GEOMETRIAS CALIBRADAS

Ana María Chaparro Castañeda

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lacramiora Marianty Ionel

Rio de Janeiro
Novembro de 2017

GEOMETRIAS CALIBRADAS

Ana María Chaparro Castañeda

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMATICA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DO INSTITUTO DE MATEMATICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Alejandro Cabrera, Ph. D.

Prof. Michael Benjamin Deutsch, Ph.D.

Prof. Cristhabel Janeth Casanova, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
NOVEMBRO DE 2017

Chaparro Castañeda, Ana María

Geometrias Calibradas/Ana María Chaparro Castañeda. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2017.

IX, 76 p. $29,7$cm.

Orientador: Lacramiora Marianty Ionel

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM/Programa de Matemática, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 75 – 76.

1. Geometrias Calibradas. 2. Subvariedades Lagrangianas Especiais. 3. Geometria Simpléctica. I. Ionel, Lacramiora Marianty. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, Programa de Matemática. III. Título.

*A meus pais*

# Agradecimentos

Agradeço a minha orientadora Marianty Ionel por me guiar a traves de todo o processo com alegria e paciência.
A os professores Alejandro Cabrera, Michael Benjamin Deutsch e Cristhabel Janeth Casanova por aceitar ler minha tese e dar as suas críticas.
A meus pais, Martha Patricia e Edilberto, por seu amor e apoio incondicional. A minhas irmas Diana Camila e Natalia e a minha sobrinha Paula Elisa por me alentar nos momentos difíceis.
A meus queridos amigos Gabriel Freitas, Walter Britto e Víctor Vergara por sua companhia e boa energia. A professora Clara Helena Sanchez por seu apoio quando comecei este processo. A CAPPES pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à IM/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

GEOMETRIAS CALIBRADAS

Ana María Chaparro Castañeda

Novembro/2017

Orientador: Lacramiora Marianty Ionel

Programa: Matemática

Apresenta-se, nesta tese, a noção de calibração como uma $p$-forma fechada $\varphi$ numa variedade Riemanniana $X$ tal que

$$\varphi|_V \leq Vol|_V$$

para todo $p$-plano tangente orientado, onde denotamos por $Vol$ a forma de volume da variedade.
Uma subvariedade $M$ de $X$ de dimensão $p$ que satisfaz

$$\varphi|_{T_xM} = Vol|_{T_xM}$$

para todo $x \in M$, se chama uma subvariedade calibrada por $\varphi$. Estas nocoes foram inicialmentee introduzidas por Harvey e Lawson em [7].
Nesta tese, consideramos alguns exemplos de calibrações $\varphi$, assim como suas subvariedades calibradas. Quando $X = \mathbb{C}^n$, mostramos que a $n$-forma $Re(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n)$ é uma calibração. Neste caso, as subvariedades calibradas por esta calibração se chamam subvariedades Lagrangianas Especiais. Apresentamos exemplos de subvariedades Lagrangianas Especiais em $\mathbb{C}^3$ com grupos de simetria grandes, alguns dos quais podem ser generalizados a $\mathbb{C}^n$. A continuação, encontramos as condições necessárias para que uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $p$ tenha como fibrado conormal uma subvariedade Lagrangiana Especial de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$. Por último, provamos que a 3-forma $\varphi(x, y, z) = \langle x, yz \rangle$ e a 4-forma $\psi = *\varphi$ são calibrações em $\mathbb{R}^7$, onde $*$ é o operador Hodge. Além disso, provamos que a 4-forma $\Phi(x, y, z, w) \equiv \langle x, y \times z \times w \rangle$ é uma calibração em $\mathbb{R}^8$ e mostramos a existência de subvariedades calibradas por essas calibrações.

Abstract of Dissertation presented to IM/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CALIBRATED GEOMETRIES

Ana María Chaparro Castañeda

November/2017

Advisor: Lacramiora Marianty Ionel

Department: Matemática

In this work, we present the notion of a calibration as a closed $p$-form $\varphi$ in a Riemannian manifold $X$ such that

$$\varphi|_V \leq Vol|_V$$

for every oriented tangent $p$-plane $V$, where we denote by $Vol$ the volume form of $X$.
A submanifold $M$ of $X$ of dimension $p$ satisfying

$$\varphi|_{T_xM} = Vol|_{T_xM}$$

for all $x \in M$, is called a calibrated submanifold by $\varphi$. This notions were initially introduzed by Harvey and Lawson in [7].
In this work, we consider some examples of calibrations $\varphi$ as well as the calibrated submanifolds by $\varphi$. For $X = \mathbb{C}^n$, we show that the $n$-form $Re(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n)$ is a calibration. The calibrated submanifolds by this calibration are called Special Lagrangian submanifolds. We present examples of Special Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}^3$ with big simmetry groups, some of which can be generalized to $\mathbb{C}^n$. Next, we find necessary conditions for a submanifold of $\mathbb{R}^n$ of dimension $p$ to have conormal bundle a Special Lagrangian submanifold of $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$. Finally, we prove that the 3-form $\varphi(x, y, z) = \langle x, yz\rangle$ and the 4-form $\psi = *\varphi$ are calibrations in $\mathbb{R}^7$, where we denote by $*$ the Hodge operator. Moreover, we prove that the 4-form $\Phi(x, y, z, w) \equiv \langle x, y \times z \times w\rangle$ is a calibration in $\mathbb{R}^8$ and we show the existence of submanifolds calibrateed by these calibrations.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar as Geometrias Calibradas, que foram introduzidas por Harvey e Lawson [7], e apresentar vários exemplos de calibrações e subvariedades calibradas em espaços Euclideanos. Para isto precisamos de algumas noções de geometria simpléctica que presentamos no capitulo 2.
Consideramos $X$ uma variedade Riemanniana. Uma $p$-forma fechada $\varphi$ se chama calibração se

$$\varphi|_V \leq Vol_V \tag{1.1}$$

para todo $p$-plano tangente orientado $V$ em $T_xX$, para todo $x \in X$. Uma subvariedade $p$-dimensional $M$ de $X$ que satisfaz

$$\varphi|_{T_xM} = Vol_{T_xM} \tag{1.2}$$

é chamada de **subvariedade calibrada** por $\varphi$ ou uma $\varphi$-subvariedade.
No capítulo 3 provamos o importante fato que as subvariedades calibradas são absolutamente minimizantes de volume na sua classe de homologia e apresentamos alguns exemplos simples de calibrações e as suas subvariedades calibradas correspondentes. Nesse sentido, mostramos que se $\omega = \dfrac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + ... + dz_n \wedge d\bar{z}_n)$ é a forma Kähler em $\mathbb{C}^n$, todas as formas $\dfrac{\omega^k}{k!}$ com $k \leq n$ são calibrações e as subvariedades calibradas são precisamente as $k$-subvariedades complexas em $\mathbb{C}^n$. Em seguida, mostramos que a forma $Re\Omega$ é também uma forma de calibração em $\mathbb{C}^n$, onde $\Omega = dz_1 \wedge ... \wedge dz_n$ é a forma de volume em $\mathbb{C}^n$. As subvariedade calibradas por essa calibração são chamadas de **subvariedades Lagrangianas Especiais** (LE) e serão o nosso objeto principal de estudo nesse trabalho. Aqui mostramos uma caracterização útil de uma subvariedade Lagrangiana Especial que explica também o seu nome. Uma subvariedade Lagrangiana Especial $L$ em $\mathbb{C}^n$ é uma subvariedade Lagrangiana i.e. $\omega|_L = 0$, que satisfaz a condição extra $Im\Omega|_L = 0$.
No final do capítulo 3 apresentamos a equação diferencial dos LE. Mais precisa-

mente, o gráfico de uma $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é LE em $R^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ se e somente se $F = \nabla f$, para alguma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz a EDP:

$$Im\{det_{\mathbb{C}}(I + iHess\ f)\} = 0\ em\ \mathbb{C}^n.$$

Para essa EDP não linear é difícil de achar soluções. Uma ideia iniciada por Harvey e Lawson (Ver [7]) é de buscar soluções altamente simétricas, i.e LE invariantes sobre ações de certos grupos que agem em $\mathbb{C}^n$. Nos seguintes capítulos, estamos seguindo essa ideia para apresentar alguns exemplos de LE com simetrias em $\mathbb{C}^n$ obtidos por H-L. Nos seguintes capítulos, apresentamos alguns exemplos de LE de cohomogeneidade um em $\mathbb{C}^n$, usando técnicas de aplicação de momento.

No capítulo 4 introduzimos a **Aplicação de Momento** de uma ação de grupo de Lie numa variedade e calculamos alguns exemplos clássicos.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo das subvariedades LE em $\mathbb{C}^n$. Depois de descrever as subvariedades LE em $\mathbb{C}^1$ e $\mathbb{C}^2$, nos concentramos na classificação das subvariedade LE de cohomogeneidade um em $\mathbb{C}^3$, seguindo [8].
Assim, queremos estudar subvariedades Lagrangianas especiais de $\mathbb{C}^n$ com grupos de simetria grandes. Para isto, usamos alguns resultados das equações diferenciais, como o Teorema de Cauchy-Kowalevsky e o Teorema de Cartan-Kähler, e incluímos a construção de subvariedades especiais Lagrangianas que contém $(m-1)$-subvariedades reais analíticas de $\mathbb{C}^m$. Para fazer isto, mostramos que se $N$ é uma subvariedade Lagrangiana com grupo de simetria $G$ então a aplicação de momento de $G$ é constante em $N$.
Depois estudamos subvariedades Lagrangianas especiais com cohomogeneidade um $N$ em $\mathbb{C}^m$, onde as órbitas do grupo de simetria $G \subset SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ tem codimensão um em $N$. Relacionamos a noção de subvariedade Lagrangiana especial com uma ODE sobre as $G$-órbitas que dependem de $t$, e resolvendo esta equação encontramos exemplos de subvariedades especiais Lagrangianas em $\mathbb{C}^3$.
No capítulo 6 determinamos as subvariedades $p$-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ cujo fibrado conormal é subvariedade Lagrangiana especial em $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$. Mostramos que se $M^p \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade então $N^*M \subset T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ é LE se e somente se $M$ for austera, ou seja, os polinômios simétricos nos autovalores da segunda forma fundamental de $M$ em cada direção normal se anulam.
No capitulo 7, apresentamos 2 formas de calibração em $\mathbb{R}^7$, a 3-forma $\varphi(x, y, z) = \langle x, yz \rangle$ onde $x, y, z \in \mathbb{R}^7$ e a 4-forma $\psi = *\varphi$, onde $*$ é o operador Hodge; e uma forma de calibração em $\mathbb{R}^8$, a 4-forma $\psi(x, y, z, w) \equiv \dfrac{1}{2}\langle x(\bar{y}z - z(\bar{y}x), w)\rangle$, estudamos seus planos calibrados e mostramos a existência de subvariedades calibradas

por elas. Relacionamos essas formas com os grupos excepcionais de holonomia $G_2$ e $Spin_7$.

# Capítulo 2

# Preliminares de Geometría Simpléctica

Nesta seção presentamos as noções de Geometria Simpléctica necessárias para definir as subvariedades Lagrangianas especiais. Para isto, definimos formas simplécticas, descrevemos algumas de suas propriedades básicas e introduzimos exemplos, tais como o fibrado cotangente. O material nesta seção se encontra em [1].

## 2.1 Espaços Vetoriais Simplécticos

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}^m$ com forma hermítica

$$\langle Z, Z' \rangle = \Sigma_{j=1}^{m} \bar{Z}_j Z'_j, \tag{2.1}$$

onde $Z = (Z_1, ..., Z_m), (Z'_1, ..., Z'_m) \in \mathbb{C}^m$ (notemos que a forma é anti-linear na primeira entrada e linear na segunda). Decomponhamos isto nas partes real e imaginária:

$$\langle Z, Z' \rangle = (Z, Z') - i\omega(Z, Z'). \tag{2.2}$$

A parte real é o produto estândar (estrutura Euclidiana) de $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$,

$$(Z, Z') = \textstyle\sum_{j=1}^{m} (X_j X'_j + Y_j Y'_j) = X \cdot X' + Y \cdot Y',$$

é uma forma (real) bilinear simétrica não degenerada. A parte imaginária define uma forma bilinear (real)

$$\omega(Z, Z') = \textstyle\sum_{j=1}^{m} (X'_j Y_j - X_j Y'_j) = X' \cdot Y - X \cdot Y'$$

que é *alternada*, ou seja, que $\omega(Z', Z) = -\omega(Z, Z')$. Para escrever estas fórmulas, temos decomposto o vetor complexo de $\mathbb{C}^m$ como

$$Z = X + iY,\ X, Y \in \mathbb{R}^m$$

e temos usado o produto escalar $X \cdot Y$ de $\mathbb{R}^m$. A forma $\omega$ é não-degenerada também, pois

$$\omega(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \Rightarrow X = 0.$$

Mais geralmente,

**Definição 2.1.** *Seja $E$ um espaço vetorial real. Uma forma simpléctica em $E$ é uma forma bilinear alternada não degenerada. Um espaço vetorial munido de uma forma simplética é dito um espaço vetorial simpléctico.*

## 2.2 Bases Simpléticas

Fixando uma base complexa unitária $(e_1 \ldots, e_m)$ de $\mathbb{C}^m$, ou seja, tal que $(e_1 \ldots, e_m)$ formam uma matriz unitária, escolhemos $f_j = -ie_j$, de modo que

$$(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$$

forme uma base do espaço real $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$. Avaliando $\omega$ nessa base, obtemos

$$\omega(e_i, e_j) = Im\langle e_i, e_j\rangle = Im\delta_{i,j} = 0, \tag{2.3}$$

$$\omega(f_i, f_j) = Im\langle ie_i, ie_j\rangle = Im\langle e_i, e_j\rangle = 0, \tag{2.4}$$

e

$$\omega(e_i, f_j) = Im\langle e_i, -ie_j\rangle = Re\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}. \tag{2.5}$$

Inspirados nestas propriedades, fazemos a seguinte definição

**Definição 2.2.** *Uma base $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ de um espaço vetorial simpléctico chama-se uma base simplética se*

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \text{ e } \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \text{ para todo } i \text{ e } j.$$

A seguinte proposição proporciona a existência de bases simpléticas em todos os espaços vetoriais simpléticos.

**Proposição 2.1.** *Seja $\omega$ uma forma simplética num espaço vetorial de dimensão finita $E$. Existe uma base $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ de $E$ tal que $\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$ e $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$.*

Para a prova desta proposição ver [1]. Em particular, a dimensão de $E$ é um número par e esta é o único invariante por isomorfismo de $(E, \omega)$.

## 2.3 Variedades Simplécticas

**Definição 2.3.** *Uma **variedade simpléctica** é uma variedade diferenciável $M$ dotada com uma 2-forma $\omega$ fechada e não degenerada, ou seja, uma forma não degenerada alternada bilinear $\omega_x$ em cada espaço tangente $T_xM$. Notamos que uma variedade simpléctica tem dimensão par.*

Por exemplo, $\mathbb{C}^n$ com coordenadas $z_j = x_j + iy_j$ para $j = 1, ..., n$ com a forma simpléctica que temos considerado até agora, como forma diferencial

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$$

Esta é uma forma diferencial *exata* (a diferencial de uma forma de grau 1):

$$\omega = d(\textstyle\sum_{j=1}^{m} y_j dx_j) = d(Y \cdot X)$$

A forma $\lambda = Y \cdot X$ chama-se forma de *Liouville*.

**Definição 2.4.** *Sejam $(M_1, \omega_1)$ e $(M_2, \omega_2)$ variedades simplécticas de dimensão $2n$, e seja $g : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. Entao $g$ é um **simplectomorfismo** se $g^*\omega_2 = \omega_1$.*

**Teorema 2.1.** *(**Teorema de Darboux**) Seja $(M, \omega)$ uma variedade simpléctica, e seja $p$ qualquer ponto em $M$. Então podemos encontrar um sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ centradas em $p$ tais que em $\mathcal{U}$*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

A demonstração deste Teorema encontra-se em [4].
O Teorema de Darboux classifica as variedades simplécticas localmente sob simplectomorfismos. Uma consequência dele é que a dimensão é o único invariante local de variedades simplectomorfas sob simplectomorfismos. Assim como uma variedade $n$-dimensional se parece localmente com $\mathbb{R}^n$, qualquer variedade simpléctica de dimensão $2n$ se parece localmente com $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$. Ou seja, toda variedade simpléctica $(M^{2n}, \omega)$ é localmente simplectomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$.

**Definição 2.5.** *Uma **Variedade Complexa** de dimensão (complexa) $n$ é um conjunto $M$ com um atlas complexo completo*

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \nu_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I\}$$

*onde $I$ é um conjunto de índices, $M = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, os $\nu_\alpha$'s são subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^n$, e as aplicações $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \nu_\alpha$ são tais que as aplicações de transição $\psi_{\alpha\beta}$ são* *biholomorfas como aplicações em subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^n$, ou seja, $\psi_{\alpha\beta}$ é uma bijeção e $\psi_{\alpha\beta}$ e $\psi_{\alpha\beta}^{-1}$ são holomorfas.*

**Definição 2.6.** *Seja $V$ um espaço vetorial. Uma* ***estrutura complexa*** *em $V$ é uma aplicação linear*

$$J : V \to V \quad com \quad J^2 = -Id.$$

*O par $(V, J)$ chama-se de* ***espaço vetorial complexo****.*

Uma estrutura complexa $J$ é equivalente a uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ se identificamos a aplicação $J$ com a multiplicação por $\sqrt{-1}$. Além disso, da equação (2.2) segue que

$$(JZ, Z') = Re\langle JZ, Z'\rangle = Re\ i\langle Z, Z'\rangle = -Im\langle Z, Z'\rangle = \omega(Z, Z') \qquad (2.6)$$

**Definição 2.7.** *Uma estrutura quase complexa numa variedade $M$ é um campo suave de estruturas complexas nos espaços tangentes:*

$$x \mapsto J_x : T_xM \to T_xM \quad linear, \quad e \quad J_x^2 = -Id.$$

*O par $(M, J)$ se chama uma Variedade Quase Complexa.*

**Definição 2.8.** *Seja $(M, \omega)$ uma variedade simpléctica. Uma estrutura quase complexa $J$ em $M$ se chama compatível se*

$$\begin{aligned} x \mapsto & g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R} \\ & g_x(u, v) := \omega_x(u, J_xv) \end{aligned}$$

*é uma métrica Riemanniana em $M$.*

**Definição 2.9.** *Seja $M$ uma variedade complexa. Uma* ***forma Kähler*** *$\omega$ em $M$ é uma forma simpléctica compatível com a estrutura complexa. Chamamos a $(M, \omega)$ de subvariedade Kähler.*

## 2.4 Subespaços Lagrangianos

Consideramos $(\mathbb{C}^n, \omega)$ como variedade simpléctica e notamos por $F^\perp$ o ortogonal Euclideano do subespaço real $F$ de $\mathbb{C}^n$ e por $F^0$ o seu ortogonal simpléctico (ou seja, com respeito de $\omega$). Como $\omega$ é não degenerada, se tem

$$(F^0)^0 = F \quad e \quad dimF + dimF^0 = 2n = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$$

**Definição 2.10.** *Dizemos que o subespaço $F$ é isotrópico se $F \subset F^0$ e co-isotrópico se $F^0 \subset F$.*

Por exemplo, uma linha real é sempre isotrópica, pois fica no seu ortogonal que é um hiperplano co-isotrópico. Notamos que $F$ é isotrópico se e somente se $F^0$ é co-isotrópico, e que a dimensão de um subespaço isotrópico é menor ou igual a $n$, a metade da dimensão de $\mathbb{C}^n$.

**Definição 2.11.** *Os subespaços isotrópicos de dimensão maximal $n$ se chamam* ***Lagrangianos****.*

Por exemplo, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ é um subespaço Lagrangiano. Mais generalmente, um subespaço gerado pela *metade* de uma base simpléctica é Lagrangiano. Reciprocamente, se $F$ é um subespaço isotrópico de dimensão $k \leq n$, é possível completar qualquer base $(e_1, ..., e_k)$ de $F$ numa base simpléctica e assim obter um subespaço Lagrangiano que contém $F$.

**Lema 2.1.** *Um subespaço real $P$ de $\mathbb{C}^n$ é Lagrangiano se e somente se $P^\perp = iP$.*

*Demonstração.* Obtemos este resultado do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}\omega(Z, Z') = 0 &\Leftrightarrow Im(Z, Z') = 0 \\ &\Leftrightarrow Re(Z, iZ') = 0 \\ &\Leftrightarrow (Z, iZ') = 0.\end{aligned}$$

□

**Lema 2.2.** *Seja $P$ um subespaço Lagrangiano de $\mathbb{C}^n$ e $(x_1, ..., x_n)$ uma base ortonormal deste subespaço real. Então $(x_1, ..., x_n)$ é uma base complexa unitária de $\mathbb{C}^n$. Reciprocamente, se $(x_1, ..., x_n)$ é uma base unitária de $\mathbb{C}^n$, o subespaço real que ele gera é Lagrangiano.*

*Demonstração.* Se $(E_1, ..., E_n)$ é uma base ortonormal do Lagrangiano $P$, o lema anterior garante que a base $(E_1, ..., E_n, iE_1, ..., E_n)$ é uma base complexa de $\mathbb{C}^n$. Além disso, temos

$$\langle E_i, E_j \rangle = (E_i, E_j) - i\omega(E_i, E_j) = \delta_{i,j},$$

logo ela é uma base unitária. □

**Definição 2.12.** *Seja $(M, \omega)$ uma variedade $2n$-dimensional simpléctica. Uma subvariedade $Y$ de dimensão $n$ de $M$ é uma* ***subvariedade Lagrangiana*** *se, em cada $p \in Y$, $T_pY$ é um subespaço Lagrangiano de $T_pM$, ou seja, $\omega_p|_{T_pY} \equiv 0$.*

**Observação 2.1.** *Equivalentemente, se $i : Y \hookrightarrow M$ é a aplicação inclusão, então $Y$ é Lagrangiano se e somente se $i^*\omega = 0$ e $dimY = \dfrac{1}{2}dimM$.*

**Lema 2.3.** *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $C^1$. Seja $M$ o gráfico de $f$ em $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$. Então o gráfico de $M$ é Lagrangiana se e somente se a matriz Jacobiana $((\partial f^i/\partial x_j))$ é simétrica. Em particular, se $\Omega$ é simplesmente conexo, então $M$ é Lagrangiana se e somente se $f = \nabla F$ é o campo gradiente de alguma função potencial $F \in C^2(\Omega)$.*

*Demonstração.* O espaço tangente ao gráfico no ponto $(x, f(x))$ é o gráfico de $(df)_x$, o diferencial de $f$ no ponto $x$. Então $(df)_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear e seu gráfico é da forma $Graf(df)_x = \{y + i(df)_x(y) : y \in \mathbb{R}^n\}$. Veremos a continuação que $Graf(df)_x$ é um subespaço Lagrangiano se e somente se $(df)_x$ é um endomorfismo simétrico. Com efeito, por definição, $Graf(df)_x$ é Lagrangiano se

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \quad \omega(u + i(df)_x(u), v + i(df)_x(v)) = 0$$

Temos

$$\begin{aligned}
\omega(u + i(df)_x(u), v + i(df)_x(v)) &= -Im\langle u + i(df)_x(u), v + i(df)_x(v)\rangle \\
&= \omega(u, v) + \omega((df)_x(u), (df)_x(v)) \\
&\quad + ((df)_x(u), v) - (u, (df)_x(v)) \\
&= ((df)_x(u), v) - (u, (df)_x(v))
\end{aligned}$$

pois $\mathbb{R}^n$ é Lagrangiano. O subespaço $Graf(df)_x$ é Lagrangiano se e somente se a última expressão se anula para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$, ou seja se e somente se $(df)_x$ é simétrica.
Pelo Teorema de Schwarz, a matriz $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ é simétrica para todo $x$ se e somente se a forma diferencial $\sum f_i dx_i$ sobre $\mathbb{R}^n$ é fechada ou, equivalentemente, exata, se $\Omega$ for simplesmente conexo. Assim,

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \text{ ou seja } f = \nabla F.$$

$\square$

## 2.5 Forma Simplética no Fibrado Cotangente

Nesta seção introduzimos a forma canônica no fibrado cotangente de uma variedade diferenciável.

**Fibrado Cotangente**

Seja $X$ uma variedade diferenciável n-dimensional e $M = T^*X$ seu fibrado cotangente. Se a estrutura da variedade em $X$ se descreve por cartas coordenadas $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$ com $x_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, então em qualquer $x \in \mathcal{U}$, os diferenciais $(dx_1)_x, \ldots, (dx_n)_x$ formam uma base de $T_x^*X$. Assim, se $\xi \in T_x^*X$, então $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x$ para alguns coeficientes reais $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Isto induz uma aplicação

$$\begin{aligned} T^*\mathcal{U} &\to \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \xi) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n). \end{aligned}$$

A carta $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ é uma carta coordenada para $T^*X$; as coordenadas $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ são as **coordenadas cotangentes** associadas as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathcal{U}$. As funções de transição na sobreposição são suaves: dadas duas cartas $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$, e $(\mathcal{U}', x_1', \ldots, x_n')$, and $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, se $\xi \in T_x^*X$, então

$$\xi = \textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x = \sum_{i,j} \xi_i \left( \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j'} \right) (dx_j')_x$$

onde $\xi_i' = \Sigma_i \xi_i \left( \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j'} \right)$ é suave. Portanto, $T^*X$ é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional.

**Formas Tautológica e Canônica em Coordenadas**

Seja $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$ uma carta coordenada para $X$, com coordenadas cotangentes associadas $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Definamos a 2-forma $\omega$ em $T^*\mathcal{U}$ por

$$\omega = \textstyle\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i.$$

Para confirmar que esta definição é independente das coordenadas, consideramos a 1-forma em $T^*\mathcal{U}$

$$\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i dx_i.$$

Claramente, $\omega = -d\alpha$.
**Afirmação** A forma $\alpha$ é intrinsecamente definida (e portanto a forma $\omega$ também é intrinsecamente definida).

*Demonstração.* Seja $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ e $(\mathcal{U}', x_1', \ldots, x_n', \xi_1', \ldots, \xi_n')$ duas cartas coordenadas cotangentes. Em $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ os dois conjuntos de coordenadas se relacionam por $\xi_j' = \sum_i \xi_i \left( \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} \right)$. Como $dx_j' = \Sigma_i \left( \dfrac{\partial x_j'}{\partial x_i} \right) dx_i$, temos

$$\alpha = \textstyle\sum_i \xi_i dx_i = \sum_j \xi_j' dx_j' = \alpha'$$

$\square$

A 1-forma $\alpha$ se chama **forma tautológica** ou **1-forma de Liouville** e a 2-forma $\omega$ se chama **forma canônica simplética**.
Seja $S$ uma subvariedade $k$-dimensional de uma variedade Riemanniana $n$-dimensional $X$.

