2 então C é composta por uma cônica irreduzível Q' e uma reta r' . Uma vez que p_0 é um ponto de base com multiplicidade 5, a cônica Q' deve satisfazer $3 \leq (E \cdot Q')_{p_0} \leq 5$. Assim temos os seguintes casos:

1. $(E \cdot Q')_{p_0} = 3$. Neste caso, r' deve tangenciar E em p_0 e não pode conter nenhum outro ponto de base. Assim, Q' deve conter os pontos p_0, p_1, p_2, p_3 e p_4 , o que é um absurdo.
2. $(E \cdot Q')_{p_0} = 4$. Com isso, a reta r' deve intersectar transversalmente E em p_0 e logo conter mais dois pontos de base. Como os únicos pontos de base colineares são p_0, p_1 e p_2 , segue que $r' = r$ o que é um absurdo, já que $C \cap R = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

3. $(E \cdot Q')_{p_0} = 5$. Neste caso, pela Hipótese [H], Q' não pode conter outros pontos de base e consequentemente r' deve passar por p_1, p_2, p_3 e p_4 , mas isso é um absurdo.

Tendo em vista que esses são os únicos casos possíveis, R é o único membro redutível em Λ . $\square$

Ao realizarmos o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que R corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Denotando por $P_0, \dots, P_4$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_4$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e fixando P_0 como a seção neutra. Ao numerarmos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas $P_1, \dots, P_4$ são dadas conforme a figura abaixo.

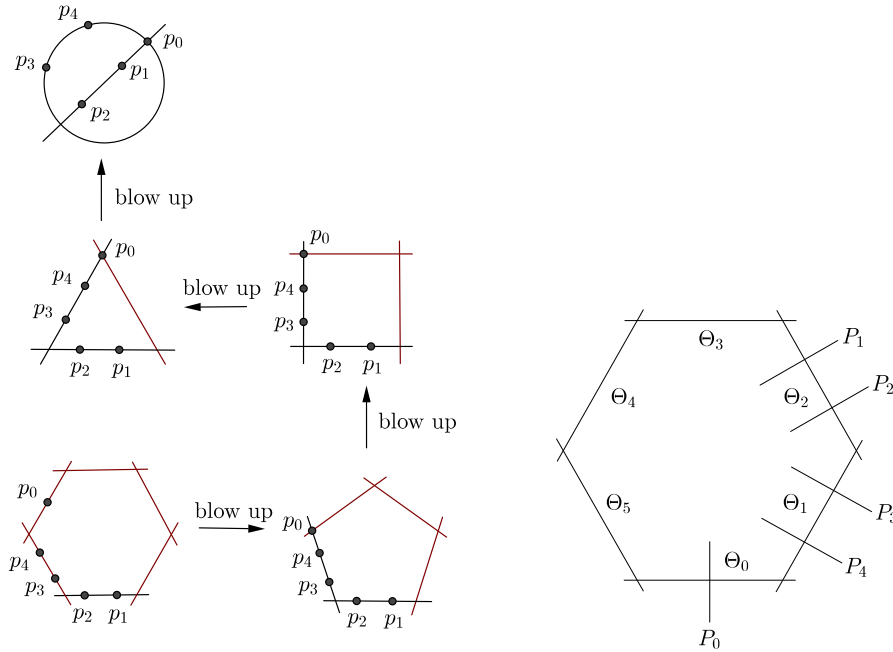


Figura 3.9: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 6**.

Usando a fórmula de contribuição (3.3.1), temos que:

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 4/3 & 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 5/6 & 5/6 \\ 2/3 & 2/3 & 5/6 & 5/6 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 4\}.$$

Considerando os pontos P_1 , P_2 e P_3 , a matriz altura associada a esses pontos, assume a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 7/6 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz A é igual a $1/6$ e coincide com o número $1/\det T$. Portanto P_1, P_2 e P_3 geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

Construção 7. Seja N uma cúbica nodal com ponto singular p_0 . Suponha que exista uma cúbica não-singular E tal que $(E \cdot N)_{p_0} = 6$. Assim, há pontos p_1, p_2 e p_3 tais que E intersecta N exatamente nos pontos p_0, p_1, p_2 e p_3 . Considere o pencil $uE + tN = 0$, onde $(t : u) \in \mathbb{P}^1(k)$.

Afirmção 7. A cúbica nodal N é o único membro em Λ com singularidade em um ponto de base.

Demonstração. Suponha que C seja um membro singular em Λ , então C é redutível ou uma cúbica nodal. Suponha que C seja uma cúbica redutível, logo C é constituída de uma cônica Q e uma reta r . Como não existem pontos de bases colineares, temos que Q deve ser irredutível e satisfazer $4 \leq (E \cdot Q)_{p_0} < 6$. Se $(E \cdot Q)_{p_0} = 4$, pela Hipótese [H], Q só pode conter mais um ponto de base, logo r deve tangenciar E em p_0 e passar por outros dois pontos de base, o que é um absurdo. Agora, se $(E \cdot Q)_{p_0} = 5$, Q não pode conter nenhum outro ponto de base, assim, r deve passar por p_0, p_1, p_2 e p_3 , o que é claramente um absurdo. Com isso, C deve ser uma cúbica nodal, mas as relações impostas sobre os pontos de base na **Construção 7** implica que $C = N$. $\square$

Ao realizarmos o blow up de $\mathbb{P}^2(k)$ nos pontos de base de Λ , verificamos que N corresponde a uma fibra do tipo I_6 na superfície elíptica racional. Como N é a única cúbica singular em um ponto de base e não existem cúbicas redutíveis em Λ , temos que a fibra correspondente a N é a única redutível na superfície elíptica. Se denotarmos por $P_0, \dots, P_3$ as (-1) -curvas obtidas após o blow up nos pontos $p_0, \dots, p_3$ (suas imagens pelos blow ups serão denotadas pelas mesmas letras) e fixando P_0 como a seção neutra. Ao numerarmos as componentes da fibra I_6 no sentido anti-horário, podemos constatar que as interseções entre as componentes da fibra e as curvas P_1, P_2 e P_3 são dadas conforme a Figura 3.10.

Usando a fórmula de contribuição (3.3.1), temos que:

$$(\text{contr}(P_i, P_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 & 5/6 \\ 5/6 & 5/6 & 5/6 \\ 5/6 & 5/6 & 5/6 \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 3\}.$$

Calculando a matriz altura dos pontos P_1, P_2 e P_3 , obtemos:

$$A = \begin{pmatrix} 7/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 7/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 7/6 \end{pmatrix}$$

No entanto, o determinante da matriz A não é $1/6$, logo P_1, P_2 e P_3 não geram todo o grupo de Mordell-Weil. Dessa forma, precisamos encontrar um outro elemento em $MW(\mathcal{E})$, de modo

que, três entre esse quatro elementos gerem todo o grupo. Afirmamos que a (-1) -curva R dada pela transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta r passando por p_0 e p_1 é um elemento que satisfaz esse requisito. De fato, ao realizarmos o primeiro blow up no ponto p_0 , a transformada estrita $\tilde{r}$ da reta r é uma curva que passa por p_1 e intersecta o divisor excepcional E_1 (que depois vem a ser Θ_2). O blow up dos outros pontos de base, exceto do ponto p_1 , não interfere na curva $\tilde{r}$, isto é, a transformada estrita da curva $\tilde{r}$ nas respectivas superfícies é isomorfa a $\tilde{r}$. Assim, o modo com que a curva $\tilde{r}$ intersecta as componente da fibra redutível só sofre outra alteração quando realizamos o blow up no ponto p_1 . Essa mudança faz com que a nova curva intersecte a seção P_1 e continue intersectando a componente Θ_2 . Veja a Figura 3.11.

