

O Teorema do Índice de Atiyah-Singer

Daniel da Silva Nunes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Rio de Janeiro
2017

N972t

Nunes, Daniel da Silva

O Teorema do Índice de Atiyah-Singer / Daniel da Silva

Nunes. – Rio de Janeiro, 2017.

92 f.

Orientador: Antonio Roberto da Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Teorema do Índice de Atiyah-Singer. 2. K-Teoria.
3. Operadores de Fredholm. 4. Operadores Pseudodiferenciais.
I. Silva, Antonio Roberto da, orient. II. Título.

O Teorema do Índice de Atiyah-Singer

Daniel da Silva Nunes

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Doutor Antonio Roberto da Silva (UFRJ) - Orientador

Prof. Doutor Nilson da Costa Bernardes Junior (UFRJ)

Prof. Doutor Rolci de Almeida Cipolatti (UFRJ)

Prof. Doutor Alex Farah Pereira (UFF)

Prof. Doutor Willian Versolati França (UFJF)

Rio de Janeiro

2017

Agradecimentos

Aos meus pais, Almir e Mirian, pelo apoio, incentivo, compreensão e amor incondicionais. À minha namorada Isa, que tanto suavizou essa jornada. Ao meu orientador, professor Antonio Roberto, que me apresentou os assuntos aqui tratados e que tanto me fascinaram. A ele, meu mais sincero respeito e admiração.

Resumo

Nessa dissertação apresentamos o Teorema do Índice de Atiyah-Singer em $\mathbb{R}^n$. No capítulo 1 introduzimos o conceito de índice, tratando de operadores de Fredholm em espaços de Hilbert separáveis, caracterizados pela Álgebra de Calkin. Em seguida apresentamos o Teorema de Kuiper, que afirma que duas famílias de operadores invertíveis num espaço de Hilbert separável de dimensão infinita indexadas num espaço topológico compacto X são sempre homotópicas. Na sequência estendemos o conceito de índice para famílias de operadores de Fredholm por meio do índice de fibrados, que é um invariante homotópico. Como exemplo de aplicação, destacamos os operadores de Wiener-Hopf. No capítulo 2, apresentamos os operadores pseudodiferenciais elípticos e seus símbolos. Ao considerar a extensão de um operador pseudodiferencial elíptico a um espaço de Sobolev, obtemos um operador de Fredholm. Assim, desenvolvemos um conceito de índice de um operador pseudodiferencial que depende apenas da classe de homotopia de seu símbolo. Em seguida examinamos um pouco mais a estrutura dos K-grupos, culminando no Teorema da Periodicidade de Bott. Por fim, estabelecemos uma relação estreita entre o índice de uma certa classe de operadores pseudodiferenciais elípticos em $\mathbb{R}^n$ e o elemento de seu K-grupo gerado pelo fibrado diferença do seu símbolo, chamado índice topológico. Esse resultado, relacionando o índice analítico ao índice topológico, é justamente o Teorema de Atiyah-Singer.

Palavras-chave: Operadores de Fredholm, índice, fibrados vetoriais, teorema de Kuiper, operadores pseudodiferenciais elípticos, teorema da periodicidade de Bott, teorema de Atiyah-Singer.

Abstract

In this dissertation we present the Atiyah-Singer Index Theorem in $\mathbb{R}^n$. In chapter 1 we introduce the concept of index, dealing with Fredholm operators in separable Hilbert spaces, characterized by the Calkin Algebra. Next we present the Theorem of Kuiper, which states that two families of invertible operators in a separable Hilbert space of infinite dimension indexed in a compact topological space X are always homotopic. In the sequence we extend the concept of index for families of Fredholm operators by means of the index bundle, which is a homotopic invariant. As an example of application, we highlight the Wiener-Hopf operators. In Chapter 2, we present the elliptic pseudodifferential operators and their symbol. When considering the extension of an elliptic pseudodifferential operator to a Sobolev space, we obtain a Fredholm operator. Thus, we develop an index concept of a pseudodifferential operator that depends only on the homotopy class of its symbol. We then examine the structure of K-groups a little more, culminating in the Bott Periodicity Theorem. Finally, we establish an intimate relationship between the index of a certain class of elliptic pseudodifferential operators in $\mathbb{R}^n$ and the element of its K-group generated by the difference bundle of its symbol, called its topological index. This result, relating the analytic index to the topological index, is precisely the Theorem of Atiyah-Singer.

Key words: Fredholm operators, index, vector bundles, theorem of Kuiper, elliptic pseudodifferential operators, Bott periodicity theorem, theorem of Atiyah-Singer.

Sumário

1	Preliminares	4
1.1	Operadores de Fredholm e a Álgebra de Calkin	4
1.2	O Teorema de Kuiper	18
1.3	Índice de Fibrados	24
1.4	Exemplos	45
2	Operadores Pseudodiferenciais e o Teorema de Atiyah-Singer	51
2.1	Operadores Diferenciais	51
2.2	Operadores Pseudodiferenciais	58
2.3	Operadores Elípticos	63
2.4	O Teorema da Periodicidade de Bott	69
2.5	O Teorema do Índice de Atiyah-Singer	78

Introdução

O objetivo da presente dissertação é apresentar o Teorema do Índice de Atiyah-Singer no caso particular do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Começamos introduzindo os operadores de Fredholm em um espaço de Hilbert separável H . $F : H \longrightarrow H$ é um operador de Fredholm (escreve-se $F \in \mathcal{F}$) se F for um operador linear contínuo tal que $\dim \text{Ker} F < \infty$ e $\dim \text{Coker} F < \infty$. Nessas condições, introduzimos o índice analítico de um operador de Fredholm como

$$\text{ind } F = \dim \text{Ker} F - \dim \text{Coker} F$$

Em seguida definimos os operadores compactos, cujo conjunto será denotado por $\mathcal{K}$. Temos, por definição, que $K \in \mathcal{K}$ se, e somente se, a imagem por K da bola unitária for relativamente compacta. Denotando por $\mathcal{B}$ o espaço dos operadores lineares invertíveis de H , temos o fato notável devido a Atkinson de que $\mathcal{F} = \pi^{-1}((\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times)$, onde $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}$ denota a projeção natural e $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ é o subgrupo dos elementos invertíveis do quociente. $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ é conhecido como a Álgebra de Calkin.

Algumas características sobre a topologia de $\mathcal{F}$ são demonstradas. Por exemplo, provamos que $\mathcal{F}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{B}$. Através do índice analítico, podemos estabelecer uma correspondência bijetora entre as componentes conexas de $\mathcal{F}$ e $\mathbb{Z}$.

Dando um passo adiante, passamos a considerar não mais operadores isoladamente, mas famílias de operadores. Por uma família de operadores de Fredholm indexada num espaço topológico compacto X entende-se uma aplicação contínua $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$. Nesse contexto passamos a considerar classes de homotopia de famílias de operadores de Fredholm. Um dos resultados relacionados mais interessantes é o Teorema de Kuiper, que diz que só há uma classe de homotopia de famílias de operadores lineares contínuos invertíveis indexadas num espaço topológico compacto X .

Buscando definir um novo conceito de índice aplicável a famílias de operadores de Fredholm, passamos a abordar a teoria de fibrados vetoriais, que culminará na K-teoria e na formação dos K-grupos $K(X)$. O processo que empregaremos, devido a Grothendieck, é de certa forma

análogo à construção dos inteiros a partir dos números naturais. No grupo $K(X)$, definiremos o índice de fibrados. No caso particular em que o espaço base X é um ponto, esse conceito de índice mostra-se equivalente ao anterior. O Teorema de Atiyah-Jänich nos mostrará que o índice de fibrados estabelece um isomorfismo entre o K-grupo de X e as famílias de operadores de Fredholm indexadas em X .

O objeto do Teorema de Atiyah-Singer são os operadores pseudodiferenciais elípticos. Um operador pseudodiferencial P atuando sobre u tem forma local dada por

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

para alguma amplitude p , onde $\widehat{u}$ denota a transformada de Fourier de u . P tem ordem $k \in \mathbb{Z}$ se o seu k-símbolo local

$$\sigma_k(P)(x, \xi) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{p(x, \lambda \xi)}{\lambda^k}$$

existir para todo x na vizinhança de definição local de P e para todo $\xi \neq 0$. O símbolo $\sigma_k(P)$, no contexto de operadores pseudodiferenciais entre fibrados vetoriais, terá a forma de uma matriz $n \times m$, onde n e m correspondem às dimensões dos fibrados. Diz-se que P é elíptico se $\sigma_k(P)(x, \xi)$ for isomorfismo entre as fibras em x para todo $x \in X$ e todo $\xi \neq 0$. Escreve-se $P \in Ell_k$.

Ao considerar as extensões de um operador pseudodiferencial elíptico aos espaços de Sobolev, recaímos no contexto Hilbertiano e podemos verificar que essas extensões se tratam de operadores de Fredholm. Nesse contexto, desenvolvemos um conceito de índice que dependerá apenas da classe de homotopia de $\sigma_k(P)$.

No caso euclidiano de $\mathbb{R}^n$, o símbolo de um operador pseudodiferencial elíptico pode ser visto como uma matriz invertível em $GL(n, \mathbb{C})$. Portanto, compreender a topologia de $GL(n, \mathbb{C})$ nos permitirá extrair informações do índice. O caminho para essa compreensão advém do Teorema da Periodicidade de Bott, o qual, num contexto mais concreto, nos diz que os grupos de homotopia de $GL(n, \mathbb{C})$ são, alternadamente, 0 e $\mathbb{Z}$.

Numa versão mais abstrata, o Teorema da Periodicidade de Bott estabelece um isomorfismo $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \rightarrow K(X)$, conhecido como isomorfismo periódico, onde X é um espaço localmente compacto (como é o caso de $\mathbb{R}^n$). A partir desse teorema, chegamos no resultado central desta dissertação - o Teorema do Índice de Atiyah-Singer. Tal resultado se restringe à classe dos operadores pseudodiferenciais elípticos de ordem 0 e cuja amplitude é a identidade fora de algum $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Temos, nesse caso, a fórmula

$$\text{ind } P = (-1)^n \alpha^n([\sigma(P)])$$

que relaciona o índice de P à classe do seu símbolo no respectivo K-grupo. Esse resultado notável tem o mérito de relacionar uma propriedade analítica a uma propriedade topológica.

No que segue, nosso objetivo é apresentar de forma mais detalhada as ideias aqui esboçadas.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos iniciais sobre operadores de Fredholm que serão utilizados ao longo do texto. Começamos introduzindo o índice analítico de um operador de Fredholm. Em seguida, dedicamos uma sessão ao teorema de Kuiper, que nos permite concluir a trivialidade dos grupos de homotopia de operadores invertíveis. Posteriormente, examinamos o caso de famílias contínuas de operadores de Fredholm indexadas num espaço topológico compacto com a introdução do índice de fibrados. Ao final, são apresentados exemplos relevantes que serão aproveitados no capítulo 2. São assumidos alguns resultados elementares sobre espaços de Banach, de Hilbert e aplicações lineares contínuas nesses espaços, como o Teorema da Aplicação Aberta. Alguns resultados elementares sobre séries de Fourier também são assumidos. Todos os espaços topológicos com que trabalharemos serão espaços de Hausdorff, de modo que não faremos mais ressalva quanto a essa propriedade.

1.1 Operadores de Fredholm e a Álgebra de Calkin

No que segue, H é espaço de Hilbert separável sobre $\mathbb{C}$ com norma $|\cdot|$ induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Como consequência, H tem base ortonormal enumerável.

Definição 1.1.1. *Seja $T : H \longrightarrow H$ operador linear. Definimos*

$$\|T\| := \sup\{|Tu| : |u| \leq 1\} \in [0, +\infty]$$

Observação 1.1.2. *Como consequência imediata da definição, temos que $|Tu| \leq \|T\| \cdot |u|$ $\forall u \in H$.*

Definição 1.1.3. *O conjunto dos operadores lineares T tais que $\|T\| < \infty$ será denotado por $\mathcal{B}(H)$, que possui estrutura de álgebra de Banach com norma $\|\cdot\|$ e as operações de soma e produto dadas por*

$$(i) \quad \begin{aligned} S + T : H &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto Su + Tu \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} ST : H &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto (S \circ T)u \end{aligned}$$

Observação 1.1.4. A condição $\|T\| < \infty$ é equivalente à continuidade de T . Assim, $\mathcal{B}(H)$ é a álgebra dos operadores lineares contínuos sobre H . Vale $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ para $S, T \in \mathcal{B}(H)$.

Quando não houver risco de confusão, denotaremos $\mathcal{B}$ no lugar de $\mathcal{B}(H)$.

Procedamos agora à definição da matéria prima deste capítulo.

Definição 1.1.5. $T \in \mathcal{B}$ é dito um operador de Fredholm sobre H se $\dim \text{Ker } T < \infty$ e $\dim \text{Coker } T < \infty$, onde

$$\text{Ker } T := \{u \in H : Tu = 0\} \text{ e } \text{Coker } T := H/\text{Im}(T).$$

Aqui, $\text{Im}(T) = \{Tu : u \in H\}$ é a imagem de T . Denotamos o conjunto dos operadores de Fredholm sobre H por $\mathcal{F}(H)$. Quando não houver risco de confusão, escreveremos $\mathcal{F}$.

Definição 1.1.6. Seja $T \in \mathcal{F}$. O índice de Fredholm de T é definido como

$$\text{ind } T := \dim \text{Ker } T - \dim \text{Coker } T \quad (1.1)$$

Proposição 1.1.7. Seja $T \in \mathcal{F}$. Então

- (i) $\text{Im}(T)$ é fechada;
- (ii) $\dim \text{Coker } T = \dim \text{Im}(T)^\perp$, onde $\text{Im}(T)^\perp$ denota o subespaço de H ortogonal a $\text{Im}(T)$ com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- (iii) se $S \in \mathcal{B}$, então $\dim \text{Coker } S < \infty \iff \dim (\text{Im } S)^\perp < \infty$.

Demonstração. Para (i), note que, como $T \in \mathcal{F}$, $\dim \text{Coker } T = n < \infty$. Sejam $u_1, \dots, u_n \in H$ tais que suas respectivas classes formem uma base para $H/\text{Im}(T)$ (isso também implica que os u_i são linearmente independentes). Seja A o subespaço de H gerado por esses vetores. Como A é subespaço de dimensão finita, segue que A é Banach. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} T' : H \oplus A &\longrightarrow H \\ (u, v) &\longmapsto Tu + v \end{aligned}$$

Como T é contínuo, segue que T' é contínuo. A partir da definição, vê-se que T' é também linear e sobrejetivo. Repare ainda que $H \oplus A$ é Hilbert (com o produto interno dado por $\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{H \oplus A} := \langle u_1, u_2 \rangle_H + \langle v_1, v_2 \rangle_{H|_A}$) pois é soma direta de dois espaços de Hilbert. Logo, segue do Teorema da Aplicação Aberta que T' é aplicação aberta.

Do fato de que um subespaço de um espaço de Banach é também Banach se e somente se for fechado, segue que $(H \oplus A) \setminus (H \oplus \{0\})$ é aberto pois $H \oplus \{0\}$ é Banach. Por outro lado, temos que $H \setminus \text{Im}(T) = T'((H \oplus A) \setminus (H \oplus \{0\}))$, sendo este último conjunto aberto pois T' é aberta. Isso mostra que $\text{Im}(T)$ é fechada.

Para (ii), como H é Hilbert separável e $\text{Im}(T)$ é fechado em H , segue que $\text{Im}(T)$ é Hilbert separável e, portanto, possui base ortonormal enumerável $w_1, w_2, \dots$. Seja $v_i := u_i - Pu_i$, onde os u_i ($i = 1, \dots, n$) são os vetores definidos em (i) e P é a projeção

$$\begin{aligned} P : H &\longrightarrow \text{Im}(T) \\ u &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, w_j \rangle w_j \end{aligned}$$

Então os v_i ($i = 1, \dots, n$) formam uma base de $\text{Im}(T)^\perp$. Com efeito, primeiramente note que $v_i \in \text{Im}(T)^\perp$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De fato, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle v_i, w_j \rangle &= \langle u_i - Pu_i, w_j \rangle = \langle u_i, w_j \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_i, w_k \rangle w_k, w_j \right\rangle \\ &= \langle u_i, w_j \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_i, w_k \rangle \langle w_k, w_j \rangle \\ &= \langle u_i, w_j \rangle - \langle u_i, w_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Além disso, os v_i são linearmente independentes. De fato, se $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ então

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i - Pu_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i Pu_i = 0,$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i Pu_i$$

Mas o membro da esquerda está em $H \setminus \text{Im}(T)$, enquanto o membro da direita é elemento de $\text{Im}(T)$. Isso implica que ambos são zero, e a independência linear dos u_i implica que todos os α_i são nulos. Portanto, os v_i são linearmente independentes.

Por fim, resta mostrar que os v_i geram $\text{Im}(T)^\perp$. Se houvesse algum $v \in \text{Im}(T)^\perp$ tal que $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ fosse linearmente independente (LI), então a classe de v em $H/\text{Im}(T)$ seria LI em relação às classes dos u_i (pois a classe de v_i é a mesma de u_i), que, portanto, não formariam uma base para $H/\text{Im}(T)$. Como isso contradiz a hipótese sobre os u_i segue que tal v não existe, e então $\{v_1, \dots, v_n\}$ gera $\text{Im}(T)^\perp$.

Segue que $\dim \text{Coker } T = n = \dim \text{Im}(T)^\perp$.

A parte (iii) é consequência do que foi dito durante a prova acima. Assim, para verificar se $T \in \mathcal{F}$ basta olharmos a dimensão do núcleo e do espaço ortogonal à imagem.

□

Proposição 1.1.8. *Sejam $F \in \mathcal{F}(H_1)$ e $G \in \mathcal{F}(H_2)$. Então $F \oplus G \in \mathcal{F}(H_1 \oplus H_2)$, onde $(F \oplus G)(u, v) := (Fu, Gv)$, e vale $\text{ind}(F \oplus G) = \text{ind } F + \text{ind } G$.*

Demonstração. Temos que $\text{Im}(F \oplus G) = \text{Im } F \oplus \text{Im } G$ e

$$\text{Ker}(F \oplus G) = \text{Ker } F \oplus \text{Ker } G \quad (1.2)$$

De um modo geral, temos o isomorfismo $(A/B) \oplus (C/D) \cong (A \oplus C)/(B \oplus D)$ dado por $(a + B, c + D) \mapsto (a, c) + (B \oplus D)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \text{Coker}(F \oplus G) &= \frac{H_1 \oplus H_2}{\text{Im}(F \oplus G)} = \frac{H_1 \oplus H_2}{\text{Im } F \oplus \text{Im } G} \cong \frac{H_1}{\text{Im } F} \oplus \frac{H_2}{\text{Im } G} \\ &= \text{Coker } F \oplus \text{Coker } G \end{aligned} \quad (1.3)$$

O resultado segue de (1.2) e (1.3).

□

Teorema 1.1.9. *Para cada $T \in \mathcal{B}$ existe um único $T^* \in \mathcal{B}$ tal que*

$$(i) \quad \langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in H$$

$$(ii) \quad \|T^*\| = \|T\|$$

$$(iii) \quad T \mapsto T^* \text{ é isometria antilinear.}$$

T^* é chamado de operador adjunto de T .

Demonstração. Para cada $v \in H$,

$$u \in H \longmapsto \langle Tu, v \rangle \in \mathbb{C}$$

é funcional linear contínuo sobre H com $|\langle Tu, v \rangle| \leq \|T\| \cdot |u| \cdot |v|$ por Cauchy-Schwarz e pela observação 1.1.2. Logo, o Teorema de Fréchet-Riesz garante que existe um único $z_v \in H$ tal que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, z_v \rangle \forall u \in H.$$

Definindo $T^*v := z_v$, temos que (i) se verifica e daí decorre que T^* é linear. Por outro lado,

$$|T^*v|^2 = \langle T^*v, T^*v \rangle = \langle TT^*v, v \rangle \leq |T(T^*v)| \cdot |v| \leq \|T\| \cdot |T^*v| \cdot |v|,$$

donde $|T^*v| \leq \|T\| \cdot |v|$, o que implica que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Assim, temos que $T^* \in \mathcal{B}$ e $\|T^*\| \leq \|T\|$. A unicidade de T^* decorre da unicidade de cada z_v .

Finalmente, aplicando o que acabamos de mostrar com T^* no lugar de T vemos que existe $T^{**} \in \mathcal{B}$ tal que

$$\langle T^{**}u, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle = \langle Tu, v \rangle \forall u, v \in H,$$

o que implica que $T^{**} = T$. Assim, obtemos também a desigualdade contrária $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$, provando (ii).

A prova de (iii) é consequência de (ii) e da antilinearidade. □

Definição 1.1.10. Se $T^* = T$, então T é dito *autoadjunto*.

Teorema 1.1.11. Seja $T \in \mathcal{F}$. Então

$$(i) \text{ Coker } T \cong \text{Ker } T^*$$

$$(ii) \text{ Im } T = (\text{Ker } T^*)^\perp$$

Demonstração. Para (i), note que $u \in (\text{Im } T)^\perp$ se e somente se $0 = \langle u, w \rangle = \langle u, Tv \rangle = \langle T^*u, v \rangle$ para todo $w \in \text{Im } T$ com $w = Tv$. Ou seja, para todo $v \in H$, e em particular para $v = T^*u$, donde $u \in \text{Ker } T^*$. Assim, $(\text{Im } T)^\perp = \text{Ker } T^*$. Usando a proposição 1.1.7, segue que $\text{Coker } T \cong (\text{Im } T)^\perp = \text{Ker } T^*$.

Para (ii), tomando novamente o complemento ortogonal, vem que $(\text{Ker } T^*)^\perp = (\text{Im } T)^{\perp\perp} = \text{Im } T$, onde a última igualdade se justifica pois T é fechado (proposição 1.1.7). □

Proposição 1.1.12. Seja $T \in \mathcal{F}$. Então

$$(i) \operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker} T$$

$$(ii) \operatorname{Im} T^*T = \operatorname{Im} T^*$$

Demonstração. Certamente temos que $\operatorname{Ker} T^*T \supset \operatorname{Ker} T$. Para a inclusão contrária, tome $u \in \operatorname{Ker} T^*T$. Vale

$$\langle T^*Tu, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle = 0 \quad \text{para todo } v \in H,$$

donde $\langle Tu, Tu \rangle = 0$ e $u \in \operatorname{Ker} T$, provando (i).

Para (ii), temos claramente que $\operatorname{Im} T^*T \subset \operatorname{Im} T^*$. Para a inclusão contrária, considere a decomposição $v = v' + v''$, onde $v' \in \operatorname{Im} T$ e $v'' \in (\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*$ (pelo teorema 1.1.11). Assim, $T^*v = T^*v' = T^*Tw$ para algum $w \in H$, donde $\operatorname{Im} T^*T \supset \operatorname{Im} T^*$. $\square$

A seguir introduziremos o conceito de operador compacto, que representa um papel chave na teoria de operadores de Fredholm. Mais adiante faremos uma caracterização dos operadores de Fredholm tendo por base os operadores compactos.

Definição 1.1.13. Um operador $T \in \mathcal{B}$ é dito compacto se $\overline{T(B)}$ for um subconjunto compacto de H , onde $B = \{u \in H : |u| < 1\}$ é a bola aberta unitária. Equivalentemente, T é compacto se $\overline{T(A)}$ for compacto para todo $A \subset H$ limitado. Denotamos o conjunto dos operadores compactos sobre H por $\mathcal{K}(H)$. Quando não houver risco de confusão, escreveremos simplesmente $\mathcal{K}$.

Observação 1.1.14. Como um conjunto é compacto num espaço de Hilbert se e somente se for sequencialmente compacto, um operador T é compacto se a imagem por T de uma sequência limitada tem subsequência convergente.

Observação 1.1.15. Como consequência da definição, se $T \in \mathcal{B}$ tem posto finito, então $\overline{T(B)}$ é fechado e limitado em $\operatorname{Im} T$, que tem dimensão finita. Assim, por Bolzano-Weierstrass, segue que $\overline{T(B)}$ é compacto, donde $T \in \mathcal{K}$.

Ainda que os operadores de posto finito não sejam o único exemplo de operadores compactos, eles desempenham um papel crucial na descrição de $\mathcal{K}$, como pode ser visto no teorema a seguir.

Teorema 1.1.16. Temos os seguintes fatos sobre operadores compactos:

$$(i) \mathcal{K} \text{ é ideal bilateral de } \mathcal{B};$$

$$(ii) \mathcal{K} \text{ é fechado em } \mathcal{B};$$

$$(iii) \mathcal{K} \text{ é o fecho do subconjunto dos operadores de posto finito};$$

(iv) $\mathcal{K}$ é invariante por $*$, ou seja, $T \in \mathcal{K} \Rightarrow T^* \in \mathcal{K}$.

Demonstração. (i) Se $T \in \mathcal{K}$ e $S \in \mathcal{B}$, então como $S(B)$ é limitado pois S é contínuo, segue da definição 1.1.13 que $TS \in \mathcal{K}$. Por outro lado, como $\overline{T(B)} \supset T(B)$ temos que $S(\overline{T(B)}) = \overline{S(T(B))} \supset \overline{S(T(B))}$. Como o primeiro conjunto é compacto em função da compacidade de $\overline{T(B)}$ e o último é fechado, segue que é também compacto, e então $ST \in \mathcal{K}$.

É claro que se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{K}$, então $\alpha T \in \mathcal{K}$. Por fim, se T e $T' \in \mathcal{K}$, precisamos mostrar que $T + T' \in \mathcal{K}$. Faremos isso usando o critério da observação 1.1.14. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência limitada em H . Pelo critério sequencial, e tomando até dois refinamentos, obtemos uma subsequência $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $(Tu_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ e $(T'u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ são ambas convergentes, donde $((T + T')u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ também converge. Isso mostra que $T + T' \in \mathcal{K}$.

