UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Grupos de Lie

Dennis Leonardo Becerra Hernández

2017

Grupos de Lie

Dennis Leonardo Becerra Hernández

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Graham Andrew Craig Smith.

Rio de Janeiro
10 de agosto de 2017

Becerra Hernández, Dennis Leonardo
Grupos de Lie/ Dennis Leonardo Becerra Hernández.
Rio de Janeiro, 2017.
53f.

Orientador: Graham Andrew Craig Smith.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática,
Programa de Pos-graduação em Matemática, 2017.

1. Grupos de Lie. 2. Álgebras de Lie. 3.
Clasificação Inicial das Álgebras de Lie 4.
Semisimplicidade. Orientador I. Smith, Graham.

Grupos de Lie

Dennis Leonardo Becerra Hernández

Orientador: Graham Andrew Craig Smith.

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

(Presidente) Prof. Graham Smith - IM/UFRJ

Prof. Maria Fernanda Elbert - IM/UFRJ

Prof. Michael Benjamin Deutsch - IM/UFRJ

Prof. Maria Asunción Jiménez Grande - IM/UFF

Prof. Andrew James Clarke - IM/UFRJ

Prof. Cristhabel Janeth Casanova Vasquez - IM/UFF

Rio de Janeiro
10 de Agosto de 2017

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, fonte da minha força e sabiduria.

Agradeço a meus pais, Xiomara Hernández e William Becerra que se esforçaram para eu ter a melhor educação, que jutno com seu apoio me permitiram chegar até aqui.

Agradeço a meus irmãos William e Jhonatan pelo apoio durante toda minha formação.

Agradeço a meu orientador, Professor Graham Smith, por seus ensinamentos, orientações, paciência e dedicação na revisão deste trabalho.

Agradeço aos professores do meus cursos de mestrado: Xavier Paredes, Alexander Arbieto, Luciane Quoos, Andrew Clarke, Katrin Grit, Ilir Snopche, Alejandro Cabrera, Walcy Santos por contribuir com minha formação acadêmica.

Agradeço aos professores que compuseram a minha banca avaliadora e por suas correções e sugestões.

Agradeço a todos os que permitiram que estre trabalho seja melhor, aos meus companheiros e colegas de estudo.

Agradeço a todos os funcionários do IM-UFRJ que nos permitem as melhores condições de ambiente e suporte burocrático.

Agradeço a todos que participaram de maneira direta ou indireta desta conquista.

Agradeço à CAPES pela ajuda financeira e ao Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM-UFRJ.

Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo de grupos de Lie e álgebras de Lie, de modo que para cada grupo de Lie pode construir uma álgebra de Lie e para cada álgebra de Lie pode obter um grupo de Lie, de tal forma que sua álgebra de Lie é a que nós escolhimos inicialmente. Nós também conseguimos resultados para álgebras de Lie relativos a semimplicidade, solubilidade, nilpotencia tambem estudamos as formas de Killing, redutibilidade Total, critério de Cartan. Finalmente, apresentamos os grupos de difeomorfismos do Hölder, e mostramos que é um grupo topológico, onde o conjunto dos grupos topológicos é un conjunto que contem que contém todos os grupos de Lie.

Palavras chaves: Grupo de Lie, àlgebra de Lie, representação, campo de vectores, nilpotente, solúvel, formas de Killing, norma de Hölder.

Abstract

This dissertation presents a study of Lie groups and Lie algebras, so that for each Lie group can construct a Lie algebra and for each Lie algebra can obtain a Lie group, such that its Lie algebra is to which we initially chose. We also obtained results for Lie algebras related to semimplicity, solubility, nilpotent also studied the forms of Killing, Total redutibility, criterion of Cartan. Finally, we present the Hölder diffeomorphism groups, and we show that it is a topological group, where the set of topological groups is a set that contains all the Lie groups.

Key words: Lie group, Lie algebra, representation, field vectors, nilpotent, soluble, Killing forms, Hölder norm.

Conteúdo

Introdução

No século XIX um estudo bastante utilizado nas áreas de Geometria e a teoria de Equações Diferenciais foi aquele de grupos de transformações, em particular as simetrias. Referente aos grupos de simetria na Geometria um dos principais matemáticos nesta área foi o alemão Felix Klein (1849-1925), que afirmou que o estudo de Geometria se reduz ao estudo de grupos de simetria. No estudo das Equações Diferenciais, em vez de grupos de simetria, estudaram se pseudo-grupos de transformações determinadas por equações diferenciais, com o fim de obter para estas equações resultados semelhantes aos obtidos na Teoria de Galois. Esta teoria foi obtida como resultado do trabalho do matemático norueguês Sophus Lie (1842-1899), e hoje em dia é conhecida como Teoria de Lie.

Entre as coisas que Lie aportou se encontram as álgebras de Lie associadas aos pseudo-grupos de transformações e as relações fundamentais entre os dois, assim como muitas questões de representação.

Depois da morte de Lie, alguns matemáticos de renome continuaram com seu trabalho, entre eles: Elie Cartan, Hermann Weyl, John Neumann e Claude Chevalley. Atualmente a Teoria de Lie é reconhecida como uma das áreas fundamentais da Matemática, e seus resultados são aplicados na resolução de muitos e variados problemas, desde Álgebra abstrata até Engenharia e Física Experimental.

Agora um grupo de Lie consiste num grupo G cujo produto

$$(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$$

e

$$g \in G \mapsto g^{-1} \in G$$

são aplicações diferenciáveis.

Como exemplos mais comuns de grupos de Lie temos: O espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ com a adição ordinaria de vetores como operação de grupo, alguns grupos de matrizes invertíveis (com a multiplicação de matrizes como operação de grupo), por exemplo o grupo simples de $GL(n, \mathbb{R})$ ou o grupo $SO(3)$ de todas as rotações no espaço de 3 dimensões é um grupo de Lie.

Um exemplo que serve para cobrir boa parte da teoria e ao qual deve-se recorrer sempre como guia, é o grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$. Os elementos deste grupo são as matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais ou, o que é essencialmente a mesma coisa, as transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial real de dimensão finita.

A grande força da teoria dos grupos de Lie está baseada na existência de álgebras de Lie associadas aos grupos. As álgebras de Lie possibilitam a transferença de métodos de álgebra linear ao estudo de objetos não lineares, como são os grupos de Lie. Uma álgebra de Lie é definida como sendo um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete) bilinear e antisimétrico $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz a identidade de Jacobi: Para cada X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Os elementos da álgebra de Lie associada a um grupo de Lie são campos vetoriais no grupo, que satisfazem uma propriedade de simetria proveniente da estrutura multiplicativa do grupo (isto é, são campos invariantes de vetores por translações). Enquanto que os elementos do grupo são obtidos através das soluções desses campos dados pelos seus fluxos. Normalmente o espaço vetorial subjacente à álgebra de Lie de um grupo de Lie é identificado com o espaço T_0G dos vetores tangentes ao elemento neutro $0 \in G$.

Em outras palavras, a álgebra de Lie é um objeto linear que aproxima o grupo: para se obter os elementos da álgebra de Lie deve-se derivar curvas no grupo. O procedimento contrário consiste em resolver equações diferenciais. Por isso, no início do desenvolvimento da teoria era empregado o termo grupo infinitesimal, ao invés de álgebra de Lie.

No caso de $GL(n,\mathbb{R})$, sua álgebra de Lie é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, munido do colchete dado pelo comutador de matrizes

$$[A,B] = AB - BA$$

Essa álgebra de Lie será denotada por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Para estabelecer a relação entre a álgebra e o grupo, considere, para cada matriz $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, o campo de vetores

$$X \mapsto AX$$

no espaço da matrizes. Este campo induz a equação diferencial linear

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{1}$$

Esta equação é o sistema linear $\frac{dx}{dt} = Ax$, com $x \in \mathbb{R}$, repetido n vezes, uma vez para cada coluna da matriz X. A solução fundamental do sistema linear em $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$e^{tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(tA)^n,$$

o que garante que a solução da equação (1) com condição inicial $X(0) = Id$ é $X(t) = e^{tA}$. Esta solução está completamente contida em $GL(n;\mathbb{R})$, pois as exponenciais são matrizes invertíveis. Além do mais, a curva

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n;\mathbb{R}) \qquad X(t) = e^{tA}$$

é um homomorfismo quando se considera a estrutura aditiva de grupo em $\mathbb{R}$, já que vale a fórmula $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$. A imagem desse homomorfismo é o que se denomina de subgrupo a 1-parâmetro do grupo de Lie.

1 Grupos de Lie

Nesta seção, vamos introduzir algumas definições e exemplos básicos referentes a Grupos de Lie e Álgebras de Lie que vão ajudar o leitor na compreensão deste texto.

1.1 Grupos de Lie: Definições

Definição 1.1. *Um grupo de Lie é um conjunto G dotado simultaneamente das estruturas de um grupo e de variedade suave, de modo que a multiplicação e a operação inversa na estrutura de grupo*

$$\times : G \times G \longrightarrow G$$

e

$$i : G \longrightarrow G$$

são aplicações suaves.

Definição 1.2. *Um morfismo entre dois grupos de Lie G e H é uma aplicação $\rho : G \to H$ que é diferenciável e também é um homomorfismo de grupos.*

Em geral, quando estivermos falando de grupos de Lie não há muita ambiguidade, isto é, abeliano refere-se à estrutura de grupo, n-dimensional ou conexidade refere-se à estrutura de variedade. Às vezes, uma condição em uma estrutura acaba por ser equivalente a uma condição na outra.

Exemplos.

1. O conjunto dos números reais com a operação soma e estrutura diferenciável usual é um grupo de Lie, pois as aplicações

   $$f(x, y) = x + y \qquad e \qquad g(x) = -x$$

   são diferenciáveis, onde $x,\ y \in \mathbb{R}$.

2. O conjunto dos números reais sem zero $\mathbb{R}^*$ com a operação produto e estrutura diferenciável usual também é grupo de Lie pois as aplicações

   $$f(x, y) = x \cdot y \qquad e \qquad g(x) = x^{-1}$$

   são diferenciáveis, onde $x,\ y \in \mathbb{R}^*$.

3. O conjunto dos reais positivos $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ com a operação produto também é grupo de Lie pelo mesmo motivo do exemplo anterior, a diferença entre $(0, \infty)$ e $\mathbb{R}^*$ é que $(0, \infty)$ é um grupo de Lie conexo e $\mathbb{R}^*$ não é.

4. Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ com a estrutura de grupo multiplicativo. Temos que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1 tem imagem em S^1. Portanto S^1 é um grupo de Lie.

Definição 1.3. *Um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G é um subconjunto $H \subset G$ que é simultaneamente um subgrupo de G e uma subvariedade de G.*

Definição 1.4. *Dado um grupo de Lie G, um subgrupo imerso é a imagem de um subgrupo de Lie H sobre um morfismo injectivo em G.*

Proposição 1.5. *Seja G um conjunto dotado simultaneamente das estruturas de um grupo e de variedade suave de modo que a multiplicação na estrutura de grupo*

$$m : G \times G \longrightarrow G$$

é suave, então a operação inversa na estrutura de grupo

$$i : G \longrightarrow G$$

é suave.

Demonstração: Dado $(g, h) \in G \times G$, a diferencial parcial da multiplicação m em relação á segunda variável é

$$D_2 m\,(g, h) = DL_g(h)$$

onde $L_g : G \to G$ é a multiplicação a esquerda por g, $L_g(h) = gh$. Como L_g é difeomorfismo suave, em particular segue que $DL_g(h)$ é bijetora, daí sobrejetora. Segue pelo teorema da função implícita e pela unicidade do inverso de um elemento de um grupo que, para todo $h \in G$, existe uma função suave ϕ_h tal que, para todo $g \in G$, $m\,(g, \phi_h(g)) = h$. Como $i = \phi_1$, segue que i é suave, e como $i^2 = Id$ segue que i é difeomorfismo suave. $\square$

Observações.

1. Com esta proposição obtemos que, para mostrar que um conjunto G dotado com as estruturas de um grupo e de variedade suave seja grupo de Lie, basta mostrar que a multiplicação na estrutura de grupo seja suave.

2. Pelo teorema da função implícita, a diferencial $Di(g)$ é dada por

$$Di(g) = -\left(D_2 m\right)^{-1}\left(g, g^{-1}\right) \cdot \left(D_1 m\right)\left(g, g^{-1}\right)$$

onde $\left(D_j m\right)(x, y)$ denota a diferencial de m em relação á variável $j = 1, 2$, no ponto (x, y).

Essas diferenciais parciais são dadas por $(D_2 m)(x, y) := DL_x(y)$ e $(D_1 m)(x, y) := DR_y(x)$. Portanto, $\left(D_1 m\right)\left(g, g^{-1}\right) = DR_{g^{-1}}(g)$ e $\left(D_2 m\right)^{-1}\left(g, g^{-1}\right) = \left(DL_g\left(g^{-1}\right)\right)^{-1} = DL_{g^{-1}}(1)$, de onde segue que

$$Di(g) = -DL_{g^{-1}}(1) \cdot DR_{g^{-1}}(g).$$

1.2 Exemplos lineares de Grupos de Lie

Seja $GL\left(n, \mathbb{R}\right)$ o grupo das transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$, agora como a aplicação $\det : M_n\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$ é contínua, e $GL\left(n, \mathbb{R}\right) = \det^{-1}\left(\mathbb{R} \backslash \{0\}\right)$ é pre-imagem continua de um aberto em $\mathbb{R}$, então esse grupo é um subconjunto aberto do espaço vetorial $M_n\left(\mathbb{R}\right)$, e portanto, é uma variedade diferenciável. O produto no grupo $GL\left(n, \mathbb{R}\right)$ é proveniente do produto usual de matrizes. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes $n \times n$, então $C = AB = (c_{ij})$ é dado por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que é um polinômio de grau dois nas variáveis a_{ij}, b_{ij} e, portanto, é uma aplicação suave. Pela proposição 1 temos que $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Os grupos lineares contém os seguintes subgrupos:

$$\begin{aligned}
U(n, \mathbb{C}) &= \left\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A\overline{A^t} = Id\right\} \text{ (grupo unitário)} \\
SL(n, \mathbb{C}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det\, A = 1\} \text{ (grupo linear especial)} \\
O(n, \mathbb{C}) &= \left\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^t = Id\right\} \text{ (grupo ortogonal complexo)} \\
SU(n, \mathbb{C}) &= U(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C}) \text{ (grupo unitário especial)} \\
SL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det\, A = 1\} \text{ (grupo linear especial real)} \\
O(n, \mathbb{R}) &= \left\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = Id\right\} \text{ (grupo ortogonal real)} \\
SO(n, \mathbb{R}) &= O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R}) \text{ (grupo ortogonal especial)}
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $O(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie. Primeiro vamos ver que $O(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$. Seja

$$\mathfrak{s}(n, \mathbb{R}) = \left\{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = A^t\right\}$$

o conjunto das matrizes simétricas de ordem n. Logo a

$$\dim\left(\mathfrak{s}(n,\mathbb{R})\right) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1).$$

Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & M(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{s}(n,\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A\cdot A^t. \end{array}$$

Vemos que f é diferenciável e

$$f^{-1}(Id) = \left\{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A\cdot A^t = I\right\} = O(n,\mathbb{R}).$$

Pelo teorema de Submerção (c.f. capitulo 5 de [3]) para provar que $O(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(Id)$ é subvariedade em $GL(n,\mathbb{R})$, basta mostrar que Id é valor regular de f. Sejam X, $Y \in M(n,\mathbb{R})$ então

$$\begin{aligned} Df_X(Y) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(X+rY) - f(X)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{(X+rY)(X+rY)^t - XX^t}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{XX^t + rXY^t + rYX^t + r^2YY^t - XX^t}{r} \\ &= XY^t + YX^t \end{aligned}$$

Seja $X \in O(n,\mathbb{R})$, seja $S \in \mathfrak{s}(n,\mathbb{R})$, escolhendo $Y = \frac{SX}{2} \in M(n,\mathbb{R})$ temos que

$$Df_X(Y) = X\left(\frac{SX}{2}\right)^t + \frac{SX}{2}X^t = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S,$$

Ou seja, Df_X é sobrejetora para todo $X \in f^{-1}(Id) = O(n,\mathbb{R})$. Logo Id é valor regular de f e $O(n,\mathbb{R})$ é variedade diferenciável de classe C^∞; por tanto $O(n,\mathbb{R})$ é uma subvariedade de $GL(n,\mathbb{R})$. Agora tome as aplicações

$$\begin{array}{rcl} g: O(n,\mathbb{R})\times O(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & O(n,\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} h: O(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & O(n,\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

Como essas aplicações são também diferenciáveis concluímos que $O(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

2 Álgebras de Lie

Nesta parte introduzimos as definições e exemplos básicos de álgebras de Lie e a relação entre um grupo de Lie e sua álgebra de Lie

2.1 Álgebras de Lie: Definições

Definição 2.1. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é um espaço vetorial junto com uma aplicação bilinear e anti-simétrica*

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

satisfazendo a identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$

Definição 2.2. *Um subespaço* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é uma subálgebra de Lie se for fechado pelo colchete.*

Observe que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, e $\mathfrak{h}$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ então $\mathfrak{h}$ também é álgebra de Lie.

Um exemplo de álgebra de Lie é a álgebra $\mathfrak{gl}\,(n, \mathbb{R})$ formada pelas matrizes reais $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes

$$[A, B] = AB - BA.$$

Definição 2.3. *Uma representação de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *em um espaço vetorial* V *é um mapa de álgebras de Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) := End(V),$$

é dizer, um mapa linear que preserva o colchete, ou uma ação de $\mathfrak{g}$ *em* V *tal que*

$$[X, Y]\,(v) = X\,(Y\,(v)) - Y\,(X\,(v))\,.$$

A todo grupo de Lie se associa de forma natural uma álgebra de Lie. Agora explicaremos os detalhes de essa construção.