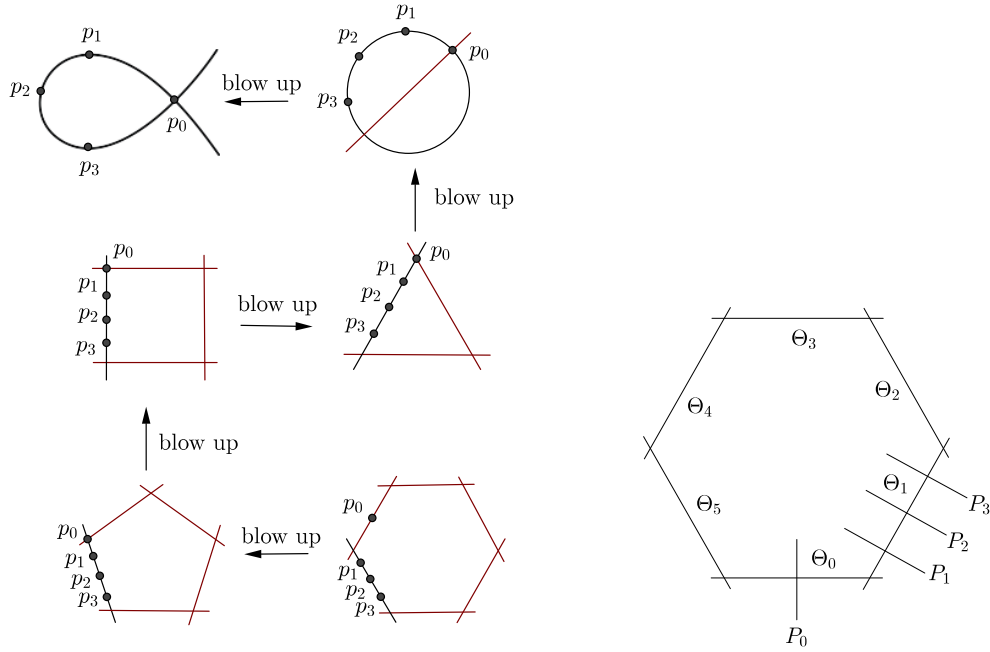


Figura 3.10: Configuração das curvas excepcionais acima dos pontos de base do pencil conforme a **Construção 7**.

Uma vez que a curva P_i só intersecta R para $i = 1$, a fórmula explícita do pareamento de altura (2.4.5) mostra que para quaisquer $i \geq 1$:

$$\langle P_i, L \rangle = \chi - (P_i \cdot L) - \text{contr}(P_i, L) = \begin{cases} -2/3, & \text{se } i = 1 \\ 1/3, & \text{se } i \neq 1 \end{cases}$$

Considerando os pontos P_1 , P_2 e R , a matriz altura associada a esses pontos, assume a forma:

$$B = \begin{pmatrix} 7/6 & 1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 7/6 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz B é igual a $1/6$ e coincide o número $1/\det T$. Portanto P_1, P_2 e R geram todo o reticulado de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$.

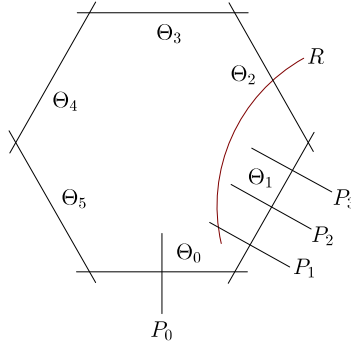


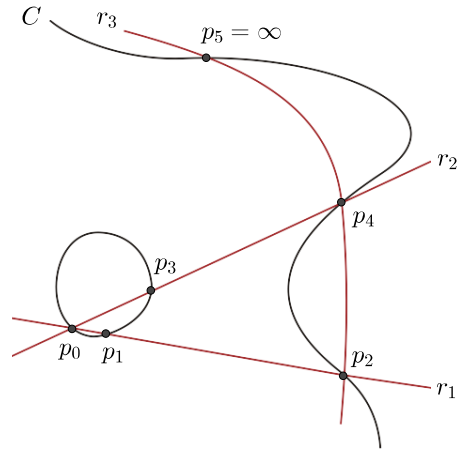
Figura 3.11: Configuração das curvas excepcionais com a (-1) -curva R .

3.4 Exemplos

Nesta seção, vamos apresentar um exemplo explícito para cada construção descrita na seção 3.3; exibindo as equações de Weierstrass e as configurações das fibras singulares das superfícies elípticas associadas as construções. Essas informações foram obtidas através do sistema algébrico computacional Magma (veja apêndice A).

Construção 1

$$\begin{aligned} C : zy^2 - x^3 + 2xz^2 &= 0 \\ r_1 : x + 3y + 4z &= 0 \\ r_2 : x - y &= 0 \\ r_3 : x - 2z &= 0 \end{aligned}$$



Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{\frac{16}{9}t^3 - \frac{200}{81}t^2 + \frac{92}{81}t - \frac{14}{81}}{t^3 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{36}t}x^2 + \frac{\frac{128}{729}t^6 - \frac{2528}{6561}t^5 + \frac{2144}{6561}t^4 - \frac{848}{6561}t^3 + \frac{136}{6561}t^2 + \frac{2}{6561}t - \frac{2}{6561}}{t^8 + \frac{2}{3}t^7 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{54}t^5 + \frac{1}{1296}t^4}x +$$

$$+ \frac{\frac{256}{59049}t^6 - \frac{256}{19683}t^5 + \frac{320}{19683}t^4 - \frac{640}{59049}t^3 + \frac{80}{19683}t^2 - \frac{16}{19683}t + \frac{4}{59049}}{t^{10} + t^9 + \frac{5}{12}t^8 + \frac{5}{54}t^7 + \frac{5}{432}t^6 + \frac{1}{1296}t^5 + \frac{1}{46656}t^4}$$

Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ 6I_1)$.

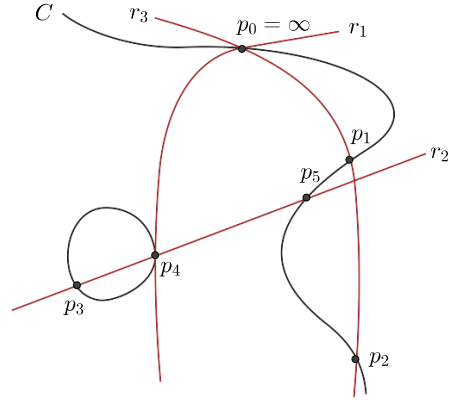
Construção 2

$$C : zy^2 - x^3 + xz^2 = 0$$

$$r_1 : x = 0$$

$$r_2 : x - y = 0$$

$$r_3 : x - 3z = 0$$



Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{9t^2 + 12t}{t^2 - 2t + 1}x^2 + \frac{24t^2 + 16t - 16}{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1}x + \frac{16t^2}{t^6 - 6t^5 + 15t^4 - 20t^3 + 15t^2 - 6t + 1}$$

Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ II \ 4I_1)$.

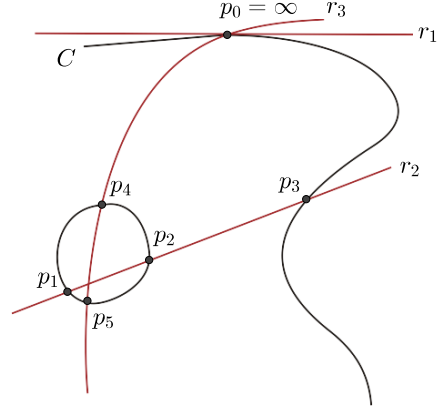
Construção 3

$$C : zy^2 - x^3 + 2xz^2 = 0$$

$$r_1 : z = 0$$

$$r_2 : x - y = 0$$

$$r_3 : x - z = 0$$



Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{p(t)}{t^3}x^2 + \frac{q(t)}{t^8}x + \frac{r(t)}{t^{10}}$$

onde:

$$p(t) = 9t^5 - 60t^4 + 136t^3 - 192t^2 + 144t - 64$$

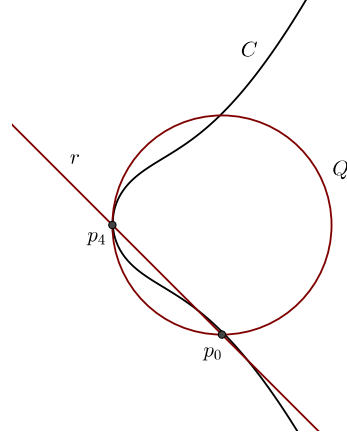
$$q(t) = -648t^{10} + 4752t^9 - 19872t^8 + 54528t^7 - 108800t^6 + 161280t^5 - 181248t^4 + 151552t^3 - 92160t^2 + 36864t - 8192$$

$$r(t) = 11664t^{12} - 93312t^{11} + 404352t^{10} - 1175040t^9 + 2522880t^8 - 4165632t^7 + 5410816t^6 - 5554176t^5 + 4485120t^4 - 2785280t^3 + 1277952t^2 - 393216t + 65536$$

Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ 6I_1)$.

