



GEOMETRIA DE FOLHEAÇÕES PARTICULARES DE GRAU DOIS EM $\mathbb{P}^2$

Lucas das Dores

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Severino Collier Coutinho

Rio de Janeiro
Janeiro de 2016

GEOMETRIA DE FOLHEAÇÕES PARTICULARES DE GRAU DOIS EM $\mathbb{P}^2$

Lucas das Dores

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Examinada por:

Prof. Severino Collier Coutinho, Doutorado (presidente)

Prof. Nicolas Paul André Puignau, Doutorado

Prof. Viviana Ferrer Cuadrado, Doutorado

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JANEIRO DE 2016

das Dores, Lucas

Geometria de folheações particulares de grau dois em $\mathbb{P}^2$ /Lucas das Dores. – Rio de Janeiro: UFRJ, 2016.

XI, 72 p. 29, 7cm.

Orientador: Severino Collier Coutinho

Dissertação (mestrado) – UFRJ/Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 72.

1. Fluxos. 2. Singularidades. 3. Formas. 4. Órbitas. 5. Folheações. I. Coutinho, Severino Collier. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Genuinamente,
ao estudante,
ao curioso
e a ti.

Agradecimentos

Primeiramente, à Margarida Rosa, minha avó-flor formosa, pelo modelo de amor que sempre foi.

À Denise Silva de Souza das Dores, minha mãe, a quem devo grande parte de minhas virtudes.

Aos amigos, pela força e estímulo e insistência e paciência e os muitos mais atos de carinho dispensados. Em especial, a Daniel Chaves que, além de requisitar expressamente participação nesta seção, prestou grande assistência em minhas atribuições com o sistema Linux.

A meu orientador, Severino Collier Coutinho, pela infinda paciência e dedicação que tomo hoje como qualidades essenciais de um bom educador.

Lucas das Dores

Orientador: Severino Collier Coutinho

Resumo

Seja $\mathcal{F}(2, 2)$ o conjunto de folheações de grau 2 em $\mathbb{P}^2$ identificado com um aberto Zariski em $\mathbb{P}^{14}$. Classificamos, a menos de mudança de coordenadas, todas as folheações deste conjunto contendo apenas uma singularidade. A saber, existem 4 folheações deste tipo. Enquanto três possuem dinâmica bem descrita por integrais primeiras, a quarta foge deste padrão.

Em um segundo momento deduzimos informações geométricas da ação de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ em $\mathcal{F}(2, 2)$ e concluimos que, a menos de automorfismo, existem apenas duas folheações que possuem órbitas com dimensão minimal. Uma delas possuindo uma única singularidade, e portanto dentro de nossa primeira classificação, e a segunda com duas singularidades.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Símbolos	x
1 Geometria em Formas	2
1.1 Multiplicidade e Índice de Interseção	2
1.2 Formas e Campos Afins	4
1.3 Formas e Campos Projetivos	8
1.4 Número de Milnor	12
1.5 Folheações de grau 2 com uma singularidade	14
1.6 Caso Nilpotente	15
1.7 Caso Sela-nó	17
1.8 Caso em que o 1-jato é nulo	20
1.9 Teorema de Classificação	24
2 Interstício Teórico	25
2.1 Grupos algébricos e suas ações	25
2.2 Álgebras de Lie em $\mathbb{P}^2$	28
2.3 Representações de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$	32
2.4 Teorema de Lie	33
2.5 Álgebras de Lie de dimensão 2	35
2.6 Simetrias e Derivadas de Lie	35
3 Órbitas sob a ação de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$	41
3.1 Dimensão das Órbitas	41
3.2 Casos de dimensão minimal em $\mathcal{F}(2, n)$	46
A Planos de Fase Reais	55
B Métodos Computacionais	58
B.1 Proposição 1.7.5	58

B.2	Proposição 1.8.5	60
B.3	Hiperplanos em $\mathbb{P}^{29}$	61
B.4	Integrais Primeiras	62
B.5	Proposição 3.1.2	64
B.6	Proposição 3.2.2	67
Referências Bibliográficas		71

Lista de Figuras

A.1	$\mathcal{F}_1$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$	55
A.2	$\mathcal{F}_2$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$	56
A.3	$\mathcal{F}_3$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$	56
A.4	$\mathcal{F}_4$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$	56
A.5	$\mathcal{F}_5$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$	57
A.6	$\mathcal{F}_5$ na carta afim $\mathbb{A}_x^2$	57

