UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA

Sequências Exatas e Morfismos Estritos

DENIEL CORRÊA DE ALMEIDA

UFRJ
RIO DE JANEIRO - 2017

DENIEL CORRÊA DE ALMEIDA

Sequências Exatas e Morfismos Estritos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática (Matemática Pura), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Matemática).

Orientador: Dinamérico Pereira Pombo Jr.

UFRJ
RIO DE JANEIRO - 2017

FOLHA DE APROVAÇÃO

DENIEL CORRÊA DE ALMEIDA

Sequências Exatas e Morfismos Estritos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática (Matemática Pura), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Matemática).

Rio de Janeiro, 08 de agosto de 2017.

Prof. Nilson da Costa Bernardes Junior (UFRJ)
Presidente

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Junior (UFF)
Orientador

Profa. Cecília Salgado Guimarães da Silva (UFRJ)

Prof. Juan Bautista Límaco Ferrel (UFF)

Prof. Rolci de Almeida Cipolatti (UFRJ)

UFRJ
RIO DE JANEIRO - 2017

"Ne me dites pas que ce problème est difficile. S'il n'était pas difficile, ce ne serait pas un problème."

Ferdinand Foch

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, por mais essa etapa em vida. Além de agradecer a Ele por tornar possível a materialização deste texto, sou grato a todas as pessoas que me ajudaram nesta caminhada: familiares, professores e amigos.

Agradeço a todos os familiares que gravitam minha vida: meus pais Daniel e Dinha, meus irmãos Robson, Duilliam, Mayelle, Marciele, Gysele, Bianca, Andressa, Caroline, Diogo e Diego. Enfatizo aqui a importatissíma ajuda de meu amigo-irmão Robson Correa nesta caminhada.

Agradeço a meus amigos da salinha de estudo - representados aqui pelo cordial Dionicio Orlando Moreno Vega. Agradeço em especial a meu amigo e colega de mestrado Gabriel da Silva Freitas pelos mais de dois anos de amizade.

Agradeço aos professores Nilson, Cecília, Didier, Rolci e Katrin pelos conhecimentos repassados. Em especial agradeço ao professor Nilson da Costa Bernardes Junior, que além da exemplar docência - e do incentivo prestato em meus momentos de fraqueza - honrou-me com a sua indicação à orientando do professor Dinamérico Pereira Pombo Jr. A este, meu sinceros agradecimentos, tanto pelos conhecimentos repassados como pela sua dedicação como orientador. Aprendi muito!

Por fim, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

Sumário

Resumo

Nesta dissertação de mestrado são estabelecidas duas condições necessárias e suficientes para que certas sequências de homomorfismos de grupos contínuos sejam exatas (no sentido algébrico), bem como algumas consequências das mesmas.

Palavras-chave: grupos topológicos, homomorfismos de grupos contínuos, morfismos estritos, sequências exatas.

Abstract

Two necessary and sufficient conditions for the exactness (in the algebraic sense) of certain sequences of continuous group homomorphisms are established in this master thesis, as well as certain consequences of them.

Keywords: topological groups, continuous group homomorphisms, strict morphisms, exact sequences.

Introdução

Dois teoremas fundamentais de Álgebra Linear [2, p. 227 e p. 229] asseguram que a exatidão de certas sequências de aplicações lineares entre módulos equivale à exatidão de sequências de homomorfismos de grupos entre os correspondentes grupos abelianos de aplicações lineares. O objetivo principal deste trabalho é estabelecer resultados análogos no contexto dos grupos topológicos abelianos. Mais precisamente, mostramos que a noção de morfismo estrito é o ingrediente-chave que permite estabelecer a equivalência entre a exatidão (no sentido algébrico) de certas sequências de homomorfismos de grupos contínuos e a exatidão de sequências de homomorfismos de grupos entre os correspondentes grupos constituídos por homomorfismos de grupos contínuos. Os referidos resultados são apresentados no capítulo 3 da presente dissertação, no qual algumas aplicações dos mesmos são também incluídas.

Os preliminares sobre grupos topológicos arbitrários e grupos topológicos metrizáveis, necessários à compreensão do texto, podem ser encontrados nos capítulos 1 e 2 do presente trabalho.

Capítulo 1

Preliminares sobre Grupos Topológicos

Este capítulo é dedicado a conceitos e fatos básicos sobre grupos topológicos, bem como a exemplos significativos de grupos topológicos, necessários a uma boa compreensão do presente trabalho. Uma apresentação da teoria elementar dos grupos topológicos pode ser encontrada em [3] ou [5].

Todos os grupos considerados neste trabalho serão supostos comutativos e denotados aditivamente; o elemento neutro de qualquer grupo será denotado por 0; no restante, seguimos a notação clássica de [6].

Definição 1.1. *Um grupo G munido de uma topologia é dito um **grupo topológico** quando a aplicação*

$$(x, y) \in G \times G \longmapsto x - y \in G$$

é contínua, onde em $G \times G$ é considerada a topologia produto.

É fácil observar que, para que a aplicação acima seja contínua, é necessário e suficiente que as aplicações

$$(x, y) \in G \times G \longmapsto x + y \in G$$

e

$$x \in G \longmapsto -x \in G$$

o sejam.

Exemplo 1.2. *Qualquer grupo, munido da topologia caótica, é um grupo topológico.*

Exemplo 1.3. *Qualquer grupo, munido da topologia discreta, é um grupo topológico.*

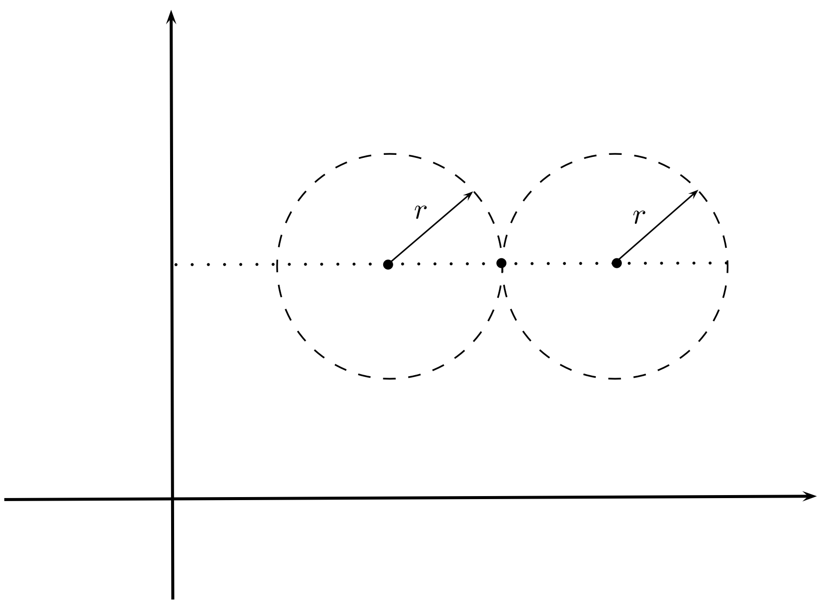
Exemplo 1.4. *Seja E um espaço vetorial topológico sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) [7]. Então, por definição, $(E, +)$ é um grupo topológico, onde $(E, +)$ designa o grupo aditivo subjacente a E. Em particular, se E é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, então $(E, +)$ é um grupo topológico.*

Exemplo 1.5. *Seja $\mathbb{R}$ o grupo aditivo do números reais. É fácil verificar que todos os conjuntos da forma $[a, b)$, para a e b variando em $\mathbb{R}$ e $b > a$, constituem uma base para uma necessariamente única topologia em $\mathbb{R}$, dita a* ***topologia de Sorgenfrey****. O grupo aditivo $\mathbb{R}$ dos números reais, munido da topologia de Sorgenfrey, será representado por $\mathbb{R}_\ell$. Afirmamos que $\mathbb{R}_\ell$ não é um grupo topológico. Realmente, a aplicação $x \in \mathbb{R}_\ell \longmapsto -x \in \mathbb{R}_\ell$ não é contínua. De fato, a imagem inversa do aberto $[0, 1)$ em $\mathbb{R}_\ell$, pela referida aplicação, é o conjunto $(-1, 0]$, o qual não é aberto em $\mathbb{R}_\ell$. Apesar disso, a aplicação adição*

$$(x, y) \in \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell \longmapsto x + y \in \mathbb{R}_\ell$$

é contínua. Com efeito, seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b > a$, tais que $x_0 + y_0 \in [a, b)$. Então, tomando $s > 0$ tal que $x_0 + y_0 + 2s < b$, conclui-se que as relações $x \in [x_0, x_0 + s)$ e $y \in [y_0, y_0 + s)$ implicam $x + y \in [a, b)$, provando assim a continuidade da adição em (x_0, y_0).