Construção 4

$$\begin{aligned} C : -zy^2 + x^3 - x^2z + xz^2 &= 0 \\ Q : x^2 - 2xz + y^2 &= 0 \\ r_2 : x + y &= 0 \end{aligned}$$



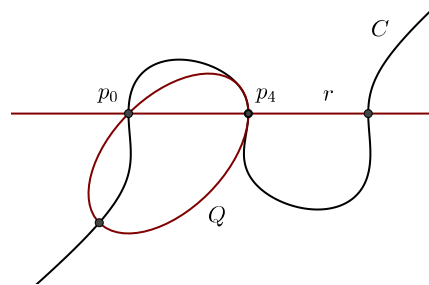
Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{4t^2 - 12t - 4}{t^4 + 2t^3 + t^2}x^2 + \frac{-32t^3 + 16t^2 + 32t + 16}{t^8 + 4t^7 + 6t^6 + 4t^5 + t^4}x + \frac{64t^3 + 6t^2 - 64}{t^{11} + 6t^{10} + 15t^9 + 20t^8 + 15t^7 + 6t^6 + t^5}$$

Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ 6I_1)$.

Construção 5

$$\begin{aligned} C : -x^3 + xz^2 + 2y^3 + y^2z &= 0 \\ Q : x^2 - xy + y^2 + xz &= 0 \\ r_2 : y &= 0 \end{aligned}$$



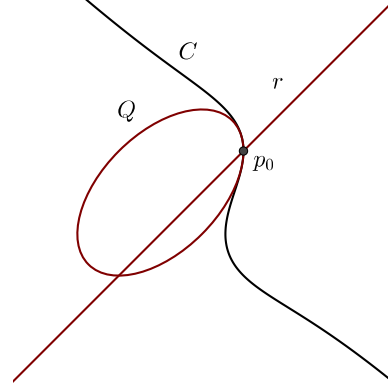
Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{t^2 + 4t}{t^2 + 4t + 4}x^2 + \frac{8t^2 + 32t - 16}{t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16}x + \frac{16t^2 + 64t + 256}{t^6 + 12t^5 + 60t^4 + 160t^3 + 240t^2 + 192t + 64}$$

Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ 6I_1)$.

Construção 6

$$\begin{aligned} C : x^3 + y^3 + y^2z + xz^2 &= 0 \\ Q : x^2 - xy + y^2 + xz &= 0 \\ r_2 : x - y &= 0 \end{aligned}$$



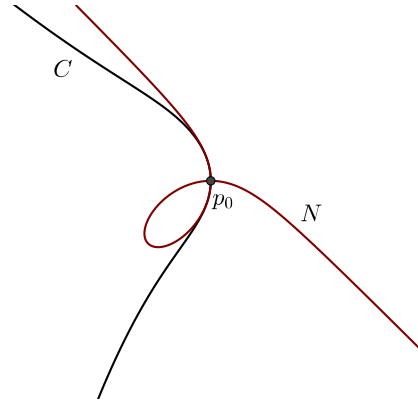
Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{t^2 - 12t}{t^4 - 2t^2 + 1}x^2 + \frac{-8t^3 + 56t^2 - 16t + 16}{t^8 - 4t^6 + 6t^4 - 4t^2 + 1}x + \frac{16t^4 - 96t^3 + 80t^2 - 128t - 64}{t^{12} - 6t^{10} + 15t^8 - 20t^6 + 15t^4 - 6t^2 + 1}$$

Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ 6I_1)$.

Construção 7

$$\begin{aligned} C : x^3 + x^2y + y^2z + xz^2 &= 0 \\ N : x^3 + xyz + y^3 &= 0 \end{aligned}$$



Equação de Weierstrass:

$$y^2 = x^3 + \frac{1}{t^2 + 2t + 1}x^2 + \frac{24t + 16}{t^8 + 4t^7 + 6t^6 + 4t^5 + t^4}x + \frac{16}{t^{12} + 6t^{11} + 15t^{10} + 20t^9 + 15t^8 + 6t^7 + t^6}$$

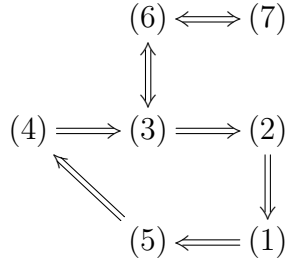
Configuração das fibras singulares: $(I_6 \ 6I_1)$.

3.5 Equivalências

Nessa última seção vamos mostrar que todas as configurações de um pencil de cúbica induzindo uma superfície elíptica racional de posto 3 com uma única fibra redutível de tipo I_6 são equivalentes. Na seção anterior, vimos que existem sete configurações, demonstraremos que qualquer uma pode ser obtida pela **Construção 1** após uma transformação birracional.

Teorema 3.5.1. *Seja $\mathcal{E}$ uma superfície elíptica racional com posto de Mordell-Weil igual a 3 e $MW(\mathcal{E}) \cong A_2^* \oplus A_1^*$. Então $\mathcal{E}$ é uma superfície induzida por um pencil de cúbicas como na Construção 1.*

Afim de provar o teorema utilizaremos a seguinte sequência de implicações:



Para uma melhor compreensão da demonstração fixamos as seguintes convenções:

1. $\mathcal{E}_i$: a superfície $\mathcal{E}$ após a i -ésima contração;
2. P_i^j : a imagem da curva acima de p_i , na superfície $\mathcal{E}_j$;
3. Θ_i^j : a imagem da componente Θ_i na superfície $\mathcal{E}_j$;
4. E_i^j : a imagem da curva E_i na superfície $\mathcal{E}_j$.

Demonstração. $(4) \Rightarrow (3)$. Seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas conforme (4). Como p_0 é um ponto de base com multiplicidade 3, existem três curvas acima dele em $\mathcal{E}$: a (-1) -curva P_0 e as (-2) -curvas Θ_0 e Θ_5 . Após contrairmos P_0 , obtemos uma nova superfície $\mathcal{E}_1$, onde a imagem de Θ_0 é uma (-1) -curva e logo podemos contrai-la para obtermos uma superfície $\mathcal{E}_2$. Nessa superfície a curva Θ_1^2 , que é a transformada estrita em $\mathcal{E}_2$ da reta ligando p_0 e p_4 , é uma (-1) -curva, logo podemos fazer sua contração obtendo assim a superfície $\mathcal{E}_3$. Se Θ_2 é a (-2) -curva sobre p_4 , na qual P_4 não intersecta, então Θ_2^3 é uma (-1) -curva na superfície $\mathcal{E}_3$. Fazendo sua contração iremos obter uma superfície $\mathcal{E}_4$. Agora, se denotarmos por E_1 a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta tangente a E em p_4 , então as (-1) -curvas $P_1^4, P_2^4, P_3^4, P_4^4$ e E_1^4 não se intersectam em $\mathcal{E}_4$. Assim, podemos contrai-las para obtermos um pencil de cúbicas como em (3).

Para mostrar que $(3) \Rightarrow (2)$, seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (3). Uma vez que p_0 é um ponto de base com multiplicidade 4, existem quatro curvas acima dele em $\mathcal{E}$, sendo elas: a (-1) -curva P_0 e as (-2) -curvas Θ_0, Θ_1 e Θ_2 . Contraindo P_0 conseguimos uma superfície $\mathcal{E}_1$, na qual Θ_0^1 é uma (-1) -curvas. Podemos então contrair Θ_0^1 para encontrarmos uma superfície $\mathcal{E}_2$ e Θ_1^2 para obtemos uma nova superfície $\mathcal{E}_3$. A (-1) -curva P_1^3 pode

ser contraída obtendo assim uma superfície $\mathcal{E}_4$ onde Θ_4^4 , que é a transformada estrita em $\mathcal{E}_4$ da reta passando por p_1 e p_2 , é uma (-1) -curva. Assim, contraímos Θ_4^4 encontrando uma superfície $\mathcal{E}_5$. Se denotarmos por E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta ligando p_0 e p_{i+1} ($i = 1, 2$), então as (-1) -curvas P_4^5, P_5^5, E_1^5 e E_2^5 não se intersectam em $\mathcal{E}_5$. Logo podemos contraí-las para conseguirmos um pencil de cúbicas conforme (2).