Lista de Símbolos

C_f	Curva em $\mathbb{P}^2$ gerada pelo anulamento de f , p. 2
$m_p(f)$	Multiplicidade do ponto p na curva C_f , p. 2
$\mathbb{C}[f]$	Anel de coordenadas da curva C_f , p. 2
G	Grupo abstrato ou grupo algébrico, p. 25
$L_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}$	Derivada de Lie de $\mathcal{Y}$ em relação a $\mathcal{X}$, p. 35
$L_{\mathcal{X}}\omega$	Derivada de Lie da forma ω em relação ao campo $\mathcal{X}$, p. 36
$M_n(\mathbb{C})$	Matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$, p. 25
TX	Fibrado tangente da variedade X , p. 5
T_pX	Espaço tangente de X em p , p. 5
$\mathbb{A}_x^2, \mathbb{A}_y^2, \mathbb{A}_z^2$	Cartas afins de $\mathbb{P}^2$, p. 13
$\mathcal{F}$	Folheação de codimensão 1 e grau n , p. 12
$\text{Sing}(\mathcal{F})$	Conjunto de singularidades de $\mathcal{F}$, p. 12
$\chi(\mathbb{P}^2)$	Subálgebra de Lie dos campos representados por matrizes de traço nulo em $\mathbb{P}^2$, p. 31
$\exp(t\mathcal{X})p$	Exponencial (fluxo) de um campo X em p , p. 6
$(C_f \cdot C_g)_p$	Índice de interseção das curvas C_f e C_g no ponto p , p. 3
$\iota_{\mathcal{X}}(\omega), \omega(\mathcal{X})$	Produto interior do campo $\mathcal{X}$ com a forma ω , p. 7, 9
$\Psi(t, p), \Psi_t(p)$	Fluxo de um campo por um ponto p , p. 6
$\mathcal{C}_{\omega}$	Cone tangente relativo a forma ω , p. 20
$\mathcal{O}_p(f)$	Anel local da curva C_f no ponto p , p. 3

$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie de um grupo algébrico G , p. 29
$A_n(\mathbb{C})$	Grupo de transformações afins de n -espaços, p. 26
$GL_n(\mathbb{C})$	Grupo linear geral sobre $\mathbb{C}$, p. 25
$PGL_{n+1}(\mathbb{C})$	Grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^n$, p. 26
$SL_n(\mathbb{C})$	Grupo linear especial sobre $\mathbb{C}$, p. 26
$\text{Vec}(X)$	Álgebra de Lie dos campos de vetores sobre X , p. 28
$\text{iso}(\mathcal{F})$	Grupo de isotropia de $\mathcal{F}$, p. 41
$\mathcal{F}(2, n)$	Conjunto de folheações de codimensão 1 e grau n em $\mathbb{P}^2$, p. 41
$\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$	Órbita de $\mathcal{F}$ em relação a ação de $PGL_3(\mathbb{C})$, p. 41
ρ	Representação de um grupo algébrico ou álgebra de lie, p. 32
$\underline{\mathfrak{m}}_p(f)$	Ideal maximal de $\mathcal{O}_p(f)$, p. 3
$GL(V)$	Grupo linear do espaço vetorial V , p. 26
$\mu(\mathcal{F}, p)$	Número de Milnor da folheação $\mathcal{F}$ no ponto p , p. 13

Introdução

Usamos como referência principal o trabalho de Cervau, Déserti, Garba Belko e Meziani [1] no intuito de explorar seus resultados desenvolvendo uma teoria mínima para sua compreensão, seja através de alguns resultados da literatura ou reinterpretações dos mesmos.

O Capítulo 1 inicia-se com resultados essenciais da teoria de interseção de curvas algébricas, focando no conceito de índice de interseção e Teorema de Bézout, como apresentado no trabalho de Fulton [3].

Apresentamos, também, a definição de folheação e a relação entre folheações e formas. Dotados estes conceitos já é possível demonstrar um dos principais resultados do trabalho, a saber a classificação de folheações de grau dois em $\mathbb{P}^2$ com uma única singularidade, a menos de automorfismo. Uma folheação deste tipo é representada por uma das seguintes formas em carta afim:

(a) $\omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx)$

(b) $\omega_2 = x^2 dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$

(c) $\omega_3 = xy dx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$

(d) $\omega_4 = (x + y^2 - x^2 y)dy + x(x + y^2)dx.$

Esta classificação dá sequência às já conhecidas classificações de folheações de grau 0 e 1 em $\mathbb{P}^2$ apresentadas por Jouanolou [2]. Para estes casos é possível associar canonicamente uma matriz 3×3 a cada folheação e, assim, é possível criar uma especificação das mesmas através da forma canônica de Jordan da matriz associada.

Uma vez estabelecido este resultado, nossa discussão perpassa proposições elementares sobre grupos algébricos e álgebras de Lie no Capítulo 2, com o intuito de nos munir de teoria essencial usada no Capítulo 3, no qual analisamos as órbitas de uma folheação genérica $\mathcal{F}$ sob a ação do grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Descobrimos, então, que a dimensão minimal dessas órbitas é 6 e é atingida na órbita da folheação $\mathcal{F}_1$ (representada por ω_1) e a outra na órbita da folheação com 2 singularidades representada pela forma $\omega_5 = x^2 dy + y^2(xdy - ydx)$.