(ii) Seja $T \in \overline{\mathcal{K}}$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Então existe $S \in \mathcal{K}$ tal que $\|T - S\| < \epsilon/3$. Além disso, pela compacidade, podemos encontrar uma cobertura finita de $\overline{S(B)}$ por bolas abertas de raio $\epsilon/3$ e centros $Sv_1, \dots, Sv_n$ com $v_1, \dots, v_n \in B$. Então as bolas de centro $Tv_1, \dots, Tv_n$ e raio $\epsilon/3$ formam uma cobertura finita de $T(B)$. De fato, se $v \in B$, então existe v_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que $|Sv - Sv_i| < \epsilon/3$, donde

$$|Tv - Tv_i| \leq |Tv - Sv| + |Sv - Sv_i| + |Sv_i - Tv_i| < \epsilon$$

Assim, mostramos que é possível cobrir $\overline{T(B)}$ por uma quantidade finita de bolas de raio ϵ . A partir daí, o resultado segue usando-se o fato de que um espaço métrico é compacto se e somente se for completo e totalmente limitado (isto é, se existe uma cobertura finita de X por bolas de raio ϵ). Ver, por exemplo, [15] p. 275.

(iii) Seja $e_0, e_1, e_2, \dots$ uma base ortonormal em H e seja

$$P_n : H \longrightarrow [e_0, \dots, e_{n-1}]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e_j \longmapsto \alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$$

a projeção ortogonal no espaço gerado por $e_0, \dots, e_{n-1}$. Então, se $T \in \mathcal{K}$, $P_n T$ é operador de posto finito que converge ponto a ponto para T quando $n \rightarrow \infty$. Mostremos que a convergência também acontece na norma de $\mathcal{B}$.

Seja $\epsilon > 0$ e considere uma cobertura finita de $\overline{T(B)}$ por bolas abertas de raio $\epsilon/3$ com centros em $Tv_1, \dots, Tv_m$, e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (possível pela convergência pontual) tal que

$$|Tv_i - P_n Tv_i| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

Logo, se $v \in B$, temos que

$$|Tv - P_nTv| \leq |Tv - Tv_i| + |Tv_i - P_nTv_i| + |P_nTv_i - P_nTv| < \epsilon$$

para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, em que no último termo usou-se o fato de que $\|P_n\| = 1$ e a observação 1.1.2.

(iv) Primeiramente, operadores de posto finito têm adjunto de posto finito. Com efeito, se T tem posto finito, então pode ser expresso como

$$T = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, u_i \rangle v_i,$$

donde

$$T^* = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, v_i \rangle u_i,$$

que também tem posto finito. No caso geral, se $S \in \mathcal{K}$, então $S = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$, onde os T_n são operadores de posto finito. Pelo teorema 1.1.9, $\|T_n^* - S^*\| = \|(T_n - S)^*\| = \|T_n - S\|$, e então $S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*$. Por (ii), segue que $S^* \in \mathcal{K}$.

□

Abaixo trazemos um resultado devido a Riesz e que nos permite produzir operadores de Fredholm a partir de operadores compactos. Antes introduzimos um lema utilizado na demonstração.

Lema 1.1.17. *Sejam $P, R \in \mathcal{B}$ tais que P é invertível e R tem posto finito. Então $(Id + R)$ e $P(Id + R)$ são operadores de Fredholm de índice zero.*

Demonstração. Primeiramente, se $\dim \operatorname{Im} R < \infty$,

$$u \in \operatorname{Ker}(Id + R) \implies u + Ru = 0 \implies Ru = -u \implies R(-u) = u$$

Logo, $u \in \operatorname{Im} R$. Isso implica que $\dim \operatorname{Ker}(Id + R) < \infty$.

Por outro lado, seja $u \in \operatorname{Im}(Id + R)^\perp$. Então

$$\begin{aligned}
\langle v + Rv, u \rangle &= 0 \quad \forall v \in H \\
\implies \langle v, u \rangle + \langle Rv, u \rangle &= 0 \\
\implies \langle v, u \rangle + \langle v, R^*u \rangle &= 0 \\
\implies \langle v, u + R^*u \rangle &= 0 \quad \forall v \in H
\end{aligned}$$

Em particular, vale para $v = u + R^*u \implies u + R^*u = 0 \implies u = R^*(-u) \in \text{Im } R^*$, que também tem dimensão finita. Logo, $\dim(\text{Im}(Id + R))^\perp < \infty$, e pela proposição 1.1.7 vem que $Id + R \in \mathcal{F}$.

Seja $L := \text{Im } R + (\text{Ker } R)^\perp$. Como R tem posto finito, temos que $\dim L < \infty$. Então $H = L \oplus L^\perp$ e temos que $(Id + R)L \subset L + RL \subset L$ e $(Id + R)|_{L^\perp} = Id|_{L^\perp}$. Assim, L e $L^\perp$ são invariantes por $Id + R = (Id + R)|_L \oplus (Id + R)|_{L^\perp}$. Como $(Id + R)|_L$ é um operador com domínio e imagem de dimensão finita, segue do teorema do posto e da imagem que $\text{ind}((Id + R)|_L) = 0$. Como a identidade tem índice zero, também vale $\text{ind}(Id + R)|_{L^\perp} = 0$. Assim, segue que $\text{ind}(Id + R) = 0$ pela proposição 1.1.8.

Para $P(Id + R)$, como P é isomorfismo, $\text{Ker } P(Id + R) = \text{Ker } (Id + R)$. Tome agora $u \in (\text{Im } (P(Id + R)))^\perp$. Então

$$\begin{aligned}
\langle P(Id + R)v, u \rangle &= 0 \quad \forall v \in H \\
\implies \langle v, (Id + R^*)P^*u \rangle &= 0 \\
\implies \langle v, P^*u + R^*P^*u \rangle &= 0 \quad \forall v \in H
\end{aligned}$$

Em particular, vale para $v = P^*u + R^*P^*u$, donde $P^*u + R^*P^*u = 0$. Isso implica que $P^*u \in \text{Im } R^*$. Como P^* é isomorfismo, segue que $\dim(\text{Im } P(Id + R))^\perp \leq \dim \text{Im } R^* < \infty$. Isso mostra que $P(Id + R) \in \mathcal{F}$.

Por fim, considere $P^*|_{(\text{Im } P(Id + R))^\perp} : (\text{Im } P(Id + R))^\perp \longrightarrow \text{Ker } (Id + R)^*$. Então $P^*|_{(\text{Im } P(Id + R))^\perp}$ é isomorfismo. De fato, basta mostrar que a imagem está realmente em $\text{Ker } (Id + R)^*$ e que a aplicação é sobrejetiva.

Mas se $u \in (\text{Im } P(Id + R))^\perp$, então $\langle P(Id + R)v, u \rangle = 0 \quad \forall v \in H \implies \langle v, (Id + R)^*P^*u \rangle = 0 \quad \forall v \in H \implies (Id + R)^*P^*u = 0 \implies P^*u \in \text{Ker } (Id + R)^*$.

Resta apenas provar a sobrejetividade. Mas isso é consequência do fato de que P^* é isomorfismo. Se $w \in \text{Ker } R^*$, então existe $u \in H$ tal que $P^*u = w$. A partir daí, basta percorrer o parágrafo acima no sentido contrário para concluir que $u \in (\text{Im } P(Id + R))^\perp$.

Assim, $(\text{Im } P(Id + R))^\perp \cong \text{Ker } (Id + R)^* = (\text{Im } (Id + R))^\perp$, em que a última igualdade

decorre do teorema 1.1.11. Como já havíamos provado que $\text{Ker } P(\text{Id} + R) = \text{Ker } (\text{Id} + R)$, segue que $\text{ind}(P(\text{Id} + R)) = \text{ind}(\text{Id} + R) = 0$.

□

Teorema 1.1.18. *Seja $K \in \mathcal{K}$. Então $\text{Id} + K$ é operador de Fredholm de índice zero.*

Demonstração. Seja $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de operadores de posto finito convergindo para K (veja o teorema 1.1.16 (iii)). Tome n tal que $\|K - K_n\| < 1$. Então $\text{Id} + K - K_n$ é invertível. Com efeito, seja $Q := K_n - K$ e considere $\sum_{k=0}^{\infty} Q^k$. Como $\|Q\| < 1$ e

$$\left\| \sum_{k=m}^p Q^k \right\| \leq \sum_{k=m}^p \|Q\|^k,$$

$\sum_{k=0}^{\infty} Q^k$ é de Cauchy. Como $\mathcal{B}$ é Banach, segue que a série converge. Assim,

$$(\text{Id} - Q) \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k \right) (\text{Id} - Q) = \text{Id}$$

Assim, $\text{Id} + K - K_n = \text{Id} - Q$, é invertível. Podemos escrever

$$\text{Id} + K = (\text{Id} + K - K_n)(\text{Id} + (\text{Id} + K - K_n)^{-1}K_n)$$

O fator da esquerda é invertível. O da direita é a soma da identidade com um operador de posto finito. Assim, segue do lema 1.1.17 que $\text{Id} + K \in \mathcal{F}$ e $\text{ind}(\text{Id} + K) = 0$. □

Definição 1.1.19. *Definimos a Álgebra de Calkin como o espaço quociente $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ dotado da norma*

$$\|\pi(T)\| := \inf\{\|T - K\| : K \in \mathcal{K}\} = \inf\{\|R\| : R \in \pi(T)\},$$

onde $\pi : T \in \mathcal{B} \mapsto T + \mathcal{K} \in \mathcal{B}/\mathcal{K}$ é a aplicação quociente. Com essa estrutura, como $\mathcal{K}$ é ideal bilateral fechado, $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ é álgebra de Banach.

A álgebra de Calkin nos permite fazer uma caracterização interessante dos operadores de Fredholm como elementos invertíveis módulo operadores compactos. Esse é o conteúdo do resultado abaixo, devido a F. V. Atkinson.

Teorema 1.1.20. *Seja $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ o grupo de elementos invertíveis em $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ e $\pi : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}/\mathcal{K}$ a aplicação quociente. Então*

$$\mathcal{F} = \pi^{-1}((\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times)$$

Em outras palavras, $T \in \mathcal{F}$ se, e somente se, existem $S \in \mathcal{B}$ e $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tais que

$$ST = Id + K_1 \quad e \quad TS = Id + K_2$$

Tal S é dita uma parametriz de T .

Demonstração. Seja $F \in \mathcal{F}$. Queremos provar que $\pi(F)$ é invertível. Para isso, considere o operador $F^*F + P$, onde $P : H \rightarrow \text{Ker } F$ é a projeção ortogonal. Como consequência da proposição 1.1.12, $\text{Ker } F^*F = \text{Ker } F$ e $\text{Im } F^*F = \text{Im } F^* = (\text{Ker } F)^\perp$, em que na última igualdade usou-se também o teorema 1.1.11. Isso implica que $F^*F + P$ é bijetora e, portanto, invertível em $\mathcal{B}$.

Com efeito, $(F^*F + P)u = 0 \implies F^*Fu = P(-u)$. Mas o membro da esquerda está em $(\text{Ker } F)^\perp$ ao passo que o da direita está em $\text{Ker } F$. Isso implica que $u = 0$. Para a sobrejetividade, como $H = \text{Ker } F \oplus (\text{Ker } F)^\perp$, um elemento $h \in H$ pode ser escrito como $h = u + v$, com $u \in \text{Ker } F$ e $v \in (\text{Ker } F)^\perp = \text{Im } F^*F$. Logo, existe $w \in H$ tal que $F^*Fw = v$. Pondo $h' = u + w$ temos que $(F^*F + P)h' = h$.

Como $P \in \mathcal{K}$ por ter posto finito, segue que $\pi(F^*)\pi(F) = \pi(F^*F) = \pi(F^*F + P)$ é invertível em $\mathcal{B}/\mathcal{K}$.

De forma análoga, usando a projeção $Q : H \rightarrow \text{Ker } F^*$ e $FF^* + Q \in \mathcal{B}$, prova-se que $\pi(F)\pi(F^*)$ é invertível em $\mathcal{B}/\mathcal{K}$. Com uma inversa à esquerda para $\pi(F^*)\pi(F)$ e uma inversa à direita para $\pi(F)\pi(F^*)$, segue que $\pi(F) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$.

Para provar a inclusão contrária, seja $T \in \mathcal{B}$ com $\pi(T) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$. Então existe $S \in \mathcal{B}$ tal que TS e ST estão na mesma classe de Id . Ou seja, existem $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tais que $ST = Id + K_1$ e $TS = Id + K_2$. Mas então ambos são operadores de Fredholm (teorema 1.1.18). Em particular, $\text{Ker } ST$ e $\text{Coker } TS$ têm dimensão finita. Como $\text{Ker } T \subset \text{Ker } ST$ e $\text{Im } T \supset \text{Im } TS$, donde $(\text{Im } T)^\perp \subset (\text{Im } TS)^\perp$, segue da proposição 1.1.7 que $T \in \mathcal{F}$.

□

Corolário 1.1.21. Se $F \in \mathcal{F}$ e $K \in \mathcal{K}$, então F^* e $F + K$ também são operadores de Fredholm.

Recordemos que uma sequência de homomorfismos de grupos (ou de espaços vetoriais, como no lema a seguir)

$$\cdots \longrightarrow G_{p+1} \xrightarrow{f_{p+1}} G_p \xrightarrow{f_p} G_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

é dita exata quando $\text{Ker } f_p = \text{Im } f_{p+1}$ para todo p .

Lema 1.1.22. Seja

$$V_0 = 0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} 0 = V_n$$

sequência exata com $\dim V_i < \infty$ para todo $j = 0, \dots, n$. Então

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \dim V_j = 0$$

Demonstração. Para cada j , decompomos $V_j = N_j \oplus Y_j$, onde $N_j = \text{Ker } T_j$ e Y_j é algum complemento de N_j . Como a sequência é exata, segue que $T_j|_{Y_j} : Y_j \rightarrow N_{j+1}$ é isomorfismo para cada j . Assim, $\dim V_j = \dim N_{j+1}$, o que significa que, para $j \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\dim V_j = \dim N_j + \dim Y_j = \dim N_j + \dim N_{j+1}$$

Temos também que $\dim N_0 = 0$, e $\dim V_{n-1} = \dim N_{n-1}$. A partir disso, conclui-se o enunciado. $\square$

Teorema 1.1.23. *Sejam $T, S \in \mathcal{F}$. Então $TS \in \mathcal{F}$ e vale*

$$\text{ind}(TS) = \text{ind}(T) + \text{ind}(S)$$

Demonstração. Seja $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}$ a aplicação quociente. Como $\mathcal{K}$ é ideal bilateral (teorema 1.1.16), temos que $\pi(ST) = \pi(S)\pi(T)$. Logo, como $\pi(S), \pi(T) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ (teorema 1.1.20), segue que $\pi(ST) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$, e então $ST \in \mathcal{F}$.

Para provar a fórmula para o índice do produto, considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker } S \xrightarrow{i} \text{Ker}(TS) \xrightarrow{S} \text{Ker } T \xrightarrow{q} H/\text{Im } S \xrightarrow{T} H/\text{Im}(TS) \xrightarrow{f} H/\text{Im } T \rightarrow 0$$

onde $i : \text{Ker } S \rightarrow \text{Ker}(TS)$ é a inclusão, $q : H \supset \text{Ker } T \rightarrow H/\text{Im } T$ é a aplicação quociente e f leva as classes de equivalência módulo $\text{Im}(TS)$ em classes de equivalência módulo $\text{Im } T$. O lema 1.1.22 nos diz que

$$\begin{aligned} 0 &= -\dim \text{Ker } S + \dim \text{Ker}(TS) - \dim \text{Ker } T + \dim \text{Coker } S - \dim \text{Coker}(TS) \\ &\quad + \dim \text{Coker } T \\ &= -\text{ind } S - \text{ind } T + \text{ind}(TS) \end{aligned}$$

$\square$

A caracterização dos operadores de Fredholm no Teorema de Atkinson (1.1.20) nos permite tecer algumas considerações topológicas sobre $\mathcal{F}$. Iniciamos com o seguinte resultado:

Proposição 1.1.24. *$\mathcal{F}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Como $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ pelo teorema 1.1.20, e como a aplicação quociente $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}$ é contínua, basta provar que $\pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ é aberto em $\mathcal{B}/\mathcal{K}$. Seja $T \in \mathcal{F}$. Então $\pi(T) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$. Seja $r := 1/\|\pi(T)^{-1}\|$. Afirimo que a bola de centro em $\pi(T)$ e raio r está contida em $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$.

Para isso, seja $S \in \mathcal{B}$ tal que $\|\pi(T) - \pi(S)\| < r$. Temos, para $Q := (\pi(S) - \pi(T))\pi(T)^{-1}$,

$$\|Q\| = \|(\pi(S) - \pi(T))\pi(T)^{-1}\| \leq \|(\pi(S) - \pi(T))\| \|\pi(T)^{-1}\| < \frac{1}{\|\pi(T)^{-1}\|} \|\pi(T)^{-1}\| = 1$$

Logo,

$$\left\| \sum_{k=n}^p Q^k \right\| \leq \sum_{k=n}^p \|Q^k\| \leq \sum_{k=n}^p \|Q\|^k,$$

que é arbitrariamente pequeno se n for suficientemente grande. Isso implica que $\sum_{k=0}^{\infty} Q^k$ é de Cauchy e, portanto, converge, pois $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ é Banach. Mas

$$(Id - Q) \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k \right) (Id - Q) = Id,$$

onde aqui Id denota a identidade em $\mathcal{B}/\mathcal{K}$. Assim, $(Id - Q) = Id - (\pi(S) - \pi(T))\pi(T)^{-1} = -\pi(S)\pi(T)^{-1}$ é invertível. Como $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ é grupo e $\pi(S) = (-\pi(S)\pi(T)^{-1})(-\pi(T))$, segue que $\pi(S) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$.

□

Lema 1.1.25. *Seja $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{B}$ uma parametriz de F . Então*

$$G \in \mathcal{F} \quad e \quad ind(G) = -ind(F)$$

Demonstração. É consequência direta do teorema 1.1.20 que $G \in \mathcal{F}$. Para o índice, seja $K \in \mathcal{K}$ tal que $FG = Id + K$. Então, pelos teoremas 1.1.18 e 1.1.23, $ind(F) + ind(G) = ind(FG) = ind(Id + K) = 0$, e segue o resultado.

□

O resultado a seguir é devido a J. Dieudonné e estabelece uma ligação entre o índice de Fredholm e a topologia do espaço $\mathcal{F}$.

Teorema 1.1.26. *A aplicação $ind : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ é localmente constante.*

Demonstração. Seja $F \in \mathcal{F}$ e $G \in \mathcal{F}$ uma parametriz de F . Assim, existem $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tais que

$$FG = Id + K_1 \quad \text{e} \quad GF = Id + K_2$$

Mostraremos agora que, para todo $T \in \mathcal{B}$ com $\|T\| < \|G\|^{-1}$ temos $F + T \in \mathcal{F}$.

Com efeito, os operadores $Id + TG$ e $Id + GT$ são ambos invertíveis, visto que $\|TG\|$ e $\|GT\|$ são ambos menores do que 1. Para ver isso, considere a série convergente $\sum_{k=0}^{\infty} (-Q)^k$, que satisfaz

$$(Id + Q) \sum_{k=0}^{\infty} (-Q)^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-Q)^k \right) (Id + Q) = Id,$$

com $Q = GT$ ou TG , conforme o caso. Assim, $(Id + GT)^{-1}G$ é inversa à esquerda de $F + T$ módulo $\mathcal{K}$, visto que

$$\begin{aligned} (Id + GT)^{-1}G(F + T) &= (Id + GT)^{-1}(Id + K_2 + GT) = Id + (Id + GT)^{-1}K_2 \\ &= Id + K_2' \end{aligned} \tag{1.4}$$

com $K_2' \in \mathcal{K}$ pelo teorema 1.1.16. Por outro lado, $G(Id + TG)^{-1}$ é inversa à direita de $F + T$ módulo $\mathcal{K}$:

$$(F + T)G(Id + TG)^{-1} = (Id + K_1 + TG)(Id + TG)^{-1} = Id + K_1(Id + TG)^{-1} = Id + K_1'$$

onde também temos $K_1' \in \mathcal{K}$. Assim, segue do teorema 1.1.20 que $F + T \in \mathcal{F}$. Para o índice, a partir de (1.4) e da regra da composição (teorema 1.1.23), vem que

$$ind(Id + GT)^{-1} + ind G + ind(F + T) = 0$$

O índice de um operador invertível é trivialmente zero. Logo, pelo lema 1.1.25, obtemos que

$$ind(F + T) = -ind(G) = ind(F)$$

□

Corolário 1.1.27. *O índice é constante nas componentes conexas de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Pelo teorema 1.1.26, o índice é localmente constante em $\mathcal{F}$. Isso implica que $ind : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ é contínua, e portanto leva conexos em conexos, de onde segue o resultado. $\square$

Proposição 1.1.28. *As componentes conexas de $\mathcal{F}$ estão em correspondência sobrejetora com $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $e_0, e_1, \dots$ base ortonormal de H e considere os operadores

$$desl^+ : \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \in H \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_{i+1} \in H$$

e

$$desl^- : \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i \in H \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1} e_i \in H$$

Então temos que ambos são operadores de Fredholm com

$$ind desl^+ = -1 \quad \text{e} \quad ind desl^- = 1$$

Logo, pelo teorema 1.1.23, se $n \in \mathbb{N}$,

$$ind (desl^+)^n = -n \quad \text{e} \quad ind (desl^-)^n = n$$

Como também temos $ind Id = 0$, segue que $ind : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ é sobrejetiva. O resultado segue do teorema 1.1.26 e do corolário 1.1.27. $\square$

Observação 1.1.29. *Na verdade, a correspondência da proposição 1.1.28 é bijetora. O caráter injetor do índice em relação às componentes conexas de $\mathcal{F}$ será provado no corolário 1.3.34*

1.2 O Teorema de Kuiper

O Teorema de Kuiper estabelece uma propriedade topológica em famílias de operadores invertíveis indexadas num espaço compacto. Iniciaremos com a apresentação de alguns conceitos oriundos da Topologia. Nesta sessão, estaremos também supondo que H tem dimensão infinita.

Definição 1.2.1. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica a g (denotado por $f \sim g$) se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, onde $I = [0, 1]$ tal que*

$$H|_{X \times \{0\}} = f \quad e \quad H|_{X \times \{1\}} = g$$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência, de forma que o conjunto

$$[X, Y] := \{\bar{f} : f : X \longrightarrow Y \text{ é contínua}\},$$

onde $\bar{f} := \{g : g : X \longrightarrow Y \text{ é contínua e } f \sim g\}$ representa a classe de equivalência de f por homotopia, está bem definido.

Observação 1.2.2. Uma forma equivalente de definir a relação de homotopia $f \sim g$ é usando as funções de inclusão $i_t : X \longrightarrow X \times \{t\}$, onde $t \in I$. Assim, $f \sim g$ se existe $H : X \times I \longrightarrow Y$ contínua tal que

$$H \circ i_0 = f \quad e \quad H \circ i_1 = g$$

Proposição 1.2.3. O índice é um invariante homotópico. Ou seja, se $T \sim S$, com T e $S \in \mathcal{F}$, então $\text{ind} T = \text{ind} S$.

Demonstração. Se $T \sim S$, então ambos estão numa mesma componente conexa de $\mathcal{F}$. O resultado segue do corolário 1.1.27. $\square$

Definição 1.2.4. Dois espaços topológicos X e Y são homeomorfos se existe uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ bijetora contínua com inversa também contínua.

Definição 1.2.5. Dois espaços topológicos X e Y apresentam o mesmo tipo de homotopia se existem aplicações contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ tais que

$$f \circ g \sim \text{Id}_Y \quad e \quad g \circ f \sim \text{Id}_X.$$

Na literatura também é dito, nessas condições, que X e Y são equivalentes homotópicos.

Definição 1.2.6. Sejam X, Y espaços topológicos, $Y \subset X$. Y é dito um retrato de X se existe uma aplicação contínua (dita retração) $f : X \longrightarrow Y$ com $f|_Y = \text{Id}_Y$.

Se, adicionalmente, $i \circ f \sim \text{Id}_X$, onde $i : Y \longrightarrow X$ é a inclusão, então Y é um retrato de deformação de X e X e Y são equivalentes homotópicos.

Todo ponto $p \in X$ é um retrato de X . Se $\{p\}$ for um retrato de deformação de X , então X é dito contrátil.

Com essas definições, podemos enfim enunciar o Teorema de Kuiper:

Teorema 1.2.7. *Seja X um espaço topológico compacto, H um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{B}^\times$ o grupo das aplicações lineares contínuas e invertíveis $H \rightarrow H$. Então $[X, \mathcal{B}^\times]$ consiste num único elemento.*

Demonstração. Uma prova rigorosa do Teorema de Kuiper possui uma certa extensão. Como esse resultado não constitui o interesse central deste texto, optamos por resumir as ideias principais utilizadas na demonstração. Para uma prova detalhada, ver, por exemplo, [11].

Etapa 1: Primeiramente, prova-se que toda aplicação contínua $f_0 : X \rightarrow \mathcal{B}^\times$ é homotópica a uma aplicação contínua $f_1 : X \rightarrow \mathcal{B}^\times$ com $f_1(X) \subset V$, onde V é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}$ de dimensão finita.