**Definição 2.13.** *O espaço co-normal em $x \in S$ é*

$$N_x^*S = \{\xi \in T_x^*X | \xi(v) = 0, \text{ para todo } v \in T_xS\}.$$

*O fibrado co-normal de $S$ é*

$$N^*S = \{(x, \xi) \in T^*X | x \in S, \xi \in N_x^*S\}.$$

**Proposição 2.2.** *Para qualquer subvariedade $S$ de uma variedade $X$, a imersão canônica de seu fibrado conormal $N^*S$ em $T^*X$ é Lagrangiana com respeito da estrutura simpléctica natural em $T^*X$.*

*Demonstração.* Seja $i : N^*S \hookrightarrow T^*X$ a inclusão, e $\alpha$ a 1-forma tautológica em $T^*X$. Então

$$i^*\alpha \equiv 0.$$

Seja $(U, x_1, ..., x_n)$ um sistema coordenado em $X$ centrado em $x \in S$ e adaptado a $S$ tal que $U \cap S$ se descreve por $x_{k+1} = ... = x_n = 0$. Seja $(T^*U, x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ o sistema coordenado cotangente associado. A subvariedade $N^*S \cap T^*U$ se descreve por

$$x_{k+1} = ... = x_n = 0 \quad e \quad \xi_1 = ... = \xi_k = 0.$$

Como $\alpha = \sum \xi_i dx_i$ em $T^*U$, concluímos que, em $p \in N^*S$,

$$(i^*\alpha)_p = \alpha_p|_{T_p(N^*S)} = \sum_{i>k} \xi_i dx_i|_A = 0$$

Onde $A$ é o conjunto gerado por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i} : i \leq k\right\}$. □

# Capítulo 3

# Geometrías Calibradas

Nesta seção introduzimos as noções principais do trabalho, ou seja, calibração e subvariedades calibradas, seguindo o artigo de Joyce [8]. Presentamos exemplos e mostramos a propriedade de que as subvariedades calibradas minimizam o volume absolutamente na classe de Homologia.

## 3.1 Forma de Volume Induzida pela Métrica

**Definição 3.1.** *Seja $M$ uma variedade orientada. Definimos uma* ***forma de volume*** *$\omega \in \Omega^n(M)$ como uma forma (de grau máximo) que nunca se anula.*

**Exemplo 3.1.** *Consideremos $(\mathbb{R}^n, x_1, ..., x_n)$ com a métrica usual. Assim, $\frac{\partial}{\partial x_1} = e_1, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} = e_n$ é uma base do espaço tangente, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Para que uma forma $\omega$ seja uma forma de volume, queremos que $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = 1$ pois os vetores $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ formam um paralelepípedo retangular de volume* 1*. Portanto a forma $\omega = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ é a forma de volume em $\mathbb{R}^n$.*

*Sejam $Y_1, ..., Y_n$ campos vectoriais em $\mathbb{R}^n$. Usando os vetores da base canônica escrevemos $Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$. Então*

$$\omega(Y_1, ..., Y_n) = (detA)\omega(e_1, ..., e_n) = detA,$$

*onde $A = (a_{ij})$.*

Seja $M^n$ uma variedade orientada e $g$ uma métrica Riemanniana. Mostramos que a métrica induz uma forma de volume. Com efeito, seja $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}, \varphi)\}$ um atlas de orientação, ou seja que para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}$ temos $detd(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) > 0$. Consideramos $p \in M$ e $\{e_1, ...e_n)\}$ uma base ortonormal positiva (ou seja que $g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$). Nas coordenadas locais $(\mathcal{U}, x_1, ..., x_n)$, temos $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = a_{ij} e_j$, para $i = 1, ..., n$, usando a convenção de índices de Einstein para a soma. Calculamos os coeficientes da matriz determinada pela métrica.

$$\begin{aligned} g_{ik}(p) &= g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = g(a_{il}e_l, a_{km}e_m) \\ &= a_{il}a_{km}g(e_l, e_m) = a_{il}a_{km}\delta_{lm} \\ &= a_{il}a_{kl}. \end{aligned}$$

Notando por $A = (a_{ij} \in Gl(n : \mathbb{R}))$ e $G = (g_{ij})$, o cálculo anterior mostra $detG = (detA)^2$.

Por definição, a forma de volume deve ter grau máximo, logo ela é da forma

$$Vol = f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

Queremos $Vol(e_1, ..., e_n) = 1$. Logo

$$\begin{aligned} Vol\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, ..., \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right) &= detA Vol(e_1, ..., e_n) \\ &= detA. \end{aligned}$$

Assim, $f = detA = \sqrt{detG}$.

**Definição 3.2.** *Definimos a* ***forma de volume*** *da variedade Riemanniana* $(M, g)$ *na vizinhança* $(\mathcal{U}, x_1, ..., x_n)$ *por* $Vol = \sqrt{det(g_{ij})}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$.

**Observação 3.1.** *A forma de volume* $Vol$ *está bem definida em todo* $M$*. Consideremos as novas coordenadas* $(\mathcal{V}, y^1, ..., y^n) \in \mathcal{A}$*, com* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$*, e queremos mostrar que*

$$\omega = \sqrt{det(h_{ij})}dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n,$$

*onde* $h_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$*. Seja* $F = \psi^{-1} \circ \varphi$ *a aplicação de transição entre* $\mathcal{U}$ *e* $\mathcal{V}$*. Então*

$$\begin{aligned} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n &= \frac{\partial(y^1, ..., y^n)}{\partial(x^1, ..., x^n)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= J dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

*Usando o fato que* $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial y^k}$ *obtemos*

$$\begin{aligned}\sqrt{det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n &= Vol\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= det\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right) Vol\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n}\right) \frac{1}{J} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \\ &= \sqrt{det(h_{ij})}dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.\end{aligned}$$

## 3.2 Calibrações

Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana orientada. Um **k-plano orientado tangente** $V$ em $M$ é um subespaço vetorial $V$ de algum espaço tangente $T_xM$ de $M$ com $dimV = k$, equipado com uma orientação. Se $V$ é um $k$-plano tangente orientado em $M$ então $g|_V$ é uma métrica Euclideana em $V$, de modo que combinando $g|_V$ com a orientação em $V$ obtemos uma *forma de volume* natural $vol_V$ em $V$, que é uma $k$-forma em $V$.

**Definição 3.3.** *Seja $\varphi$ uma k-forma fechada em $M$. Dizemos que $\varphi$ é uma* ***calibração*** *em $M$ se para todo k-plano orientado $V$ em $M$ temos $\varphi|_V \leq vol_V$.*

**Observação 3.2.** *Neste caso $\varphi|_V = \alpha \cdot vol_V$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\varphi|_V \leq vol_V$ se $\alpha \leq 1$; além disso, se $\{v_1, ..., v_n\}$ for uma base ortonormal de $V$, então $\varphi(v_1, ..., v_n) \leq 1$.*

Estamos interessados nos $k$-planos $V$ onde a desigualdade fica igualdade, esses se chamam os planos calibrados por $\varphi$; nos interessa se uma distribuição de $k$-planos calibrados em $M$ é integrável, o seja se existem subvariedades calibradas por $\varphi$.

**Definição 3.4.** *Seja $N$ uma subvariedade orientada de $M$ com dimensão $k$. Dizemos que $N$ é uma subvariedade calibrada ou $\varphi -$ subvariedade se $\varphi|_{T_xN} = vol_{T_xN}$ para todo $x \in N$.*

**Definição 3.5.** *Seja $X$ uma variedade Riemanniana, e $\varphi$ uma p-forma diferenciável em $X$. Então em cada $x \in X$, definimos a comassa de $\varphi$ por*

$$||\varphi||^*_x \equiv sup\{\langle \varphi_x, \xi_x \rangle : \xi_x \text{ é um p-vetor unitário em } x\}.$$

*Além disso, se $A$ é um subconjunto de $X$, definimos a comassa de $\varphi$ em $A$ por*

$$||\varphi||^*_A = sup_{x \in A}||\varphi||^*_x$$

No seguinte resultado usaremos a desigualdade de Hadamard, que diz que se $N$ é uma matriz com colunas $v_j$, então $|det(N)| \leq \prod_{i=1}^n ||v_i||$.

**Teorema 3.1.** *A forma* $\frac{\omega^k}{k!} = \frac{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}{k!}$ *é uma calibração em* $\mathbb{C}^n$ *para todo* $k \leq n$ *e suas subvariedades calibradas são as subvariedades complexas de dimensão* $k$ *em* $\mathbb{C}^n$.

*Demonstração.* Sejam $V \subseteq \mathbb{C}^n$ um subespaço real linear de dimensão real $2k$ e $(v_1, v_2, \ldots, v_{2k})$ uma base de $V$. Queremos provar que

$$|\omega^k(v_1, \ldots, v_{2k})| \leq k! \; Vol_V(v_1, \ldots, v_{2k})$$

com igualdade se e somente se $V$ é um subespaço complexo linear de $\mathbb{C}^n$.
Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto Hermítico em $V$, com parte real $(\cdot, \cdot)$ e parte imaginária $\omega = \omega(\cdot, \cdot)$. Observemos primeiro que ambos lados da desigualdade encontrada ficam multiplicados por $det\ A$ se transformamos $(v_1, \ldots, v_{2k})$ com $A \in Gl(2k, \mathbb{R})$ em outra base de $V$. Logo somos livres de escolher uma base conveniente para $V$.
Sejam $v, w \in \mathbb{C}^n$ vetores ortonormais unitários com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então

$$\omega(v, w) = \langle Jv, w \rangle \in [-1, 1] \quad \text{e}$$
$$\omega(v, w) = \pm 1 \text{ se e somente se } w = \pm Jv.$$

Isto mostra a afirmação no caso $k = 1$.
No caso geral observamos que a restrição de $\mathbb{C}^n$ a $V$ é dada por um endomorfismo anti-simétrico $A$ de $V$. Pelo teorema espectral, é possível escolher uma base tal que a matriz anti-simétrica tem forma de bloco diagonal usando uma transformação especial ortogonal. Especificamente, $A$ pode-se escrever na forma $A = Q\Sigma Q^T$ onde $Q$ é ortogonal e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

para $\lambda_k$ reais, tais que $i\lambda_1, -i\lambda_1, i\lambda_2, -i\lambda_2, ...$ são os autovalores da matriz. Logo existe uma base ortonormal $(v_1, \ldots, v_{2k})$ de $V$ e números reais $a_1, \ldots, a_k$ tais que

$$A(v_{2j-1}) = a_j v_{2j} \quad \text{e} \quad A(v_{2j}) = -a_j v_{2j-1}.$$

Pela desigualdade triangular $a_j = \omega(v_{2j-1}, v_{2j}) \leq ||\omega|| = 1$, logo $|a_j| \leq 1$ com igualdade se e somente se $v_{2j} = \pm J v_{2j-1}$. Portanto

$$|\omega^k(v_1, \ldots, v_{2k})| = k!\ |a_1 \cdots a_k| \le k! = k!\ Vol_V(v_1, \ldots, v_{2k})$$

com igualdade se e somente se $V$ é um subespaço linear complexo de $\mathbb{C}^n$.

Encontraremos as **subvariedades calibradas** no caso $n = 2$. Consideremos $(\mathbb{C}^2, I, g, \omega)$. Mostraremos que as subvariedades calibradas por $\omega$ são as curvas holomorfas, ou seja, as subvariedades complexas em $\mathbb{C}^2$.

Estamos considerando $(\mathbb{C}^2, z_1, z_2)$ com $z_1 = x + iy$ e $z_2 = u + iv$. Agora, denotamos por $M^2$ as subvariedades calibradas por $\omega$. Suponhamos que localmente $M^2$ é o gráfico de uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Em particular, suponhamos que podemos escrever $M$ como

$$M^2 = graf(F) = \{(x, y, u(x, y), v(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

onde $dx \wedge dy \neq 0$. Por definição, $M$ é calibrada por $\omega$ se e somente se $\omega|_M = vol|_M$. A forma $\omega|_M$ se escreve como

$$\begin{aligned}
\omega|_M &= dx \wedge dy + du(x, y) \wedge dv(x, y) && (3.1)\\
&= dx \wedge dy + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) && (3.2)\\
&= dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}dy \wedge dx && (3.3)\\
&= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy. && (3.4)
\end{aligned}$$

Por outra parte, a métrica em $\mathbb{C}^2$ se escreve como

$$\begin{aligned}
g &= dz_1 \circ d\bar{z}_1 + dz_2 \circ d\bar{z}_2\\
&= (dx + idy) \circ (dx - idy) + (du + idv) \circ (du - idv)\\
&= dx^2 + dy^2 + du^2 + dv^2.
\end{aligned}$$

Agora, escrevemos a métrica restringida a $M$. Notamos $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
g|_M &= dx^2 + dy^2 + (u_x dx + u_y dy)^2 + (v_x dx + v_y dy)^2\\
&= dx^2(1 + u_x^2 + v_x^2) + dy^2(1 + u_y^2 + v_y^2) + 2dxdy(u_x u_y + v_x v_y)
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz da métrica é

$$G = \begin{pmatrix} 1 + u_x^2 + v_x^2 & u_x u_y + v_x v_y \\ u_x u_y + v_x v_y & 1 + u_y^2 + v_y^2 \end{pmatrix}$$

Logo

$$detG = (1 + u_x^2 + v_x^2)(1 + u_y^2 + v_y^2) - (u_x u_y + v_x v_y)^2$$

e

$$Vol|_M = \sqrt{(1 + u_x^2 + v_x^2)(1 + u_y^2 + v_y^2) - (u_x u_y + v_x v_y)^2} dx \wedge dy \qquad (3.5)$$

Como $dx \wedge dy \neq 0$, das equações (3.1) e (3.5) temos que $\omega|_M = vol_M$ se e somente se

$$(1 + u_x v_y - u_y v_x)^2 = (1 + u_x^2 + v_x^2)(1 + u_y^2 + v_y^2) - (u_x u_y + v_x v_y)^2.$$

Um cálculo mostra que isto se tem se e somente se

$$0 = (u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2$$

Logo $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Ou seja, $F$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Portanto temos que as subvariedades calibradas por $\omega$ são as curvas holomorfas em $\mathbb{C}^2$. □

**Teorema 3.2.** *A forma $\alpha \equiv Re\Omega$ é uma calibração em $\mathbb{C}^m$, onde $\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$ é a forma de volume em $\mathbb{C}^n$ com métrica $g_{ij} = \delta_{ij}$.*

*Demonstração.* Seja $V$ um $k$-plano orientado tangente na variedade $\mathbb{C}^m$ e denotamos por $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ uma base ortonormal orientada de $V$. Consideramos os vetores $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m, i\varepsilon_1, ..., i\varepsilon_m)$ e a aplicação linear $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ definida pelas imagens dos vetores da base canônica:

$$A(e_j) = \varepsilon_j, \quad A(ie_j) = i\varepsilon_j$$

(então $A$ é linear complexa). Como a forma que corresponde ao determinante complexo é $\Omega$, temos

$$\Omega(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) = det_{\mathbb{C}}(A)$$

Seja $\beta \equiv Im(\Omega)$. Pela desigualdade de Hadamard temos que

$$\alpha(V)^2 + \beta(V)^2 = |\Omega(V)|^2 = |det_{\mathbb{C}}(A)|^2 \leq |\varepsilon_1|^2 ... |\varepsilon_n|^2 |i\varepsilon_1|^2 ... |i\varepsilon_n|^2 = Vol(V)^2,$$

com igualdade se e somente se $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m, i\varepsilon_1, ..., i\varepsilon_m)$ é um sistema ortogonal. Portanto

$$\alpha(V) \leq Vol(V)$$

A igualdade se tem se e somente se $V$ é Lagrangiano, ou seja, se $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m, i\varepsilon_1, ..., i\varepsilon_m)$ for um sistema ortogonal, e escrevendo $V = A(e_1 \wedge ... \wedge e_n)$, $det_{\mathbb{C}}(A) = \alpha(V) + i\beta(V) = 1$. □

Um $m$-plano $V$ em $\mathbb{C}^m$ se chama Lagrangiano especial se $V$ é Lagrangiano e

$V = A\mathbb{R}^n$, onde $A \in SU_n$. A demonstração anterior nos permite concluir o seguinte

**Corolário 3.1.** *Seja $V$ um $m$-plano orientado em $\mathbb{C}^m$. Então $V$ ou $-V$ é Lagrangiano Especial se e somente se*

*(i)* *$V$ é Lagrangiano*

*(ii)* *$\beta(V) = Im\Omega(V) = 0$*

De aqui para frente, consideramos $\mathbb{C}^m$ com coordenadas complexas $(z_1, \cdots, z_m)$, **estrutura complexa** $I$, métrica $g = |dz_1|^2 + \cdots + |dz_m|^2$, $\omega = \dfrac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z_1} + \cdots + dz_m \wedge d\bar{z_m})$, a 2-forma real $\omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$ e a forma de volume, ou seja, a $m$-forma complexa $\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$

**Definição 3.6.** *Seja $L$ uma subvariedade real orientada de $\mathbb{C}^m$ de dimensão real $m$. Dizemos que $L$ é uma **subvariedade especial Lagrangiana** de $\mathbb{C}^m$, se $L$ é calibrada com respeito de $Re\Omega$.*

**Observação 3.3.** *Como $Im\Omega$ é também uma $n$-forma, dizemos que $L$ é uma subvariedade especial Lagrangiana de $\mathbb{C}^m$ com fase $e^{i\theta}$, se $L$ é calibrada com respeito de $cos\theta Re\Omega + sin\theta Im\Omega$.*

Do corolário 3.1 e a definição 3.6 obtemos a seguinte caracterização das subvariedades LE, que será usada na maior parte do trabalho de aqui para a frente.

**Corolário 3.2.** *Seja $L$ uma subvariedade real orientada de $\mathbb{C}^m$ de dimensão real $m$. Então $L$ é uma subvariedade especial Lagrangiana de $\mathbb{C}^m$ de fase $1$ se e somente se*

*(a)* $\omega|_L = 0$

*(b)* $Im\Omega|_L = 0$

**Exemplo 3.2.** *Encontramos as subvariedades Lagrangianas especiais $M$ de $\mathbb{C}^m$ no caso $m = 1$ e $m = 2$.*

(a) No caso $m = 1$, das equações $\omega|_M = 0$ e $Im\Omega|_M = 0$ obtemos $dy = 0$. Então, $M$ deve ser uma copia de $\mathbb{R}$.

(b) Para o caso $m = 2$, consideramos $(\mathbb{C}^2, (z_1, z_2))$ com coordenadas complexas $z_1 = x + iy$, $z_2 = u + iv$ e 2-forma complexa $\Omega = dz_1 \wedge dz_2$. Uma subvariedade $M$ de $\mathbb{C}^2$ é Lagrangiana especial se ela é calibrada por $Re\Omega$ e tem dimensão 2. Pelo corolário 3.2, isto se tem se e somente se $\omega|_M = 0$ e $Im\Omega|_M = 0$. Nestas coordenadas complexas, a forma $\omega$ se escreve como

$$\omega = dx \wedge dy + du \wedge dv.$$

Por outra parte, a forma $Im\Omega$ se escreve como

$$\begin{aligned} Im\Omega &= Im[(dx + idy) \wedge (du + idv)] \\ &= Im[dx \wedge du - dy \wedge dv + i(dy \wedge du + dx \wedge dv)] \\ &= dy \wedge du + dx \wedge dv. \end{aligned}$$

Temos que $\omega - iIm\Omega|_M = 0$ se e somente se

$$\begin{aligned} 0 &= dx \wedge dy + du \wedge dv - i(dy \wedge du + dx \wedge dv) \\ &= dx \wedge (dy - idv) + idu \wedge (dy - idv) \\ &= (dx + idu) \wedge (dy - idv). \end{aligned}$$

Logo $M$ é Lagrangiana especial se e somente se $(dx + idu) \wedge (dy - idv)|_M = 0$. Seja $J$ a estrutura complexa com coordenadas $w_1 = x + iu$, $w_2 = y - iv$, tal que $J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}$ e $J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}$. Como $M$ pode se escrever localmente como um gráfico, consideramos

$$M = \{(x, u, y(x, u), v(x, u)) : (x, u) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2\},$$

onde $\mathcal{U}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $dx \wedge du \neq 0$. Então $dw_1 \wedge dw_2|_M = 0$ se e somente se

$$\begin{aligned} 0 &= (dx + idu) \wedge (y_x dx + y_u du - iv_x dx - iv_u du) \\ &= y_u dx \wedge du - iv_u dx \wedge du + iy_x du \wedge dx + v_x du \wedge dx \\ &= (y_u - v_x - i(v_u + y_x)) dx \wedge du, \end{aligned}$$

ou seja, se e somente se $y_u - v_x = 0$ e $v_u + y_x = 0$. Assim, $dw_1 \wedge dw_2|_M = 0$ implica que se satisfazem as equações de Cauchy-Riemann para estas coordenadas, logo as subvariedades Lagrangianas especiais são holomorfas com respeito da estrutura complexa $J$.

A continuação, vamos apresentar uma propriedade muito importante das subvariedades calibradas, que elas são absolutamente minimizantes na mesma classe de homologia.

**Definição 3.7.** *Uma subvariedade compacta com bordo $H$ de dimensão $k$ minimiza absolutamente o volume na sua classe de homologia se para qualquer outra subvariedade $H'$ tal que $\partial H = \partial H'$ e $H - H'$ for uma variedade orientada $k+1$ dimensional, temos*

$$vol(H) \leq vol(H')$$

**Teorema 3.3.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana com métrica $g$. Uma subvariedade calibrada $H^k$ minimiza o volume absolutamente na mesma classe de homologia.*

*Demonstração.* Seja $H^k \subset M^n$ uma subvariedade orientada, compacta (ou seja fechada e com fronteira vazia) e calibrada por uma forma $\varphi \in \Omega^k(M)$. Queremos ver que se $H'^k$ é outra subvariedade de $M^n$ tal que $\partial H = \partial H'$ e $[H - H'] = 0$ em $H_k(M; \mathbb{R})$ então $vol(H) \leq vol(H')$.
Como $H$ é uma subvariedade calibrada por $\varphi$ temos que

$$\varphi|_H = vol_H$$

Integrando obtemos

$$vol(H) = \int_H vol_H = \int_H \varphi \tag{3.6}$$

Além disso, dado que $\varphi$ é uma calibração, obtemos

$$\varphi|_{H'} \leq vol_{H'}$$

Integrando obtemos

$$\int_{H'} \varphi \leq \int_{H'} vol_{H'} = vol(H') \tag{3.7}$$

Agora, como $[H - H'] = 0$ em $H_k(M; \mathbb{R})$, existe uma variedade $L$ de dimensão $k + 1$ tal que

$$\partial L^{k+1} = H - H'.$$

Logo

$$\int_H \varphi - \int_{H'} \varphi = \int_{\partial L} \varphi.$$

Pelo Teorema de Stokes temos que

$$\int_H \varphi - \int_{H'} \varphi = \int_{\partial L} \varphi = \int_L d\varphi = 0.$$

pois $\varphi$ é uma calibração e portanto é fechada. Logo $\int_H \varphi = \int_{H'} \varphi$, Donde

$$vol(H) = \int_H \varphi = \int_{H'} \varphi \leq vol(H')$$

por (3.6) e (3.7). □

## 3.3 Subvariedades Lagrangianas Especiais como Gráficos

Suponhamos que $M$ é uma subvariedade Lagrangiana Especial de $\mathbb{C}^n$. Localmente $M$ pode ser descrita explicitamente como o gráfico de uma função sobre um plano tangente. Como todos os planos especiais Lagrangianos são equivalentes, sobre $SU_n$, ao plano $\zeta_0 = \mathbb{R}^n$, podemos considerar que $M$ é dada como o gráfico, em $\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$, de uma função $y = f(x)$ onde $z = x + iy$.

Consideramos os polinômios elementares simétricos de n variáveis $X_1, ..., X_n$ que notamos por $\sigma_k(X_1, ..., X_n)$ para $k = 1, ..., n$, e definimos por

$$\sigma_k(X_1, ..., X_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n} X_{j_1} ... X_{j_k}$$

tal que $\sigma_k(X_1, ..., X_n) = 0$ se $k > n$. Temos a identidade conhecida

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}(\lambda - X_j) =& \lambda^n - \sigma_1(X_1, ..., X_n)\lambda^{n-1} + \sigma_2(X_1, ..., X_n)\lambda^{n-2} + \cdots \\ &+ (-1)^n \sigma_n(X_1, ..., X_n)\end{aligned}$$

Essas relaciones entre as raízes e os coeficientes de um polinômio são chamadas de formulas de Vieta.

O polinômio característico de uma matriz quadrada é um exemplo de aplicação das fórmulas de Vieta. As raízes deste polinômio são os auto-valores da matriz. Quando substituímos esses autovalores no polinômio elementar simétrico, obtemos os coeficientes do polinômio característico salvo seu signo, que são invariantes da matriz, em particular, a traça é o valor de $\sigma_1$ e portanto a suma dos autovalores. Similarmente, o determinante é o término constante do polinômio característico salvo o signo, e também o valor de $\sigma_n$. (Ver [12])

Denotamos por

$$HessF = \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right)$$

a matriz Hessiana de $F : \Omega \to \mathbb{R}$ e por $\sigma_j(HessF)$ a $j$-ésima função elementar simétrica de seus autovalores.

**Teorema 3.4.** *Suponhamos que $F \in C^2(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $f = \nabla F$ o campo gradiente, e seja $M$ o gráfico de $f$ em $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$. Então $M$ (com a orientação certa) é Lagrangiana especial se e somente se*

$$Im\{det_{\mathbb{C}}(Id + iHess(F)(x))\} = 0 \quad \forall\, x \in \Omega \tag{3.8}$$

*Demonstração.* O espaço tangente ao gráfico de $\nabla F$ no ponto $(x, \nabla F_x)$ é a imagem do plano $\mathbb{R}^n$ sob a aplicação linear complexa $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $A \equiv id + i(d^2F)_x$. A matriz associada a esta transformação linear é $id + iHess(F)(x)$. Segue do Corolário 3.1 que $M$ é Lagrangiana especial se e somente se

$$Im\{det_{\mathbb{C}(Id+iHess(F)(x)}\} = 0$$

se tem, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ □

**Observação 3.4.** *Provaremos equivalência de* (3.8) *e*

$$\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \sigma_{2k+1}(Hess(F)(x)) = 0, \tag{3.9}$$

*para ver a equação* (3.8) *como uma EDP não linear.*

Como a ação de $SO_n$ em $\mathbb{C}^n$, dada por $g(x + iy) = gx + igy$, preserva o conjunto de $n$-planos Lagrangianos especiais, podemos substituir $Hess(F)$ por qualquer matriz da forma $g \circ Hess(F) \circ g^{-1}$ para $g \in SO_n$. Em particular como $Hess(F)$ é simétrica, podemos assumir que ela é diagonal com autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Neste caso temos $Im(det_{\mathbb{C}}(I + iHess(F))) = Im\{\prod_{j=1}^n (1 + i\lambda_j)\} = \sum_k (-1)^k \sigma_{2k_1}(Hess(F))$. Como o primeiro e o último termo são invariantes por $SO_n$, isto prova a equivalência de (3.8) e (3.9) em general.