Mostraremos agora que (2) $\Rightarrow$ (1). Seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (2). Como p_0 é um ponto de base com multiplicidade 2, existem duas curvas acima dele em $\mathcal{E}$: a (-1) -curva P_0 e a (-2) -curva Θ_0 . Contraíndo P_0 obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$ em que Θ_0^1 é uma (-1) -curva. Após a contração de Θ_0^1 encontramos uma nova superfície $\mathcal{E}_2$. Visto que o ponto p_4 é um ponto de base com multiplicidade 3, acima dele encontra-se três curvas: a (-1) -curvas P_4 e as (-2) -curvas Θ_2 e Θ_3 . Essas curvas são isomorfas a P_4^2 e Θ_2^2 e Θ_3^2 . Assim, contraíndo P_4^2 em $\mathcal{E}_2$ conseguimos uma superfície $\mathcal{E}_3$ onde Θ_2^3 é uma (-1) -curva, que ao ser contraída induz uma superfície $\mathcal{E}_4$. Agora, a (-1) -curva $P_5^{(4)}$ pode ser contraída levando-nos a uma superfície $\mathcal{E}_5$ na qual Θ_4^5 , que trata-se da transformada estrita em $\mathcal{E}_5$ da reta que liga p_3 e p_5 , é uma (-1) -curva. Com isso, contraímos Θ_4^5 e obtemos uma nova superfície $\mathcal{E}_6$. Por fim, se denotarmos por E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta que passa por p_1 e p_{i+2} ($i = 1, 2$). Então as (-1) -curvas P_2^6, E_1^6 e E_2^6 não se intersectam em $\mathcal{E}_6$; logo podemos contraí-las para obtemos um pencil de cúbicas como em (1).

Para provar que (1) $\Rightarrow$ (5), seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (1). Visto que p_0, p_2 e p_4 são pontos de base com multiplicidade 2, acima de cada um desses pontos existem duas curvas em $\mathcal{E}$: as (-1) -curvas P_0, P_2 e P_4 e as (-2) -curvas Θ_0, Θ_2 e Θ_4 . Contraíndo a (-1) -curva P_1 acima de p_1 , obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$. Se Θ_1 denota a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta que liga p_0 a p_2 , então Θ_1^1 é uma (-1) -curva em $\mathcal{E}_1$. Após contraírmos Θ_1^1 encontramos uma superfície $\mathcal{E}_2$ onde Θ_2^2 é uma (-1) -curva e fazendo sua contração obtemos uma nova superfície $\mathcal{E}_3$. Nessa superfície a curva Θ_3^3 , que é a transformada estrita em $\mathcal{E}_3$ da reta que liga p_2 a p_5 , tem auto-interseção -1 , logo podemos contraí-la obtendo assim uma superfície $\mathcal{E}_4$. Contraíndo a (-1) -curva P_3^4 encontramos uma superfície $\mathcal{E}_5$, onde a transformada estrita em $\mathcal{E}_5$ da reta ligando p_0 e p_4 , denotada por Θ_5^5 , é uma (-1) -curva. Assim, se E_1 é a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta passando por p_0 e p_5 , temos que as (-1) -curvas P_0^5, P_4^5, Θ_5^5 e E_1^5 não se intersectam em $\mathcal{E}_5$. Portanto, ao contraí-las obtemos um pencil de cúbicas conforme (5).

Mostraremos agora que (5) $\Rightarrow$ (4). Seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (5). Em razão de p_4 ser um ponto de base com multiplicidade 4, existem quatro curvas acima dele em $\mathcal{E}$: a (-1) -curva P_4 e as (-2) -curvas Θ_2, Θ_3 e Θ_4 . Ao contraírmos P_4 obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$, na qual Θ_4^1 é uma (-1) -curva, que ao contraí-la encontramos uma nova superfície $\mathcal{E}_2$. A curva P_1 acima de p_1 tem auto-interseção -1 , logo P_1^2 pode ser contraída para obtermos uma superfície $\mathcal{E}_3$. Se denotarmos Θ_1 a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta passando por p_0 e p_4 , sua imagem Θ_1^3 em $\mathcal{E}_3$ é uma (-1) -curva. Contraíndo Θ_1^3 somos levados a uma superfície $\mathcal{E}_4$ onde Θ_2^4 é uma (-1) -curva, que contraíndo-a encontramos uma nova superfície $\mathcal{E}_5$. Agora, sejam E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta que liga p_0 e p_{i+1} ($i = 1, 2$) e Θ_5 a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da cônica. As (-1) -curvas P_0^5, E_1^5, E_2^5 e Θ_5^5 não se intersectam em $\mathcal{E}_5$, logo podemos contraí-las para encontramos um pencil de cúbicas com em (4).

Mostraremos agora que (3) $\Rightarrow$ (6). Seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (3). Dado que p_0 é um ponto de base com multiplicidade 4, já vimos que existem

quatro curvas acima dele em $\mathcal{E}$, a saber: a (-1) -curva P_0 e as (-2) -curvas Θ_0, Θ_1 e Θ_2 . Se Θ_4 é a transformada estrita da reta que passando por p_1 e p_2 , então ao contrairmos a (-1) -curva P_1 acima de p_1 obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$ onde Θ_4^1 é uma curva com auto-interseção -1 . Assim podemos contrair Θ_4^1 para encontrarmos uma superfície $\mathcal{E}_2$ na qual Θ_5^2 , que é a transformada estrita em $\mathcal{E}_2$ da reta tangente a p_0 , é uma (-1) -curva. Após contrai-la, somos induzidos a uma superfície $\mathcal{E}_3$ onde Θ_0^3 é uma (-1) -curva. A contração de Θ_0^3 leva-nos a uma nova superfície $\mathcal{E}_4$, nessa superfície Θ_1^4 é uma (-1) -curva. Se denotarmos por E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta que liga p_{i+1} a p_4 ($i = 1, 2$), então as (-1) -curvas $P_4^4, P_5^4, \Theta_1^4, E_1^4$ e E_2^4 não se intersectam na superfície $\mathcal{E}_4$. Sendo assim, podemos contrai-la para obtermos um pencil de cúbicas com em (6).

Para mostrar que (6) $\Rightarrow$ (3), considere $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (6). Como p_0 é um ponto de base com multiplicidade 5, acima dele em $\mathcal{E}$ existem cinco curvas: a (-1) -curva P_0 e as (-2) -curvas $\Theta_0, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5$. Contraindo P_0 obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$, onde Θ_0^1 é uma (-1) -curva. Ao contrairmos Θ_0^1 somos levados a uma superfície $\mathcal{E}_2$, na qual Θ_5^2 é uma curva com auto-interseção -1 . A contração de Θ_5^2 induz uma superfície $\mathcal{E}_3$, em que Θ_4^3 é uma (-1) -curva. Após contrairmos Θ_4^3 encontramos uma nova superfície $\mathcal{E}_4$. Se E_1 denota a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta tangente a E em p_3 , E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta passando por p_0 e p_{i+1} ($i = 2, 3$). Então as (-1) -curvas $P_1^4, P_2^4, E_1^4, E_2^4$ e E_3^4 não se intersectam em $\mathcal{E}_4$, portanto podemos contrai-las para encontramos uma pencil de cúbicas conforme (3).

Mostraremos agora que (6) $\Rightarrow$ (7). Seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (6). Como p_0 é um ponto de base com multiplicidade 5, vimos que existem cinco curvas acima dele em $\mathcal{E}$: a (-1) -curva P_0 e as (-2) -curvas $\Theta_0, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5$. Contraindo P_0 obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$, onde Θ_0^1 é uma (-1) -curva, ao contrai-la encontramos uma nova superfície $\mathcal{E}_2$. Assim, Θ_5^2 é uma (-1) -curva em $\mathcal{E}_2$, logo pode ser contraída para encontramos uma superfície $\mathcal{E}_3$. Nessa superfície Θ_4^3 é uma curva com auto-interseção -1 , que após ser contraída da origem a uma superfície $\mathcal{E}_4$, na qual Θ_3^4 é uma (-1) -curva. Ao denotarmos E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta que liga p_i a p_3 ($i = 1, 2$), temos que as (-1) -curvas P_4^4, Θ_3^4, E_1^4 e E_2^4 não se intersectam na superfície $\mathcal{E}_4$. Com isso, podemos fazer quatro contrações consecutivas e obtermos uma superfície $\mathcal{E}_8$. Nessa superfície, a curva Θ_2^8 , que é a transformada estrita em $\mathcal{E}_8$ da reta que liga p_1 a p_2 , é uma (-1) -curva. Por fim, contraímos Θ_2^8 para obtermos um pencil de cúbicas como em (7).