De fato, como $\mathcal{B}^\times$ é aberto (repare que a demonstração da proposição 1.1.24 também pode ser aproveitada para provar que o grupo de elementos invertíveis numa álgebra de Banach é aberto), para todo $T \in f_0(X)$ podemos tomar uma bola aberta B_T tal que $T \in B_T \subset \mathcal{B}^\times$. Trocando cada B_T por uma bola de mesmo centro e $1/3$ do raio obtemos assim uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ para $f_0(X)$, que é compacto. Logo, podemos cobri-lo com uma subcobertura finita $\mathcal{C}' = \bigcup_{i=1}^n B(T_i, r_i)$, onde $B(T_i, r_i)$ é a bola de centro T_i e raio r_i , com $B(T_i, 3r_i) \subset \mathcal{B}^\times$.

Seja ϕ_i , $i = 1, \dots, n$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{C}'$ e defina, para cada $t \in I = [0, 1]$ e $T \in \mathcal{C}'$,

$$g_t(T) := (1 - t)T + t \sum_{i=1}^n \phi_i(T)T_i$$

Assim, temos uma homotopia entre g_0 e g_1 que está inteiramente contida em $\mathcal{B}^\times$. Com efeito, seja $T \in \mathcal{C}'$. Como estamos trabalhando com uma partição da unidade, só precisamos considerar os termos em que $T \in B(T_i, r_i)$. Dentre essas, seja $B(T_m, r_m)$ a bola que tiver o maior raio. Pela desigualdade triangular, as demais bolas estão contidas em $B(T_m, 3r_m) \subset \mathcal{B}^\times$.

Dessa forma, pondo $f_t := g_t f_0$, $t \in I$, obtemos uma homotopia entre f_0 e f_1 tal que $f_1(X)$ está inteiramente contido no subespaço de dimensão finita V gerado pelos operadores $T_1, \dots, T_n$.

Etapa 2: Construimos uma sequência de vetores unitários $a_1, a_2, \dots \in H$ e uma sequência de subespaços dois a dois ortogonais $A_1, A_2, \dots$ de dimensão $n + 1$, onde $n = \dim V'$ e V' é o subespaço gerado pelo subespaço V da etapa 0 mais a identidade, e tais que $a_i \in A_i$ e $Ra_i \in A_i$ para cada $R \in V$, $i = 1, 2, \dots$.

Essa construção pode ser feita recursivamente a partir de algum vetor unitário arbitrário $a_1 \in H$ e algum subespaço A_1 de dimensão $n + 1$ que contenha $a_i, R_1 a_i, \dots, R_n a_i$, onde $\{R_1, \dots, R_n\}$ é base de V' . Então tome $a_2 \in H$ unitário tal que

$$a_2 \in A_1^\perp \cap R_1^{-1}(A_1^\perp) \cap \dots \cap R_n^{-1}(A_1^\perp)$$

Isso é sempre possível pois a interseção finita de subespaços de codimensão finita é sempre não trivial quando H tem dimensão infinita. Tome A_2 subespaço de dimensão $n+1$ contendo $a_2, R_1 a_2, \dots, R_n a_2$. Por construção, $A_1 \perp A_2$. Continuamos tomando

$$a_3 \in A_1^\perp \cap A_2^\perp \cap R_1^{-1}(A_1^\perp) \cap \dots \cap R_n^{-1}(A_1^\perp) \cap R_1^{-1}(A_2^\perp) \cap \dots \cap R_n^{-1}(A_2^\perp)$$

e assim por diante.

Etapa 3: Mostra-se que a inclusão

$$\gamma_0 : V' \cap \mathcal{B}^\times \hookrightarrow \mathcal{B}^\times$$

é homotópica a uma aplicação

$$\gamma_2 : V' \cap \mathcal{B}^\times \longrightarrow \mathcal{B}^\times$$

com $\gamma_2(R)a_i = a_i$ para $i = 1, 2, \dots$ e $R \in V' \cap \mathcal{B}^\times$. Para isso, primeiro constrói-se uma homotopia entre γ_0 e γ_1 , onde, para $t \in I$,

$$\gamma_t(R)u := \begin{cases} Ru & \text{se } u \in (\oplus_{i=1}^\infty A_i)^\perp \\ \left(1 - t + \frac{t}{|Ra_i|}\right) Ru & \text{se } u \in A_i \end{cases}$$

Em seguida, considere a esfera $S^{2n-1} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}^n \times \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ e construa, para todo $a \in S^{2n-1}$, uma aplicação contínua $g : S^{2n-1} \longrightarrow U(n+1)$, onde $U(n+1)$ denota as matrizes complexas $(n+1) \times (n+1)$ cuja inversa é a adjunta (ditas matrizes unitárias de posto $n+1$), com as seguintes propriedades:

- (i) $g(z)(z) = a$ para todo $z \in S^{2n-1}$
- (ii) $g \sim h$, onde $h(z) = Id_{\mathbb{C}^{n+1}}$ para todo $z \in S^{2n-1}$

Por exemplo, no caso $n = 1$, podemos tomar

$$g : z \longmapsto \begin{pmatrix} az^{-1} & 0 \\ 0 & za^{-1} \end{pmatrix}$$

e ter em mente a homotopia (1.5) da etapa 5.

Reduzimos a essa situação mapeando cada A_i por uma isometria α_i sobrejetivamente em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\{Ta_i : T \in V'\}$ é mapeado em $\mathbb{C}^n \times \{0\}$. Então, se $F_i : S^{2n-1} \times I \longrightarrow U(n+1)$ é a homotopia correspondente para $a := \alpha_i(a_i)$, então temos a seguinte homotopia de γ_1 para γ_2 com as propriedades desejadas:

$$\gamma_{1+t}(T)u := \begin{cases} \gamma_1(T)u & \text{se } u \in (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i)^{\perp} \\ \alpha_i^{-1} F_i(\alpha_i \gamma_1(T) a_i, t) \alpha_i \gamma_1(T) u & \text{se } u \in A_i \end{cases}$$

Em particular, obtemos um subespaço de dimensão infinita H' com base ortonormal $a_1, a_2, \dots$ tal que $\gamma_2|_{H'} = Id$.

Etapa 4: Seja $H_1 := (H')^{\perp}$, e considere a decomposição $H = H_1 \oplus H'$. Temos que $\mathcal{B}^{\times}(H_1) \times Id_{H'}$ é um retrato de deformação do grupo de operadores que são identidade em H' . Com efeito, um elemento do grupo de operadores de $\mathcal{B}$ que são a identidade em H' tem a forma

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ W & Id \end{pmatrix},$$

onde $Q \in \mathcal{B}^{\times}(H_1)$ e o termo W pode ser deformado a 0 por um caminho contínuo em $\mathcal{B}^{\times}(H)$ via

$$\gamma_{2+t} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ (1-t)W & Id \end{pmatrix}.$$

Chegamos, portanto, em

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{\times}(H_1) \times Id_{H'}.$$

Etapa 5: Queremos mostrar agora que $\mathcal{B}^{\times}(H_1) \times Id_{H'}$ pode ser contraído a Id_H . Isso é feito usando-se o fato de que H tem dimensão infinita e aplicando-se reiteradamente a homotopia

$$\begin{pmatrix} SR & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

dada por

$$F_t := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Sejam $N_j := \{2^{j-2}(2m-1) : m \in \mathbb{N}\}$, $j = 2, 3, 4, \dots$ e H_j o subespaço gerado pelos a_i tais que $a_i \in N_j$. Como os N_j são dois a dois disjuntos e sua união corresponde a $\mathbb{N}$, temos que $H = \bigoplus_{j=1}^{\infty} H_j$ e

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} Q & & & \\ & Id & & \\ & & Id & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Se identificarmos H_j com H_1 (pois todos os espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita são isomorfos) podemos também escrever

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} Q & & & & \\ & QQ^{-1} & & & \\ & & Id & & \\ & & & QQ^{-1} & \\ & & & & Id \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Com a rotação (1.5) obtemos um caminho em $\mathcal{B}^\times(H)$ de γ_3 em

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} Q & & & & \\ & Q^{-1} & & & \\ & & Q & & \\ & & & Q^{-1} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Uma nova rotação via (1.5) nos conduz a um caminho contínuo em $\mathcal{B}^\times(H)$ até

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} Id & & \\ & Id & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = Id_H$$

□

Corolário 1.2.8. $\mathcal{B}^\times$ é conexo por caminhos.

Demonstração. De fato, fazendo $X = \{p\}$ espaço com um único ponto, temos que $[\{p\}, \mathcal{B}^\times]$ corresponde ao conjunto das componentes conexas de $\mathcal{B}^\times$. O resultado segue do Teorema de Kuiper (1.2.7).

□

Como aplicação do Teorema de Kuiper, obtemos a trivialidade dos grupos de homotopia de $\mathcal{B}^\times$. Antes relembramos o conceito de grupos de homotopia de um espaço topológico.

Definição 1.2.9. *Seja Y espaço topológico, $y_0 \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ e $I^n := [0, 1]^n$. Sejam $f, g : I^n, \partial I^n \rightarrow Y, y_0$ aplicações contínuas, onde por essa notação entende-se que f, g são aplicações de I^n em Y e que levam ∂I^n em y_0 . Aqui, ∂I^n denota o bordo de I^n .*

Definimos

$$\begin{aligned} f + g : I^n, \partial I^n &\longrightarrow Y, y_0 \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Se $M_n(Y, y_0) := \{f : I^n, \partial I^n \rightarrow Y, y_0 : f \text{ é contínua}\}$, temos que $M_n(Y, y_0)$ é fechado para a operação $+$. Denotamos por

$$\pi_n(Y, y_0) := \{[f] : f \in M_n(Y, y_0)\}$$

o conjunto das classes de homotopia de $M_n(Y, y_0)$, onde $[f]$ denota a classe de f . Prova-se que se $f \sim f'$ e $g \sim g'$ então $f + g \sim g' + f'$, bem como todo elemento tem um inverso aditivo. Assim, $\pi_n(Y, y_0)$ é grupo abeliano com a operação $+$ dada por $[f] + [g] := [f + g]$, e é chamado de grupo de homotopia de Y com relação a y_0 .

Também é possível provar que se Y é conexo por caminhos então π_n independe de y_0 . Neste caso, escreve-se simplesmente $\pi_n(Y)$.

Teorema 1.2.10. *Todos os grupos de homotopia de $\mathcal{B}^\times$ são triviais, isto é, $\pi_n(\mathcal{B}^\times) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Este resultado decorre diretamente do Teorema de Kuiper (1.2.7) fazendo-se $X = I^n$. □

1.3 Índice de Fibrados

Faremos agora uma generalização do índice definido na equação (1.1) (ver a definição 1.1.6), desta vez tomando famílias de operadores de Fredholm indexadas em compactos. Ou seja, queremos estabelecer uma noção de índice consistente com a definição anterior e que se aplique a famílias contínuas $T : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$, onde X é espaço topológico compacto. Faremos isso utilizando fibrados vetoriais.

Definição 1.3.1. *Sejam E, X espaços topológicos, $\pi : E \longrightarrow X$ aplicação contínua e sobrejetiva. A terna $\xi = (E, \pi, X)$ é dita um fibrado vetorial com base X se*

- (i) $\forall x \in X, E_x := \pi^{-1}(x)$ tem estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão finita;
- (ii) $\forall x \in X \quad \exists \quad U \subset X$ aberto, $n \in \mathbb{N}$ e $h : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ homeomorfismo tais que $x \in U$ e

$$a) \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{C}^n \\ \pi \searrow & & \swarrow p_1 \\ & U & \end{array} \quad \text{comuta, isto é, } \pi = p_1 \circ h, \text{ onde } p_1 \text{ é a projeção na primeira coordenada;}$$

- b) $\forall x' \in U$ fixo, $h|_{E_{x'}} : E_{x'} \longrightarrow \{x'\} \times \mathbb{C}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Diz-se que X é a base, E é o espaço total e E_x é a fibra de E sobre x . Eventualmente poderemos nos referir ao fibrado por meio de seu espaço total.

Exemplo 1. O exemplo mais simples de fibrado é o fibrado vetorial trivial de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dado por

$$\theta_n^X = (X \times \mathbb{C}^n, \pi_n, X) \quad (1.6)$$

com

$$\begin{aligned} \pi_n : X \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Aqui, podemos tomar $U = X$ e fazer $h : (x, y) \in X \times \mathbb{C}^n \longmapsto y \in \mathbb{C}^n$ para ver que se trata realmente de um fibrado vetorial, cumprindo com os requisitos da definição 1.3.1. Repare que a fibra de θ_n^X em $x \in X$ é $\{x\} \times \mathbb{C}^n$, que é naturalmente isomorfa a $\mathbb{C}^n$.

Quando não houver dúvidas quanto ao espaço base, poderemos escrever apenas θ_n .

Definição 1.3.2. Dois fibrados vetoriais com base X $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ são ditos isomorfos se existe um homeomorfismo $h : E \longrightarrow F$ tal que

$$a) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ \pi \searrow & & \swarrow \rho \\ & X & \end{array} \quad \text{comuta, isto é, } \pi = \rho \circ h;$$

- b) $h|_{E_x} : E_x \longrightarrow F_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais $\quad \forall \quad x \in X$

Nessas condições, escreve-se $\xi \cong \eta$. Como esta definição claramente estabelece uma relação de equivalência, denota-se por $\langle \xi \rangle$ a classe de equivalência de ξ . O conjunto das classes de equivalência de fibrados vetoriais sobre X é denotado por $\text{Vect}(X)$.

Definição 1.3.3. Dados dois fibrados vetoriais de mesma base $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$, definimos sua soma direta por

$$\xi \oplus \eta := (G, \nu, X)$$

onde

$$G = \{(e, f) \in E \times F : \pi(e) = \rho(f)\} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \nu : & G & \longrightarrow X \\ & (e, f) & \longmapsto \pi(e) = \rho(f) \end{array}$$

Prova-se que a soma direta de fibrados é também um fibrado vetorial. Note-se que as fibras de $\xi \oplus \eta$ são $E_x \oplus F_x$. Portanto,

$$G = \bigcup_{x \in X} E_x \oplus F_x$$

Proposição 1.3.4. Temos que $\theta_{n+m} \cong \theta_n \oplus \theta_m$, onde aqui tratamos de fibrados triviais definidos na equação (1.6).

Demonstração. Temos os seguintes fibrados vetoriais:

$$\theta_n = (X \times \mathbb{C}^n, \pi_n, X)$$

$$\theta_m = (X \times \mathbb{C}^m, \pi_m, X)$$

$$\theta_{n+m} = (X \times \mathbb{C}^{n+m}, \pi_{n+m}, X)$$

$$\theta_n \oplus \theta_m = \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathbb{C}^n \oplus \{x\} \times \mathbb{C}^m, \nu, X \right)$$

Definimos

$$\begin{array}{ccc} h : & \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathbb{C}^n \oplus \{x\} \times \mathbb{C}^m & \longrightarrow X \times \mathbb{C}^{n+m} \\ & (x, y, x, z) & \longmapsto (x, (y, z)) \end{array}$$

que é um homeomorfismo atendendo às condições da definição 1.3.2.

□

Proposição 1.3.5. *Sejam $\xi = (E, \pi, X)$, $\xi' = (E', \pi', X)$, $\eta = (F, \rho, X)$ e $\eta' = (F', \rho', X)$ fibrados vetoriais sobre X tais que*

$$\xi \cong \xi' \quad \text{e} \quad \eta \cong \eta'.$$

Então

$$\xi \oplus \eta \cong \eta' \oplus \xi'$$

Assim, podemos estabelecer uma estrutura de semigrupo abeliano em $\text{Vect}(X)$ definindo

$$\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle := \langle \xi \oplus \eta \rangle$$

Demonstração. Pela definição 1.3.2, existem homeomorfismos $h : E \longrightarrow E'$ e $g : F \longrightarrow F'$ tais que $\pi = \pi' \circ h$ e $\rho = \rho' \circ g$. Também temos que

$$h|_{E_x} : E_x \longrightarrow E'_x \quad \text{e} \quad g|_{F_x} : F_x \longrightarrow F'_x \quad \text{são isomorfismos.}$$

Então

$$k : (e, f) \in \bigcup_{x \in X} E_x \oplus F_x \longmapsto (g(f), h(e)) \in \bigcup_{x \in X} F'_x \oplus E'_x$$

é homeomorfismo. Se ν denota a projeção do fibrado $\xi \oplus \eta$ e ν' a do fibrado $\eta' \oplus \xi'$, então

$$(\nu' \circ k)(e, f) = \nu'(g(f), h(e)) = \rho'(g(f)) = \rho(f) = \nu(e, f) \implies \nu' \circ k = \nu$$

Por fim, temos que

$$k|_{E_x \oplus F_x} = T \circ (h|_{E_x} \oplus g|_{F_x})$$

é isomorfismo entre $E_x \oplus F_x$ e $F'_x \oplus E'_x$ para todo $x \in X$ visto que todos os operadores envolvidos são isomorfismos, onde $T : (e', f') \in E'_x \oplus F'_x \longmapsto (f', e') \in F'_x \oplus E'_x$.

□

Observação 1.3.6. *Temos que $\langle \theta_0 \rangle$ é elemento neutro de $(\text{Vect}(X), +)$.*

Definição 1.3.7. *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial e $f : Y \longrightarrow X$ contínua. O fibrado vetorial induzido por f em Y (também chamado de pull back de ξ por f) é $f^*\xi := (f^*E, \pi_*, Y)$, onde*

$$f^*E := \{(y, e) \in Y \times E : f(y) = \pi(e)\} \quad e \quad \pi_*(y, e) = y$$

Prova-se que a definição do pull back é consistente com a de fibrado vetorial. Repare que a fibra de f^ξ em $y \in Y$ é $\{y\} \times E_{f(y)}$. Assim,*

$$f^*E = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{f(y)}$$

Proposição 1.3.8. *Sejam ξ , ξ' e η fibrados vetoriais com base X e $f : Y \longrightarrow X$ aplicação contínua. Temos que*

$$(i) \text{ se } \xi \cong \xi', \text{ então } f^*\xi \cong f^*\xi'$$

$$(ii) f^*(\xi \oplus \eta) \cong f^*\xi \oplus f^*\eta$$

Assim, f induz um homomorfismo de semigrupos (que também denotaremos por f^)*

$$\begin{aligned} f^* : \text{Vect}(X) &\longrightarrow \text{Vect}(Y) \\ \langle \xi \rangle &\longmapsto \langle f^*\xi \rangle \end{aligned}$$

Demonstração. Para (i), se $h : E \longrightarrow E'$ é o homeomorfismo que define o isomorfismo entre ξ e ξ' , onde E e E' são, respectivamente, seus espaços totais, então

$$\begin{aligned} k : \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{f(y)} &\longrightarrow \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E'_{f(y)} \\ (y, e) &\longmapsto (y, h(e)) \end{aligned}$$

define um homeomorfismo atendendo às condições da definição 1.3.2, donde $f^*\xi \cong f^*\xi'$.

Para (ii), se E e F são os espaços totais, respectivamente, de ξ e η , então as fibras de $f^*(\xi \oplus \eta)$ e $f^*\xi \oplus f^*\eta$ escrevem-se como, respectivamente,

$$\bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{f(y)} \oplus F_{f(y)} \quad e \quad \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{f(y)} \oplus \{y\} \times F_{f(y)}$$

Assim, temos naturalmente que $f^*(\xi \oplus \eta) \cong f^*\xi \oplus f^*\eta$.

Para a afirmação final, segue de (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} f^* (\langle \xi_1 \rangle + \langle \xi_2 \rangle) &= f^* (\langle \xi_1 \oplus \xi_2 \rangle) = \langle f^* (\xi_1 \oplus \xi_2) \rangle = \langle f^* \xi_1 \oplus f^* \xi_2 \rangle = \langle f^* \xi_1 \rangle + \langle f^* \xi_2 \rangle \\ &= f^* \langle \xi_1 \rangle + f^* \langle \xi_2 \rangle \end{aligned}$$

□

Até aqui chegamos a uma estrutura algébrica para classes de equivalência de fibrados por isomorfismo. No entanto, a estrutura de semigrupo de $Vect(X)$ pode ser estendida a uma estrutura de grupo. Faremos isso por meio de um processo conhecido como a construção do Grupo de Grothendieck. Na definição abaixo embutiremos alguns resultados imediatos de fácil demonstração, e cujas provas serão omitidas.

Definição 1.3.9. *Seja $(S, +)$ semigrupo abeliano. Definimos uma relação de equivalência em $S \times S$ por*

$$(a, b) \sim (a', b') \iff \exists s \in S \text{ tal que } a + b' + s = a' + b + s$$

Denotamos por

$$K'(S) := \left\{ \overline{(a, b)} : (a, b) \in S \times S \right\}$$

o conjunto das classes de equivalência. Definindo

$$\begin{aligned} + : K'(S) \times K'(S) &\longrightarrow K'(S) \\ \left(\overline{(a, b)}, \overline{(c, d)} \right) &\longmapsto \overline{(a + c, b + d)} \end{aligned}$$

obtemos uma operação bem definida em $K'(S)$ que o torna um grupo abeliano (chamado Grupo de Grothendieck de S). O elemento neutro de $K'(S)$ é (s, s) , onde $s \in S$ é um elemento qualquer.

Dado um $s \in S$, definimos a função de Grothendieck (que independe da escolha de s) por

$$\begin{aligned} G : S &\longrightarrow K'(S) \\ a &\longmapsto \overline{(a + s, s)} \end{aligned}$$

Valem as seguintes propriedades:

$$(i) \quad G(a + b) = G(a) + G(b)$$

$$(ii) \quad \overline{(a, b)} = G(a) - G(b)$$

$$(iii) \quad -\overline{(a, b)} = \overline{(b, a)}$$

Definição 1.3.10. *Seja X um espaço topológico compacto. Definimos $K(X) := K'(Vect(X))$ como o grupo de Grothendieck de $Vect(X)$.*

Se $G : Vect(X) \longrightarrow K(X)$ é sua função de Grothendieck, denotamos

$$[\xi] := G \langle \xi \rangle = \overline{(\langle \xi \rangle + \langle \theta_0 \rangle, \langle \theta_0 \rangle)} = \overline{(\langle \xi \rangle, \langle \theta_0 \rangle)}$$

Tem-se que

$$\begin{array}{ccccc} G \langle \xi \oplus \eta \rangle & = & G(\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle) & = & G \langle \xi \rangle + G \langle \eta \rangle \\ \parallel & & & & \parallel \\ [\xi \oplus \eta] & & & & [\xi] + [\eta] \end{array}$$

ou seja, $[\xi \oplus \eta] = [\xi] + [\eta]$ para quaisquer ξ, η fibrados vetoriais sobre X . Repare ainda que um elemento de $K(X)$ é da forma $[\xi] - [\eta]$ em virtude da propriedade (ii) da definição 1.3.9.

Proposição 1.3.11. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : Y \longrightarrow X$ contínua. Então f induz um único homomorfismo $K_f : K(X) \longrightarrow K(Y)$ tal que $K_f[\xi] = [f^*\xi]$ para todo $\langle \xi \rangle \in Vect(X)$.*

Demonstração. Queremos que K_f torne o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Vect(X) & \xrightarrow{f^*} & Vect(Y) \\ \downarrow G_X & & \downarrow G_Y \\ K(X) & \xrightarrow{K_f} & K(Y) \end{array}$$

Isso é sempre possível em virtude das propriedades das funções G_X e G_Y bem como do homomorfismo induzido f^* . A unicidade é consequência de que, pela comutatividade, se $L : K(X) \longrightarrow K(Y)$ é outro homomorfismo que comuta o diagrama, então

$$L[\xi] = [f^*\xi] = K_f[\xi] \quad \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X)$$

Como um elemento típico de $K(X)$ escreve-se como $[\xi] - [\eta]$ para alguns ξ, η fibrados vetoriais sobre X , segue que $K_f = L$.

□

Observação 1.3.12. *Em virtude da proposição anterior, e como estamos interessados muito mais em $K(X)$ do que em $Vect(X)$, denotaremos o homomorfismo induzido K_f também por f^* de agora em diante.*

Definição 1.3.13. *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial. Uma seção de ξ é uma função contínua $s : X \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_X$. Denotamos o conjunto de todas as seções de ξ por $\Gamma(\xi)$, que possui estrutura natural de espaço vetorial.*

Definição 1.3.14. *Um subespaço vetorial $V \subset \Gamma(\xi)$ é dito amplo se a aplicação*

$$\begin{aligned} \Lambda : X \times V &\longrightarrow E \\ (x, v) &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

for sobrejetiva.

Lema 1.3.15. *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial com base compacta. Então existe $m \in \mathbb{N}$ e uma função $\psi : X \times \mathbb{C}^m \rightarrow E$ contínua e sobrejetiva tal que, para todo $x \in X$, $\psi|_{\{x\} \times \mathbb{C}^m} : \{x\} \times \mathbb{C}^m \rightarrow E_x$ é linear e sobrejetiva.*

Demonstração. Pela definição 1.3.1, para todo $x \in X$ existem uma vizinhança U_x de x , um número $n_x \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h_x : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{C}^{n_x}$. Como X , é compacto, um número finito desses U_x cobre X . Ou seja, $X \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$, onde $U_i = U_{x_i}$ e faremos a mesma convenção para n_i e h_i .

Para $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $e_1, \dots, e_{n_i}$ base canônica de $\mathbb{C}^{n_i}$.

Para cada $y \in U_i$ fixo, $h_i|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{C}^{n_i}$ é isomorfismo. Logo, $\{h_i^{-1}(y, e_1), \dots, h_i^{-1}(y, e_{n_i})\}$ é base de E_y .

Para $j \in \{1, \dots, n_i\}$, defina

$$\begin{aligned} s_j^i : U_i &\longrightarrow E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \\ y &\longmapsto h_i^{-1}(y, e_j) \end{aligned}$$

Então s_j^i é contínua e está em $\Gamma(\xi|_{U_i})$. Defina $V_i = [s_1^i, \dots, s_{n_i}^i]$ o subespaço de $\Gamma(\xi|_{U_i})$ gerado pelos s_j^i . Então, por construção, os V_i são amplos, ou seja,

$$\begin{aligned} \Lambda_i : U_i \times V_i &\longrightarrow E|_{U_i} \\ (y, v) &\longmapsto v(y) \end{aligned}$$

é sobrejetiva.