**Observação 3.5.** *No **caso** $n = 3$, a equação* (3.9) *fica*

$$\Delta F = det(HessF).$$

*Ou seja, o Laplaciano de $F$ é igual que a equação de Monge-Ampére de $F$.*

Adicionalmente, em [13] se mostra que qualquer solução $C^2$ de (3.9) é real analítica.

# Capítulo 4

# Ações Hamiltonianas

Nesta seção pretendemos fazer os preliminares necessários para introduzir a noção de aplicação de momento (Ver [4]). Mais adiante no trabalho utilizaremos esta aplicação para encontrar subvariedades Lagrangianas especiais em $\mathbb{C}^m$ com simetrias.

**Definição 4.1.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $X \in \chi(M)$ um campo vetorial. Definimos a aplicação **produto interior***

$$i_X : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

*como a aplicação que associa a p-forma $\omega$ com a $p-1$-forma $i_X\omega$ definida por*

$$(i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{p-1})$$

*para quaisquer campos vetoriais $X_1, \ldots, X_{p-1}$ em $M$. Também notamos o produto interior por $X \lrcorner \omega$.*

**Definição 4.2.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável. Definimos um **domínio de fluxo** para $M$ como o conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ com a propriedade que para cada $p \in M$, o conjunto $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$ é um intervalo aberto que contém $0$. Um **fluxo** em $M$ é uma aplicação continua $\phi : \mathcal{D} \to M$, onde $\mathcal{D}$ é um domínio de fluxo para $M$, que satisfaz as seguintes propriedades: para todo $p \in M$,*

$$\phi(0, p) = p,$$

*e para todo $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ e $t \in \mathcal{D}^{(\phi(s,p))}$ tal que $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$,*

$$\phi(t, \theta(s, p)) = \phi(t + s, p).$$

**Definição 4.3.** *Seja $\sigma$ uma $k$-forma e $X$ um campo vetorial com fluxo local $\{\phi_t\}$. A **derivada de Lie** de $\sigma$ com respeito ao campo vetorial $X$ é dada por*

$$\mathcal{L}_X\sigma = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\phi_t^*\sigma) - \sigma] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\phi_t^*\sigma.$$

**Teorema 4.1.** *A derivada de Lie satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\sigma = \phi_t^*\mathcal{L}_X\sigma$$

*Demonstração.* A mudança de variáveis $t = t_0 + s$ da

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}\phi_t^*(\sigma_{\phi_t(p)}) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\phi_{t_0+s})^*\sigma_{\phi_{s+t_0}(p)}\\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\phi_{t_0})^*(\phi_s)^*\sigma_{\phi_s(\phi_{t_0}(p))}\\
&= (\phi_{t_0})^*\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(\phi_s)^*\sigma_{\phi_s(\phi_{t_0}(p))}\\
&= (\phi_{t_0})^*(\mathcal{L}_X\sigma)_{\phi_{t_0}(p)}
\end{aligned}$$

□

Sejam $(M,\omega)$ uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Seu diferencial $dH$ é uma 1-forma. Como a forma $\omega$ é não degenerada, existe um único campo vetorial $X_H$ em $M$ tal que $i_{X_H}\omega = dH$. Integremos $X_H$, supondo que $M$ é compacto, ou pelo menos que $X_H$ é completo e simplesmente conexo. Seja $\rho_t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$, a família de um parâmetro de difeomorfismos gerados por $X_H$:

$$\rho_0 = Id_M$$
$$\frac{d\rho_t}{dt}\circ\rho_t^{-1} = X_H$$

**Afirmação**. Cada difeomorfismo $\rho_t$ preserva $\omega$, ou seja , $\rho_t^*\omega = \omega$, para todo $t$.

*Demonstração.* Temos $\frac{d}{dt}\rho_t^*\omega = \rho_t^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = \rho_t^*(di_{X_H}\omega + i_{X_H}d\omega) = 0$, pois $i_{X_H}\omega = dH$ e $d\omega = 0$. □

**Definição 4.4.** *Seja $(M,\omega)$ uma variedade simpléctica e $X \in \chi(M)$ um campo vetorial.*

- *O campo $X \in \chi(M)$ se chama **Hamiltoniano** se $i_X\omega$ é exata, ou seja, se existir $H \in C^\infty(M)$ tal que $i_X\omega = dH$. Neste caso, a função $H$ se chama **função Hamiltoniana**.*
- *O campo $X \in \chi(M)$ se chama **simpléctico** se $\mathcal{L}_X\omega = 0$*

**Observação 4.1.** *Pela afirmação e a definição 4.3, se $X_H$ é um campo vetorial Hamiltoniano então ele é simpléctico.*

**Teorema 4.2.** ***(Fórmula Mágica de Cartan)**. Seja $M$ uma variedade diferenciável, $V$ um campo vetorial suave e $\omega$ uma forma diferenciável suave. Então*

$$\mathcal{L}_V\omega = i_V(d\omega) + d(i_V\omega)$$

A demonstração deste Teorema se encontra em [10].

**Observação 4.2.** *Usando que $\omega$ é fechada ($d\omega = 0$) e a fórmula mágica de Cartan, concluímos que $X$ é simpléctico se e somente se $i_X\omega$ é fechada. Além disso pelo Teorema de Poincaré, localmente, os campos simplécticos são Hamiltonianos.*

## 4.1 Ações de Grupos de Lie

**Definição 4.5.** *Um **Grupo de Lie** é uma variedade suave $G$ que é também um grupo no sentido algébrico, com a propriedade que a aplicação multiplicação $m : G \times G \to G$ e aplicação inversão $i : G \to G$, dadas por*

$$m(g, h) = gh, \quad i(g) = g^{-1},$$

*são suaves.*

Seja $G$ um grupo de Lie. Dado $g \in G$ seja

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ a &\mapsto ga \end{aligned}$$

a **multiplicação a esquerda** por $g$. Um campo vetorial $X$ em $G$ chama-se **invariante a esquerda** se $(L_g)_*X = X$ para todo $g \in G$.
Seja $\mathfrak{g}$ o espaço vetorial de todos os campos vetoriais invariantes a esquerda em $G$. Junto ao colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ dos campos vetoriais, $\mathfrak{g}$ forma uma álgebra de Lie, chamada a **álgebra de Lie do grupo** $G$, que denotamos por $Lie(G)$.

**Teorema 4.3.** *Seja $G$ um grupo de Lie com elemento identidade $e$ e $\mathfrak{g} = Lie(G)$. A aplicação avaliação, dada por*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\to T_eG \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

*é um isomorfismo de espaços vetoriais. Logo* $dim\mathfrak{g} = dimG$.

*Demonstração.* Provaremos o Teorema construindo uma inversa da aplicação avaliação. Para cada $V \in T_eG$, definamos a seção $\tilde{V}$ de $TG$ por

$$\tilde{v}_g = (L_g)_*V.$$

Se existir um campo vetorial invariante a esquerda em $G$ cujo valor na identidade é $V$, claramente tem que ser dado por esta formula.
Primeiro precisamos ver que $\tilde{V}$ é um campo vetorial suave. É suficiente mostrar que $\tilde{V}f$ é suave sempre que $f$ for uma função suave num conjunto aberto $U \subset G$. Escolhemos uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ tal que $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = V$. Então para $g \in U$,

$$\begin{aligned}
(\tilde{V}f)(g) &= \tilde{V}_g f \\
&= ((L_g)_*V)f \\
&= V(f \circ L_g) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f \circ L_g \circ \gamma) \\
&= \frac{d}{dt} f(g\gamma(t))\bigg|_{t=0}.
\end{aligned}$$

A expressão $\varphi(g,t) = f(g\gamma(t))$ depende suavemente de $(g,t)$, pois é uma composição da multiplicação do grupo, $f$ e $\gamma$. Logo sua derivada com respeito a $t$ depende suavemente de $g$, e portanto $\tilde{V}f$ é suave.
Agora precisamos verificar que $\tilde{V}$ é invariante a esquerda, ou seja que $(L_h)_*\tilde{V}_g = (L_h)_*((L_g)_*V) = (L_{hg})_*V = V_{hg}$. Isto segue-se da definição de $\tilde{V}$ e o fato de que $L_h \circ L_g = L_{hg}$:

$$(L_h)_*\tilde{V}_g = (L_h)_*((L_g)_*V) = (L_{hg})_*V = V_{hg}.$$

Logo $\tilde{V} \in \mathfrak{g}$.
Finalmente, precisamos checar que a aplicação $\tau : V \mapsto \tilde{V}$ é a inversa da aplicação avaliação $\varepsilon : X \mapsto X_e$. Por outra parte, dado um vetor $V \in T_eG$,

$$\varepsilon(\tau(V)) = (\tilde{V})_e = (L_e)_*V = V, \quad pois\ L_e = Id$$

o qual mostra que $\varepsilon \circ \tau$ é a identidade em $T_eG$. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{g}$,

$$\tau(\varepsilon(X))_g = \tilde{X}_e|_g = (L_g)_*X_e = X_g,$$

o qual mostra que $\tau \circ \varepsilon = Id_{\mathfrak{g}}$. $\square$

**Definição 4.6.** *Dado um grupo de Lie $G$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos a aplicação $exp : \mathfrak{g} \to G$, chamada **aplicação exponencial** de $G$, por $exp(X) = \gamma(1)$ onde $\gamma : \mathbb{R} \to G$ é a curva integral do campo vetorial invariante a esquerda associado com $X \in \mathfrak{g}$, ou seja, a curva tal que*

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } \gamma(0) = e$$

*Em outras palavras, o vetor tangente a $\gamma$ em cada ponto é o valor do campo vetorial $X$ nesse ponto.*

**Definição 4.7.** *Seja $G$ um grupo de Lie com elemento identidade $e$ e $M$ uma variedade suave. Uma **ação** $\phi$ de $G$ em $M$ é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : G \times M &\to M \\ (g, m) &\mapsto \phi(g, x) \end{aligned}$$

*que satisfaz os seguintes axiomas*

*(a)* $\phi(e, m) = m$ *para todo* $m \in M$.

*(b)* $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$ *para todo* $g, h \in G$ *e* $m \in M$.

Agora suponhamos que o grupo de Lie $G$ age suavemente na variedade diferenciável $M$, ou seja, $\phi_g : M \to M$ é suave para todo $g \in G$.

**Definição 4.8.** *Para todo $X \in \mathfrak{g}$, o **campo vetorial induzido** (ou **gerador infinitesimal**) $X^{\#}$ em $M$ associado a $X$ é*

$$X^{\#}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(exp(tX), x)$$

**Lema 4.1.** *Para cada $x \in M$ e $X \in \mathfrak{g}$,*

$$X^{\#}(x) = d(\phi_x)_e(X),$$

*onde $\phi_x$ é a restrição da aplicação evaluação*

$$\begin{aligned} \phi_x : G &\to M \\ g &\mapsto \phi(g, x) \end{aligned}$$

*Demonstração.* Para toda função suave $f$ temos

$$d(\phi_x)_e(X)f = X_e(f \circ \phi_x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\phi(exp(tX), x)) = X^{\#}(x)(f)$$

□

**Lema 4.2.** *A curva integral de $X^\#$ começando em $x \in M$ é*

$$\gamma_x(t) = \phi(exp(tX), x)$$

*Demonstração.* Por definição, temos $\gamma_x(0) = x$, e

$$\dot{\gamma}_x(t) = \frac{d}{dt}\phi(exp(tX), x)$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = t_0 + s$ obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_x(t) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi(exp((s+t_0)X), x) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi(exp(sX) \circ exp(t_0X), x) \\
&= X^\#(\gamma_x(t_0))
\end{aligned}$$

□

**Definição 4.9.** *Seja $\phi : G \times M \to M$ uma ação suave.*

1. *A **órbita** de $G$ através de $x \in M$ é*

$$\mathcal{O}_x = \phi(G, x) = \{\phi(g, x) : g \in G\} \subset M.$$

2. *O **estabilizador** (também chamado **subgrupo de isotropia**) de $x \in M$ é o subgrupo*

$$G_x = \{g \in G : \phi(g, x) = x\} < G.$$

**Proposição 4.1.** *Seja $\phi : G \times M \to M$ uma ação suave, e $x_0 \in M$. Então*

1. *A órbita $\mathcal{O}_{x_0}$ é uma subvariedade mergulhada cujo espaço tangente em $x$ é*

$$T_x(\mathcal{O}_{x_0}) = \{X^\#(x) : X \in \mathfrak{g}\}.$$

2. *O estabilizador $G_x$ é um subgrupo de Lie de $G$, com Lie álgebra*

$$\mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} : X^\#(x) = 0\}.$$

*Demonstração.* 1. Por definição,

$$\phi_x \circ L_g = \phi_g \circ \phi_x.$$

Tomando a derivada em $h \in G$, obtemos

$$d(\phi_x)_{gh} \circ (dL_g)_h = (d\phi_g)_{hx} \circ (d\phi_x)_h$$

Como $(dL_g)_h$ e $(d\phi_g)_{hx}$ são bijectivas, o posto de $d(\phi_x)_{gh}$ é igual com o posto de $d(\phi_x)_h$ para todos $g$ e $h$. Segue disso que a aplicação $\phi_x$ tem posto constante.

Pelo Teorema do posto constante, sua imagem, $\phi_x(G) = \phi(G, m) = \mathcal{O}_x$, é uma variedade mergulhada de $M$.

O espaço tangente de $\mathcal{O}_x$ em $x$ é a imagem por $d\phi_x$ de $T_eG = \mathfrak{g}$. Mas para todo $X \in \mathfrak{g}$, temos $d(\phi_x)_e(X) = X^{\#}(x)$. Daqui segue a conclusão.

2. Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_x : G &\to M \\ g &\mapsto \phi(g, x), \end{aligned}$$

então $G_x = \phi_x^{-1}(x)$, logo isto é um conjunto fechado em $G$. É um subgrupo pois $\phi$ é um homomorfismo de grupos. Se segue do Teorema do Subgrupo Fechado (Ver [10]) que $G_x$ é um subgrupo de Lie de $G$.

A álgebra de Lie do subgrupo $G_x$ é

$$\mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} : exp(tX) \in G_x, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Segue-se que $\phi(exp(tX), x) = x$ para $X \in \mathfrak{g}_x$. Tomando derivada em $t = 0$, obtemos

$$\mathfrak{g}_x \subseteq \{X \in \mathfrak{g} : X^{\#}(x) = 0\}.$$

Reciprocamente, se $X^{\#}(x) = 0$, então $\gamma(t) \equiv x, t \in \mathbb{R}$, é a curva integral do campo vetorial $X^{\#}$ passando por $x$. Segue-se que $\phi(exp(tX), x) = \gamma(t) = x$, i.e. $exp(tX) \in G_x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $X \in \mathfrak{g}_x$.

□

Suponhamos que $H$ e $N$ são grupos de Lie, e $\theta : H \times N \to N$ uma ação de $H$ em $N$. Se para cada $h \in H$, a aplicação $\theta_h : N \to N$ for um automorfismo de grupos de $N$, a ação se chama **ação por automorfismos**.

**Definição 4.10.** *Dada uma ação por automorfismos, definimos um novo grupo de Lie $N \rtimes_\theta H$, chamado o* ***produto semidireto de H e N****, assim: Como variedade suave, $N \rtimes_\theta H$, é o produto cartesiano $N \times H$; mas a multiplicação do grupo se define por*

$$(n, h)(n', h') = (n\theta_h(n'), hh').$$

## 4.2 Representações Adjunta e Coadjunta

Qualquer grupo de Lie $G$ age em si mesmo por **conjugação**:

$$\begin{aligned} G &\to Dif(G) \\ g &\longmapsto C_g, \end{aligned}$$

onde $C_g(a) = gag^{-1}$. A diferencial na identidade de

$$\begin{aligned} C_g : G &\to G \\ a &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

é uma aplicação linear invertível $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, pois $C_g(e) = e$. Aqui identificamos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como o espaço tangente $T_eG$. Definimos a **representação adjunta** (ou **ação adjunta**) de $G$ em $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto Ad_g. \end{aligned}$$

Explicitamente, $Ad_g(X) = (R_{g^{-1}} \circ L_g)_*(X)$, para $X \in \mathfrak{g}$.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o **pairing natural** entre $\mathfrak{g}^*$ e $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ (\xi, X) &\to \langle \xi, X \rangle = \xi(X). \end{aligned}$$

Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$, definimos $Ad_g^*\xi$ por

$$\langle Ad_g^*\xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}X \rangle, \quad \textit{para todo } X \in \mathfrak{g}. \tag{4.1}$$

Definimos a **representação coadjunta** (ou **ação coadjunta**) de $G$ em $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{aligned} Ad^* : G &\to GL(\mathfrak{g}^*) \\ g &\mapsto Ad_g^*. \end{aligned}$$

Tomamos $g^{-1}$ na definição de $Ad_g^*\xi$ para obter a representação (a esquerda), ou seja, o grupo de homomorfismos, em lugar da representação a direita, ou seja, o grupo de anti-homomorfismos.

**Proposição 4.2.** *Para um grupo de matricial $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, temos*

$$Ad_g(Y) = gYg^{-1}, \quad \forall g \in G, \ \forall Y \in G.$$

*Demonstração.* Com efeito, para cada $Y \in \mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$, uma curva parametrizada em $G$ passando pela identidade com vetor velocidade $Y$ quando $t = 0$ é $\alpha_Y(t) := exp(tY)$. Assim, a diferencial $Ad_g(X) = dC_g(e)$ envia $Y = \alpha'_Y(0)$ na velocidade quando $t = 0$ da curva paramétrica

$$C_g \circ \alpha_Y : t \mapsto gexp(tY)g^{-1} = 1 + gtYg^{-1} + \sum_{j \geq 2} \frac{t^j}{j!} gY^j g^{-1},$$

que claramente tem velocidade $gYg^{-1}$ quando $t = 0$. $\square$

Como

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in G.$$

Então para grupos de matrizes

$$\left. \frac{d}{dt} Ad_{exp(tX)} Y \right|_{t=0} = [X, Y], \quad \forall X, Y \in G$$

## 4.3 Aplicações de Momento

**Definição 4.11.** *Seja $(M, \omega)$ uma variedade simplética, $G$ um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de $G$, $\mathfrak{g}^*$ o espaço vetorial dual de $\mathfrak{g}$, e $\psi : G \times M \to M$ uma ação simpléctica, ou seja, tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi_g : M &\to M \\ p &\mapsto \psi_g(p) = \psi(g, p) \end{aligned}$$

*é suave e preserva $\omega$ para cada $g \in G$, ou seja, $\psi_g^* \omega = \omega$.*
*Notamos por $Sympl(M, \omega)$ ao conjunto de tais ações*
*A ação $\psi$ é uma **ação Hamiltoniana** se existir uma aplicação*

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*,$$

*que se chama **aplicação de momento**, satisfazendo*

1. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$*

$$d\langle \mu(p), X \rangle = i_{X^\#} \omega$$

*onde $X^{\#}$ é o gerador infinitesimal em $M$ associado a $X$, ou seja, $\mu^X := \langle \mu(p), X \rangle$ é uma função Hamiltoniana para o campo vetorial $X^{\#}$.*

2. *$\mu$ é equivariante com respeito á ação dada $\psi$ de $G$ em $M$ e a ação coadjunta $Ad^*$ de $G$ em $\mathfrak{g}^*$, ou seja:*

$$\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu, \text{ para todo } g \in G$$

*$(M, \omega, G, \mu)$ chama-se então de $G$-**espaço Hamiltoniano** e $\mu$ é uma aplicação de momento da ação do grupo $G$.*

**Exemplo 4.1.** *Seja $(M, \omega)$ uma subvariedade simplética, $G$ um grupo de Lie, e $\psi : G \times M \to M$ uma ação simplética.*

(a) ***Caso** $G = \mathbb{R}$:*

*Temos a seguinte correspondência bijectiva entre o conjunto $\mathcal{A}$ das Ações simpléticas de $\mathbb{R}$ em $M$ e o conjunto $\mathcal{C}$ dos Campos vetoriais simpléticos completos em $M$: Se $\psi \in \mathcal{A}$, associamos a ele o campo $X_p = \dfrac{d\psi_t(p)}{dt} \in \mathcal{C}$, que chamamos de campo vetorial gerado por $\psi$. Reciprocamente, se $X \in \mathcal{C}$, associamos a ele seu fluxo $\psi = exp(tX)$.*

*Aqui $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}$, $\mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}$. Nesse caso, uma aplicação de momento $\mu : M \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

1. *Para o gerador $X = 1$ de $\mathfrak{g}$, temos $\mu^X(p) = \mu(p) \cdot 1$, ou seja, $\mu^X = \mu$, e $X^{\#}$ é o campo vetorial estândar em $M$ gerado por $\mathbb{R}$. Então $d\mu = i_{X^{\#}}\omega$.*
2. *$\mu$ é equivariante: Nestes caso, a equivariança implica $\mathcal{L}_{X^{\#}}\mu = i_{X^{\#}}d\mu = 0$, pois a ação coadjunta é trivial.*

(b) ***Caso** $G = S^1$:*

*Uma ação de $S^1$ é uma ação de $\mathbb{R}$ que é $2\pi$-periódica: $\psi_{2\pi} = \psi_0$. A $S^1$- é chamada de Hamiltoniana se a $\mathbb{R}$-ação subjacente for is Hamiltoniana.*

**Teorema 4.4.** *Uma aplicação de momento para uma ação Hamiltoniana dada satisfaz*

$$\mu^X = i_{X^{\#}}\alpha, \tag{4.2}$$

*onde $\alpha$ é a forma de Liouville.*

*Demonstração.* Seja $(M, \omega)$ uma variedade simplética e $\psi : G \times M \to M$ uma ação simpléctica, e

$$\begin{aligned} \psi_g : M &\to M \\ p &\mapsto \psi_g(p) = \psi(g, p). \end{aligned}$$

Pela definição do gerador infinitesimal, $X^{\#}$ é um campo vetorial Hamiltoniano. Pela observação 4.1 temos que $\mathcal{L}_{X^{\#}}\omega = 0$.
Veremos a continuação que $\mathcal{L}_{X^{\#}}\omega = 0$ implica que $\mathcal{L}_{X^{\#}}\alpha = 0$, onde $\alpha$ é a forma de Liouville. Com efeito, como $\omega$ é $G$-invariante, ou seja $\psi_g^*\omega = \omega$, para todo $g \in G$, vale

$$\begin{aligned}\psi_g^*\omega = \omega \Leftrightarrow & \psi_g^*(-d\alpha) = -d\alpha \\ & \Leftrightarrow d(\psi_g^*(\alpha)) = d\alpha \\ & \Leftrightarrow d(\psi_g^*\alpha - \alpha) = 0 \\ & \Leftrightarrow \psi_g^*\alpha - \alpha = constante,\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Quando $g = e$, temos que $\psi_e^* = Id$, logo

$$\psi_e^*\alpha - \alpha = 0,$$

ou seja $constante = 0$. Portanto $\mathcal{L}_{X^{\#}}\alpha = 0$. Pela fórmula de Cartan obtemos que $0 = \mathcal{L}_{X^{\#}}\alpha = di_{x^{\#}}\alpha + i_{X^{\#}}d\alpha$. Segue-se que

$$d(i_{X^{\#}}\alpha) = -i_{X^{\#}}d\alpha = i_{X^{\#}}\omega = d\mu^X.$$

Concluímos que

$$\mu^X = i_{X^{\#}}\alpha + constante.$$

□

## 4.4 Exemplos Clássicos

**Exemplo 4.2.** *Seja* $\omega = \frac{i}{2}\sum dz_i \wedge d\overline{z_i} = \sum dx_i \wedge dy_i = \sum r_i dr_i \wedge d\theta_i$ *a forma simplética estândar de* $\mathbb{C}^n$*. Consideremos a seguinte* $S^1$*-ação em* $(\mathbb{C}^n, \omega)$*:*

$$\begin{aligned}\psi : S^1 \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ (e^{it}, z_1, ..., z_n) &\mapsto (e^{it}z_1, ..., e^{it}z_n)\end{aligned}$$

*Mostraremos que a ação* $\psi$ *é Hamiltoniana com aplicação de momento*

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto -\frac{|z|^2}{2} + constant\end{aligned}$$

Primeiro achamos a álgebra de Lie do grupo $S^1$: Existe um único campo vetorial tangente $T$ em $S^1$ que é positivamente orientado com respeito da

orientação induzida pelo vetor normal. Se $\theta$ for qualquer angulo coordenado num conjunto aberto $U \subset S^1$, então $T = \partial/\partial\theta$ em $U$. Como as traslações a esquerda são rotações, que preservam $T$, se segue que $T$ é invariante a esquerda, e portanto $T$ gera a álgebra de Lie de $S^1$. Esta álgebra de Lie é abeliana e tem dimensão 1, e portanto $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}$.
Agora, calculamos o gerador infinitesimal $X^{\#}$ em $\mathbb{C}^n$ associado a $X \in \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X^{\#}(z) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(exp(tX), z) \\ &= \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \psi(\lambda X, z), \end{aligned}$$

onde $\lambda = exp(tX)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} X^{\#}(z) &= \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} (e^{i\lambda X} z_1, ..., e^{i\lambda X} z_n) \\ &= iX(z_1, ..., z_n) \end{aligned}$$

Considerando $z = x + iy$ e $X = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} X^{\#}(\vec{x}, \vec{y}) &= (y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n) \\ &= y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + ... + y_n \frac{\partial}{\partial x_n} + x_n \frac{\partial}{\partial y_n}. \end{aligned}$$

Em coordenadas polares temos

$$X^{\#}(\vec{r}, \vec{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + ... + \frac{\partial}{\partial \theta_n}.$$

Agora podemos achar o produto interior de $\omega$ com o campo $X^{\#}$: Sejam $U, V$ campos vectoriais em $\mathbb{C}^n$. Então

$$\begin{aligned} i_{X^{\#}}\omega &= (\frac{\partial}{\partial \theta_1} + ... + \frac{\partial}{\partial \theta_n}) \lrcorner \sum_{n}^{j=1} r_j dr_j \wedge d\theta_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n} r_j dr_j \\ &= -d\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(dr_i)^2\right) \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação de momento para esta ação é

$$\mu = -\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{n} r_j^2) + constante,$$

que em coordenadas cartesianas se escreve como

$$\mu = -\frac{1}{2}|z|^2 + constante.$$

Se escolhemos que a constante seja $\frac{1}{2}$, então $\mu^{-1}(0) = S^{2n-1}$ é a esfera unitária.