Capítulo 1

Geometria em Formas

1.1 Multiplicidade e Índice de Interseção

Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio não constante, dizemos que o anulamento de f , $C_f := \{f = 0\}$, é uma **curva algébrica** em $\mathbb{A}^2$. Se f é irredutível C_f é uma variedade. Seja $p = (p_1, p_2) \in C_f$, dizemos que p é **ponto simples de C_f** se pelo menos uma das derivadas f_x ou f_y é não nula em p . Um ponto que não é simples será chamado de **múltiplo** ou **singular** e uma curva que só possua pontos simples será chamada **curva não singular**.

Considere o ponto $p = (0, 0)$ em C_f , podemos escrever $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n$ em que f_i é um polinômio homogêneo não nulo de grau i . Definimos, então, o número m como a **multiplicidade de C_f em $p = (0, 0)$** e denotamos m por $m_p(f)$. Note que $p \in C_f$ se, e somente se, $m_p(f) > 0$ e que p é simples se, e somente se, $m_p(f) = 1$, p é duplo se $m = 2$, triplo se $m = 3$ e segue nomenclaturas similares para $m \geq 3$.

Podemos escrever f_m como produto de polinômios lineares, em outras palavras $f_m = \prod r_i^{e_i}$. As curvas C_{r_i} são chamadas **retas tangentes a C_f em $p = (0, 0)$** e e_i é chamada **multiplicidade da tangente**. A reta C_{r_i} é uma tangente simples (resp. dupla, tripla, etc.) se $e_i = 1$ (resp. 2, 3, etc.). Considerando $f = \prod g_i^{s_i}$ a fatoração em componentes irredutíveis de f temos $m_p(f) = \sum s_i m_p(g_i)$.

Para estender essas definições para um ponto $p = (p_1, p_2) \neq (0, 0)$, definimos

$$m_p(f(x, y)) = m_0(f(x + p_1, y + p_2)).$$

Considere, agora, f irredutível e $p \in C_f$. Podemos compreender a multiplicidade de p em C_f através de seu anel local. Lembramos que o anel de coordenadas de C_f é dado por $\mathbb{C}[f] = \mathbb{C}[x, y]/(f)$ e o anel local de um ponto p na variedade C_f é o conjunto de funções racionais em C_f regulares no ponto p , i.e.

$\{g/h \mid g, h \in \mathbb{C}[f], h(p) \neq 0\}$. Denotamos este último anel por $\mathcal{O}_p(C_f)$ ou, mais simplesmente, $\mathcal{O}_p(f)$ e seu ideal maximal por $\underline{m}_p(f) := \{g \in \mathcal{O}_p(f) \mid g(p) = 0\}$.

Munidos das notações anteriores, podemos definir o **índice de interseção** de duas curvas C_f e C_g num ponto p , denotado $(C_f \cdot C_g)_p$. Intuitivamente este índice mede o “número de vezes” que as curvas se intersectam neste ponto. Listaremos brevemente as propriedades que desejamos deste índice, estas nos darão um processo algorítmico para determiná-lo.

Dizemos que C_f e C_g se **intersectam propriamente** em p se não possuem componente comum que passa por p e dizemos que se **intersectam transversalmente** se p é simples em ambas as curvas com tangentes distintas em cada uma. Enumeramos:

- P1. $(C_f \cdot C_g)_p$ é um inteiro não negativo se C_f e C_g possuem interseção própria em p e $(C_f \cdot C_g)_p = \infty$ caso contrário.
- P2. $(C_f \cdot C_g)_p = 0$ se, e somente se, $p \notin C_f \cap C_g$. Isto implica que $(C_f \cdot C_g)_p$ depende apenas dos componentes de f e g que se anulam em p .
- P3. Se T é uma mudança de coordenadas em $\mathbb{A}^2$, então $(C_f \cdot C_g)_p = (T(C_f) \cdot T(C_g))_{T(p)}$.
- P4. $(C_f \cdot C_g)_p = (C_g \cdot C_f)_p$.
- P5. $(C_f \cdot C_g)_p \geq m_p(f)m_p(g)$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, C_f e C_g não possuem tangentes comuns em p . Em particular, se as curvas se intersectam transversalmente $(C_f \cdot C_g)_p = 1$.
- P6. Se $f = \prod_i f_i^{r_i}$ e $g = \prod_j g_j^{s_j}$, então $(C_f \cdot C_g)_p = \sum_{i,j} r_i s_j (C_{f_i} \cdot C_{g_j})_p$ em outras palavras, se as curvas C_f e C_g são uniões de curvas, então seu índice em p é a soma dos índices em cada curva que as compõem em p , contados com multiplicidades.
- P7. Para todo $h \in \mathbb{C}[x, y]$ temos $(C_f \cdot C_{g+hf})_p = (C_f \cdot C_g)_p$. Em particular, se f é irredutível, o índice depende apenas de f e da imagem de g em $\mathbb{C}[x, y]/(f)$.

A existência e unicidade de tal número é dado pelo teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada na seção 3.3 de [3].