Finalmente, vamos mostrar que (7) $\Rightarrow$ (6). Seja $\mathcal{E}$ a superfície elíptica racional induzida por um pencil de cúbicas com em (7). Uma vez que p_0 é um ponto de base com multiplicidade 6, existem seis curvas acima dele em $\mathcal{E}$: a (-1) -curva P_0 e as (-2) -curvas $\Theta_0, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ e Θ_5 . Ao contrairmos P_0 obtemos uma superfície $\mathcal{E}_1$, onde Θ_0^1 é uma (-1) -curva; ao contrai-la obtemos uma superfície $\mathcal{E}_2$. Nessa superfície, a curva Θ_5^2 tem auto-interseção -1 , logo podemos contrai-la para encontramos uma superfície $\mathcal{E}_3$. A curva Θ_4^3 é uma (-1) -curva em $\mathcal{E}_3$, assim contraindo-a obtemos uma nova superfície $\mathcal{E}_4$. Se denotarmos por E_i a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta que passa por p_0 e p_i ($i = 1, 2$) e E_3 a transformada estrita em $\mathcal{E}$ da reta passando por p_1 e p_2 . Então as (-1) -curvas $P_3^4, \Theta_3^4, E_1^4, E_2^4$ e E_3^4 não se intersectam em $\mathcal{E}_4$, logo podem ser contraídas para conseguirmos um pencil de cúbicas com em (6).

□

Referências

- [1] Davide Fusi et al. “Construction of linear pencils of cubic curves with Mordell-Weil rank six and seven”. Em: *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi* 55.2 (2006), pp. 195–205.
- [2] Andreas Gathmann. “Algebraic geometry”. Em: *Notes for a class, taught at the University of Kaiserslautern* (2014).
- [3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [4] Rick Miranda. *The Basic Theory of Elliptic Surfaces*. ETS Editrice, Pisa, 1989.
- [5] Keiji Oguiso, Tetsuji Shioda et al. “The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface”. Em: *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi* 40.1 (1991), pp. 83–99.
- [6] Valerio Pastro et al. “Construction of Rational Elliptic Surfaces with Mordell-Weil Rank Four”. Em: *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi* 61.1 (2012), pp. 29–42.
- [7] Ulf Persson. “Configurations of Kodaira fibers on rational elliptic surfaces”. Em: *Math Z* 205 (1990), pp. 1–47.
- [8] Cecilia Salgado. “Construction of linear pencils of cubics with Mordell-Weil rank five”. Em: *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi* 58.2 (2009), pp. 95–104.
- [9] Matthias Schütt e Tetsuji Shioda. “Elliptic surfaces”. Em: *arXiv preprint arXiv:0907.0298v3* (2010).
- [10] Matthias Schütt e Tetsuji Shioda. *Mordell-Weil Lattices*. <http://www2.iag.uni-hannover.de/schuetz/BookMWL17.pdf>.
- [11] Tetsuji Shioda et al. “On the Mordell-Weil lattices”. Em: *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi* 39.2 (1990), pp. 211–240.
- [12] Joseph H. Silverman. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag, 1994.
- [13] Joseph H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. 2^a ed. Springer Science & Business Media, 2009.

Apêndice A

Código

O Magma é um sistema algébrico computacional projetado para resolver problemas na área da álgebra, tais como: teoria dos números, geometria algébrica e combinatória. Esse sistema foi utilizado nessa dissertação para verificação dos exemplos de pencils de cúbicas induzindo uma superfície elíptica racional de posto 3 com uma única fibra de tipo I_6 , exposto na seção 3.4. O código a seguir foi executado na plataforma do Magma disponível em <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>.

Algoritmo A.1 .

Entrada: F, G e O

Saída: Equação de Weierstrass, Lugares Ruins e Símbolos de Kodaira

```
1: > Q := RationalField();
2: > K<t> := FunctionField(Q);
3: > P<x,y,z> := ProjectiveSpace(K,2);
4: > C := Curve(P, F + tG);
5: > O := C![ , ];
6: > E := EllipticCurve(C,O);
7: > E;
8: > BadPlaces(E);
9: > KodairaSymbols(E);
```

Este algoritmo tem como entrada cúbicas $C_1 : F(X, Y, Z) = 0$ e $C_2 : G(X, Y, Z) = 0$ (sendo pelo menos uma não-singular) e um ponto racional para a curva elíptica $F + tG = 0$. Como retorno temos a equação de Weierstrass, os lugares ruins e os símbolos de Kodaira correspondentes à superfície elíptica racional induzida pelo pencil de cúbicas gerado por C_1 e C_2 . Por completude, vamos apresentar a finalidade de cada linha presente no algoritmo.

Linha 1: Cria o corpo Q dos números racionais.

Linha 2: Cria o corpo K das funções racionais em uma variável sobre Q .

Linha 3: Cria o plano projetivo P sobre o corpo K .

Linha 4: Cria uma cúbica C no plano projetivo P , a partir de F e G .

Linha 5: Recebe o ponto racional O para C fornecido na entrada.

Linha 6: Retorna a curva elíptica E , dada por C e O .

Linha 7: Imprime a equação de Weierstrass para curva elíptica E .

Linha 8: Imprime os lugares ruins da superfície correspondente a E ;

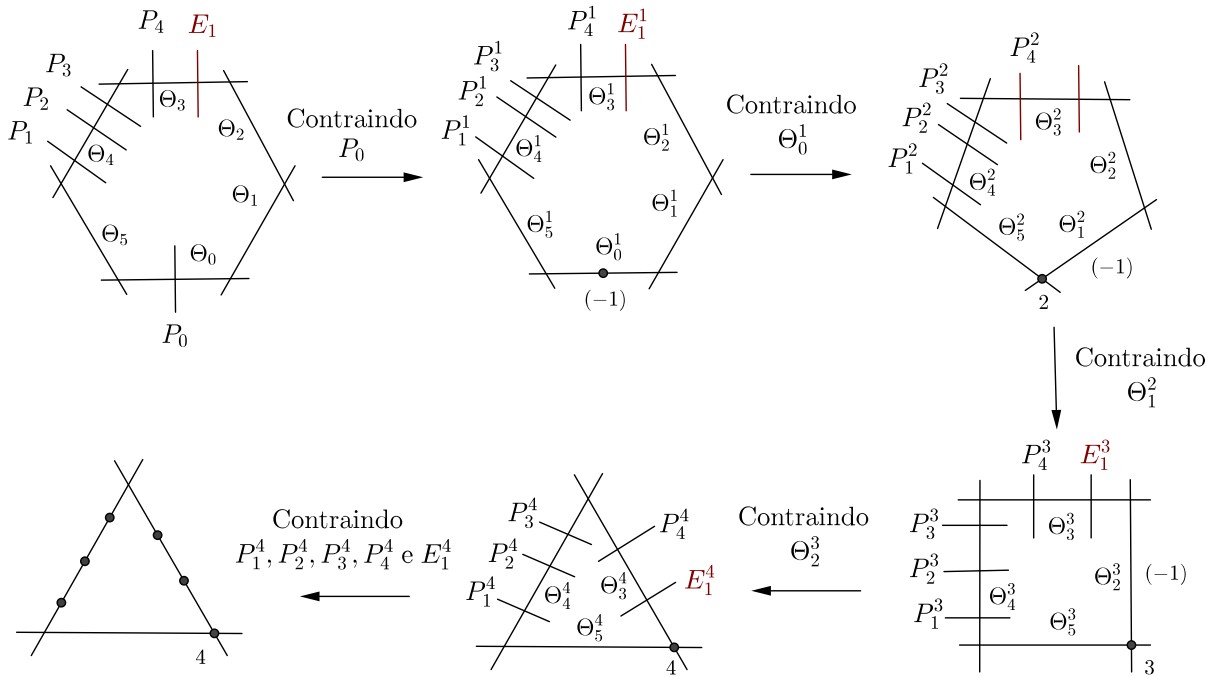
Linha 9: Imprime a configuração das fibras singulares na superfície correspondente a E .