Dado $g \in G$, as translações à esquerda e à direita $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$, são definidas respetivamente por $L_g(h) = gh$ e $R_g(h) = hg$. Observe que essas aplicações são difeomorfismos suaves

Definimos por

$$X_L(G) := \left\{\text{Campos de vetores } \xi \text{ sobre } G \mid L_g^*\xi = \xi \quad \forall g \in G\right\},$$

onde L_g^* significa o pull-back por L_g. Logo temos a seguinte proposição:

Proposição 2.4. $X_L(G)$ *é álgebra de Lie.*

Demonstração: Em geral, para todo difeomorfismo $\phi : X \to Y$ e todos os campos de vetores ξ, η sobre Y temos que (c.f. Apendice A de [4])

$$[\phi^* \xi, \phi^* \eta] = \phi^* [\xi, \eta]$$

em particular, para todo $\xi, \eta \in X_L(G)$ e para cada $g \in G$

$$L_g^* [\xi, \eta] = \left[L_g^* \xi, L_g^* \eta \right] = [\xi, \eta]$$

Assim, $[\xi, \eta] \in X_L(G)$. $\square$

Proposição 2.5. *Para todo $\xi \in X_L(G)$ e para todo $g \in G$, tem-se*

$$R_g^* \xi \in X_L(G).$$

Observação. *R^* define um homomorfismo $R^* : G \to End(X_L(G))$.*

Note que $R_{gh} = R_h R_g$, pois para cada $x \in G$

$$R_{gh} x = xgh = R_h(xg) = R_h R_g x$$

Logo $R_{gh}^* = R_g^* R_h^*$.

Demonstração da Proposição 2.5: Para todo $g, h, x \in G$ temos que

$$R_g L_h(x) = R_g hx = hxg = L_h xg = L_h R_g(x)$$

Em particular, para cada $g, h \in G$, cumple-se que $R_g L_h = L_h R_g$, por tanto $L_h^* R_g^* = R_g^* L_h^*$, e assim:

$$L_h^* \left(R_g^* \xi \right) = R_g^* \left(L_h^* \xi \right) = R_g^* \xi$$

e segue que $R_g^* \xi \in X_L(G)$. $\square$

Vemos assim que a aplicação $g \mapsto R_g^*$ define uma representação de G em $\mathrm{End}\,(X_L(G))$. Chamaremos essa representação de representação adjunta de G, e a denotamos por Ad. Isto é, $\mathrm{Ad}(g) \cdot \xi := R_g^* \xi$. Usualmente a álgebra de Lie de um grupo de Lie é definido utilizando o espaço tangente de esse grupo na identidade. Vamos mostrar agora como é feita essa construção, e como o álgebra assim construido é isomorfo ao álgebra $X_L(G)$.

Proposição 2.6. *Para todo $\xi \in X_L(G)$ e para todo $g \in G$, tem se*

$$\left(R_g^* \xi \right) (Id) = \left(D R_g^{-1}(Id) \circ D L_g(Id) \right) \xi(Id).$$

Demonstração: Lembremos que $\left(R_g^*\xi\right)(Id) = DR_g^{-1}(Id)\cdot\xi(g)$, alem do mais como ξ é invariante temos que $L_g^*\xi = \xi$, assim $\xi(Id) = L_g^*\xi(Id) = DL_g^{-1}(Id)\cdot\xi(g)$, e dai $\xi(g) = DL_g(Id)\cdot\xi(Id)$, em conclusão

$$\left(R_g^*\xi\right)(Id) = \left(DR_g^{-1}(Id)\circ DL_g(Id)\right)\xi(Id).$$

□

A partir daqui definimos para $g \in G$ a aplicação adjunta $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g : T_{Id}G \to T_{Id}G$ como

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_g := DR_g^{-1}(Id)\circ DL_g(Id)$$

Em particular temos que

$$\left(R_g^*\xi\right)(Id) = \widetilde{\mathrm{Ad}}_g\cdot\xi(Id).$$

Se chamamos $\mathfrak{g} := T_{Id}G$, definimos $\mathrm{ad} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ por

$$\mathrm{ad}\,(\xi,\eta) := (D_1\mathrm{Ad}(Id)\cdot\xi)\,\eta$$

Para ver se esta bem definida lembremos que $\widetilde{\mathrm{Ad}} : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, assim $D_1\widetilde{\mathrm{Ad}}(Id) : \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ e assim $\left(D_1\widetilde{\mathrm{Ad}}(Id)\cdot\xi\right)\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, por tanto

$$\left(D_1\widetilde{\mathrm{Ad}}(Id)\cdot\xi\right)\eta\in\mathfrak{g},$$

mostrando assim que ad esta bem definida.

Definimos um colchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$ por $[\xi,\eta] = \mathrm{ad}(\xi,\eta)$. Temos que verificar que isso realmente é um colchete de Lie (c.f. Proposição 2.9 em baixo). Agora mostramos que essa álgebra de Lie é naturalmente isomorfa à álgebra $X_L(G)$, em particular isso implica que $[\cdot,\cdot]$ satisfaz as condições da definição de colchete de uma álgebra de Lie.

Dado um vetor $\xi\in T_{Id}G$ vamos denotar por $\widehat{\xi}\in X_L(G)$ o campo invariante tal que $\widehat{\xi}(Id) = \xi$

Proposição 2.7. *Para todo $g,h\in G$, $Ad_g\circ Ad_h = Ad_{gh}$.*

Assim Ad define um homomorfismo $\mathrm{Ad} : G\to\mathrm{End}(T_{Id}G)$

Demonstração: Lembremos que, pela Obaservação anterior R^* define um homomorfismo de G em $\mathrm{End}\,(X_L(G))$. Seja $\xi\in T_{Id}(G)$, seja $\hat{\xi}\in X_L(G)$ tal que $\hat{\xi}(Id) = \xi$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{gh}\cdot\xi &= \left(R_{gh}^*\hat{\xi}\right)(Id) = \left(R_g^*R_h^*\hat{\xi}\right)(Id)\\ &= \left(\mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{Ad}_h\right)\hat{\xi}(Id) = \left(\mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{Ad}_h\right)\xi\end{aligned}$$

Dai temos que $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h$. Segue que $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}\,(T_{Id}G)$ é homomorfismo de grupos. $\square$

Proposição 2.8. *Seja $\xi \in T_{Id}G$ e seja $\hat{\xi} \in X_L(G)$ tal que $\hat{\xi}(0) = \xi$. Se Φ_t é o fluxo de $\hat{\xi}$, então, para todo t*

$$\Phi_t(g) = R_{\Phi_t(Id)} g \ \forall g \in G$$

Demonstração: Lembremos que se M variedade, μ campo de vetores em M e Ψ_t é o fluxo de μ, então a derivada do fluxo no tempo $t = s$ esta definida por

$$\frac{d}{dt}\Psi_t(x)|_{t=s} = \mu\left(\Psi_s(x)\right)$$

Agora como $\hat{\xi} \in X_L(G)$, temos que $L_g^* \hat{\xi} = \hat{\xi}$, considere agora as curvas

$$\begin{aligned} \gamma_t(h) &= \left(\Phi_t \circ L_g\right)(h) \\ \eta_t(h) &= \left(L_g \circ \Phi_t\right)(h) \end{aligned}$$

Como $\Phi_0 = Id$, então $\gamma_0 = L_g = \eta_0$, logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\gamma_t &= \frac{d}{dt}\left(\Phi_t \circ L_g\right)(h) \\ &= \frac{d}{dt}\Phi_t\left(L_g(h)\right) \\ &= \hat{\xi}\left(\Phi_t \circ L_g(h)\right) \\ &= \hat{\xi}\left(\gamma_t\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta_t &= \frac{d}{dt}\left(L_g \circ \Phi_t\right)(h) \\ &= DL_g\left(\Phi_t(h)\right) \cdot \frac{d}{dt}\Phi_t(h) \\ &= DL_g\left(\Phi_t(h)\right) \cdot \hat{\xi}\left(\Phi_t(h)\right) \\ &= DL_g\left(\Phi_t(h)\right) \cdot L_g^* \hat{\xi}\left(\Phi_t(h)\right) \\ &= DL_g\left(\Phi_t(h)\right) \cdot DL_g\left(\Phi_t(h)\right)^{-1} \cdot \hat{\xi}\left(L_g \circ \Phi_t(h)\right) \\ &= \hat{\xi}\left(\eta_t\right) \end{aligned}$$

Assim γ e η são soluções da mesma EDO, logo $\gamma_t = \eta_t$ para todo t. Dai $\Phi_t \circ L_g = \gamma_t = \eta_t = L_g \circ \Phi_t$ para todo t. Por tanto

$$
\begin{aligned}
\Phi_t(g) &= \Phi_t \circ L_g(Id) \\
&= L_g \circ \Phi_t(Id) \\
&= g \cdot \Phi_t(Id) \\
&= R_{\Phi_t(Id)} g
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 2.9. *Para todo* $\xi,\ \eta \in \mathfrak{g}$, $\widehat{ad(\xi,\eta)} = \left[\hat{\xi}, \hat{\eta}\right]$.

Demonstração: Seja $\hat{\xi} \in \mathfrak{g}$ tal que $\hat{\xi}(0) = \xi$. Seja Φ_t o fluxo de $\hat{\xi}$. Para todo t, então

$$\Phi_t = R_{\Phi_t(Id)}$$

Assim, se $\hat{\eta} \in \mathfrak{g}$ é tal que $\hat{\eta}(0) = \eta$, então

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\left(\Phi_t(Id)\right)\eta &= \left(R^*_{\Phi_t(Id)}\hat{\eta}\right)(Id) \\
&= \Phi_t^*\hat{\eta}(Id)
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$\mathrm{ad}\left(\xi,\eta\right) = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}\left(\Phi_t(Id)\right)\eta(Id)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi_t^*\hat{\eta}(Id)|_{t=0} = \left(\mathcal{L}_{\hat{\xi}}\hat{\eta}\right)(Id) = \left[\hat{\xi},\hat{\eta}\right],$$

onde $\mathcal{L}$ é a derivada de Lie. $\square$

2.2 Exemplos de Álgebras de Lie

Vamos a introduzir os exemplos de álgebras de Lie dos grupos de Lie lineares.

1. $\mathfrak{gl}\,(n,\mathbb{R})$ formada pelas matrizes reais $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes

   $$[A,B] = AB - BA.$$

   Vamos ver que $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ com o colchete assim definido é bilinear e simetrico e satisfaz a igualdade de Jacobi, sejam $A,\ B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ logo

   $$
   \begin{aligned}
   [A+\lambda B, C] &= (A+\lambda B)C - C(A+\lambda B) \\
   &= AC + \lambda BC - CA - \lambda CB \\
   &= AC - CA + \lambda(BC - CB) \\
   &= [A,C] - \lambda[B,C]
   \end{aligned}
   $$

similarmente podemos ver que $[A, B+\lambda C] = [A, C]-\lambda[A, C]$ dai temos que $[\cdot,\cdot]$ é bilinear, para ver que é simetrico é suficiente notar que:

$$[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$$

Por último vamos verificar que $[\cdot,\cdot]$ satisfaz a igualdade de Jacobi. Para isso note que

$$\begin{aligned}
&[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \\
&= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] \\
&= ABC - ACB - BCA + CBA \\
&+BCA - BAC - CAB + ACB \\
&+CAB - CBA - ABC + BAC = 0
\end{aligned}$$

Dai obtemos que $[\cdot,\cdot]$ é um colchete de Lie para $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ e por tanto esta é uma álgebra de Lie.

2. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$

   Pela definição 2.2 como $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ para mostrar que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ é álgebra de Lie é suficiente mostrar que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ é fechado pelo colchete da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Mas note que para todo $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ temos que $\mathrm{Tr}([A,B]) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$, daí $[A,B] \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ para todo $A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

3. $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\right\}$

   De novo, só temos que verificar que $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ é fechado com o colchete de Lie, para verificar isso seja A, $B \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned}
[A,B]^t &= (AB - BA)^t \\
&= (AB)^t - (BA)^t \\
&= B^tA^t - A^tB^t \\
&= (-B)(-A) - (-A)(-B) \\
&= BA - AB \\
&= -[A,B]
\end{aligned}$$

   Logo $[A,B] \in \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$, em particular $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

4. $\mathfrak{u}(n,\mathbb{C})$

   seja A, $B \in \mathfrak{u}(n,\mathbb{C})$ logo

$$\begin{aligned}
\overline{[A,B]}^t &= \overline{(AB - BA)}^t \\
&= \overline{(AB)}^t - \overline{(BA)}^t \\
&= \overline{B}^t\overline{A}^t - \overline{A}^t\overline{B}^t \\
&= BA - AB \\
&= -[A,B]
\end{aligned}$$

   Daí temos que$[A,B] \in \mathfrak{u}(n,\mathbb{C})$, é dizer que $\mathfrak{u}(n,\mathbb{C})$ é um grupo de Lie.

2.3 A Aplicação Exponencial

Seja M variedade completa e seja X um campo de vetores suave e limitado sobre M. O teorema de Picard Lindelöf permite definir uma função suave $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ chamada o fluxo de X. Φ é caracterizada pela seguinte propriedade.

$$\Phi(0,p) = p \qquad \forall p \in M$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,p) = X \circ \Phi(t,p) \qquad \forall (t,p)$$

Em particular para todo t temos que $\Phi_t := \Phi(t,\cdot)$ é difeomorfismo de M. Assim Φ define um homomorfismo de $\mathbb{R}$ em $\mathrm{Diff}(M)$.

Suponhamos agora que $M = G$ é um grupo de Lie, e seja $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie. Definimos a aplicação exponencial por

$$\exp(X) := \Phi_1(e) \tag{2}$$

Onde Φ é o fluxo de X e e è o elemento identidade do grupo.

Proposição 2.10. *Para todo $r \in \mathbb{R}$ e para todo $X \in \mathfrak{g}$*

$$\exp(rX) = \Phi_r(e)$$

Onde Φ é o fluxo de X.

Demonstração: Seja $\widetilde{\Phi}(t,p) := \Phi(rt,p)$, então

$$\widetilde{\Phi}(0,p) := \Phi(0,p) = p \qquad \forall p \in M$$

e

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\Phi}(t,p) = r\frac{d}{dt}\Phi(t,p) = rX \circ \Phi(t,p)$$

Segue por unicidade que $\widetilde{\Phi}$ é o fluxo de rX. Assim

$$\exp(rX) = \widetilde{\Phi}_1(e) = \Phi_r(e).$$

□

Proposição 2.11. *Para todo $s,t \in \mathbb{R}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$*

$$\exp\left((s+t)X\right) = \exp(sX)\exp(tX)$$

Demonstração: Seja Φ o fluxo de X, pela Proposição anterior temos que

$$\exp\left((s+t)X\right) = \Phi_{(s+t)}(e) = \Phi_s \Phi_t(e) = \Phi_s \exp(tX)$$

Agora pela Proposição 2.8 temos que

$$\begin{aligned} \exp\left((s+t)X\right) &= R_{\Phi_s(e)} \exp(tX) \\ &= R_{\exp(sX)} \exp(tX) \\ &= \exp(tX)\exp(sX) \end{aligned}$$

$\square$

Assim para todo X, a aplicação $t \mapsto \exp(tX)$ define um homomorfismo de $\mathbb{R}$ em G.

Proposição 2.12. *Seja $X \in \mathfrak{g}$ campo invariante temos que*

$$D\exp_0 \cdot X = X(e)$$

Demonstração: Para ver isso, é suficiente notar que

$$\begin{aligned} D\exp_0 X &= \left.\frac{d}{dt}\exp(tX)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\Phi_t(e)\right|_{t=0} \\ &= X\left(\Phi_0(e)\right) \\ &= X(e) \end{aligned}$$

$\square$

A aplicação exponencial tambèm pode ser caracterizada da seguinte forma:

Proposição 2.13. *A aplicação exponencial é a única aplicação C^1 de $\mathfrak{g}$ em G tal que*

1. $\exp(0) = e$,
2. $D\exp(0) : \mathfrak{g} \to T_eG$ *é a identidade, e*
3. *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, a aplicação $t \mapsto \exp(tX)$ é homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ em G.*

Demonstração: Segue pelas Proposições 2.11 e 2.12 que a aplicação exp tem essas propriedades. Agora seja $\Phi : \mathfrak{g} \to G$ uma aplicação C^1 que satisfazs essas 3 condições. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e seja $\varphi(t) := \Phi(tX)$. Então para cada t_0

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}\varphi(t_0+t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\varphi(t_0)\varphi(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}L_{\varphi(t_0)}\varphi(t)\Big|_{t=0} \\
&= DL_{\varphi(t_0)}(e)\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} \\
&= DL_{\varphi(t_0)}(e)X(e),
\end{aligned}$$

Agora como Xé invariante

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=t_0} = X(\varphi(t_0)).$$

Segue por unicidade de solução de equações a derivada ordinaria que

$$\Phi(X) = \varphi(1) = \exp(X).$$

□

Isto em particular implica que a aplicação exponencial é natural, no sentido que para qualquer homomorfismo $\psi : G \to H$ de grupos de Lie o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "D\psi(e)"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\psi"'] & H
\end{tikzcd}$$

comuta.

Proposição 2.14. *Se G é conexo, então a aplicação acima ψ é determinada por su diferencial $(D\psi)_e$ na identidade.*

Demonstração: De fato, exp define um difeomorfismo de uma vizinhança $\mathcal{U}$ de 0 em $\mathfrak{g}$ numa vizinhança $\mathcal{V}$ de e em G. Para todo $g = \exp(X) \in \mathcal{V}$, temos que $\psi(g) = \psi(\exp(X)) = \exp(D\psi(e) \cdot X)$.Finalmente como G é conexo, o conjunto $\mathcal{V}$ gerará todo G, daí o resultado segue □

Usando a equação (2) podemos escrever a aplicação exponencial muito explicita no caso de $GL_n\mathbb{R}$, e portanto, para qualquer subgrupo de $GL_n\mathbb{R}$

apenas usamos as series de potência padrão para a função e^x, e definimos, para $X \in \mathrm{End}(V)$,

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \tag{3}$$

Observe que essa serie é convergente e inversível, com inversa $\exp(-X)$. Claramente, o diferencial desta aplicação de $\mathfrak{g}$ para G na origem é a identidade; E por séries de potência estandarte, a restrição do mapa a qualquer linha a través da origem em $\mathfrak{g}$ é um grupo de um parâmetro em G. Assim, o mapa coincide com o exponencial como definido originalmente, e por multiplicação de series de potencia, para todo X em $\mathfrak{g}$, a aplicação $t \mapsto \exp(tX)$ é homomorfismo. Segue então pela Proposição 2.13 que essa serie assim definida coincide com a exp, e por consequente o mesmo é verdade para qualquer subgrupo de G.