Teorema 1.1.1. *Existe um único número $(C_f \cdot C_g)_p$ definido para todas as curvas C_f e C_g e todos os pontos $p \in \mathbb{A}^2$, satisfazendo as propriedades acima, que é dado pela fórmula*

$$(C_f \cdot C_g)_p = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)}{(f, g)_{\mathfrak{m}_p}} \right).$$

Podemos estender a noção de número de interseção para curvas projetivas em $\mathbb{P}^2$, lembramos que uma curva projetiva C_f é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^2$ definida pelo anulamento de uma classe de equivalência de um polinômio homogêneo $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$, em que f e g são equivalentes se existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $f = \lambda g$.

As notações usadas para curvas afins se mantêm para curvas projetivas. Como $\mathbb{P}^2$ é coberto pelos abertos principais $\{x \neq 0\}$, $\{y \neq 0\}$ e $\{z \neq 0\}$ definimos a multiplicidade de um ponto p da seguinte forma $m_p(f) := m_p(f_*)$ em que f_* é a desomogeneização de f em um aberto principal ao qual p pertence. Desta forma se $p \in \mathbb{P}^2$ definimos o número de interseção de duas curvas projetivas por $(C_f \cdot C_g)_p := (C_{f_*} \cdot C_{g_*})_{p_*}$ em que f_*, g_* são as desomogeneizações em um certo aberto principal de f e g e p_* é o ponto que corresponde a p neste aberto. Note que se f for irredutível, então $\mathcal{O}_p(C_f)$ é isomorfo a $\mathcal{O}_{p_*}(C_{f_*})$, de modo que o índice de interseção independe do aberto considerado.

Visto isso, enunciamos um conhecido teorema que será útil na próxima seção e cuja demonstração pode ser encontrada na seção 5.3 de [3].

Teorema 1.1.2. (*Teorema de Bézout*) *Sejam C_f e C_g curvas projetivas em $\mathbb{P}^2$ de graus m e n respectivamente e $S = C_f \cap C_g$. Se f e g não possuem componente comum, então*

$$\sum_{p \in S} (C_f \cdot C_g)_p = mn.$$

1.2 Formas e Campos Afins

Introduzimos, agora, a noção de campo vetorial algébrico em $\mathbb{A}^n$ com coordenadas $x_1, \dots, x_n$, fundamental para o resto do texto.

Começamos relembando uma das definições de espaço tangente de uma variedade. Seja X a variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$, definida pelo ideal I do anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e seja R uma $\mathbb{C}$ -álgebra. Definimos $X(R) = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I\}$. Em particular, $X(\mathbb{C}) = X$. Note que, se existe um homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $R \rightarrow S$ isto define uma aplicação $X(R) \rightarrow X(S)$. Também definimos $\mathbb{C}[\varepsilon] = \mathbb{C}[t]/(t^2) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\varepsilon$, um $\mathbb{C}$ -módulo finitamente gerado com multiplicação dada por

$$(a_1 + a_2\varepsilon)(b_1 + b_2\varepsilon) = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon.$$

Note que existe um homomorfismo natural de $\mathbb{C}$ -álgebras $\mathbb{C}[\varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$ que leva ε em 0.

Definição 1.2.1. *Seja p um ponto na variedade X sobre $\mathbb{C}$. O **espaço tangente** de X em p é definido por*

$$T_p X = \{p' \in X(\mathbb{C}[\varepsilon]) \mid p' \mapsto p \text{ por } X(\mathbb{C}[\varepsilon]) \rightarrow X\}$$

Lembramos também que a união disjunta dos espaços tangentes $TX = \bigsqcup_{x \in X} T_x X$ é um **fibrado tangente** de X , munido de uma projeção natural $\pi : TX \rightarrow X$ que leva cada elemento de um espaço tangente $T_x X$ no ponto x . Uma **seção** $\mathcal{X} : X \rightarrow TX$ de TX é uma aplicação que satisfaz $\pi \circ \mathcal{X} = \text{Id}_X$.

Para cada ponto p de X , seu espaço tangente $T_p \mathbb{A}^n$ é isomorfo a $D_p(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$, o espaço das derivações de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ em p , cuja base é $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, também denotada de maneira mais simples por $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}\}$. Para uma discussão detalhada sobre esse isomorfismo veja Lee [4], Cap. 3, Proposição 3.2, pág. 64. Com esta observação uma seção do fibrado tangente é um campo vetorial sobre a variedade X . Se $\mathcal{X} = A_1 \partial_{x_1} + \dots + A_n \partial_{x_n}$, a ação de $\mathcal{X}$ em um polinômio f de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é dada por:

$$\mathcal{X}(f) = A_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Definição 1.2.2. *Sejam X uma variedade e $\mathbb{C}[X]$ seu anel de coordenadas. Um **campo de vetores algébrico** de uma variedade X é uma seção contínua $\mathcal{X} : X \rightarrow TX$ tal que $\mathcal{X}(f) \in \mathbb{C}[X]$ para todo $f \in \mathbb{C}[X]$. O espaço de todos os campos de vetores algébricos sobre a variedade X é denotado $\text{Vec}(X)$.*

Considere, agora, $\varphi : X \rightarrow Y$ um morfismo entre variedades e p um ponto em X . Através deste morfismo podemos definir um morfismo entre os espaços tangentes $\varphi_* : T_p X \rightarrow T_{\varphi(p)} Y$ por $\varphi_*(\mathcal{X})(f) = \mathcal{X}(f \circ \varphi)$, $\forall f \in \mathbb{C}[Y]$, chamado **pushforward** associado a φ . Note que se φ é morfismo no sentido algébrico então $f \circ \varphi \in \mathbb{C}[X]$ também o é. Logo, a definição faz sentido.