Exemplo 1.6. *Consideremos no grupo aditivo $\mathbb{R}^2$ as bolas siamesas, definidas a seguir. Consideremos duas bolas de mesmo raio $r > 0$ cujos centros estão numa mesma reta horizontal e que se tangenciam; uma* ***bola siamesa de raio r*** *é a união dos interiores das duas bolas mencionadas com o conjunto reduzido ao ponto de tangência. Verifica-se que existe uma necessariamente única topologia $\mathcal{T}_{oo}$ em $\mathbb{R}^2$ para a qual todas as bolas siamesas constituem uma base de abertos.*

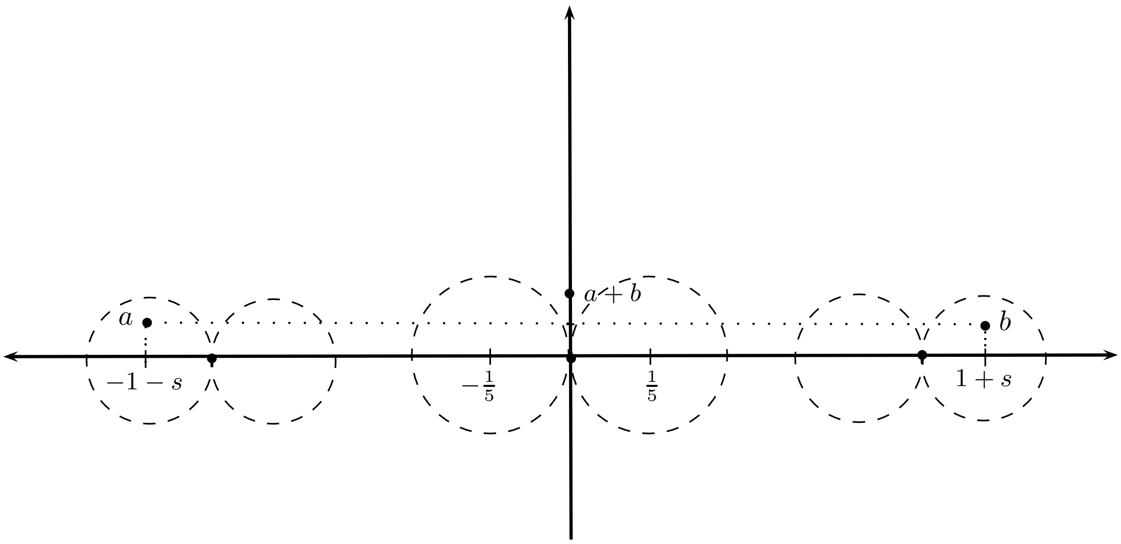


Afirmamos que $\mathbb{R}^2$, munido de $\mathcal{T}_{oo}$, não é um grupo topológico. Primeiramente, a aplicação $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ é contínua com respeito à referida topologia, pois $B = -B$ para toda bola siamesa B tendo $(0, 0)$ como ponto de tangência. Mostremos então que a opera-

ção de adição

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

não é contínua. Para isso, verifiquemos a descontinuidade em $((-1,0),(1,0)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$*. Seja* B *a bola siamesa de raio* $\frac{1}{5}$ *e ponto de tangência* $(0,0)$ *e seja* B_1 $(resp.\ B_2)$ *uma bola siamesa de raio* $s < \frac{1}{5}$ *tendo* $(-1,0)$ $(resp.\ (1,0))$ *como ponto de tangência. Então* $a := (-1-s, \frac{s}{2}) \in B_1$ *e* $b := (1+s, \frac{s}{2}) \in B_2$*, mas* $a + b = (-1-s, \frac{s}{2}) + (1+s, \frac{s}{2}) = (0, s) \notin B$*.*



Portanto $B_1 + B_2 \nsubseteq B$*; consequentemente* $\mathbb{R}^2$*, munido de* $\mathcal{T}_{oo}$ *, não é um grupo topológico.*

Se G um grupo topológico, é claro que a aplicação $x \in G \longmapsto -x \in G$ é um homeomorfismo e que, para cada $a \in G$, a aplicação $x \in G \longmapsto x + a \in G$ (chamada de **translação**) é um homeomorfismo. Consequentemente temos a seguinte

Proposição 1.7. *Se* G *é um grupo topológico,* U, V *e* F *são subconjuntos de* G *e* $a \in G$*, as seguintes afirmações são válidas:*
$a)$ *U é aberto em G se, e somente se,* $a + U := \{a + x : x \in U\}$ *é aberto em G;*
$b)$ *U é aberto em G se, e somente se,* $-U := \{-x : x \in U\}$ *é aberto em G;*
$c)$ *se U é aberto em G, então* $U + V := \{x + y : x \in U,\ y \in V\}$ *é aberto em G;*
$d)$ *F é fechado em G se, e somente se,* $a + F := \{a + x : x \in F\}$ *é fechado em G;*
$e)$ *F é fechado em G se, e somente se,* $-F := \{-x : x \in F\}$ *é fechado em G.*

Demonstração. Em vista do que dissemos acima, resta-nos provar $c)$, o que decorre de $a)$ e da igualdade

$$U + V = \bigcup_{y \in V} (y + U)\,.$$

□

Definição 1.8. *Um subconjunto V de um grupo é **simétrico** se $V = -V$.*

Proposição 1.9. *Seja G um grupo topológico. Então o conjunto de todas vizinhanças fechadas e simétricas de 0 em G constitui um sistema fundamental de vizinhanças 0 em G.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança arbitrária de 0 em G. Pela continuidade da adição em $(0,0)$, existem duas vizinhanças U_1 e U_2 de 0 em G tais que

$$U_1 + U_2 \subset U.$$

Então $V = (U_1 \cap U_2) \cap (-(U_1 \cap U_2))$ é uma vizinhança simétrica de 0 em G tal que

$$V + V \subset U_1 + U_2 \subset U.$$

Afirmamos que a vizinhança fechada e simétrica $W = \overline{V}$ de 0 em G está contida em U. De fato, dado $x \in W$, como $x + V$ é uma vizinhança de x em G e $x \in \overline{V}$, existe $y \in (x+V) \cap V$. Consequentemente,

$$x = x - y + y \in \ -V + V = V + V \subset U,$$

concluindo assim a demonstração. □

Antes de enunciar o próximo resultado lembremos que um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de um conjunto X é uma **base de filtro** em X se $\emptyset \notin \mathcal{B}$ e para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B \supset C$.

Proposição 1.10. *Sejam G um grupo e $\mathcal{B}$ uma base de filtro em G satisfazendo as seguintes condições:*
$a)$ cada elemento de $\mathcal{B}$ é simétrico;
$b)$ para cada $U \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V + V \subset U$.
Então existe uma única topologia em G que o torna um grupo topológico e para a qual $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em G.

Demonstração. Como a unicidade é clara, provemos a existência.

Inicialmente, notemos que $0 \in U$ para qualquer $U \in \mathcal{B}$. Realmente, pelas condições $a)$ e $b)$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V - V \subset U$. Por outro lado, como existe um elemento $x \in V$, conclui-se que $0 = x - x \in V - V \subset U$.
Definamos

$$\mathcal{V}_0 = \{V \subset G : \ V \supset U \text{ para algum } U \in \mathcal{B}\}$$

e, para cada $x \in G$,

$$\mathcal{V}_x = \{x + V : \ V \in \mathcal{V}_0\}.$$

Note que

$$\mathcal{V}_x = \{W \subset G : \ W \supset x + V \text{ para algum } V \in \mathcal{B}\}.$$

É fácil ver que as seguintes propriedade são satisfeitas:

$a')$ para todo $W \in \mathcal{V}_x$ tem-se $x \in W$;

$b')$ se $W \in \mathcal{V}_x$ e $W' \supset W$, então $W' \in \mathcal{V}_x$;

$c')$ se $W, W' \in \mathcal{V}_x$, então $W \cap W' \in \mathcal{B}$;

$d')$ se $V \in \mathcal{V}_x$ existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que $V \in \mathcal{V}_y$ para todo $y \in W$.

Portanto, pela proposição 2, TG I.3 de [3], existe uma única topologia em G para a qual $\mathcal{V}_x$ é o conjunto de todas as vizinhanças de x, para cada $x \in G$. Em particular, $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em G.

Finalmente, munido da referida topologia, temos que G é um grupo topológico. Realmente,a continuidade da aplicação $x \in G \longmapsto -x \in G$ decorre de $a)$, e a continuidade da adição decorre da condição $b)$. □

Exemplo 1.11. *Seja $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos números inteiros e seja p um natural primo. Para cada inteiro $n \geq 1$, consideremos o subgrupo $V_n := p^n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. Como a base de filtro $\mathcal{B} = \{V_n : n = 1, 2, \cdots\}$ em $\mathbb{Z}$ satisfaz as condições da proposição 1.10, a referida proposição garante a existência de uma única topologia em $\mathbb{Z}$ que o torna um grupo topológico e para a qual $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $\mathbb{Z}$. Tal topologia é chamada de* ***topologia p-ádica*** *em $\mathbb{Z}$.*

Exemplo 1.12. *Sejam X um espaço topológico, G um grupo topológico e $C(X, G)$ o conjunto de todas as funções contínuas de X em G. Se, para $f, g \in C(X, G)$, definirmos*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo $x \in X$, então é fácil ver que $f + g \in C(X, G)$. Além disso, $C(X, G)$ é um grupo com respeito à operação que acabamos de definir, cujo elemento neutro é a função $x \in X \longmapsto 0 \in G$.

Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as vizinhanças simétricas de 0 em G. Para cada subconjunto compacto K de X e para cada $U \in \mathcal{U}$, ponhamos

$$V(K, U) = \{f \in C(X, G) : f(K) \subset U\}.$$

Para $K_1, K_2 \subset X$ compactos e U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$, temos que

$$V(K_1 \cup K_2, U_1 \cap U_2) \subset V(K_1, U_1) \cap V(K_2, U_2),$$

sendo $K_1 \cup K_2$ compacto e $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Logo,

$$\mathcal{B} = \{V(K, U) : \ K \subset X \text{ compacto, } U \in \mathcal{U}\}$$

é uma base de filtro em $C(X; G)$. É claro que cada conjunto $V(K, U)$ é simétrico. Além disso, *se $K \subset X$ é compacto, $U \in \mathcal{U}$ e tomarmos $U' \in \mathcal{U}$ com $U' + U' \subset U$, segue que*

$$V(K, U') + V(K, U') \subset V(K, U).$$

Portanto, podemos aplicar a proposição 1.10 para garantir a existência de uma única topologia em $C(X, G)$ que o torna um grupo topológico e para a qual $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $C(X; G)$. Tal topologia é dita a ***topologia compacto-aberta*** *em $C(X, G)$. No caso particular em que X é compacto,*

$$\mathcal{B} = \{V(X, U) : U \in \mathcal{U}\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 na topologia compacto-aberta em $C(X, G)$.