Consideramos agora outra questão muito natural, a saber, quando um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um subgrupo imerso de G. Obviamente uma condição necessária é que $\mathfrak{h}$ seja fechada sobre a operação de colchete; podemos afirmar que isso é suficiente.

Proposição 2.15. *Seja G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie. Então o subgrupo do grupo G gerado por $\exp(\mathfrak{h})$ é um subgrupo imerso H com espaço tangente $T_eH = \mathfrak{h}$.*

Antes de fazer a prova vamos a introduzir a seguinte definição:

Definição 2.16. *Nós dizemos que um mapa de grupo de Lie entre dois grupos de Lie G e H é uma isogenia se for um mapa de covering space das variedades subjacentes; E dizemos que dois grupos de Lie G e H são isógenos se houver uma isogenia entre eles (em qualquer direção).*

Demonstração da Proposição 2.15: Note que o subgrupo gerado por $\exp(\mathfrak{h})$ é o mesmo que o subgrupo gerado por $\exp(U)$, onde U é qualquer vizinhança da origem em $\mathfrak{h}$. Basta, então (ver lema 2.17) mostrar que a imagem de $\mathfrak{h}$ sobre a aplicação exponencial é localmente fechada com a multiplicação, é dizer, que para um disco suficientemente pequeno $\Delta \subset \mathfrak{h}$, o produto $\exp(\Delta) \cdot \exp(\Delta)$(que é, o conjunto de produto de pares $\exp(X) \cdot \exp(Y)$ para X, $Y \in \Delta$) esta contido na imagem de $\mathfrak{h}$ pela aplicação exponencial.

Vamos supor agora que G pode ser escrito como um subgrupo de um grupo linear geral $GL_n\mathbb{R}$, para poder usar a fórmula (3) para a aplicação exponencial. Podemos fazer isso ja que, qualquer álgebra de Lie de dimensões finitas pode ser incorporada na álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ (A prova desta afirmação pode ser encontrada no apêndice E de [1]). O subgrupo de $GL_n\mathbb{R}$ gerado por $\exp(g)$ será um grupo isógeno a G, e provar a proposição para um grupo isógeno a G é equivalente a provar para G. (c.f. capitulo 7 [2]).

Portanto, basta provar a proposição no caso de o grupo G estar em $GL_n\mathbb{R}$. Pero este é exatamente o conteúdo da fórmula de Campbell-Hasdorff. $\square$

Quando aplicado a uma incorporação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}_n$, vemos, em particular, que toda álgebra de Lie de dimensão finita é a álgebra de Lie de um grupo de Lie. Pelo que vimos, este grupo de Lie é único se exigimos que ele seja simplesmente conexo e, em seguida, todos os outros são obtidos dividindo este modelo simplesmente conexo por um subgrupo discreto de seu centro.

Lema 2.17. *Seja $G_0 = \exp(\Delta)$, onde Δ é um disco centrado na origem em $\mathfrak{g}$, e seja $H_0 = \exp(\Delta \cap \mathfrak{h})$. Então:*

1. *$G_0^{-1} = G_0$, $H_0^{-1} = H_0$ e $H_0 \cdot H_0 \cap G_0 = H_0$.*
2. *O subgrupo H de G gerado por H_0 é um subgrupo de Lie imerso de G.*

Como consequência da Proposição 2.15 temos que o seguinte corolário:

Corolário 2.18. *Sejam G e H Grupos de Lie com com G simplesmente conexo, e sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ suas respetivas Álgebras de Lie. Uma aplicação linear $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é o diferencial de uma aplicação $A : G \to H$ de Grupos de Lie se e só se α é uma aplicação de Álgebras de Lie.*

Demonstração: Para ver isto, considere o produto $G \times H$. Sua álgebra de Lie é $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. Seja $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ o gráfico de α. Então a hipótese que α é um mapa entre álgebras de Lie é equivalente à afirmação de que $\mathfrak{j}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$; e dado isso, pela proposição anterior existe um subgrupo de Lie imerso $J \subset G \times H$ com espaço tangente $T_e J = \mathfrak{j}$.

Considerando agora a aplicação $\pi : J \to G$ dada pela projeção no primeiro fator. Por hipótese, o diferencial deste mapa $d\pi_e : \mathfrak{j} \to \mathfrak{g}$ é um isomorfismo, de modo que o mapa $J \to G$ uma isogenia; Mas como G é simplesmente conexo segue que π é um isomorfismo. Então a projeção $\eta : G \cong J \to G$ na segunda componente é um mapa de grupos de Lie cujo diferencial na identidade é α. $\square$

3 Classificação Inicial das Álgebras de Lie

3.1 Breve Classificação de Álgebras de Lie

Vamos dar, nesta secção, um tipo preliminar de classificação de álgebras de Lie, refletindo o grau em que uma determinada álgebra de Lie não é abeliana. Como já indicamos, o objetivo é, em última instância, restringir nosso foco em álgebras de Lie semisimpies.

Antes de começar, duas definições, ambas completamente diretas: Em primeiro lugar, definimos para uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, o centro $Z(\mathfrak{g})$, como sendo o subespaço de $\mathfrak{g}$ de elementos $X \in \mathfrak{g}$ tais que $[X, Y] = 0$ para todos os outros $Y \in \mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é abeliano se todos os colchetes são zero.

Proposição 3.1. *Seja G um grupo de Lie conexo, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, então o subgrupo de G gerado aplicando a exponencial à subálgebra de Lie $Z(\mathfrak{g})$ é a componente conexa da identidade no centro $Z(G)$ de G.*

Demonstração: Lembremos que o centro de G, denotado po $Z(G)$, é definido por

$$Z(G) := \left\{g \in G \mid hgh^{-1} = g \quad \forall h \in G\right\},$$

logo como $Z(G)$ é subgrupo fechado em particular temos que ele é subgrupo de Lie, e alem do mais, $T_eZ(G) \subseteq T_eG$.
Agora derivando a relação $hgh^{-1} = g$ duas vezes temos que $\mathfrak{g}$ é contido no centro de $\mathfrak{g}$. Seja $\xi \in \mathfrak{g}$, precisamos mostrar que $\exp(t\xi) \in Z(G)$, para todo $\eta \in \mathfrak{g}$ temos que $[\xi, \eta] = 0$,

$$\exp(t\xi)\exp(\eta) = \exp(t\xi + \eta) = \exp(\eta)\exp(t\xi)$$

Afirmação: Todo elemento de G se escreve na forma

$$g = \exp(\eta_1)\exp(\eta_2)\ldots\exp(\eta_n)$$

Assim

$$\begin{aligned} g\exp(t\xi) &= \exp(\eta_1)\exp(\eta_2)\ldots\exp(\eta_n)\exp(t\xi) \\ &= \exp(t\xi)\exp(\eta_1)\exp(\eta_2)\ldots\exp(\eta_n) \\ &= \exp(t\xi)g \end{aligned}$$

Segue que $\exp(t\xi) \in Z(G)$ para todo t. Dai segue que $\xi \in T_eZ(G)$.
Para mostrar a afirmação vemos que podemos definir

$$\exp : B_\varepsilon(0)[\subseteq \mathfrak{g}] \xrightarrow{\cong} \Omega,$$

onde Ω é uma vizinhançã de e em G. Em particular exp é uma aplicação aberta. Assim:

$$\begin{array}{rcl} B_\varepsilon(0)\times\cdots\times B_\varepsilon(0) & \longrightarrow & G \\ (\eta_1,\ldots,\eta_n) & \longmapsto & \exp(\eta_1)\cdots\exp(\eta_n) \end{array}$$

também é aberta. Assim o conjunto $X_n := \{\exp(\eta_1)\cdots\exp(\eta_n) \mid \eta_i \in B_\varepsilon(0)\}$ é aberto. Seja

$$X := \bigcup X_n = \{\exp(\eta_1)\cdots\exp(\eta_n) \mid n\in\mathbb{N},\, \eta_i \in B_\varepsilon(0)\}$$

Logo X é aberto. Mostraremos agora que X é fechado.

Seja $g \in \partial X$, então

$$g\cdot\Omega = \{gh \mid h\in\Omega\}$$

é vizinhança de g. Em particular

$$(g\cdot\Omega)\cap X \neq \emptyset$$

Assim existem $\eta_1,\ldots,\eta_n$ e η_{n+1} tais que

$$g\exp(-\eta_{n+1}) = \exp(\eta_1)\cdots\exp(\eta_n) \in (g\cdot\Omega)\cap X$$

$$\therefore g = \exp(\eta_1)\cdots\exp(\eta_n)\exp(\eta_{n+1}) \in X$$

Segue que X é fechado. Por conexidade de G temos que $X = G$, provando assim a afirmação. □

Agora, dizemos que uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um ideal se este satisfaz a condição

$$[X,Y]\in\mathfrak{h}\;\forall X\in\mathfrak{h}, Y\in\mathfrak{g}$$

Assim como os subgrupos conexos de um grupo de Lie correspondem a subálgebras de sua álgebra de Lie, a noção de ideal em uma álgebra de Lie corresponde à noção de subgrupo normal, no seguinte sentido:

Proposição 3.2. *Seja G um grupo de Lie conexo, $H\subset G$ um subgrupo conexo de G e sejam, $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ suas respetivas álgebras de Lie. Então H é um subgrupo normal de G se e só se $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Seja $H \triangleleft G$ subgrupo normal, seja $\xi\in\mathfrak{h}$ e $\eta\in\mathfrak{g}$. Mostraremos que

$$[\xi,\eta]\in\mathfrak{h}$$

Como $H\triangleleft G$, temos que

$$g^{-1}Hg = H \qquad \forall g\in G$$

em particular

$$\exp(-t\eta)\exp(s\xi)\exp(t\eta) \in H \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Derivando com respeito a s, temos que

$$\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi \in \mathfrak{h} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \mathrm{ad}(\eta) \cdot \xi \in \mathfrak{h}$$

$$\therefore [\eta, \xi] \in \mathfrak{h}$$

Suponhamos agora que $\mathfrak{h} \lhd \mathfrak{g}$. Seja $\xi \in \mathfrak{h}$, $\eta \in \mathfrak{g}$.

$$[\eta, \xi] \in \mathfrak{h}$$

Mostraremos primero que

$$\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi \in \mathfrak{h} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Para todo $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp((t+s)\eta))\xi &= \mathrm{Ad}(\exp(t\eta)\exp(s\eta))\xi \\ &= \mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\mathrm{Ad}(\exp(s\eta))\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(t_0\eta))\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi\Big|_{t=0} \\ &= \mathrm{Ad}(\exp(t_0\eta))\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi\Big|_{t=0} \\ &= \mathrm{Ad}(\exp(t_0\eta))\mathrm{ad}(\eta)\xi \\ &= \mathrm{Ad}(\exp(t_0\eta))[\eta, \xi] \end{aligned}$$

Afirmação: A aplicação $M(t) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é definida por $M(t) := \mathrm{Ad}(\exp(t\eta))$ então

$$M(t)^{-1}\frac{d}{dt}M(t) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$$

Para ver isto note que

$$M(t)^{-1}\frac{d}{dt}M(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{g}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}M(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \partial_t m_{11} & \partial_t m_{12} \\ \partial_t m_{21} & \partial_t m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)m_{11} + B(t)m_{21} & A(t)m_{12} + B(t)m_{22} \\ C(t)m_{21} & C(t)m_{22} \end{pmatrix}$$

Em particular temos que $\partial_t m_{21} = C m_{21}$, Como $m_{21}(0) = 0$, então $m_{21} = 0$, provando assim a afirmação.

En conclusão temos que $M(t) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$. Mostraremos agora que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$\exp(-\eta)\exp(s\xi)\exp(\eta) \in H$$

Para isso note que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\exp(-\eta)\exp(s\xi)\exp(\eta)\Big|_{s=s_0} &= \frac{d}{ds}\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(s\xi)\exp(\eta)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(-\eta)\cdot\exp(\eta)\exp(s\xi)\exp(\eta)\Big|_{s=0} \\
&= D\left[\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(\eta)\right]\frac{d}{ds}\exp(-\eta)\exp(s\xi)\exp(\eta)\Big|_{s=0} \\
&= D\left[\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(\eta)\right]\mathrm{Ad}(\exp(\eta))\xi \\
& \quad D\left[\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(\eta)\right]\mathfrak{u}
\end{aligned}$$

Onde $\mathfrak{u} = \mathrm{Ad}(\exp(\eta))\xi \in \mathfrak{h}$, assim

$$\frac{d}{ds}\exp(-\eta)\exp(s\xi)\exp(\eta)\Big|_{s=s_0} = D\left[\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(\eta)\right]\mathfrak{u} = \widehat{\mathfrak{u}}(\exp(-\eta)\exp(s_0\xi)\exp(\eta))$$

Onde $\widehat{\mathfrak{u}}$ é o campo invariante a esquerda com $\widehat{\mathfrak{u}}(0) = \mathfrak{u}$, isto é, se

$$\gamma(s) = \exp(-\eta)\exp(s\xi)\exp(\eta), \quad \text{então}$$

$$\dot{\gamma} = \widehat{\mathfrak{u}} \circ \gamma$$

ou seja, γ é curva integral de $\widehat{\mathfrak{u}}$, com $\gamma(0) = e$, assim

$$\exp(\mathfrak{u}) = \gamma(1) = \exp(-\eta)\exp(\xi)\exp(\eta)$$

$$\therefore \exp(-\eta)\exp(\xi)\exp(\eta) = \exp(\mathfrak{u}) \in H$$

Agora seja $g := \exp(\eta_1)\cdots\exp(\eta_n) \in G$, mostraremos por indução que

$$g^{-1}\exp(\xi)g = \exp(\mathfrak{u}) \qquad \text{para algum } \mathfrak{u} \text{ e } \forall \xi \in \mathfrak{h}.$$

Seja $\widetilde{g} := \exp(\eta_1)\ldots\exp(\eta_{n-1})$, pela hipotese indutiva

$$\widetilde{g}^{-1}\exp(\xi)\widetilde{g} = \exp(\mathfrak{u})$$

onde $\mathfrak{u} \in \mathfrak{h}$, por tanto temos que

$$\begin{aligned}
g^{-1}\exp(\xi)g &= \exp(\eta_n)^{-1}\widetilde{g}^{-1}\exp(\xi)\widetilde{g}\exp(\eta_n) \\
&= \exp(\eta_n)^{-1}\exp(\mathfrak{u})\exp(\eta_n) \\
&= \exp(\mathrm{Ad}(\eta_n)\mathfrak{u})
\end{aligned}$$

De fato, $g^{-1}\exp(\xi)g = \exp(\mathrm{Ad}(\eta_n)\cdots\mathrm{Ad}(\eta_1)\xi) \in H$.

Seja $h = \exp(\xi_1)\cdots\exp(\xi_n) \in H_0$, onde H_0 é a componente conexa de H que contem a identidade. Mostraremos que para cada $g \in G$

$$g^{-1}hg \in H_0$$

Mas

$$\begin{aligned} g^{-1}hg &= g^{-1}\exp(\xi_1)\cdots\exp(\xi_n)g \\ &= g^{-1}\exp(\xi_1)g \cdot g^{-1}\exp(\xi_2)\cdot\cdots\cdot g^{-1}\exp(\xi_n)g \in H_0 \end{aligned}$$

pois cada $g^{-1}\exp(\xi_i)g \in H_0$. Concluindo assim a demonstração. □

Observe também que a operação do colchete em $\mathfrak{g}$ induz um colchete no espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ se e somente se $\mathfrak{h}$ for um ideal em $\mathfrak{g}$.

Isso, por sua vez, motiva a seguinte definição:

Definição 3.3. *Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples se dim $\mathfrak{g} > 1$ e não contém ideais não triviais.*

Pela Proposição anterior, isso equivale a dizer que se G é grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então G não possui subgrupos de Lie normais não triviais.

Agora, para tentar classificar álgebras de Lie, apresentamos duas cadeias descendentes de subálgebras. A primeira é a série central inferior de subálgebras $\mathscr{D}_k\mathfrak{g}$, definida de forma indutiva por

$$\mathscr{D}_1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

e

$$\mathscr{D}_k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathscr{D}_{k-1}\mathfrak{g}]$$

Note que as subálgebras $\mathscr{D}_k\mathfrak{g}$ são de fato ideais em $\mathfrak{g}$. A outra serie é chamada de série derivada $\left\{\mathscr{D}^k\mathfrak{g}\right\}$; esta é definida indutivamente por

$$\mathscr{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

e

$$\mathscr{D}^k\mathfrak{g} = \left[\mathscr{D}^{k-1}\mathfrak{g}, \mathscr{D}^{k-1}\mathfrak{g}\right]$$

Definição 3.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, dizemos que $\mathfrak{g}$ é:*

(i) *Nilpotente se $\mathscr{D}_k\mathfrak{g} = 0$ para algum k.*

(ii) *Solúvel se $\mathscr{D}^k\mathfrak{g} = 0$ para algum k.*

(iii) *Perfeito se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

(iv) *Semisimple se $\mathfrak{g}$ não possui ideais solúveis diferentes de zero.*

Observe que $\mathfrak{g}$ é solúvel se e somente se $\mathfrak{g}$ tem uma sequência de subálgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_k = 0$, tal que $\mathfrak{g}_{i+1}$ é um ideal em $\mathfrak{g}_i$ e $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ é abeliano. De fato, se este for o caso, verifica-se por indução que $\mathscr{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$ (Pode-se refinar essa sequencia para outra onde cada quociente $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ seja unidimensional). Desta observação vemos que se $\mathfrak{h}$ é um ideal num grupo de Lie $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é solúvel se e só se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie solúveis. Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de um grupo de Lie G conexo, então $\mathfrak{g}$ é solúvel se e somente se houver uma sequência de subgrupos conexos, cada um normal em G (ou no próximo na sequência), de modo que os quocientes sejam abelianos.