Note, também, que se $\varphi_1 : X \rightarrow Y$ e $\varphi_2 : Y \rightarrow Z$ são morfismos e se a aplicação $\varphi_2 \circ \varphi_1 : X \rightarrow Z$ está bem definida como morfismo, então, segue da definição que $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* = (\varphi_2)_* \circ (\varphi_1)_*$. Logo, se $\varphi : X \rightarrow Y$ for isomorfismo então $T_p X \simeq T_{\varphi(p)} Y$. Com efeito, $\text{id} = \varphi \circ \varphi^{-1}$, portanto, $\text{id} = \text{id}_* = \varphi_* \circ (\varphi^{-1})_*$. Concluimos que $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$.

Voltamos agora nossa atenção a campos em $\mathbb{A}^2$ e lembramos ainda que um campo $\mathcal{X} = A\partial_x + B\partial_y$ pode ser associado ao sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = B(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Definição 1.2.3. Uma **curva integral** de um campo $\mathcal{X}$ é uma curva parametrizada $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ que é uma solução para o sistema (1.1) i.e. $\dot{\alpha}_1 = A \circ \alpha$ e $\dot{\alpha}_2 = B \circ \alpha$, em que a notação $\dot{\alpha}$ representa a derivada em relação a t .

Portanto, dado um campo $\mathcal{X}$ e um ponto p de $\mathbb{A}^2$, segue do Teorema de Existência e Unicidade de sistemas de EDO's que existe uma única curva integral maximal $\alpha(t)$ tal que $\alpha(0) = p$. Aqui, maximal se refere a não estar estritamente contida em nenhuma outra curva integral.

Denotamos $\Psi(t, p)$ ou $\Psi_t(p)$ a curva integral maximal com respeito a $\mathcal{X}$ que passa por p . Dizemos que Ψ é o **fluxo** gerado por $\mathcal{X}$. Logo, para cada t fixado em um disco U_x contendo 0, segue-se que $\Psi_t(p)$ é um ponto na curva integral passando por p . Também é comum se referir ao fluxo gerado por um campo (isto é, o conjunto de soluções do sistema de EDO's) como a **exponencial** do campo. Utilizaremos também a notação $\exp(t\mathcal{X})p = \Psi_t(p)$. Dessa definição e notação deduzimos três propriedades básicas:

1. $\Psi_{t_1}(\Psi_{t_2}(p)) = \Psi_{t_1+t_2}(p)$, $p \in \mathbb{A}^2$ sempre que ambos os lados estão definidos, ou equivalentemente, $\exp(t_1\mathcal{X})\exp(t_2\mathcal{X})p = \exp((t_1 + t_2)\mathcal{X})p$.
2. $\Psi_0(p) = p$ ou $\exp(0\mathcal{X})p = p$.
3. $\frac{d}{dt}(\Psi_t(p)) = \mathcal{X}|_{\Psi_t(p)} \forall t$ em que $\Psi_t(p)$ está definido
ou $\frac{d}{dt}[\exp(t\mathcal{X})]p = \mathcal{X}|_{\exp(t\mathcal{X})p}$.

Exemplo 1.2.4. Considere $\mathbb{A}^1$, p um ponto e o campo $\mathcal{X} = \partial_x$, então $\exp(t\partial_x)p = t + p$.

Exemplo 1.2.5. Se $\mathcal{Z}_R = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}$ é o campo radial em $\mathbb{A}^n$ então $\exp(t\mathcal{Z}_R)p = e^t p$.

Enunciamos um resultado que nos fornece informação sobre a natureza local de sistemas do tipo (1.1) sobre os complexos. Mais geralmente, dois sistemas $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ e $\dot{\mathbf{x}}' = f'(t', \mathbf{x}')$, com $(t, \mathbf{x}) \in U$, $(t', \mathbf{x}') \in U'$ e $U, U' \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ são ditos **conjugados** pelo bi-holomorfismo $H : U \rightarrow U'$ (a **conjugação**) se H envia uma curva integral do primeiro sistema a uma curva integral do segundo. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [5], pág. 8.

Teorema 1.2.6. (Vizinhança Tubular) Dado um sistema holomorfo $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$, com $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, e um ponto, existe uma conjugação bi-holomorfa

$$H : (t, \mathbf{x}) \mapsto (t, h(t, \mathbf{x})),$$

definida numa vizinhança suficientemente pequena do ponto, entre o sistema original e o sistema $\dot{\mathbf{x}}' = 0$.