Exemplo 1.13. *Sejam X, G, $\mathcal{U}$ e $C(X, G)$ como no exemplo 1.12. Para cada $U \in \mathcal{U}$ ponhamos*

$$V(U) = \{f \in C(X, G) : f(X) \subset U\}.$$

Raciocinando como no exemplo 1.12 podemos garantir a existência de uma única topologia em $C(X, G)$ que o torna um grupo topológico e para a qual

$$\mathcal{B} = \{V(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

é um sistema de fundamental de vizinhanças de 0 em $C(X, G)$. Tal topologia é dita a ***topologia uniforme*** *em $C(X, G)$. No caso particular em que X é compacto, as topologias compacto-aberta e uniforme coincidem em $C(X, G)$.*

Proposição 1.14. *Para um grupo topológico G, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) G é um espaço topológico de Hausdorff;
(b) $\{0\}$ é fechado em G.

Demonstração. Como a implicação $(a) \Rightarrow (b)$ é evidente, provemos que $(b) \Rightarrow (a)$. Com efeito, seja $z \in G \setminus \{0\}$. Como, pela proposição 1.7d), o conjunto $\{z\}$ é fechado em G, o conjunto $U := G \setminus \{z\}$ é aberto em G, $0 \in U$ e $z \notin U$. Agora, sejam $x, y \in G$, com $x \neq y$. Como $x - y \in G \setminus \{0\}$, o que acabamos de mostrar garante a existência de uma vizinhança U de 0 em G tal que $x - y \notin U$. Pela continuidade da adição em $(0, 0)$ e pela proposição 1.9 existe uma vizinhança simétrica V de 0 em G tal que $V + V \subset U$. Finalmente, pela proposição 1.7a), $x + V$ $(resp.\ y + V)$ é uma vizinhança de x $(resp.\ y)$ em G. Além disso, $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$. Portanto, (a) está provado. $\square$

Exemplo 1.15. *O grupo aditivo $\mathbb{R}^n$, munido da topologia de Zariski ([6], p. 407), não é um grupo topológico. Com efeito, $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^n$, mas $\mathbb{R}^n$ não é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 1.16. *Seja $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de grupos topológicos. Então o grupo produto $G = \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, munido da topologia produto, é um grupo topológico.*

Demonstração. Provemos a continuidade da adição em G. Analogamente provar-se-ia a continuidade da aplicação $x \in G \longmapsto -x \in G$. Sejam $x = \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $y = \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dois elementos arbitrários de G e seja $F = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ um subconjunto finito de Λ. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ seja W_{λ_j} uma vizinhança de $x_{\lambda_j} + y_{\lambda_j}$ em G_{λ_j}. Pela continuidade da adição (em G_{λ_j}) no ponto $(x_{\lambda_j}, y_{\lambda_j})$, existem uma vizinhança U_{λ_j} de x_{λ_j} em G_{λ_j} e uma vizinhança V_{λ_j} de y_{λ_j} em G_{λ_j} de modo que

$$U_{\lambda_j} + V_{\lambda_j} \subset W_{\lambda_j} \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Logo,

$$U = \left(\prod_{j=1}^{n} U_{\lambda_j} \ \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus F} G_\lambda\right) \quad \text{e} \quad V = \left(\prod_{j=1}^{n} V_{\lambda_j} \ \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus F} G_\lambda\right)$$

são vizinhanças de x e y em G e vale

$$U + V \subset W = \left(\prod_{j=1}^{n} W_{\lambda_j} \ \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus F} G_\lambda\right).$$

Portanto, a adição é contínua em $(x, y) \in G \times G$. □

Exemplo 1.17. *Sejam X um conjunto não vazio e G um grupo topológico. Então o grupo $\mathcal{F}(X, G)$ de todas as funções de X em G é precisamente o grupo produto G^X. Pela proposição 1.16 $\mathcal{F}(X; G)$ é um grupo topológico. Neste caso, a topologia produto em $\mathcal{F}(X, G)$ é conhecida como a* ***topologia da convergência simples****.*

Proposição 1.18. *Sejam G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Então H é um grupo topológico com respeito à topologia induzida pela de G.*

Demonstração. Seja $\imath : H \to G$ a aplicação de inclusão; $\imath$ é contínua pois $\imath^{-1}(A) = A \cap H$ é aberto em H para todo aberto A em G. Usando esse fato e a continuidade das aplicações

$$(x, y) \in G \times G \longmapsto x + y \in G \quad \text{e} \quad x \in G \longmapsto -x \in G,$$

obtém-se a continuidade das aplicações

$$(x, y) \in H \times H \longmapsto x + y \in H \quad \text{e} \quad x \in H \longmapsto -x \in H.$$

Portanto, H é um grupo topológico. □

Exemplo 1.19. *Pela proposição 1.18, para cada inteiro $n \geq 1$ o subgrupo $\mathbb{Q}^n$ do grupo aditivo $\mathbb{R}^n$, munido da topologia induzida pela de $\mathbb{R}^n$, é um grupo topológico.*

Exemplo 1.20. *Pela proposição 1.18, para cada número irracional α o subgrupo $\alpha\mathbb{Z}$ do grupo aditivo $\mathbb{R}$, munido da topologia induzida pela de $\mathbb{R}$, é um grupo topológico.*

Concluímos este capítulo com algumas considerações básicas sobre a noção de grupo topológico quociente.

Definição 1.21. *Sejam G um grupo topológico, N um subgrupo de G e $\pi : x \in G \longmapsto x + N \in G/N$ a sobrejeção canônica. Considerando G/N como grupo quociente (através da operação $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$) temos que π é um homomorfismo de grupos. Um subconjunto B de G/N é dito* ***aberto*** *quando $\pi^{-1}(B)$ é aberto em G. É fácil constatar que todos os subconjuntos abertos de G/N formam uma topologia em G/N, dita a* ***topologia quociente*** *em G/N. E, por definição, $\pi : G \longrightarrow G/N$ é uma aplicação contínua.*

Nas condições acima, temos a seguinte

Proposição 1.22. $a)$ *π é aberta;*
$b)$ *G/N, munido da topologia quociente, é um grupo topológico, dito o* ***grupo topológico quociente*** *de G por N.*

Demonstração. $a)$: Se A é aberto em G, $\pi(A)$ é aberto em G/N pela proposição 1.7$c)$, visto que

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = A + N.$$

$b)$: Sejam $x, y \in G$ e B um aberto em G/N tal que $\pi(x) - \pi(y) = \pi(x - y) \in B$. Como $\pi^{-1}(B)$ é um aberto em G contendo $x - y$, existem abertos U e V em G, com $x \in U$ e $y \in V$, de modo que $U - V \subset \pi^{-1}(B)$. Como $\pi(-V) = -\pi(V)$, $\pi(U)$ é um aberto em G/N contendo $\pi(x)$, $\pi(V)$ é um aberto em G/N contendo $\pi(y)$ e

$$\pi(U) - \pi(V) = \pi(U - V) \subset \pi(\pi^{-1}(B)) = B,$$

temos a continuidade da aplicação

$$(\pi(w), \pi(z)) \in G/N \times G/N \longmapsto \pi(w) - \pi(z) \in G/N$$

em $(\pi(x), \pi(y))$. $\square$

Exemplo 1.23. *Consideremos o subgrupo*

$$N = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ f(0) = 0\}$$

do grupo aditivo $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Se munirmos $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ da topologia compacto-aberta (exemplo 1.12), podemos considerar o grupo topológico quociente $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})/N$.

Proposição 1.24. *Sejam G um grupo topológico de Hausdorff e N um subgrupo de G. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *o grupo topológico quociente G/N é de Hausdorff;*
(b) *N é fechado em G.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Como $\{0\}$ é fechado em G/H pela proposição 1.14, $\pi : G \longrightarrow G/N$ é contínua e $\pi^{-1}(\{0\}) = N$, então N é fechado em G.
$(b) \Rightarrow (a)$: Como, por hipótese, $G \setminus N$ é aberto em G, segue da proposição 1.22$a)$ que $\pi(G \setminus N)$ é aberto em G/N. Portanto,

$$G/N \setminus \pi(G \setminus N) = \pi(G \setminus (G \setminus N)) = \pi(N) = \{0\}$$

é fechado em G/N, e a proposição 1.14 garante que G/N é de Hausdorff. □

Proposição 1.25. *Sejam G e H grupos topológicos e $u : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então são equivalentes:*
(a) *u é contínuo em $0 \in G$;*
(b) *u é contínuo.*

Demonstração. Basta mostrar que $(a) \Rightarrow (b)$. Sejam $x \in G$ e V um vizinhança de 0 em H. Por hipótese, existe uma vizinhança U de 0 em G tal que $u(U) \subset V$, o que fornece $u(x + U) \subset u(x) + V$. Assim, acabamos de mostrar que u é contínuo em x. □

Exemplo 1.26. *Vamos mostrar que o grupo topológico quociente $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})/N$, considerado no exemplo 1.23, é de Hausdorff. De fato, seja $\varphi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ o homomorfismo de grupos definido por $\varphi(f) = f(0)$ para cada $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Afirmamos que φ é contínuo. Pela proposição 1.25 basta mostrar a continuidade de φ em $0 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Realmente, para todo $r > 0$, tem-se*

$$\varphi\left(\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ |f(0)| < r\}\right) \subset (-r, r),$$

sendo $\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ |f(0)| < r\}$ uma vizinhança de 0 na topologia compacto-aberta. Como $N = \varphi^{-1}(\{0\})$ e $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$, concluímos que N é fechado em $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Consequentemente, pela proposição 1.24, $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})/N$ é de Hausdorff.