Seja $\phi_i : X \rightarrow [0, 1]$ partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \dots, U_m\}$. Defina $\Theta_i : V_i \rightarrow \Gamma(\xi)$ por

$$\begin{aligned} \Theta_i(v) : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \begin{cases} \phi_i(x)v(x) & \text{se } x \in U_i \\ 0 & \text{se } x \notin U_i \end{cases} \end{aligned}$$

Então Θ_i é contínua e linear. Defina

$$\begin{aligned}\Theta : V_1 \times \cdots \times V_m &\longrightarrow \Gamma(\xi) \\ (v_1, \dots, v_m) &\longmapsto \Theta_1(v_1) + \cdots + \Theta_m(v_m)\end{aligned}$$

Então Θ é linear e $V := \Theta(V_1 \times \cdots \times V_m) \subset \Gamma(\xi)$ é subespaço de dimensão finita. Seja $\Lambda : (x, v) \in X \times V \mapsto v(x) \in E$. Temos que Λ é sobrejetiva. De fato, se $e \in E_x \subset E|_{U_i}$, a sobrejetividade de Λ segue da sobrejetividade de Λ_i .

Existe um isomorfismo natural $k : X \times \mathbb{C}^p \longrightarrow X \times V$, onde $p = \dim V$. Assim, $\psi := \Lambda \circ k$ é uma aplicação que satisfaz às condições do enunciado.

□

Teorema 1.3.16. *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial com base num espaço topológico compacto X . Então existem um fibrado vetorial η com base X e $m \in \mathbb{N}$ tais que $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \theta_m \rangle$.*

Demonstração. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $\psi : X \times \mathbb{C}^m \longrightarrow E$ como no lema 1.3.15. Defina, para $x \in X$, $\psi_x := \psi|_{\{x\} \times \mathbb{C}^m} : \{x\} \times \mathbb{C}^m \longrightarrow E_x$ e faça $\sigma_x := \psi_x|_{(Ker \psi_x)^\perp}$. Então σ_x é isomorfismo entre $(Ker \psi_x)^\perp$ e E_x .

Fixado $x \in X$, sejam $U \subset X$ vizinhança aberta de x , $n \in \mathbb{N}$ e $h : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ homeomorfismo satisfazendo a definição 1.3.1. Então $\dim E_{x'} = n$ para todo $x' \in U$.

Note que $\{x'\} \times \mathbb{C}^m = Ker \psi_{x'} \oplus (Ker \psi_{x'})^\perp$. Se $x' \in U$, então, como $\sigma_{x'}$ é isomorfismo,

$$m = \dim Ker \psi_{x'} + n \implies \dim Ker \psi_{x'} = m - n$$

Defina $F := \bigcup_{x \in X} Ker \psi_x \subset X \times \mathbb{C}^m$. Dado $f \in F$, existe um único $x \in X$ tal que $f \in Ker \psi_x$. Defina $\rho : f \in F \mapsto x \in X$ como esse x único. Temos que $\eta := (F, \rho, X)$ é fibrado vetorial.

Como $\{x'\} \times \mathbb{C}^m = Ker \psi_{x'} \oplus (Ker \psi_{x'})^\perp$, dado $(x, u) \in X \times \mathbb{C}^m$ existem $(x, u_1) \in Ker \psi_x$ e $(x, u_2) \in (Ker \psi_x)^\perp$ únicos tais que $(x, u) = (x, u_1) + (x, u_2)$. Defina

$$\begin{aligned}g : X \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \bigcup_{x \in X} E_x \oplus Ker \psi_x \\ (x, u) &\longmapsto (\sigma_x(x, u_2), (x, u_1))\end{aligned}$$

Repare que o contradomínio de g é o espaço total de $\xi \oplus \eta$. Vemos que g é contínua e possui inversa contínua $g^{-1}(e, (x, u)) = (x, u) + \sigma_x^{-1}(e)$. Assim, g é homeomorfismo e satisfaz as condições da definição 1.3.2. Logo, $\xi \oplus \eta \cong \theta_m$.

□

Corolário 1.3.17. *Todo elemento em $K(X)$ escreve-se na forma $[\xi] - [\theta_n]$ para algum fibrado ξ e algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pelo comentário feito na definição 1.3.10, sabemos que um elemento típico de $K(X)$ é da forma $[\xi] - [\eta]$. Pelo teorema 1.3.16, existe η' fibrado vetorial e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\langle \eta \oplus \eta' \rangle = \langle \theta_n \rangle$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} [\xi] - [\eta] &= [\xi] - [\eta] - [\eta'] + [\eta'] = ([\xi] + [\eta']) - ([\eta] + [\eta']) \\ &= [\xi \oplus \eta'] - [\eta \oplus \eta'] \\ &= [\xi'] - [\theta_n] \end{aligned}$$

onde $\xi' := \xi \oplus \eta'$.

□

Teorema 1.3.18. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre um compacto X . Temos que*

$$[\xi] = [\eta] \iff \exists \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \langle \xi \oplus \theta_n \rangle = \langle \eta \oplus \theta_n \rangle$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Usando as propriedades da função de Grothendieck e do fato de que $K(X)$ é grupo, segue que

$$[\xi] + [\theta_n] = [\eta] + [\theta_n] \implies [\xi] = [\eta]$$

($\Rightarrow$) Se $[\xi] = [\eta]$, então $[\xi] - [\eta] = 0$. Isso implica que (vide a definição 1.3.9)

$$G \langle \xi \rangle = \overline{(\langle \xi \rangle + \langle \theta_0 \rangle, \langle \theta_0 \rangle)} = \overline{(\langle \eta \rangle + \langle \theta_0 \rangle, \langle \theta_0 \rangle)} = G \langle \eta \rangle$$

Mas isso implica que existe um fibrado γ tal que

$$\langle \xi \rangle + \langle \theta_0 \rangle + \langle \theta_0 \rangle + \langle \gamma \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \theta_0 \rangle + \langle \theta_0 \rangle + \langle \gamma \rangle$$

donde $\langle \xi \rangle + \langle \gamma \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \gamma \rangle$.

Pelo teorema 1.3.16 existe um fibrado γ' e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\langle \gamma \rangle + \langle \gamma' \rangle = \langle \gamma \oplus \gamma' \rangle = \langle \theta_n \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \xi \oplus \theta_n \rangle &= \langle \xi \rangle + \langle \theta_n \rangle = \langle \xi \rangle + \langle \gamma \oplus \gamma' \rangle = \langle \xi \rangle + \langle \gamma \rangle + \langle \gamma' \rangle \\
&= \langle \eta \rangle + \langle \gamma \rangle + \langle \gamma' \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \gamma \oplus \gamma' \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \theta_n \rangle \\
&= \langle \eta \oplus \theta_n \rangle
\end{aligned}$$

□

Faremos agora a introdução do índice generalizado para famílias contínuas de operadores de Fredholm $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$ definidas num espaço topológico compacto X , onde $\mathcal{F}$, como anteriormente, denota a classe dos operadores de Fredholm agindo em um espaço de Hilbert separável H .

Lema 1.3.19. *Seja H espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e M subespaço de H de codimensão finita. Então se $e_0, e_1, e_2, \dots$ é base ortonormal de H , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $e_0, e_1, \dots, e_n$ e M geram H .*

Demonstração. Se a conclusão fosse falsa, seja $e_{n_0} \notin M$ com n_0 mínimo. Defina recursivamente e_{n_k} tomando $e_{n_k} \notin [e_{n_0}, \dots, e_{n_{k-1}}] + M$. Como o enunciado é suposto falso, então haverá infinitos e_{n_k} nessas condições. Como todos os $e_{n_k} + M$ são linearmente independentes em H/M , segue que $\text{codim } M = \infty$, absurdo. □

Lema 1.3.20. *Seja $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$ aplicação contínua e $x_0 \in X$ fixado. Existem uma vizinhança aberta U de x_0 e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que se $n \geq n_0$ e $x \in U$ então*

- (i) $\text{Im } P_n T(x) = H_n$
- (ii) $\dim \text{Ker } P_n T(x) = \dim \text{Ker } P_n T(x_0)$
- (iii) $\text{ind } T(x) = \text{ind } P_n T(x) = \text{ind } P_n T(x_0) = \text{ind } T(x_0)$
- (iv) *Se X for compacto, então $\text{Im } P_n T(x) = H_n$ e $\dim \text{Coker } P_n T(x) = n$ para todo $x \in X$.*

Aqui, $P_n : H \longrightarrow H_n$ é a projeção ortogonal no subespaço fechado H_n gerado por $e_0, e_1, \dots, e_n$, sendo $e_0, e_1, \dots$ uma base ortonormal de H .

Demonstração. Fazendo $M = \text{Im } T(x_0)$ no lema 1.3.19, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $e_0, e_1, \dots, e_{n_0-1}$ e $\text{Im } T(x_0)$ geram H . Logo, se $n \geq n_0$, como P_n é claramente operador de Fredholm com $\text{Im } P_n = H_n$, temos que $\text{Im } P_n T(x_0) = H_n$. Como consequência, $\dim \text{Coker } P_n T(x_0) = n$.

Para $S \in \mathcal{B}$, considere o operador

$$\begin{aligned}\widehat{S} : H &\longrightarrow H_n \oplus \text{Ker } P_n T(x_0) \\ u &\longmapsto (P_n S u, p u)\end{aligned}$$

onde $p : H \longrightarrow \text{Ker } P_n T(x_0)$ é a projeção. Então $\widehat{T(x_0)}$ é bijetora, contínua e tem uma inversa também contínua como consequência do Teorema da Aplicação Aberta. Identificando $H_n \oplus \text{Ker } P_n T(x_0)$ com H , segue que $\widehat{T(x_0)} \in \mathcal{B}^\times$. Pela prova da proposição 1.1.24, temos que $\mathcal{B}^\times$ é aberto em $\mathcal{B}$, e então existe uma vizinhança de $\widehat{T(x_0)}$ contida em $\mathcal{B}^\times$.

Temos que

$$\left| (\widehat{S}_1 - \widehat{S}_2) u \right| = |(P_n \circ (S_1 - S_2)) u| \leq \|P_n\| \|S_1 - S_2\| |u| \quad \forall u \in H$$

donde

$$\left\| \widehat{S}_1 - \widehat{S}_2 \right\| \leq \|P_n\| \|S_1 - S_2\| = \|S_1 - S_2\|$$

e assim $\phi : S \longmapsto \widehat{S}$ é contínua. Daí segue que existe uma vizinhança aberta V de $T(x_0)$ tal que $\widehat{S}$ é isomorfismo para todo $S \in V$. Pela continuidade de T , existe uma vizinhança U de x_0 tal que $T(x) \in V$ para todo $x \in U$. Ou seja, $\widehat{T(x)}$ é isomorfismo.

Pela sobrejetividade de $\widehat{T(x)}$, segue que $\text{Im } P_n T(x) = H_n$, provando (i). Daí segue que $\dim \text{Coker } P_n T(x) = \dim \text{Coker } P_n T(x_0) = n$.

Como $\text{Ker } P_n T(x) = \widehat{T(x)}^{-1} (\{0\} \oplus \text{Ker } P_n T(x_0))$ e $\widehat{T(x)}$ é isomorfismo, temos também que $\dim \text{Ker } P_n T(x) = \dim \text{Ker } P_n T(x_0)$, provando (ii).

Como $\dim \text{Coker } P_n T(x) = \dim \text{Coker } P_n T(x_0) = n$ e por (ii), (iii) segue da regra do produto (teorema 1.1.23) e do fato de que $\text{ind } P_n = 0$.

Aplicando a parte (i), para todo $x \in X$ existe um aberto U_x e um inteiro n_x tais que as conclusões daquele item se aplicam. Como X é compacto, uma quantidade finita de U_x cobre X , isto é, $X \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Logo, tomando n_0 como o maior dos n_i , $1 \leq i \leq k$, concluímos a demonstração. □

Lema 1.3.21. *Sejam X espaço topológico compacto, $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$ contínua e P_n como no lema 1.3.20. Então*

$$\text{Ker } P_n T := \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } P_n T(x), \pi, X \right)$$

e

$$\text{Coker } P_n T := \left(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Coker } P_n T(x), \rho, X \right) \cong \theta_n$$

são fibrados vetoriais, onde $\pi(x, y) = x$ e $\rho(x, y) = x$ são as projeções naturais.

Demonstração. É simples verificar que as condições da definição 1.3.1 são atendidas. Para a conclusão de que $\text{Coker } P_n T \cong \theta_n$, basta notar que, pela proposição 1.1.7 e pelo lema 1.3.20, $\text{Coker } P_n T(x) \cong (\text{Im } P_n T(x))^\perp = [e_0, e_1, \dots, e_{n-1}]$ para todo $x \in X$. Logo, há um isomorfismo natural entre $\text{Coker } P_n T$ e θ_n . $\square$

Definição 1.3.22. *Seja $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$ família contínua de operadores de Fredholm sobre um espaço de Hilbert separável indexada num compacto X . Definimos o índice generalizado de T (índice de fibrado) por*

$$\text{ind } T := [\text{Ker } P_n T] - [\text{Coker } P_n T] = [\text{Ker } P_n T] - [\theta_n]$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e P_n são como no lema 1.3.20.

Teorema 1.3.23. *O índice generalizado da definição 1.3.22 está bem definido, ou seja, é independente da escolha de $n \in \mathbb{N}$ e da base ortonormal $e_0, e_1, \dots$ de H .*

Demonstração. Repare inicialmente que

$$[\text{Coker } P_{n+1} T] = [\theta_{n+1}] = [\theta_n] + [\theta_1] = [\text{Coker } P_n T] + [\theta_1].$$

Para calcular $[\text{Ker } P_{n+1} T]$, note que, para todo $x \in X$,

$$P_n T(x)|_{(\text{Ker } P_n T(x))^\perp} : (\text{Ker } P_n T(x))^\perp \longrightarrow H_n$$

é bijetora. Então, como H_n é fechado, é consequência do Teorema da Aplicação Aberta que existe um operador inverso contínuo

$$\tilde{T}(x) : H_n \longrightarrow (\text{Ker } P_n T(x))^\perp \subset H$$

Seja $v(x) := \tilde{T}(x)(e_n) \in (\text{Ker } P_n T(x))^\perp$. Assim, $P_n T(x)v(x) = e_n$ para todo $x \in X$. Logo,

$$\text{Ker } P_{n+1} T(x) = \text{Ker } P_n T(x) \oplus \mathbb{C}v(x)$$

onde $\mathbb{C}v(x)$ é o subespaço gerado por $v(x)$. Assim, segue que

$$[\text{Ker } P_{n+1} T] = [\text{Ker } P_n T] + [\theta_1]$$

donde $\text{ind } P_{n+1} T = \text{ind } P_n T$. Isso mostra a independência com relação a $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar a independência com relação à base ortonormal, seja $f_0, f_1, \dots$ outra base ortonormal de H . Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que o subespaço gerado por $f_0, \dots, f_{m-1}$ contenha $e_0, \dots, e_{n-1}$

e, portanto, $(\text{Im } T(x))^\perp$ para todo $x \in X$ em virtude da escolha de n em satisfação ao lema 1.3.20.

Se $\tilde{P}_m$ é a projeção ortogonal de H no subespaço fechado gerado por $f_m, f_{m+1}, \dots$, então segue do que acabamos de mostrar que $\text{ind } \tilde{P}_m T = \text{ind } P_n T$ pois $\tilde{H}_m \subset H_n$.

Para m' suficientemente grande temos $(\text{Im } T(x))^\perp \subset (\tilde{H}_{m'})^\perp$ para todo $x \in X$ (possível pelo lema 1.3.19). Como $\text{ind } \tilde{P}_{m'} T = \text{ind } \tilde{P}_m T$ pela primeira parte, segue o resultado. $\square$

Proposição 1.3.24. *Para $X = \{x\}$ consistindo num único ponto, temos que $K(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Um fibrado ξ com base num único ponto nada mais é do que um espaço vetorial de dimensão finita. Ou seja, $\xi \cong \theta_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Como dois espaços de dimensão finita são isomorfos se e somente se possuem mesma dimensão, então existe uma aplicação natural bijetora de $\text{Vect}(\{x\})$ em $\mathbb{N}$. Denotemos por ϕ essa aplicação, que, dadas as propriedades aditivas da dimensão, é um homomorfismo.

Repare que o grupo de Grothendieck de $\mathbb{N}$ é $\mathbb{Z}$. Temos, assim, o seguinte diagrama comutativo, aos moldes da proposição 1.3.11:

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}(\{x\}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\{x\}) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Repare que $\phi^*([\theta_n] - [\theta_m]) = n - m$, e fica evidente que ϕ^* é isomorfismo em virtude do teorema 1.3.18. $\square$

Corolário 1.3.25. *O índice de fibrado expresso na definição 1.3.22 generaliza aquele expresso por meio da equação (1.1).*

Demonstração. Quando $X = \{x\}$ consiste num único ponto, temos que $K(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ pela proposição 1.3.24. O resultado segue do fato de que esse isomorfismo corresponde à diferença da dimensão dos fibrados e à luz do item (iv) do lema 1.3.20. $\square$

A propriedade a seguir é referida como a funtorialidade do índice de fibrados:

Proposição 1.3.26. *Sejam X e Y espaços topológicos compactos e $f : Y \longrightarrow X$ aplicação contínua. Se $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$ é família contínua de operadores de Fredholm indexada em X , então $\text{ind } Tf = f^*(\text{ind } T)$ em $K(Y)$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que, conforme o lema 1.3.20, $\text{Im } P_n T(x) = H_n$ para todo $x \in X$. Então temos que $\text{Im } P_n T f(y) = H_n$ para todo $y \in Y$. Assim,

$$\text{ind } T = [\text{Ker } P_n T] - [\theta_n^X] \quad \text{e} \quad \text{ind } T f = [\text{Ker } P_n T f] - [\theta_n^Y]$$

Temos que $f^*[\theta_n^X] = [\theta_n^Y]$. Como $f^*[\text{Ker } P_n T] = [f^* \text{Ker } P_n T]$, basta provar que $f^* \text{Ker } P_n T \cong \text{Ker } P_n T f$. Mas as fibras de $f^* \text{Ker } P_n T$ são

$$\{y\} \times \{f(y)\} \times \text{Ker } P_n T f(y)$$

ao passo que as fibras de $\text{Ker } P_n T f(y)$ são

$$\{y\} \times \text{Ker } P_n T f(y)$$

Assim, existe um homeomorfismo natural entre esses dois fibrados dado por

$$\begin{aligned} h : \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times \{f(y)\} \times \text{Ker } P_n T f(y) &\longrightarrow \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times \text{Ker } P_n T f(y) \\ (y, f(y), u) &\longmapsto (y, u) \end{aligned}$$

e que atende às condições da definição 1.3.2. Logo, $f^* \text{Ker } P_n T \cong \text{Ker } P_n T f$.

□

Lema 1.3.27. *Seja X espaço topológico compacto, $Y \subset X$ subespaço fechado e $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial. Se $s \in \Gamma(\xi|_Y)$, então existe $s' \in \Gamma(\xi)$ tal que $s'|_Y = s$.*

Demonstração. Para $x \in X$, seja U_x vizinhança de x , $n_x \in \mathbb{N}$ e $h_x : \pi^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times \mathbb{C}^{n_x}$ homeomorfismo atendendo às condições da definição 1.3.1. Defina

$$\begin{aligned} s_x : U_x \cap Y &\longrightarrow \mathbb{C}^{n_x} \\ y &\longmapsto (p_2 \circ h_x) \circ s(y) \end{aligned}$$

onde $p_2 : X \times \mathbb{C}^{n_x} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_x}$ é a projecção na segunda coordenada. Como $U_x \cap Y$ é fechado em U_x , segue do Teorema da Extensão de Tietze que existe uma aplicação contínua $s'_x : U_x \longrightarrow \mathbb{C}^{n_x}$ tal que $s'_x|_{U_x \cap Y} = s_x$. Definimos a aplicação contínua

$$\begin{aligned} S_x : U_x &\longrightarrow E|_{U_x} \\ y &\longmapsto h_x^{-1}(y, s'_x(y)) \end{aligned}$$

Segue da definição que $S_x \in \Gamma(\xi|_{U_x})$ e $S_x|_{U_x \cap Y} = s$. Como X é compacto, uma quantidade finita $U_1, \dots, U_k$ desses U_x cobre X . Seja ϕ_i partição da unidade subordinada a essa cobertura finita. Definimos, para $i \in \{1, \dots, k\}$, aplicações contínuas

$$S'_i: X \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \phi_i(x)S_i(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 & \text{se } x \notin U_i \end{cases}$$

Segue da definição que $S'_i \in \Gamma(\xi)$. A função $s' := \sum_{i=1}^k S'_i$ satisfaz ao enunciado. □

Lema 1.3.28. *Seja X espaço topológico compacto e $Y \subset X$ subespaço fechado. Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais tais que $\xi|_Y \cong \eta|_Y$ por um homeomorfismo h . Então existe um aberto $U \subset X$ contendo Y e um homeomorfismo $h' : E|_U \longrightarrow F|_U$ satisfazendo às condições da definição 1.3.2 tal que $h'|_{E|_Y} = h$.*

Demonstração. Seja $\text{Hom}(\xi, \eta) = (H, \mu, X)$, onde $H = \bigcup_{x \in X} \text{hom}(E_x, F_x)$ (sendo $\text{hom}(E_x, F_x)$ o espaço das transformações lineares de E_x em F_x) e μ é a projeção natural. Seja $s : y \in Y \longmapsto h|_{E_y} \in H|_Y$. Então s é contínua e $s(y) \in \text{hom}(E_y, F_y)$, donde $s \in \Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta)|_Y)$.

Pelo lema 1.3.27, existe $s' \in \Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta))$ tal que $s'|_Y = s$. Temos que $\text{iso}(E_x, F_x) \subset \text{hom}(E_x, F_x)$. Seja $U := \{x \in X : s'(x) \in \text{iso}(E_x, F_x)\}$. Então $Y \subset U \subset X$. A demonstração da proposição 1.1.24 nos garante que $\text{iso}(E_x, F_x)$ é aberto em $\text{hom}(E_x, F_x)$. Logo, $\bigcup_{x \in X} \text{iso}(E_x, F_x) \subset \bigcup_{x \in X} \text{hom}(E_x, F_x)$ também é aberto. Como $U = s'^{-1} \left(\bigcup_{x \in X} \text{iso}(E_x, F_x) \right)$, segue que U é aberto.

Definindo $h' : e \in E|_U \longmapsto s'(\pi(e))(e) \in F|_U$, temos um homeomorfismo satisfazendo às condições da definição 1.3.2 e também ao enunciado. □

Teorema 1.3.29. *Sejam X e Y espaços topológicos compactos, $f, g : Y \longrightarrow X$ aplicações contínuas e homotópicas. Então $f^* = g^* : K(X) \longrightarrow K(Y)$.*

Demonstração. Seja $H : Y \times I \longrightarrow X$ homotopia entre f e g . Denotaremos $H_t := H|_{Y \times \{t\}}$. Assim, $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Seja $p : (y, t) \in Y \times I \longmapsto y \in Y$ a projeção.

Para um fibrado arbitrário $\xi = (E, \pi, X)$, mostraremos que $\langle f^* \xi \rangle = \langle g^* \xi \rangle$ em $\text{Vect}(Y)$. Daí, $f^*[\xi] = [f^* \xi] = [g^* \xi] = g^*[\xi]$, e provamos o teorema.

Temos, para $t_0 \in I$ fixado, os seguintes espaços totais induzidos

$$H^* E = \bigcup_{(y, t) \in Y \times I} \{(y, t)\} \times E_{H(y, t)}$$

$$H_{t_0}^* E = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{H_{t_0}(y)}$$

e

$$p^* H_{t_0}^* E = \bigcup_{(y,t) \in Y \times I} \{(y,t)\} \times \{y\} \times E_{H_{t_0}p(y,t)} \cong \bigcup_{(y,t) \in Y \times I} \{(y,t)\} \times E_{H_{t_0}p(y,t)}$$

Restringindo-nos a $Y \times \{t_0\}$, segue que

$$H^* E|_{Y \times \{t_0\}} = \bigcup_{(y,t_0) \in Y \times I} \{(y,t_0)\} \times E_{H(y,t_0)} \cong \bigcup_{(y,t_0) \in Y \times \{t_0\}} \{y\} \times E_{H_{t_0}(y)}$$

e

$$p^* H_{t_0}^* E|_{Y \times \{t_0\}} = \bigcup_{(y,t_0) \in Y \times I} \{(y,t_0)\} \times E_{H_{t_0}p(y,t_0)} \cong \bigcup_{(y,t_0) \in Y \times \{t_0\}} \{y\} \times E_{H_{t_0}(y)}$$

em que os homeomorfismos são naturais e satisfazem às condições da definição 1.3.2. Logo, segue que $H^* \xi|_{Y \times \{t_0\}} \cong p^* H_{t_0}^* \xi|_{Y \times \{t_0\}}$ enquanto fibrados vetoriais sobre $Y \times \{t_0\} \subset Y \times I$ por um homeomorfismo que denotaremos por $h : p^* H_{t_0}^* E|_{Y \times \{t_0\}} \longrightarrow H^* E|_{Y \times \{t_0\}}$.

Pelo lema 1.3.28 existe um aberto $U \subset Y \times I$ com $Y \times \{t_0\} \subset U$ e um homeomorfismo $h' : p^* H_{t_0}^* E|_U \longrightarrow H^* E|_U$ satisfazendo as condições da definição 1.3.2 e tal que $h'|_{p^* H_{t_0}^* E|_{Y \times \{t_0\}}} = h$.