Proposição 3.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, então são equivalentes:*

(i) $\mathfrak{g}$ *é solúvel.*

(ii) *Existe uma cadeia de ideais $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = 0$ com $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ abeliano.*

(iii) *Existe uma cadeia de subálgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = 0$ tais que $\mathfrak{g}_{i+1}$ é um ideal em $\mathfrak{g}_i$, e $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ é abeliano.*

A demonstração desta proposição pode se encontrar no capitulo 7 de []

3.2 Teorema de Engel e Teorema de Lie

Teorema 3.6 (De Engel)**.** *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ qualquer subálgebra de Lie tal que cada $X \in \mathfrak{g}$ é um endomorfismo nilpotente de V. Então existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Antes de tudo observe que se $X \in \mathfrak{gl}(V)$ for qualquer elemento nilpotente, então a ação adjunta $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ será nilpotente, para ver isto note que, dizer que X é nilpotente é dizer que existe uma cadeia de subespaços $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset V_{k+1} = V$ tais que $X(V_{i+1}) \subset V_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$; podemos então verificar que para qualquer endomorfismo Y de V o endomorfismo $\mathrm{ad}(X)^m(Y)$ leva V_i em V_{i+k-m}.

Agora vamos continuar por indução sobre a dimensão de $\mathfrak{g}$. Primeiro vamos ver que $\mathfrak{g}$ contem um ideal $\mathfrak{h}$ de codimensão 1. De fato, seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ qualquer subálgebra própria maximal; afirmamos que $\mathfrak{h}$ tem codimensão 1 e é um ideal. Para ver isto olhemos para a representação adjunta de $\mathfrak{g}$; já que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra a ação adjunta $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ preserva subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ e assim age sobre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Alem do mais, pela observação inicial temos que para cada $X \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}(X)$ age nilpotentemente em $\mathfrak{gl}(V)$, portanto em $\mathfrak{g}$ e consequentemente em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Assim, por indução, existe um elemento não nulo $\overline{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ anulado pela aplicação $\mathrm{ad}(X)$ para cada $X \in \mathfrak{h}$; equivalentemente, existe um elemento $Y \in \mathfrak{g}$ e não em $\mathfrak{h}$ tal que $\mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathfrak{h}$ para cada

$X \in \mathfrak{h}$. Mas isto é dizer que o subespaço $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ determinado por $\mathfrak{h}$ e Y é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, em que $\mathfrak{h}$ situa-se como um ideal de codimensão 1; pela maximilidade de $\mathfrak{h}$ temos que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}$.

Voltando a representação de $\mathfrak{g}$ em V. Aplicamos a hipótese indutiva na subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ encontrado no parágrafo anterior para concluir que existe um vetor no nulo $v \in V$ tal que $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, seja $W \subset V$ o subespaço de todos esses vetores $v \in V$. Seja Y qualquer elemento de $\mathfrak{g}$ que não esta em $\mathfrak{h}$; se $\mathfrak{h}$ e Y gerem $\mathfrak{g}$ fica mostrar que existe um vetor (não nulo) $v \in W$ tal que $Y(v) = 0$. Agora para qualquer $X \in \mathfrak{h}$, temos que

$$X\left(Y\left(w\right)\right) = Y\left(X\left(w\right)\right) + \left[X, Y\right]\left(w\right).$$

O primeiro termo na direita é zero, pois por hipótese $w \in W$, $X \in \mathfrak{h}$ e assim $X(w) = 0$, de forma análoga o segundo termo é zero pois $[X, Y] = \mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathfrak{h}$. Daí, $X\left(Y\left(w\right)\right) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$; logo obtemos que $Y(w) \in W$. Pero isto significa que a ação de Y em V leva o subespaço W em ele mesmo; Como Y age nilpotentemente em V, segue que existe um vetor $v \in W$ tal que $Y(v) = 0$. □

O teorema de Engel implica que existe uma base para V em que a matriz representativa de cada $X \in \mathfrak{g}$ é estritamente triangular superior: desde que $\mathfrak{g}$ anule v, atuará sobre o quociente $\overline{V}$ de V pelo generado de v, e por indução podemos encontrar uma base $\overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ para $\overline{V}$ em que essa ação é estritamente triangular superior. levando $\overline{v}_i$ para qualquer $v_i \in V$ é escrevendo $v_1 = v$ obtemos uma base para V.

O teorema de Engel, por sua vez, nos permite mostrar a seguinte afirmação: Cada representação de um grupo de Lie resolvível pode ser posta em forma de matrizes triangulares superiores. Isso está implícito por.

Teorema 3.7 (De Lie). *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie complexa solúvel. Então existe um vetor não nulo $v \in V$ que é autovetor de X para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Primeiro vamos a afirmar que $\mathfrak{g}$ contém um ideal $\mathfrak{h}$ de codimensão um. Agora como $\mathfrak{g}$ é solúvel, sabemos que $\mathscr{D}\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$, logo temos que o quociente $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie abeliana, a imagem inversa em $\mathfrak{g}$ de qualquer subespaço de codimensão um de $\mathfrak{a}$ será então um ideal de codimensão um em $\mathfrak{g}$. Agora por indução podemos assumir que existe um vetor $v_0 \in V$ que é auto vetor para cada $X \in \mathfrak{h}$. Denotemos por $\lambda(X)$ o autovalor de v_0 correspondente a X. Consideramos então o subespaço $W \subset V$ de todos os vetores satisfazendo a mesma relação, i.e., definimos

$$W := \{v \in V : X(v) = \lambda(X) \cdot v, \quad \forall X \in \mathfrak{h}\}.$$

Seja $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $Y \notin \mathfrak{h}$. Como antes, será suficiente mostra que Y leva algum vetor $v \in W$ num múltiplo dele mesmo, e para isso é suficiente mostrar que Y leva W em ele mesmo. Para isso vamos a usar o seguinte lema.

Lema 3.8. *Seja $\mathfrak{h}$ um ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja V uma representação de $\mathfrak{g}$, e $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ uma função linear. Seja*

$$W := \{v \in V : X(v) = \lambda(X) \cdot v, \quad \forall X \in \mathfrak{h}\}.$$

Então $Y(W) \subset W$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Seja $w \in W$ não nulo, para ver se $Y(w) \in W$ tomamos $X \in \mathfrak{h}$ e escrevemos

$$\begin{aligned} X\left(Y\left(w\right)\right) &= Y\left(X\left(w\right)\right) + \left[X, Y\right]\left(w\right) \\ &= \lambda(X) \cdot Y(w) + \lambda\left(\left[X, Y\right]\right) \cdot w \end{aligned} \tag{4}$$

sempre que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Isso difere do nosso cálculo anterior, em que o segundo termo à direita não é sempre zero; Na verdade, $Y(w)$ ficará em W se e só se $\lambda\left([X, Y]\right) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$.

Para verificar isto, vamos introduzir outro subespaço de V, a saber, o gerado U das imagens w, $Y(w)$, $Y^2(w), \ldots$ de w sobre aplicações sucessivas de Y. Este espaço é preservado por Y. Afirmamos que qualquer $X \in \mathfrak{h}$ leva U nele mesmo, isto é certamente o caso que $\mathfrak{h}$ leva w num múltiplo dele mesmo, e por tanto em U, (4) diz que $\mathfrak{h}$ leva $Y(w)$ numa combinação linear de $Y(w)$ e w, e assim em U. Em geral, vamos mostrar que $\mathfrak{h}$ leva $Y^k(w)$ em U por indução: Seja $X \in \mathfrak{h}$, escrevemos

$$X\left(Y^k\left(w\right)\right) = Y\left(X\left(Y^{k-1}\left(w\right)\right)\right) + [X, Y]\left(Y^{k-1}\left(w\right)\right). \tag{5}$$

Se $X\left(Y^{k-1}(w)\right) \in U$ por indução o primeiro termo a direita esta em U, e como$[X, Y] \in \mathfrak{h}$ o segundo termo esta em U também.

De fato, podemos ver que de (4) e (5): Segue-se que, em termos dos elementos da base w, $Y(w), \ldots$ para U, a ação de qualquer elemento $X \in \mathfrak{h}$ é triangular superior, com entradas diagonais iguais a $\lambda(X)$. Em particular, para $X \in \mathfrak{h}$ a traça da restrição de X a U é justamente a dimensão de U vezes $\lambda(X)$. Daí, para qualquer elemento $X \in \mathfrak{h}$ o comutador $[X, Y]$ é um elemento de $\mathfrak{h}$ que age sobre U, e contudo sendo o comutador de dois endomorfismos de U o traço desta ação é zero. Isto mostra que $\lambda\left([X, Y]\right) = 0$. $\square$

3.3 Álgebras de Lie Semi-simples

Teorema 3.9 (Completa Redutibilidade)**.** *Seja V uma representação da álgebra de Lie semisimples $\mathfrak{g}$ e $W \subset V$ um subespaço invariante sobre a ação de $\mathfrak{g}$. Então existe um subespaço $W' \subset V$ complementar de W e invariante sobre $\mathfrak{g}$.*

A demonstração deste teorema será feita na seguinte seção em (4.6).

Agora suponha que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie arbitraria, seja $X \in \mathfrak{g}$ qualquer e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ qualquer representação. Vimos que a imagem $\rho(X)$ não precisa ser diagonalizável, alem do mais podemos ver como $\rho(X)$ se comporta em relação á decomposição de Jordan. Se nós assumimos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semisimples, a situação é radicalmente diferente. Especificamente, nos temos:

Teorema 3.10 (Preservação da descomposição de Jordan)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi simple. Para cada elemento $X \in \mathfrak{g}$, existe X_s e X_n em $\mathfrak{g}$ tais que para cada representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ temos que*

$$\rho(X)_s = \rho\left(X_s\right) \quad e \quad \rho(X)_n = \rho\left(X_n\right).$$

Em outras palavras, se pensamos em ρ como injetiva e $\mathfrak{g}$ como sendo uma subalgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, as partes diagonalizáveis e nilpotentes de qualquer elemento $X \in \mathfrak{g}$ estão novamente em $\mathfrak{g}$ e são independentes da representação particular ρ.

A prova deste resultado podemos encontrar no apêndice C do livro [1]

3.4 Álgebras de Lie Simples

Existe um fato mais básico sobre as álgebras de Lie a serem declaradas aqui; embora a sua prova tenha que ser adiada consideravelmente, ele informa toda a nossa abordagem ao assunto. Esta é a classificação completa das álgebras de Lie simples:

Teorema 3.11. *Com cinco exceções, cada simples álgebra de Lie complexa é isomórfica para $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$, $\mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ ou $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ para alguns n.*

As 5 exceções podem ser explicitamente descritas, Embora nenhuma delas seja particularmente simples, exceto no nome, elas são denotadas por $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ e $\mathfrak{e}_8$. pode se encontrar uma construção para cada um deles no livro [1] Capitulo 22.3. As álgebras $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ (para $n > 1$), $\mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ (para $n > 2$) e $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ são comummente chamadas por álgebra de Lie clássicas (e os correspondentes grupos por grupos de Lie clássicos); as outras 5 álgebras são chamadas como as álgebras de Lie excecionais.

A natureza do teorema de classificação para álgebras de Lie simples cria um dilema sobre como abordamos o assunto: Muitos dos teoremas sobre álgebras de Lie simples podem ser provados de forma abstrata, ou verificando-os, por sua vez, para cada uma das álgebras específicas listadas no teorema de classificação. Outra alternativa é declarar que estamos preocupados em entender apenas as representações das álgebras clássicas $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$, $\mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ e $\mathfrak{sp}_n\mathbb{C}$ e verificar quaisquer teoremas relevantes apenas nesses casos.

4 Semi-simplicidade

Nesta seção vamos considerar so álgebras de Lie complexas.

4.1 Forma de Killing e Critério de Cartan

Definição 4.1. *Para $X, Y \in \mathfrak{g}$, definimos a forma de Killing por*

$$B(X,Y) = Tr(ad(X) \circ ad(Y))$$

Observe que B é biliniear, simétrica e

$$B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z]) = 0 \tag{6}$$

Lembremos a decomposição da Jordan de uma transformação linear X de um espaço vetorial complexo finito-dimensional V como uma soma de sua parte semisimple e nilpotente: $X = X_s + X_n$, onde X_s é a parte semisimple de X e X_n a parte nilpotente. Esta é caracterizada de forma única pelo fato de que X_s é semi-simples (diagonalizável), X_n é nilpotente e X_s e X_n comutam com qualquer outro. Na verdade, X_s e X_n podem ser escritos como polinómios em X, assim qualquer endomorfismo que comuta com X comuta automaticamente com X_s e X_n. Um caso de invariança de descomposição de Jordan é:

Exemplo: Para cada $X \in \mathfrak{gl}(V)$, o endomorfismo $\mathrm{ad}(X)$ de $\mathfrak{gl}(V)$ satisfaz

$$\mathrm{ad}(X)_s = \mathrm{ad}\,(X_s) \quad \text{e} \quad \mathrm{ad}(X)_n = \mathrm{ad}\,(X_n)\,.$$

Existe uma forma bilinear B_V definida em $\mathfrak{gl}(V)$ pela formula

$$B_V\,(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(X \circ Y)\,,$$

onde Tr é a traza e $\circ$ denota a composição de transformações. A identidade

$$B_V\,(X,[Y,Z]) = B_V\,([X,Y]\,,Z)$$

é válida para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(V)$.

Se $\mathfrak{g}$ é solúvel, pelo Teorema de Lie sua representação adjunta pode ser escrita da forma triangular superior. Segue-se que $\mathscr{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ atua por matrizes estritamente triangulares superiores. Então se X está em $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ e Y em $\mathfrak{g}$, então $\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)$ é estritamente triangular superior, em particular a traça $B(X,Y)$ é zero. O critério de Cartan é quem caracteriza a solubilidade.

Proposição 4.2. *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se e só se $B\,(\mathfrak{g}, \mathscr{D}\mathfrak{g}) = 0$.*

Vamos provar primeiro algo que parece um pouco mais fraco, mas no final será mais forte, Vamos provar:

Teorema 4.3 (Critério de Cartan). *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma subálgebra de* $\mathfrak{gl}(V)$ *e* $B_V(X,Y) = 0$ *para cada* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, então* $\mathfrak{g}$ *é solúvel.*

Demonstração: Para isto, é suficiente mostrar que todo elemento de $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ é nilpotente, pois então, pelo teorema de Engel, deve ser um ideal nilpotente, e portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Assim tome $X \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$, e seja $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ seus auto-valores (contados com sua multiplicidade). Devemos mostrar que os λ_i são todos zero. Esses auto-valores satisfazem que:

$$\sum \lambda_i \lambda_i = \mathrm{Tr}(X \circ X) = B_V(X, X) = 0.$$

Nós precisamos mostrar que

$$\bar{\lambda}_1 \lambda_1 + \cdots + \overline{\lambda}_r \lambda_r = 0$$

Para ver isso, tome uma base de V de modo que X é uma forma canónica de Jordan, com $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ na diagonal; A parte semisimples $D = X_s$ de X é a transformação diagonal. Seja $\overline{D}$ o endomorfismo de V dado pela matriz diagonal com $\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_r$ na diagonal. Então $\mathrm{Tr}\left(\overline{D} \circ X\right) = \sum \overline{\lambda}_i \lambda_i$, é suficiente mostrar que

$$\mathrm{Tr}\left(\overline{D} \circ X\right) = 0.$$

Como X é uma soma de comutadores $[Y, Z]$, com Y e Z em $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Tr}\left(\overline{D} \circ X\right)$ é a soma de termos da forma $\mathrm{Tr}\left(\overline{D} \circ [Y, Z]\right) = \mathrm{Tr}\left(\left[\overline{D}, Y\right] \circ Z\right)$. Assim para concluir precisamos mostra $\left[\overline{D}, Y\right]$ pertence a $\mathfrak{g}$, para nossa hipótese é que $\mathrm{Tr}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g}) \equiv 0$. Ou seja, somos reduzidos a mostrar que

$$\mathrm{ad}\left(\overline{D}\right)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}.$$

Para isto é suficiente provar que $\mathrm{ad}\left(\overline{D}\right)$ pode ser escrito em forma polinomial em $\mathrm{ad}(X)$, pois sabemos que $\mathrm{ad}(X)^k(Y)$ esta em $\mathfrak{g}$ se X e Y estão em $\mathfrak{g}$. Desde que $\mathrm{ad}(D) = \mathrm{ad}(X_s) = \mathrm{ad}(X)_s$ é um polinómio em $\mathrm{ad}(X)$, é suficiente mostrar que, $\mathrm{ad}\left(\overline{D}\right)$ pode ser escrito como um polinómio em $\mathrm{ad}(D)$, (Isto pode se verificar usando a base usual $\{\varepsilon_{ij}\}$ para $\mathfrak{gl}(V)$), $\mathrm{ad}(D)$ e $\mathrm{ad}\left(\overline{D}\right)$ são matrizes diagonais complexas conjugadas, e qualquer um deles são polinómios um do outro. □

Demonstração da Proposição 4.2: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tal que $B(\mathscr{D}\mathfrak{g}, \mathscr{D}\mathfrak{g}) \equiv 0$. Pelo Teorema 4.3 (Criterio de Cartan) a imagem de $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ pela representação adjunta em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é solúvel. Desde que o kernel da aplicação adjunta seja abeliana, temos que $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ é solúvel (Proposição 3.5), e por definição nos temos que $\mathfrak{g}$ é solúvel. □

Proposição 4.4. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semisimple se e só se sua forma de Killing B é não degenerada.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semisimple, por (6) o espaço nulo $\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} : B(X, Y) = 0\}$ é um ideal. Pelo critério de Cartan, a imagem $\mathrm{ad}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é solúvel; como na prova anterior $\mathfrak{s}$ é solúvel, assim $\mathfrak{s} = 0$ por definição de semisimple. Reciprocamente, se B é não degenerada, nos temos que mostrar que qualquer ideal abeliano $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$ deve ser zero. Se $X \in \mathfrak{a}$ e $Y \in \mathfrak{g}$, então $A = \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)$ aplica $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}$ para 0, assim $B(X, Y) = \mathrm{Tr}(A) = 0$, como isso vale para todo $Y \in \mathfrak{g}$, temos que $B(X, \cdot) = 0$ e assim $X = 0$. Segue que $\mathfrak{a} = 0$, como precisamos. $\square$

Corolário 4.5. *Uma álgebra de Lie semisimple é um produto direto de álgebras de Lie simples.*

Demonstração: Para qualquer ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, por 6 o aniquilador

$$\mathfrak{h}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} : B(X, Y) = 0\ \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

é um ideal. Pelo critério de Cartan $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ é solúvel, então zero, assim $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$. A decomposição segue por indução. $\square$

Dai obtemos que $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, e que todos os ideais e imagens de $\mathfrak{g}$ são semisimples.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, e seja $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ por uma representação em um espaço vetorial V. A forma de Killing da representação ρ é definida por

$$K_{\rho}(X, Y) = \mathrm{Tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

Procedemos agora a determinar alguma formas de Killing de álgebras de Lie lineares.