Capítulo 2

Grupos Topológicos Metrizáveis

Neste capítulo abordaremos certos fatos fundamentais sobre grupos topológicos metrizáveis que serão utilizados no próximo capítulo.

Definição 2.1. *Um grupo topológico G é dito* **metrizável** *se existe um métrica d em G tal que a topologia de G coincide com a topologia definida por d em G. Neste caso, G é necessariamente um espaço de Hausdorff.*

Observação 2.2. *Sejam G um grupo topológico metrizável e N um subgrupo de G munido da topologia induzida pela de G. Então o grupo topológico N é metrizável.*

Exemplo 2.3. *Seja G um grupo munido da topologia discreta (exemplo 1.2). Então G é metrizável, pois a métrica d em G, dada por $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$, define a topologia de G.*

Exemplo 2.4. *Seja G um grupo, com no mínimo dois elementos, munido da topologia caótica (exemplo 1.3). Então G não é metrizável.*

Para que um espaço topológico X seja metrizável é necessário que cada ponto x de X admita um sistema fundamental enumerável de vizinhanças cuja interseção seja o conjunto $\{x\}$. No contexto dos grupos topológicos, essa condição necessária também é suficiente, como veremos a seguir.

Teorema 2.5. *Seja G um grupo topológico. Então uma condição necessária e suficiente para que G seja metrizável é que exista um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 em G cuja interseção seja $\{0\}$.*

Demonstração. Suponhamos G metrizável. Então existe uma métrica d em G tal que a topologia definida pela métrica d coincide com a topologia dada em G. Para cada inteiro $n \geq 1$, ponhamos

$$V_n := \{x \in G : d(x,0) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Então $\{V_n\}_{n\geq 1}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em G cuja interseção é $\{0\}$.

Reciprocamente, suponhamos que exista um sistema fundamental enumerável $\{V_n\}_{n\geq 1}$ de vizinhanças de 0 em G tal que $\bigcap_{n\geq 1} V_n = \{0\}$ o qual, sem perda de generalidade, podemos supor satisfazer $V_n \supset V_{n+1}$ para todo inteiro $n \geq 1$. Pela continuidade da adição em $(0,0)$, pela proposição 1.9 e por indução, podemos construir uma sequência $\{W_n\}_{n\geq 1}$ de vizinhanças simétricas de 0 em G tal que $W_1 \subset V_1$ e

$$W_{n+1} + W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n \subset V_n,$$

para todo $n \geq 1$. Daí resulta que $\{W_n\}_{n\geq 1}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em G. Definamos agora, a partir de $\{W_n\}_{n\geq 1}$, uma função $g : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y \text{ e } x - y \notin W_1; \\ \dfrac{1}{2^k}, & \text{se } x \neq y,\ x - y \in W_k \text{ e } x - y \notin W_m, \forall\, m > k. \end{cases}$$

É imediato, da definição de g, que:

- se $g(x,y) = 0$ então $x = y$;
- $0 \leq g(x,y) \leq 1$ para quaisquer $x, y \in G$;
- $g(x,y) = g(y,x)$ para quaisquer $x, y \in G$;
- $g(x,y) = g(x+z, y+z)$ para quaisquer $x, y, z \in G$.

Definamos agora $d : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$, para quaisquer $x, y \in G$, por

$$d(x,y) = inf \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) : z_i \in G,\ \text{com } p \in \mathbb{Z},\ p \geq 1, z_0 = x \text{ e } z_p = y \right\}.$$

Vamos mostrar que d é uma métrica. Por definição $d(x,y) = d(y,x)$ e

$$0 \leq d(x,y) \leq g(x,y)$$

para quaisquer x, y em G; em particular, se $x = y$, tem-se $d(x,y) = 0$. Afirmamos que

$$\frac{1}{2} g(x,y) \leq d(x,y) \tag{2.1}$$

para quaisquer $x, y \in G$. Para justificar a validade dessa desigualdade, vamos provar por indução sobre $p \geq 1$ que, para toda sequência finita $\{z_i\}_{0\leq i\leq p}$ de $p+1$ elementos de G tal que $z_0 = x$ e

$z_p = y$, tem-se

$$g(x,y) \leq 2\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}). \tag{2.2}$$

É claro que a desigualdade 2.2 é válida para $p = 1$. Seja $p \geq 2$ e admitamos que 2.2 seja verdadeira para $1 \leq \ell < p$. Seja $(z_i)_{0\leq i\leq p}$ uma sequência finita de elementos de G tal que $z_0 = x$ e $z_p = y$ e ponhamos

$$\alpha := \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}).$$

Se $\alpha = 0$, então $z_i = z_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq p$; logo, $x = y$ e 2.2 é válida. Por outro lado, se $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $2\alpha \geq 1$; logo, 2.2 é válida, pois $g(x,y) \leq 1$. Admitamos então $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Seja h o maior inteiro para o qual

$$\sum_{i=0}^{h-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Daí,

$$\frac{\alpha}{2} < \sum_{i=0}^{h} g(z_i, z_{i+1});$$

consequentemente,

$$\sum_{i=h+1}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Pela hipótese de indução, $g(x, z_h) \leq \alpha$ e $g(z_{h+1}, y) \leq \alpha$; e, obviamente, $g(z_h, z_{h+1}) \leq \alpha$. Seja k o menor inteiro para o qual $\frac{1}{2^k} \leq \alpha$ (notemos que $k \geq 2$). Pela definição de g temos que

$$x - y = (x - z_h) + (z_h - z_{h+1}) + (z_{h+1} - y) \in W_k + W_k + W_k \subset W_{k-1},$$

o que implica

$$g(x,y) \leq \frac{1}{2^{k-1}} = 2.2^{-k} \leq 2\alpha.$$

Assim, acabamos de mostrar a validade de 2.2, e daí obtemos a veracidade de 2.1. Consequentemente, se $d(x,y) = 0$, então $x = y$. A verificação da desigualdade triangular será feita por contradição. Suponha que existam $x, y, z \in G$ tais que

$$d(x,z) > d(x,y) + d(y,z).$$

Pela definição de ínfimo, existem sequências $(z_i)_{0\leq i\leq p_1}$ e $(z'_i)_{0\leq i\leq p_2}$, com $p_1, p_2 \geq 1$ e $z_0 = x$, $z_{p_1} = z'_0 = y$ e $z'_{p_2} = z$ tais que

$$d(x,z) > \sum_{i=0}^{p_1-1} g(z_i, z_{i+1}) + \sum_{i=0}^{p_2-1} g(z'_i, z'_{i+1}).$$

Com isso, podemos considerar a sequência finita $z''_0 = z_0 = x$, $z''_1 = z_1, \ldots, z''_{p_1} = z_{p_1} = z'_0 = y$, $z''_{p_1+1} = z'_1, \ldots, z''_{p_1+p_2} = z'_{p_2} = z$ de elementos de G tal que

$$d(x,z) > \sum_{i=0}^{p_1+p_2-1} g(z''_i, z''_{i+1}) \geq d(x,z).$$

Essa contradição garante a validade da desigualdade triangular e, consequentemente, d é uma métrica em G.

Finalmente, mostraremos que a topologia definida por d coincide com a topologia dada em G. Como $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ para quaisquer $x, y, z \in G$, é suficiente mostrar que as vizinhanças de 0 com respeito à ambas as topologias coincidem. Mas isso decorre dos seguintes fatos:

- para $r > 0$ arbitrário, a bola $\{x \in G;\ d(x,0) < r\}$ contém W_k para todo inteiro $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^k} < r$ (se $x \in W_k, d(x,0) \leq g(x,0) \leq \frac{1}{2^k} < r$);
- para todo inteiro $k \geq 1$, W_k contém a bola $\left\{x \in G;\ d(x,0) < \frac{1}{2^{k+1}}\right\}$ (se $d(x,0) < \frac{1}{2^{k+1}}$, $g(x,0) \leq 2d(x,0) < \frac{1}{2^k}$; logo, $x \in W_k$).

$\square$

Exemplo 2.6. *Consideremos o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos números inteiros munido da topologia p-ádica (exemplo1.11). Como $\{p^n\mathbb{Z}\}_{n\geq 1}$ é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 em $\mathbb{Z}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z} = \{0\}$, segue do teorema 2.5 que $\mathbb{Z}$ é metrizável. Poderíamos chegar à mesma conclusão se observássemos que a topologia p-ádica em $\mathbb{Z}$ é definida pelo valor absoluto p-ádico [4].*

Exemplo 2.7. *Sejam U um aberto em $\mathbb{C}$, $U \neq \emptyset$, e $C(U)$ o espaço vetorial complexo das funções contínuas de U em $\mathbb{C}$. Consideremos em $C(U)$ a topologia compacto-aberta, que torna o grupo aditivo subjacente a $C(U)$ um grupo topológico em vista do exemplo 1.12. Seja $\{K_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência exaustiva de subconjuntos compactos de U (isto significa que cada K_n é um subconjunto compacto de U e que todo compacto de U está contido em algum K_m). Então é fácil observar que*

$$V_{m,n} = \left\{ f \in C(U) : \sup_{x \in K_m} |f(x)| \leq \frac{1}{n} \right\},$$

para m, n variando no conjunto dos inteiros ≥ 1, constitui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 em $C(U)$ tal que

$$\bigcap_{m,n\geq 1} V_{m,n} = \{0\}.$$

Logo, pelo teorema 2.5, o grupo topológico $C(U)$ é metrizável.