Apêndice B

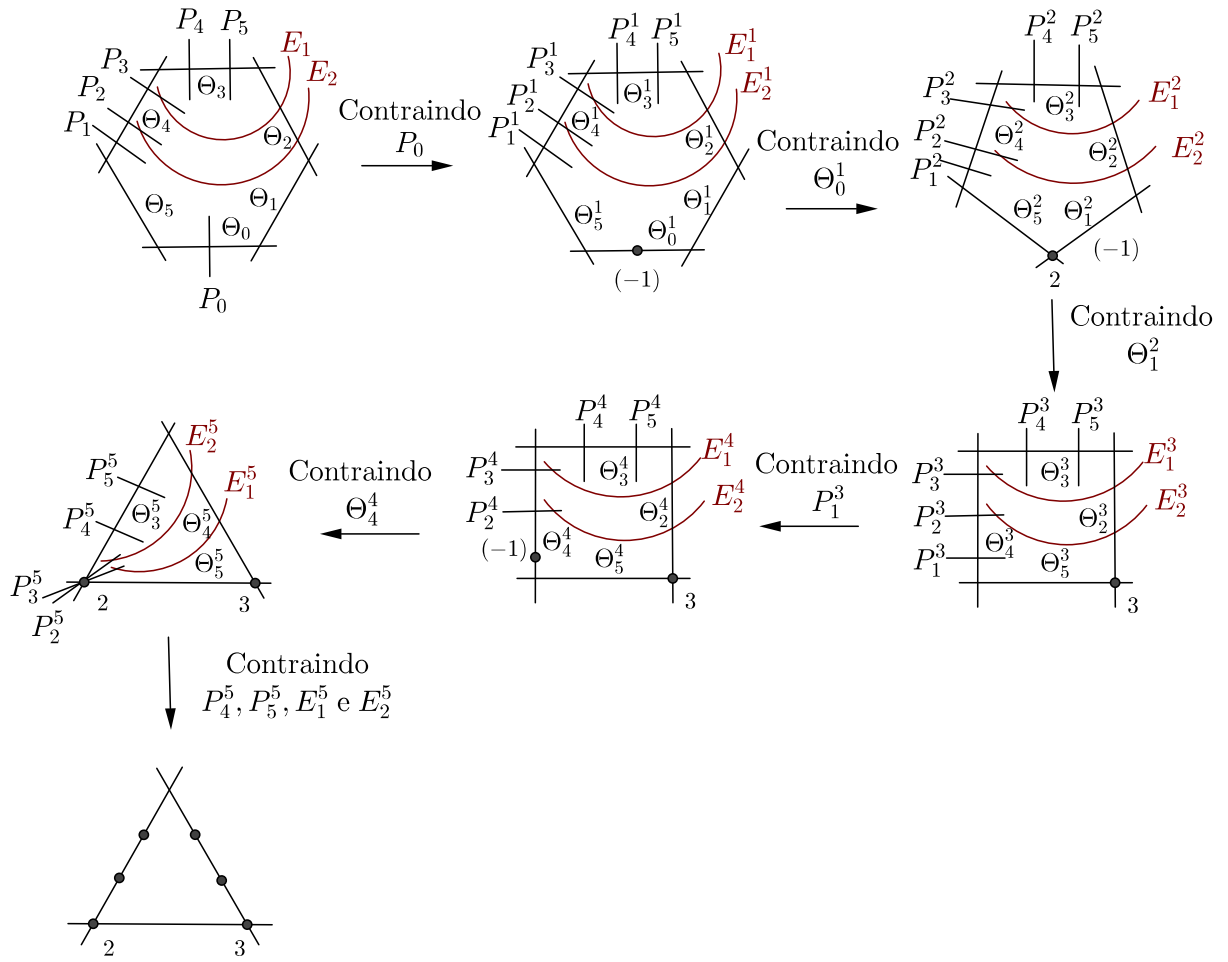
Contrações

A seguir, vamos expor os diagramas das contrações presentes na demonstração do Teorema 3.5.1.

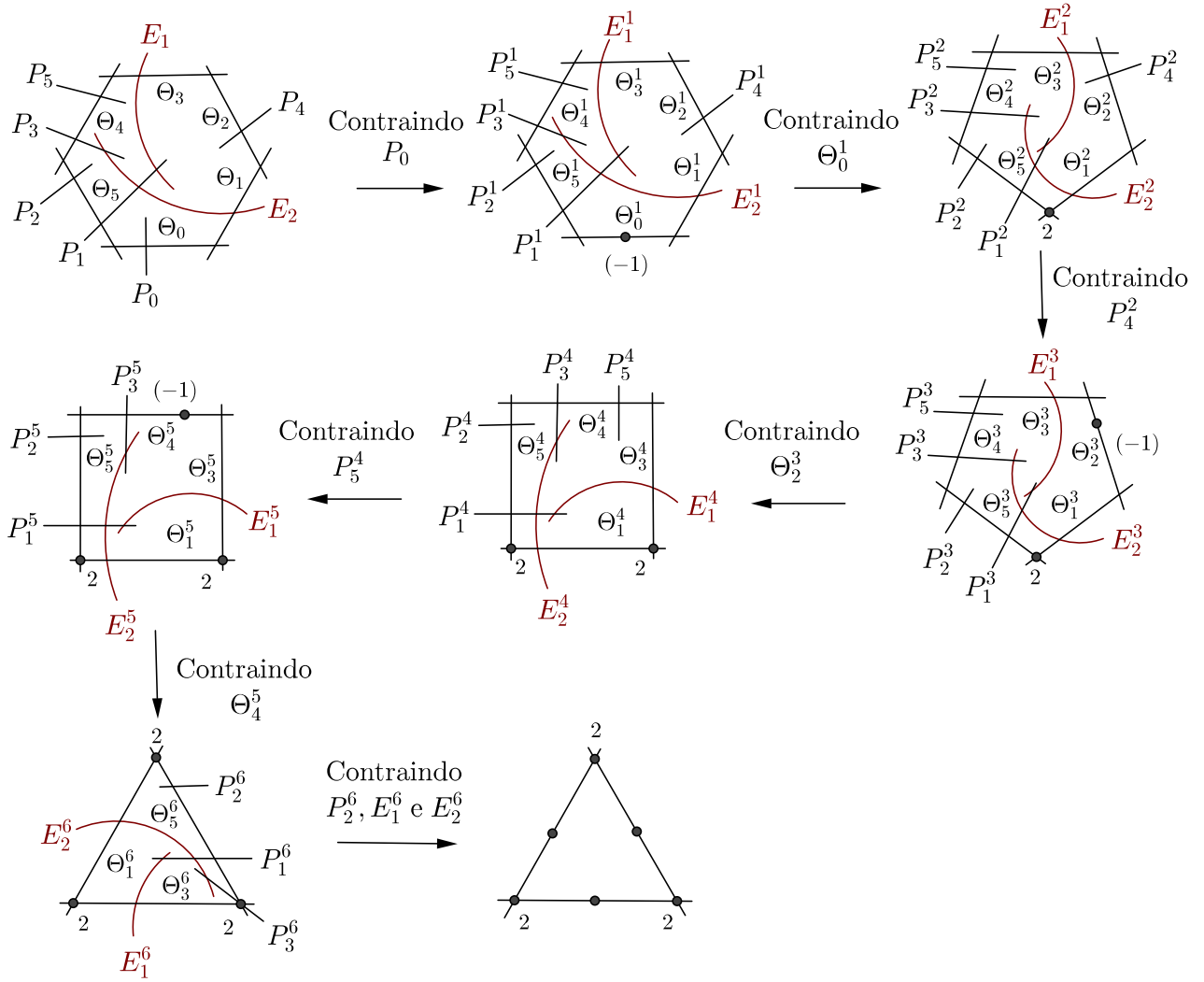
(4) $\Rightarrow$ (3)