Exploraremos, agora, a relação entre campos e formas polinomiais em $\mathbb{C}^2$. Primeiramente nos restringiremos ao caso de retas em $\mathbb{C}^2$. Seja L uma reta em $\mathbb{C}^2$ na direção de um vetor w_0 e seja v_0 um vetor ortogonal a w_0 . Nestas condições, se $\omega(w)$ denota o produto interno $v_0 \cdot w$, então podemos descrever a reta L na forma

$$L = \{w \in \mathbb{C}^2 \mid w \perp v_0\} = \{w \in \mathbb{C}^2 \mid \omega(w) = 0\}.$$

Note que, pela linearidade do produto interno, se $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^2$, então $w = a_1 e_1 + a_2 e_2$ com a_1, a_2 coeficientes complexos. Além disso, $\omega(w) = a_1 \omega(e_1) + a_2 \omega(e_2)$, donde o produto interno fica unicamente determinado pela sua ação na base. Definimos aplicações auxiliares dx e dy que capturam, respectivamente, a primeira e segunda coordenada de um vetor w . Isto é, $dx(w) = a_1$ e $dy(w) = a_2$, de modo que podemos escrever $\omega = \omega(e_1)dx + \omega(e_2)dy$.

Voltamos a considerar campos algébricos em $\mathbb{C}^2$. No espírito da discussão acima, procuramos objetos duais a estes campos. Veremos que 1-formas polinomiais são objetos adequados para este tipo de situação.

Definição 1.2.7. *Uma 1-forma polinomial ω é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (p, w) &\longmapsto \omega(p, w) \end{aligned}$$

que satisfaz: $\omega(p, \cdot)$ é linear (na 2^{a} coordenada) e $\omega(\cdot, w)$ é polinomial (na 1^{a} coordenada).

Ao longo do texto vamos nos referir a 1-formas polinomiais apenas como 1-formas. Como na discussão anterior, a linearidade de $\omega(p, \cdot)$ implica que, se $w = a_1 e_1 + a_2 e_2$, então $\omega(p, w) = a_1 \omega(p, e_1) + a_2 \omega(p, e_2)$ e definimos da mesma maneira as aplicações dx e dy , de modo que podemos escrever $\omega(p, \cdot) = \omega(p, e_1)dx + \omega(p, e_2)dy$. Por fim, denotando $b_1(p) = \omega(p, e_1)$ e $b_2(p) = \omega(p, e_2)$, a 1-forma ω pode ser escrita como

$$\omega(p, v) = b_1(p)dx(v) + b_2(p)dy(v) \text{ ou } \omega = b_1 dx + b_2 dy.$$

Sejam $\omega = b_1 dx + b_2 dy$ uma 1-forma e $\mathcal{X} = \alpha_1 \partial_x + \alpha_2 \partial_y$ um campo em $\mathbb{C}^2$. Definimos o **produto interior** de ω por $\mathcal{X}$ como

$$\iota_{\mathcal{X}} \omega = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2.$$

Diremos que ω é a **forma dual** do campo $\mathcal{X}$ se $\iota_{\mathcal{X}}\omega = 0$. Quando não houver risco de ambiguidade na notação utilizaremos $\iota_{\mathcal{X}}\omega = \omega(\mathcal{X})$. Note que da definição de dx , temos que $dx(\mathcal{X}) = dx(\alpha_1\partial_x + \alpha_2\partial_y)$. Como a base $\{\partial_x, \partial_y\}$ se identifica de forma natural com a base $\{e_1, e_2\}$ do espaço tangente, então $dx(\mathcal{X}) = \alpha_1$. Deste modo, vemos que o produto interior é linear, como esperado. Além disso, valem as igualdades $dx(\partial_x) = 1$, $dx(\partial_y) = 0$ e igualdades similares para dy .

Obtemos, portanto, uma maneira de relacionar campos e formas. Se $\mathcal{X} = -Q(x, y)\partial_x + P(x, y)\partial_y$ é um campo algébrico, sua forma dual é dada por $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

1.3 Formas e Campos Projetivos

Vimos, até aqui, a relação entre campos e formas em $\mathbb{A}^2$. Voltamos nossa atenção, agora, para formas em $\mathbb{P}^2$ e como relacioná-las a campos para introduzirmos, por fim, nossos objetos de estudo. Associaremos a cada ponto $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}^2$ uma reta que passa por q , dada por

$$P(q)x + Q(q)y + R(q)z = 0,$$

em que $P(q), Q(q), R(q) \in \mathbb{C}$. Observe que, como estamos supondo que q é um dos pontos da reta, devemos ter que

$$P(q)q_0 + Q(q)q_1 + R(q)q_2 = 0.$$

Portanto, se $P, Q, R \in \mathbb{C}[x, y, z]$ são polinômios homogêneos de mesmo grau que satisfazem

$$xP + yQ + zR = 0, \tag{1.2}$$

então a aplicação

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (q_0 : q_1 : q_2) \times (p_0 : p_1 : p_2) &\longmapsto P(q)p_0 + Q(q)p_1 + R(q)p_2 \end{aligned}$$

define um campo de retas em $\mathbb{P}^2$, em que a reta que passa por $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ é dada pelo anulamento de

$$\Omega_q = P(q)x + Q(q)y + R(q)z.$$

Usando a linguagem de formas diferenciais introduzida anteriormente, podemos associar ao campo de retas Ω a forma

$$\Omega = Pdx + Qdy + Rdz.$$

de modo que a reta por $q \in \mathbb{P}^2$ corresponde ao núcleo da transformação linear

$$P(q)dx + Q(q)dy + R(q)dz.$$

De agora em diante identificaremos o campo de retas Ω com a forma $Pdx + Qdy + Rdz$.