Corolário 2.8. *Sejam G um grupo topológico metrizável e N um subgrupo fechado de G. Então o grupo topológico quociente G/N é metrizável.*

Demonstração. Pela necessidade do teorema 2.5, existe um sistema fundamental enumerável $\{U_n\}_{n\geq 1}$ de vizinhanças de 0 em G tal que $\bigcap_{n\geq 1} U_n = \{0\}$. Então $\{\pi(U_n)\}_{n\geq 1}$ é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 em G/N tal que

$$\bigcap_{n\geq 1} \pi(U_n) = \{0\}.$$

Portanto, pela suficiência do teorema 2.5, G/N é metrizável. □

Definição 2.9. $a)$ *Uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em um grupo topológico G **converge** para $x \in G$ $($resp. é de **Cauchy**$)$ se para toda vizinhança U de 0 em G existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n - x \in U$ para todo $n \geq n_0$ $($resp. $x_m - x_n \in U$ para quaisquer $m, n \geq n_0$ $)$.*
$b)$ *Um grupo topológico metrizável G é dito **completo** quando toda sequência de Cauchy em G for convergente.*

Nem todo grupo topológico metrizável é completo, como ocorre com o grupo (aditivo) topológico $\mathbb{Q}$ dos números racionais (exemplo 1.19).

Proposição 2.10. *Sejam G um grupo topológico metrizável e completo e N um subgrupo fechado de G. Então o grupo topológico quociente G/N é metrizável e completo.*

Demonstração. Pelo corolário 2.8, G/N é metrizável. Provemos então que G/N é completo. Com efeito, sejam $\pi : G \longrightarrow G/N$ a sobrejeção canônica e $\{U_n\}_{n\geq 1}$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças simétricas de 0 em G tal que $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ para todo inteiro $n \geq 1$. Ponhamos $V_n = \pi(U_n)$ para todo inteiro $n \geq 1$; então $\{V_n\}_{n\geq 1}$ é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças simétricas de 0 em G/N tal que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Seja $\{w_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em G/N. Então existem inteiros $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ tais que $w_{n_k} - w_{n_\ell} \in V_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ e $k, \ell \geq n$. Substituindo $\{w_n\}_{n\geq 1}$ por $\{w_{n_k}\}_{k\geq 1}$, podemos supor que $w_k - w_\ell \in V_n$ para $n = 1, 2, \ldots$ e $k, \ell \geq n$. E, como $Ker(\pi) = N$, segue que se $k, \ell \geq n$, $y \in w_k$ e $z \in w_\ell$, então $z - y \in N + U_n$. Realmente, escrevendo $w_n = \pi(t_n)$ para todo inteiro $n \geq 1$ e

$$z - y = (z - t_\ell) + (t_\ell - t_k) + (t_k - y),$$

basta observar que

$$z - t_\ell, t_k - y \in N \quad \text{e} \quad t_\ell - t_k \in N + U_n.$$

Consequentemente, para $k, \ell \geq n$ e $y \in w_k$, a interseção de w_ℓ com a vizinhança $y + U_n$ de y em

G é não vazia. Realmente, se $z \in w_\ell$, existem $h \in N$ e $u_n \in U_n$ tais que $z - y = h + u_n$; logo,

$$z - h = y + u_n \in y + U_n \quad \text{e} \quad z - h \in w_\ell,$$

pois $\pi(z - h) = \pi(z) = w_\ell$. Portanto, por indução sobre $n \geq 1$, podemos construir uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ em G tal que

$$w_n = \pi(x_n) \quad \text{e} \quad x_{n+1} \in x_n + U_n$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Daí resulta, por indução sobre $p \geq 1$, que

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= (x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) \\ &\in U_{n+p-1} + U_{n+p-2} + \cdots + U_{n+1} + U_n \subset U_{n-1} \ (n \geq 2). \end{aligned}$$

Logo, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em G. Como G é completo, existe $x \in G$ para o qual $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge. Finalmente, pela continuidade de π, $\{\pi(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge para $\pi(x)$. Assim, acabamos de mostrar que G é completo. $\square$

O próximo resultado pode ser encontrado em [5].

Teorema 2.11. *Sejam G, H grupos topológicos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos sobrejetor e contínuo tal que $\overline{f(U)}$ é uma vizinhança de 0 em H para toda vizinhança U de 0 em G. Se G é metrizável e completo e H é um espaço de Hausdorff, então f transforma vizinhanças de 0 em G em vizinhanças de 0 em H.*

Demonstração. Seja $\{U_n\}_{n\geq 1}$ um sistema fundamental de vizinhança fechadas e simétricas de 0 em G, cuja existência é garantida pelo teorema 2.5. Sem perda de generalidade podemos supor $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ para todo inteiro $n \geq 1$. Para cada inteiro $n \geq 1$, considere $W_n := \overline{f(U_n)}$ que, por hipótese, é uma vizinhança de 0 em H; e a inclusão $U_{n+1} \subset U_n$ implica $W_{n+1} \subset W_n$. Afirmamos que

$$\bigcap_{n\geq 1} W_n = \{0\}.$$

Como f é um homomorfismo, então $\{0\} \subset \bigcap_{n\geq 1} W_n$. Por outro lado, seja $w \in \bigcap_{n\geq 1} W_n$. Se V é vizinhança fechada e simétrica de 0 em H, então o conjunto $w + V$ é uma vizinhança de w em H, e daí existe $x_n \in U_n$ tal que $f(x_n) \in w + V$ para todo inteiro $n \geq 1$. Como $\{U_n\}_{n\geq 1}$ é decrescente, a sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge para 0 em G. Pela continuidade de f em 0, conclui-se que a sequência $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge para 0 em H. O fato de $w + V$ ser fechado implica que $0 \in w + V$. Logo, $-w \in V$; daí, pela simetria de V, segue que $w \in V$. Finalmente, como V é arbitrária, do fato de H ser de Hausdorff e da proposição 1.14 conclui-se que $w = 0$, o que termina a prova da afirmação.

Para mostrar o resultado basta mostrar que, para cada inteiro $k \geq 1$, tem-se $W_{k+1} \subset f(U_k)$. Fixe $k \geq 1$ e considere $a \in W_{k+1}$. Como $a + W_{k+2}$ é uma vizinhança de a em H, segue da igualdade $W_{k+1} = \overline{f(U_{k+1})}$ que existe $a_1 \in f(U_{k+1}) \cap (a + W_{k+2})$; seja $b_1 \in U_{k+1}$ tal que $f(b_1) = a_1$. Indutivamente, podemos garantir que para cada inteiro $n \geq 1$ existe $b_n \in U_{k+n}$ tal que

$$a_n := f(b_n) \in f(U_{k+n}) \cap (a + W_{k+n+1})$$

e

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i \in (a + W_{k+n+1}).$$

Para cada inteiro $p \geq 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{p} b_{n+i} = b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} \in U_{k+n+1} + \cdots + U_{k+n+p}.$$

Por outro lado, como $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ para todo inteiro $n \geq 1$, obtemos por recursão

$$U_{k+n+1} + U_{k+n+2} + \cdots + U_{k+n+p} \subset U_{k+n}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{p} b_{n+i} \in U_{k+n-1} \quad (n \geq 1). \tag{2.3}$$

Para cada $j \geq 1$, seja $\beta_j := \sum_{i=1}^{j} b_i$. Afirmamos que $\{\beta_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em G. Com efeito, tomemos V uma vizinhança arbitrária de 0 em G e consideremos um inteiro $j_0 \geq 1$ tal que $U_{j_0} \subset V$. Se $\ell > j > j_0$, então

$$\begin{aligned} \beta_\ell - \beta_j &= (\sum_{i=1}^{\ell} b_i) - (\sum_{i=1}^{j} b_i) \\ &= \sum_{i=j+1}^{\ell} b_i = \sum_{i=1}^{\ell-j} b_{j+i}. \end{aligned}$$

Por 2.3 concluímos que $\beta_\ell - \beta_j \in U_{n_0} \subset V$, provando que $\{\beta_j\}_{j\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em G. Como G é completo, existe $\beta \in G$ tal que

$$\beta = \lim_{j\to\infty} \beta_j.$$

Se tomarmos $n = 1$ em 2.3, vemos que $\beta_j \in U_k$ para todo $j \geq 1$; como U_k é fechado em G, $\beta \in U_k$. Por outro lado, pela continuidade de f em β,

$$f(\beta) = \lim_{j\to\infty} f(\beta_j).$$

Como f é um homomorfismo,

$$f(\beta) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} f(b_i) = \lim_{j\to\infty} s_j.$$

Para quaisquer inteiros j e ℓ tais que $\ell > j \geq 1$ temos

$$s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i \in a + W_{k+\ell+1} \subset a + W_{k+j+1}.$$

Como W_{k+j+1} é fechado em H, concluímos que

$$-a + f(\beta) \in W_{k+j+1}.$$

Pela arbitrariedade do inteiro $j \geq 1$, juntamente com a igualdade $\bigcap_{j\geq 1} W_{k+j+1} = \{0\}$, obtemos que $a = f(\beta) \in f(U_k)$. Assim, acabamos de provar que $W_{k+1} \subset f(U_k)$, concluindo a demonstração. $\square$

Lema 2.12. *Sejam G, H grupos topológicos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos sobrejetor. Se G é separável e H é um espaço de Baire, então $\overline{f(U)}$ é uma vizinhança de 0 em H para toda vizinhança U de 0 em G.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência em G tal que $\overline{\{x_n : n \geq 1\}} = G$ e seja U uma vizinhança arbitrária de 0 em G. Então existe uma vizinhança simétrica V de 0 em G tal que $V + V \subset U$. Afirmamos que

$$G = \bigcup_{n\geq 1} (x_n + V).$$

Realmente, se $x \in G$, $x+V$ é uma vizinhança de x em G. Logo, existe $m \geq 1$ tal que $x_m \in x+V$ e, consequentemente, $x \in x_m + V$. Portanto,

$$H = f(G) = f(\bigcup_{n\geq 1}(x_n + V)) = \bigcup_{n\geq 1} (f(x_n) + f(V)) = \bigcup_{n\geq 1}(f(x_n) + \overline{f(V)}).$$

Como H é um espaço de Baire, existe $n_0 \geq 1$ tal que $Int(f(x_{n_0}) + \overline{f(V)}) \neq \emptyset$, o que garante a existência de $z \in Int(\overline{f(V)})$. Por consequência,

$$0 = z - z \in Int(\overline{f(V)} + \overline{f(V)}) \subset Int(\overline{f(V) + f(V)}) \subset Int(\overline{f(U)}),$$

provando que $\overline{f(U)}$ é uma vizinhança de 0 em H. $\square$

Como consequência do teorema 2.11 e do lema 2.12, temos o seguinte resultado devido a Banach [1].