**Exemplo 4.3.** *A continuação, presentamos a generalização dos momentos linear e angular da mecânica clássica, dos quais a aplicação de momento obteve seu nome.*

Seja $G = SO(3) = \{A \in GL(3;\mathbb{R}) | A^T A = Id \ e \ detA = 1\}$ o grupo especial ortogonal de dimensão 3.
Dada uma curva de matrizes ortogonais $Q(t)$ com $Q(0) = I$ e $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q(t) = A$.
Computamos diferenciando a equação de definição $I = Q^T Q$.

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q^T Q \\ &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q\right)^T Q(0) + Q^T(0)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Q\right) \\ &= A^T + A \end{aligned}$$

logo o espaço de matrizes anti-simétricas está contido no espaço tangente $T_I O(3)$. Mas $T_I O(3)$ e o espaço de matrizes anti-simétricas tem dimensão 3, logo eles são iguais. Isso significa que podemos identificar a álgebra de Lie de $SO(3)$, denotada por $\mathfrak{so}(3)$, com o espaço de matrizes anti-simétricas com o colchete comutador.
Então $\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathfrak{g}l(3,\mathbb{R}) | A + A^t = 0\}$ é o espaço de $3 \times 3$ matrizes anti-simétricas e pode ser identificado com $\mathbb{R}^3$. O colchete de Lie em $\mathfrak{so}(3)$ pode ser identificado com o produto vetorial via

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{4.3}$$

$$[A, B] = AB - BA \longmapsto \vec{a} \times \vec{b} \tag{4.4}$$

(a) **Translação:** Consideremos $\mathbb{R}^6$ com coordenadas $x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3$ e forma simplética $\omega = \Sigma dx_i \wedge dy_i$. Seja $\mathbb{R}^3$ que age em $\mathbb{R}^6$ por translações:

$$\begin{aligned} \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto & \psi_{\vec{a}} \in sympl(\mathbb{R}^6, \omega) \\ & \psi_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{a}, \vec{y}). \end{aligned}$$

Seja $X \in \mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{aligned} X^{\#}(\vec{x},\vec{y}) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(exp(tX),(\vec{x},\vec{y})) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (exp(tX)+(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \\ &= (X,0,0,0) \end{aligned}$$

Logo $X^{\#} = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3}$, para $X = \vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$. Assim,

$$\begin{aligned} i_{X^{\#}}\omega &= (a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3}) \lrcorner \sum_{i=1}^{6} dx_i \wedge dy_i \\ &= a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 \\ &= d\vec{y}\cdot\vec{a} \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação de momento $\mu$ deve satisfazer

$$d\mu^{\vec{a}} = d\vec{y}\cdot\vec{a}$$

Então vale que

$$\mu^{\vec{a}}(\vec{x},\vec{y}) = \langle \mu(\vec{x},\vec{y}),\vec{a}\rangle = \vec{y}\cdot\vec{a} + constante.$$

Concluímos que a aplicação de momento é, salvo a soma de uma constante,

$$\mu : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3, \quad \mu(\vec{x},\vec{y}) = \vec{y}.$$

Classicamente, $\vec{y}$ chama-se de **vetor de momento** correspondente ao **vetor posição** $\vec{x}$, e a aplicação $\mu$ chama-se de **momento linear**.

(b) **Rotação:** A ação de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$ é

$$\begin{aligned} \varphi : SO(3)\times\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (A,x) &\mapsto \varphi(A,x) = Ax. \end{aligned}$$

Como $M = T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$, a ação $\varphi$ levanta-se para uma ação simplética $\psi$ no fibrado cotangente $\mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned} \psi : SO(3)\times\mathbb{R}^6 &\to \mathbb{R}^6 \\ (A,(\vec{x},\vec{y})) &\mapsto (A\vec{x},A\vec{y}), \end{aligned}$$

onde $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Para $X \in \mathfrak{so}(3)$, o campo vetorial em $\mathbb{R}^6$ gerado por o subgrupo de um parâmetro $\{exptX | t \in \mathbb{R}\} \subseteq SO(3)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
X^{\#}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(exp\ tX, (\vec{x}, \vec{y})) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (exp\ tX \cdot \vec{x}, exp\ tX \cdot \vec{y}) \\
&= (X \cdot \vec{x}, X \cdot \vec{y}),
\end{aligned}$$

onde $\cdot$ significa produto de matrizes. Com a identificação (4.3), temos

$$X \cdot \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}$$

e

$$X \cdot \vec{y} = \vec{a} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} a_2y_3 - a_3y_2 \\ a_3y_1 - a_1y_3 \\ a_1y_2 - a_2y_1, \end{bmatrix}$$

onde $X = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Agora, encontramos a aplicação de momento.

$$\begin{aligned}
i_{X^{\#}}\omega &= X^{\#} \lrcorner \omega \\
&= (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1, a_2y_3 - a_3y_2, a_3y_1 - a_1y_3, \\
&\qquad a_1y_2 - a_2y_1) \lrcorner \sum_{i=1}^{6} dx_i \wedge dy_i \\
&= (a_2x_3 - a_3x_2)dy_1 + (a_3x_1 - a_1x_3)dy_2 + (a_1x_2 - a_2x_1)dy_3 \\
&\quad - (a_2y_3 - a_3y_2)dx_1 - (a_3y_1 - a_1y_3)dx_2 - (a_1y_2 - a_2y_1)dx_3 \\
&= a_1(x_2dy_3 - x_3dy_2 + y_3dx_2 - y_2dx_3) + a_2(x_3dy_1 - x_1dy_3 + y_1dx_3 \\
&\quad - y_3dx_1) + a_3(x_1dy_2 - x_2dy_1 + y_2dx_1 - y_1dx_2) \\
&= d(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{a}
\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação de momento $\mu$ deve satisfazer

$$d\mu^{\vec{a}} = d(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{a}$$

Então vale que

$$\mu^{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \mu(\vec{x}, \vec{y}), \vec{a} \rangle = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{a} + constante.$$

Concluímos que a aplicação de momento é

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^6 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \mu(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \times \vec{y}, \end{aligned}$$

salvo a soma de uma constante. A aplicação $\mu$ chama-se de **momento angular**.

# Capítulo 5

# Subvariedades Lagrangianas Especiais com Simetrias

O resultado central desse capitulo são os exemplos explícitos de subvariedades LE em $\mathbb{C}^3$ invariantes sob a ação dos grupos $SO(3)$, $T_2$ e $U(1) \times \mathbb{R}$ respectivamente. Esses exemplos são calculados usando a técnica de aplicação de momento e os primeiros dois podem ser generalizados para $\mathbb{C}^n$.

O Teorema 5.10 mostra que esses são todos os exemplos de subvariedades LE de cohomogeneidade um em $\mathbb{C}^3$, ou seja as subvariedades invariantes sob grupos que agem em $\mathbb{C}^3$ com orbitas de codimensão um. Nesse estudo usamos essencialmente o fato que as subvariedades LE G-invariantes em $\mathbb{C}^n$ estão contidas no conjunto de nível da aplicação de momento $\mu$ da ação do grupo $G$ em $\mathbb{C}^n$. Mais precisamente, o Teorema 5.3 garante que para qualquer $G$-orbita $O$ no conjunto de nível da aplicação de momento, existe localmente uma subvariedade LE que contém $O$. Essa subvariedade esta ainda contida no conjunto de nível de $\mu$ e é fibrada por $G$-orbitas isomorfas a $O$. Então podemos considerar a subvariedade LE como uma curva suave de $G$-orbitas e obtê-la concretamente resolvendo uma EDO nas $G$-orbitas $O_t$. O Teorema 5.4 garante a existência das soluções dessa EDO para t pequeno. Na prova do Teorema 5.4 utilizamos a Teoria de Cartan-Kähler. As demonstrações dos Teoremas principiais se omitem, por pertencer ao campo das Equações Diferenciais Parciais. O letor interessado nestas provas pode consultar [14].

## 5.1 Elementos da Teoria de Cartan-Kähler

Nesta seção consideramos um sistema de primeira ordem de equações quaselineares nas variáveis $x_1, ..., x_n, y$, onde as derivadas parciais das funções

$u_1, ..., u_N$ com respeito á $y$ se expressam em termos de derivadas parciais com respeito á $x_1, ..., x_n$. Temos então $N$ equações para $N$ funções desconhecidas $u_1, ..., u_N$:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha i}^{\beta}(x_1, ..., x_n, y, u_1, ..., u_N) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_i} \tag{5.1}$$

$$= +B_\alpha(x_1, ..., x_n, y, u_1, ..., u_N), \quad \alpha = 1, ..., N \tag{5.2}$$

**Definição 5.1.** *Lembramos que uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é real analítica se pode expressar-se como uma série de potencias*

$$\sum_{\sigma_1, ..., \sigma_m = 0}^{\infty} c_{\sigma_1 ... \sigma_m} (x_1 - a_1)_1^{\sigma} \cdots (x_m - a_m)^{\sigma_m} \tag{5.3}$$

*numa vizinhança de cada ponto $(a_1, ..., a_m)$ em seu domínio. Escrevemos abreviadamente na forma*

$$f(x) = \sum_{\sigma} c_\sigma (x - a)^\sigma.$$

O seguinte Teorema fornece a existência e unicidade da solução de (5.1), no caso real analítico.

**Teorema 5.1.** ***(O Teorema de Cauchy-Kowalewski)*** *Sejam $\xi_\alpha$, $(\alpha = 1, ..., N)$ funções analíticas numa vizinhança de $(a_1, ..., a_n)$ em $\mathbb{R}^n$, consideramos $b_\alpha = \xi_\alpha(a_1, ..., a_n)$, e sejam $A_{\alpha i}^{\beta}$ e $B_\alpha$ $(\alpha, \beta = 1, ..., N; i = 1, ..., n)$ funções analíticas numa vizinhança de $(a_1, ..., a_n, 0, b_1, ..., b_N)$ em $\mathbb{R}^{N+n+1}$. Então existem funções analíticas únicas $u_1, ..., u_N$ numa vizinhança de $(a_1, ..., a_n)$ em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha i}^{\beta}(x_1, ..., x_n, y, u_1, ..., u_N) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_i}$$

$$= +B_\alpha(x_1, ..., x_n, y, u_1, ..., u_N)$$

*com as condições iniciais*

$$u_\alpha(x_1, ..., x_n, 0) = \xi_\alpha(x_1, ..., x_n).$$

O Teorema de Cartan-Kähler é uma generalização do Teorema de Cauchy-Kowalewski. Antes de formular ele, precisamos de algumas definições preliminares. Primeiro queremos falar sobre ideais de formas diferenciais. Seja $\Omega^k(M)$ o espaço vetorial de todas as $k$-formas numa variedade diferenciável

$M$. Então a soma direta $\Omega(M) = \Omega^0(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M)$ é um anel munido com a operação wedge. Para todo ideal $\ell \subset \Omega(M)$, consideramos $\ell_k = \ell \cap \Omega^k(M)$. Consideramos somente os ideais $\ell$ que são **homogêneos**, ou seja

$$\ell = \ell_0 \oplus \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_n.$$

Assim, por exemplo, se $\omega_1 + \omega_2 \in \ell$ onde $\omega_1$ é uma 1-forma e $\omega_2$ é uma 2-forma, então $\omega_1, \omega_2 \in \ell$, logo $\{r_1 \wedge \omega_1 + r_2 \wedge \omega_2 : r_1, r_2 \in \Omega(M)\} \subset \ell$ e portanto $\ell$ não pode ser o ideal gerado por $\omega_1 + \omega_2$, que é o conjunto $\{r \wedge (\omega_1 + \omega_2) : r \in \Omega(M)\}$.

**Definição 5.2.** *Um ideal homogêneo $\ell \subset \Omega(M)$ se chama um **ideal diferencial**, ou **sistema diferencial**, se $d\ell \subset \ell$, ou seja para toda $k$-forma $\omega \in \ell$, temos que a $k+1$-forma $d\omega \in \ell$.*

Assumimos que nosso sistema diferencial $\ell$ não contem funções, ou seja, que $\ell_0 = 0$.

**Definição 5.3.** *Seja $\ell$ um ideal homogêneo com $\ell_0 = 0$ (não necessariamente satisfazendo $d\ell \subset \ell$). Uma subvariedade $l$-dimensional $N \subset M$, com aplicação inclusão $i : N \to M$, se chama **subvariedade integral** de $\ell$ se $i^*\omega = 0$ para todas as formas $\omega \in \ell$.*

Para analisar subvariedades integrais do ideal diferencial $\ell$, consideramos todos seus possíveis espaços tangentes.

**Definição 5.4.** *Um subespaço $l$-dimensional $W \subset T_pM$ de $T_pM$ se chama um **elemento integral** ($l$-**dimensional**) de $\ell$ se $\omega(p)$ é zero quando se restringe a $W$, para toda $\omega \in \ell$.*

**Observação 5.1.** *Notemos que um subespaço de um elemento integral é também um elemento integral. Permitimos também o subespaço 0-dimensional de $T_pM$, que identificamos com $p$. Ele é também um elemento integral, pois estamos assumindo que $\ell_0 = 0$.*

**Definição 5.5.** *Seja $W \subset T_pM$ um elemento integral $k$-dimensional, e $X_1, ..., X_k$ qualquer base de $W$. Definimos o **espaço polar** de $W$*

$$\mathcal{E}_k(W) = \{X \in T_pM : \omega(p)(X_1, ..., X_k, X) = 0 \text{ para todo } \omega \in \ell_{k+1}\} \subset T_pM.$$

*Esta definição é independente da base $X_1, ..., X_k$, e temos obviamente que $W \subset \mathcal{E}_k(W)$.*

Definimos a **Variedade Grassmanniana** $G_n(\mathbb{R}^N)$ como o conjunto de todos os subespaços $n$-dimensionais de $\mathbb{R}^N$ (sempre assumimos que $N > n$).

Para construir a topologia de $G_n(\mathbb{R}^N)$, consideramos a variedade $V_n(\mathbb{R}^N)$ que consiste de todas as $n$-tuplas

$$(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^N \times \cdots \mathbb{R}^N$$

tais que $v_1, ..., v_n$ são linearmente independentes. Claramente $V_n(\mathbb{R}^N)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N$. Podemos definir uma aplicação

$$\begin{aligned} \rho : V_n(\mathbb{R}^N) &\to G_n(\mathbb{R}^N) \\ (v_1, ..., v_n) &\mapsto \langle v_1, ..., v_n \rangle \end{aligned}$$

Munimos $G_n(\mathbb{R}^N)$ com a topologia quociente para esta aplicação.
Assim, os elementos integrais $k$-dimensionais tem a topologia de subconjunto do conjunto de todos os subespaços $k$-dimensionais de todos os $T_qM$; localmente é $\mathbb{R}^n \times V$ onde $V$ é um subespaço $k$-dimensional de $\mathbb{R}^n$.

**Definição 5.6.** *Definimos os elementos integrais* ***regulares*** *indutivamente. O ponto $p$ é um elemento regular $0$-dimensional se $dim\mathcal{E}_1(p') = dim\mathcal{E}_1(p)$ para todo $p'$ numa vizinhança de $p$. Um elemento $k$-dimensional $W$ é regular se*

*(a) $W$ contem um elemento integral $(k-1)$-dimensional,*

*(b) $dim\mathcal{E}_{k+1}(W') = dim\mathcal{E}_{k+1}(W)$ para todos os elementos integrais $k$-dimensionais $W'$ numa vizinhança de $W$. Ou seja, $\mathcal{E}_k$ tem posto constante numa vizinhança de $W$.*

Agora podemos enunciar o Teorema de Cartan-Kähler.

**Teorema 5.2.** *(Teorema de Cartan-Kähler) Seja $M$ una variedade analítica, e $\ell$ um sistema diferencial (de formas analíticas) com $\ell_0 = 0$. Seja $W \subset T_pM$ um elemento integral $k$-dimensional que contem um elemento integral $(k-1)$-dimensional regular. Então existe uma subvariedade integral analítica $k$-dimensional $N$ de $\ell$ com $T_pN = W$.*

A demonstração de este importante Teorema se encontra em [14], e usa o Teorema de Cauchy-Kowalevsky.

## 5.2 Aplicação nas Subvariedades Especiais Lagrangianas

O primeiro resultado importante que o Teorema de Cartan-Kähler fornece em nosso estudo nos permite encontrar subvariedades Lagrangianas especiais partindo de subvariedades isotrópicas $m-1$ dimensionais. Deste resultado e do Teorema de Cauchy-Kowalevsky segue o Teorema principal deste capítulo que nos permite encontrar subvariedades Lagrangianas Especiais resolvendo uma equação diferencial, seguindo [8].

**Teorema 5.3.** *Suponhamos que $P$ é uma $(m-1)$-subvariedade isotrópica e analítica real de $\mathbb{C}^m$, ou seja com $\omega|_P \equiv 0$. Então existe uma subvariedade Lagrangiana especial localmente única $N$ de $\mathbb{C}^m$ que contém $P$.*

*Demonstração.* Considere o ideal $\ell = I(\omega, Im\Omega)$ gerado por a forma Kähler $\omega$ e a $m$-forma $Im\Omega = Im(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m)$. Como $\omega$ é fechada e $\Omega$ é a forma de volume, temos que $d\omega = 0$ e $d\Omega = 0$, e portanto $Im\Omega = 0$. Logo $\ell$ é um sistema diferencial em $\mathbb{C}^m$.
Os elementos integrais desse sistema diferencial são os $k$-planos $W \subset T_p\mathbb{C}^m$ tais que $\omega(p)|_W = 0$ e $Im\Omega|_W = 0$, para $k \leq m$. Ou seja, $W$ é um plano isotrópico de dimensão $k < m$ ou é um $m$-plano especial Lagrangiano.
**Afirmação 1:** Dado um plano $m-1$-dimensional isotrópico $W$ existe um único plano especial Lagrangiano $V$ que contém $W$.
Para ver isto assumiremos que $W$ é gerado por $e_1, \ldots, e_{m-1}$ onde $e_1, \ldots, e_m$ é a base estândar para $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{C}^m$. Os planos Lagrangianos que contém $W$ são da forma

$$L = ger\{e_1, \ldots, e_{m-1}, cos\theta e_m + sen\theta J e_m\},$$

pois $JL \perp L$, pelo lema 2.1.
Como $Im\Omega|_L = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{m-1}^* \wedge (sin\theta)(Je_m)^*$, onde $e_i^*$ são os covetores correspondentes a $e_i$ para $i = 1, ..., m$, o único plano especial Lagrangiano que contém $W$ é gerado por $e_1, \ldots, e_m$.

**Afirmação 2:** $dim\mathcal{E}_{m-1}(W') = dim\mathcal{E}_{m-1}(W) = 1$ para todos os elementos integrais $m-1$-dimensionais $W'$ numa vizinhança de $W$.
Com efeito, seja $\mathcal{O}$ um aberto de $G_{m-1}(\mathbb{R}^{2m})$ e $W' \in \mathcal{O}$ um $k$-plano isotrópico. Então qualquer base $(v_1, ..., v_k)$ de $W'$ está num aberto de $\mathbb{R}^{2m}$ que contém $(e_1, \ldots, e_{m-1})$, logo como $(e_1, \ldots, e_{m-1})$ são linearmente independentes, então

$k = m-1$ e $(v_1, ..., v_{m-1})$ também são linearmente independentes. Pela afirmação 1, existe uma única direção $X$ que anula $\mathcal{E}_k(W')$, logo a afirmação 2 vale.
Como cada $(m-1)$-plano $W \subset T_p\mathbb{C}^m$ isotrópico contém $(m-2)$-planos isotrópicos, se segue que o elemento integral $m$-dimensional $V$ contém o elemento integral $m-1$-dimensional regular $W$. Consequentemente, podemos aplicar o teorema de Cartan-Kähler para obter uma subvariedade analítica $m$-dimensional $N$ de $\ell$ com $T_pN = V$. Ou seja, $N$ é a subvariedade Lagrangiana especial procurada. □

Provaremos agora que $N$ é o espaço total da família de um parâmetro $\{P_t : t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ de subvariedades analíticas reais de $\mathbb{C}^m$ difeomorfas a $P$, que satisfazem a E.D.O de primeiro ordem em $t$, com dato inicial $P_0 = P$.

**Teorema 5.4.** *Seja $P$ uma $(m-1)$-variedade analítica real, compacta e orientável, $\chi$ uma seção de $\Lambda^{m-1}TP$,analítica real e que nunca se anula e $\phi : P \to \mathbb{C}^m$ um mergulho analítico real tal que $\phi^*(\omega) \equiv 0$ em $P$. Então existe $\varepsilon > 0$ uma única família $\{\phi_t : t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ de aplicações reais analíticas $\phi_t : P \to \mathbb{C}^m$ com $\phi_0 = \phi$ que satisfazem a equação*

$$\left(\frac{d\phi_t}{dt}\right)^c = (\phi_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}} (Re\Omega)_{b_1 \ldots b_{m-1} b_m} g^{b_m c}, \tag{5.4}$$

*onde $g^{bc}$ é o inverso da métrica Euclideana em $\mathbb{C}^m$. Definamos $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times P \to \mathbb{C}^m$ por $\Phi(t,p) = \phi_t(p)$. Então $N = Image\ \Phi$ é uma subvariedade Lagrangiana especial mergulhada de $\mathbb{C}^m$.*

*Demonstração.* A equação (5.4) é uma equação de evolução para as aplicações $\phi_t : P \to \mathbb{C}^m$, com condição inicial $\phi_0 = \phi$. O Teorema de Cauchy-Kowalevsky aplicado a (5.4) fornece a existência de uma única solução para $t$ em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$.
Assim, fica provar que $N = Image\Phi$ é Lagrangiana especial. Agora, pelo teorema 5.3, como $\phi^*(\omega) \equiv 0$ e $\phi$ é real analítica, existe uma subvariedade Lagrangiana especial real analítica localmente única $N'$ em $\mathbb{C}^m$ que contém $\phi(P)$. Mostraremos que $N' = N$ localmente.
Para fazer isto, observemos que (5.4) também faz sentido como uma equação de evolução para subvariedades de $N$ . Isto é, poderíamos procurar uma família $\{\phi'_t : t \in (-\varepsilon', \varepsilon')\}$ de aplicações reais analíticas $\phi'_t : P \to N'$, com $\phi_0 = \phi$, satisfazendo a equação

$$\left(\frac{d\phi'_t}{dt}\right)^c = (\phi'_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}} (Re\Omega|_{N'})_{b_1 \ldots b_{m-1} b_m} (g|_{N'})^{b_m c}, \tag{5.5}$$

Como também para esta equação podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Kowalevsky, segue-se que para algum $\varepsilon' > 0$ existe uma solução única.
Seja $p \in P$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e escolhamos $x = \phi'_t(p)$, de modo que $x \in N'$. Consideramos $\mathbb{C}^m$ é $(\mathbb{C}^m)^*$ como espaços vetoriais reais, obtemos as decomposições em sumas diretas ortogonais $\mathbb{C}^m = T_x^* N' \oplus V$ e $(\mathbb{C}^m)^* = T_x^* N' \oplus V^*$, onde $V$ é o subespaço perpendicular a $T_x N'$. Isto induz uma decomposição em soma direta $\Lambda^m (\mathbb{C}^m)^* = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k T_x^* N' \otimes \Lambda^{m-k} V^*$.
Agora $Re\ \Omega \in \Lambda^m (\mathbb{C}^m)^*$, e $N$ é calibrada com respeito de $Re\ \Omega$. Isto implica que a componente de $Re\ \Omega$ em $\Lambda^{m-1} T_x^* N' \otimes V^*$ é zero, porque esta mede o cambio em $Re\ \Omega|_{T_x N'}$ sobre pequenas variações do subespaço $T_x N'$, mas $Re\ \Omega|_{T_x N'}$ é máximo e portanto estacionário.
Como $(\phi'_t)_*(\chi)|_p$ fica em $\Lambda^{m-1} T_x N'$, segue-se que

$$(\phi'_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}}|_p (Re\ \Omega)_{b_1 \ldots b_{m-1} b_m} \in T_x^* N' \subseteq (\mathbb{C}^m)^*,$$

pois a componente em $V^*$ vem da componente de $Re\ \Omega$ em $\Lambda^{m-1} T_x^* N' \otimes V^*$, a qual é zero. Portanto

$$(\phi'_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}}|_p (Re\Omega)_{b_1 \ldots b_{m-1} b_m} = (\phi'_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}}|_p (Re\Omega|_{T_x N'})_{b_1 \ldots b_{m-1} b_m} \tag{5.6}$$

Como a decomposição em soma direta $(\mathbb{C}^m)^* = T_x^* N' \oplus V^*$ é ortogonal temos $g^{bc} = (g|_{T_x N'})^{bc} + h^{bc}$ para algum $h \in S^2 V$. Contraindo (5.6) com a métrica temos

$$(\phi'_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}} (Re\Omega)_{b_1 \ldots b_m} g^{b_m c} = (\phi'_t)_*(\chi)^{b_1 \ldots b_{m-1}} (Re\Omega|_{N'})_{b_1 \ldots b_m} (g|_{N'})^{b_m c} \tag{5.7}$$

em $p$. A notacao utilizada neste Teorema e a operação de contração como a métrica, se descrevem em [11]. Como o lado direito de (5.6) está em $T_x^* N'$, se tem que sua contração com $h$ é zero.
Equação (5.7) se tem para todo $p \in P$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Portanto por (5.5) a $\phi'_t$ também satisfaz (5.4), e assim $\phi'_t = \phi_t$ por unicidade. Daqui $\phi_t$ aplica $P$ em $N$ , e $\Phi$ aplica $(-\varepsilon, \varepsilon) \times P$ em $N$ , se $\varepsilon$ for suficientemente pequeno.
Finalmente, suponhamos que $\phi = \phi_0$ é um mergulho. Então $\phi_t : P \to N'$ é também um mergulho para $t$ pequeno, pela teoria das equações diferenciais (Ver [15]). Mas $d\phi_t/dt$ é um campo vetorial normal a $\phi_t(P)$ in $N$ , com comprimento $|(\phi_t)_*(\chi)|$. Como $\chi$ não se anula, este campo vetorial é diferente de zero, logo $\Phi$ é um mergulho para $\varepsilon$ pequeno, com $Imagem\ \Phi$ um subconjunto aberto de $N$ , a qual é portanto Lagrangiana especial. $\square$

## 5.3 Exemplos de subvariedades Lagrangianas Especiais em $\mathbb{C}^m$

**Definição 5.7.** *Seja $N$ uma subvariedade Lagrangiana Especial em $\mathbb{C}^m$. Definimos o **grupo de simetria** $Sim(N)$ de $N$ como o subgrupo de Lie de $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ que preserva $N$. Ou seja, os elementos de $Sim(N)$ são automorfismos de $\mathbb{C}^m$ que preservam $g$, $\omega$, $\Omega$ e $N$.*

**Definição 5.8.** *Seja $G$ um grupo de Lie, $M$ uma variedade e $\phi : G \times M \to M$ uma ação suave. Uma subvariedade $N$ de $M$ é $G$-invariante se $\phi(g, x) \in N$ para todo $g \in G$ e $x \in N$.*

Os objetos geométricos mais facies de construir são aqueles com grupos de simetria grandes. Mostraremos nesta seção que todas as subvariedades especiais Lagrangianas **homogêneas** (Ou seja, tais que $dim\mathcal{O} = m$ onde $\mathcal{O}$ é a órbita do grupo de simetria) são subespaços afines de $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, que não são muito interessantes.
Os seguintes tipos de subvariedades Lagrangianas $N$ mais simétricas são aquelas com **cohomogeneidade um**, ou seja, onde as órbitas do grupo de simetria são de codimensão um em $N$. Para eles desenvolvemos nossa teoria.
Seja $\mathbb{C}^m$ com a métrica usual $g$, forma Kähler $\omega$ e forma de volume $\Omega$. Então o grupo de automorfismos de $\mathbb{C}^m$ que preserva $g$, $\Omega$ e $\omega$ é $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$, onde $\mathbb{C}^m$ age por translações. Seja $G$ um subgrupo de Lie de $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e seja $\phi : \mathfrak{g} \to C^\infty(T\mathbb{C}^m)$ a ação natural de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{C}^m$ por campos vetoriais.