Visto que estamos trabalhando com o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ duas formas Ω e Ω' definem a mesma reta pelo ponto p se $\Omega(p) = \lambda\Omega'(p)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Além disto, em muitas situações será útil passar às cartas afins que denotaremos $\mathbb{A}_x, \mathbb{A}_y, \mathbb{A}_z$ para $\{x \neq 0\}, \{y \neq 0\}, \{z \neq 0\}$ e também fazer o processo inverso. Para que não haja dúvidas sobre este tipo de questão, descreveremos brevemente o processo de afinização e homogeneização de formas.

Considere uma forma $\omega = Pdx + Qdy$ em $\mathbb{A}_z$ e seja $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. A forma homogeneizada de ω é dada por

$$\begin{aligned}\Omega = z^k (\varphi^* \omega) &= z^k \left(P \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) d \left(\frac{x}{z} \right) + Q \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) d \left(\frac{y}{z} \right) \right) \\ &= z^k \left(P \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) \left(\frac{1}{z} dx - \frac{x}{z^2} dz \right) + Q \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) \left(\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz \right) \right),\end{aligned}$$

com k sendo o menor inteiro tal que Ω seja uma 1-forma polinomial.

Por outro lado, se $\Omega = Pdx + Qdy + Rdz$ é uma 1-forma homogênea, a forma

$$\omega = P(x, y, 1)dx + Q(x, y, 1)dy + R(x, y, 1)d(1) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

é a forma afinizada de Ω em $\mathbb{A}_z$.

Desejamos definir o campo de retas em $\mathbb{P}^2$ associado a uma forma ω de maneira explícita. Antes disto se faz necessário apresentar uma generalização do produto interior para d -formas em n variáveis.

Sejam $\omega = w_1 dx_1 + \dots + w_n dx_n$ uma 1-forma polinomial e $\mathcal{X} = \alpha_1 \partial_{x_1} + \dots + \alpha_n \partial_{x_n}$ campo em $\mathbb{C}^{n+1}$. Definimos o **produto interior** de ω por $\mathcal{X}$ similarmente ao caso anterior como

$$\iota_{\mathcal{X}} \omega = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n.$$

Um caso particular interessante se dá quando $\omega = df$, em que f é um polinômio em $n + 1$ variáveis. Neste caso

$$\iota_{\mathcal{X}} df = \alpha_1 f_{x_1} + \dots + \alpha_n f_{x_n} = \mathcal{X}(f),$$

em que $f_{x_i} = \partial f / \partial x_i$. Seja Λ^d o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial das d -formas em n variáveis. Generalizamos a construção do produto interior para d -formas da seguinte maneira: se $\omega_1, \dots, \omega_d$ são 1-formas então definimos $\iota_{\mathcal{X}} : \Lambda^d \longrightarrow \Lambda^{d-1}$ por

$$\iota_{\mathcal{X}}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_d) = \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \omega_1 \wedge \dots \wedge \iota_{\mathcal{X}} \omega_j \wedge \dots \wedge \omega_d. \quad (1.3)$$

Voltamos nossa atenção ao caso de três variáveis, em que obtemos Λ^d definido para $0 \leq d \leq 3$ em que $\Lambda^0 = \mathbb{C}[x, y, z]$ é o espaço dos polinômios em três variáveis. Além disso, neste momento, restringiremos o produto interior ao campo $\mathcal{Z}_R = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ (o campo radial) e denotaremos $\iota_{\mathcal{Z}_R} = \iota$.

Neste caso, se $\omega = \sum_{\mathbf{j}} P_{\mathbf{j}} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_d}$, em que $P_{\mathbf{j}}$ são polinômios homogêneos de mesmo grau, então

$$\iota(\omega) = \sum_i \left((-1)^{j_i+1} x_{j_i} \sum_{\mathbf{j}} P_{\mathbf{j}} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{i-1}} \wedge dx_{j_{i+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_d} \right).$$

Definição 1.3.1. *A sequência*

$$0 \longrightarrow \Lambda^3 \xrightarrow{\iota} \Lambda^2 \xrightarrow{\iota} \Lambda^1 \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}[x, y, z]$$

é chamada Sequência de Koszul.