Teorema 2.13. *Sejam G, H grupos topológicos e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos sobrejetor e contínuo. Se G é metrizável, completo e separável e H é metrizável e completo, então f transforma vizinhanças de 0 em G em vizinhanças de 0 em H.*

Observação 2.14. *A separabilidade de G é essencial para a validade do teorema 2.13. Realmente, se G é o grupo aditivo dos números reais munido da topologia discreta, H é o grupo aditivo dos números reais munido da topologia usual e $f : G \longrightarrow H$ é dada por $f(x) = x$, então f é um homomorfismo de grupos bijetor e contínuo que não transforma vizinhanças de 0 em G em vizinhanças de 0 em H (notemos que G e H são metrizáveis e completos).*

Capítulo 3

Sequências Exatas e Morfismos Estritos

A partir deste momento qualquer grupo reduzido ao seu elemento neutro será representado por 0 e o núcleo (resp. a imagem) de um homomorfismo de grupos u será representado (resp. representada) por $Ker(u)$ (resp. $Im(u)$).

Inicialmente lembremos a seguinte

Definição 3.1. *[6] Uma sequência*

$$G_1 \xrightarrow{u_1} G_2 \xrightarrow{u_2} G_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_{m-1} \xrightarrow{u_{m-1}} G_m \quad (m \geq 3)$$

de homomorfismos de grupos é dita ***exata*** *quando*

$$Im(u_i) = Ker(u_{i+1})$$

para todo $i = 1, \cdots, m-1$.

É claro que para que a sequência $0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H$ (resp. $G \xrightarrow{u} H \longrightarrow 0$) seja exata, é necessário e suficiente que o homomorfismo de grupos u seja injetor (resp. sobrejetor).

Exemplo 3.2. *Sejam $u : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos, M um subgrupo de H e consideremos o subgrupo $N = u^{-1}(M)$ de G. Então as sequências*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "u"] & G/N \arrow[r] \arrow[d, "\overline{u}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] & H \arrow[r, "\pi'"] & H/M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de homomorfismos de grupos são exatas, onde i e i' são as injeções canônicas e π e π' são as sobrejeções canônicas. Além disso, o quadrado acima é comutativo, onde $\overline{u} : G/N \longrightarrow H/M$ é o homomorfismo de grupos definido por $\overline{u}(x + N) = u(x) + M$ para todo $x \in G$.

A noção a seguir será fundamental para nosso propósitos.

Definição 3.3. *[3] Sejam G e H dois grupos topológicos e $u : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos contínuo. Se considerarmos $Im(u)$ munido da topologia induzida pela de H, que o torna grupo topológico pela proposição 1.18, então o homomorfismo sobrejetor $u : G \longrightarrow Im(u)$ é contínuo. Pelo teorema do isomorfismo, existe um único isomorfismo de grupos $\mathring{u} : G/Ker(u) \longrightarrow Im(u)$ que torna o diagrama*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Im(u) \\ & G/Ker(u) \arrow[ur, "\mathring{u}"'] & \end{tikzcd}$$

*comutativo, onde π é a sobrejeção canônica. Além disso, se considerarmos o grupo topológico quociente $G/Ker(u)$, a continuidade de u e o fato de π ser aberta (proposição 1.22) garantem a continuidade de $\mathring{u}$. Diz-se que u é um **morfismo estrito** quando o homomorfismo de grupos $\mathring{u}^{-1} : Im(u) \to G/Ker(u)$ é contínuo.*

Exemplo 3.4. *Se G é um grupo topológico, H um grupo munido da topologia discreta e $u : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos contínuo, então u é um morfismo estrito.*

Exemplo 3.5. *Se G é um grupo topológico compacto, H um grupo topológico de Hausdorff e $u : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos contínuo, então u é um morfismo estrito.*

Proposição 3.6. *Se G e H são grupos topológicos e $u : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos contínuo, então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) u é um morfismo estrito;
(b) u transforma abertos em G em abertos em $Im(u)$;
(c) u transforma vizinhanças de 0 em G em vizinhanças de 0 em $Im(u)$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Mantidas as notações acima, temos $u = \mathring{u} \circ \pi$. Mas como tanto π quanto $\mathring{u}$ transformam abertos em abertos, segue que a condição (b) é válida.
$(b) \Rightarrow (c)$: Se V é uma vizinhança arbitrária de 0 em G, existe um aberto U em G tal que $0 \in U \subset V$. Por (b), $u(U)$ é aberto em $Im(u)$ (com $0 \in u(U) \subset u(V)$), e daí resulta que $u(V)$ é uma vizinhança de 0 em $Im(u)$.
$(c) \Rightarrow (a)$: Seja W uma vizinhança de 0 em $G/Ker(u)$; então existe uma vizinhança V de 0 em G tal que $W = \pi(V)$. Mas da igualdade $u = \mathring{u} \circ \pi$ vem $\mathring{u}^{-1} \circ u = \pi$, o que fornece

$$\mathring{u}^{-1}(u(V)) = \pi(V) = W.$$

Como, por hipótese, $u(V)$ é uma vizinhança de 0 em $Im(u)$, conclui-se que $\mathring{u}^{-1}$ é contínuo em 0; logo, pela proposição 1.25, $\mathring{u}^{-1}$ é contínuo. $\square$

Exemplo 3.7. *Sejam G e H grupos munidos da topologia caótica e $u : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então u é contínuo e transforma abertos em G em abertos em $Im(u)$; logo, u é um morfismo estrito.*

Para qualquer par de grupos topológicos G e H, $\mathcal{H}om(G, H)$ denotará o grupo abeliano de todos os homomorfismos de grupos contínuos de G em H. Dado $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e para qualquer grupo topológico D temos o homomorfismo de grupos $u^* : \mathcal{H}om(D, G) \longrightarrow \mathcal{H}om(D, H)$, definido por $u^*(\varphi) = u \circ \varphi$ para $\varphi \in \mathcal{H}om(D, G)$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] & H \\
D \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dashed, "u^*(\varphi)"] &
\end{tikzcd}$$

Para quaisquer grupos topológicos G, H e L, para quaisquer $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e $v \in \mathcal{H}om(H, L)$ e para qualquer grupo topológico D, tem-se a sequência

$$\mathcal{H}om(D, G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(D, H) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(D, L)$$

de homomorfismos de grupos. Graficamente, para $\varphi \in \mathcal{H}om(D, G)$ e $\psi \in \mathcal{H}om(D, H)$, temos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] & H \arrow[r, "v"] & L \\
D \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, dashed, "u^*(\varphi)"] & D \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, dashed, "v^*(\psi)"] &
\end{tikzcd}$$

Antes de enunciar o primeiro teorema deste capítulo vamos mencionar um exemplo importante no que está por vir.

Exemplo 3.8. *Sejam G o grupo aditivo dos números reais munido da topologia discreta, H o grupo aditivo dos números reais munido da topologia usual, $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ dado por $u(x) = x$ e $v \in \mathcal{H}om(H, H)$ dado por $v(x) = 0$. É claro que a sequência*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} H$$

de homomorfismo de grupos é exata e que u não é um morfismo estrito. Entretanto, a sequência

$$\mathcal{H}om(H,G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(H,H) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(H,H)$$

de homomorfismos de grupos não é exata. Realmente, como 1_H (a identidade em H) pertence a $Ker(v^*)$, no caso de exatidão da referida sequência teríamos a existência de $\varphi \in \mathcal{H}om(G,H)$ tal que

$$u^*(\varphi) = u \circ \varphi = 1_H,$$

o que implicaria $\varphi(x) = x$ para todo $x \in H$; mas a aplicação $x \in H \longmapsto x \in G$ não é contínua.