**Definição 5.9.** *Definamos o centro $Z(\mathfrak{g}^*)$ como o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}^*$ fixado pela ação coadjunta de $G$.*

**Observação 5.2.** *Como $\mu(\phi(\gamma, z)) = Ad^*_\gamma(\mu(z))$ para cada $z \in M$ e $\gamma \in G$, vemos que $\mu^{-1}(c)$ é $G$-invariante se e somente se $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$.*
*Com efeito, $\mu^{-1}(c)$ é $G$-invariante se e somente se*

$$\phi(\gamma, \mu^{-1}(c)) = \mu^{-1}(c) \tag{5.8}$$

*para todo $\gamma \in G$. Aplicando $\mu$ em ambos lados da equação* (5.8) *obtemos*

$$Ad^*_\gamma(\mu(z)) = \mu(\psi(\gamma, z)) = c$$

*para todo $z \in \mu^{-1}(c)$.*

A seguinte proposição foi provada originalmente por [6].

**Proposição 5.1.** *Seja $G$ um subgrupo de Lie conexo de $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e aplicação de momento $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathfrak{g}^*$ e seja $\mathcal{O}$ uma órbita de $G$ em $\mathbb{C}^m$. Então $\omega|_{\mathcal{O}} \equiv 0$ se e somente se $\mathcal{O} \subseteq \mu^{-1}(c)$ para algum $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$.*

*Demonstração.* Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $X^{\#}, Y^{\#}$ os respectivos campos vetoriais induzidos em $\mathbb{C}^m$. Então, pela definição de aplicação de momento $\mu$, vemos que

$$\omega(X^{\#}, Y^{\#}) = (i_{X^{\#}}\omega)(Y^{\#}) = d\mu^X(Y^{\#}) = \langle Y^{\#}, \langle X, d\mu\rangle\rangle = \langle X, \langle Y^{\#}, d\mu\rangle\rangle \tag{5.9}$$

$$= \langle X, \mathcal{L}_{Y^{\#}}\mu\rangle \tag{5.10}$$

pelas propriedades da derivada $\mathcal{L}_{Y^{\#}}$ de Lie.
Como $\mathcal{O}$ é uma $G$-orbita, os campos vetoriais $X^{\#}$ para $X \in \mathfrak{g}$ são tangentes a $\mathcal{O}$, e geram seu espaço tangente, pela proposição 4.1. Assim, $\omega \mid_{\mathcal{O}} \equiv 0$ se e somente se $\omega(X^{\#}, Y^{\#}) = 0$ em $\mathcal{O}$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Por (5.9) isto se tem se e somente se $\mathcal{L}_{Y^{\#}}\mu = 0$ em $\mathcal{O}$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Como $G$ é conexo, isto é certo se e somente se $\mu$ é constante em $\mathcal{O}$, logo $\mathcal{O} \subseteq \mu^{-1}(c)$ para algum $c \in \mathfrak{g}^*$. Mas $\mathcal{O}$ é $G$-invariante, ou seja $\phi(g, \mathcal{O}) = \mathcal{O}$ e aplicando $\mu$ obtemos $Ad_g^*(c) = \mu(\phi(g, \mathcal{O})) = \mu(\mathcal{O}) = c$ para todo $g \in G$. Assim, $c$ é $Ad^*(G)$-invariante, e $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$. □

**Proposição 5.2.** *Suponhamos que $N$ é uma subvariedade Lagrangiana especial de $\mathbb{C}^m$ e $G$ um subgrupo de Lie conexo de $U(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ que preserva $N$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então $G$ admite uma aplicação de momento $\mu$, e $N \subseteq \mu^{-1}(c)$ para algum $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$.*

*Demonstração.* Seja $X \in \mathfrak{g}$. Pela fórmula de Cartan, $i_{X^{\#}}\omega$ é uma 1-forma fechada em $\mathbb{C}^m$, logo existe uma função suave $f_x : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$, única salvo a adição de uma constante, com $df_x = i_{X^{\#}}\omega$. Como $\omega|_N \equiv 0$ e $X^{\#}$ é tangente a $N$ temos $df_x|_N \equiv 0$, logo $f_x$ é constante em $N$, pois $N$ é conexo.
Como as funções $f_x$ estão definidas salvo a adição de uma constante, podemos determinar $f_x$ de forma única escolhendo $f_x = 0$ em $N$. Claramente $f_x$ é linear em $x$. Portanto existe uma única aplicação $\mu_0 : \mathbb{C}^m \to \mathfrak{g}^*$ com $\langle \mu_0, X\rangle = f_x$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, e assim $i_{X^{\#}}\omega = \langle \mu_0, X\rangle$.
A $G$-equivariança segue porque $N$ é $G$-invariante. Com efeito, como $c \in Z(\mathfrak{g})$ temos que $Ad_g^*(c) = c$ para todo $g \in G$. Logo para todo $v \in N$ e para todo $g \in G$ vale $Ad_g^*(\mu(v)) = \mu(v)$. Agora, como $N$ é $G$-invariante então $v = \psi_g(v)$ para todo $v \in N$. Assim, para todo $g \in G$ e $v \in N$ se tem $Ad_g^* \circ \mu(v) = \mu \circ \phi_g(v)$, logo $\mu$ é $G$-equivariante.

Assim, temos construído uma aplicação particular de momento $\mu_0$ para $G$, com a propriedade que $\mu_0 \equiv 0$ em $N$. Portanto $G$ admite uma aplicação de momento. Se $\mu$ é qualquer outra aplicação de momento para $G$ então $\mu - \mu_0$ é uma constante $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$, logo $N \subseteq \mu^{-1}(c)$. □

A continuação, provamos alguns teoremas necessários para a prova do último Teorema desta seção.

**Teorema 5.5.** ***Teorema do Posto Equivariante*** *Sejam $M$ e $N$ variedades suaves e $G$ um grupo de Lie. Suponhamos que $F : M \to N$ é uma aplicação suave que é equivariante com respeito á uma $G$-ação transitiva suave em $M$ e qualquer $G$-ação suave em $N$. Então $F$ tem posto constante. Assim, se $F$ for sobrejetiva, ela é uma submersão suave; se ela for injetiva, ela é uma imersão suave; e se ela for bijetiva, é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* Denotamos por $\phi$ e $\psi$ as $G$-ações em $M$ e $N$ respetivamente, e sejam $p$ e $q$ pontos arbitrários em $M$. Escolhemos $g \in G$ tais que $\phi_g(p) = q$. (Tal $g$ existe porque assumimos que $G$ age transitivamente em $M$.) Como $\psi_g \circ F = F \circ \phi_g$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & dF_p & & \\ & T_pM & \longrightarrow & T_{F(p)}N & \\ d(\phi_g)_p & \downarrow & & \downarrow & d(\psi_g)_{F(p)} \\ & T_qM & \longrightarrow & T_{F(q)}N & \\ & & dF_q & & \end{array}$$

Como as linhas verticais neste diagrama são isomorfismos, as linhas horizontais tem o mesmo posto. Em outras palavras, o posto de $F$ é o mesmo para dois pontos arbitrários $p, q \in M$, logo $F$ tem posto constante. A afirmação final segue do Teorema de Posto Global (Ver [10]). □

**Definição 5.10.** *Suponhamos que $G$ é um grupo de Lie, $M$ uma variedade suave, e $\psi : G \times M \to M$ uma ação suave a esquerda. Para cada $P \in M$, definimos a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi^{(p)} : G &\to M \\ g &\mapsto \psi^{(p)}(g) = \psi(g, p) \end{aligned}$$

*Chamamos ela de **aplicação órbita**, pois sua imagem é a órbita $\psi(G, p)$. Além disso, sua pre-imagem $(\psi^{(p)})^{-1}(p)$ é o grupo de isotropia $G_p$.*

**Proposição 5.3.** *Suponhamos que $\psi$ é uma ação suave a esquerda de um grupo de Lie $G$ numa variedade suave $M$. Para cada $p \in M$, a aplicação órbita $\psi^{(p)} : G \to M$ é suave e tem posto constante, logo o grupo de isotropia $G_p = (\psi^{(p)})^{-1}(p)$ é um subgrupo de Lie propriamente mergulhado de $G$. Se $G_p = \{e\}$, então $\psi^{(p)}$ é uma imersão suave injetiva, logo a órbita $\mathcal{O} = \psi(G, p)$ é uma subvariedade imersa de $M$.*

*Demonstração.* A aplicação órbita é suave porque é igual com a composição

$$G \cong G \times \{p\} \hookrightarrow G \times M \to M.$$

onde a última aplicação acima está dada por $\psi$. Se segue da definição de ação de grupo que $\psi^{(p)}$ é equivariante com respeito á ação de $G$ nele mesmo pela traslação a esquerda dada pela ação em $M$:

$$\psi^{(p)}(gg') = \psi(gg', p) = \psi(g', \psi(g, p)) = \psi(g', \psi^{(p)}(g)).$$

Como $G$ age transitivamente nele mesmo, o Teorema do Posto Equivariante mostra que $\psi^{(p)}$ tem posto constante. Assim, $G_p$ é uma subvariedade propriamente mergulhada, pois casa conjunto de nível de $\psi^{(p)}$ é uma subvariedade propriamente mergulhada (Ver [10]), e um subgrupo de Lie.
Agora suponhamos que $G_p = \{e\}$. Se $\psi^{(p)}(g') = \psi^{(p)}(g)$, então

$$\psi(g', p) = \psi(g, p) \Rightarrow \psi(g^{-1}g', p) = p \Rightarrow g^{-1}g' = e \Rightarrow g = g',$$

mostrando que $\psi^{(p)}$ é injetiva. Pelo Teorema de posto equivariante (Ver [10]), ela é uma imersão suave, e assim a órbita é uma subvariedade imersa. $\square$

**Teorema 5.6.** *Seja $G$ um subgrupo de Lie conexo de $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e aplicação de momento $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathfrak{g}^*$, seja $\mathcal{O}$ uma órbita orientada de $G$ em $\mathbb{C}^m$ com $dim\mathcal{O} = m - 1$, e suponhamos $\mathcal{O} \subset \mu^{-1}(c)$ para algum $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$. Então existe uma subvariedade $G$-invariante Lagrangiana especial $N$, localmente única em $\mathbb{C}^m$, que contém $\mathcal{O}$. Além disso $N \subset \mu^{-1}(c)$, e $N$ é fibrado por $G$-orbitas isomorfas a $\mathcal{O}$ perto de $\mathcal{O}$. assim $N$ é localmente difeomorfo a $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{O}$, para algum $\epsilon > 0$, e podemos pensar em $N$ como uma curva suave de $G$-orbitas.*

*Demonstração.* Podemos construir $N$ por uma equação de evolução, como no teorema 5.4. Escolhamos $x \in \mathcal{O}$ e seja $H$ o estabilizador de $x$ em $G$. Consideramos $P = G/H$, que resulta uma variedade pelo Teorema de Construção do Espaço Homogêneo (Ver [10]), e definimos $\phi : P \to \mathbb{C}^m$ por $\phi(\gamma H) = \gamma x$ para

todo $\gamma \in G$, pela proposição 5.3 . Então $\phi$ é uma imersão, com $\phi(P) = \mathcal{O}$. Claramente $P$ e $\phi$ são analíticos reais, e $\phi^*(\omega) \equiv 0$ em $P$.
Como $P \cong \mathcal{O}$ é orientado e $G$ age nele por isometrias, podemos escolher uma seção $G$-invariante $\mathcal{X}$ de $\Lambda^{m-1}TP$ que nunca se anula. Suponhamos por enquanto que $P$ é compacto. Aplicando o teorema 5.4 obtemos um mergulho $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times P \to \mathbb{C}^m$, cuja imagem é um subconjunto aberto de $N$. Como $\chi$ é $G$-invariante e $\phi$ é $G$-equivariante, vemos pela unicidade que $\Phi$ é $G$-equivariante sobre as ações de $G$ em $P$ e $\mathbb{C}^m$.
Assim $\Phi(\{t\} \times P)$ é uma $G$-orbita em $\mathbb{C}^m$ isomorfa a $\mathcal{O}$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, e $N$ é fibrado por una família de um parâmetro suave de $G$-orbitas isomorfas a $\mathcal{O}$ perto de $\mathcal{O}$. Isto completa a prova, excepto porque nós assumimos que $P$ era compacto para aplicar o teorema 5.4. Esta suposição não é de fato necessária. Para todo $p \in P$ os $\phi_t$ existem perto de $p$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e algum $\varepsilon > 0$. Podemos usar a $G$-equivariança para estender $\phi_t$ univocamente a todo $P$. $\square$

Isto significa que as subvariedades especiais Lagrangianas de cohomogeneidade um em $\mathbb{C}^m$ são relativamente facies de construir e classificar. A estratégia é primeiro identificar todos os possíveis subgrupos de Lie $G$ em $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ que admitem aplicações de momento. Ainda que não todos os subgrupos de $SU(m) \ltimes \mathbb{C}^m$ admitem aplicações de momento, o grupo de simetria $Sym(N)$ de uma subvariedade Lagrangiana especial sempre admite uma aplicação de momento, e portanto os subgrupos sem aplicações de momento ficam excluídos porque eles não podem preservar nenhuma subvariedade Lagrangiana especial. Uma vez que temos escolhido um subgrupo de Lie $G$ com aplicação de momento $\mu$, trabalhamos então com os tipos de $G$-órbita $\mathcal{O}$ em $\mu^{-1}(c)$ para $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$, e olhamos se algum deles tem dimensão $m-1$. Claramente devemos ter $dimG \geq m-1$ para obter alguma órbita apropriada. Mas se $dimG$ é muito grande não obtemos órbitas apropriadas.
Encontramos então as $m$-variedades Lagrangianas especiais com cohomogeneidade um em $\mathbb{C}^m$ solucionando uma equação diferencial ordinária de primeiro ordem em $G$-órbitas $(m-1)$-dimensionais.

**Exemplo 5.1.** *Subvariedades Lagrangianas Especiais $SO(3)$-invariantes em $\mathbb{C}^3$*

Seja $G = SO(3)$ subgrupo de $SU(3)$, mergulhado como as matrizes reais $3 \times 3$ na forma obvia. Consideramos a ação

$$\begin{aligned} \psi : SO(3) \times \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C}^3 \\ (A, x+iy) &\mapsto \psi(A, x+iy) = Ax + iAy \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a aplicação de momento de $SO(3)$ é

$$\mu(z_1, z_2, z_3) = (Im(z_1\bar{z_2}), Im(z_2\bar{z_3}), Im(z_3\bar{z_1})).$$

No capítulo 4, provamos que a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie $SO(3)$ é

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in gl(3,\mathbb{R}) | A + A^t = 0\}$$

Pelo feito no capítulo 4 sabemos que $(\mathbb{R}^6, \omega, SO(3), \mu)$ é um $SO(3)$-espacio Hamiltoniano, com aplicação de momento

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^6 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \mu(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \times \vec{y}. \end{aligned}$$

Fazendo a identificação $\mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$, onde as primeiras 3 coordenadas em $\mathbb{R}^6$ correspondem ás partes reais das coordenadas de $\mathbb{C}^3$ e as últimas 3 coordenadas correspondem ás partes imaginárias das coordenadas de $\mathbb{C}^3$, e notando que de $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, 3$ segue

$$Im(z_j\bar{z_k}) = Im(x_j + iy_j)(x_k - iy_k) = y_jx_k - y_kx_j, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

obtemos que $(\mathbb{C}^3, \omega, SO(3), \mu)$ é um $SO(3)$-espaço Hamiltoniano, com aplicação de momento

$$\mu(z_1, z_2, z_3) = (Im(z_1\bar{z_2}), Im(z_2\bar{z_3}), Im(z_3\bar{z_1}))$$

**Afirmação 1:** $Z(\mathfrak{so}(3)^*) = \{0\}$
Por definição, o centro de $\mathfrak{so}(3)^*$ é o subespaço vetorial de $\mathfrak{so}(3)^*$ fixado pela ação coadjunta de $SO(3)$, ou seja

$$Z(\mathfrak{so}(3)^*) = \{\xi \in SO(3)^* : Ad^*(g, \xi) = \xi \ \forall g \in G\}$$

Pela equação (4.1) temos

$$\xi \in Z(\mathfrak{so}(3)^*) \Rightarrow \langle Ad^*_g\xi, X\rangle = \langle \xi, X\rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}X\rangle$$

Logo

$$0 = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}X - X\rangle = \langle \xi, g^{-1}Xg - X\rangle \quad \forall X \in \mathfrak{so}(3), \tag{5.11}$$

pois $G$ é um grupo de matrizes, e $Ad_gX = gXg^{-1}$ pela proposição 4.2.
Notamos que $g^{-1}Xg - X$ é também uma matriz anti-simétrica para todo

$X \in \mathfrak{so}(3)$, logo a equação (5.11) faz sentido. Como $\xi$ é uma função linear, para provar que $\xi \equiv 0$, basta provar que $\xi(E_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$, onde

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $\mathfrak{so}(3)$. Um cálculo mostra que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in SO(3)$, esta matriz é igual a sua inversa, e $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz anti-simétrica, obtemos pela equação 5.11 que $\xi(E_1) = 0$. Com um procedimento análogo para $E_2$ e $E_3$ obtemos $\xi(E_2) = 0$ e $\xi(E_3) = 0$. Portanto $\xi \equiv 0$.

Como $Z(\mathfrak{so}(3)^*) = \{0\}$, toda 3-subvariedade especial Lagrangiana $SO(3)$-invariante fica em

$$\mu^{-1}(0) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : Im(z_1\bar{z}_2) = 0,\ Im(z_2\bar{z}_3) = 0,\ Im(z_3\bar{z}_1) = 0\}.$$

**Afirmação 2:** Todos os pontos em $\mu^{-1}(0)$ podem ser escritos como $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x_1, x_2, x_3$ são reais, e normalizados de modo que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Segue das equações

$$Im(z_j\bar{z}_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_j x_k - y_k x_j = 0 \quad para \quad j, k = 1, 2, 3.$$

que

$$y_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{x_1}{y_1} y_3 \quad e$$

$$y_3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1}{y_1} y_2.$$

Para $z_j = x_j + iy_j = \left(\frac{x_1}{y_1} + i\right) y_j$, consideramos $\lambda = \left(\frac{x_1}{y_1} + i\right) / \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Isto prova a afirmação.

Portanto as órbitas de $G$ em $\mu^{-1}(0)$ são $\mathcal{O}_\lambda$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, onde

$$\mathcal{O}_\lambda = \{(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) : x_j \in \mathbb{R}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}. \tag{5.12}$$

Claramente $\mathcal{O}_0$ é um ponto, e $\mathcal{O}_\lambda \cong S^2$ se $\lambda \neq 0$, e $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_{-\lambda}$.
Podemos então interpretar uma EDO em $G$-orbitas em $\mu^{-1}(0)$ como uma EDO em $\lambda$. O cálculo seguinte mostra que esta é $d\lambda/dt = \bar{\lambda}^2$, onde $\lambda = \lambda(t)$.
Pela Proposição 4.1, sabemos que

$$T_z O_{z_0} = \{X^{\#}(z) : X \in \mathfrak{g}, z \in \mathbb{C}^3\}$$

onde $X_{\vec{a}}^{\#}(z) = (\vec{a} \times \vec{x}, \vec{a} \times \vec{y})$ e $z = \vec{x} + i\vec{y}$.
Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned}
X_{e_1}^{\#}(z) &= (e_1 \times \vec{x}, e_1 \times \vec{y}) = (0. - x_3, x_2, 0, -y_3, y_2) = (0, -z_3, z_2),\\
X_{e_2}^{\#}(z) &= (e_2 \times \vec{x}, e_2 \times \vec{y}) = (x_3, 0, -x_1, y_3, 0, -y_1) = (z_3, 0 - z_1) \quad e\\
X_{e_3}^{\#}(z) &= (e_3 \times \vec{x}, e_3 \times \vec{y}) = (-x_2, x_1, 0, -y_2, y_1, 0) = (-z_2, z_1, 0)
\end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que esses vetores são linearmente dependentes, mas dois quaisquer deles são linearmente independentes. Segue-se que

$$\begin{aligned}
T_z O_{z_0} &= \langle X_{e_1}^{\#}(z),\ X_{e_2}^{\#}(z)\rangle\\
&= \langle (0, -x_3, x_2, 0, -y_3, y_2),\ (x_3, 0, -x_1, y_3, 0, -y_1)\rangle
\end{aligned}$$

Pelo teorema 5.3, existe uma subvariedade $SO(3)$-invariante Lagrangiana especial $N$, localmente única em $\mathbb{C}^3$, que contém $\mathcal{O}$. Ou seja, como $\Omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n$, então $Im\Omega|_N = 0$ se e somente se

$$T_z N = \langle X_{e_1}^{\#}(z), X_{e_2}^{\#}(z), \dot{z}\rangle$$

onde

$$\dot{z}(t) = (\dot{z}_1(t), \dot{z}_2(t), \dot{z}_3(t))$$

Avaliando a forma $\Omega$ nos vetores tangentes de $N$ obtemos

$$\begin{aligned}\Omega(X^{\#}_{e_1}, X^{\#}_{e_2}, \dot{z}) &= dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3((0, -z_3, z_2), (z_3, 0, -z_1), (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3)) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 \end{vmatrix} \\ &= z_3(z_3\dot{z}_3 + z_1\dot{z}_1) + z_3 z_2 \dot{z}_2\end{aligned}$$

A equação

$$Im\Omega|_N = 0$$

leva-nós á

$$Im\ z_3(z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3) = 0 \tag{5.13}$$

Por outra parte, pela equação (5.12), sabemos que $z(t) \in \mu^{-1}(0)$ se e somente se $z(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 \\ z_2 &= \lambda x_2 \\ z_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

Substituindo estas equações na equação (5.13) obtemos

$$Im(\lambda^2 \dot{\lambda} x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)) = 0$$

Como $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, segue-se que

$$Im(\lambda^2 \dot{\lambda} x_3) = 0$$

e como $x_3 \neq 0$ obtemos

$$Im\ \lambda^2(t)\dot{\lambda}(t) = 0$$

ou seja,

$$Im\left(\frac{d}{dt}\lambda^3(t)\right) = 0$$

e portanto $d(Im(\lambda^3))/dt = 0$. Logo $Im(\lambda^3) = c$ para $c \in \mathbb{R}$. Assim,

**Teorema 5.7.** *Para cada $c \in \mathbb{R}$ definamos*

$$N_c = \{(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) : x_j \in \mathbb{R}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, Im(\lambda^3) = c\}.$$

*Então $N_c$ é uma 3-subvariedade Lagrangiana especial em $\mathbb{C}^3$, invariante sob a ação de $SO(3)$.*

**Observação 5.3.** *Quando $c = 0$, $N$ é uma união singular de três copias de $\mathbb{R}^3$ intersectando-se em $0$, e quando $c \neq 0$ é a união disjunta não-singular de três copias de $\mathbb{R} \times S^2$. Notemos também que $N_c = N_{-c}$.*

**Exemplo 5.2.** *Subvariedades Lagrangianas Especiais $T^2$-invariantes em $\mathbb{C}^3$*

Seja $T^2 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix} : \textit{onde } \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R} \textit{ e } \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \right\}$ o grupo de matrizes diagonais em $SU(3)$, agindo em $\mathbb{C}^3$ diagonalmente por

$$\begin{gathered} \varphi : T^2 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (diag(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}), (z_1, z_2, z_3)) \mapsto (e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, e^{i\theta_3} z_3) \end{gathered}$$

Para calcular a álgebra de Lie de $G$, que denotamos por $\mathfrak{g}$, tomamos uma curva suave de matrizes $\gamma(t) = diag(e^{i\theta_1(t)}, e^{i\theta_2(t)}, e^{i\theta_3(t)}) \in G$ tal que $\gamma(0) = I$ e calculamos $\gamma'(0)$.

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} diag(e^{i\theta_1(t)}, e^{i\theta_2(t)}, e^{i\theta_3(t)}) \\ &= i\ diag\left(\frac{d\theta_1(t)}{dt}, \frac{d\theta_2(t)}{dt}, \frac{d\theta_3(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=0} \end{aligned}$$

Como $\theta_1(t) + \theta_2(t) + \theta_3(t) = 0$ então $\dfrac{d\theta_1}{dt} + \dfrac{d\theta_2(t)}{dt} + \dfrac{d\theta_3(t)}{dt} = 0$, ou seja, $\dfrac{d\theta_1}{dt} = -\dfrac{d\theta_2(t)}{dt} - \dfrac{d\theta_3(t)}{dt}$. Portanto

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= i\ diag\left(-\frac{d\theta_2(t)}{dt} - \frac{d\theta_3(t)}{dt}, \frac{d\theta_2(t)}{dt}, \frac{d\theta_3(t)}{dt}\right) \\ &= i\left(-\frac{d\theta_2(t)}{dt} diag(1,-1,0) - \frac{d\theta_3(t)}{dt} diag(1,0,-1)\right) \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g} = \{\gamma'(0)/\gamma(t) \subset T^2, \gamma(0) = I\}$, vale

$$\mathfrak{g} = \langle\ i\ diag(1,-1,0),\ i\ diag(1,0,-1)\rangle$$

Como precisamos da aplicação de momento, vamos procurar o campo vetorial em $\mathbb{C}^3$ gerado pelo subgrupo de um parâmetro $\{exp(tX) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq SU(3)$.