Repare que $U = Y \times I_{t_0}^\delta$, onde $I_{t_0}^\delta := (-\delta + t_0, t_0 + \delta) \subset I$. Assim, temos os seguintes espaços totais

$$H^* E|_{Y \times I_{t_0}^\delta} = \bigcup_{(y,t) \in Y \times I_{t_0}^\delta} \{(y,t)\} \times E_{H(y,t)}$$

e

$$p^* H_{t_0}^* E|_{Y \times I_{t_0}^\delta} = \bigcup_{(y,t) \in Y \times I_{t_0}^\delta} \{(y,t)\} \times E_{H_{t_0}p(y,t)}$$

Se π^1 é a projeção de $H^* \xi$, π^2 a de $H_{t_0}^* \xi$ e π^3 a de $p^* H_{t_0}^* \xi$, pelo isomorfismo subentendido por h' vem que $\pi^1|_{Y \times I_{t_0}^\delta} \circ h' = \pi^3|_{Y \times I_{t_0}^\delta}$. Desse modo,

$$h'((y,t), (y,e)) = ((y,t), p_3 \circ h'((y,t), (y,e))) \quad \text{e} \quad h'^{-1}((y,t), e) = ((y,t), y, p_4 \circ h'^{-1}((y,t), e))$$

onde $p_3 : (Y \times I) \times E \longrightarrow E$ e $p_4 : (Y \times I) \times (Y \times E)$ são as projeções na terceira e quarta coordenadas, respectivamente.

O objetivo agora é mostrar que os fibrados $H_{t_0}^*\xi$ e $H_t^*\xi$ são isomorfos. Para $t \in I_{t_0}^\delta$ fixo, temos

$$H_t^*E = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{H_t(y)}$$

Definimos

$$\begin{aligned} k : \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{H_t(y)} &\longrightarrow \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times E_{H_{t_0}(y)} \\ (y, e) &\longmapsto (y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e)) \end{aligned}$$

e temos que k satisfaz às condições da definição 1.3.2, donde $H_{t_0}^*\xi \cong H_t^*\xi$. Segue que $\langle H_t^*\xi \rangle = \langle H_{t_0}^*\xi \rangle$ em $Vect(Y)$ para todo $t \in I_{t_0}^\delta$. Portanto, como t_0 é arbitrário, a aplicação $\Psi : t \in I \mapsto \langle H_t^*\xi \rangle \in Vect(Y)$ é localmente constante. Usando o fato de que I é compacto, segue que um número finito de abertos I_t^δ cobre I , e então olhando-se para as interseções vemos que Ψ é constante. $\square$

Abaixo demonstramos a invariância homotópica do índice de fibrados. Ou seja, duas famílias homotópicas de operadores de Fredholm produzem o mesmo índice generalizado.

Teorema 1.3.30. *Sejam $T, S : X \longrightarrow \mathcal{F}$ famílias de operadores de Fredholm indexadas num espaço topológico compacto X tais que $T \sim S$. Então $ind T = ind S$.*

Demonstração. Seja $H : X \times I \longrightarrow \mathcal{F}$ homotopia entre T e S . Ou seja, nos termos da observação 1.2.2, temos que

$$H \circ i_0 = T \quad \text{e} \quad H \circ i_1 = S$$

Assim, segue da proposição 1.3.26 que

$$ind T = ind H i_0 = i_0^*(ind H)$$

e

$$ind S = ind H i_1 = i_1^*(ind H)$$

Como $i_0^*(ind H) = i_1^*(ind H)$ pelo teorema 1.3.29, segue o resultado. $\square$

O teorema 1.3.30 nos permite considerar o índice de fibrado como uma aplicação bem definida de $[X, \mathcal{F}]$ em $K(X)$. No entanto, temos mais do que isso. Introduzindo uma noção de produto em $[X, \mathcal{F}]$ que torne este conjunto um grupo, o índice generalizado representa um isomorfismo desse grupo com $K(X)$. Esse resultado é devido a Atiyah e Jänich.

Definição 1.3.31. *Seja X um espaço topológico compacto. Dadas $T, S : X \longrightarrow \mathcal{F}$ contínuas definimos a família contínua $TS : x \in X \longmapsto T(x) \circ S(x) \in \mathcal{F}$. A partir daí, definimos um produto $\bullet$ em $[X, \mathcal{F}]$ por $[T] \bullet [S] := [TS]$.*

Este produto está bem definido pois se $H : X \times I \longrightarrow \mathcal{F}$ é homotopia entre T e T' e $L : X \times I \longrightarrow \mathcal{F}$ é homotopia entre S e S' , então $P : (x, t) \in X \times I \longmapsto H(x, t) \circ L(x, t) \in \mathcal{F}$ é homotopia entre TS e $T'S'$. Assim, $([X, \mathcal{F}], \bullet)$ tem estrutura de semigrupo.

Não nos preocuparemos mais com o $\bullet$ ao escrever o produto; assim, com frequência escreveremos $[T][S]$ ou $[TS]$ para designá-lo.

Lema 1.3.32. *$ind : [X, \mathcal{F}(H)] \longrightarrow K(X)$ define um homomorfismo de semigrupos.*

Demonstração. Devemos mostrar que $ind TS = ind T + ind S$. Para isso, repare que $ind Id = 0$. Além disso, defina $S \oplus T : x \in X \longmapsto S(x) \oplus T(x) \in \mathcal{F}(H \times H)$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que se $n \geq n_0$ então $Im P_n S(x) = Im P_n T(x) = H_n$ para todo $x \in X$.

Se $e_0, e_1, e_2, \dots$ é base ortonormal de H , então $(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (0, e_0), (0, e_1), \dots$ é base ortonormal de $H \times H$. Defina $\tilde{H}_n$ como o fecho do subespaço gerado por $(e_n, 0), (e_{n+1}, 0), \dots, (0, e_n), (0, e_{n+1}), \dots$ e $\tilde{P}_{2n}$ a projeção de $H \times H$ nesse subespaço. Temos que $dim \tilde{H}_n^\perp = 2n$. Assim,

$$ind(S \oplus T) = [Ker P_{2n}(S \oplus T)] - [\theta_{2n}] = [Ker P_{2n}(S \oplus T)] - [\theta_n] - [\theta_n]$$

Por outro lado, um olhar sobre as fibras nos permite exibir um isomorfismo natural entre $Ker \tilde{P}_{2n}(S \oplus T)$ e $Ker P_n S \oplus Ker P_n T$. Logo,

$$[Ker \tilde{P}_{2n}(S \oplus T)] = [Ker P_n S] + [Ker P_n T]$$

e segue que $ind(S \oplus T) = ind(S) + ind(T)$.

Tendo em mente que $ind Id = 0$, mais a homotopia dada pela equação (1.5), o teorema 1.3.30 e também o fato de que um operador do tipo $S \oplus T$ pode ser escrito na forma

$$S \oplus T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} TS & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} = TS \oplus Id$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
ind TS &= ind TS + ind Id = ind (TS \oplus Id) \\
&= ind(S \oplus T) = ind S + ind T \\
&= ind T + ind S
\end{aligned}$$

□

Enfim chegamos ao Teorema de Atiyah-Jänich:

Teorema 1.3.33. $ind : [X, \mathcal{F}] \longrightarrow K(X)$ é um isomorfismo

Demonstração. A ideia da prova é mostrar que a sequência abaixo é exata:

$$[X, \mathcal{B}^\times] \longrightarrow [X, \mathcal{F}] \xrightarrow{ind} K(X) \longrightarrow 0$$

Aqui, os dois primeiros semigrupos estão dotados com o produto $\bullet$ da definição 1.3.31. O homomorfismo da esquerda é a inclusão. Com o Teorema de Kuiper (1.2.7), temos que $[X, \mathcal{B}^\times] = 0$, e daí segue o resultado.

Etapas 1: Inicialmente, note-se que $ind T = 0$ para todo $T \in [X, \mathcal{B}^\times]$. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, $Ker P_n T(x) \cong H_n^\perp$ para todo $x \in X$. Daí segue que $[Ker P_n T] = [\theta_n]$, donde $ind T = 0$.

Etapas 2: Seja agora $T : X \longrightarrow \mathcal{F}$ contínua com $ind T = 0$. Para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$[Ker P_n T] - [\theta_n] = ind T = 0 \quad \implies \quad [Ker P_n T] = [\theta_n]$$

Assim, segue do teorema 1.3.18 que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$Ker P_n T \oplus \theta_p \cong \theta_n \oplus \theta_p \cong \theta_{n+p}$$

Pela demonstração do teorema 1.3.23, temos que $Ker P_n T \oplus \theta_p \cong Ker P_m T$, onde $m = n + p$. Assim, existe um isomorfismo

$$\phi : Ker P_m T \cong \theta_m \quad \text{tal que} \quad \phi(Ker P_m T(x)) = \{x\} \times H_m^\perp \quad \forall \quad x \in X$$

Defina $\Phi : X \longrightarrow \mathcal{K}$ família de operadores de posto finito e, portanto, compactos, por

$$\Phi(x)(y) := \begin{cases} \phi(x)y & \text{se } y \in \text{Ker } P_m T(x) \\ 0 & \text{se } y \in (\text{Ker } P_m T(x))^\perp \end{cases}$$

Pelo teorema de Atkinson (1.1.20), $(P_m T + t\Phi)(x) \in \mathcal{F}$ para todo $(x, t) \in X \times I$. Assim, $[P_m T] = [P_m T + \Phi]$ em $[X, \mathcal{F}]$. Mas, por construção, $(P_m T + \Phi)(x) \in \mathcal{B}^\times$ para todo $x \in X$. Assim, em conjunto com a etapa 1, concluímos a prova da exatidão no meio da sequência.

Etapa 3: Resta provar a sobrejetividade de $\text{ind} : [X, \mathcal{F}] \longrightarrow K(X)$. Pelo corolário 1.3.17, um elemento típico de $K(X)$ escreve-se como $[\xi] - [\theta_n]$ para algum fibrado ξ e algum $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a família constante $\text{desl}^+ : X \longrightarrow \mathcal{F}$, que estabelece o operador desl^+ da proposição 1.1.28 para todo $x \in X$, tem $\text{ind } \text{desl}^+ = -[\theta_1]$.

Assim, se exibirmos uma família $S : X \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $\text{ind } S = [\xi]$, teremos que $\text{ind } (\text{desl}^+)^n S = [\xi] - [\theta_n]$, e então provamos a sobrejetividade.

Seja ξ um fibrado vetorial sobre X . Se X consiste num único ponto, então $\xi = \theta_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e fazemos $S := (\text{desl}^-)^m$.

Para o caso geral, segue do teorema 1.3.16 que existem um fibrado η e um número $m \in \mathbb{N}$ tais que $\xi \oplus \eta \cong \theta_m$. Se E e F são os espaços totais, respectivamente, de ξ e η , então o isomorfismo nos permite construir uma projeção $\pi_x : \mathbb{C}^m \longrightarrow E$ para todo $x \in X$.

Seja H espaço de Hilbert separável. Para $(u, h) \in \mathbb{C}^m \times H$, considere o elemento de $\text{Hom}(\mathbb{C}^m, H)$ dado por

$$v \in \mathbb{C}^m \longmapsto \langle u, v \rangle h \in H$$

e que denotaremos pelo produto tensorial $u \otimes h$, tendo em mente o isomorfismo entre $\text{Hom}(\mathbb{C}^m, H)$ e $\mathbb{C}^m \otimes H$, onde aqui usamos o fato de que $\mathbb{C}^m$ é reflexivo. Assim, temos que

$$\text{Hom}(\mathbb{C}^m, H) = \left\{ \sum_{i=1}^p u_i \otimes h_i \quad : \quad p \in \mathbb{N}, \quad u_i \in \mathbb{C}^m, \quad h_i \in H \right\}$$

onde $(\lambda u) \otimes h = u \otimes (\lambda h)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(u_1 + u_2) \otimes (h_1 + h_2) = u_1 \otimes h_1 + u_1 \otimes h_2 + u_2 \otimes h_1 + u_2 \otimes h_2$.

Define-se um produto escalar em $\mathbb{C}^m \otimes H$ por

$$\left\langle \sum_{i=1}^p u_i \otimes h_i, \sum_{j=1}^p u'_j \otimes h'_j \right\rangle := \sum_{i,j=1}^p \langle u_i, u'_j \rangle \langle h_i, h'_j \rangle$$

e assim $\mathbb{C}^m \otimes H$ torna-se um espaço de Hilbert separável, visto que $\{(f_i, e_j) : 1 \leq i \leq m \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$ é base ortonormal se f_i e e_j forem bases ortonormais de $\mathbb{C}^m$ e H , respectivamente. Como

todos os espaços de Hilbert separáveis são isomorfos, podemos construir nossa família de operadores sobre qualquer Hilbert separável.

Operadores lineares $T \in \mathcal{B}(H)$ e $R \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^m)$ dão origem a um operador $R \otimes T \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, H)$ dado por

$$(R \otimes T)(u \otimes h) := R(u) \otimes T(h)$$

Defina, para $x \in X$,

$$S(x) := (\pi_x \otimes \text{desl}^-) + (Id_{\mathbb{C}^m} - \pi_x) \otimes Id_H$$

Assim, para $i \geq 1$,

$$S(x)(u \otimes e_i) = \pi_x(u) \otimes e_{i-1} + u \otimes e_i - \pi_x(u) \otimes e_i$$

e, se $u \in E_x$,

$$S(x)(u \otimes e_1) = u \otimes 0 + u \otimes e_1 - u \otimes e_1 = 0$$

Assim, segue que $\text{Im } S(x) = \text{Hom}(\mathbb{C}^m, H)$ e $\text{Ker } S(x) = \{u \otimes e_1 : u \in E_x\} \cong E_x$. Logo, $\text{ind } S = [\text{Ker } S] - 0 = \xi$. $\square$

Corolário 1.3.34. *As componentes conexas de $\mathcal{F}$ estão em correspondência bijetora com $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Basta fazer $X = \{p\}$, espaço de um único ponto, no teorema 1.3.33. Assim, $[\{p\}, \mathcal{F}]$ corresponde às componentes conexas de $\mathcal{F}$, e o resultado segue do isomorfismo $K(\{p\}) \cong \mathbb{Z}$ da proposição 1.3.24. $\square$

1.4 Exemplos

Até então exibimos vários resultados sobre operadores de Fredholm. Em contrapartida, nossos exemplos até aqui limitam-se a

- (i) operadores invertíveis;
- (ii) operadores da forma $Id + K$, onde K é compacto (e os compactos são os operadores de posto finito ou limite de operadores de posto finito; vide os teoremas 1.1.18 e 1.1.16);

(iii) os operadores $desl^+$ e $desl^-$ da proposição 1.1.28.

Introduziremos agora uma importante classe de operadores de Fredholm, os operadores de Wiener-Hopf.

Definição 1.4.1. *Seja S^1 o círculo unitário complexo. Considere o espaço de Hilbert $L^2(S^1)$. Uma base ortonormal desse espaço é dada pelas funções $z \mapsto z^n$ para $n \in \mathbb{Z}$. Seja H_n o subespaço gerado pelos z^k com $k \geq n$. Nessas condições, temos que $z^0, z^1, \dots, z^{n-1}$ formam uma base do complemento ortogonal $H_n^\perp$ de H_n em H_0 .*

Seja $P : L^2(S^1) \rightarrow H_0$ a projeção ortogonal e $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o operador de Wiener-Hopf discreto de f por

$$\begin{aligned} T_f : H_0 &\longrightarrow H_0 \\ u &\longmapsto P(uf) \end{aligned}$$

Se $\widehat{g}(n) := \langle g, z^n \rangle$ denota o n -ésimo coeficiente de Fourier de g , temos que

$$(\widehat{T_f u})(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(n-k) \widehat{u}(k) \quad (1.7)$$

Proposição 1.4.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} T : C^0(S^1) &\longrightarrow \mathcal{B}(H_0) \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

é contínua e linear, onde $C^0(S^1)$ denota as aplicações contínuas com valores em $\mathbb{C}$ e no domínio usamos a topologia dada pela norma do supremo.

Demonstração. Que T é linear segue imediatamente da definição. Para a continuidade, temos que, para $f \in C^0(S^1)$ e $u \in L^2(S^1)$,

$$\|T_f\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|T_f u\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \sup_{|z|=1} |P(uf)(z)| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \sup_{|z|=1} |u(z)| |f(z)| \leq \|f\|$$

□

O teorema a seguir mostra que T_f é um operador de Fredholm cujo índice está intimamente relacionado com o número de voltas dadas por f em torno da origem. Esse resultado é conhecido como a fórmula discreta do índice de Gohberg-Krein.

Teorema 1.4.3. *Se $f \in C^0(S^1)$ e $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, então*

(i) $T_f : H_0 \longrightarrow H_0$ é um operador de Fredholm;

(ii) $\text{ind } T_f = -W(f, 0)$, onde $W(f, 0)$ denota o número de voltas dadas por f ao redor da origem contadas no sentido anti-horário.

Demonstração. Etapla 1: Seja $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}$ a projeção canônica do teorema 1.1.20. Pela proposição 1.4.2, segue que

$$\pi \circ T : C^0(S^1) \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}$$

é linear e contínua.

Etapla 2: Seja $\tilde{C}$ subálgebra de $C^0(S^1)$ consistindo nas funções contínuas representadas por uma série de Fourier finita. Sejam $f, g \in \tilde{C}$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f = \sum_{l=-n}^n \hat{f}(l) z^l \quad \text{e} \quad g = \sum_{l=-n}^n \hat{g}(l) z^l$$

Temos que os coeficientes de Fourier do produto são dados por

$$(\widehat{fg})(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j-k) \hat{g}(k) \quad j \in \mathbb{Z}$$

Essa soma ocorre somente sobre um número finito de termos. Se $k \geq n$, então, usando a equação (1.7), vem que

$$\widehat{T_g z^k}(l) = \sum_{p=0}^{\infty} \hat{g}(l-p) \hat{z^k}(p) = \hat{g}(l-k)$$

donde

$$T_g z^k = \sum_{l=0}^{n+k} \hat{g}(l-k) z^l$$

Aplicando T_f , temos que

$$\widehat{T_f(T_g z^k)}(j) = \sum_{p=0}^{n+k} \hat{f}(j-p) \hat{g}(p-k)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{T_{fg}z^k}(j) &= \sum_{p=0}^{\infty} (\widehat{fg})(j-p) \widehat{z^k}(p) = (\widehat{fg})(j-k) \\
&= \sum_{q=-n}^n \widehat{f}(j-k-q) \widehat{g}(q) = \sum_{p=0}^{n+k} \widehat{f}(j-p) \widehat{g}(p-k) \\
&= \widehat{T_f(T_g z^k)}(j)
\end{aligned}$$

Logo, se $k \geq n$, temos que

$$T_f T_g(z^k) = T_{fg}(z^k)$$

Portanto, os operadores $T_f T_g$ e T_{fg} coincidem no subespaço H_n de H_0 . Como a codimensão de H_n é finita em H_0 , segue que $T_f T_g - T_{fg}$ é operador de posto finito e, portanto, compacto. Assim, passando ao quociente, temos

$$(\pi \circ T)(fg) = (\pi \circ T)(f)(\pi \circ T)(g)$$

Ou seja, $\pi \circ T$ é homomorfismo de álgebras quando restrito à subálgebra $\widetilde{C}$.

Etapla 3: Como consequência do Teorema da Aproximação de Weierstrass, $\widetilde{C}$ é denso em $C^0(S^1)$. Como $\pi \circ T$ é contínua, a propriedade multiplicativa também se aplica a $C^0(S^1)$. Ou seja, $\pi \circ T : C^0(S^1) \rightarrow \mathcal{B}/\mathcal{K}$ é homomorfismo de álgebras de Banach.

Etapla 4: Como $(\pi \circ T)(1) = Id + \mathcal{K}$, segue que $\pi \circ T$ leva funções invertíveis em elementos invertíveis de $\mathcal{B}/\mathcal{K}$. Logo, se $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$, então $\pi(T_f) \in (\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$, donde $T_f \in \mathcal{F}$ pelo teorema 1.1.20. Isso prova (i).

Para (ii), começamos com o caso $f(z) = z^m$. Na base canônica z^k , onde $k \in \mathbb{Z}$, temos que, pela equação (1.7),

$$T_{z^m} = \begin{cases} (desl^+)^m & \text{se } m \geq 0 \\ (desl^-)^{|m|} & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Assim, $ind T_{z^m} = -m$ pela proposição 1.1.28.

Pela continuidade de T e pela invariância homotópica do índice (1.3.30), segue que $ind T_f = -m$ se $f \in C^0(S^1)$ com $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S^1$ e $f \sim z^m$ por uma homotopia em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

No entanto, um resultado de topologia diz que duas curvas são homotópicas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ se, e somente se, dão o mesmo número de voltas em torno da origem (como veremos no teorema 2.4.1). Como $W(z^m, 0) = m$, onde $W(z^m, 0)$ denota o número de voltas de z^m em torno da origem, segue que $ind T_f = -W(f, 0)$.

□

Exemplo 2. Seja $P : H_0 \longrightarrow H_0$ projeção, onde H_0 é como na definição 1.4.1. Para $g \in C^\infty(S^1)$, defina o operador de Toeplitz de g por

$$\tilde{T}_g := gP + (Id - P)$$

Repare que

$$\tilde{T}_g = \begin{cases} T_g & \text{em } C^\infty(S^1) \cap H_0 \\ Id & \text{em } C^\infty(S^1) \cap H_0^\perp \end{cases}$$

onde T_g é o operador de Wiener-Hopf discreto de g , visto que

$$\tilde{T}_g(z^n) = \begin{cases} gz^n & \text{se } n \geq 0 \\ z^n & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Logo, pela proposição 1.1.8 e pelo teorema 1.4.3, temos que

$$\text{ind } \tilde{T}_g = \text{ind } T_g + \text{ind } Id = -W(g, 0) + 0 = -W(g, 0)$$

Em particular, para $g(x) = e^{\pi i(x-1)}$, obtemos

$$\text{ind } \tilde{T}_g = -1$$

onde aqui $x \in [-1, 1]$ e usamos o homeomorfismo $S^1 \cong [-1, 1]$.

Exemplo 3. Tendo em mente o isomorfismo $H \otimes \mathbb{C}^n \cong \text{Hom}(H, \mathbb{C}^n)$, dada uma aplicação contínua $f : S^1 \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ podemos definir o seu operador de Wiener-Hopf como

$$T_f := PM_f|_{H_0 \otimes \mathbb{C}^n} : H_0 \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow H_0 \otimes \mathbb{C}^n$$

onde $P : H \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow H_0 \otimes \mathbb{C}^n$ é a projeção e M_f é a multiplicação pela função matricial f . De forma semelhante ao que foi feito no teorema 1.4.3, pode-se provar que T_f é um operador de Fredholm e seu índice depende apenas da classe de homotopia de f em $[S^1, GL(n, \mathbb{C})]$.

Exemplo 4. Generalizando, seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial de dimensão n sobre um espaço topológico compacto X . Considere uma função $f(z, x) \in \text{Iso}(E_x, E_x)$ que depende continuamente de $z \in S^1$ e de $x \in X$. De modo análogo ao exemplo anterior, definimos

$$T_{f(.,x)} := PM_f|_{H_0 \otimes E_x} : H_0 \otimes E_x \longrightarrow H_0 \otimes E_x$$

Obtemos assim uma família contínua de operadores de Fredholm $x \in X \mapsto T_f(., x)$, para a qual podemos designar um índice de fibrado $\text{ind} T_f \in K(X)$, nos termos da definição 1.3.22, e que depende apenas da classe de homotopia de f .

Capítulo 2

Operadores Pseudodiferenciais e o Teorema de Atiyah-Singer

Neste capítulo relembremos de forma rápida alguns elementos da teoria de operadores diferenciais, e estaremos interessados em operadores lineares. Assim, poderemos aplicar a teoria desenvolvida no capítulo 1 quando os operadores em questão forem operadores de Fredholm. Em seguida, generalizamos para uma classe mais ampla, a de operadores pseudodiferenciais. É definido o símbolo de um operador e dada atenção especial à classe dos operadores elípticos. Nos restringimos aqui ao material que necessitaremos para a demonstração do Teorema de Atiyah-Singer. Para uma apresentação detalhada dos operadores pseudodiferenciais, ver [20] e [21].

A partir do símbolo, definiremos um conceito de índice para operadores pseudodiferenciais elípticos. Mostramos que tal índice depende apenas da classe de homotopia do símbolo. Apresentamos a teoria de forma genérica para operadores entre C^∞ -fibrados vetoriais, ainda que o escopo deste trabalho sejam os operadores pseudodiferenciais elípticos sobre $\mathbb{R}^n$. Para eles, o símbolo pode ser visto, pontualmente, como uma matriz complexa invertível em $GL(n, \mathbb{C})$, o grupo linear. Como o índice depende apenas da classe de homotopia do símbolo, estamos interessados em compreender melhor a topologia de $GL(n, \mathbb{C})$. A partir daí extrairemos conclusões sobre o índice, que culminam justamente no resultado principal da dissertação, a saber, o Teorema de Atiyah-Singer.

2.1 Operadores Diferenciais

No que segue, diferenciabilidade significa ser de classe C^∞ .

Definição 2.1.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ função diferenciável, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ multi-índice.*

Definimos

$$D^\alpha f := \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.1)$$

onde $i^2 = -1$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e x_k denota o k -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.2. Um operador diferencial linear de ordem k em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação linear $P : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que pode ser escrita como

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) (D^\alpha u)(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo α .

Dotando-se $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de uma topologia dada pela família de seminormas

$$\|f\|_{m,K} := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup\{|D^\alpha f(x)| : x \in K\}$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto, a convergência em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$f_n \rightarrow 0 \iff D^\alpha f_n \rightarrow 0$$

para todo α uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Como consequência, todo operador diferencial linear é contínuo com $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ munido dessa topologia.