Grupo General Linear: $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$
Álgebra de Lie: $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$.

Vamos determinar agora a forma de Killing de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, seja $(\varepsilon_{pq})_{ij} = \delta_i^p \delta_j^q$ a base canônica de $\mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}]_{ij} = &\ (\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs}-\varepsilon_{rs}\varepsilon_{pq})_{ij}\\
= &\ (\varepsilon_{pq})_{ik}(\varepsilon_{rs})_{kj}-(\varepsilon_{rs})_{ik}(\varepsilon_{pq})_{kj}\\
= &\ \delta_i^p\delta_k^q\delta_k^r\delta_j^s-\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^p\delta_j^q\\
= &\ \delta^{qr}\delta_i^p\delta_j^s-\delta^{ps}\delta_i^r\delta_j^q\\
= &\ \delta^{qr}(\varepsilon_{ps})_{ij}-\delta^{ps}(\varepsilon_{rq})_{ij}
\end{aligned}$$

Daí $[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}]=\delta^{qr}\varepsilon_{ps}-\delta^{ps}\varepsilon_{rq}$. Por outra parte

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_{pq},[\varepsilon_{rs},\varepsilon_{tu}]] = &\ [\varepsilon_{pq},\delta^{st}(\varepsilon_{ru})-\delta^{ur}(\varepsilon_{ts})]\\
= &\ \delta^{st}[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{ru}]-\delta^{ur}[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{ts}]\\
= &\ \delta^{st}\left(\delta^{qr}\varepsilon_{pu}-\delta^{pu}\varepsilon_{rq}\right)-\delta^{ur}(\delta^{qt}\varepsilon_{ps}-\delta^{ps}\varepsilon_{tq})\\
= &\ \delta^{st}\delta^{qr}\varepsilon_{pu}-\delta^{st}\delta^{pu}\varepsilon_{rq}-\delta^{ur}\delta^{qt}\varepsilon_{ps}+\delta^{ur}\delta^{ps}\varepsilon_{tq}
\end{aligned}$$

Daí obtemos que $(Ad(\varepsilon_{pq})Ad(\varepsilon_{rs}))\,\varepsilon_{tu}=\delta^{st}\delta^{qr}\varepsilon_{pu}-\delta^{st}\delta^{pu}\varepsilon_{rq}-\delta^{ur}\delta^{qt}\varepsilon_{ps}+\delta^{ur}\delta^{ps}\varepsilon_{tq}$. A base dual é dada por

$$\varepsilon^{pq}\left(\varepsilon_{rs}\right)=\delta_r^p\delta_s^q$$

Logo

$$\begin{aligned}
Tr\left(Ad(\varepsilon_{pq})Ad(\varepsilon_{rs})\right) = &\ \textstyle\sum_{t,u}\varepsilon^{tu}\left[Ad(\varepsilon_{pq})Ad(\varepsilon_{rs})\varepsilon_{tu}\right]\\
= &\ \textstyle\sum_{t,u}\varepsilon^{tu}\left[\delta^{st}\delta^{qr}\varepsilon_{pu}-\delta^{st}\delta^{pu}\varepsilon_{rq}-\delta^{ur}\delta^{qt}\varepsilon_{ps}+\delta^{ur}\delta^{ps}\varepsilon_{tq}\right]\\
= &\ \textstyle\sum_{t,u}\left[\delta^{st}\delta^{qr}\delta_p^t\delta_u^u-\delta^{st}\delta^{pu}\delta_r^t\delta_q^u-\delta^{ur}\delta^{qt}\delta_p^t\delta_s^u+\delta^{ur}\delta^{ps}\delta_t^t\delta_q^u\right]\\
= &\ n\delta_p^s\delta^{qr}-\delta_r^s\delta_q^p-\delta_p^q\delta_s^r+n\delta^{sp}\delta_q^r\\
= &\ 2n\delta_{ps}\delta_{qr}-2\delta_{rs}\delta_{pq}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
K(\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}) = &\ 2n\delta_{ps}\delta_{qr}-2\delta_{rs}\delta_{pq}\\
= &\ 2n\left\langle\varepsilon_{pq},\varepsilon_{sr}\right\rangle-2Tr\left(\varepsilon_{pq}\right)Tr\left(\varepsilon_{rs}\right)\\
= &\ 2n\left\langle\varepsilon_{pq},(\varepsilon_{rs})^t\right\rangle-2Tr\left(\varepsilon_{pq}\right)Tr\left(\varepsilon_{rs}\right)
\end{aligned}$$

Daí $K(A,B) = 2n\left\langle A, B^t\right\rangle - 2Tr(A)Tr(B) = 2nTr(AB) - 2Tr(A)Tr(B)$.

Grupo Linear Especial $\mathbf{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$
Álgebra de Lie: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$.

Vamos determinar agora a forma de Killing de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, seja $(\varepsilon_{pq})_{ij} = \delta_i^p\delta_j^q - \frac{1}{n}\delta^{pq}\delta_{ij}$ com $(p,q) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \backslash \{(n,n)\}$ a base canônica de $\mathfrak{g}$. Então

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{pq}, \varepsilon_{rs}]_{ij} = \ & (\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs} - \varepsilon_{rs}\varepsilon_{pq})_{ij} \\
= \ & (\varepsilon_{pq})_{ik}(\varepsilon_{rs})_{kj} - (\varepsilon_{rs})_{ik}(\varepsilon_{pq})_{kj} \\
= \ & \left(\delta_i^p\delta_k^q - \tfrac{1}{n}\delta^{pq}\delta_{ik}\right)\left(\delta_k^r\delta_j^s - \tfrac{1}{n}\delta^{rs}\delta_{kj}\right) - \left(\delta_i^r\delta_k^s - \tfrac{1}{n}\delta^{rs}\delta_{ik}\right)\left(\delta_k^p\delta_j^q - \tfrac{1}{n}\delta^{pq}\delta_{kj}\right) \\
= \ & \delta_i^p\delta_k^q\delta_k^r\delta_j^s + \tfrac{1}{n^2}\delta^{pq}\delta^{rs}\delta_{ik}\delta_{kj} - \tfrac{1}{n}\left(\delta_i^p\delta_k^q\delta_{kj}\delta^{rs} + \delta^{pq}\delta_{ik}\delta_k^r\delta_j^S\right) \\
& + \tfrac{1}{n}\left(\delta_i^r\delta_k^s\delta_{kj}\delta^{pq} + \delta^{rs}\delta_{ik}\delta_k^p\delta_j^q\right) - \left(\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^p\delta_j^q + \tfrac{1}{n^2}\delta^{pq}\delta^{rs}\delta_{ik}\delta_{kj}\right) \\
= \ & \delta^{qr}\delta_i^p\delta_j^s - \delta^{ps}\delta_i^r\delta_j^q \\
= \ & \delta^{qr}\delta_i^p\delta_j^s - \tfrac{1}{n}\delta^{qr}\delta^{ps}\delta_{ij} - \delta^{ps}\delta_i^r\delta_j^q + \tfrac{1}{n}\delta^{ps}\delta^{qr}\delta_{ij} \\
= \ & \delta^{qr}\left(\delta_i^p\delta_j^s - \tfrac{1}{n}\delta^{ps}\delta_{ij}\right) - \delta^{ps}\left(\delta_i^r\delta_j^q - \tfrac{1}{n}\delta^{qr}\delta_{ij}\right) \\
= \ & \delta^{qr}\left(\varepsilon_{ps}\right)_{ij} - \delta^{ps}\left(\varepsilon_{rq}\right)_{ij}
\end{aligned}
$$

Daí $[\varepsilon_{pq}, \varepsilon_{rs}] = \delta^{qr}\varepsilon_{ps} - \delta^{ps}\varepsilon_{rq}$. Por outra parte, ao igual que na parte anterior obtemos que $K(\varepsilon_{pq}, \varepsilon_{rs}) = 2n\delta_{ps}\delta_{qr} - \delta_{rs}\delta_{pq} = 2nTr(\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs})$. Daí obtemos que

$$K(A,B) = 2nTr(AB)$$

Grupo Ortogonal $\mathbf{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) : A^{-1} = A^t\}$
Álgebra de Lie: $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$.

Vamos determinar agora a forma de Killing de $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$, seja $(\varepsilon_{pq})_{ij} = \delta_i^p\delta_j^q - \delta_i^q\delta_j^p$ com $p < q$ a base canônica de $\mathfrak{g}$. Então

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}]_{ij} &= (\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs}-\varepsilon_{rs}\varepsilon_{pq})_{ij}\\
&= (\varepsilon_{pq})_{ik}(\varepsilon_{rs})_{kj}-(\varepsilon_{rs})_{ik}(\varepsilon_{pq})_{kj}\\
&= \left(\delta_i^p\delta_k^q-\delta_i^q\delta_k^p\right)\left(\delta_k^r\delta_j^s-\delta_k^s\delta_j^r\right)-\left(\delta_i^r\delta_k^s-\delta_i^s\delta_k^r\right)\left(\delta_k^p\delta_j^q-\delta_k^q\delta_j^p\right)\\
&= \delta_i^p\delta_k^q\delta_k^r\delta_j^s+\delta_i^q\delta_k^p\delta_k^s\delta_j^r-\delta_i^p\delta_k^q\delta_k^s\delta_j^r-\delta_i^q\delta_k^p\delta_k^r\delta_j^s\\
&\quad-\left(\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^p\delta_j^q+\delta_i^s\delta_k^r\delta_k^q\delta_j^p-\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^q\delta_j^p-\delta_i^s\delta_k^r\delta_k^p\delta_j^q\right)\\
&= \delta^{qr}\delta_i^p\delta_j^s+\delta^{ps}\delta_i^q\delta_j^r-\delta^{qs}\delta_i^p\delta_j^r-\delta^{pr}\delta_i^q\delta_j^s\\
&\quad+\delta^{qs}\delta_i^r\delta_j^p+\delta^{pr}\delta_i^s\delta_j^q-\delta^{ps}\delta_i^r\delta_j^q-\delta^{qr}\delta_i^s\delta_j^p\\
&= \delta^{qr}\left(\delta_i^p\delta_j^s-\delta_i^s\delta_j^p\right)-\delta^{ps}\left(\delta_i^r\delta_j^q-\delta_i^q\delta_j^r\right)\\
&\quad+\delta^{qs}\left(\delta_i^r\delta_j^p-\delta_i^p\delta_j^r\right)-\delta^{pr}\left(\delta_i^q\delta_j^s-\delta_i^s\delta_j^q\right)\\
&= \delta^{qr}\left(\varepsilon_{ps}\right)_{ij}-\delta^{ps}\left(\varepsilon_{rq}\right)_{ij}+\delta^{qs}\left(\varepsilon_{rp}\right)_{ij}-\delta^{pr}\left(\varepsilon_{qs}\right)_{ij}
\end{aligned}
$$

Daí $[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}]=\delta^{qr}\varepsilon_{ps}-\delta^{ps}\varepsilon_{rq}+\delta^{qs}\varepsilon_{rp}-\delta^{pr}\varepsilon_{qs}$. Por outra parte

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{pq},[\varepsilon_{rs},\varepsilon_{tu}]] &= \left[\varepsilon_{pq},\delta^{st}\varepsilon_{ru}-\delta^{ru}\varepsilon_{ts}+\delta^{su}\varepsilon_{tr}-\delta^{rt}\varepsilon_{su}\right]\\
&= \delta^{st}\left[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{ru}\right]-\delta^{ru}\left[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{ts}\right]+\delta^{su}\left[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{tr}\right]-\delta^{rt}\left[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{su}\right]\\
&= \delta^{st}\left(\delta^{qr}\varepsilon_{pu}-\delta^{pu}\varepsilon_{rq}+\delta^{qu}\varepsilon_{rp}-\delta^{pr}\varepsilon_{qu}\right)\\
&\quad-\delta^{ru}\left(\delta^{qt}\varepsilon_{ps}-\delta^{ps}\varepsilon_{tq}+\delta^{qs}\varepsilon_{tp}-\delta^{pt}\varepsilon_{qs}\right)\\
&\quad+\delta^{su}\left(\delta^{qt}\varepsilon_{pr}-\delta^{pr}\varepsilon_{tq}+\delta^{qr}\varepsilon_{tp}-\delta^{pt}\varepsilon_{qr}\right)\\
&\quad-\delta^{rt}\left(\delta^{qs}\varepsilon_{pu}-\delta^{pu}\varepsilon_{sq}+\delta^{qu}\varepsilon_{sp}-\delta^{ps}\varepsilon_{qu}\right)\\
&= \left(\delta^{st}\delta^{pu}-\delta^{su}\delta^{pt}\right)\varepsilon_{qr}+\left(\delta^{st}\delta^{qr}-\delta^{rt}\delta^{qs}\right)\varepsilon_{pu}\\
&\quad+\left(\delta^{ru}\delta^{pt}-\delta^{rt}\delta^{pu}\right)\varepsilon_{qs}+\left(\delta^{ru}\delta^{qs}-\delta^{su}\delta^{qr}\right)\varepsilon_{pt}\\
&\quad+\left(\delta^{su}\delta^{pr}-\delta^{ru}\delta^{ps}\right)\varepsilon_{qt}+\left(\delta^{rt}\delta^{ps}-\delta^{st}\delta^{pr}\right)\varepsilon_{qu}\\
&\quad+\left(\delta^{su}\delta^{qt}-\delta^{st}\delta^{qu}\right)\varepsilon_{pr}+\left(\delta^{rt}\delta^{qu}-\delta^{ru}\delta^{qt}\right)\varepsilon_{ps}
\end{aligned}
$$

Com a base dual dada por $(\varepsilon^{pq})\,\varepsilon_{rs}=\delta_r^p\delta_s^q$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
Tr\left(Ad(\varepsilon_{pq})Ad(\varepsilon_{rs})\right) = \ & \textstyle\sum_{t,u}\varepsilon^{tu}\left[Ad(\varepsilon_{pq})Ad(\varepsilon_{rs})\varepsilon_{tu}\right] = \sum_{t,u}\varepsilon^{tu}\left[\varepsilon_{pq},[\varepsilon_{rs},\varepsilon_{tu}]\right] \\
= \ & \textstyle\sum_{t,u}\varepsilon^{tu}\Big[\left(\delta^{st}\delta^{pu}-\delta^{su}\delta^{pt}\right)\varepsilon_{qr}+\left(\delta^{st}\delta^{qr}-\delta^{rt}\delta^{qs}\right)\varepsilon_{pu} \\
& +\left(\delta^{ru}\delta^{pt}-\delta^{rt}\delta^{pu}\right)\varepsilon_{qs}+\left(\delta^{ru}\delta^{qs}-\delta^{su}\delta^{qr}\right)\varepsilon_{pt} \\
& +\left(\delta^{su}\delta^{pr}-\delta^{ru}\delta^{ps}\right)\varepsilon_{qt}+\left(\delta^{rt}\delta^{ps}-\delta^{st}\delta^{pr}\right)\varepsilon_{qu} \\
& +\left(\delta^{su}\delta^{qt}-\delta^{st}\delta^{qu}\right)\varepsilon_{pr}+\left(\delta^{rt}\delta^{qu}-\delta^{ru}\delta^{qt}\right)\varepsilon_{ps}\Big] \\
= \ & \textstyle\sum_{t,u}\left(\delta^{st}\delta^{pu}-\delta^{su}\delta^{pt}\right)\delta_q^t\delta_r^u+\left(\delta^{st}\delta^{qr}-\delta^{rt}\delta^{qs}\right)\delta_p^t\delta_u^u \\
& +\left(\delta^{ru}\delta^{pt}-\delta^{rt}\delta^{pu}\right)\delta_q^t\delta_s^u+\left(\delta^{ru}\delta^{qs}-\delta^{su}\delta^{qr}\right)\delta_p^t\delta_t^u \\
& +\left(\delta^{su}\delta^{pr}-\delta^{ru}\delta^{ps}\right)\delta_q^t\delta_t^u+\left(\delta^{rt}\delta^{ps}-\delta^{st}\delta^{pr}\right)\delta_q^t\delta_u^u \\
& +\left(\delta^{su}\delta^{qt}-\delta^{st}\delta^{qu}\right)\delta_p^t\delta_r^u+\left(\delta^{rt}\delta^{qu}-\delta^{ru}\delta^{qt}\right)\delta_p^t\delta_s^u \\
= \ & \delta_q^s\delta_r^p-\delta_r^s\delta_q^p+n\delta_p^s\delta^{qr}-n\delta_p^r\delta^{qs}+\delta_s^r\delta_q^p-\delta_q^r\delta_s^p+\delta_p^r\delta^{qs}-\delta_p^s\delta^{qr} \\
& +\delta_q^s\delta^{pr}-\delta_q^r\delta^{ps}+n\delta_q^r\delta^{ps}-n\delta_q^s\delta^{pr}+\delta_r^s\delta_p^q-\delta_p^s\delta_r^q+\delta_p^r\delta_s^q-\delta_s^r\delta_p^q \\
= \ & 4\delta_{qs}\delta_{pr}-4\delta_{ps}\delta_{qr}+2n\delta_{ps}\delta_{qr}-2n\delta_{pr}\delta_{qs}=2(2-n)\left(\delta_{pr}\delta_{qs}-\delta_{ps}\delta_{qr}\right) \\
= \ & (n-2)\left\langle\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Dai obtemos que a forma de killing de $\mathfrak{g}$ é da forma $K(A,B)=(n-2)\langle A,B\rangle$.