Assim, para $X = i\alpha \text{ diag}(1,-1,0) + i\beta \text{ diag}(1,0,-1) \in \mathfrak{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
X^{\#}(z) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(exp(tX), z) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(exp(ti\alpha \text{ diag}(1,-1,0) + ti\beta \text{ diag}(1,0,-1)), z) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\text{diag}(exp\ it(\alpha+\beta), exp(-ti\alpha), exp(-ti\beta)), z) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{it(\alpha+\beta)}z_1, e^{-it\alpha}z_2, e^{-it\beta}z_3) \\
&= i((\alpha+\beta)z_1, -\alpha z_2, -\beta z_3)
\end{aligned}$$

Agora, queremos encontrar a aplicação de momento. Para esto, devemos achar $i_{X^{\#}}\omega$. Com a identificação $\mathbb{C}_3 \cong \mathbb{R}^6$, podemos escrever o vetor $X^{\#}(z) = i((\alpha+\beta)z_1, -\alpha z_2, -\beta z_3$ como $(-(\alpha+\beta)y_1, \alpha y_2, \beta y_3, (\alpha+\beta)x_1, -\alpha x_2, -\beta x_3)$. Então temos

$$\begin{aligned}
i_{X^{\#}}\omega &= X^{\#} \lrcorner \omega \\
&= (-(\alpha+\beta)y_1, \alpha y_2, \beta y_3, (\alpha+\beta)x_1, -\alpha x_2, -\beta x_3) \lrcorner \sum_{i=1}^{6} dx_i \wedge dy_i \\
&= -(\alpha+\beta)y_1 dy_1 + \alpha y_2 dy_2 + \beta y_3 dy_3 - (\alpha+\beta)x_1 dx_1 + \alpha x_2 dx_2 + \beta x_3 dx_3 \\
&= -(\alpha+\beta)[y_1 dy_1 + x_1 dx_1] + \alpha[y_2 dy_2 + x_2 dx_2] + \beta[y_3 dy_3 + x_3 dx_3] \\
&= -\frac{(\alpha+\beta)}{2} d[x_1^2 + y_1^2] + \frac{\alpha}{2} d[x_2^2 + y_2^2] + \frac{\beta}{2} d[x_3^2 + y_3^2]
\end{aligned}$$

Logo temos que

$$d\mu^X = -\frac{(\alpha+\beta)}{2} d[x_1^2 + y_1^2] + \frac{\alpha}{2} d[x_2^2 + y_2^2] + \frac{\beta}{2} d[x_3^2 + y_3^2]$$

Podemos identificar $X = \alpha\ diag(1,-1,0) + \beta\ diag(1,0,-1) \in \mathfrak{g}$, $a, b \in \mathbb{R}$, com $(\alpha(1,0), \beta(0,1)) \in \mathbb{R}^2$. Obtemos

$$\mu^X = -\frac{(\alpha+\beta)}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\alpha}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \frac{\beta}{2}(x_3^2 + y_3^2) + constante$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mu : \mathbb{C}^3 &\to \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^2 \\
(z_1, z_2, z_3) &\mapsto -\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2, |z_1|^2 - |z_3|^2),
\end{aligned}$$

é a função Hamiltoniana do campo vetorial $X^{\#}$, salvo uma constante. Como

$G$ é abeliano, $Z(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^*$, e para todo $c \in \mathfrak{g}^*$ a $G$-orbita genérica em $\mu^{-1}(c)$ é uma copia de $T^2$. Com efeito, se $c \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^2$, podemos escrever $c = (A, B)$ onde $A, B \in \mathbb{R}$. Logo

$$\mu^{-1}(c) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : A = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), B = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_3|^2)\}$$

Concluímos que $\mu^{-1}(c)$ é 2-dimensional para todo $c \in \mathfrak{g}^*$. Assim, podemos aplicar teorema 5.3 para encontrar uma família $L$ de subvariedades especiais Lagrangianas, $T^2$-invariantes em $\mathbb{C}^3$, resolvendo uma equação diferencial ordinária.

Sabemos que

$$\begin{aligned} T_z O_{z_0} &= \{X^{\#}(z_0) : X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{i((a+b)z_1, -az_2, -bz_3) : a, b \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Sejam $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então

$$X^{\#}_{e_1}(z) = i(z_1, -z_2, 0) \quad X^{\#}_{e_2}(z) = i(z_1, 0, -z_3)$$

Como estos vetores são linearmente independentes, temos

$$T_z O_{z_0} = \langle X^{\#}_{e_1}(z), X^{\#}_{e_2}(z) \rangle = \langle i(z_1, -z_2, 0), i(z_1, 0, -z_3) \rangle$$

A família $L$ deve satisfazer $Im\Omega|_L = 0$, onde $\Omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$. O espaço tangente a $L$ em cada ponto pode-se escrever como

$$T_z L = \langle X^{\#}_{e_1}(z), X^{\#}_{e_2}(z), \dot{z} \rangle$$

onde

$$\dot{z}(t) = (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3)$$

Avaliamos a forma de volume nesses vetores tangentes.

$$\begin{aligned} \Omega(X^{\#}_{e_1}(z), X^{\#}_{e_2}(z), \dot{Z}) &= dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(i(z_1, -z_2, 0), i(z_1, 0, -z_3), \dot{z}) \\ &= \begin{vmatrix} iz_1 & -iz_2 & 0 \\ iz_1 & 0 & -iz_3 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 \end{vmatrix} \\ &= -i(z_1 z_3 \dot{z}_2(t) + z_1 z_2 \dot{z}_3(t) + z_2 z_3 \dot{z}_1(t)) \end{aligned}$$

A equação $Im\Omega|_L = 0$ se satisfaz se

$$\begin{aligned}
&Im(z_1 z_3 \dot{z}_2 + z_1 z_2 \dot{z}_3 + z_2 z_3 \dot{z}_1(t)) = 0 \\
&\Rightarrow Im\left(\frac{d}{dt}(z_1 z_2 z_3)\right) = 0 \\
&\Rightarrow Im(z_1 z_2 z_3) = 0 \\
&\Rightarrow Im(z_1 z_2 z_3) = \ Constante
\end{aligned}$$

**Teorema 5.8.** *Sejam $A, B$ e $C$ números reais e definamos o subconjunto $L_{A,B,C}$ em $\mathbb{C}^3$ por*

$$L_{A,B,C} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 - |z_2|^2 = A,\ |z_2|^2 - |z_3|^2 = B, Im(z_1 z_2 z_3) = C\}$$

*Então $L_{A,B,C}$ é uma subvariedade Especial Lagrangiana em $\mathbb{C}^3$, invariante sob a acao de $T^2$.*

**Observação 5.4.** *Observamos que $\mathbb{C}^3$ é fibrado por esta família de 3-variedades especiais Lagrangianas; ou seja, existe exatamente uma passando por cada ponto em $\mathbb{C}^3$.*

**Exemplo 5.3.** *Subvariedades Lagrangianas Especiais com Simetría $U(1) \times \mathbb{R}$*

Seja $G = U(1) \times \mathbb{R}$ subgrupo de $SU(3) \ltimes \mathbb{C}^3$ agindo por

$$\begin{aligned}
\varphi : U(1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C}^3 \\
(diag(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, x), (z_1, z_2, z_3)) &\mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{-i\theta} z_2, x + z_3),
\end{aligned}$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$ e $x \in \mathbb{R}$.
Como nos exemplos anteriores, o primeiro que devemos fazer é achar a álgebra de Lie associada ao grupo $U(1) \times \mathbb{R}$. Para calcular a álgebra de Lie de $G$, que denotamos por $\mathfrak{g}$, tomamos um caminho é o conjunto de matrizes em $G$ passando pela identidade e derivamos com respeito de $t$. Assim escrevemo um elemento $X \in \mathfrak{g}$ como

$$\begin{aligned}
X &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (diag(e^{i\theta(t)}, e^{-i\theta(t)}, x(t))) \\
&= \left.\left(i\ diag\left(\frac{d\theta(t)}{dt}, -\frac{d\theta(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt}\right)\right)\right|_{t=0}
\end{aligned}$$

Logo

$$\mathfrak{g} = \langle i\ diag(1, -1, 0),\ diag(0, 0, 1)\rangle$$

Agora vamos achar o campo vetorial em $\mathbb{C}^3$ gerado pelo subgrupo de um parâmetro $\{exp(tX) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq U(1) \times \mathbb{R}$. Para $X = \alpha i \; diag(1, -1, 0) + \beta \; diag(0, 0, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
X^{\#}(z) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(exp(tX), z) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(exp(t\alpha i \; diag(1, -1, 0) + t\beta \; diag(0, 0, 1)), z) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi(diag(exp(t\alpha i), exp(-t\alpha i), exp(t\beta)), z) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (exp(t\alpha i)z_1, exp(-t\alpha i)z_2, exp(t\beta) + z_3) \\
&= (\alpha i z_1, -\alpha i z_2, \beta)
\end{aligned}$$

De novo, para encontrar a aplicação de momento devemos achar $i_{X^{\#}}\omega$. Com a identificação $\mathbb{C}_3 \cong \mathbb{R}^6$, podemos escrever o vetor $X^{\#}(z) = (\alpha i z_1, -\alpha i z_2, \beta)$ como $(-\alpha y_1, \alpha y_2, \beta, \alpha x_1, -\alpha x_2, 0)$. Então temos

$$\begin{aligned}
i_{X^{\#}}\omega &= X^{\#} \lrcorner \omega \\
&= (-\alpha y_1, \alpha y_2, \beta, \alpha x_1, -\alpha x_2, 0) \lrcorner \sum_{i=1}^{6} dx_i \wedge dy_i \\
&= -\alpha y_1 dy_1 + \alpha y_2 dy_2 + \beta dy_3 - \alpha x_1 dx_1 + \alpha x_2 dx_2 \\
&= \frac{\alpha}{2} d[-y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 + x_2^2] + \beta dy_3
\end{aligned}$$

Podemos identificar $X = \alpha \; diag(1, -1, 0) + \beta \; diag(0, 0, 1) \in \mathfrak{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha(1, 0), \beta(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Obtemos

$$d\mu^X = \frac{\alpha}{2} d[-y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 + x_2^2] + \beta dy_3$$

Integrando a última equação obtemos

$$\mu = \frac{1}{2}[-y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 + x_2^2] + y_3 + constante$$

Portanto aplicação de momento de $U(1) \times \mathbb{R}$ é

$$\mu(z_1, z_2, z_3) = \left( -\frac{1}{2} \left( |z_1|^2 - |z_2|^2 \right), Im z_3 \right),$$

salvo uma constante. Como o grupo de Lie $U(1) \times \mathbb{R}$ é abeliano, $Z(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^2$, e as $G$-orbitas são claramente copias de $S^1 \times \mathbb{R}$ salvo que $z_1 = z_2 = 0$ onde estas são copias de $\mathbb{R}$. Com efeito, se $c \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^2$, podemos escrever

$c = (A, B)$ onde $A, B \in \mathbb{R}$. Logo

$$\mu^{-1}(c) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : A = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), B = Im\ z_3)\}$$

Concluímos que $\mu^{-1}(c)$ é 2-dimensional para todo $c \in \mathfrak{g}^*$. Assim, podemos aplicar teorema 5.3 para encontrar uma família $N$ de 3-variedades especiais Lagrangianas, $U(1) \times \mathbb{R}$-invariantes em $\mathbb{C}^3$, resolvendo uma equação diferencial ordinária.
Pela Proposição 4.1 temos

$$\begin{aligned} T_z O_{z_0} &= \{X^{\#}(z_0) : X \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{(aiz_1, -aiz_2, b) : a, b \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Sejam $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então

$$X^{\#}_{e_1}(z) = i(z_1, -z_2, 0) X^{\#}_{e_2}(z) = (0, 0, 1)$$

Como estos vetores são linearmente independentes, temos

$$T_z O_{z_0} = \langle X^{\#}_{e_1}(z), X^{\#}_{e_2}(z) \rangle = \langle i(z_1, -z_2, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

A família $N$ deve satisfazer $Im\Omega|_L = 0$, onde $\Omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$. O espaço tangente a $N$ em cada ponto pode-se escrever como

$$T_z N = \langle X^{\#}_{e_1}(z), X^{\#}_{e_2}(z), \dot{Z} \rangle$$

onde

$$\dot{Z} = (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3)$$

Avaliamos a forma de volume nesses vetores tangentes.

$$\begin{aligned} \Omega(X^{\#}_{e_1}(z), X^{\#}_{e_2}(z), \dot{Z}) &= dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(i(z_1, -z_2, 0), (0, 0, 1), \dot{Z}) \\ &= \begin{vmatrix} iz_1 & -iz_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dot{z}_1 & \dot{z}_2 & \dot{z}_3 \end{vmatrix} \\ &= -i(z_1 \dot{z}_2 + z_2 \dot{z}_1) \end{aligned}$$

A equação $Im\Omega|_L = 0$ se satisfaz se

$$
\begin{aligned}
& Im(-i(z_1\dot{z}_2 + z_2\dot{z}_1)) = 0 \\
\Rightarrow\ & Im\left(-i\frac{d}{dt}(z_1z_2)\right) = 0 \\
\Rightarrow\ & Re\left(-i\frac{d}{dt}(z_1z_2)\right) = 0 \\
\Rightarrow\ & Re(z_1z_2) = \ Constante
\end{aligned}
$$

**Teorema 5.9.** *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}$, e definimos*

$$N_{A,B,C} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 - |z_2|^2 = A,\ Re(z_1z_2) = B,\ Im(z_3) = C\}.$$

*Então $N_{A,B,C}$ é uma 3-variedade Lagrangiana especial $U(1)\times\mathbb{R}$-invariante em $\mathbb{C}^3$. Se $A = B = 0$ então $N_{A,B,C}$ é a união singular de duas copias de $\mathbb{R}^3$ que se intersectam em $\mathbb{R}$, e se não for assim $N_{A,B,C}$ é não singular e difeomorfa á $S^1 \times \mathbb{R}^2$.*

**Observação 5.5.** *Assim, $\mathbb{C}^3$ fica fibrado pelas $N_{A,B,C}$. Notamos que $N_{A,B,C}$ é de fato o produto de subvariedades EL de dimensão menor em $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}$.*

Resulta que esses exemplos representam todas as 3-variedades Lagrangianas especiais em $\mathbb{C}^3$ de cohomogeneidade um.

**Teorema 5.10.** *Toda subvariedade de dimensão 3 homogênea Lagrangiana especial em $\mathbb{C}^3$ é conjugada sobre $SU(3) \ltimes \mathbb{C}^3$ ao 3-plano estândar $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$. Toda subvariedade Lagrangiana especial com cohomogeneidade um em $\mathbb{C}^3$ é conjugada sobre $SU(3)\ltimes\mathbb{C}^3$ a um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ ou a uma das 3-variedades dos Exemplos 5.1, 5.2 e 5.3.*

*Demonstração.* Usamos a classificação de grupos de Lie para identificar todos os subgrupos de Lie $G$ de $SU(3) \ltimes \mathbb{C}^3$, que encontramos em [9]. Mostramos que ou $G$ não tem órbitas 2-dimensionais convenientes em $\mu^{-1}(c)$ para $c \in Z(\mathfrak{g}^*)$, ou as subvariedades $G$-invariantes reduzem-se á um dos casos do teorema.

| Subgrupo $G$ | $G \subseteq SU(3)$ |
|---|---|
| $U_{(p,q)}(1)$ | $\{diag(e^{ip\theta}, e^{iq\theta}, e^{ir\theta}) : p,q,r \in \mathbb{Z}\ primos\ rel., p+q+r=0\}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\{diag(1,1,1)\}$ |
| $U(1)\times U(1)$ | $\{diag(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_1 - i\theta_2}) : \theta \in \mathbb{R}\}$ |
| $SU(2)$ | $\left\{ \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; a \in SU(2) \right\}$ |
| $U(2)$ | $\left\{ \begin{bmatrix} u & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & (det\ u)^{-1} \end{bmatrix} \middle| \; u \in U(2) \right\}$ |
| $SO(3)$ | $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A^t A = I,\ det\ A = 1\}$ |

*Subgrupos de SU(3)*

Os subgrupos $U(1)\times U(1) \cong T^2$ e $SO(3)$ já foram estudados. Os subgrupos $U_{(p,q)}(1) \cong U(1)$ e $\mathbb{R}$ tem dimensão um, então sua álgebra de Lie vai ter máximo dimensão um. Portanto, o espaço tangente a uma órbita neste caso vai ter somente dimensão 1, logo estes grupos não vão ter orbitas 2-dimensionais convenientes.

Sabemos que a álgebra de Lie associada a $U(2)$ consiste de todas as matrizes $2\times 2$ anti-simétricas, obtemos que os geradores para este caso são

$$\mathfrak{g} = \langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \rangle$$

Como $det\ u^{-1}$ depende de $u$ (obviamente), a álgebra de Lie associada a $U(2) \subset SU(3)$ está gerada pelos mesmos vetores que geram o álgebra de Lie de $U(2)$. Portanto a álgebra de Lie do grupo $U(2) \subset\ SU(3)$ é

$$\mathfrak{g} = \langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \rangle$$

Os vetores $X^{\#}_{e_1}(z) = (z_2, -z_1, 0)$ e $X^{\#}_{e_2}(z) = (iz_2, iz_1, 0)$, $X^{\#}_{e_3}(z) = (iz_1, 0, -iz_3)$, $X^{\#}_{e_4}(z) = (0, iz_2, -iz_3)$ são tais que três deles são linearmente independentes.

Logo não vão gerar um espaço tangente na orbita de dimensão 2. Em vez disso, eles vão gerar um subespaço homogêneo. Do mesmo jeito, o subgrupo $U(1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Analogamente ao feito no exemplo 5.1, obtemos que $(\mathbb{C}^3, \omega, U(2) \subset SU(3), \mu)$ é um $U(2) \subset SU(3)$-espaço Hamiltoniano, com aplicação de momento

$$\mu(z_1, z_2, z_3) = (Im(z_1\bar{z_2}), Im(z_2\bar{z_3}), Im(z_3\bar{z_1})).$$

Como $Z(\mathfrak{g}^*) = \{0\}$, usando a proposição 5.3, sabemos que $N \subseteq \mu^{-1}(0)$. Segue-se que $N \subseteq \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 = z_2 = z_3 = z\}$. Um cálculo mostra que

$$\begin{bmatrix} X^{\#}_{e_1}(z) \\ X^{\#}_{e_3}(z) \\ X^{\#}_{e_4}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -z & 0 \\ z & 0 & -z \\ 0 & z & z \end{bmatrix}$$

é uma matriz complexa anti-simétrica. Pelo teorema espectral, ela pode se escrever na forma $U\Sigma U^T$, onde $U$ é uma matriz unitária especial e $\Sigma$ é uma matriz real. Portanto, $N$ é conjugada sobre $SU(3) \ltimes \mathbb{C}^3$ ao 3-plano $\mathbb{R}^3$.

Por outra parte, sabemos que a álgebra de Lie associado ao subgrupo $SU(2)$ é gerada por

$$\mathfrak{g} = \langle \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \rangle$$

Os vetores $X^{\#}_{e_1}(z) = (-z_2, z_1, 0)$ e $X^{\#}_{e_2}(z) = (iz_2, iz_1, 0)$, $X^{\#}_{e_3}(z) = (iz_1, -iz_2, 0)$, resultam linearmente dependentes, portanto o espaço tangente que eles geram tem dimensão 1, logo não vamos ter órbitas convenientes neste caso.

Notemos que $Sym(\mathbb{R}^3)$ é $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, que tem vários subgrupos de Lie $G$ que levam a subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ $\square$

# Capítulo 6

# Fibrados Normais Especiais Lagrangianos

Nesta seção pretendemos encontrar um outro tipo de exemplo de subvariedade LE em $\mathbb{C}^m$, como espaço total de um certo fibrado. Mais precisamente, seguindo [7] mostramos que uma subvariedade de dimensão $k$ de $M$ em $\mathbb{R}^m$ tem a propriedade que o seu fibrado normal é LE em $T^*\mathbb{R}^m$ se e somente se a segunda forma fundamental $II^\nu$ de $M$ em qualquer direção normal $\nu$ satisfaz uma condição algébrica forte, ou seja, se $\lambda$ é valor próprio de $II^\nu$, também $-$ é. As subvariedades com essa propriedade são chamadas de austeras. No final desse capitulo damos um exemplo simples de subvariedade austera. Todas as definições necessárias se encontram na referencia [5].

## 6.1 Preliminares

**Definição 6.1.** *Seja $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ uma imersão isométrica. A métrica Riemanniana em $\tilde{M}$ induz ao longo de $M$ uma decomposição ortogonal do fibrado tangente $T\tilde{M}$ de $\tilde{M}$ em*

$$T\tilde{M}|_M = TM \oplus \nu M.$$

*O fibrado vetorial $\nu M$ chama-se de fibrado normal de $M$. A fibra em $p \in M$ de $\nu M$ de $\nu M$ é o espaço normal de $M$ em $p$ e se denota por $\nu_p M$.*

Sejam $X, Y$ campos vetoriais em $M$. Para diferenciar eles com respeito da conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ para $\tilde{M}$, debemos estender eles a campos vetoriais em $\tilde{M}$. Fazemos a decomposição de $\tilde{\nabla}_X Y$ em sua parte tangente $(\tilde{\nabla}_X Y)^T$ e sua parte normal $(\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$.

**Definição 6.2.** *A conexão de Levi-Civita $\nabla$ para $M$ é dada por*

$$\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^T.$$

*e definimos a Segunda Forma Fundamental $II$ de $M$ por*

$$II(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Obtemos a decomposição ortogonal

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$$

que é chamada de *formula de Gauss.* A formula de Gauss e a anulação da torsão de $\tilde{\nabla}$ e $\nabla$ implicam que a segunda forma fundamental é um campo tensorial simétrico com valores no fibrado normal de $M$.

Uma seção do fibrado normal $\nu M$ chama-se de *campo vetorial normal* de $M$. Seja $\xi$ um campo vetorial normal em $M$ e decomponhamos $\tilde{\nabla}_X \xi$ em suas componentes tangente e normal. A parte normal induz uma conexão $\nabla^{\perp}$ no fibrado normal $\nu M$ que chamamos de *conexão normal* para $M$.

**Definição 6.3.** *Definimos o operador forma de $M$ na direção normal $\xi$ por*

$$A_{\xi}(X) = -(\tilde{\nabla}_X \xi)^T.$$

*O campo tensorial $A_{\xi}$ se relaciona com a segunda forma fundamental $II$ pela equação*

$$\langle II(X, Y), \xi \rangle = \langle A_{\xi} X, Y \rangle.$$

*Então $A_{\xi}$ é uma transformação linear simétrica no espaço tangente $T_pM$ de $M$ em $p$.*

A simetria de $II$ implica que $A_{\xi}$ é uma aplicação linear auto-adjunta em $T_pM$. A equação anterior também mostra que para cada $p \in M$ o endomorfismo $A_{\xi_p}$ não depende da extensão de $\xi_p$ como campo vetorial normal. Assim, podemos definir o operador forma com respeito de qualquer vetor normal de $M$. A coleção de todos esses endomorfismos é chamada de *operador forma* de $M$ e se denota por $A$. A decomposição ortogonal

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

chama-se de *formula de Weingarten.*

## 6.2 Fibrado Co-normal

Para qualquer subvariedade $M$ de uma variedade Riemanniana $X$, sabemos que o mergulho canônico de seu fibrado co-normal $N^*M$ em $T^*X$ é Lagrangiano com respeito á estrutura simplética natural em $T^*X$. Usando a métrica, podemos identificar o fibrado co-normal $N^*M$ com o fibrado normal $N(M)$. Nesta seção determinaremos as subvariedades $p$-dimensionais $M$ de $\mathbb{R}^n$ cujo fibrado normal $N(M)$ é especial Lagrangiano em $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.

**Teorema 6.1.** *Seja $M$ uma subvariedade de dimensão $p$ imersa em $\mathbb{R}^n$, e seja $L = \psi[N(M)]$ a imersão canônica de seu fibrado co-normal em $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ dada por*

$$\psi : N(M) \to \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \tag{6.1}$$

$$\nu_x \mapsto \psi(\nu_x) = (x, \nu_x) \tag{6.2}$$

*onde, no segundo fator, $\nu_x$ é considerado como um vetor baseado na origem. Então $L$ é Lagrangiana especial com respeito á calibração*

$$\varphi = Re\{i^{-q} dz_1 \wedge ... \wedge dz_n\}, \tag{6.3}$$

*se e somente se*

$$\sigma_{2k-1}(A^\nu) = 0$$

*para todo $k = 1, ..., [(p+1)/2]$, $\nu \in N_xM$ vetor normal, e $x \in M$ onde $\sigma_n$ são os polinômios simétricos de grau $n$ em autovalores de $A^\nu$*

*Demonstração.* Consideramos o mergulho (6.1). Devemos computar o espaço tangente a este mergulho em $\nu_{x_0}$. Numa vizinhança $V$ de $x_0$ escolhemos um referencial ortonormal $e_1, ..., e_p, \nu_1, ..., \nu_q$ adaptado a $M$, ou seja $e_1, ..., e_p$ são vetores tangentes a $M$ e $\nu_1, ..., \nu_q$ são vetores normais a $M$ para todo $x \in V$ e $p + q = n$, tal que $(e_1, ..., \nu_q)$ é positivamente orientado. Sem perda de generalidade assumimos que os campos $\nu_k$ satisfazem $(\nabla \nu_k)^N_{x_0} = 0$ onde $()^N$ denota a projeção ortogonal sobre o espaço normal $N_{x_0}(M)$. Recordamos que o *operador forma* de $M$ na direção normal $\nu$ é dado por

$$A^\nu(V) = (\nabla_V \tilde{\nu})^T \tag{6.4}$$

onde $\tilde{\nu}$ é qualquer extensão de $\nu$ a um campo local normal e onde $()^T = 1 - ()^N$ é a projeção ortogonal sobre $T_{x_0}(M)$.