Observação 2.1.3. Pode-se estender a definição 2.1.2 para contemplar funções vetoriais diferenciáveis, isto é, $f \in C_m^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m : f \text{ é diferenciável}\}$. Assim, neste caso temos operadores

$$\begin{aligned} P : C_m^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C_m^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u \end{aligned}$$

onde aqui deve-se entender D^α como derivação coordenada a coordenada e os a_α são matrizes $m \times m$ cujas entradas são funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Até aqui trabalhamos apenas com diferenciais em $\mathbb{R}^n$ para fins de simplificação. No entanto, poderíamos considerar diferenciais e, conseqüentemente, operadores diferenciais, definidos sobre uma variedade diferenciável X arbitrária, ou mesmo entre fibrados vetoriais. Vide a definição 2.1.5 e seguintes. Antes, apresentamos o exemplo abaixo.

Exemplo 5. Para a equação de Laplace definida em $X = \text{disco complexo unitário}$, temos um operador diferencial linear

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(X) &\longrightarrow C^\infty(X) \\ f &\longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

submetido à condição de bordo

$$\begin{aligned} R : C^\infty(X) &\longrightarrow C^\infty(\partial X) \\ f &\longmapsto f|_{\partial X} \end{aligned}$$

O par de operadores (Δ, R) é Fredholm de índice 0.

Para ver isso, primeiro note que $\text{Ker}(\Delta, R)$ consiste em funções da forma $u + iv$, onde u e v têm valores em $\mathbb{R}$. Como os coeficientes de Δ e R também são reais, assumimos $v = 0$ sem perda de generalidade.

Repare que temos aqui um problema de Dirichlet no disco unitário dado por

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } X \\ u = 0 & \text{em } \partial X \end{cases}$$

Assim, considere uma solução real u com $\Delta u = 0$ e $u = 0$ em ∂X . Defina a 1-forma

$$\omega := u \wedge *du$$

onde $*du$ denota a estrela de Hodge de du (ver, por exemplo, [10]). Vale $*dx = dy$ e $*dy = -dx$. Logo, como $du = u_x dx + u_y dy$ vem que

$$*du = u_x dy - u_y dx$$

donde

$$\begin{aligned} du \wedge *du &= (u_x dx + u_y dy) \wedge (u_x dy - u_y dx) = (u_x^2 + u_y^2) dx \wedge dy \\ &= |\nabla u|^2 dx \wedge dy \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} d * du &= d(u_x dy - u_y dx) = (u_{xx} + u_{yy}) dx \wedge dy \\ &= \Delta u \, dx \wedge dy \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, juntando tudo vem que se $u \in \text{Ker}(\Delta, R)$ temos que

$$d\omega = du \wedge *du + u \wedge d * du$$

Segue do Teorema de Stokes que

$$\int_X dw = \int_{\partial X} u \wedge *du = 0$$

pois $u|_{\partial X} = 0$ e então

$$\int_X du \wedge *du = - \int_X u \wedge d * du$$

Por outro lado,

$$\int_X |\nabla u|^2 dx \wedge dy = \int_X du \wedge *du = - \int_X u \wedge d * du = - \int_X u \Delta u dx \wedge dy = 0$$

pois $\Delta u = 0$. Assim, segue que $\nabla u = 0$ em X , donde u é constante. Como $u = 0$ em ∂X , segue que $u = 0$ em X , donde $\text{Ker}(\Delta, R) = \{0\}$.

Para ver que $\text{Coker}(\Delta, R) = \{0\}$, tendo em mente a proposição 1.1.7, sejam $L \in C^\infty(X)$ e $l \in C^\infty(\partial X)$ tais que (L, l) é ortogonal a $\text{Im}(\Delta, R)$, isto é,

$$\int_X (\Delta u) L + \int_{\partial X} ul = 0 \quad \forall \quad u \in C^\infty(X)$$

De um modo geral, temos que

$$\begin{aligned} d(u * dL - L * du) &= du \wedge *dL + u \wedge (d * dL) - dL \wedge *du - L \wedge (d * du) \\ &= u \wedge (d * dL) - L \wedge (d * du) \end{aligned} \quad (2.3)$$

visto que

$$\begin{aligned} du \wedge *dL - dL \wedge *du &= (u_x dx + u_y dy) \wedge (L_x dy - L_y dx) - (L_x dx + L_y dy) \wedge (u_x dy - u_y dx) \\ &= (u_x L_x + u_y L_y) dx \wedge dy - (L_x u_x + L_y u_y) dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Considere u tal que $\text{supp } u \subset X^\circ$. Temos que, pelas equações (2.2) e (2.3) em conjunto com o Teorema de Stokes,

$$\int_X u(\Delta L) - \int_X (\Delta u)L = \int_X u(d * dL) - (d * du)L = \int_{\partial X} u * dL - L * du = 0$$

Logo, como $\int_X (\Delta u)L = 0$, segue que $\Delta L = 0$. Para u geral, temos como consequência que

$$\begin{aligned} \int_{\partial X} ul &= - \int_X (\Delta u)L = - \int_X L(d * du) = \int_X u(d * dL) - L(d * du) \\ &= \int_{\partial X} u * dL - L * du = \int_{\partial X} (u(xL_x + yL_y)) - L(xu_x + yu_y) \end{aligned}$$

Isso implica que $l = xL_x + yL_y$ e $L|_{\partial X} = 0$, e podemos aplicar a primeira parte para concluir que $L = 0$, donde $\text{Coker}(\Delta, R) = \{0\}$.

Assim, (Δ, R) é de fato um operador de Fredholm de índice 0, como afirmado anteriormente.

Abaixo recordamos, sob a forma de definição, a transformada de Fourier e algumas de suas propriedades.

Definição 2.1.4. Seja $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções diferenciáveis rapidamente decrescentes, ou seja, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que f é diferenciável e $|f(x)q(x)| \rightarrow 0$ para qualquer polinômio q se $|x| \rightarrow \infty$. Se $f \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier é definida como

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

onde $\langle x, \xi \rangle$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Valem as seguintes propriedades:

(i) *Fórmula de Inversão de Fourier:*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

(ii) Se F denota a transformada de Fourier (isto é, $Ff := \widehat{f}$), M denota o operador multiplicação (ou seja, $M^p f := x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} f$) temos que

$$M^p D^q F = (-1)^{|q|} F D^p M^q$$

para multi-índices $p, q \in \mathbb{Z}_+^n$.

(iii) *Relação de Parseval:*

$$\int f(x)\overline{g(x)}dx = (2\pi)^{-n} \int \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx$$

(iv) $F : C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ é linear e bijetora

(v) *Podemos estender F a $L^2(\mathbb{R}^n)$ explorando o fato de que $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ é subespaço denso e obtermos um isomorfismo $F : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$*

Para clarear as ideias e reforçar a notação, apresentamos o exemplo a seguir, que utiliza a transformada de Fourier para "resolver" a equação de Laplace.

Exemplo 6. *Queremos resolver, ainda que formalmente, a equação de Laplace dada por*

$$f = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Para $j = 1, \dots, n$, defina o multi-índice $p^j := (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^n$, que se anula em toda coordenada exceto na j -ésima, em que vale 2. Assim, pela propriedade (ii) da definição 2.1.4, temos

$$\begin{array}{ccc} M^{p^j} F u & = & F D^{p^j} u \\ \parallel & & \parallel \\ x_j^2 \widehat{u} & = & -\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}} \end{array}$$

Somando para $j = 1, \dots, n$, vem que

$$-(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \widehat{u} = \widehat{\Delta u}$$

Assim, se $\Delta u = f$, então

$$\widehat{u} = -|x|^{-2} \widehat{f}$$

Usando a transformada inversa, vem

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} -|\xi|^{-2} \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

que é uma representação explícita da solução da equação de Laplace.

Nosso objetivo não é utilizar a transformada de Fourier para estudar equações diferenciais. Na verdade, a classe de operadores diferenciais também não é nosso objeto principal. No entanto, ao utilizar a transformada de Fourier sobre operadores diferenciais, temos uma motivação para definir os operadores pseudodiferenciais, que consistirão no objeto principal de nosso estudo a partir da próxima sessão.

Até aqui restringimo-nos a $\mathbb{R}^n$. No entanto, como já havíamos mencionado, podemos definir operadores diferenciais em variedades C^∞ e entre fibrados vetoriais de classe C^∞ . Dado o escopo deste texto, não entraremos de forma pormenorizada nestas possibilidades. No entanto, como necessitaremos de algumas dessas noções mais à frente, introduzimos alguns conceitos iniciais.

Definição 2.1.5. *Uma variedade topológica sem bordo é um espaço topológico de Hausdorff X localmente euclidiano. Ou seja, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (ou, equivalentemente, a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$) para algum $n \in \mathbb{N}$.*

A dimensão local n é constante nas componentes conexas de X , e estaremos interessados somente nas variedades com dimensão constante em todas as componentes conexas. Assim, podemos falar na dimensão da variedade.

O homeomorfismo $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dito uma carta de X .

Um conjunto de cartas cujo domínio compõe uma cobertura aberta de X é um atlas, e um atlas é C^∞ se todas as mudanças de coordenadas forem de classe C^∞ .

Definição 2.1.6. *Se $\mathcal{A}$ é um atlas C^∞ para uma variedade topológica sem bordo X denotamos*

$$C^\infty(X) := \{\phi \in C^0(X) : \phi \circ u^{-1} \text{ é } C^\infty \quad \forall u \in \mathcal{A}\}$$

onde $C^0(X) := \{\phi : X \rightarrow \mathbb{C} : \phi \text{ é contínua}\}$. Temos que $C^\infty(X)$ é uma subálgebra comutativa de $C^0(X)$.

Uma variedade C^∞ é uma variedade topológica X com estrutura $C^\infty(X)$ dada por um atlas $C^\infty \mathcal{A}$.

Definição 2.1.7. *Uma aplicação C^∞ entre duas variedades C^∞ X e Y é um função $f : X \rightarrow Y$ tal que $\phi \circ f \in C^\infty(X)$ para toda $\phi \in C^\infty(Y)$. Ou seja, para qualquer u no atlas de X e v no atlas de Y temos $v \circ f \circ u^{-1} \in C^\infty(U, V)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ são as imagens dos homeomorfismos u e v , respectivamente, com $n = \dim X$ e $m = \dim Y$. Esquemáticamente, significa que a composição abaixo é de classe C^∞ como aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$:*

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\uparrow u^{-1} & & \downarrow v \\
U \subset \mathbb{R}^n & & V \subset \mathbb{R}^m
\end{array}$$

Assim, duas variedades C^∞ X e Y são difeomorfas se existe uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ bijetora C^∞ com inversa também C^∞ .

Definição 2.1.8. $\xi = (E, \pi, X)$ é um C^∞ -fibrado vetorial se for um fibrado vetorial no sentido da definição 1.3.1, E e X forem variedades C^∞ , π for C^∞ e as trivializações locais $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ também forem C^∞ .

Definição 2.1.9. Se ξ é C^∞ -fibrado, denotamos por $\Gamma^\infty(\xi)$ o espaço vetorial das seções C^∞ de ξ , conforme as definições 1.3.13 e 2.1.7.

Feitas essas definições, podemos apresentar o conceito de operador diferencial entre fibrados vetoriais.

Definição 2.1.10. Um operador diferencial P de ordem k entre C^∞ -fibrados vetoriais ξ e η é uma aplicação linear $P : \Gamma^\infty(\xi) \rightarrow \Gamma^\infty(\eta)$ que pode ser representada por coordenadas locais como um operador diferencial de ordem no máximo k . Escrevemos $P \in \text{Diff}_k(\xi, \eta)$.

2.2 Operadores Pseudodiferenciais

Conforme dito na sessão anterior, a classe de operadores diferenciais pode ser estendida a uma classe maior, a dos operadores pseudodiferenciais, cuja definição é inspirada na ação da transformada de Fourier sobre operadores diferenciais lineares. Apresentamos, assim, a seguinte motivação.

Considere o operador diferencial linear

$$P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} = p(x, D) \quad \text{onde} \quad p(x, \xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$$

Pela propriedade (i) da definição 2.1.4, e denotando por F^* a inversa da transformada de Fourier, temos que, para $f \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x) = F^*(Ff)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

Temos que, derivando sob o sinal de integral,

$$D^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi = F^*(\xi^\alpha \widehat{f})(x)$$

Pela linearidade de P , vem que

$$\begin{aligned} (Pf)(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \xi^{\alpha} \right) \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \end{aligned}$$

Este último formato é o que inspira a definição a seguir.

Definição 2.2.1. *Um operador pseudodiferencial P tem forma local dada em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ por*

$$(Pu)(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

onde $x \in U$, $u \in C_0^\infty(U)$ (ou seja, u é C^∞ e tem suporte compacto) e $\widehat{u}$ denota a transformada de Fourier de u dada pela definição 2.1.4.

P é dito um operador pseudodiferencial canônico de ordem $k \in \mathbb{Z}$ se a amplitude p de P satisfaz a seguinte condição assintótica: para todo subconjunto compacto $K \subset U$ e multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ existe uma constante $C = C(\alpha, \beta, K) \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in K$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{k - |\alpha|} \quad (2.4)$$

onde D_x^α tem o significado dado pela equação (2.1) aplicado à variável x (e analogamente para ξ).

Proposição 2.2.2. *Um operador diferencial linear de ordem $k \in \mathbb{N}$*

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha}(x) D^\alpha$$

é um operador pseudodiferencial canônico de ordem k .

Demonstração. Pelo desenvolvimento da motivação do início desta sessão, podemos escrever

$$(Pf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$$

onde

$$p(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right)$$

Seja $K \in U$ compacto. Então como as $a_\alpha \in C^\infty(U)$, existe uma constante M tal que para um multiíndice β fixo

$$(2\pi)^{-n} |D_x^\beta a_\alpha(x)| \leq M \quad \forall x \in K \quad \text{e} \quad \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k$$

Por outro lado, seja γ outro multi-índice. Repare que, para $1 \leq i \leq n$, e $\xi \neq 0$,

$$\left| \frac{\partial^{\gamma_i} \xi_i^{\alpha_i}}{\partial \xi_i^{\gamma_i}} \right| \leq \begin{cases} \alpha_i! |\xi|^{\alpha_i - \gamma_i} & \text{se } \alpha_i \geq \gamma_i \\ 0 & \text{se } \alpha_i < \gamma_i \end{cases}$$

Logo, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{\partial^{\gamma_i} \xi_i^{\alpha_i}}{\partial \xi_i^{\gamma_i}} \right| \leq \alpha_i! |\xi|^{\alpha_i - \gamma_i}$$

Assim, se $N = \max\{\alpha_i! : 1 \leq i \leq n\}$ então

$$|D_\xi^\gamma \xi^\alpha| \leq N |\xi|^{|\alpha| - |\gamma|} \leq N |\xi|^{k - |\gamma|} \leq N(1 + |\xi|)^{k - |\gamma|}$$

em que a última estimativa vale também para $\xi = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} |D_x^\beta D_\xi^\gamma p(x, \xi)| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq k} D_x^\beta a_\alpha(x) D_\xi^\gamma \xi^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} M |D_\xi^\gamma \xi^\alpha| \\ &\leq (k+1)^n M N (1 + |\xi|)^{k - |\gamma|} \\ &:= C(1 + |\xi|)^{k - |\gamma|} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.3. *Todo operador pseudodiferencial é uma aplicação linear de $C_0^\infty(U)$ em $C^\infty(U)$.*

Demonstração. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, o integrando

$$x \longmapsto e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi)$$

é claramente de classe C^∞ . Precisamos mostrar que

$$x \mapsto (Pu)(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

é de classe C^∞ . Seja β multi-índice. Como u tem suporte compacto, segue da propriedade (ii) da definição 2.1.4 que

$$\xi^\alpha \widehat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D^\alpha u(x) dx,$$

que tende a 0 quando $\xi \rightarrow \infty$. Assim, a função $\xi \mapsto |\xi^\alpha u(\xi)|$ é limitada para todo multi-índice α . Como consequência, $\widehat{u}$ decresce mais rápido do que qualquer potência de $|\xi|$ quando $\xi \rightarrow \infty$. Em outras palavras, para cada N existe uma constante C_1 tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^{-N}$$

Como P é operador pseudodiferencial, existe uma constante C_2 tal que

$$|D_x^\beta p(x, \xi)| \leq C_2(1 + |\xi|)^{k-|\beta|} \leq C_2(1 + |\xi|)^k$$

Logo, temos que

$$|D_x^\beta p(x, \xi) \widehat{u}(\xi)| < C(1 + |\xi|)^{k-N},$$

que é integrável para N suficientemente grande. Com isso, segue do Teorema de Lebesgue (ver, por exemplo, [2]) que

$$\xi \mapsto |D_x^\beta p(x, \xi) \widehat{u}(\xi)|$$

é integrável e podemos intercambiar diferenciação e integração. Como β é arbitrário, isso mostra que $(Pu)(x)$ é de classe C^∞ .

□

Definição 2.2.4.

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

é um operador pseudodiferencial com suporte compacto se

(i) P é operador pseudodiferencial canônico de ordem k segundo a definição 2.2.1;

(ii) O limite

$$\sigma_k(p)(x, \xi) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{p(x, \lambda \xi)}{\lambda^k}$$

existe para todo $x \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(iii) Para algum $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\chi(\xi) = 0$ se $|\xi| < \epsilon < 1$ (ϵ suficientemente pequeno) e $\chi(\xi) = 1$ se $|\xi| \geq 1$, temos que

$$p(x, \xi) - \chi(\xi)\sigma_k(p)(x, \xi)$$

é a amplitude de um operador pseudodiferencial canônico de ordem $k - 1$;

(iv) $p(x, \xi)$ tem suporte compacto em x .

Para generalizarmos para C^∞ -fibrados, antes introduziremos a noção de variedade para-compacta:

Definição 2.2.5. Uma C^∞ -variedade X é paracompacta se toda cobertura aberta $(U_l)_{l \in J}$ de X possui um refinamento localmente finito $(V_k)_{k \in J'}$. Ou seja, cada V_k é subconjunto aberto de algum U_l . Não é requerido que J' seja finito, diferentemente da compacidade. Requer-se apenas que $\{k \in J' : x \in V_k\}$ seja finito para todo $x \in X$.

Observação 2.2.6. Todo espaço métrico é paracompacto (ver, por exemplo, [15]).

Definição 2.2.7. Seja X uma C^∞ -variedade paracompacta. Considere uma aplicação linear $P : C_0^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$, onde $C_0^\infty(X)$ restringe $C^\infty(X)$ às aplicações com suporte compacto. Para cada sistema local de coordenadas $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, P produz um operador local

$$P_v u := P(\overline{u \circ v}) \circ v^{-1}$$

onde

$$(\overline{u \circ v}) := \begin{cases} u \circ v & \text{em } U \\ 0 & \text{em } X \setminus U \end{cases}$$

Diz-se que P é um operador pseudodiferencial de ordem k ($P \in P\text{Diff}_k(X)$) se P_v é operador pseudodiferencial com suporte compacto (vide definição 2.2.4) para todas as cartas v com imagem relativamente compacta.

Definição 2.2.8. Uma aplicação linear $P : \Gamma^\infty(\xi) \longrightarrow \Gamma^\infty(\eta)$ entre C^∞ -seções de fibrados vetoriais é um operador pseudodiferencial de ordem k se para cada carta $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset X$ aberto, $v(U)$ relativamente compacto, e para trivializações locais $\xi|_U \cong U \times \mathbb{C}^m$ e

$\eta|_U \cong U \times \mathbb{C}^l$ tivermos uma expressão local de P como uma matriz $l \times m$ de operadores pseudodiferenciais com suporte compacto de ordem no máximo k (vide a definição 2.2.4).

Em outras palavras, considere $\xi = (E, \pi_E, X)$ e $\eta = (F, \pi_F, X)$ e as trivializações

$$\begin{aligned} h : \pi_E^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{C}^m \\ g : \pi_F^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{C}^l \end{aligned}$$

tais que $h|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^m$ e $g|_{F_x} : F_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^l$ são isomorfismos para todo $x \in U$. Repare que se $s \in \Gamma^\infty(\xi)$, temos em coordenadas locais, $h \circ s|_U : U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^m$ com $(h \circ s)(y) = (y, f_1(y), \dots, f_m(y))$. Logo, claramente temos que

$$C^\infty(U \times \mathbb{C}^m) \cong [C^\infty(U)]^m := \{f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m : f \text{ é } C^\infty\}$$

Analogamente,

$$C^\infty(U \times \mathbb{C}^l) \cong [C^\infty(U)]^l$$

Como h é difeomorfismo, também é consequência da expressão para $h \circ s|_U$ que

$$\Gamma^\infty(\xi|_U) \cong C^\infty(U \times \mathbb{C}^m) \quad e \quad \Gamma^\infty(\eta|_U) \cong C^\infty(U \times \mathbb{C}^l)$$

Localmente, portanto, temos o diagrama a partir do operador local $\tilde{P}$

$$\begin{array}{ccc} [C^\infty(U)]^m & \xrightarrow{\tilde{P}} & [C^\infty(U)]^l \\ \wr \parallel & & \wr \parallel \\ C^\infty(U \times \mathbb{C}^m) & \longrightarrow & C^\infty(U \times \mathbb{C}^l) \\ \wr \parallel & & \wr \parallel \\ \Gamma^\infty(\xi|_U) & \xrightarrow{P|_U} & \Gamma^\infty(\eta|_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^\infty(\xi) & \xrightarrow{P} & \Gamma^\infty(\eta) \end{array}$$

Escreve-se $P \in PDiff_k(\xi, \eta)$.

2.3 Operadores Elípticos

Dentre os tipos de operadores diferenciais e pseudodiferenciais, nosso interesse principal reside nos operadores elípticos. Começemos com a definição de operador diferencial elíptico

no caso euclidiano, prosseguindo até chegarmos ao caso de operadores pseudodiferenciais entre C^∞ -fibrados vetoriais.

Definição 2.3.1. *Seja $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$ operador diferencial de ordem k . Definimos seu polinômio característico (ou parte principal) em x por*

$$p_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

O operador P é dito elíptico se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ o polinômio característico de P for um isomorfismo de V em W , onde V e W são espaços vetoriais de dimensão finita tais que $u(x) \in V \cong \mathbb{R}^n$ e $f(x) \in W \cong \mathbb{R}^m$ ($Pu = f$). Em particular, $\dim V = \dim W$.

Observação 2.3.2. *O operador (Δ, R) do exemplo 5 é elíptico.*

Passamos agora à definição de operador elíptico entre C^∞ -fibrados vetoriais, que é, essencialmente, a mesma:

Definição 2.3.3. *$P \in \text{Diff}_k(\xi, \eta)$ é dito elíptico se todos os operadores diferenciais locais de P forem elípticos, ou seja, para qualquer representação local de P em $U \subset X$ o polinômio característico da parte principal*

$$p_k(x, \zeta) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \zeta^\alpha$$

for uma aplicação linear invertível para qualquer $x \in U$ e todo $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

A seguir definimos o símbolo de um operador pseudodiferencial, e apresentamos alguns resultados abrindo mão da demonstração, em virtude do escopo deste texto. Antes, apresentamos rapidamente uma noção geométrica sobre variedades:

Definição 2.3.4. *Seja X uma C^∞ -variedade, $x \in X$ e $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ curva C^∞ com $c(0) = x$. Seja $\phi \in C^\infty(X)$. A derivada de ϕ na direção da curva c é definida por $(\phi \circ c)'(0)$.*

Duas curvas são equivalentes se a derivada direcional de cada função relativa às duas curvas for a mesma. Denotamos a classe por

$$\dot{c}(0) := \{\tilde{c} : \tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ é } C^\infty, \tilde{c}(0) = x \text{ e } (\phi \circ \tilde{c})'(0) = (\phi \circ c)'(0) \quad \forall \phi \in C^\infty(X)\}$$

A partir daí define-se o espaço tangente de X em x por

$$(TX)_x := \{\dot{c}(0) : c : \mathbb{R} \longrightarrow X \text{ é } C^\infty \text{ com } c(0) = x\}$$

que possui estrutura de espaço vetorial com $\dim(TX)_x = \dim X$

Com isso, define-se de forma natural o fibrado tangente TX cujas fibras são dadas pelos $(TX)_x$.

Define-se o fibrado cotangente T^*X tomando suas fibras $(T^*X)_x$ como o dual de $(TX)_x$. Um elemento de $(T^*X)_x$ é representado por um elemento de $C^\infty(X)$ e dois deles estão na mesma classe se $(\phi \circ c)'(0) = (\psi \circ c)'(0)$ para toda $c : \mathbb{R} \longrightarrow X$ diferenciável tal que $c(0) = x$. A classe é denotada por $d\phi|_x$.

Definição 2.3.5. Seja $P \in PDiff_k(\xi, \eta)$ e $T'X$ o fibrado T^*X sem a seção zero (ou seja, sem os covetores nulos) e π a sua projeção. Definimos o símbolo de P em (x, ζ) , onde $\zeta \in (T'X)_x$, por

$$\sigma_k(P)(x, \zeta) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{p(x, \lambda\zeta)}{\lambda^k}$$

onde p denota a amplitude local de P . Assim, $\sigma_k(P)(x, \zeta)$ é uma matriz $m \times n$, onde $n = \dim \xi$, $m = \dim \eta$, tratando-se de uma aplicação linear entre E_x e F_x .