Grupo Unitário $\mathbf{U}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathbf{GL}(n,\mathbb{C}):A^{-1}=\bar{A}^t\}$
Álgebra de Lie: $\mathfrak{u}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}):A+\bar{A}^t=0\}$.

Vamos determinar agora a forma de Killing de $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}(n)$, seja $(\varepsilon_{pq})_{ij}=\delta_i^p\delta_j^q-\delta_i^q\delta_j^p$ e $(\zeta_{pq})_{ij}=\sqrt{-1}\delta_i^p\delta_j^q+\sqrt{-1}\delta_i^q\delta_j^p$. Seja $\mu_{pq}=\varepsilon_{pq}+\zeta_{pq}$ a base canônica de $\mathfrak{g}$. Então

$$[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}]=\delta^{qr}\varepsilon_{ps}+\delta^{ps}\varepsilon_{qr}+\delta^{qs}\varepsilon_{rp}+\delta^{pr}\varepsilon_{sq}$$

$$
\begin{aligned}
[\zeta_{pq},\zeta_{rs}]_{ij} = &\ (\zeta_{pq}\zeta_{rs}-\zeta_{rs}\zeta_{pq})_{ij} \\
= &\ (\zeta_{pq})_{ik}(\zeta_{rs})_{kj}-(\zeta_{rs})_{ik}(\zeta_{pq})_{kj} \\
= &\ -\left(\delta_i^p\delta_k^q+\delta_i^q\delta_k^p\right)\left(\delta_k^r\delta_j^s+\delta_k^s\delta_j^r\right)+\left(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_i^s\delta_k^r\right)\left(\delta_k^p\delta_j^q+\delta_k^q\delta_j^p\right) \\
= &\ -\delta_i^p\delta_k^q\delta_k^r\delta_j^s-\delta_i^q\delta_k^p\delta_k^s\delta_j^r-\delta_i^p\delta_k^q\delta_k^s\delta_j^r-\delta_i^q\delta_k^p\delta_k^r\delta_j^s \\
&\ +\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^p\delta_j^q+\delta_i^s\delta_k^r\delta_k^q\delta_j^p+\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^q\delta_j^p+\delta_i^s\delta_k^r\delta_k^p\delta_j^q \\
= &\ -\delta^{qr}\delta_i^p\delta_j^s-\delta^{ps}\delta_i^q\delta_j^r-\delta^{qs}\delta_i^p\delta_j^r-\delta^{pr}\delta_i^q\delta_j^s+\delta^{qs}\delta_i^r\delta_j^p+\delta^{pr}\delta_i^s\delta_j^q+\delta^{ps}\delta_i^r\delta_j^q+\delta^{qr}\delta_i^s\delta_j^p \\
= &\ \delta^{qr}\left(\delta_i^s\delta_j^p-\delta_i^p\delta_j^s\right)+\delta^{ps}\left(\delta_i^r\delta_j^q-\delta_i^q\delta_j^r\right)+\delta^{qs}\left(\delta_i^r\delta_j^p-\delta_i^p\delta_j^r\right)+\delta^{pr}\left(\delta_i^s\delta_j^q-\delta_i^q\delta_j^s\right) \\
= &\ \delta^{qr}\left(\varepsilon_{sp}\right)_{ij}+\delta^{ps}\left(\varepsilon_{rq}\right)_{ij}+\delta^{qs}\left(\varepsilon_{rp}\right)_{ij}+\delta^{pr}\left(\varepsilon_{sq}\right)_{ij}
\end{aligned}
$$

Daí obtemos que $[\zeta_{pq},\zeta_{rs}]=\delta^{qr}\varepsilon_{sp}+\delta^{ps}\varepsilon_{rq}+\delta^{qs}\varepsilon_{rp}+\delta^{pe}\varepsilon_{sq}$, por último obtemos que

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon_{pq},\zeta_{rs}]_{ij} = &\ (\varepsilon_{pq}\zeta_{rs}-\zeta_{rs}\varepsilon_{pq})_{ij} \\
= &\ (\varepsilon_{pq})_{ik}(\zeta_{rs})_{kj}-(\zeta_{rs})_{ik}(\varepsilon_{pq})_{kj} \\
= &\ \sqrt{-1}\left(\delta_i^p\delta_k^q-\delta_i^q\delta_k^p\right)\left(\delta_k^r\delta_j^s+\delta_k^s\delta_j^r\right)-\sqrt{-1}\left(\delta_i^r\delta_k^s+\delta_i^s\delta_k^r\right)\left(\delta_k^p\delta_j^q-\delta_k^q\delta_j^p\right) \\
= &\ \sqrt{-1}\Big(\delta_i^p\delta_k^q\delta_k^r\delta_j^s+\delta_i^p\delta_k^q\delta_k^s\delta_j^r-\delta_i^q\delta_k^p\delta_k^r\delta_j^s-\delta_i^q\delta_k^p\delta_k^s\delta_j^r \\
&\ -\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^p\delta_j^q-\delta_i^s\delta_k^r\delta_k^p\delta_j^q+\delta_i^r\delta_k^s\delta_k^q\delta_j^p+\delta_i^s\delta_k^r\delta_k^q\delta_j^p\Big) \\
= &\ \sqrt{-1}\Big(\delta^{qr}\delta_i^p\delta_j^s+\delta^{qs}\delta_i^p\delta_j^r-\delta^{ps}\delta_i^q\delta_j^r-\delta^{pr}\delta_i^q\delta_j^s \\
&\ -\delta^{ps}\delta_i^r\delta_j^q-\delta^{pr}\delta_i^s\delta_j^q+\delta^{qs}\delta_i^r\delta_j^p+\delta^{qr}\delta_i^s\delta_j^p\Big) \\
= &\ \delta^{qr}\sqrt{-1}\left(\delta_i^s\delta_j^p+\delta_i^p\delta_j^s\right)+\delta^{qs}\sqrt{-1}\left(\delta_i^p\delta_j^r+\delta_i^r\delta_j^p\right) \\
&\ -\delta^{ps}\sqrt{-1}\left(\delta_i^q\delta_j^r+\delta_i^r\delta_j^q\right)-\delta^{pr}\sqrt{-1}\left(\delta_i^q\delta_j^s+\delta_i^s\delta_j^q\right) \\
= &\ \delta^{qr}\left(\zeta_{sp}\right)_{ij}+\delta^{qs}\left(\zeta_{pr}\right)_{ij}-\delta^{ps}\left(\zeta_{qr}\right)_{ij}-\delta^{pr}\left(\zeta_{qs}\right)_{ij}
\end{aligned}
$$

Logo vemos que $[\varepsilon_{pq},\zeta_{rs}]=\delta^{qr}\zeta_{ps}+\delta^{qs}\zeta_{pr}-\delta^{ps}\zeta_{qr}-\delta^{pr}\zeta_{qs}$, em particular para quais quer dois elementos da base de $\mathfrak{u}(n)$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
[\mu_{pq},\mu_{rs}] = {} & [\varepsilon_{pq}+\zeta_{pq},\varepsilon_{rs}+\zeta_{rs}] \\
= {} & [\varepsilon_{pq},\varepsilon_{rs}]+[\varepsilon_{pq},\zeta_{rs}]+[\zeta_{pq},\varepsilon_{rs}]+[\zeta_{pq},\zeta_{rs}] \\
= {} & \delta^{qr}\varepsilon_{ps}+\delta^{ps}\varepsilon_{qr}+\delta^{qs}\varepsilon_{rp}+\delta^{pr}\varepsilon_{sq}+\delta^{qr}\zeta_{ps}+\delta^{qs}\zeta_{pr}-\delta^{ps}\zeta_{qr}-\delta^{pr}\zeta_{qs} \\
& -\left(\delta^{ps}\zeta_{qr}+\delta^{qs}\zeta_{pr}-\delta^{qr}\zeta_{ps}-\delta^{pr}\zeta_{qs}\right)+\delta^{qr}\varepsilon_{sp}+\delta^{ps}\varepsilon_{rq}+\delta^{qs}\varepsilon_{rp}+\delta^{pr}\varepsilon_{sq} \\
= {} & 2\left(\delta^{qs}\varepsilon_{rp}+\delta^{pr}\varepsilon_{sq}+\delta^{qr}\zeta_{ps}-\delta^{ps}\zeta_{qr}\right)
\end{aligned}
$$

Por outra parte temos que

$$
\begin{aligned}
[\mu_{pq},[\mu_{rs},\mu_{tu}]] = {} & 2\left[\varepsilon_{pq}+\zeta_{pq},\delta^{su}\varepsilon_{tr}+\delta^{rt}\varepsilon_{us}+\delta^{st}\zeta_{ru}-\delta^{ru}\zeta_{st}\right] \\
= {} & 2\delta^{su}\left[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{tr}\right]+2\delta^{rt}\left[\varepsilon_{pq},\varepsilon_{us}\right]+2\delta^{st}\left[\varepsilon_{pq},\zeta_{ru}\right]-2\delta^{ru}\left[\varepsilon_{pq},\zeta_{st}\right] \\
& +2\delta^{su}\left[\zeta_{pq},\varepsilon_{tr}\right]+2\delta^{rt}\left[\zeta_{pq},\varepsilon_{us}\right]+2\delta^{st}\left[\zeta_{pq},\zeta_{ru}\right]-2\delta^{ru}\left[\zeta_{pq},\zeta_{st}\right] \\
= {} & 2\delta^{su}\left(\delta^{qt}\varepsilon_{pr}+\delta^{pr}\varepsilon_{qt}+\delta^{qr}\varepsilon_{tp}+\delta^{pt}\varepsilon_{rq}\right) \\
& +2\delta^{rt}\left(\delta^{qu}\varepsilon_{ps}+\delta^{ps}\varepsilon_{qu}+\delta^{qs}\varepsilon_{up}+\delta^{pu}\varepsilon_{sq}\right) \\
& +2\delta^{st}\left(\delta^{qr}\zeta_{pu}+\delta^{qu}\zeta_{pr}-\delta^{pu}\zeta_{qr}-\delta^{pr}\zeta_{qu}\right) \\
& +2\delta^{ru}\left(\delta^{ps}\zeta_{qt}+\delta^{pt}\zeta_{qs}-\delta^{qt}\zeta_{ps}-\delta^{qs}\zeta_{pt}\right) \\
& +2\delta^{su}\left(\delta^{pt}\zeta_{qr}+\delta^{qt}\zeta_{pr}-\delta^{qr}\zeta_{pt}-\delta^{pr}\zeta_{qt}\right) \\
& +2\delta^{rt}\left(\delta^{pu}\zeta_{qs}+\delta^{qu}\zeta_{ps}-\delta^{qs}\zeta_{pu}-\delta^{ps}\zeta_{qu}\right) \\
& +2\delta^{st}\left(\delta^{qr}\varepsilon_{up}+\delta^{pu}\varepsilon_{rq}+\delta^{qu}\varepsilon_{rp}+\delta^{pr}\varepsilon_{uq}\right) \\
& +2\delta^{ru}\left(\delta^{pt}\varepsilon_{qs}+\delta^{qs}\varepsilon_{pt}+\delta^{qt}\varepsilon_{ps}+\delta^{ps}\varepsilon_{qt}\right) \\
= {} & 2\Big[\left(\delta^{su}\delta^{qt}-\delta^{st}\delta^{qu}\right)\varepsilon_{pr}+\left(\delta^{ps}\delta^{ru}+\delta^{su}\delta^{pr}\right)\varepsilon_{qt} \\
& +\left(\delta^{su}\delta^{qr}-\delta^{qs}\delta^{ru}\right)\varepsilon_{tp}+\left(\delta^{su}\delta^{pt}+\delta^{st}\delta^{pu}\right)\varepsilon_{rq} \\
& +\left(\delta^{rt}\delta^{qu}+\delta^{ru}\delta^{qt}\right)\varepsilon_{ps}+\left(\delta^{rt}\delta^{ps}-\delta^{st}\delta^{pr}\right)\varepsilon_{qu} \\
& +\left(\delta^{rt}\delta^{qs}+\delta^{st}\delta^{qr}\right)\varepsilon_{up}+\left(\delta^{rt}\delta^{pu}-\delta^{ru}\delta^{pt}\right)\varepsilon_{sq} \\
& +\left(\delta^{st}\delta^{qr}-\delta^{rt}\delta^{qs}\right)\zeta_{pu}+\left(\delta^{st}\delta^{qu}+\delta^{su}\delta^{qt}\right)\zeta_{pr} \\
& +\left(\delta^{su}\delta^{pt}-\delta^{st}\delta^{pu}\right)\zeta_{qr}-\left(\delta^{st}\delta^{pr}+\delta^{rt}\delta^{ps}\right)\zeta_{qu} \\
& +\left(\delta^{ru}\delta^{ps}-\delta^{su}\delta^{pr}\right)\zeta_{qt}+\left(\delta^{ru}\delta^{pt}+\delta^{rt}\delta^{pu}\right)\zeta_{qs} \\
& +\left(\delta^{rt}\delta^{qu}-\delta^{ru}\delta^{qt}\right)\zeta_{ps}-\left(\delta^{ru}\delta^{qs}+\delta^{su}\delta^{qr}\right)\zeta_{pt}\Big] \\
= {} & 2\Big[\delta^{su}\delta^{qt}\left(\varepsilon_{pr}+\zeta_{pr}\right)+\delta^{st}\delta^{qu}\left(\varepsilon_{rp}+\zeta_{rp}\right)+\delta^{ps}\delta^{ru}\left(\varepsilon_{qt}+\zeta_{qt}\right)-\delta^{su}\delta^{pr}\left(\varepsilon_{tq}+\zeta_{tq}\right) \\
& -\delta^{qs}\delta^{ru}\left(\varepsilon_{tp}+\zeta_{tp}\right)-\delta^{su}\delta^{qr}\left(\varepsilon_{pt}+\zeta_{pt}\right)+\delta^{su}\delta^{pt}\left(\varepsilon_{rq}+\zeta_{rq}\right)-\delta^{st}\delta^{pu}\left(\varepsilon_{qr}+\zeta_{qr}\right) \\
& +\delta^{rt}\delta^{qu}\left(\varepsilon_{ps}+\zeta_{ps}\right)-\delta^{ru}\delta^{qt}\left(\varepsilon_{sp}+\zeta_{sp}\right)-\delta^{st}\delta^{pr}\left(\varepsilon_{qu}+\zeta_{qu}\right)-\delta^{rt}\delta^{ps}\left(\varepsilon_{uq}+\zeta_{uq}\right) \\
& +\delta^{st}\delta^{qr}\left(\varepsilon_{up}+\zeta_{up}\right)-\delta^{rt}\delta^{qs}\left(\varepsilon_{pu}+\zeta_{pu}\right)+\delta^{rt}\delta^{pu}\left(\varepsilon_{sq}+\zeta_{sq}\right)+\delta^{ru}\delta^{pt}\left(\varepsilon_{qs}+\zeta_{qs}\right)\Big] \\
= {} & 2\Big[\delta^{su}\delta^{qt}\mu_{pr}+\delta^{st}\delta^{qu}\mu_{rp}+\delta^{ps}\delta^{ru}\mu_{qt}-\delta^{su}\delta^{pr}\mu_{tq} \\
& -\delta^{qs}\delta^{ru}\mu_{tp}-\delta^{su}\delta^{qr}\mu_{pt}+\delta^{su}\delta^{pt}\mu_{rq}-\delta^{st}\delta^{pu}\mu_{qr} \\
& +\delta^{rt}\delta^{qu}\mu_{ps}-\delta^{ru}\delta^{qt}\mu_{sp}-\delta^{st}\delta^{pr}\mu_{qu}-\delta^{rt}\delta^{ps}\mu_{uq} \\
& +\delta^{st}\delta^{qr}\mu_{up}-\delta^{rt}\delta^{qs}\mu_{pu}+\delta^{rt}\delta^{pu}\mu_{sq}+\delta^{ru}\delta^{pt}\mu_{qs}\Big]
\end{aligned}
$$

Daí obtemos que

$$\begin{aligned}
(Ad(\mu_{pq})Ad(\mu_{rs}))\,\mu_{tu} = \;& 2\left[\delta^{qt}\delta^{su}\mu_{pr} + \delta^{qu}\delta^{st}\mu_{rp} + \delta^{ps}\delta^{ru}\mu_{qt} - \delta^{pr}\delta^{su}\mu_{tq}\right. \\
& -\delta^{qs}\delta^{ru}\mu_{tp} - \delta^{qr}\delta^{su}\mu_{pt} + \delta^{pt}\delta^{su}\mu_{rq} - \delta^{pu}\delta^{st}\mu_{qr} \\
& +\delta^{qu}\delta^{rt}\mu_{ps} - \delta^{pt}\delta^{ru}\mu_{sp} - \delta^{pr}\delta^{st}\mu_{qu} - \delta^{ps}\delta^{rt}\mu_{uq} \\
& \left.+\delta^{qr}\delta^{st}\mu_{up} - \delta^{qs}\delta^{rt}\mu_{pu} + \delta^{pu}\delta^{rt}\mu_{sq} + \delta^{pt}\delta^{ru}\mu_{qs}\right]
\end{aligned}$$