Com respeito as coordenadas $(x,t)$ em $N(M)$, onde $x$ é a parametrização de $M$ perto de $x_0$ e $t=(t_1,...,t_q)\in\mathbb{R}^q$, a aplicação (6.4) pode ser escrita como

$$\psi(x,t)=\left(x,\sum_j t_j\nu_j(x)\right).$$

O espaço tangente á este mergulho em $\nu_{x_0}=\sum c_j\nu_j(x_0)$ é gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} E_j &\equiv \psi_*(e_j)=(e_j,A^\nu(e_j)), \quad j=1,...,p \\ N_j &\equiv \psi_*(\partial/\partial t_j)=(0,v_j), \quad j=1,...,q \end{aligned}$$

onde os campos $e_j,\nu_j$ estão avaliados em $x_0$.
Pelo último resultado do capítulo 2, $\psi(N(M))$ é uma subvariedade Lagrangiana de $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n$.
Estamos interessados agora nas condições sobre as quais a subvariedade é Lagrangiana especial para alguma escolha de fase $\theta$ na calibração $\varphi=Re\{e^{i\theta}dz_1\wedge ...\wedge dz_n\}$. Aplicando uma transformação ortogonal em $SO(p)\times SO(q)\subset SO(2n)$ podemos assumir que em $x_0$ os vetores $e_1,...,e_p$, $\nu_1,...,\nu_q$ são levados na base estândar de $\mathbb{R}^n$. Denotamos as coordenadas em $\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n$ por $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ e consideramos $z_k=x_k+iy_k$. Finalmente, sem perda de generalidade podemos assumir que os vetores $e_1,...,e_p$ foram escolhidos para diagonalizar a forma simétrica $A^\nu$ em $x_0$, i. e., assumimos que $A^\nu(e_k)=\lambda_k e_k$ para $k=1,...,p$, em $x_0$. Consequentemente, o plano orientado tangente $\zeta$ ao fibrado normal mergulhado em $\nu_{x_0}$ é dado por $\zeta=E_1\wedge...\wedge E_p\wedge N_1\wedge...\wedge N_q=(e_1,\lambda_1)\wedge...\wedge(e_p,\lambda_p e_p)\wedge(0,\nu_1)\wedge...\wedge(0,\nu_q)$, Segue-se que

$$(dz_1\wedge...\wedge dz_n)(\zeta)=\begin{vmatrix} 1+i\lambda_1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1+i\lambda_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & i \end{vmatrix}=i^q\prod_{k=1}^{p}(1+i\lambda_k). \quad (6.5)$$

Agora escolhemos a calibração

$$\varphi=Re\{i^{-q}dz_1\wedge...\wedge dz_n\}. \quad (6.6)$$

Pela equação (6.5) temos que $L$ é Lagrangiano especial se e somente se

$$\begin{aligned}0 &= Im(\prod_{j=1}^{n}(1+i\lambda_j))\\ &= Im((-i)^p\prod_{j=1}^{n}(i-\lambda_j))\end{aligned}$$

Utilizamos a os polinomios simétricos definidos no capítulo 3, na equação (3.3) com $\lambda = i$ e $X_k = \lambda_k$ para obter

$$\begin{aligned}0 =& Im((-i)^p(i^p - \sigma_1(\lambda_1,...,\lambda_p)i^{p-1} + \sigma_2(\lambda_1,...,\lambda_p)i^{p-2} + \cdots\\ &+ (-1)^p\sigma_p(\lambda_1,...,\lambda_p)))\end{aligned}$$

Se $p$ é par então

$$\begin{aligned}0 =& Im((i^p - \sigma_1(\lambda_1,...,\lambda_p)i^{p-1} + \sigma_2(\lambda_1,...,\lambda_p)i^{p-2} + \cdots\\ &+ (-1)^p\sigma_p(\lambda_1,...,\lambda_p)))\end{aligned}$$

Se $p$ é ímpar então

$$\begin{aligned}0 =& Re((i^p - \sigma_1(\lambda_1,...,\lambda_p)i^{p-1} + \sigma_2(\lambda_1,...,\lambda_p)i^{p-2} + \cdots\\ &+ (-1)^p\sigma_p(\lambda_1,...,\lambda_p)))\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_k(-1)^k\sigma_{2k-1}(\lambda_1,...,\lambda_p) = 0$ e $\sum_{k\geq 0}\sigma_{2k}(\lambda_1,...,\lambda_p) > 0$ em cada vetor normal $\nu$. Para cada número real $t$, os autovalores de $A^{t\nu}$ são $t\lambda_1,...,t\lambda_p$. Logo a primeira condição é equivalente a

$$\sum_k(-1)^k t^{2k-1}\sigma_{2k-1}(\lambda_1,...,\lambda_p) = 0,$$

o que acontece se e somente se

$$\sigma_{2k-1}(\lambda_1,...,\lambda_p) \equiv 0 \tag{6.7}$$

para $k = 1,3,...,[(p+1)/2]$. □

**Observação 6.1.** *A condição (6.7) em $M$ é equivalente á condição que para todo vetor normal $\nu$, o conjunto de autovalores de $A^\nu$ for invariante pela multiplicação por $-1$, ou seja, é da forma*

$$(\lambda_1,...,\lambda_p) = (a,-a,b,-b,...,c,-c,0,0,...,0). \tag{6.8}$$

**Definição 6.4.** *Uma subvariedade de uma variedade Riemanniana cuja segunda forma fundamental $A$ satisfaz a condição* (6.8) *chama-se* ***subvariedade austera****.*

Notemos que quando $p = 2$, a única condição é que *traço*$A^\nu \equiv 0$, logo $M^2$ é austera se e somente se $M^2$ é minimal.

**Exemplo 6.1.** *Um conjunto de exemplos particular vem de considerar subvariedades minimais da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Se $M^{p-1} \subset S^{n-1}$ é uma subvariedade minimal, então o cono em $M^{q-1}$,*

$$C(M^{q-1}) = \{t \cdot x \in \mathbb{R}^n : x \in M^{q-1} \quad e \quad t \in \mathbb{R}\}$$

*é uma variedade austera em $\mathbb{R}^n$.*

Os vetores normais a $M^{q-1}$ em $S^{n-1}$ em $x$ são exatamente os vetores normais de $C(M^{q-1})$ em $tx$ para $t \neq 0$. Além disso, se a segunda forma fundamental $A^\nu$ de $M^{q-1}$ em $S^{n-1}$ tem autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_{q-1}$, a segunda forma fundamental $\tilde{A}^\nu$ de $C(M^{q-1})$ em $tx$ tem autovalores $t\lambda_1, ..., t\lambda_{q-1}, 0$.

Com efeito, seja $\{e_1, ..., e_{q-1}\}$ uma base ortonormal de $T_pM$ tal que $\bar{A}^u(e_i) = \kappa_i(p,u)e_i$ para $i = 1, ..., q-1$, onde $\bar{A}$ é o operador forma de $M$ em $S^{n-1}$. Consideramos os vetores tangentes $\{e_1(tp), ..., e_{q-1}(tp)\}$ de $T_{tp}C(M)^*$ pelo transporte paralelo dos vetores $\{e_1, ..., e_{q-1}\}$ ao longo da geodésica $\gamma(t) := tp$ em $\mathbb{R}^n$. Então $\{e_1(tp), ..., e_{q-1}(tp), e_q(tp) := \dot{\gamma}(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{tp}C(M)$. Além disso, para o transporte paralelo $u(tp)$ de um vetor normal $u \in \nu_pM$, tem-se que

$$A^{u(tp)}(e_i(tp)) = (1/t)\kappa_i(p,u)e_i(tp)$$

para $i = 1, ..., n$ e

$$A^{u(tp)}(e_{n+1}(tp)) = 0,$$

onde $A$ é o operador forma de $C(M)^*$ em $\mathbb{R}^n$. Ou seja, as curvaturas principais de $C(M)^*$ em $tp$ com respeito da direção normal $u(tp)$ são dadas por

$$(1/t)\kappa_1(p,u), ..., (1/t)\kappa_{q-1}(p,u) \quad e \quad 0.$$

Segue-se que $M^{p-1}$ é uma subvariedade austera de $S^{n-1}$ se e somente se seu cono é uma subvariedade austera de $\mathbb{R}^n$.

Em [3], encontram-se mais exemplos de subvariedades austeras.

# Capítulo 7

# As Geometrias Excepcionais

Neste capítulo exploramos algumas geometrias com grupos de automorfismos excepcionais. Nosso proposito é mostrar calibrações diferentes que não precisam de espaços com estrutura simpléctica. Além disso, caracterizamos os subespaços calibrados.
Notamos por $G(n, m)$ o conjunto de $n$-planos orientados numa variedade de dimensão $m$.

## 7.1 Processo de Cayley-Dickson

**Definição 7.1.** *Uma **álgebra normada** como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$ (não necessariamente associativa) finito-dimensional com unidade multiplicativa $1$, e equipada com um produto interno $\langle , \rangle$ cuja norma associada $|\cdot|$ satisfaz*

$$|xy| = |x||y| \quad \textit{para todo } x, y.$$

Dada uma álgebra normada $B$ adotamos as seguintes convenções. Seja $Re\ B$ o conjunto gerado por $1 \in B$, e $Im\ B$ o complemento ortogonal de $Re\ B$. Então cada $x \in B$ possui uma única decomposição ortogonal

$$x = x_1 + x',$$

onde $x_1 \in Re\ B$ e $x' \in Im\ B$. A *conjugação* se define por

$$\bar{x} \equiv x_1 - x'.$$

Logo

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + \bar{x}), \quad x' = \frac{1}{2}(x - \bar{x}).$$

Dado $w \in B$, seja $R_w$ o operador linear multiplicação a direita por $w$. Similarmente seja $L_w$ o operador linear multiplicação a esquerda por $w$.
Os fatos elementares que concernem a $R_w, L_w$, e a conjugação são

$$\langle R_w x, R_w y\rangle = \langle x, y\rangle |w|^2, \quad \langle L_w x, L_w y\rangle = \langle x, y\rangle |w|^2 \tag{7.1}$$

$$R_w^t = R_{\bar{w}}, \quad L_w^t = L_{\bar{w}}. \tag{7.2}$$

$$\bar{\bar{x}} = x, \quad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}, \quad \langle x, y\rangle = Re\ x\bar{y} = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}), \quad x\bar{x} = |x|^2. \tag{7.3}$$

Um objeto de interesse fundamental numa álgebra normada $B$ é o **associador** definido por

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$$

para $x, y, z \in B$. A seguinte forma de associatividade fraca sempre se tem numa álgebra normada.

**Lema 7.1.** *A forma trilinear $[x, y, z]$ em $B$ é alternada.*

Isto significa que o associador se anula sempre que dois de seus argumentos são iguais. Uma álgebra na qual o associador é alternado chama-se de alternativa. O lema afirma que qualquer álgebra normada é alternativa.

*Demonstração.* Notemos que o associador se anula se e somente se uma de suas variáveis é real. Portanto, é suficiente mostrar que o associador se anula sempre que duas de suas variáveis fixam-se iguais a $w \in Im\ B$. Agora provamos que $[x, w, \bar{w}] = 0$. Como $w\bar{w} = |w|^2$, devemos mostrar que $(xw)\bar{w} = x|w|^2$. Pela equação (7.2) temos $\langle (xw)\bar{w}, y\rangle = \langle xw, yw\rangle$ que por (7.1) é igual a $\langle x, y\rangle |w|^2$. Como $[x, w, \bar{w}] = 0$, $[w, y, w] = -[w, w, y]$. Logo fica provar que $[w, \bar{w}, z] = 0$ que segue-se do mesmo jeito de $[x, w, \bar{w}] = 0$. □

Como imediata consequência do lema 7.1 e o fato que $x\bar{x} = |x|^2$ temos que:

**Lema 7.2.** *(a) Cada elemento diferente de zero $x \in B$ tem um único inverso a esquerda e a direita $x^{-1} = x/|x|^2$.*

*(b) Dados dois elementos $x, y \in B$ com $x \neq 0$, as equações $xw = y$ e $wx = y$ podem se-resolver (univocamente) para $w$ com $w = \bar{x}y/|x|^2$ e $w = y\bar{x}/|x|^2$ respectivamente.*

Notemos que (a) junto com a associatividade fraca (7.1) não implica (b). Da equação $2\langle x, y\rangle = x\bar{y} + y\bar{x}$, temos que

$$2\langle x, y\rangle w - x(\bar{y}w) - y(\bar{x}w) = [x, \bar{y}, w] + [y, \bar{x}, w].$$

Consequentemente o Lema 7.1 pode se-reformular como

$$x(\bar{y}w) + y(\bar{x}w) = 2\langle x, y\rangle w, \tag{7.4}$$

e (a prova é similar),

$$(w\bar{y})x + (w\bar{x})y = 2\langle x, y\rangle w. \tag{7.5}$$

Em particular, se $x, y \in B$ são ortogonais e $w \in B$ é arbitrário, então

$$x\bar{y} = -\bar{y}x \tag{7.6}$$
$$x(\bar{y}w) = -y(\bar{x}w) \tag{7.7}$$
$$(w\bar{y})x = -(w\bar{x})y. \tag{7.8}$$

As equações em (7.6), (7.7) e (7.8), que nós permitem intercambiar $x$ e $y$ se eles for ortogonais, podem ser usadas para motivar o processo de Cayley-Dickson.

**Lema 7.3.** *Suponhamos que $A$ é uma sub-álgebra (com $1 \in A$) da álgebra normada $B$ e que $\varepsilon \in A^{\perp}$ com $|\varepsilon| = 1$. Então $A\varepsilon$ é ortogonal á $A$ e $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$ para todos $a, b, c, d \in A$.*

*Demonstração.* Notemos que $x \in A$ se e somente se $\bar{x} \in A$ pois $1 \in A$. Então, $a, b \in A$ implica $\bar{b}a \in A$ e portanto $\langle a, b\varepsilon\rangle = \langle \bar{b}a, \varepsilon\rangle = 0\ \forall a, b \in A$. Isto prova $A \perp A\varepsilon$. Notemos que $\varepsilon \perp A$ implica $\varepsilon \in Im\ B$ e portanto $1 = ||\varepsilon||^2 = \varepsilon\bar{\varepsilon} = -\varepsilon^2$ de onde $\varepsilon^2 = -1$. Expandindo temos $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (b\varepsilon)(d\varepsilon) + a(d\varepsilon) + (b\varepsilon)c$. A continuação fazemos uso repetido de (7.6), (7.7) e (7.8) para re-escrever os últimos três termos.

$$\begin{aligned}(b\varepsilon)(d\varepsilon) = -\bar{d}((\overline{b\varepsilon})\varepsilon) = \bar{d}((\varepsilon\bar{b})\varepsilon) = -\bar{d}((\varepsilon\bar{\varepsilon})b) = -\bar{d}b\\ a(d\varepsilon) = a(\varepsilon\bar{d}) = \varepsilon(\bar{a}\bar{d}) = \overline{(\bar{a}\bar{d})}\varepsilon = (da)\varepsilon\\ (b\varepsilon c) = (b\bar{c})\varepsilon.\end{aligned}$$

Isto completa a prova. □

**Definição 7.2.** *Suponhamos que $A$ é uma álgebra. Motivados pelo lema 7.3 definimos o produto $A \oplus A$ por*

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}).$$

*A nova álgebra $B = A \oplus A$ chama-se obtida de $A$ via o processo de Cayley-Dickson.*

**Observação 7.1.** *Sob as hipóteses do lema 7.3 a conclusão pode se re-escrever assim:* $A + A\varepsilon$ *é uma sub-álgebra de* $B$ *isomorfa com a álgebra* $A \oplus A$ *obtida de* $A$ *via o processo de Cayley-Dickson.*

**Definição 7.3.** $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$, $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ *e* $\mathbf{O} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ *via o processo de Cayley-Dickson. Com a base estândar* $1, i, j, k, e, ie, je, ke$ *para* $\mathbf{O}$ *temos* $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i$, $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j$, $\mathbf{O} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e$.

**Lema 7.4.** *Suponhamos que* $B = A \oplus A$ *é obtida de* $A$ *via o processo de Cayley-Dickson. Então*

*(1)* $B$ *é comutativa se e somente se* $A = \mathbf{R}$.

*(2)* $B$ *é associativa se e somente se* $A$ *é comutativa.*

*(3)* $B$ *é alternativa se e somente se* $A$ *é associativa.*

*Demonstração.* Suponhamos que $x = (a, \alpha) = a + \alpha\varepsilon$, $y = (b, \beta) = b + \beta\varepsilon$, e $z = (c, \gamma) = c + \gamma\varepsilon$. Podemos verificar as fórmulas seguintes

(1)' $\frac{1}{2}[a, b] + Im\bar{\alpha}\beta + (\beta Im\ a - a\ Im\ b)\varepsilon$.

(2)' $[x, y, z] = [a, \bar{\gamma}\beta] + [b, \bar{\alpha}\gamma] + [c, \bar{\beta}\alpha] + (\alpha[b, c] - \beta[a, c] + \gamma[a, b] + \alpha[\bar{\beta}, \gamma] + [\alpha, \gamma]\bar{\beta} + \gamma[\alpha, \bar{\beta}])\varepsilon$, assumindo que $A$ é associativo.

(3)' $[x, \bar{x}, y] = [a, \bar{\beta}, \alpha] + [\alpha, \bar{\beta}, a]\varepsilon$.

O lema segue facilmente. □

Portanto, $\mathbf{C}$ é comutativa e associativa, $\mathbf{H}$ é associativa mas não é comutativa, $\mathbf{O}$ é alternativa mas não é comutativa e não é associativa, e $\mathbf{B} = \mathbf{O} \oplus \mathbf{O}$ não é uma álgebra alternativa. Em particular, $\mathbf{B} = \mathbf{O} \oplus \mathbf{O}$ não é um álgebra normada, porém podemos ver que $x\bar{x} = |x|^2$ é válido, logo cada elemento diferente de zero tem um único inverso a direita e a esquerda.

**Teorema 7.1.** *As únicas álgebras normadas sobre* $\mathbf{R}$ *são* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{O}$.

*Demonstração.* Suponhamos que $B$ é uma álgebra normada. Seja $A_1 = Re\ \mathbf{B}(\cong \mathbf{R})$. Se $A_1 = B$ já terminamos. Se não, escolhemos $\varepsilon_1 \in A_1^{\perp}$ com $|\varepsilon_1| = 1$, e seja $A_2 = A_1 + A_1\varepsilon_1(\cong \mathbf{C})$. Pelo lema 7.3, $A_2$ é uma sub-álgebra normada de $B$ isomorfa a $\mathbf{C}$. Se $A_2 = B$ já terminamos. Se não, escolhemos $\varepsilon_2 \in A_2^{\perp}$ com $\varepsilon_2 = 1$ e seja $A_3 = A_2 + A_2\varepsilon_2$. De novo pelo lema 7.3, $A_3 \cong \mathbf{H}$. Se $A_3 = B$ terminamos. Se não escolhemos $\varepsilon_3 \in A_3^{\perp}$ com $|\varepsilon_3| = 1$ e seja $A_4 = A_3 + A_3\varepsilon$. Pelo lema (7.3), $A_4 \cong \mathbf{O}$.
Finalmente, devemos mostrar $A_4 = \mathbf{O} = B$. Se não for escolhemos $\varepsilon \in A_4^{\perp}$

com $|\varepsilon| = 1$ e seja $A_5 = A_4 + A_4\varepsilon$. Pelo lema 7.3, $A_5 \cong \mathbf{O} \oplus \mathbf{O}$ que não é uma álgebra normada. Isto é uma contradição pois $A_5 \subset B$ e $B$ é uma álgebra normada. $\square$

**Teorema 7.2.** *(Hurwitz) A subálgebra $A$ com unidade gerada por dois elementos de $\mathbf{O}$ é associativa (de fato, $A$ está contida na subálgebra de quaternios de $\mathbf{O}$).*

*Demonstração.* Suponhamos que $x, y \in \mathbf{O}$ são geradores. Se $A \cong \mathbf{R}$ já terminamos. Se não for podemos assumir $Im\ x \neq 0$ e definir $\varepsilon_1 \equiv Im\ x/|Imx|$. Então pelo lema 7.3, $A_1 \equiv \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_1 \cong \mathbf{C}$ é associativa. Se $y \in A_1$ temos terminado. Se não for, escrevemos $y = y_1 + y_2$ com $y_1 \in A_1, y_2 \in A_1^{\perp}$ e $y_2 \neq 0$. Agora consideramos $\varepsilon_2 = y_2/|y_2|$. Então $A_2 \equiv A_1 + A_2 \cong \mathbf{H}$ é associativa. Também $x, y \in A_2$ e portanto $A = A_2 \cong \mathbf{H}$. $\square$

## 7.2 Produto Vetorial Múltiplo de Números de Cayley

Primeiro definimos o produto vetorial de dois octonios.

**Definição 7.4.** *Seja $x \times y \equiv -\frac{1}{2}(\bar{x}y - \bar{y}x)$, para todo $x, y \in \mathbf{O}$. Este produto chama-se de produto vetorial de $x$ e $y$.*

**Lema 7.5.** *(1) $x \times y$ é alternada.*

*(2) $|x \times y| = |x \wedge y|$*

*Demonstração.* (1) O produto vetorial é alternado porque $x \times x = 0$

(2) Consequentemente, é suficiente computar $|x \times y|$ no caso especial onde $x$ e $y$ são ortogonais. Pela condição (7.6), se $x$ e $y$ são ortogonais então $x \times y = \bar{y}x$. Portanto $|x \times y| = |\bar{y}x| = |x||y| = |x \wedge y|$ como queríamos.

$\square$

**Observação 7.2.** *A prova de que $|x \times y| = |x \wedge y|$ explica por que precisamos de conjugados na definição de $x \times y$; queríamos que se anulara $\langle x, y\rangle$ para expressar $x \times y$ como um termo $\bar{y}x$.*

**Observação 7.3.** *Se $x, y \in Im\mathbf{H} \subset \mathbf{O}$ então $x \times y$ pode se-expressar de diferentes formas*

$$x \times y = \frac{1}{2}[x, y] = xy - \frac{1}{2}(xy + yx) = xy + \langle x, y\rangle = xy - Re\ xy = Im\ xy;$$

*e definimos elas como o produto vetorial em $\mathbf{R}^3 \cong Im\mathbf{H}$.*

A extensão natural do produto vetorial de três vetores é a alternação de $x(\bar{y}z)$. (Notemos que não é $x \times (y \times z)$) Como $y \times x$ é já alternada isto resulta igual que a alternação de $-x(y \times z)$, ou seja $-\frac{1}{2}(x(y \times x) + y(z \times x) + z(x \times y))$. Esta expressão pode se simplificar fazendo uso de (7.6), (7.7) e (7.8). Portanto adotamos como definição de produto vetorial triple:

**Definição 7.5.** *Seja* $x \times y \times z = \frac{1}{2}(x(\bar{y}z) - z(\bar{y}x))$, *para todo* $x, y, z \in \mathbf{O}$.

**Lema 7.6.** *(1)* $x \times y \times z$ *é alternada em* $\mathbf{O}$

*(2)* $|x \times y \times z| = |x \wedge y \wedge z|$ *para todo* $x, y, z \in \mathbf{O}$.

*Demonstração.* (1) Como a sub-álgebra gerada por dois vetores qualquer é associativa,

$$x \times x \times z = \frac{1}{2}(x(\bar{x}z) - z|x|^2) = 0$$
$$x \times y \times y = \frac{1}{2}(x|y|^2 - y(\bar{y}x)) = 0$$

Obviamente $x \times y \times x = 0$, e portanto $x \times t \times z$ é alternada.

(2) Como uma consequência de (1) podemos assumir que $x, y, z$ são ortogonais. Então (7.6), (7.7) e (7.8), mostra que $-z(\bar{y}x) = x(\bar{y}z)$ e portanto que

$$x \times y \times z = x(\bar{y}z) \quad \textit{se } x, y, z \textit{ são ortogonais}$$

Portanto $|x \times y \times z| = |x(\bar{y}z)| = |x||y||z| = |x \wedge y \wedge z|$.

□

Agora consideramos o produto vetorial quádruplo. Se define como uma alternação de $\bar{x}(y \times z \times w)$.

**Definição 7.6.** *Seja*

$$x \times y \times z \times w \equiv \frac{1}{4}(\bar{x}(y \times z \times w) + \bar{y}(z \times x \times w) + \bar{z}(x \times y \times w) + \bar{w}(y \times x \times z)),$$

*para todos* $x, y, z, w \in \mathbf{O}$.

**Lema 7.7.** *(1)* $x \times y \times z \times w$ *é alternada*

*(2)* $|x \times y \times z \times w| = |x \wedge y \wedge z \wedge w|$.

*Demonstração.* (1) Como $y \times z \times w$ é alternada, é obvio pela definição que $x \times y \times z \times w$ é também alternada.

(2) Como os dois lados de (2) são alternados podemos supor que $x, y, z, w$ são mutuamente ortogonais. Como na prova de (7.2), as equações (7.6), (7.7) e (7.8), podem se usar para prova da seguinte equação.

$$\textit{Se } x, y, z, w \in \mathbf{Q} \textit{ são ortogonais}, \textit{ então } x \times y \times z \times w = \bar{x}(y(\bar{z}w)).$$

(2) segue-se imediatamente de (7.2) pois **O** é uma álgebra normada.

□

A parte real do produto vetorial é uma forma alternada com valores escalares em **O** e portanto candidata para ser calibração em **O**.

**Lema 7.8.** *Dado $x \in \mathbf{O}$, sejam $x_1 \equiv Re\ x$ e $x' \equiv Im\ x$.*

*(1)* $Re\ x \times y = 0$

*(2)* $Re\ x \times y \times z = \langle x', y', z' \rangle$

*(3)* $Re\ x \times y \times z \times w = \langle x, y \times z \times w \rangle$.

*Demonstração.* 1. $2Re\ x \times y = -\frac{1}{2}(\bar{x}y - \bar{y}x) - \frac{1}{2}\overline{(\bar{x}y - \bar{y}x)} = 0.$

2. Primeiro notamos que $1 \times y \times z = -y \times z$ que não tem parte real por (1). Portanto $Re\ x \times y \times z = Re\ x' \times y' \times z'$. Mais adiante vamos mostrar que $\langle x', y'z' \rangle$ é alternada. Portanto $Re\ x \times y \times z = Rex' \times y' \times z'$. Portanto precisamos de provar (2) somente para $x, y, z$ puramente imaginários e ortogonais. Neste caso podemos aplicar (7.2).

$$Re\ x \times y \times z = Re\ x(\bar{y}z) = -Re\ x(yz) = \langle x, yz \rangle.$$

3. Mais adiante mostraremos que $\langle x, y \times z \times w \rangle$ é alternada. Portanto precisamos de provar (3) somente para o caso no cual $x, y, z, w$ são ortogonais dois a dois. Neste caso podemos aplicar a equação (7.2) e o lema 7.7 para obter

$$Re\ x \times y \times z \times w = Re\bar{x}(y(\bar{z}w)) = \langle x, y(\bar{z}w) \rangle = \langle x, y \times z \times w \rangle$$

como queríamos.

□

**Observação 7.4.** *O fato que*

$$\langle x, y \times z \times w \rangle \textit{ é alternada em } x, y, z, w \in \mathbf{O},$$

*pode se-reformular como*

$$x \times y \times z \textit{ é ortogonal a } x, y \textit{ e } z \in \mathbf{O}.$$

Os diferentes produtos vetoriais podem se-expressar em termos de pares ordenados de quaternios.