Definindo $Smbk := \{s \in Hom(\pi^*(\xi), \pi^*(\eta)) : s(x, \lambda\zeta) = \lambda^k s(x, \zeta) \quad \forall (x, \zeta) \in T'X \text{ e } \lambda > 0\}$, onde π^* denota o pullback (vide a definição 1.3.7), temos que

$$\sigma_k : PDiff_k(\xi, \eta) \longrightarrow Smbk(\xi, \eta)$$

é aplicação linear sobrejetiva. Como consequência, a sequência abaixo é exata:

$$0 \rightarrow PDiff_{k-1}(\xi, \eta) \hookrightarrow PDiff_k(\xi, \eta) \xrightarrow{\sigma_k} Smbk(\xi, \eta) \rightarrow 0$$

Também é possível demonstrar (ver, por exemplo, [20]) que se $P \in PDiff_k(\xi, \gamma)$ e $Q \in PDiff_j(\gamma, \eta)$ então $Q \circ P \in PDiff_{k+j}(\xi, \eta)$ e

$$\sigma_{j+k}(Q \circ P)(x, \zeta) = \sigma_j(Q)(x, \zeta) \circ \sigma_k(P)(x, \zeta)$$

De posse do símbolo, podemos dar uma definição mais geral sobre operadores elípticos:

Definição 2.3.6. $P \in PDiff_k(\xi, \eta)$ é elíptico se $\sigma_k(P)(x, \zeta)$ é isomorfismo de E_x em F_x para todo $x \in X$ e todo $\zeta \in (T^*X)_x \setminus \{0\}$. Escrevemos $P \in Ell_k(\xi, \eta)$.

Para exibirmos algumas propriedades dos operadores elípticos, precisaremos de alguns conceitos preliminares.

Definição 2.3.7. Um fibrado Hermitiano é um C^∞ -fibrado vetorial ξ (vide a definição 2.1.8) munido de uma métrica Hermitiana. Ou seja, para cada fibra E_x existe uma forma bilinear não degenerada, conjugado-simétrica $(\cdot, \cdot)_E$ que é C^∞ no sentido de que $(e_1, e_2)_E \in C^\infty(X)$ para quaisquer duas seções $e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(\xi)$.

Para X compacta, orientável e Riemanniana, podemos formar a integral $\int_X (e_1, e_2)_E$, obtendo uma forma bilinear em $\Gamma^\infty(\xi)$.

Se η é outro fibrado Hermitiano, então $P \in PDiff_k(\xi, \eta)$ e $P^* \in Diff_k(\eta, \xi)$ são formalmente adjuntos se

$$\int_X (Pe, f)_F = \int_X (e, P^*f)_E$$

para quaisquer $e \in \Gamma^\infty(\xi)$ e $f \in \Gamma^\infty(\eta)$.

Temos que

$$\sigma_k(P^*)(x, \zeta) = (\sigma_k(P)(x, \zeta))^* \quad \forall x \in X, \quad \zeta \in (T^*X)_x \setminus \{0\}$$

Definição 2.3.8. Seja ξ um C^∞ -fibrado vetorial Hermitiano sobre uma C^∞ -variedade compacta, orientada e Riemanniana X . Para $s \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$W^s(\xi) := \{u \in L^2(\xi) : \forall P \in Diff_s(\xi, \xi) \exists v \in L^2(\xi) \text{ tal que} \\ \langle u, Pw \rangle_0 = \langle v, w \rangle_0 \quad \forall w \in \Gamma^\infty(\xi)\}$$

onde $\langle v, w \rangle_0 := \int_X (v, w)_E$. W^s assim definido é um espaço de Sobolev. Vale o seguinte resultado, devido a Rellich (ver, por exemplo, [16]):

A inclusão $W^m(\xi) \hookrightarrow W^s(\xi)$ é compacta para $m > s \geq 0$.

Definição 2.3.9. Seja X uma C^∞ -variedade, ξ, η C^∞ -fibrados vetoriais sobre X e $k \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $OP_k(\xi, \eta)$ o conjunto dos operadores lineares $P : \Gamma^\infty(\xi) \longrightarrow \Gamma^\infty(\eta)$ que se estendem para uma aplicação contínua $P_s : W^s(\xi) \longrightarrow W^{s-k}(\eta)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ com $s, s - k \geq 0$.

Pode-se demonstrar que $PDiff_k(\xi, \eta) \subset OP_k(\xi, \eta)$. Se $\sigma_k : PDiff_k(\xi, \eta) \longrightarrow Smb_k(\xi, \eta)$, é o símbolo, então como consequência direta (e também pelo item (iii) da definição 2.2.4) temos que

$$Ker \sigma_k \subset OP_{k-1}(\xi, \eta)$$

Teorema 2.3.10. Para todo $P \in Ell_k(\xi, \eta)$, existe $Q \in Ell_{-k}(\eta, \xi)$ tal que $PQ - Id_F \in OP_{-1}(\eta, \eta)$ e $QP - Id_E \in OP_{-1}(\xi, \xi)$. Nesse caso, diz-se que Q é uma parametriz de P .

Demonstração. Pela sobrejetividade do símbolo σ_k existe $Q \in PDiff_{-k}(\eta, \xi)$ com $\sigma_{-k}(Q)(x, \zeta) := (\sigma_k(P)(x, \zeta))^{-1}$, e então $PQ \in PDiff_0(\eta, \eta)$ e $\sigma_0(PQ - Id_F) = 0$, donde $PQ - Id_F \in OP_{-1}(\eta, \eta)$. O caso $QP - Id_E$ é análogo. $\square$

Exibimos o teorema a seguir, que define o índice de um operador pseudodiferencial elíptico. Em virtude do escopo limitado desse texto, nos contentaremos em indicar os passos principais da demonstração.

Teorema 2.3.11. *Seja $P \in Ell_k(\xi, \eta)$ e $s, s - k \geq 0$. Então:*

- (i) *A extensão $P_s : W^s(\xi) \longrightarrow W^{s-k}(\eta)$ é um operador de Fredholm com índice independente de s .*
- (ii) *P^* é elíptico e $Coker P_s \cong Ker (P^*)_{s-k}$.*
- (iii) *$Ker P_s = Ker P$*
- (iv) *$ind P = ind P_s$ depende apenas da classe de homotopia de $\sigma_k(P)$ em $Iso_{SX}^\infty(\xi, \eta)$. Aqui, $Iso_{SX}^\infty(\xi, \eta)$ é o subespaço de isomorfismos de fibrados entre $\tau^*\xi \longrightarrow \tau^*\eta$ onde $\tau : SX \longrightarrow X$ é a projeção e $SX := \{(x, \zeta) : x \in X, \zeta \in T^*X, |\zeta| = 1\}$ é o fibrado da coesfera.*

Demonstração. (i) Seja $Q \in Ell_{-k}(\eta, \xi)$ parametriz de P . Então segue do Teorema de Rellich que a composição

$$W^s(\xi) \xrightarrow{Q_{s-k}P_s - Id} W^{s+1}(\xi) \hookrightarrow W^s(\xi)$$

é um operador compacto em $W^s(\xi)$, e, de forma correspondente, $P_s Q_{s-k} - Id$ é um operador compacto em $W^{s-k}(\eta)$. Então $P_s : W^s(\xi) \longrightarrow W^{s-k}(\eta)$ é um operador de Fredholm pelo teorema de Atkinson (1.1.20). Em face da invariância homotópica do índice, olhando-se para a continuidade obtemos que $ind P_s$ é invariante por s .

(ii) Segue do teorema 1.1.11 e do fato de que $(P_0)^* = (P^*)_0$ se $P \in PDiff_0(\xi, \eta)$, visto que podemos supor, sem perda de generalidade, que $k = s = 0$.

(iii) Temos que $Ker P_{s+1} \subset Ker P_s$. Pelo teorema anterior, existe $K : W^s(\xi) \longrightarrow W^{s+1}(\xi)$ tal que $Q_{s-k}P_s u - Id u = Ku$ para todo $u \in W^s(\xi)$, onde Q é parametriz de P . Segue que $u \in W^{s+1}(\xi)$ se $P_s u = 0$. Assim, $Ker P_s = Ker P_{s+1} = \dots = Ker P$, visto que $C^\infty = \cap W^s$.

(iv) Para $Q \in Ell_k(\xi, \eta)$ e $\sigma_k(Q) = \sigma_k(P)$, temos que $ind Q = ind P$ pelo fato de que $Ker \sigma_k \subset OP_{k-1}(\xi, \eta)$ e também em função da invariância do índice pela soma com operador compacto (vide os teoremas 1.3.30 e 1.1.20). No caso geral, cada curva contínua $\rho : I \longrightarrow Smbk_k(\xi, \eta)$ eleva-se a uma curva $\pi : I \longrightarrow PDif_k(\xi, \eta)$ com $\sigma_k \circ \pi = \rho$. Assim, pode-se conectar $\sigma_k(Q)$ e $\sigma_k(P)$ por uma curva contínua em $Iso_{SX}^\infty(\xi, \eta)$, e então P e Q podem ser conectados em $Ell_k(\xi, \eta)$. Como consequência da invariância homotópica do índice, segue que $ind Q_s = ind P_s$ para todo s .

Por fim, se $Q \in Ell_j(\xi, \eta)$ é um operador cujo símbolo $\sigma_j(Q)$ coincide com $\sigma_k(P)$ em SX então $(\sigma_j(Q))^{-1} \circ \sigma_k(P)$ é o símbolo de um operador autoadjunto $R \in Ell_{k-j}(\xi, \xi)$. Como $\sigma_k(P) = \sigma_j(Q) \circ \sigma_{k-j}(R) = \sigma_k(QR)$ segue que $ind P = ind QR = ind Q + ind R = ind Q$ visto que $ind R = 0$ por (iii).

□

Observação 2.3.12. *Em resumo, o que fizemos foi partir de um operador pseudodiferencial elíptico entre fibrados vetoriais e verificar que suas extensões atuam como um operador de Fredholm nos espaços de Sobolev. Isso nos permitiu introduzir uma noção de índice que, como visto no teorema anterior, é invariante nos espaços de Sobolev e depende apenas da classe de homotopia do símbolo $\sigma_k(P)$ em Iso_{SX}^∞ . Valem as seguintes propriedades:*

- (i) $ind P^* = -ind P$
- (ii) $ind QP = ind P + ind Q$
- (iii) $ind P \oplus R = ind P + ind R$

Por fim, introduzimos um tipo de produto de operadores que será utilizado posteriormente:

Definição 2.3.13. *Sejam X, Y variedades Riemannianas fechadas, ξ, η fibrados vetoriais Hermitianos sobre X e ζ, τ fibrados vetoriais Hermitianos sobre Y . Sejam $P \in PDif_k(\xi, \eta)$ e $Q \in PDif_k(\zeta, \tau)$, onde $k \in \mathbb{N}$. Definimos em $X \times Y$ o operador*

$$P \# Q : \Gamma^\infty(\xi \otimes \zeta) \otimes \Gamma^\infty(\eta \otimes \tau) \longrightarrow \Gamma^\infty(\eta \otimes \zeta) \otimes \Gamma^\infty(\xi \otimes \tau)$$

via

$$P \# Q := \begin{pmatrix} P \otimes Id_\zeta & -Id_\eta \otimes Q^* \\ Id_\xi \otimes Q & P^* \otimes Id_\tau \end{pmatrix}$$

Temos que se P e Q são elípticos então $P \# Q$ é elíptico e $ind(P \# Q) = (ind P)(ind Q)$.

2.4 O Teorema da Periodicidade de Bott

A compreensão da topologia de $GL(n, \mathbb{C})$ passará pelo cálculo dos seus grupos de homotopia. Este resultado é obtido por meio do Teorema de Bott. Iniciemos com um resultado topológico sobre o número de voltas de uma curva plana em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, já utilizado no teorema 1.4.3, sobre operadores de Wiener-Hopf.

Teorema 2.4.1. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ curva plana fechada que não passa pela origem. Definimos $W(f, 0)$ como o número de voltas dadas por f no sentido anti-horário em torno da origem. Então:*

- (i) $W(f, 0)$ é invariante por homotopia;
- (ii) $W(f, 0)$ é o único invariante homotópico, isto é, $f \sim g$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\} \iff W(f, 0) = W(g, 0)$;
- (iii) Para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe f tal que $W(f, 0) = m$.

Demonstração. Podemos escrever $f(t) = r(t)e^{i\alpha(t)}$, onde $r(t) := |f(t)|$ e $\alpha(t)$ é a função ângulo, que mede o ângulo anti-horário entre $(0, 1)$ e $f(t)$. Nessas condições, r e α são contínuas, e temos

$$W(f, 0) = \frac{\alpha(1) - \alpha(0)}{2\pi}$$

Seja S^1 o círculo unitário em $\mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z/|z| \end{aligned}$$

é equivalência homotópica. Além disso, $(h \circ f)(t) = e^{i\alpha(t)}$, donde $W(f, 0) = W(h \circ f, 0)$. Assim, temos que

$$f \sim g \iff h \circ f \sim h \circ g \iff W(h \circ f, 0) = W(h \circ g, 0) \iff W(f, 0) = W(g, 0)$$

em que a equivalência central decorre do fato de que o número de voltas em torno da origem é justamente a função que determina o isomorfismo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, onde π_1 denota o grupo fundamental. Isso prova (i) e (ii).

Para (iii), basta fazer $f(t) := e^{2m\pi t}$.

□

Em relação à topologia de $GL(n, \mathbb{C})$ vale o seguinte resultado, devido a Bott:

Teorema 2.4.2. *Seja $f : S^{m-1} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ aplicação contínua, onde $2n \geq m$, S^{m-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^m$ e $GL(n, \mathbb{C})$ é o grupo linear das matrizes complexas invertíveis $n \times n$.*

Então, se m é ímpar, f pode ser deformada para uma aplicação constante. Se m é par, podemos definir $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tal que f pode ser deformado para g exatamente quando $\deg(f) = \deg(g)$. Além disso, dado $k \in \mathbb{Z}$, existe f tal que $\deg(f) = k$.

Em outras palavras, temos que

$$\pi_{m-1}(GL(n, \mathbb{C})) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z} & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

e o isomorfismo, no segundo caso, é dado por $\deg : \pi_{m-1}(GL(n, \mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Observação 2.4.3. *Note que, pelo teorema 2.4.1, o resultado para $m = 2$ e $n = 1$ segue exatamente fazendo-se $\deg(f) := W(f, 0)$. Para $m = 1$ e n arbitrário, o resultado segue do fato de que $GL(n, \mathbb{C})$ é conexo por caminhos. Para ver isso, como estamos em $\mathbb{C}$, note que a forma canônica de Jordan de uma matriz invertível é uma matriz diagonal onde todas as entradas são diferentes de 0. A partir da forma canônica ligamos a matriz à identidade.*

Considerando-se os demais grupos de homotopia, esse resultado é conhecido como Teorema da Periodicidade de Bott em função dos isomorfismos $\pi_{m-1}(GL(n, \mathbb{C})) \cong \pi_{m+1}(GL(n, \mathbb{C}))$.

Relembramos aqui também o teorema 1.2.10, que dizia que $\pi_n((\mathcal{B}(H))^\times) = 0$ para todo n se H é espaço de Hilbert de dimensão infinita, como consequência do Teorema de Kuiper (1.2.7). Vemos, portanto, que a dimensão infinita é fundamental para estabelecer esse resultado, visto que $GL(n, \mathbb{C}) = (\mathcal{B}(\mathbb{C}^n))^\times$.

Não faremos uma demonstração do Teorema da Periodicidade de Bott nesse formato. Ao invés disso, demonstraremos uma versão mais abstrata e que nos trará ferramentas mais adequadas para a prova do Teorema do Índice de Atiyah-Singer.

Na definição 1.3.10, apresentamos o grupo $K(X)$ para um espaço topológico compacto X . Ocorre que podemos dotar $K(X)$ de uma estrutura de anel.

Definição 2.4.4. *Seja X espaço topológico compacto, $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ dois fibrados vetoriais sobre X . Definimos*

$$\xi \otimes \eta := (G, \mu, X)$$

onde

$$G := \{e \otimes f \in E \otimes F : \pi(e) = \rho(f)\} = \bigcup_{x \in X} E_x \otimes F_x$$

isto é, a fibra de $\xi \otimes \eta$ em x é o produto tensorial $E_x \otimes F_x$. Temos que $\xi \otimes \eta$ satisfaz às condições da definição 1.3.1 e é um fibrado vetorial. Para ver isso, basta considerar a trivialização local $e \otimes f \in \mu^{-1}(U) = \pi^{-1}(U) \otimes \rho^{-1}(U) \mapsto \pi(e) \oplus (p_2 \circ h)(e) \otimes (p_2 \circ g)(f) \in U \oplus (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$, onde h e g são as trivializações locais de ξ e η , respectivamente, em $U \subset X$ e p_2 é a projeção na segunda coordenada.

Por um raciocínio semelhante, mostra-se que se $\xi \xrightarrow{h} \xi'$ e $\eta \xrightarrow{g} \eta'$ então $\xi \otimes \eta \cong \xi' \otimes \eta'$. Para ver isso, basta definir o homeomorfismo $e \otimes f \in \bigcup_{x \in X} E_x \otimes F_x \mapsto h(e) \otimes g(f) \in \bigcup_{x \in X} E'_x \otimes F'_x$.

A partir daí, temos um produto bem definido em $K(X)$ definindo-se primeiramente $[\xi][\eta] := [\xi \otimes \eta]$. Como consequência, como todo elemento de $K(X)$ escreve-se como $[\xi] - [\theta_n]$ (vide o corolário 1.3.17), basta definir

$$\begin{aligned} ([\xi] - [\theta_n]) ([\eta] - [\theta_m]) &:= [\xi][\eta] - [\xi][\theta_m] - [\theta_n][\eta] + [\theta_n][\theta_m] \\ &= [(\xi \otimes \eta) \oplus (\theta_n \otimes \theta_m)] - [(\xi \otimes \theta_m) \oplus (\theta_n \otimes \eta)] \end{aligned}$$

Desse modo, $K(X)$ possui estrutura de anel. Como $E_x \otimes \mathbb{C} \cong E_x$, temos que $[\theta_1]$ é elemento unidade de $K(X)$.

Definição 2.4.5. Seja X espaço topológico compacto e $Y \subset X$ subconjunto fechado. Definimos

$$K(X, Y) := \text{Ker} \left(K(X/Y) \xrightarrow{j^*} K(Y/Y) \right)$$

onde $j : Y/Y \rightarrow X/Y$ é a inclusão quociente e j^* é o homomorfismo induzido da proposição 1.3.11.

Lema 2.4.6. Seja

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

seqüência exata curta de grupos abelianos. São equivalentes:

- (i) Existe um homomorfismo $p : B \rightarrow A$ tal que $p \circ i = \text{Id}_A$
- (ii) Existe um homomorfismo $s : C \rightarrow B$ tal que $j \circ s = \text{Id}_C$

(iii) Existe um isomorfismo $h : B \cong A \oplus C$ que torna o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B & & \\
 & i \nearrow & & \searrow j & \\
 0 \rightarrow A & & \downarrow h & & C \rightarrow 0 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & A \oplus C & &
 \end{array}$$

em que as aplicações inferiores são $a \in A \mapsto (a, 0) \in A \oplus C$ e $(a, c) \in A \oplus C \mapsto c$.

Nessas condições, diz-se que a sequência exata é separável.

Demonstração. (iii) $\Rightarrow$ (i): Seja $\tilde{p} : A \oplus C \longrightarrow A$ a projeção na primeira coordenada. Basta definir $p := \tilde{p} \circ h$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): É análogo ao caso anterior, fazendo-se $s := h^{-1} \circ \tilde{s}$, onde $\tilde{s} : c \in C \mapsto (0, c) \in A \oplus C$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Temos que $B \subset \text{Ker } p + \text{Im } i$, visto que todo $b \in B$ escreve-se como $b = (b - ip(b)) + ip(b)$, com $p(b - ip(b)) = p(b) - \text{Id}_A p(b) = 0$. Além disso, $\text{Ker } p \cap \text{Im } i = 0$. De fato, se $b \in \text{Ker } p \cap \text{Im } i$, então existe $a \in A$ tal que $b = i(a)$. Logo, $0 = p(b) = pi(a) = \text{Id}_A(a) = a$, donde $b = 0$.

Assim, todo $b \in B$ se escreve de forma única como $b = x + i(a)$ para algum $x \in \text{Ker } p$ e $a \in A$. Pela exatidão, $\text{Ker } j = \text{Im } i$ e j é sobrejetiva. Dessa forma, para todo $c \in C$ existe $b = x + i(a) \in B$ tal que $c = j(b) = j(x + i(a)) = j(x)$. Logo, para todo $c \in C$ existe $x \in \text{Ker } p$ tal que $j(x) = c$. Temos, também, que $j(\text{Ker } p) = C$.

Se $j(x) = 0$, então $x \in \text{Im } i \cap \text{Ker } p = 0$, donde $x = 0$. Isso mostra que $j|_{\text{Ker } p} : \text{Ker } p \longrightarrow C$ é isomorfismo. Por outro lado, como a sequência é exata, $\text{Im } i \cong A$, donde $B \cong A \oplus C$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Um argumento semelhante ao anterior prova essa implicação. Temos que $B \subset \text{Ker } j + \text{Im } s$, o que pode ser visto escrevendo $b = (b - sj(b)) + sj(b)$. Também temos $\text{Ker } j \cap \text{Im } s = 0$, visto que se $j(b) = 0$ e $s(c) = b$ então $0 = js(c) = \text{Id}_C(c) = c$.

Pela exatidão, $\text{Im } i = \text{Ker } j$. Como i é injetora, $\text{Im } i \cong A$, donde $A \cong \text{Ker } j$. Como js é bijetora, s é injetora e então $\text{Im } s \cong C$. Isso mostra novamente que $B \cong A \oplus C$.

□

Proposição 2.4.7. Se $Y = x_0$ consiste num único ponto, então

$$K(X) \cong K(X, x_0) \oplus K(x_0) \cong K(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}$$

Demonstração. Quando $Y = x_0$, temos que $X/x_0 \cong X$ e $x_0/x_0 \cong x_0$. Assim,

$$K(X, x_0) = \text{Ker} \left(K(X/x_0) \xrightarrow{i^*} K(x_0) \right) \subset K(X)$$

Seja $j : K(X, x_0) \hookrightarrow K(X)$ inclusão. Então temos que

$$0 \longrightarrow K(X, x_0) \xrightarrow{j} K(X) \xrightarrow{i^*} K(x_0) \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

é sequência exata curta. Com efeito, só resta verificar que i^* é sobrejetora. Mas um elemento típico de $K(x_0)$ é da forma $[\theta_n^{x_0}] - [\theta_m^{x_0}]$, pelo corolário 1.3.17 e observando que, como x_0 consiste num único ponto, todo fibrado em x_0 é trivial.

Por outro lado, como i^* retorna a fibra em x_0 , temos que $i^*\theta_n^X = \theta_n^{x_0}$, em que nesse ponto utilizamos um abuso de notação que se revela consistente em virtude das proposições 1.3.8 e 1.3.11. Assim,

$$i^*([\theta_n^X] - [\theta_m^X]) = [\theta_n^{x_0}] - [\theta_m^{x_0}]$$

donde i^* é sobrejetora e a sequência (2.5) é exata.

Considere a retração $r : X \longrightarrow x_0$, que induz $r^* : K(x_0) \longrightarrow K(X)$. Temos que

$$r^*([\theta_n^{x_0}] - [\theta_m^{x_0}]) = [\theta_n^X] - [\theta_m^X]$$

e segue que $r^*i^* = \text{Id}_{K(x_0)}$. Assim, a sequência (2.5) é separável pelo lema 2.4.6, e temos que $K(X) \cong K(X, x_0) \oplus K(x_0) \cong K(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}$, em que na última parte foi usada a proposição 1.3.24. $\square$

Note-se que, até então, $K(X)$ só estava definido para X compacto. Isso, no entanto, limita muito nossas aplicações. Por exemplo, num espaço simples como $\mathbb{R}^n$ não poderíamos definir $K(X)$. Para melhorar essa situação, definiremos $K(X)$ para X localmente compacto. Isso englobará o espaço euclidiano e atenderá ao escopo deste trabalho.

Definição 2.4.8. *Seja X espaço topológico localmente compacto, $X^+ := X \cup \{+\}$ a compactificação de Alexandrov de X e $i : \{+\} \longrightarrow X^+$ a inclusão. Definimos*

$$K(X) := K(X^+, +) = \text{Ker} \left(K(X^+/+) \xrightarrow{i^*} K(+)) \right)$$

Observação 2.4.9. *Em virtude da proposição 2.4.7, quando X é compacto a definição acima é consistente com a definição 1.3.10.*

Além disso, dada uma aplicação própria $f : Y \longrightarrow X$ entre espaços localmente compactos temos a funtorialidade $f^* : K(X) \longrightarrow K(Y)$, de modo semelhante ao que foi visto na proposição 1.3.11. Relembramos que f é própria se pode ser estendida a uma aplicação contínua em Y^+ ; equivalentemente, f é própria se $f^{-1}(L)$ for compacto para todo $L \subset X$ compacto.

Por fim, $K(X)$ com a definição acima também tem estrutura de anel. No entanto, quando X não é compacto, $K(X)$ não possui unidade.

Teorema 2.4.10. *Sejam X e Y espaços localmente compactos. Então além da estrutura interna de anel existe um produto exterior*

$$\boxtimes : K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$$

Demonstração. Quando X e Y são compactos, dados dois fibrados vetoriais $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, Y)$ definimos de forma natural $\xi \boxtimes \eta$ em $X \times Y$ com fibra em (x, y) dada por $E_x \otimes F_y$.