Teorema 3.9. *Sejam G, H e L três grupos topológicos, $u \in \mathcal{H}om(G,H)$ e $v \in \mathcal{H}om(H,L)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) u é um um morfismo estrito e

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos;
(b) para todo grupo topológico D,

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(D,G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(D,H) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(D,L)$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja D um grupo topológico arbitrário. Se $\varphi \in Ker(u^*)$, temos $u \circ \varphi = 0$, e a injetividade de u fornece $\varphi = 0$. Logo, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(D,G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(D,H)$$

é exata. Mostremos a exatidão da sequência

$$\mathcal{H}om(D,G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(D,H) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(D,L) \tag{3.1}$$

De fato, como $Im(u) \subset Ker(v)$, segue que $Im(u^*) \subset Ker(v^*)$. Por outro lado, se $\psi \in Ker(v^*)$, tem-se $v \circ \psi = 0$, e então $Im(\psi) \subset Ker(v) = Im(u)$. Consequentemente, existe um único homomorfismo de grupos $\varphi : D \longrightarrow G$ tal que $\psi = u \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "u"] & & H \\ D \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, "\psi=u\circ\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

Como ψ é contínuo e o isomorfismo de grupos $u(x) \in Im(u) \longmapsto x \in G$ é contínuo (pois u é um morfismo estrito), conclui-se a continuidade de φ. Com isso, $\varphi \in \mathcal{H}om(G, D)$; e, por construção, $\psi = u^*(\varphi) \in Im(u^*)$. Assim $Ker(v^*) \subset Im(u^*)$, e a igualdade $Im(u^*) = Ker(v^*)$ está estabelecida. Portanto a sequência 3.1 é exata, resultando assim a validade de (b).
$(b) \Rightarrow (a)$: Tomemos $D = Ker(u)$ munido da topologia induzida pela de G e $\varphi : Ker(u) \longrightarrow G$ a inclusão canônica. Como, por hipótese, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(Ker(u), G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(Ker(u), H)$$

é exata e como $\varphi \in Ker(u^*)$, segue que $\varphi = 0$, e daí resulta a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H.$$

Agora, tomando $D = G$, a exatidão da sequência

$$\mathcal{H}om(G, G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(G, H) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(G, L)$$

e a igualdade $(v^* \circ u^*)(1_G) = v \circ u$ implicam $v \circ u = 0$; consequentemente $Im(u) \subset Ker(v)$. Por outro lado, tomando $D = Ker(v)$ munido da topologia induzida pela de H e $\psi : Ker(v) \longrightarrow H$ a inclusão canônica, tem-se que $\psi \in Ker(v^*) = Im(u^*)$. Portanto, existe $\varphi \in \mathcal{H}om(Ker(v), G)$ tal que $\psi = u^*(\varphi) = u \circ \varphi$, o que implica $Ker(v) \subset Im(u)$. Logo, $Im(u) = Ker(v)$, o que prova a exatidão da sequência

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L.$$

Finalmente, mostremos que u é um morfismo estrito. Com efeito, tomando $D = Im(u)$ munido da topologia induzida pela de H e $\phi : Im(u) \longrightarrow H$ a inclusão canônica, tem-se que $\phi \in Ker(v^*) = Im(u^*)$. Logo, existe $\rho \in \mathcal{H}om(Im(u), G)$ tal que $\phi = u^*(\rho) = u \circ \rho$. Consequentemente,

$$u(x) = \phi(u(x)) = u(\rho(u(x)))$$

para todo $x \in G$, e a injetividade de u implica $\rho(u(x)) = x$ para todo $x \in G$. Assim, se considerarmos u como um isomorfismo de grupos contínuo de G em $Im(u)$, concluímos que $u : G \longrightarrow Im(u)$ é um isomorfismo de grupos topológicos, mostrando que u é um morfismo estrito. $\square$

A condição de u ser um morfismo estrito é essencial para a validade da implicação $(a) \Rightarrow (b)$ no teorema 3.9, como foi visto no exemplo 3.8.

Corolário 3.10. *Sejam G um grupo topológico metrizável, completo e separável, H um grupo topológico metrizável e completo, e L um grupo topológico arbitrário. Sejam $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e $v \in \mathcal{H}om(H, L)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) $Im(u)$ é fechado em H e a sequência

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L$$

de homomorfismos de grupos é exata;
(b) para todo grupo topológico D, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(D, G) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(D, H) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(D, L)$$

de homomorfismos de grupos é exata.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Como u é injetor, $u : G \longrightarrow Im(u)$ é um isomorfismo de grupos contínuo. Além disso, $Im(u)$ é metrizável e completo (pois $Im(u)$ é fechado em H). Logo, pelo teorema 2.13, u transforma vizinhanças de 0 em G em vizinhanças de 0 em $Im(u)$, e a proposição 3.6 nos permite concluir que u é um morfismo estrito. Consequentemente, pelo teorema 3.9, a condição (b) é válida.
$(b) \Rightarrow (a)$: Pelo teorema 3.9, a sequência

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L$$

é exata e u é um morfismo estrito. Portanto, como o grupo topológico $G/Ker(u)$ é metrizável e completo (proposição 2.10) segue, em particular, que $Im(u)$ é completo; logo, $Im(u)$ é fechado em H. $\square$

Para qualquer par de grupos G e H, $Hom_a(G, H)$ denotará o grupo abeliano de todos os homomorfismos de grupos de G em H. Dado $u \in Hom_a(G, H)$ e para qualquer grupo D temos o homomorfismo de grupos $u^{\times} : Hom_a(D, G) \longrightarrow Hom_a(D, H)$, definido por $u^{\times}(\varphi) = u \circ \varphi$ para todo $\varphi \in Hom_a(D, G)$.

Corolário 3.11. *Sejam G, H e L três grupos, $u \in Hom_a(G, H)$ e $v \in Hom_a(H, L)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) a sequência

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L$$

de homomorfismos de grupos é exata;
(b) *para todo grupo D, a sequência*

$$0 \longrightarrow Hom_a(D,G) \xrightarrow{u^\times} Hom_a(D,H) \xrightarrow{v^\times} Hom_a(D,L)$$

de homomorfismos de grupos é exata.

Demonstração. Denotemos cada grupo X munido da topologia caótica por X_c; então, para todo grupo topológico D, tem-se

$$Hom_a(D,X) = \mathcal{H}om(D,X_c).$$

Consideremos os grupos topológicos G_c, H_c e L_c; então $u \in \mathcal{H}om(G_c,H_c)$, $v \in \mathcal{H}om(H_c,L_c)$ e u é um morfismo estrito (exemplo 3.7).
$(a) \Rightarrow (b)$: Seja D um grupo arbitrário. Como, para todo grupo X, tem-se

$$Hom_a(D,X) = \mathcal{H}om(D_c,X_c),$$

a implicação $(a) \Rightarrow (b)$ do teorema 3.9 garante a validade da implicação $(a) \Rightarrow (b)$ do resultado em tela.
$(b) \Rightarrow (a)$: Seja D um grupo topológico arbitrário. Pelo que acabamos de observar e a hipótese, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(D,G_c) \xrightarrow{u^*} \mathcal{H}om(D,H_c) \xrightarrow{v^*} \mathcal{H}om(D,L_c)$$

é exata. Portanto, a implicação $(b) \Rightarrow (a)$ do teorema 3.9 garante a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L,$$

concluindo assim a demonstração. □

Seja R um anel com elemento unidade $1 \neq 0$. Para quaisquer R-módulos à esquerda unitários E e F, seja $\mathcal{L}_a(E,F)$ o grupo aditivo das aplicações R-lineares de E em F.

Corolário 3.12. *Sejam E, E' e E'' três R-módulos à esquerda unitários, $u \in \mathcal{L}_a(E',E)$ e $v \in \mathcal{L}_a(E,E'')$. Se a sequência*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

de aplicações R-lineares é exata, então a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_a(F,E') \xrightarrow{u^\times} \mathcal{L}_a(F,E) \xrightarrow{v^\times} \mathcal{L}_a(F,E'')$$

de homomorfismo de grupos é exata para todo R-módulo à esquerda unitário F.

Demonstração. Segue imediatamente do corolário 3.11. $\square$

Dado $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e para qualquer grupo topológico D temos o homomorfismo de grupos $u_* : \mathcal{H}om(H, D) \longrightarrow \mathcal{H}om(G, D)$, definido por $u_*(\varphi) = \varphi \circ u$ para $\varphi \in \mathcal{H}om(H, D)$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "u^*(\varphi)"'] & H \arrow[d, "\varphi"] \\
& D
\end{tikzcd}$$

Para quaisquer grupos topológicos G, H e L, para quaisquer $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e $v \in \mathcal{H}om(H, L)$ e para qualquer grupo topológico D, tem-se a sequência

$$\mathcal{H}om(L, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, D) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(G, D)$$

de homomorfismos de grupos. Graficamente, para $\varphi \in \mathcal{H}om(H, D)$ e $\psi \in \mathcal{H}om(G, D)$, temos

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "u_*(\varphi)"] & H \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "v_*(\psi)"] & L \arrow[d, "\psi"] \\
& D & D
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.13. *Sejam G, H e L três grupos topológicos, $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e $v \in \mathcal{H}om(H, L)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) *v é um morfismo estrito e*

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos;
(b) *para todo grupo topológico D,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, D) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(G, D)$$

é uma sequência exata de homomorfismos de grupos.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja D um grupo topológico arbitrário. A exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, D)$$

equivale à injetividade de v_*, a qual decorre da sobrejetividade de v. Mostremos a exatidão da sequência

$$\mathcal{H}om(L, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, D) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(G, D).$$

Com efeito, como $Im(u) \subset Ker(v)$, obtém-se $Im(v_*) \subset Ker(u_*)$. Por outro lado, se $\psi \in Ker(u_*)$, tem-se $\psi \circ u = 0$, o que implica

$$Ker(v) = Im(u) \subset Ker(\psi).$$

Ponhamos $\varphi(v(y)) = \psi(y)$ para $y \in H$; φ está bem definida e $\varphi \in Hom_a(L, D)$. Além disso, $\varphi \in \mathcal{H}om(L, D)$, em vista da proposição 3.6 e da continuidade de ψ. Finalmente,

$$\psi = \varphi \circ v = v_*(\varphi) \in Im(v_*),$$

e $Ker(u_*) \subset Im(v_*)$. Portanto, $Im(v_*) = Ker(u_*)$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Por hipótese, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, D) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(L, D)$$

é exata para qualquer grupo topológico D. Consequentemente, tomando $D = L/Im(v)$, a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L, L/Im(v)) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, L/Im(v))$$

implica a exatidão da sequência

$$H \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0$$

(ou seja, a sobrejetividade de v), já que a sobrejeção canônica $\pi : L \longrightarrow L/Im(v)$ pertence a $Ker(v_*) = 0$.