**Definição 7.7.** *Define-se o coassociador por*

$$\frac{1}{2}[x, y, z, w] = -(\langle y', z'w'\rangle x' + \langle z', x'w'\rangle y' + \langle x', y'w'\rangle z' + \langle y', x'z'\rangle w'),$$

*para todos* $x, y, z, w \in \mathbf{O}$

Esta definição é consistente com as do comutador e associador por causa do seguinte resultado.

**Proposição 7.1.** *Para todo* $x, y, z, w \in Im\mathbf{O}$ *puramente imaginários*

*(1)* $Im\ x \times y = \frac{1}{2}[x, y]$

*(2)* $Im\ x \times y \times z = \frac{1}{2}[x, y, z]$

*(3)* $Im\ x \times y \times z \times w = \frac{1}{2}[x, y, z, w]$

*Demonstração.* (1) é imediata. Como os dois lados de (2) e (3) são ortogonais podemos assumir que $x, y, z, w$ são dois a dois ortogonais. Então, pela equação (7.2), $Im\ x \times y \times z = -Imx(yz) = -\frac{1}{2}(x(yz) + (zy)x)$. Usando (7.6), (7.7) e (7.8) concluímos $-(zy)x = (xy)z$, que prova (2).
A ortogonalidade implica, pela equação (7.2), que $x \times y \times z \times w = x(y(zw))$ e portanto

$$\begin{aligned}\langle x \times y \times z \times w\rangle &= \langle x(y(zw)), x\rangle = \langle y(zw), 1\rangle |x|^2\\ &= -Re(y \times z \times w)|x|^2 = -\langle y, zw\rangle |x|^2.\end{aligned}$$

Consequentemente, $x \times y \times z \times w$ e $\frac{1}{2}[x, y, z, w]$ diferem (máximo) por um octonio $a \in \mathbf{O}$ ortogonal a $x, y, z$ e $w$. Como $[x, y, z, w] \in Im\mathbf{O}$, podemos escrever $Im\ x \times y \times z \times w = \frac{1}{2}[x, y, z, w] + a$ onde $a \in Im\mathbf{O}$ é ortogonal a $x, y, z$ e $w$. Fica mostrar que $\langle Im\ x \times y \times z \times w, a\rangle = 0$. Como $a \in Im\mathbf{O}$, isto é igual a

$$\langle x \times y \times z \times w, a\rangle = \langle x(y(zw)), a\rangle = -\langle a(x(y(zw))), 1\rangle.$$

Usando (7.6), (7.7) e (7.8) para fazer permutações de símbolos adjacentes, isto é $-\langle x(y(z(wa))), 1\rangle$, que é igual a $-\langle a, w(z(yx))\rangle$. Usando (7.6), (7.7) e (7.8) para fazer 6 permutações de símbolos adjacentes obtemos $\langle x \times y \times z \times w, a\rangle = \langle x(y(zw)), a\rangle = -\langle a, x(y(zw))\rangle$. Logo $x(y(zw))$ é ortogonal a $a$, completando a prova. $\square$

## 7.3 Calibrações em $\mathbb{R}^7$ e $\mathbb{R}^8$

Estamos interessados em três geometrias e de acordo com isso nossa discussão divide-se em três partes.

### 7.3.1 A 3-forma de Calibração em $\mathbb{R}^7$

Consideremos em $Im(\mathbf{O}) \approx \mathbb{R}^7$ a forma trilinear $\varphi$ dada por

$$\varphi(x, y, z) = \langle x, yz\rangle. \tag{7.9}$$

Notamos que $\varphi(x, x, z) = \langle x, xz\rangle = |x|^2\langle 1, z\rangle = 0$ pois $z \in Im(\mathbf{O})$. Similarmente, temos $\varphi(x, y, x) = \langle x, yx\rangle = |x|^2\langle 1, y\rangle = 0$, e $\varphi(x, y, y) = \langle x, y^2\rangle = -\langle x, y\bar{y}\rangle = -|y|^2\langle x, 1\rangle = 0$. Portanto, a forma $\varphi$ é alternada.

Denotamos por $e_1 = 1,\ e_2 = i,\ e_3 = j,\ e_4 = k,\ e_5 = e,\ e_6 = ie,\ e_7 = je,\ e_8 = ke$ a base estândar dos octonios $\mathbf{O}$. O produto de cada termo está dado pela multiplicação dos coeficientes e a tabula de multiplicação dos octonios.

*Tabula de Multiplicação dos Octonios*

| $\times$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_1$ | $e_4$ | $-e_3$ | $e_6$ | $-e_5$ | $-e_8$ | $e_7$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $-e_4$ | $-e_1$ | $e_2$ | $e_7$ | $e_8$ | $-e_5$ | $-e_6$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $e_3$ | $-e_2$ | $-e_1$ | $e_8$ | $-e_7$ | $e_6$ | $-e_5$ |
| $e_5$ | $e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $-e_8$ | $-e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
| $e_6$ | $e_6$ | $e_5$ | $-e_8$ | $e_7$ | $-e_2$ | $-e_1$ | $-e_4$ | $e_3$ |
| $e_7$ | $e_7$ | $e_8$ | $e_5$ | $-e_6$ | $-e_3$ | $e_4$ | $-e_1$ | $-e_2$ |
| $e_8$ | $e_8$ | $-e_7$ | $e_6$ | $e_5$ | $-e_4$ | $-e_3$ | $e_2$ | $-e_1$ |

Denotamos por $\omega_1, ..., \omega_8$ a base dual para $\mathbf{O}^*$. Usaremos a notação $\omega_{pqr}$ para $\omega_p \wedge \omega_q \wedge \omega_r$. Consultando a tabula de multiplicação para $\mathbf{O}$, a forma $\varphi$ se expressa em termos dos eixos assim

$$\varphi = \omega_{234} - \omega_{278} - \omega_{638} - \omega_{674} - \omega_{265} - \omega_{375} - \omega_{485}. \tag{7.10}$$

Notemos, em particular, que $\varphi(Im\mathbf{H}) = 1$ onde $Im\mathbf{H} = i \wedge j \wedge k = e_{234}$ é simplesmente a parte imaginária canonicamente orientada da subálgebra dos quaternios $\mathbf{H}$ de $\mathbf{O}$. (Também notemos que $\varphi \wedge \varphi = 0$.)

Agora podemos formular e provar a desigualdade do associador

**Teorema 7.3.** *A forma $\varphi$ é uma **calibração**.*

*Demonstração.* Suponhamos que $\zeta = u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ onde $u_1, u_2, u_3$ é uma base ortonormal orientada para $\zeta$. Então $\varphi(\zeta) = \langle u_1, u_2 u_3\rangle \leq |u_1||u_2||u_3| = 1$ pela desigualdade de Schwarz. Além disso, se cumpre a igualdade se e somente se as regras de multiplicação $u_p = u_q u_r$ se tem para todas as permutações cíclicas $(p, q, r)$ de $(1, 2, 3)$. Finalmente, essas regras se cumprem se e somente se $\zeta$ é a parte imaginária canonicamente orientada da subálgebra de quaternios de $\mathbf{O}$. $\square$

**Definição 7.8.** *A 3-forma $\varphi \in \Lambda^3(Im\mathbf{O})^*$, definida pela equação (7.9) chama-se de **calibração associativa** em $Im\mathbf{O}$*

**Definição 7.9.** *Se $\zeta \in G(3,7) \subset \Lambda^3 Im\mathbf{O}$ é a parte imaginária canonicamente orientada de qualquer subálgebra de quaternios de $\mathbf{O}$, então o 3-plano orientado $\zeta$ chama-se de associativo se for calibrado por $\varphi$.*

**Teorema 7.4.** $\langle x, yz\rangle^2 + \dfrac{1}{4}|[x,y,z]|^2 = |x \wedge y \wedge z|^2$ *para todo $x, y, z \in Im\mathbf{O}$.*

*Demonstração.* No lema 7.6 provamos que o produto vetorial triple $x \times y \times z$ tem comprimento $|x \wedge y \wedge z|$. Além disso, no lema 7.8 e na proposição 7.1, mostramos que $x \times y \times z$ tem parte real $\langle x, yz\rangle$, e parte imaginária $\dfrac{1}{2}[x,y,z]$ para $x, y, z$. O Teorema segue imediatamente. $\square$

Este Teorema proporciona una descrição dos 3-planos associativos.

### 7.3.2 A 4-forma de Calibração em $\mathbb{R}^7$

**Lema 7.9.** *A forma $\psi(x,y,z,w) = \langle x, [y,z,w]\rangle$ em $Im\mathbf{O}$ é alternada em $\mathbf{O}$.*

*Demonstração.* Esta forma multilinear em $\mathbf{O}$ é alternada nas últimas três variáveis $y, z, w$ pois o associador é alternado. Além disso, usando as equações (7.1) e (7.2)

$$\begin{aligned}
2\psi(x,x,z,w) &= \langle x, [x,z,w]\rangle \\
&= \langle x, (xz)w\rangle - \langle x, x(zw)\rangle \\
&= \langle x\bar{w}, xz\rangle - |x|^2\langle 1, zw\rangle \\
&= |x|^2(\langle \bar{w}, z\rangle - \langle \bar{w}, z\rangle) = 0,
\end{aligned}$$

donde $\psi$ é alternada em todas as variáveis. $\square$

Consultando a tabula de multiplicação para **O** a forma $\psi$ pode se-expressar em termos dos eixos.

$$\psi = \omega_{5678} - \omega_{5634} - \omega_{5274} - \omega_{5238} + \omega_{3478} + \omega_{2468} + \omega_{2367}. \tag{7.11}$$

O operador estrela de Hodge num espaço vetorial $V$ com produto interno é um operador linear da álgebra exterior de $V$, aplicando $k$-vetores em $(n-k)$-vetores onde $n = dimV$, para $0 \leq k \leq n$. Ele tem a seguinte propriedade, que lhe define completamente: dados dois $k$-vetores $\alpha, \beta$

$$\alpha \wedge (\star\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle u$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $k$-vetores e $u$ é o $n$-vetor unitário preferido.
O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $k$-vetores se estende de $V$ por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = det[\langle \alpha_i, \beta_j \rangle]$$

para todo $k$-vetor decomponível $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ e $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k$. O $n$-vetor unitário $u$ é único salvo o signo. A escolha preferida de $u$ define uma orientação em $V$. Como o operador $* : \Lambda^3\mathbb{R}^7 \to \Lambda^4\mathbb{R}^7$ é uma isometria de espaços euclideanos que envia formas simples em formas simples.
Dada uma base ortonormal $(e_1, ..., e_n)$ ordenada tal que $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, para uma métrica definida positiva, temos que

$$*(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n},$$

onde $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ é uma permutação par de $\{1, 2, ..., n\}$. Destas $\dfrac{n!}{2}$ relações, só $\dbinom{n}{k}$ são independentes. A primeira no ordem lexicográfico usual é

$$*(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k) = e_{k+1} \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

**Proposição 7.2.** $\psi = *\varphi$

*Demonstração.* Basta comparar as fórmulas que expressam $\varphi$ e $\psi$ em termos dos eixos. $\square$

Consequentemente, a desigualdade do co-associador combinada com o fato que $\psi = *\varphi$ prova a seguinte desigualdade do co-associador.

**Teorema 7.5.** *A forma $\psi$ é uma* ***calibração****.*

Definimos o **co-associador** por

$$\frac{1}{2}[x,y,z,w] = -4Alt(\langle y, zw\rangle x) \tag{7.12}$$

$$= -(\langle y, zw\rangle x + \langle z, xw\rangle y + \langle x, yw\rangle z + \langle y, xz\rangle w), \tag{7.13}$$

para todo $x, y, z, w \in Im\mathbf{O}$. Obviamente, $[x, y, z, w]$ é alternada. A 4-foma básica $\psi$ em $Im\mathbf{O}$ se define assim

**Definição 7.10.** *A 4-forma $\psi \in \Lambda^4(Im\mathbf{O})^*$, definida por*

$$\psi(x,y,z,w) \equiv \frac{1}{2}\langle x, [y,z,w]\rangle \text{ para todo } x,y,z,w \in Im\mathbf{O}$$

*chama-se de calibração co-associativa em $Im\mathbf{O}$*

**Definição 7.11.** *Um 4-plano orientado $\zeta \in G(4,7) \subset \Lambda^4 Im\mathbf{O}$ chama-se de co-associativo se é calibrado por $\psi$.*

**Teorema 7.6.** $\frac{1}{4}\langle x, [y,z,w]\rangle^2 + \frac{1}{4}|[x,y,z,w]|^2 = |x \wedge y \wedge z \wedge w|^2$*, para todo $x, y, z, w \in Im\mathbf{O}$.*

*Demonstração.* No lema (7.7) provamos que para $x, y, z, w \in Im\mathbf{O}$, o produto vetorial $x \times y \times z \times w$ tem comprimento $|x \wedge y \wedge z \wedge w|$. Além disso, tem parte real $\frac{1}{2}\langle x, [y, z, w]\rangle$ e parte imaginária $\frac{1}{2}[x, y, z, w]$, pelos lema 7.8 e a proposição 7.1. O Teorema segue imediatamente. □

A continuação, descrevemos os planos coassociativos.

**Corolário 7.1.** *Suponhamos que $\zeta$ é um 4-plano orientado em $Im\mathbf{O}$. Então $\zeta$ ou $-\zeta$ é co-associativo se e somente se $[x, y, z, w] = 0$ para toda base $x, y, z, w$ de $\zeta$.*

O Teorema 7.6 proporciona uma descrição alternativa dos 4-planos co-associativos.

### 7.3.3 A 4-forma de Calibração em $\mathbb{R}^8$

**Lema 7.10.** *A forma $\Phi(x, y, z, w) \equiv \langle x, y \times z \times w\rangle$ é alternada em $\mathbf{O}$.*

*Demonstração.* Como $y \times z \times w$ é alternada em só temos que provar que $\langle x, x \times z \times w\rangle = 0$ para $x, z, w$ ortogonais. Neste caso $x \times z \times w = x(\bar{z}w)$ pela equação (7.2), donde

$$\langle x, x \times z \times w\rangle = \langle x, x(\bar{z}w)\rangle = \langle 1, \bar{z}w\rangle |x|^2 = \langle z, w\rangle |x|^2 = 0$$

como queríamos. □

**Teorema 7.7.** *A forma $\Phi$ é uma* ***calibração****.*

*Demonstração.* Suponhamos que $x, y, z, w$ é uma base ortonormal para $\zeta$. Então $\Phi(\zeta) \equiv \langle x, y \times z \times w\rangle \leq |x||y \times z \times w| = 1$ pela desigualdade de Schwartz, pois $|y \times z \times w| = |y \wedge z \wedge w| = 1$ pelo lema 7.6. □

A 4-forma básica em $\mathbf{O}$ se obtêm do produto vetorial triple.

**Definição 7.12.** *A 4-forma $\Phi \in \Lambda^4 \mathbf{O}^*$ definida por $\Phi(x, y, z, w) \equiv \langle x, y \times z \times w\rangle$, para todo $x, y, z, w \in \mathbf{O}$ se chama* ***calibração de Cayley*** *em $\mathbf{O}$*

**Definição 7.13.** *Um 4-plano orientado $\zeta \in G(4, 8) \subset \Lambda^4 \mathbf{O}$ se chama 4-plano de Cayley se ele é calibrado por $\Phi$*

Então como primeira caracterização de 4-planos de Cayley temos

**Proposição 7.3.** *Suponhamos que $\zeta \in G(4, 8) \subset \Lambda^4 \mathbf{O}$. Então $\zeta$ ou $-\zeta$ é um 4-plano de Cayley se e somente se $y \times z \times w \in \zeta$ para todo $y, z, w \in \zeta$*

*Demonstração.* Somente precisamos considerar o caso no qual $y, z, w$ são ortonormais pois $y \times z \times w$ é alternada. A proposição segue do argumento do Teorema 7.7. □

Da igualdade no Teorema 7.3 podemos obter uma igualdade.

**Teorema 7.8.** *Para todo $x, y, z, w \in \mathbf{O}$,*

$$\Phi(x \wedge y \wedge z \wedge w)^2 + |Im x \times y \times z \times w|^2 = |x \wedge y \wedge z \wedge w|^2.$$

*Demonstração.* No lema 7.7 provamos que $x \times y \times z \times w$ tem comprimento $|x \wedge y \wedge z \wedge w|$ e parte real $\Phi(x, y, z, w)$. O Teorema segue imediatamente. □

**Corolário 7.2.** *Seja $\zeta$ um 4-plano orientado em $\mathbf{O}$. Então $\zeta$ ou $-\zeta$ é um 4-plano de Cayley se e somente se $Im x \times y \times z \times w = 0$ para toda base $x, y, z, w$ para $\zeta$.*

### 7.3.4 Subvariedades Calibradas em $\mathbb{R}^7$ e $\mathbb{R}^8$

**Lema 7.11.** *Dado um* $2$*-plano* $\eta$ *em* $Im\mathbf{O}$*, existe um único* $3$*-plano associativo* $\xi$ *com* $\eta \subset \xi$*.*

*Demonstração.* Escolhamos uma base ortonormal $\{u, v\}$ para $\eta$. Então $u \times v$ é um vetor unitário em $Im\mathbf{O}$ ortogonal a $\eta$. Seja $\xi \cong u \wedge v \wedge u \times v$. Então $\varphi(\xi) = 1$ e portanto $\xi$ é associativo. Finalmente, se $\xi'$ é qualquer 3-plano associativo que contém $\eta$, então $\xi' \cong u \wedge v \wedge w$ para algum vetor unitário $w$ ortogonal a $\eta$. Como $1 = \varphi(\xi') = \langle w, u \cdot v\rangle$, temos $w = u \cdot v = u \times v$ e assim provamos a unicidade. □

**Teorema 7.9.** *Seja* $N$ *uma subvariedade real analítica de dimensão* $2$ *de* $Im\mathbf{O} = \mathbb{R}^7$*. Então existe uma única subvariedade analítica real associativa* $M$ *de* $Im\mathbf{O}$ *que contém* $N$*.*

*Demonstração.* Seja $I$ o ideal gerado pelas formas $\psi_1, ..., \psi_7 \in \Lambda^3(Im\mathbf{O})^*$, obtida tomando as componentes das 3-formas alternadas $[x, y, z]$ em $Im\mathbf{O}$. Pelo Teorema 7.4 sabemos que os elementos integrais de dimensão 3 de $I$ são exatamente os 3-planos associativos, salvo a orientação. Como $I$ não contém formas de grau menor que 3, qualquer plano de dimensão 1 ou 2 é um elemento regular. Pelo lema 7.11 e o Teorema de Cartan Kähler obtemos o resultado. □

Agora consideramos as subvariedades de Cayley.

**Lema 7.12.** *Dado um* $3$*-plano* $\eta$ *em* $\mathbf{O}$*, existe um único* $4$*-plano de Cayley* $\xi$ *tal que* $\eta \subset \xi$*.*

*Demonstração.* O plano $\xi$ está dado por $\xi \cong (x \times y \times z) \wedge x \wedge y \wedge z$ onde $\{x, y, z\}$ é qualquer base ortonormal de $\eta$. O lema é consequência direta da fórmula

$$\Phi(w, x, y, z) = \langle w, x \times y \times z\rangle$$

□

**Teorema 7.10.** *Seja* $N$ *uma subvariedade real analítica de dimensão* $3$ *de* $\mathbf{O}$*. Então existe uma única subvariedade de Cayley real analítica* $M$ *de* $\mathbf{O}$ *que contém* $N$*.*

*Demonstração.* Denotamos por $I$ o ideal gerado pelas formas $\psi_1, ..., \psi_7 \in \Lambda^4\mathbf{O}^*$ que são as componentes da forma alternada com valores vetoriais $Im\ x \times y \times z \times w$ em $\mathbf{O}$. Pelo Teorema 7.3.3 sabemos que um 4-plano é um elemento integral de $I$ se e somente se for um 4-plano de Cayley. Qualquer $k$-plano com $k < 4$ é um elemento integral trivialmente, e todos os elementos integrais são regulares, pelo lema 7.3.4. Usando o Teorema de Cartan Kähler obtemos o resultado. $\square$

**Lema 7.13.** *Se $N$ é a fronteira de uma variedade coassociativa $M$, então o espaço tangente unitário $\eta_x$ de $N$ em cada ponto $x$ deve satisfazer a equação*

$$\varphi(\eta_x) \equiv 0, \tag{7.14}$$

*onde $\varphi$ é a calibração associativa.*

*Demonstração.* Escolhemos uma base ortonormal $x, y, z$ para o espaço tangente a $N$ num ponto $p \in N$. Então pelo lema 7.3.4 o espaço tangente da subvariedade coassociativa $M$ em $p$ é gerado por $x, y, z$ e $x \times y \times z$. Mas $Re\ x \times y \times z = \varphi(x, y, z)$ se anula pois $M \subset Im\ \mathbf{O}$. $\square$

**Teorema 7.11.** *Seja $N$ uma subvariedade real analítica de $Im\mathbf{O}$ que satisfaz* (7.14)*. Então existe uma única subvariedade real analítica e coassociativa $M$ de $Im\mathbf{O}$ que contém $N$.*

*Demonstração.* Denotamos por $\bar{I}$ o ideal gerado por $\varphi \in \Lambda^3(Im\mathbf{O})^*$ e por $\psi_1, ..., \psi_7 \in \Lambda^4(Im\mathbf{O})^*$, as coordenadas de $[x, y, z, w]$ em $Im\mathbf{O}$. Na prova de 7.13 mostramos que $i_\xi^*\varphi = 0$ para todo 4-plano coassociativo $\xi$. Portanto, o Teorema 7.6 implica que os elementos integrais de dimensão 4 de $\bar{I}$ são os 4-planos coassociativos. Obviamente os elementos de dimensão 3 de $\bar{I}$ são os elementos $\eta$ que satisfazem $\varphi(\eta) = 0$. Esses elementos integrais são regulares porque cada $\eta$ está contido num único 4-plano coassociativo. Aplicamos então o Teorema de Cartan Kähler para obter o resultado. $\square$

## 7.4 Relação com os Grupos de Holonomía Riemanniana

Seja $M$ uma variedade $n$-dimensional conexo, $g$ uma métrica Riemanniana em $M$, e $\nabla$ a conexão de Levi-Civita de $g$. Sejam $x, y$ pontos em $M$ junto com um caminho suave $\gamma$. Então o transporte paralelo ao longo de $\gamma$ usando $\nabla$ define uma isometria entre os espaços tangentes $T_xM$, $T_yM$ em $x$ e $y$.

**Definição 7.14.** *O grupo de Holonomia $Hol(g)$ de $g$ é o grupo de isometrias de $T_xM$ gerado pelo transporte paralelo ao redor dos lazos fechados suaves por* *partes basados em $x \in M$. Consideramos $Hol(g)$ como o subgrupo de $O(n)$, definido pela conjugação de elementos de $O(n)$. Então $Hol(g)$ é independente do punto base $x$ em $M$.*

A classificação dos grupos de holonomia para variedades Riemannianas simplesmente conexas que sao irredutíveis (não localmente espaço produto) e não simétricos foi feita por Berger (Ver [2]).

**Teorema 7.12.** *Seja $M$ uma variedade simplesmente conexa, $n$-dimensional, e $g$ uma métrica Riemanniana irredutível e não simétrica. Então*

*(i)* $Hol(g) = SO(n)$

*(ii)* $n = 2m$ *e* $Hol(g) = SU(m)$ *ou* $U(m)$

*(iii)* $n = 4m$ *e* $Hol(g) = Sp(m)$ *ou* $Sp(m)Sp(1)$

*(iv)* $n = 7$ *e* $Hol(g) = G_2$

*(v)* $n = 8$ *e* $Hol(g) = Spin(7)$

Uma variedade com estas condições e grupo de holonomia $SO_n$ resulta ser orientável. Se tem grupo de holonomia $U_n$, resulta ser uma variedade de K*ä*hler, ou seja, uma variedade com três estruturas compatíveis: a estrutura complexa, a estrutura Riemanniana e a estrutura simpléctica. Se o grupo de holonomia é $SU_n$, a variedade resulta ser Calabi-Yau, ou seja, uma variedade de Kähler $n$-dimensional com $n$-forma holomorfa que não se anula em nenhuma parte. Se o grupo de holonomia é $Sp(n)$, a variedade se chama Hyperkähler, ou seja, uma variedade de K*ä*hler com varias estruturas complexas associadas.
O subgrupo de $GL(7, \mathbb{R})$ que preserva a forma $\varphi$ definida na equação (7.9) se chama *Grupo de Lie excepcional* $G_2$. Também preserva a métrica $g = dx_1^2 + \cdots + dx_7^2$, $\star\varphi$ e a orientação em $\mathbb{R}^7$. Ele é um grupo de Lie 14-dimensional compacto, semi-simples e um subgrupo de $SO(7)$. Também pode descrever-se como o grupo de automorfismos dos oct.

O subgrupo de $GL(8, \mathbb{R})$ preserva $\Phi$, onde $\Phi$ é a forma dada por a definição 7.12, é o grupo de holonomia $Spin(7)$. Também preserva a orientação em $\mathbb{R}^8$ e a métrica Euclidiana $g = dx_1^2 + \cdots + dx_8^2$. É um grupo de Lie 21-dimensional, compacto e semi-simples, e subgrupo de $SO(8)$.

# Referências Bibliográficas


[1] Michèle Audin, Ana Cannas da Silva, and Eugene Lerman. *Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems*. Birkhäuser, 2012.

[2] Marcel Berger. Sur les groupes dholonomie homogene des variétésa connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83(279):230, 1955.

[3] Robert L Bryant. Some remarks on the geometry of austere manifolds. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica*, 21(2):133–157, 1991.

[4] Ana Cannas Da Silva and A Cannas Da Salva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 3575. Springer, 2001.

[5] Manfredo Perdigao Do Carmo and J Flaherty Francis. *Riemannian geometry*, volume 115. Birkhäuser Boston, 1992.

[6] Edward Goldstein. Calibrated fibrations. *arXiv preprint math/9911093*, 1999.

[7] Reese Harvey and H Blaine Lawson. Calibrated geometries. *Acta Mathematica*, 148(1):47–157, 1982.

[8] Dominic Joyce et al. Special lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries. *Duke Mathematical Journal*, 115(1):1–51, 2002.

[9] G Khanna, S Mukhopadhyay, R Simon, and N Mukunda. Geometric phases forsu (3) representations and three level quantum systems. *annals of physics*, 253(1):55–82, 1997.

[10] John M Lee. Smooth manifolds. In *Introduction to Smooth Manifolds*, pages 1–29. Springer, 2003.

[11] John M Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.

[12] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.

[13] CB Morrey Jr. Vii. second order elliptic systems of differential equations. *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations.(AM-33)*, 33:101, 2016.

[14] Michael Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry. vol. v. berkeley: Publish or perish. *Inc. XI*, 1979.

[15] John A Walker. *Dynamical Systems and Evolution Equations: Theory and Applications*, volume 20. Springer Science & Business Media, 2013.