No caso geral, provaremos que a sequência abaixo é exata:

$$0 \longrightarrow K(X \times Y) \longrightarrow K(X^+ \times Y^+) \longrightarrow K(X^+) \oplus K(Y^+) \quad (2.6)$$

Para tanto, observamos primeiramente que, para A e B compactos, com $B \subset A$ e $i : B \longrightarrow A$ a inclusão, existe uma aplicação j^* tal que

$$K(A, B) \xrightarrow{j^*} K(A) \xrightarrow{i^*} K(B)$$

é sequência exata. De fato, j^* é obtida de modo natural a partir de uma aplicação $j : A', B' \longrightarrow A, B$ contínua entre pares de espaços (ou seja, $j : A' \longrightarrow A$ é contínua com $j(B') \subset B$). Fazendo $A' = A$ e $B' = \emptyset$, obtemos a j^* desejada.

Quando B é um retrato de A , denotando por $r : A \longrightarrow B$ a retração obtemos que $ri = Id_B$, e então $i^*r^* = Id_{K(B)}$. Logo, a partir de r^* segue do lema 2.4.6 que a sequência é separável, e então obtemos que

$$K(A) \cong K(A, B) \oplus K(B)$$

Fazendo $A := X^+ \times Y^+$ e $B := X^+ \times \{+\}$, obtemos que

$$K(X^+ \times Y^+) \cong K(X^+ \times Y^+, X^+) \oplus K(X^+)$$

Por outro lado, fazendo $A := (X^+ \times Y^+)/X^+$ e $B := Y^+$ obtemos que

$$K((X^+ \times Y^+)/X^+) \cong K((X^+ \times Y^+)/X^+, Y^+) \oplus K(Y^+)$$

Como $K((X^+ \times Y^+)/X^+, Y^+) \cong K((X \times Y)^+, +) = K(X \times Y)$, juntando tudo vem que

$$K(X^+ \times Y^+) \cong K(X^+) \oplus K(Y^+) \oplus K(X \times Y)$$

donde a sequência (2.6) é separável.

Seja agora $x \in K(X) \subset K(X^+)$ e $y \in K(Y) \subset K(Y^+)$. Então, pela primeira parte, $x \boxtimes y \in K(X^+ \times Y^+)$ está bem definido. Em virtude da sequência (2.6), $x \boxtimes y$ pode ser visto como elemento de $K(X \times Y)$, visto que $i^*(x \boxtimes y) = 0$, onde $i : X^+ \longrightarrow X^+ \times Y^+$ é a inclusão (e analogamente para $Y^+ \hookrightarrow X^+ \times Y^+$).

Para ver isso, considere as representações canônicas do corolário 1.3.17 dadas por $x = [\xi] - [\theta_n^X]$ e $y = [\eta] - [\theta_m^Y]$. Então

$$x \boxtimes y = [\xi \boxtimes \eta] - [\theta_n^X \boxtimes \eta] - [\xi \boxtimes \theta_m^Y] + [\theta_n^X \boxtimes \theta_m^Y]$$

donde

$$i^*(x \boxtimes y) = [\xi \otimes F_+] - [\xi \otimes \mathbb{C}^m] - [\mathbb{C}^n \otimes F_+] + [\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m] = 0$$

visto que a fibra F_+ é isomorfa a $\mathbb{C}^m$. □

Exemplo 7. *Um exemplo importante de aplicação das ideias usadas nos resultados acima é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. De fato, a compactificação de Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ é a esfera S^n . Assim, segue da proposição 2.4.7 que*

$$K(S^n) \cong K(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{Z}$$

Teorema 2.4.11. *Seja X espaço topológico localmente compacto. Então existe um homomorfismo $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ tal que*

- (i) α é funtorial, isto é, para cada $u \in K(\mathbb{R}^2 \times X)$ e cada aplicação contínua $g : X' \longrightarrow X$ (onde X' é outro espaço topológico compacto), temos que

$$\alpha_{X'}((g \times Id_{\mathbb{R}^2})^*u) = g^* \alpha_X(u)$$

- (ii) se Y é outro espaço localmente compacto, temos a seguinte regra multiplicativa, expressa pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
K(\mathbb{R}^2 \times X) \otimes K(Y) & \xrightarrow{t'} & K(\mathbb{R}^2 \times X \times Y) \\
\downarrow \alpha_X \otimes Id & & \downarrow \alpha_{X \times Y} \\
K(X) \otimes K(Y) & \xrightarrow{t} & K(X \times Y)
\end{array}$$

onde t e t' são os produtos exteriores $\boxtimes$. Ou seja,

$$\alpha_{X \times Y}(\xi \boxtimes \eta) = \alpha_X(\xi) \boxtimes \eta$$

(iii) $\alpha(b) = 1$, onde b é a classe de Bott dada por $b := [E_{-1}] - [E_0] \in K(S^2)$, com $E_m := (\pi^+)^* \theta_1 \cup_f (\pi^-)^* \theta_1$ e $f(z) = z^m$. Aqui, denotamos por $B^\pm$ os hemisférios de S^2 , $\pi^\pm : B^\pm \times X \rightarrow X$ projeção, $\pi : S^1 \times X \rightarrow X$ projeção, $S^1 = B^+ \cap B^-$ e $\cup_f$ a união quocientada em $f : (\pi^+)^* \theta_1|_{S^1 \times X} \rightarrow \cup_f (\pi^-)^* \theta_1|_{S^1 \times X}$. Dito de outra forma, E_m é o fibrado linha em S^2 definido pela função de colagem $f(z) = z^m$. Neste momento, estamos presumindo que $X = +$ é um ponto. Como E_{-1} e E_0 têm mesma dimensão 1, então $b \in K(S^2, \{+\}) = K(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Suponha inicialmente X compacto. Dado um fibrado vetorial η sobre X e uma função de colagem $f \in \text{Aut}(\pi^* \eta)$, onde $\pi : S^1 \times X \rightarrow X$ é a projeção, podemos obter um fibrado vetorial ξ sobre $S^2 \times X$ via

$$\xi := (\pi^+)^* \eta \cup_f (\pi^-)^* \eta$$

onde as $\pi^\pm$ são como no enunciado. Ocorre que o inverso também é verdadeiro. Dado um fibrado ξ sobre $S^2 \times X$, podemos obter uma representação via (η, f) para algum fibrado η sobre X e alguma função de colagem $f \in \text{Aut}(\pi^* \eta)$.

Além disso, como visto no exemplo 4, dada $f \in \text{Aut}(\pi^* \eta)$, podemos formar uma família contínua de operadores de Fredholm F cujo índice só depende da classe de homotopia de f . Desse modo, temos uma sequência de construções

$$\xi \mapsto (\eta, f) \mapsto F \mapsto \text{ind } F$$

Dessa forma, obtemos um homomorfismo de semi-grupos $\text{Vect}(S^2 \times X) \rightarrow K(X)$, que se estende de forma única a um homomorfismo de grupos $\alpha' : K(S^2 \times X) \rightarrow K(X)$. Valendo-nos da demonstração do teorema 2.4.10, obtemos que $K(S^2 \times X) \cong K(\mathbb{R}^2 \times X) \oplus K(X)$. Assim, $K(\mathbb{R}^2 \times X)$ pode ser visto como subgrupo de $K(S^2 \times X)$. Restringindo α' , obtemos o homomorfismo $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \rightarrow K(X)$. A funtorialidade de α é consequência da proposição 1.3.26.

Aplicando para o caso em que $X = + = \text{ponto}$, temos $\alpha(b) = \alpha'[E_{-1}] - \alpha'[E_0]$. Por construção, temos que $\alpha'[E_m] = -m \in \mathbb{Z}$, em virtude do teorema 1.4.3, visto que a função de colagem de E_m é $f(z) = z^m$. Isso prova (iii).

Para provar (ii), faz-se primeiro o caso X, Y compactos. Consideramos $t(\alpha_X \otimes Id)(u \otimes v) - \alpha_{X \times Y}(t(u \otimes v))$ para $u \in K(\mathbb{R}^2 \times X)$ e $v \in K(Y)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $v = 1 = [\theta_1^Y]$, visto que todas as aplicações que surgem são homomorfismos módulo $K(Y)$.

Pela functorialidade de α , temos que $\rho^* \alpha_X(u) - \alpha_{X \times Y}(\rho^* u) = 0$, onde $\rho : X \times Y \rightarrow X$ é a projeção.

A definição de $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \rightarrow K(X)$ para X localmente compacto segue sem dificuldades a partir do caso compacto via compactificação de Alexandrov, tendo-se em mente a decomposição $K(S^2 \times X) \cong K(\mathbb{R}^2 \times X) \oplus K(X)$. $\square$

O teorema 2.4.11 nos permite enfim demonstrar a seguinte versão do teorema de Bott, mais geral do que aquela apresentada no teorema 2.4.2.

Teorema 2.4.12. (*Periodicidade de Bott*) Para todo espaço localmente compacto X , temos que $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \rightarrow K(X)$ é isomorfismo. Sua inversa $\beta : K(X) \rightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$ é dada pela multiplicação exterior com a classe de Bott, ou seja, $\beta(x) = b \boxtimes x$.

Demonstração. Substituindo X por ponto e Y por X no item (ii) do teorema 2.4.11, obtemos, pondo $b = \xi$ e $x = \eta$, que $\alpha(\beta(x)) = \alpha(b \boxtimes x) = \alpha(b) \boxtimes x = 1 \boxtimes x = x$, em que na penúltima igualdade usou-se o item (iii) do mesmo teorema. Isso mostra que $\alpha\beta = Id$.

Seja agora $u \in K(\mathbb{R}^2 \times X)$. Mostraremos, de forma equivalente a multiplicar b pela esquerda, que $\alpha(u) \boxtimes b = \tilde{u}$, onde $\tilde{u} := \rho^* u$ e $\rho : X \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times X$ inverte as coordenadas. Do item (ii) do teorema 2.4.11 com $\mathbb{R}^2$ no lugar de Y , temos que $\alpha(u) \boxtimes b = \alpha(u \boxtimes b)$.

Em $K(\mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2)$ (que contém $u \boxtimes b$), a aplicação γ^* , que corresponde ao levantamento a partir da permutação

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto (w, v, u) \end{aligned}$$

é a identidade, visto que γ é homotópico à identidade em $\mathbb{R}^2 \times X \times \mathbb{R}^2$. Assim, temos que

$$\alpha(u) \boxtimes b = \alpha(u \boxtimes b) = \alpha(\gamma^*(u \boxtimes b)) = \alpha(b \boxtimes \tilde{u}) = \alpha\beta(\tilde{u}) = \tilde{u}$$

pela primeira parte. Isso mostra que $\beta\alpha = Id$. $\square$

2.5 O Teorema do Índice de Atiyah-Singer

Relembremos que um operador pseudodiferencial elíptico sobre $\mathbb{R}^n$ de ordem k tem a forma

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

em que $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é C^∞ com suporte compacto e a amplitude p é uma função matricial $m \times m$ cujo símbolo satisfaz

$$\sigma(P)(x, \xi) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{p(x, \lambda\xi)}{\lambda^k} \in GL(m, \mathbb{C}) \quad \forall \quad \xi \neq 0$$

Com uma condição adicional, chegamos à classe a seguir.

Definição 2.5.1. Denotaremos por $Ell_c(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos operadores pseudodiferenciais elípticos em $\mathbb{R}^n$ de ordem 0 e cuja amplitude $p(x, \xi) \equiv Id$ para $x \notin K \subset \mathbb{R}^n$, onde K é um subconjunto compacto.

Considere $P \in Ell_c(\mathbb{R}^n)$. Por um lado, como P é elíptico, $ind P$ está bem definido. Por outro lado, existe um $r > 0$ tal que se $|x| \geq r$ então $p(x, \xi) = Id_m$, a matriz identidade $m \times m$. Consequentemente, se $|x| + |\xi| \geq r$, temos que $\sigma(P)(x, \xi) \in GL(m, \mathbb{C})$. Desse modo, P define uma aplicação contínua de rS^{2n-1} em $GL(m, \mathbb{C})$ (onde $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, \xi)$). Por fim, sendo $ind P = ind(P + Id)$, podemos supor que $m \geq n$.

A forma homotópica do Teorema de Bott (2.4.2) nos diz que $\pi_{2n-1}(GL(m, \mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$, com o isomorfismo dado por deg . Temos, portanto, dois invariantes discriminados para P : um deles é o índice analítico $ind P \in \mathbb{Z}$; outro é o invariante topológico $deg(\sigma(P)(.,.)) \in \mathbb{Z}$. Como consequência do fato de que o índice analítico depende apenas do símbolo e é um invariante homotópico, podemos enxergá-lo como uma função aditiva em $\pi_{2n-1}(GL(m, \mathbb{C}))$. Analizando-se o comportamento dessas aplicações sobre os geradores dos grupos de homotopia, obtemos que $ind(P) = \pm deg(\sigma(P)(.,.))$.

Esse é um caminho mais intuitivo para a demonstração do Teorema do Índice. Optamos por seguir outro caminho, mais abstrato e baseado em K-teoria. Esse novo caminho apoia-se no ferramental desenvolvido até então e tem o ganho adicional de servir de base para a demonstração de versões mais gerais do Teorema do Índice. Consideremos agora uma versão mais geral da definição 2.5.1:

Definição 2.5.2. Seja X uma C^∞ -variedade Riemanniana orientada. Definimos $Ell_c(X)$ como o conjunto dos operadores pseudodiferenciais elípticos de ordem 0 em X tais que $P\phi = \phi \quad \forall \quad \phi \in C^\infty(X)$, com $supp \phi \cap K = \emptyset$, onde K é um conjunto compacto que depende apenas de P . A mesma condição deve valer para o operador adjunto P^* .

Observação 2.5.3. Se $P \in \text{Ell}_c(X)$, então $\sigma(P)$ define $[\sigma(P)] \in K(TX)$ de forma natural, e todo $a \in K(TX)$ pode ser obtido dessa forma.

Observação 2.5.4. Se $P \in \text{Ell}_c(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \text{Ell}_c(\mathbb{R}^m)$ e $R \in \text{Ell}_c(\mathbb{R}^k)$, com $m + k = n$ e $P = Q \# R$ (veja a definição 2.3.13), então

$$(i) \quad \sigma(P) = \sigma(Q) \# \sigma(R)$$

$$(ii) \quad [\sigma(P)] = [\sigma(Q)] \boxtimes [\sigma(R)]$$

$$(iii) \quad \text{ind } P = (\text{ind } Q)(\text{ind } R)$$

Abaixo descrevemos uma definição alternativa dos grupos de K-teoria via fibrado diferença. As noções algébrico-topológicas não definidas no texto podem ser encontradas em [8]:

Definição 2.5.5. Para Y localmente compacto, podemos definir alternativamente $K(Y)$ usando complexos de fibrados vetoriais com suporte compacto. Mais precisamente, utilizamos sequências curtas

$$\xi : 0 \longrightarrow \xi^0 \xrightarrow{\alpha} \xi^1 \longrightarrow 0$$

onde ξ^0 e ξ^1 são fibrados vetoriais sobre Y e α é isomorfismo de fibrados fora de um subconjunto compacto de Y . Dizemos que

$$\xi : 0 \longrightarrow \xi^0 \xrightarrow{\alpha} \xi^1 \longrightarrow 0$$

e

$$\eta : 0 \longrightarrow \eta^0 \xrightarrow{\beta} \eta^1 \longrightarrow 0$$

são equivalentes se existe

$$\zeta : 0 \longrightarrow \zeta^0 \xrightarrow{\gamma} \zeta^1 \longrightarrow 0$$

sobre $Y \times I$ com suporte compacto tal que $\xi = \zeta|_{Y \times \{0\}}$ e $\eta = \zeta|_{Y \times \{1\}}$. As classes de equivalência formam um semigrupo $C(Y)$ via

$$\xi \oplus \eta : 0 \longrightarrow \xi^0 \oplus \eta^0 \xrightarrow{\alpha \oplus \beta} \xi^1 \oplus \eta^1 \longrightarrow 0$$

com um sub-semigrupo $C_\emptyset(Y)$ de complexos com suporte vazio, isto é, as aplicações de fibrados são isomorfismos sobre Y . Assim, a sequência

$$0 \longrightarrow C(Y)/C_\emptyset(Y) \xrightarrow{d} K(Y^+) \xrightarrow{i^*} K(+) \longrightarrow 0$$

é exata e separável (vide o lema 2.4.6), donde $C(Y)/C_\emptyset(Y) \cong K(Y)$. A definição de d é como segue, onde $d(\xi)$ é o chamado fibrado diferença:

Escolha L compacto contendo $K = \text{supp } \xi$ tal que $K \subset \overset{\circ}{L}$. Para estender ξ a Y^+ trocamos pelo complexo equivalente cujos fibrados são triviais em $L \setminus \overset{\circ}{L}$:

$$0 \longrightarrow (\xi^0|_L) \oplus \eta \xrightarrow{\alpha \oplus Id} (\xi^1|_L) \oplus \eta \longrightarrow 0$$

onde $\eta \in \text{Vect}(L)$ é escolhido de modo que $(\xi^1|_L) \oplus \eta$ seja trivial. Como α é isomorfismo em $L \setminus \overset{\circ}{L}$, $(\xi^0|_L) \oplus \eta$ é trivial ao menos em $L \setminus \overset{\circ}{L}$.

Sejam $\tau_i : (\xi^i|_{L \setminus \overset{\circ}{L}}) \oplus \eta|_{L \setminus \overset{\circ}{L}} \longrightarrow (L \setminus \overset{\circ}{L}) \times \mathbb{C}^n$, $i = 0, 1$, trivializações com τ_1 arbitrário e $\tau_0 := \tau_1 \circ (\alpha \oplus Id)$.

Então o fibrado

$$\zeta^i := (\xi^i|_L \oplus \eta) \bigcup_{\tau_i} \left((Y^+ \setminus \overset{\circ}{L}) \times \mathbb{C}^n \right)$$

está em $\text{Vect}(Y^+)$ e podemos definir

$$d(\xi) := [\zeta^0] - [\zeta^1]$$

Como $\dim \zeta^0 = \dim \zeta^1$, temos que $d(\xi) \in K(Y)$. É possível mostrar que $d(\xi)$ independe da escolha de η (ver, por exemplo, [18], p. 139). Por essa visão, definimos

$$[\sigma(P)] := d(\sigma(P))$$

Observação 2.5.6. Se $X = \mathbb{R}^n$, temos que $TX^+ = (\mathbb{R}^{2n})^+ = S^{2n} = B_0 \cup B_\infty$, onde B_0 e B_∞ são os hemisférios da esfera, com $B_0 \cap B_\infty = S^{2n-1}$. Nessas condições vale

$$[\sigma(P)] = \left[\theta_n^{B_0} \bigcup_{\sigma(P)} \theta_n^{B_\infty} \right] - [\theta_n]$$

onde

$$\sigma(P)(.,.) : S^{2n-1} := \{(x, \zeta) : |x| + |\zeta| = r\} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

e r é suficientemente grande para que $P\phi = \phi$ para toda ϕ com $\text{supp } \phi \cap \{x : |x| \leq r\} = \emptyset$.

Já dispomos de todo o ferramental necessário para compreender e demonstrar o Teorema do Índice:

Teorema 2.5.7. (*Teorema do Índice de Atiyah-Singer*) Para todo $P \in Ell_c(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$ind P = (-1)^n \alpha^n([\sigma(P)])$$

onde

$$\alpha^n : K(\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{\cong} K(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{Z}$$

é o homomorfismo periódico produzido pela iteração de

$$\alpha_X : K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X)$$

(dada pelo teorema 2.4.11) para $X = \mathbb{R}^{2(n-1)}, \mathbb{R}^{2(n-2)}, \dots$.

Demonstração. Para X localmente compacto, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Ell_c(X) & \xrightarrow{[\sigma(\cdot)]} & K(TX) \\ \text{ind} \searrow & & \swarrow \text{ind} \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Aqui o índice analítico está definido em $Ell_c(X)$, é aditivo, visto que $ind F \oplus G = ind F + ind G$, e só depende da classe de homotopia de $\sigma(P)$. Assim, para $X = \mathbb{R}^n$, em que $K(TX) \cong \mathbb{Z}$ como consequência do teorema 2.4.12 em conjunto com a proposição 1.3.24, a sobrejetividade do fibrado diferença implica que o índice é um múltiplo do isomorfismo periódico, donde

$$ind P = c_n \alpha^n[\sigma(P)]$$

para alguma constante c_n que não depende de P . Queremos provar que $c_n = (-1)^n$. Para isso devemos encontrar $P \in Ell_c(\mathbb{R}^n)$ com $[\sigma(P)] = b \boxtimes \dots \boxtimes b \in K(\mathbb{R}^{2n})$, em que $b \in K(\mathbb{R}^2)$ é a classe de Bott dada pelo item (iii) do teorema 2.4.11, e $ind P = (-1)^n$.

Mostremos que podemos nos restringir ao caso $n = 1$.

Se $P = Q \# R$, com $P \in Ell_c(\mathbb{R}^n)$, $Q \in Ell_c(\mathbb{R}^m)$, $R \in Ell_c(\mathbb{R}^k)$ e $m + k = n$, então

$$\begin{cases} \sigma(P) = \sigma(Q) \# \sigma(R) \\ [\sigma(P)] = [\sigma(Q)] \boxtimes [\sigma(R)] \\ ind P = (ind Q)(ind R) \end{cases}$$

onde

$$Q \# R = \begin{pmatrix} Q \otimes Id & -Id \otimes R^* \\ Id \otimes R & Q^* \otimes Id \end{pmatrix}$$

Assim, como α^n é multiplicativo por construção, temos que $c_n = (c_1)^n$.

Seja $n = 1$. Isso implica que $X = \mathbb{R}$ e $TX = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Então b é representado, por definição, pelo complexo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \theta_1^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\cdot(x+i\xi)^{-1}} & \theta_1^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & TX & & TX & & \end{array}$$

Tendo em mente a sobrejetividade de $\sigma : PDiff_k \longrightarrow Smbk$, também podemos deformar a aplicação de fibrados ϕ , que em (x, ξ) é definido na fibra $\mathbb{C}$ por $\phi(x, \xi) : z \mapsto z(x + i\xi)^{-1}$, para uma aplicação γ com

$$\begin{cases} \gamma(x, \xi) = 1 & \text{se } |x| \geq 1 \\ \gamma(x, \lambda\xi) = \gamma(x, \xi) & \text{para } \lambda > 0 \\ \gamma(x, \xi) \neq 0 & \text{se } \xi \neq 0 \end{cases}$$

Para $|x| \leq 1$, colocamos explicitamente

$$\gamma(x, \xi) = \begin{cases} e^{i\pi(x-1)} & \text{se } \xi > 0 \\ 1 & \text{se } \xi < 0 \end{cases}$$

Desse modo, após suavização, podemos representar γ como o símbolo de um operador pseudodiferencial T de ordem 0 em $\mathbb{R}$, que é a identidade fora do intervalo $[-1, 1]$ e dentro é igual ao operador de Toeplitz $\tilde{T} := e^{i\pi(x-1)}P + (Id - P)$ no círculo $S^1 \cong [-1, 1]$, onde

$$P : \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v z^v \mapsto \sum_{v=0}^{+\infty} a_v z^v$$

é o operador projeção. Por construção, $ind T = ind \tilde{T}$, e, conforme o exemplo 2, obtemos que

$$ind \tilde{T} = -W(e^{i\pi(x-1)}, 0) = -1$$

Assim, $ind T = -1$ e $c_1 = -1$.

□

Observação 2.5.8. *O Teorema de Atiyah-Singer possui uma vasta gama de aplicações, assim como de extensões a contextos mais gerais do que o aqui tratado. Tais aplicações, que vão desde a Teoria dos Números (ver [9]) a realizações concertas em modelos físicos através da chamada Geometria Não-Comutativa (ver [12] e [13]), fogem completamente ao nosso propósito.*

Referências

- [1] ATKINSON, F. V. *The normal solubility of linear equations in normed spaces*. Mat. Sb. 28 (70), 1951.
- [2] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1966.
- [3] BOOSS, B.; BLEECKER, D. D. *Topology and analysis*. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [4] BREDON, G. E. *Topology and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [5] CALKIN, J. W. *Two-sided ideals and congruence in the ring of bounded operators in Hilbert space*. Ann. of Math. vol. 42, n. 4, p. 839-873, 1941.
- [6] CHANDRASEKHARAN, K. *Classical Fourier transforms*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [7] DOUGLAS, R. G. *Banach algebra techniques in operator theory*, second edition. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [8] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] HIRZEBRUCH, F.; ZAGIER, D. *The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory*. Mathematics Lecture n. 3, 1974.
- [10] LANG, S. *Fundamentals of differential geometry*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [11] MAURO, P. C. G. *Os teoremas de Kuiper e Atiyah-Jänich*. Dissertação (Mestrado). Rio de Janeiro: UFRJ / Instituto de Matemática, 2010.
- [12] MIGNACO, J. A.; SIGAUD, C.; DA SILVA, A. R.; VANHECKE, F. J. *The Connes-Lott program on the sphere*. Reviews in Mathematical Physics, vol. 09, n. 6, p. 689-717, 1997.
- [13] MIGNACO, J. A.; SIGAUD, C.; DA SILVA, A. R.; VANHECKE, F. J. *Connes-Lott model building on the two-sphere*. Reviews in Mathematical Physics, vol. 13, n. 1, p. 1-28, 2001.
- [14] MUKHERJEE, A. *Atiyah-Singer index theorem: an introduction*. Text and Readings in Mathematics, 2013.

- [15] MUNKRES, J. R. *Topology: a first course*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [16] PALAIS, R. S. *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*. New Jersey: Princeton University Press, 1965.
- [17] RUDIN, W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.
- [18] SEGAL, G. *Equivariant K-theory*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. n. 34, p. 105-151, 1968.
- [19] SHANAHAN, P. *The Atiyah-Singer index theorem: an introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [20] SHUBIN, M. A.; ANDERSSON, S.I. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer Series in Soviet Mathematics, 2013.
- [21] TAYLOR, M. E. *Pseudodifferential Operators*. (PMS-34) Princeton Mathematical Series, 1981.