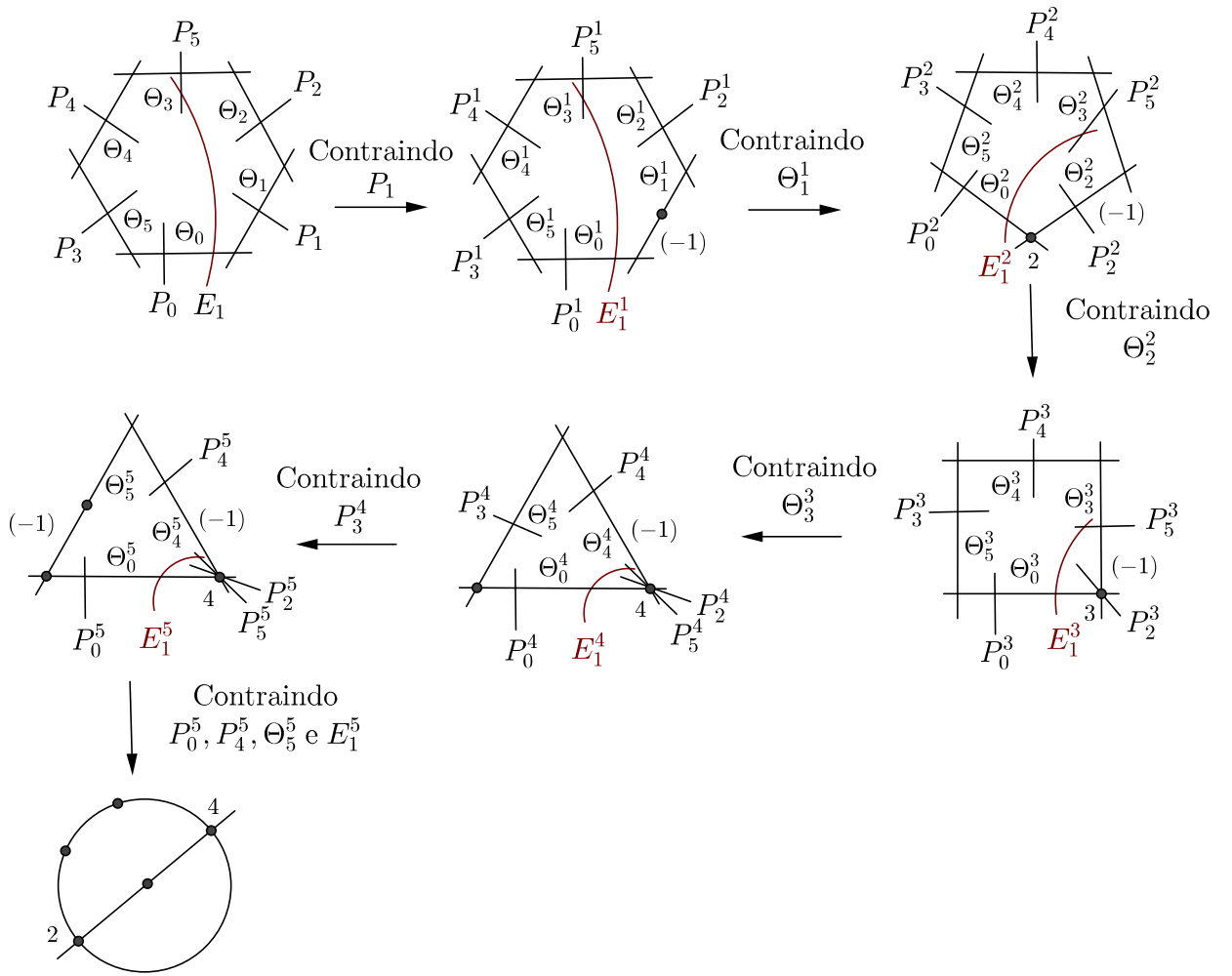
(3) $\implies$ (2)



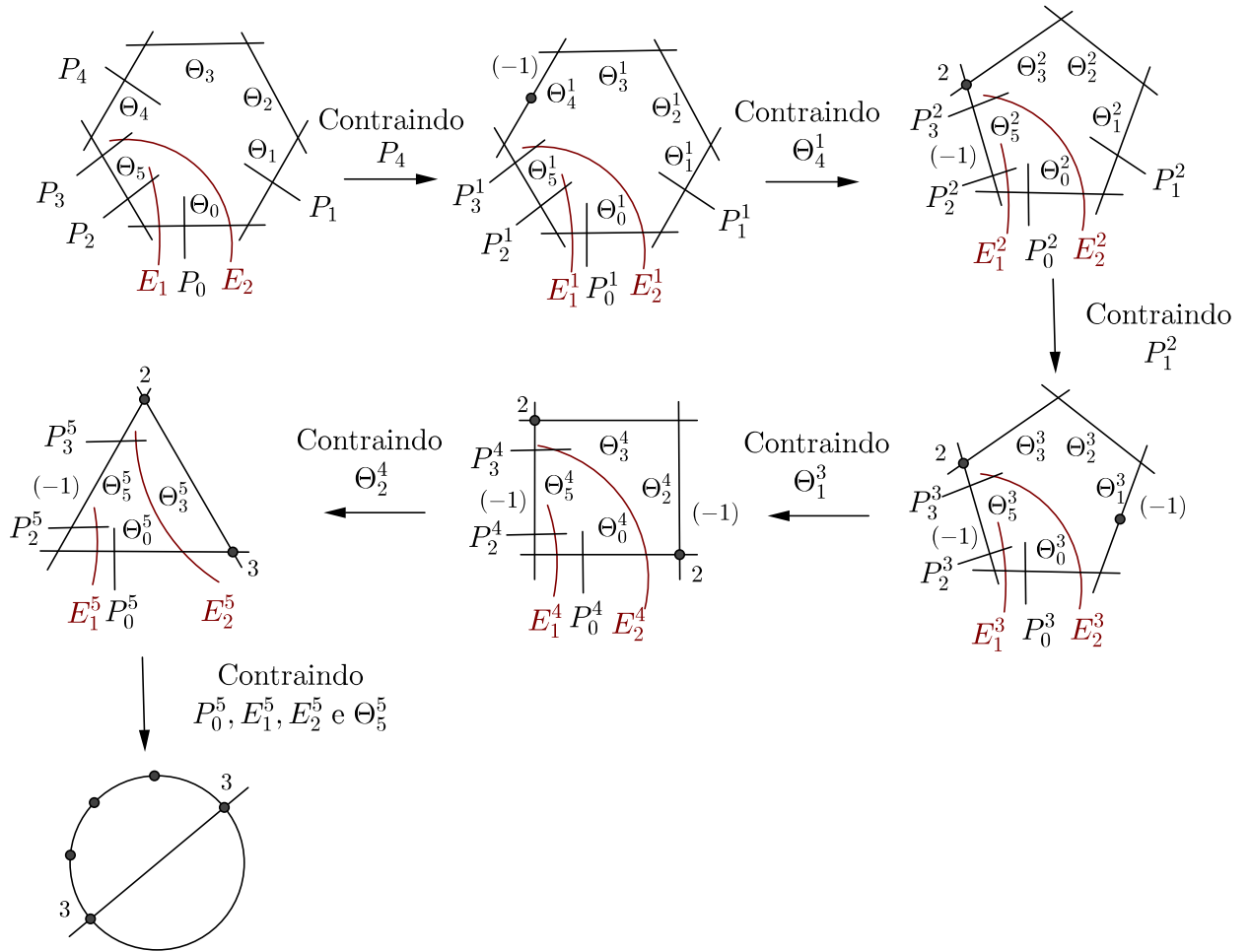
(2) $\implies$ (1)