A base dual é dada por $\mu^{pq}\left(\mu_{rs}\right) = \delta_r^p\delta_s^q$, logo

$$\begin{aligned}
Tr\left(Ad(\mu_{pq})Ad(\mu_{rs})\right) = \;& \textstyle\sum_{t,u}\mu^{tu}\left[Ad(\mu_{pq})Ad(\mu_{rs})\mu_{tu}\right] \\
= \;& 2\textstyle\sum_{t,u}\mu^{tu}\left[\delta^{qt}\delta^{su}\mu_{pr} + \delta^{qu}\delta^{st}\mu_{rp} + \delta^{ps}\delta^{ru}\mu_{qt} - \delta^{pr}\delta^{su}\mu_{tq}\right. \\
& -\delta^{qs}\delta^{ru}\mu_{tp} - \delta^{qr}\delta^{su}\mu_{pt} + \delta^{pt}\delta^{su}\mu_{rq} - \delta^{pu}\delta^{st}\mu_{qr} \\
& +\delta^{qu}\delta^{rt}\mu_{ps} - \delta^{pt}\delta^{ru}\mu_{sp} - \delta^{pr}\delta^{st}\mu_{qu} - \delta^{ps}\delta^{rt}\mu_{uq} \\
& \left.+\delta^{qr}\delta^{st}\mu_{up} - \delta^{qs}\delta^{rt}\mu_{pu} + \delta^{pu}\delta^{rt}\mu_{sq} + \delta^{pt}\delta^{ru}\mu_{qs}\right] \\
= \;& 2\textstyle\sum_{t,u}\delta^{qt}\delta^{su}\delta_p^t\delta_r^u + \delta^{qu}\delta^{st}\delta_r^t\delta_p^u + \delta^{ps}\delta^{ru}\delta_q^t\delta_t^u - \delta^{pr}\delta^{su}\delta_t^t\delta_q^u \\
& -\delta^{qs}\delta^{ru}\delta_t^t\delta_p^u - \delta^{qr}\delta^{su}\delta_p^t\delta_t^u + \delta^{pt}\delta^{su}\delta_r^t\delta_q^u - \delta^{pu}\delta^{st}\delta_q^t\delta_r^u \\
& +\delta^{qu}\delta^{rt}\delta_p^t\delta_s^u - \delta^{pt}\delta^{ru}\delta_s^t\delta_p^u - \delta^{pr}\delta^{st}\delta_q^t\delta_u^u - \delta^{ps}\delta^{rt}\delta_u^t\delta_q^u \\
& +\delta^{qr}\delta^{st}\delta_u^t\delta_p^u - \delta^{qs}\delta^{rt}\delta_p^t\delta_u^u + \delta^{pu}\delta^{rt}\delta_s^t\delta_q^u + \delta^{pt}\delta^{ru}\delta_q^t\delta_s^u \\
= \;& 2\left[\delta_p^q\delta_r^s + \delta_r^s\delta_p^q + \delta^{ps}\delta_q^r - n\delta^{pr}\delta_q^s - n\delta^{qs}\delta_p^r - \delta^{qr}\delta_p^s + \delta_r^p\delta_q^s - \delta_q^s\delta_r^p\right. \\
& \left.+\delta_p^r\delta_s^q - \delta_s^q\delta_p^r - n\delta^{pr}\delta_q^s - \delta^{ps}\delta_q^r + \delta^{qr}\delta_p^s - n\delta^{qs}\delta_p^r + \delta_s^r\delta_q^p + \delta_q^p\delta_s^r\right] \\
= \;& 8\delta_{pq}\delta_{rs} - 8n\delta_{pr}\delta_{qs} = 2nTr\left(\mu_{pq}\mu_{rs}\right) - 2Tr\left(\mu_{pq}\right)Tr\left(\mu_{rs}\right)
\end{aligned}$$

Daí se conclui que $K(A,B) = 2nTr(AB) - 2Tr(A)Tr(B)$.

4.2 Total redutibilidade

Uma representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ será chamada de $\mathfrak{g}$-módulo, e um subespaço $\mathfrak{g}$-invariante de submódulo.

Teorema 4.6. *Seja V uma representação da álgebra de Lie semisimples $\mathfrak{g}$ e $W \subset V$ um subespaço invariante sobre a ação de $\mathfrak{g}$. Então existe um subespaço $W' \subset V$ complementar de W e invariante sobre $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como a imagem de $\mathfrak{g}$ pela representação é semisimple, podemos assumir que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Tomamos uma base $U_1, \ldots, U_r$ para $\mathfrak{g}$, e uma base dual $U_1', \ldots, U_r'$ respeito a forma de Killing B_V definido no exemplo 4.1:$B_V(X,Y) = \mathrm{Tr}(X \circ Y)$ (pelo critério de Cartan temos que B_V é não degenerada). Definimos agora $C_V(v) := \sum U_i \cdot (U_i' \cdot v)$. Podemos ver que C_V é um endomorfismo de V que comuta com a ação de $\mathfrak{g}$. Seu traço é

$$\mathrm{Tr}(C_V) = \sum \mathrm{Tr}(U_i \circ U_i') = \sum B_V(U_i, U_i') = \dim(\mathfrak{g}) \tag{7}$$

Também podemos ver que como C_V leva qualquer submódulo W nele mismo, e como comuta com $\mathfrak{g}$, seu núcleo $\mathrm{Ker}(C_V)$ e sua imagem são submódulos.

Note primeiro que todas as representações unidimensional de uma álgebra semisimple $\mathfrak{g}$ são triviais, pois $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ deve atuar trivialmente em uma representação unidimensional, e $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$.

Vamos provar o caso quando $W \subset V$ é um subespaço invariante irredutível de codimensão um. Então C_V leva W nele mesmo, e C_V atua trivialmente em V/W. Agora pelo lema de Schur's, como W é irredutível, C_V é multiplicação por um escalar em W. Este escalar é não zero, se não seria uma contradição com (7).

Daí obtemos que $V = W \oplus \mathrm{Ker}(C_V)$, com isto provamos este caso. Por indução na dimensão que podemos ver que o teorema vale quando $W \subset V$ tem codimensão um. Pois se W não é irredutível, podemos tomar Z por um submódulo não nulo, e por indução podemos encontrar um complementar a $W/Z \subset V/Z$, digamos Y/Z. Então Y/Z é de uma dimensão, de novo po indução podemos encontrar U tal que $Y = Z \oplus U$. Então $V = W \oplus U$.

Pelo mismo argumento é suficiente provar a afirmação do teorema quando W é irredutível. Tome agora o mapa de restrição

$$\rho : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W, W),$$

Um homomorfismo de $\mathfrak{g}-$ modulos. O segundo contem o submódulo unidimensional $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, W)$. No caso anterior, à um submódulo de uma dimensão de $\rho^{-1}\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, W)\right) \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ que se asigna sobre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, W)$ por ρ. Como os módulos unidimensionais são triviais, isto é que hà um ψ $\mathfrak{g}-$invariante em $\mathrm{Hom}(V, W)$ tal que $\rho(\psi) = 1$. Mas isto significa que ψ é uma projeção $\mathfrak{g}-$invariante de V sobre W, Logo $V = W \oplus \mathrm{Ker}(\psi)$, como queríamos provar. □

Vamos usar isto para mostrar a invariança da decomposição de Jordan (Teorema 3.10). O ponto chave é

Proposição 4.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie semisimple de $\mathfrak{gl}(V)$. Então para qualquer elemento $X \in \mathfrak{g}$, a parte semisimple X_s e a parte nilpotente X_n estão também em $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: A ideia é escrever $\mathfrak{g}$ como uma interseção de subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ daí a conclusão do teorema é simples de provar. Por exemplo, temos que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, já que $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, e claramente X_s e X_n são sem traço se X também for sem traço. Da mesma forma, se V é não irreducível, para qualquer submódulo W de V, seja

$$\mathfrak{s}_W = \{Y \in \mathfrak{gl}(V) \mid Y(W) \subset W \text{ e } \operatorname{Tr}(Y|_W) = 0\}.$$

Então $\mathfrak{g}$ é também uma subálgebra de $\mathfrak{s}_W$, e X_s e X_n também estão em $\mathfrak{s}_W$.

Dado que $[X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, segue que $[p(X), \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ para qualquer polinómio $p(T)$. Assim $[X_s, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ e $[X_n, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$. Em outras palavras, X_s e X_n pertencem à subálgebras de Lie $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ consistindo de endomomorfismos A tais que $[A, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$. Daí $\mathfrak{n}$ nos dá outra subálgebra para trabalhar.

Afirmação 1. *$\mathfrak{g}$ é interseção de $\mathfrak{n}$ com todas as álgebras $\mathfrak{s}_W$ para todos os submódulos W de V.*

Esta afirmação completa a prova. Seja $\mathfrak{g}'$ a interseção de todas essas álgebras de Lie. Então $\mathfrak{g}$ é um ideal em $\mathfrak{g}'$ desde que $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{n}$.

Pelo teorema de completa redutibilidade podemos encontrar um submódulo U de $\mathfrak{g}'$ tal que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus U$. Se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}$, então $[\mathfrak{g}, U] = 0$. Para mostrar que U é 0, basta mostrar que , para qualquer $Y \in U$, a restrição a qualquer submódulo irreduzível W de V é zero (Notando que Y preserva W desde que $Y \in \mathfrak{s}_W$, e que V é a suma de submódulos irreduzíveis). Mas como Y comuta com $\mathfrak{g}$ o lema de Schur implica que a restrição de Y a W é a multiplicação por um escalar, e a suposição de que $Y \in \mathfrak{s}_W$ significa que $\operatorname{Tr}(Y|_W) = 0$, como precisabamos. □

Agora, se $\mathfrak{g}$é uma álgebra semsimple, a representação adjunta ad leva $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Para qualquer X em $\mathfrak{g}$ o teorema implica que as partes semisimples e nilpotentes de $\operatorname{ad}(X)$ estão em $\mathfrak{g}$. Denotamos essas partes por X_s e X_n. A decomposição $X = X_s + X_n$ pode ser chamada de decomposição absoluta de Jordan. Note que $[X_s, X_n] = 0$. Pois para qualquer homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ de um álgebra de Lie semisimple para outra, $\rho(X_s) = \rho(X)_s$ e $\rho(X_n) = \rho(X)_n$. Na verdade, a decomposição absoluta determina todas as outras:

Corolário 4.8. *Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$ é qualquer representação de uma álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, então $\rho(X_s)$ é a parte semisimple de $\rho(X)$ e $\rho(X_n)$ é a parte nilpotente de $\rho(X)$.*

Demonstração: Acabamos de ver que $\rho(X_s)$ e $\rho(X_n)$ são as parte semisimple e nilpotente de $\rho(X)$, conforme considerado na álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$. O resultado segue aplicando o teorema anterior a $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V)$. □

Segue-se que um elemento X em uma álgebra de Lie semisimple que é semisimple em uma representação fiel (faithful) é semisimple em todas as representações.

5 Grupos de Difeomorfismos de Hölder.

Um grupo topológico é um conjunto que tem estrutura de grupo e de topología tal que as operações de multiplicação e inversão de um elemento são continuas. Todo grupo de Lie é grupo topológico, mas nem todo grupo topológico é um grupo de Lie. Nesta seção mostraremos como certos grupos de difeomorfismos são grupos topológicos. De fato, seja X uma variedade suave e compacta, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $\alpha \in [0,1]$ denotamos por $\mathrm{Diff}^{n,\alpha}(X)$ o espaço de homeomorfismos de X que satisfazem a condição de Hölder com as constantes (n,α). Claramente, este é um grupo, menos quando $n+\alpha \in (0,1)$. Porem, exeto quando $n=\alpha=0$, esse grupo não é grupo topológico. Quando $n=\alpha=0$ é grupo topológico mas não grupo de difeomorfismo. Vamos ver contudo, que a continuidade desses operações é recuperada quando $\mathrm{Diff}^{n,\alpha}(X)$ e substituido pelo espaço $\mathrm{diff}^{n,\alpha}(X)$, definido como a clausura de $\mathrm{Diff}^{\infty}(X)$ em $\mathrm{Diff}^{n,\alpha}(X)$.

5.1 Definições Básicas

Sejam X e Y espaços métricos. Para cada $f: X \to Y$ e para cada $\alpha \in [0,1]$, a seminorma de Hölder de f de ordem α é definida por

$$[f]_\alpha := \operatorname*{Sup}_{x\neq y} \frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{d(x,y)^\alpha}$$

Em particular vemos que, $[f]_0$ é a variação total de f e $[f]_1$ é a seminorma de Lipschitz.

Proposição 5.1. *Para cada $f: X \to Y$, e para cada α, β, $t \in [0,1]$, temos que*

$$[f]_{t\alpha+(1-t)\beta} \leq [f]_\alpha^t [f]_\beta^{(1-t)}. \tag{8}$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} [f]_{t\alpha+(1-t)\beta} &= \operatorname*{Sup}_{x\neq y} \frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{d(x,y)^{t\alpha+(1-t)\beta}} \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\neq y} \left(\frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{d(x,y)^\alpha}\right)^t \left(\frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{d(x,y)^\beta}\right)^{(1-t)} \\ &\leq [f]_\alpha^t [f]_\beta^{(1-t)}. \end{aligned}$$

Concluindo assim a prova da proposição. □

Suponhamos agora que Y é um espaço vetorial normado. Para toda $f : X \to Y$, a norma uniforme de f é definida por

$$\|f\|_{C^0} := \operatorname*{Sup}_x \|f(x)\| .$$

Vemos que, a norma assim definida esta relacionada com a variação total de f pela seguinte desigualdade

$$[f]_0 = \operatorname*{Sup}_{x \neq y} d\left(f(x), f(y)\right) \leq \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \left(\|f(x)\| + \|f(y)\|\right) \leq 2 \|f\|_{C^0} .$$

Para toda $f : X \to Y$ e para todo $\alpha \in [0,1]$, a norma de Hölder de f de ordem $(0,\alpha)$ é definida por

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{C^0} + [f]_\alpha .$$

Suponhamos finalmente que X é um subconjunto aberto de algúm espaço vetorial normado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $\alpha \in [0,1]$ e para cada função $f : X \to Y$ n-vezes diferenciável, a norma de Hölder de f de ordem (n,α) é definida por

$$\|f\|_{C^{n,\alpha}} := \sum_{k=0}^{n} \left\|D^k f\right\|_{C^0} + [D^n f]_\alpha .$$

Em particular, vemos que a norma de Hölder satisfaz a seguinte fórmula indutiva

$$\|f\|_{C^{n+1,\alpha}} = \|f\|_{C^0} + \|Df\|_{C^{n,\alpha}} .$$

Para cada (n,α), o espaço de Hölder de ordem (n,α), que é denotado por $C^{n,\alpha}(X,Y)$, o espaço de todas as funções $f : X \to Y$ n-vezes deriváveis tais que $\|f\|_{C^{n,\alpha}} < \infty$.

Proposição 5.2. *Seja* $X = S^1$

1. $C^{n,\alpha}(X,Y)$ *não é separável; e*
2. $C^{\infty}(X,Y)$ *não é denso em* $C^{n,\alpha}(X,Y)$

Observação: Assim vemos que mismo no caso simples de uma variedede compacta unidimensional, o espaço $C^{n,\alpha}(X,Y)$ é bem grande.

Demonstração Proposição: É suficiente considerar o caso em que $n = 0$ e $\alpha = 1$, isto é quando $C^{n,\alpha}(X,Y) = C^{0,1}(X,Y)$ é o espaço das funções Lipchitzianas de X em Y. Consideramos o caso em que $X = S^1$ e $Y = \mathbb{R}$.

De fato, a clausura de C^∞ em $C^{0,1}$ é C^1. Então comoa existem funções em $C^{0,1}$ que não são derivaveis, C^∞ não pode ser denso em C^1.

Agora seja f_0 a extensão periódica (com período 2π) dafunção

$$f_0(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Tome para cada $\phi \in \mathbb{R}$ a função

$$f_\phi(\theta) = f_0(\phi - \theta)$$

Vemos que par acada $\phi \neq 0$

$$\begin{aligned} \|f_\phi - f_0\|_{L^\infty} &= |\phi| \\ [f_\phi - f_0]_1 &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|f_\phi - f_0\|_{C^{0,1}} \geq 2$.

Da mesma forma para cada $\phi \neq \phi'$

$$\left\|f_\phi - f_{\phi'}\right\|_{C^{0,1}} \geq 2$$

Pois

$$\begin{aligned} \left(f_\phi - f_{\phi'}\right)(\theta) &= f_\phi(\theta) - f_{\phi'}(\theta) \\ &= f_0(\theta - \phi) - f_0(\theta - \phi') \\ &= f_0(\theta - \phi) - f_0(\theta - \phi - (\phi - \phi')) \\ &= f_0(\theta - \phi) - f_{\phi' - \phi}(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Assim $\{B_1(f_\phi) \mid \phi \in [0, 2)\}$ é uma familia não enumerável de abertos disjuntos em $C^{0,1}(S^1, \mathbb{R})$, logo $C^{0,1}(S^1, \mathbb{R})$ não é separável, Em particular, como $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ é separável na topologia $C^{0,1}$, $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ não é denso em $C^{0,1}(S^1, \mathbb{R})$ $\square$

Definimos agora, para cada (n, α), o pequeno espaço de Hölder de ordem (n, α) como a clausura de $C^\infty(X, Y)$ em $C^{n,\alpha}(X, Y)$, e o denotamos por $c^{n,\alpha}(X, Y)$. Note que no caso especial quando $\alpha = 1$, nos temos que, para todo n

$$c^{n,1}(X, Y) = C^{n+1}(X, Y).$$

5.2 Aplicações Multilineares

Nesta seção $E_1, \ldots, E_m$ e F são espaços vetoriais normados e $\mu : E_1 \oplus \cdots \oplus E_m \to F$ é uma aplicação multilinear limitada. Suponhamos primero que X é um espaço métrico

Proposição 5.3. *A aplicação*

$$\begin{aligned} C^0(X, E_1) \oplus \cdots \oplus C^0(X, E_m) &\longrightarrow C^0(X, F) \\ (f_1, \ldots, f_m) &\longmapsto \mu(f_1, \ldots, f_m) \end{aligned}$$

é uma aplicação multilinear contina de norma limitada por $\|\mu\|$.