Provemos, agora, a exatidão da exatidão da sequência

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L.$$

De fato, tomando $D = L$ e sendo 1_L a identidade em L, obtemos

$$0 = (u_* \circ v_*)(1_L) = v \circ u,$$

o que fornece $Im(u) \subset Ker(v)$. Por outro lado, tomando $D = H/Im(u)$, temos que a sobrejeção canônica $\pi' : H \longrightarrow H/Im(u)$ pertence a $Ker(u_*) = Im(v_*)$. Então existe

$\psi \in \mathcal{H}om(L, H/Im(u))$ tal que $\pi' = v_*(\psi) = \psi \circ v$. Por consequência,

$$\pi'(y) = \psi(v(y)) = \psi(0) = 0$$

para todo $y \in Ker(v)$, isto é, $Ker(v) \subset Ker(\pi') = Im(u)$. Portanto, $Im(u) = Ker(v)$.

Finalmente,

$$\psi(v(y)) = \pi'(y) = y + Ker(v)$$

para todo $y \in H$, ou seja, ψ é a função inversa do isomorfismo de grupos contínuo

$$y + Ker(v) \in H/Ker(v) \longmapsto v(y) \in L.$$

Assim, acabamos de mostrar que v é um morfismo estrito, o que conclui a demonstração. $\square$

Assim como no teorema 3.9, onde a hipótese de que u fosse um morfismo estrito era essencial para a validade da implicação $(a) \Rightarrow (b)$, no teorema 3.13 a hipótese de v ser um morfismo estrito também é essencial para a validade da implicação $(a) \Rightarrow (b)$, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.14. *Sejam G o grupo aditivo dos números do reais munido da topologia discreta, H o grupo aditivo dos números do reais munido da topologia usual, $u \in \mathcal{H}om(G, G)$ dado por $u(x) = 0$ e $v \in \mathcal{H}om(G, H)$ dado por $v(x) = x$. É claro v não é um morfismo estrito e que a sequência*

$$G \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} H \longrightarrow 0$$

de homomorfismos de grupos é exata. Entretanto, a sequência

$$\mathcal{H}om(H, G) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(G, G) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(G, G)$$

de homomorfismos de grupos não é exata. Realmente, como 1_G pertence a $Ker(u_*)$, existiria $\varphi \in \mathcal{H}om(H, G)$ tal que

$$v_*(\varphi) = \varphi \circ v = 1_G,$$

o que implicaria $\varphi(x) = x$ para todo $x \in H$, contradizendo a continuidade de φ.

Exemplo 3.15. *Sejam E um espaço localmente convexo real de Hausdorff, E' o espaço vetorial real das formas lineares contínuas de E em $\mathbb{R}$ e observemos que $E' = \mathcal{H}om(E, \mathbb{R})$. De fato, como a inclusão $E' \subset \mathcal{H}om(E, \mathbb{R})$ é imediata, provemos a inclusão contrária. Se $\varphi \in \mathcal{H}om(E, \mathbb{R})$ e $x \in E$, tem-se indutivamente $\varphi(mx) = m\varphi(x)$ para todo inteiro $m \geq 1$, de onde se conclui que $\varphi(qx) = q\varphi(x)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Agora, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$, ambos arbitrários, e seja $(q_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{Q}$ convergindo para λ. Como $(q_n x)_{n\geq 1}$*

converge para λx, a continuidade de φ garante que $(\varphi(q_n x))_{n\geq 1}$ converge para $\varphi(\lambda x)$. Por outro lado, $(q_n\varphi(x))_{n\geq 1}$ converge para $\lambda\varphi(x)$; pela unicidade do limite em E, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Logo, $\varphi \in E'$, e a inclusão $\mathcal{H}om(E, \mathbb{R}) \subset E'$ está justificada. Seja M um subspaço vetorial fechado de E. Considerando espaço vetorial real E/M munido da topologia quociente, tem-se que E/M é um espaço localmente convexo real de Hausdorff; além disso, a injeção canônica $i : M \to E$ e a sobrejeção canônica $\pi : M \to E/M$ são aplicações lineares contínuas e π é um morfismo estrito (pois $M = Ker(\pi)$). Como a sequência

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/M \longrightarrow 0$$

é exata, o teorema 3.13, aplicado ao caso em que $D = \mathbb{R}$, implica que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(E/M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{H}om(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}om(M, \mathbb{R})$$

é exata. Mas, como π_* e i_* são de fato as respectivas aplicações transpostas π^t e i^t de π e i, o que vimos acima garante a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow (E/M)' \xrightarrow{\pi^t} E' \xrightarrow{i^t} M'.$$

Consequentemente $\pi^t : (E/M)' \longrightarrow Im(\pi^t) = Ker(i^t)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais reais, sendo

$$Ker(i^t) = \{\varphi \in E' : \varphi|_M = 0\} = M^\perp,$$

onde $M^\perp$ denota o ortogonal de M com respeito ao par dual canônico (E, E').

Cabe também mencionar que se munirmos $(E/M)'$ da topologia fraca $\sigma((E/M)', E/M)$ e $M^\perp$ da topologia induzida pela topologia fraca $\sigma(E', E)$, então mostra-se que $\pi^t : (E/M)' \longrightarrow M^\perp$ é um isomorfismo de espaços localmente convexos reais.

Corolário 3.16. *Sejam G um grupo topológico arbitrário, H um grupo topológico metrizável, completo e separável, e L um grupo topológico metrizável e completo. Sejam $u \in \mathcal{H}om(G, H)$ e $v \in \mathcal{H}om(H, L)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) *a sequência*

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0$$

de homomorfismos de grupos é exata;
(b) *para todo grupo topológico D, a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H, D) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(G, D)$$

de homomorfismos de grupos é exata.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Como a sequência

$$H \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0$$

é exata, v é sobrejetor. Além disso, o grupo topológico quociente $H/Ker(v)$, que é claramente separável, é metrizável e completo pela proposição 2.10. Portanto o isomorfismo de grupos contínuo

$$\mathring{v} : H/Ker(v) \longrightarrow L$$

tem inversa contínua em vista do teorema 2.13 e da proposição 1.25, o que significa dizer que v é um morfismo estrito. Podemos então usar a implicação $(a) \Rightarrow (b)$ do teorema 3.13 para garantir a validade da condição (b) em questão.
$(b) \Rightarrow (a)$: Segue imediatamente da implicação correspondente do teorema 3.13. □

Para qualquer par de grupos G e H, para qualquer $u \in Hom_a(G, H)$ e para qualquer grupo D, temos o homomorfismo de grupos $u_\times : Hom_a(H, D) \longrightarrow Hom_a(G, D)$ definido por $u_\times(\varphi) = \varphi \circ u$ para todo $\varphi \in Hom_a(H, D)$.

Corolário 3.17. *Sejam G, H e L três grupos , $u \in Hom_a(G, H)$ e $v \in Hom_a(H, L)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) *a sequência*

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0$$

de homomorfismos de grupos é exata;
(b) *para todo grupo D, a sequência*

$$0 \longrightarrow Hom_a(L, D) \xrightarrow{v_\times} Hom_a(H, D) \xrightarrow{u_\times} Hom_a(G, D)$$

de homomorfismos de grupos é exata.

Demonstração. Denotemos cada grupo X munido da topologia discreta por X_d; então, para todo grupo topológico D, tem-se

$$Hom_a(X, D) = \mathcal{H}om(X_d, D). \tag{3.2}$$

Consideremos os grupos topológicos G_d, H_d e L_d; então $u \in \mathcal{H}om(G_d, H_d)$, $v \in \mathcal{H}om(H_d, L_d)$ e v é um morfismo estrito.
$(a) \Rightarrow (b)$: Seja D um grupo arbitrário. Como, para todo grupo X, tem-se

$$Hom_a(X, D) = \mathcal{H}om(X_d, D_d),$$

a implicação $(a) \Rightarrow (b)$ do teorema 3.13 garante a validade da implicação $(a) \Rightarrow (b)$ do resultado em tela.

$(b) \Rightarrow (a)$: Seja D um grupo topológico arbitrário. Pela hipótese e 3.2 temos a exatidão da sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(L_d, D) \xrightarrow{v_*} \mathcal{H}om(H_d, D) \xrightarrow{u_*} \mathcal{H}om(G_d, D).$$

Logo, pelo teorema 3.13, temos a exatidão da sequência

$$G \xrightarrow{u} H \xrightarrow{v} L \longrightarrow 0,$$

ou seja, a validade de (a). □

Corolário 3.18. *Sejam E, E' e E'' três R-módulos à esquerda unitários, $u \in \mathcal{L}_a(E', E)$ e $v \in \mathcal{L}_a(E, E'')$. Se a sequência*

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \longrightarrow 0$$

de aplicações R-lineares é exata, então a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_a(E'', F) \xrightarrow{v_\times} \mathcal{L}_a(E, F) \xrightarrow{u_\times} \mathcal{L}_a(E', F)$$

de homomorfismos de grupos é exata para todo R-módulo à esquerda unitário F.

Demonstração. Segue imediatamente do corolário 3.17. □

Referências Bibliográficas

[1] S. Banach, Über metrische Gruppen, Studia Math. 3 (1931), 101-103.

[2] N. Bourbaki, Algebra I, Chapters 1-3, Springer-Verlag, 1974.

[3] N. Bourbaki, General Topology, Chapters 1-4, Second printing, Springer-Verlag, 1998.

[4] J. W. S. Cassels, Local Fields, London Mathematical Society Student Texts 3, Cambridge University Press, 1986.

[5] T. Husain, Introduction to Topological Groups, W. B Saunders Company, 1966.

[6] S. Lang, Algebra, Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer-Verlag, 2002.

[7] A. Robertson and W. Robertson, Topological Vector Spaces, Second edition, Cambridge University Press, 1973.