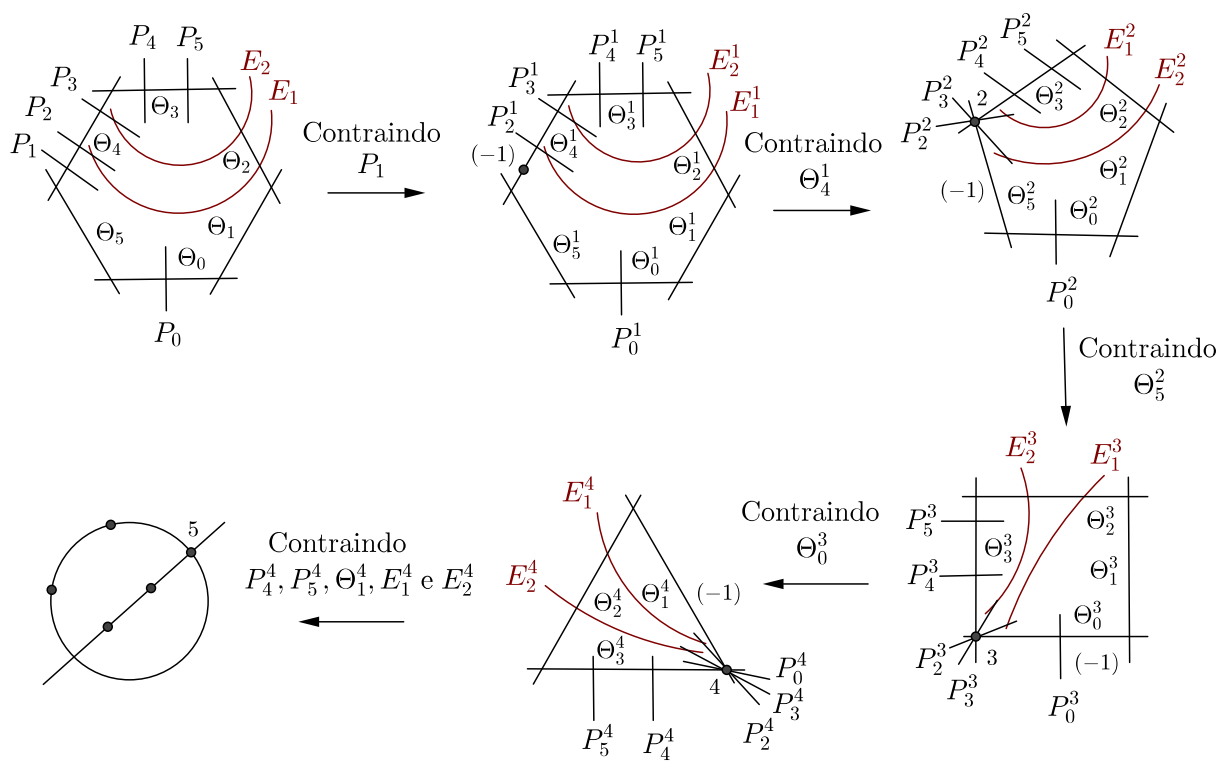
(1) $\implies$ (5)



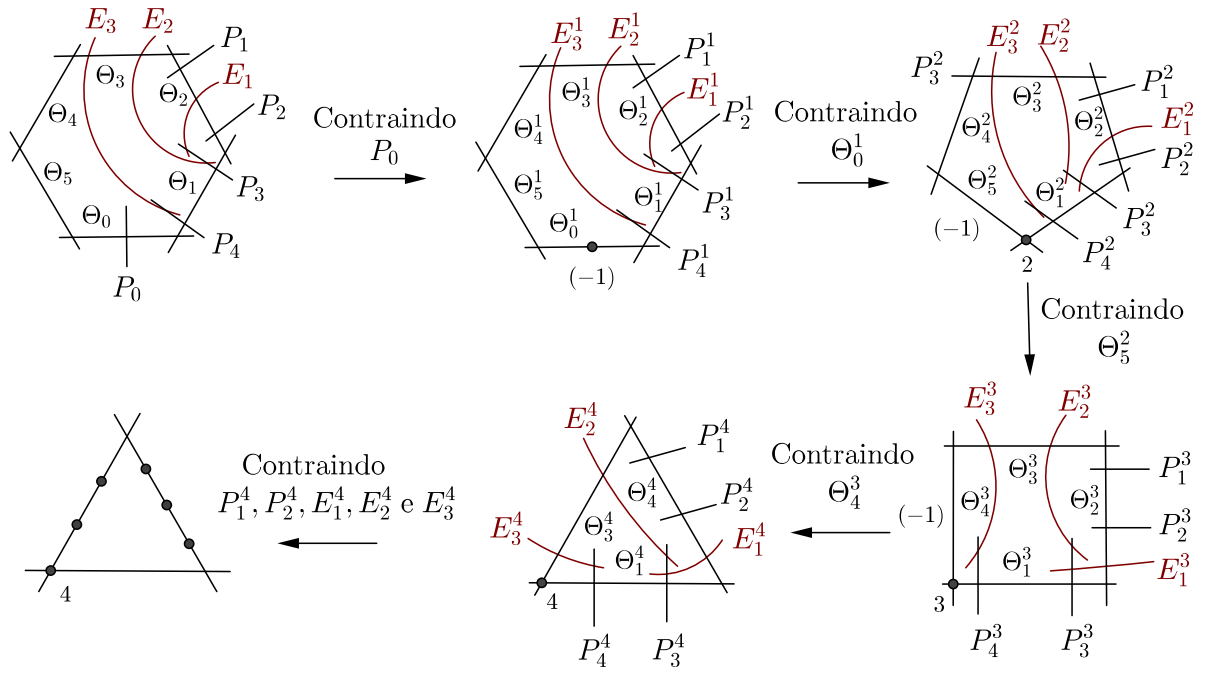
(5) $\implies$ (4)



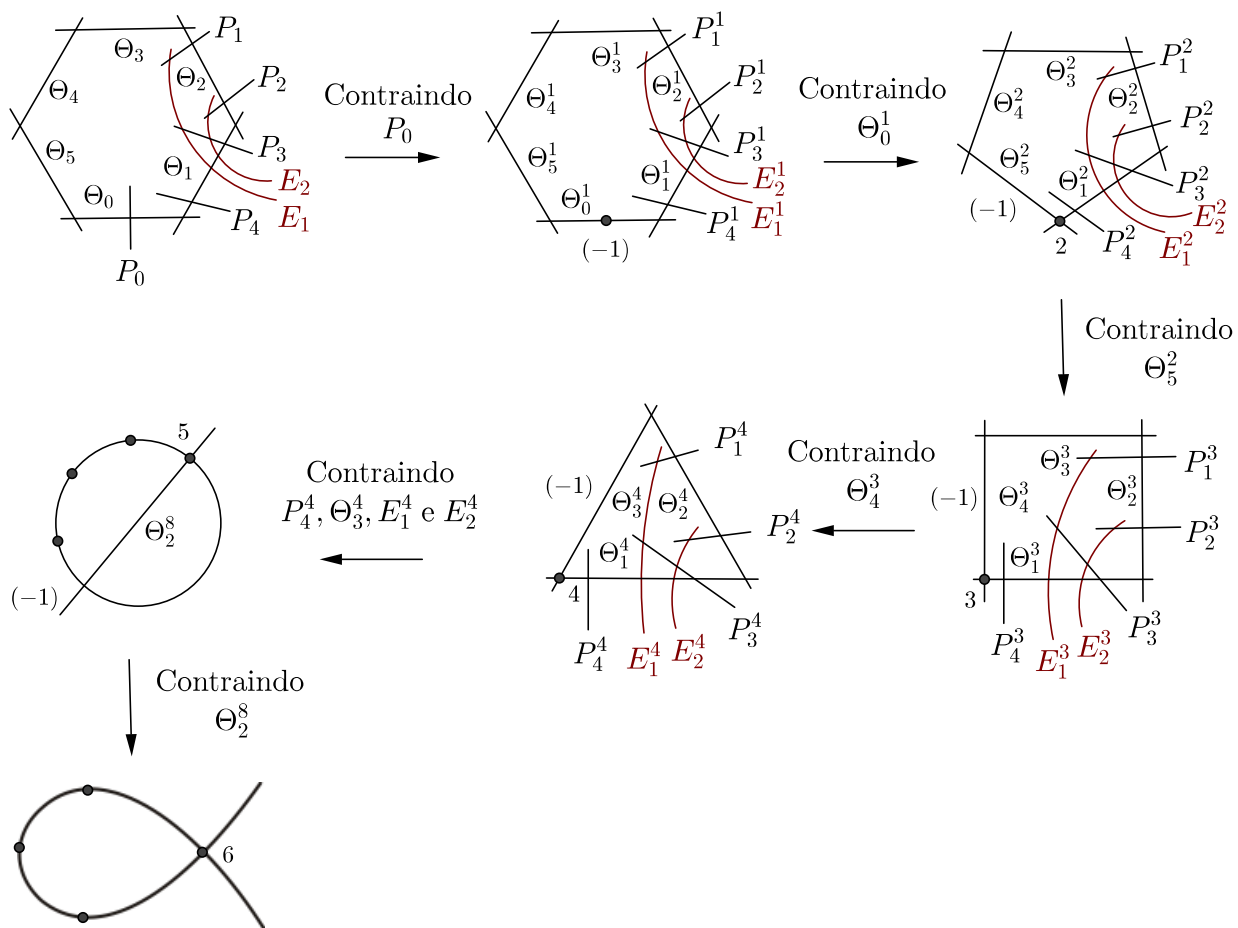
(3) $\implies$ (6)



(6) $\Rightarrow$ (3)



(6) $\implies$ (7)



$$(7) \implies (6)$$