Demonstração: Seja para cada $i = 1, \ldots, m$, $f_i \in C^0(X, E_i)$, logo

$$\begin{aligned}
\|\mu(f_1, \ldots, f_m)\|_{C^0} &= \operatorname*{Sup}_{x \in X} \|\mu(f_1, \ldots, f_m)(x)\| \\
&= \operatorname*{Sup}_{x \in X} \|\mu(f_1(x), \ldots, f_m(x))\| \\
&\leq \operatorname*{Sup}_{x \in X} \|\mu\| \, \|f_1(x)\| \ldots \|f_m(x)\| \\
&\leq \|\mu\| \, \|f_1\|_{C^0} \cdots \|f_m\|_{C^0} \, ,
\end{aligned}$$

Provando assim a proposição. □

Proposição 5.4. *Para cada $\alpha \in [0, 1]$, a aplicação*

$$\begin{aligned}
C^{0,\alpha}(X, E_1) \oplus \cdots \oplus C^{0,\alpha}(X, E_m) &\longrightarrow C^{0,\alpha}(X, F) \\
(f_1, \ldots, f_m) &\longmapsto \mu(f_1, \ldots, f_m)
\end{aligned}$$

é uma aplicação multilinear continua de norma limitada por $\|\mu\|$.

Demonstração: É suficiente considerar o caso quando $m = 2$. Para cada f_1, f_2 e para cada $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
[\mu(f_1, f_2)]_\alpha &= \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|\mu(f_1, f_2)(x) - \mu(f_1, f_2)(y)\|}{d(x, y)^\alpha} \\
&= \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|\mu(f_1(x), f_2(x)) - \mu(f_1(y), f_2(y))\|}{d(x, y)^\alpha} \\
&\leq \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|\mu(f_1(x), f_2(x)) - \mu(f_1(y), f_2(x))\|}{d(x, y)^\alpha} \\
&\qquad + \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|\mu(f_1(y), f_2(x)) - \mu(f_1(y), f_2(y))\|}{d(x, y)^\alpha} \\
&\leq \|\mu\| \, [f_1]_\alpha \, \|f_2\|_{C^0} + \|\mu\| \, \|f_1\|_{C^0} \, [f_2]_\alpha,
\end{aligned}$$

e como

$$\|\mu(f_1, f_2)\|_{C^0} \leq \|\mu\| \, \|f_1\|_{C^0} \, \|f_2\|_{C^0} \, ,$$

então

$$\|\mu(f_1, f_2)\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|\mu\| \, \|f_1\|_{C^{0,\alpha}} \, \|f_2\|_{C^{0,\alpha}} \, ,$$

como queriamos mostrar. □

Suponhamos agora que X é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado.

Proposição 5.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $\alpha \in [0, 1]$, a aplicação*

$$\begin{aligned}
C^{n,\alpha}(X, E_1) \oplus \cdots \oplus C^{n,\alpha}(X, E_m) &\longrightarrow C^{n,\alpha}(X, F) \\
(f_1, \ldots, f_m) &\longmapsto \mu(f_1, \ldots, f_m)
\end{aligned}$$

é uma aplicação multilinear continua de norma limitada por $m^n \|\mu\|$.

Demonstração: É suficiente mostrar a proposição para $m = 2$. Vamos continuar usando indução em n. O caso $n = 0$ é a Proposição 5.5. Seja E o espaço vetorial normado em que X é contido; definimos as aplicações bilineares continuas $\mu_1 : \mathrm{Lin}(E, E_1) \oplus E_2 \to \mathrm{Lin}(E, F)$ e $\mu_2 : E_1 \oplus \mathrm{Lin}(E, E_2) \to \mathrm{Lin}(E, F)$ por

$$\begin{aligned} \mu_1(A, V)(U) &:= \mu(A(U), V), \quad \text{e} \\ \mu_2(U, A)(V) &:= \mu(U, A(V)). \end{aligned}$$

Considere agora $f_1 \in C^{n+1,\alpha}(X, E_1)$ e $f_2 \in C^{n+1,\alpha}(X, E_2)$. Pela regra de cadeia temos que,

$$D\mu(f_1, f_2) = \mu_1(Df_1, f_2) + \mu_2(f_1, Df_2)$$

assim, por hipotesis indutiva temos que

$$\|D\mu\,(f_1, f_2)\|_{C^{n,\alpha}} \leq 2^n\,\|\mu\|\left(\|Df_1\|_{C^{n,\alpha}}\,\|f_2\|_{C^{n,\alpha}} + \|f_1\|_{C^{n,\alpha}}\,\|Df_2\|_{C^{n,\alpha}}\right).$$

Porem, como

$$\|\mu(f_1, f_2)\|_{C^0} \leq \|\mu\|\,\|f_1\|_{C^0}\,\|f_2\|_{C^0}$$

segue que

$$\|\mu(f_1, f_2)\|_{C^{n+1,\alpha}} \leq 2^{n+1}\,\|\mu\|\,\|f_1\|_{C^{n+1,\alpha}}\,\|f_2\|_{C^{n+1,\alpha}},$$

como queriamos mostrar. □

5.3 Composição:

Aqui vamos supor que X é um espaço metrico. Vamos supor primeiro que Y e Z são também espaços metricos e que Y é localmente compacto.

Proposição 5.6. *A aplicação de composição*

$$\begin{array}{rcl} C^0(X, Y) \times C^0(Y, Z) & \longrightarrow & C^0(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

é continua.

Demonstração: Provaremos este resultado usando a topologia uniforme. Seja $(f, g) \in C^0(X, Y) \times C^0(Y, Z)$. Seja U um subconjunto aberto de Z e seja K um subconjunto compacto de X tal que $(g \circ f)(K) \subseteq U$. Logo, $f(K) \subseteq g^{-1}(U)$. Agora como $f(K)$ é compacto e Y é localmente compacto, então existe um subconjunto aberto e relativamente compacto V de Y tal que $K \subseteq V$ e $g(\overline{V}) \subseteq U$. Definimos agora as vizinhanças $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de f e g respeitivamente por

$$\mathcal{U} := \left\{ f' \in C^0(X, Y) \mid f'(K) \subseteq V \right\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{V} := \left\{ g' \in C^0(Y,Z) \mid g'(K) \subseteq V \right\}$$

Logo para todo $(f', g') \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $(g' \circ f')(K) \subseteq U$, e esto mostra o resultado. $\square$

A partir deste momento vamos supor que Y e Z são subconjuntos de espaços vetorias normados

Proposição 5.7. *Para todo* $\alpha, \beta \in [0,1]$, *e para todo* $(f,g) \in C^{0,\alpha}(X,Y) \times C^{0,\beta}(X,Y)$ *se cumple que*

$$[g \circ f]_{\alpha\beta} \leq [g]_\beta [f]_\alpha^\beta. \tag{9}$$

Em particular se cumple que

$$\|g \circ f\|_{C^{0,\alpha,\beta}} \leq \|g\|_{C^{0,\beta}} \left(1 + [f]_\alpha^\beta\right).$$

Observação: Com este resultado vemos que a pre-composição por um elemento de $C^{0,\alpha}(X,Y)$ define uma aplicação linear limitada de $C^{0,\beta}(Y,Z)$ a $C^{0,\alpha\beta}(X,Z)$.

Demonstração da Proposição 5.7: Note que

$$\begin{aligned} [g \circ f]_{\alpha\beta} &= \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)\|}{d(x,y)^{\alpha\beta}} \\ &\leq [g]_\beta \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{d\left(f(x) - f(y)\right)^\beta}{d(x,y)^{\alpha\beta}} \\ &= [g]_\beta [f]_\alpha^\beta, \end{aligned}$$

E isto prova a proposição. $\square$

Proposição 5.8. *Para cada* $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ *tais que* $\gamma < \alpha\beta$, *o mapa de composição*

$$\begin{array}{rcl} C^{0,\alpha}(X,Y) \times C^{0,\beta}(Y,Z) & \longrightarrow & C^{0,\gamma}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

é continuo.

Demonstração: Seja (f_n, g_n) uma sequencia convergente em $C^{0,\alpha}(X,Y) \times C^{0,\beta}(Y,Z)$, e seja (f_∞, g_∞) o limite. Pela proposição 5.6,

$$\operatorname*{Lim}_{n \to +\infty} \|(g_n \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)\|_{C^0} = 0.$$

Por (9), existe $B > 0$ tal que, para cada n,

$$[(g_n \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \leq [g_n \circ f_n]_{\alpha\beta} + [g_\infty \circ f_\infty]_{\alpha\beta} \leq B.$$

Por (8), com $t := \gamma/\alpha\beta$,

$$[(g_n \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)]_\gamma \leq B^t \left[(g_n \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)\right]_0^{(1-t)}$$

e como este último tende a 0 quando n tende a infinito, daí obtemos que $(g_n \circ f_n)$ converge a $(g_\infty \circ f_\infty)$ quando n tende a infinito. Logo o resultado segue. □

Proposição 5.9. *Para cada $\alpha \in [0,1]$ e para cada $\beta \in [0,1)$, o mapa de composição*

$$\begin{array}{rcl} C^{0,\alpha}(X,Y) \times c^{0,\beta}(Y,Z) & \longrightarrow & C^{0,\alpha\beta}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

é uma aplicação continua.

Demonstração: Seja $(f_n, g_n) \in C^{0,\alpha}(X,Y) \times C^{0,\beta}(Y,Z)$ uma sequença convergente a (f_∞, g_∞). Para cada n se cumple que

$$[(g_n \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \leq [(g_\infty \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} + [(g_n - g_\infty) \circ f_n]_{\alpha\beta}$$

Por (9), o segundo termo a direita satisfaz

$$[(g_n - g_\infty) \circ f_n]_{\alpha\beta} \leq [g_m - g_\infty]_\beta [f_m]_\alpha^\beta,$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Consideremos agora o primeiro termo a direita. Seja $B > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$[f_m]_\alpha \leq B.$$

Escolhemos agora $\epsilon > 0$ e $h \in C^\infty(Y,Z)$ tais que

$$[h - g_\infty]_\beta \leq \epsilon/3B^\beta$$

De novo usando (9), obtemos que

$$\begin{aligned} [(g_\infty \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \leq\ & [(h - g_\infty) \circ f_n]_{\alpha\beta} \\ & + [(h \circ f_n) - (h \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \\ & + [(h - g_\infty) \circ f_\infty]_{\alpha\beta} \\ \\ \leq\ & [h - g_\infty]_\beta [f_m]_\alpha^\beta \\ & + [(h \circ f_n) - (h \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \\ & + [h - g_\infty]_\beta [f_\infty]_\alpha^\beta \\ \\ \leq\ & [(h \circ f_n) - (h \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} + 2\epsilon/3. \end{aligned}$$

Como $h \in C^{0,1}(Y,Z)$, segue pela Proposição 5.8 que, para n suficientemente grande

$$[(h \circ f_n) - (h \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \leq \epsilon/3,$$

Assim

$$[(g_\infty \circ f_n) - (g_\infty \circ f_\infty)]_{\alpha\beta} \leq \epsilon$$

Como ϵ foi escolido de forma arbitraria, o primeiro termo a direita também tende a zero quando n tende a infinito, completando assim a demonstração. $\square$

O caso em que $\beta = 1$ se tratara de forma separada

Proposição 5.10. *Se Y é convexo e compacto então, para todo $\alpha \in [0,1]$, o mapa de composição*

$$\begin{array}{rcl} C^{0,\alpha}(X,Y) \times C^1(Y,Z) & \longrightarrow & C^{0,\alpha}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

é continuo.

Demonstração: Sejam E e F os espaços vetorias normados contendo a Y e Z respeitivamente. Suponhamos alem do mais que F é completo, assim a integral de curvas continuas em F esta bem definida. Agora seja (f_n, g_n) uma sequença convergente a (f_∞, g_∞) em $C^{0,\alpha}(X,Y) \times C^1(Y,Z)$. Agora como Y é convexo, podemos definir para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a aplicação $A_n : X \times X \to \mathrm{Lin}(E,F)$ por

$$A_n(x,y) := \int_0^1 Dg_n((1-t)f_n(x) + tf_n(y))dt$$

Segue por compacidade de Y que a sequença (A_n) tem uma subsequença uniformmemente convergente a A_∞, vamos supor sem perdad de generalidade que (A_n) tende a A_∞ quando n tende a infinito, Logo para todo n,

$$\begin{array}{rcl} [g \circ f_n - g \circ f_\infty]_\alpha = & \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|A_n(x,y)(f_n(y)-f_n(x)) - A_\infty(x,y)(f_\infty(y)-f_\infty(x))\|}{d(x,y)^\alpha} \\ \leq & \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|A_n(x,y)(f_n(y)-f_n(x)-f_\infty(y)+f_\infty(x))\|}{d(x,y)^\alpha} \\ & +\operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{\|(A_n(x,y)-A_\infty(x,y))(f_\infty(y)-f_\infty(x))\|}{d(x,y)^\alpha} \\ \leq & \|A_n\|_{C^0} [f_n - f_\infty]_\alpha + \|A_n - A_\infty\|_{C^0} [f_\infty]_\alpha, \end{array}$$

y assim este tende a zero quando n tende a infinito, logo o resultado segue. $\square$

Finalmente vamos supor que X é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado.

Proposição 5.11. *Para cada $k \geq 1$, e para cada $\alpha \in [0,1]$, o mapa de composição*

$$\begin{array}{rcl} C^{k,\alpha}(X,Y) \times c^{k,\alpha}(Y,Z) & \longrightarrow & C^{k,\alpha}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

é continuo.

Demonstração: Como $c^{k,1} = C^{k+1}$, o caso em que $\alpha = 1$ é trivial. Suponhamos agora que $\alpha < 1$, e provaremos o resultado por indução em k. Seja (f_n, g_n) convergente a (f_∞, g_∞) em $C^{k,\alpha}(X,Y) \times c^{k,\alpha}(Y,Z)$. Pela Proposição 5.6 a sequença $(g_n \circ f_n)$ converge a $(g_\infty \circ f_\infty)$ em $C^0(X,Y)$. Pela regra da cadeia temos que, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$D\left(g_n \circ f_n\right) = \left(Dg_n \circ f_n\right) Df_n.$$

Denotamos por E e F os espaços vectorias normados contendo a X e Y respeitivamente. Se $k > 1$, então pela hipotese indutiva temos que a sequença $(Dg_n \circ f_n)$ converge a $(Dg_\infty \circ f_\infty)$ em $C^{k-1,\alpha}\left(C, \mathrm{Lin}(E,F)\right)$. O caso em que $k = 1$ segue pela Proposição 5.9. Em cada caso, pela Proposição 5.5, a sequença $(D(g_n \circ f_n))$ converge a $(D(g_\infty \circ f_\infty))$ em $C^{0,\alpha}(X, \mathrm{Lin}(E,F))$, e assim concluimos que a sequença $(g_n \circ f_n)$ converge a $(g_\infty \circ f_\infty)$ em $C^{k,\alpha}(X,Z)$, como queriamos provar. $\square$

Suponha agora que X é uma subvariedade suave e compacta contida em um espaço vetorial de dimensão finita. Note que os resultados anteriores continuam validos neste caso. Seja $\mathrm{diff}^{k,\alpha}(X)$ o espaço de difeomorfismos de X que são de tipo $C^{k,\alpha}$. Colocando $Z = Y = X$, a Proposição 5.11 implica o seguinte teorema:

Teorema 5.12. *Para cada $k \geq 1$, e para cada $\alpha \in [0,1]$, o mapa de composição*

$$\begin{array}{rcl} \mathit{diff}^{k,\alpha}(X) \times \mathit{diff}^{k,\alpha}(X) & \longrightarrow & \mathit{diff}^{k,\alpha}(X) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

é continuo.

Agora vamos demonstrar a continuidade da aplicação inversão. Primeiro temos que

Proposição 5.13. *O mapa de inversão*

$$\begin{array}{rcl} \mathit{homeo}(X) & \longrightarrow & \mathit{homeo}(X) \\ \phi & \longmapsto & \phi^{-1} \end{array}$$

é continuo.

Demonstração: Vamos provar por indução em k. Seja (ϕ_n) uma sequença convergente em $\mathrm{diff}^{K,\alpha}(X)$ a ϕ_∞ e para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definimos $\psi_n := \phi_n^{-1}$. Pela Proposição 5.13, (ψ_n) converge a ψ_∞ no sentido C^0. Pela regra de cadeia, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

$$D\psi_n = (D\phi_n)^{-1}\psi_n. \tag{10}$$

Afirmação: (ψ_n) converge a ψ_∞ no sentido de $C^{k-1,\alpha}$.

Em efeito, cuando $k > 1$, o resultado segue por hipotesis indutiva. Agora o caso quando $k = 1$, primero observamos que (10) implica que $(D\psi_n)$ converge a $D\psi_\infty$ no sentido C^0. Daqui segue que (ψ_n) converge a ψ_∞ no sentido C^1e por tanto também no sentido $C^{0,\alpha}$, provando assim a afirmação.

Em cada caso, pela Proposição 5.11 temos que $(D\psi_n)$ converge a $D\psi_\infty$ no sentido $C^{k-1,\alpha}$, e assim (ψ_n) converge a ψ_∞ no sentido $C^{k,\alpha}$, como queriamos provar. $\square$

Referências

[1] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory. A First Course.* Springer-Verlag, 1991.

[2] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer. Second Edition.

[3] E. L. Lima, *Variedades Diferenciáveis.* IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[4] Luis A. B., *Grupos de Lie*. UNICAMP, 2014.

[5] N. Jacobson, *Lie Algebras.* Dover, New York, 1962

[6] N. Perrin, *Introduction to Lie Algebras.* November 9, 2015