Proposição 1.3.2. *A sequência de Koszul é exata.*

Dem. Considere $\omega = Pdx \wedge dy + Qdx \wedge dz + Rdy \wedge dz \in \Lambda^2$, em que P, Q, R são polinômios homogêneos de grau N . Provaremos que $\iota^2(\omega) = 0$. Com efeito

$$\iota(\omega) = P(xdy - ydx) + Q(xdz - zdx) + R(ydz - zdy),$$

de modo que

$$\iota^2(\omega) = P(xy - yx) + Q(xz - zx) + R(yz - zy) = 0.$$

Logo, $\text{Im}(\iota) \subset \ker(\iota)$. Reciprocamente se $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ pertence a $\ker(\iota) \subset \Lambda^1$, então P, Q, R satisfazem

$$Px + Qy + Rz = 0. \tag{1.4}$$

Consequentemente satisfazem as relações

$$\begin{aligned} P + P_x x + Q_x y + R_x z &= 0, \\ Q + P_y x + Q_y y + R_y z &= 0, \\ R + P_z x + Q_z y + R_z z &= 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

obtidas derivando (1.4). Afirmamos que $\iota \left(d \left(\frac{\omega}{N+1} \right) \right) = \omega$. Com efeito, note que

$$d\omega = (Q_x - P_y)dx \wedge dy + (R_x - P_z)dx \wedge dz + (R_y - Q_z)dy \wedge dz$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\iota(d\omega) &= -(R_x - P_z)z - (Q_x - P_y)y dx + ((Q_x - P_y)x - (R_y - Q_z)z) dy \\
&\quad + ((R_x - P_z)x + (R_y - Q_z)y) dz \\
&= (P_y y + P_z z - (R_x z + Q_x y)) dx + (Q_x x + Q_z z - (P_y x + R_y z)) dy \\
&\quad + (R_x x + R_y y - (P_z x + Q_z y)) dz
\end{aligned}$$

Substituindo as relações (1.5) nesta equação e lembrando que se P é polinômio homogêneo de grau N nas variáveis x_i , então $\sum_i x_i P_{x_i} = NP$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\iota(d\omega) &= (P_x x + P_y y + P_z z + P) dx + (Q_x x + Q_y y + Q_z z + Q) dy \\
&\quad + (R_x x + R_y y + R_z z + R) dz = (N + 1)\omega.
\end{aligned}$$

Portanto $\ker(\iota) \subset \text{Im}(\iota)$.

O argumento é similar para $\omega = A dx \wedge dy \wedge dz \in \Lambda^3$. Concluimos portanto que a sequência de Koszul é exata. $\square$

Note que se $\Omega = P dx + Q dy + R dz$ é uma 1-forma polinomial com P, Q, R homogêneos de grau $n + 1$ que satisfaz a identidade de Euler $Px + Qy + Rz = 0$, então $\Omega \in \ker(\iota) \subset \Lambda^1$. Visto que a sequência de Koszul é exata, concluimos que a forma pode ser escrita como

$$\Omega = A(z dx - x dz) + B(y dz - z dy) + \phi(x dy - y dx),$$

ou

$$\Omega = (Az - \phi y) dx + (\phi x - Bz) dy + (By - Ax) dz, \quad (1.6)$$

em que A, B, ϕ são polinômios homogêneos de grau n que definem a forma Ω .

Note que é possível escolher ϕ como sendo um polinômio apenas nas variáveis x e y . De fato, podemos escrever

$$\phi = \phi_0 + z\phi_1$$

em que $\phi_0 = \phi_0(x, y)$ e $\phi_1 = \phi_1(x, y, z)$ são homogêneos de graus n e $n - 1$, respectivamente. Logo

$$\begin{aligned}
Az - \phi y &= (A - \phi_1 y)z - \phi_0 y \text{ e} \\
\phi x - Bz &= -(B - \phi_1 x)z + \phi_0 x.
\end{aligned}$$

Logo, se tomarmos

$$\hat{A} = (A - \phi_1 y) \text{ e } \hat{B} = (B - \phi_1 x)$$

teremos que

$$\Omega = (\hat{A}z - \phi_0 y)dx + (\phi_0 x - \hat{B}z)dy + (\hat{B}y - \hat{A}x)dz.$$

Assim podemos supor $\phi \in \mathbb{C}[x, y]$. Neste caso, vemos que o campo $B\partial_x + A\partial_y + \phi\partial_z$, é um campo vetorial em $\mathbb{C}^3$ dual a Ω , i.e., o campo pertence ao núcleo de Ω , que, por sua vez, induz um campo de direções em $\mathbb{P}^2$. Suponha que (A', B', ϕ') fosse uma tripla que definisse Ω da mesma forma que a anterior. Disto obteríamos as relações:

$$(A' - A)z - (\phi' - \phi)y = (\phi' - \phi)x - (B' - B)z = (B' - B)y - (A' - A)x = 0$$

donde segue que existe um polinômio homogêneo h de grau $n - 2$ tal que

$$\begin{aligned} B' &= B + hx; \\ A' &= A + hy; \\ \phi' &= \phi + hz. \end{aligned}$$

Reciprocamente, uma família (A', B', ϕ') do tipo acima define a mesma forma que (A, B, ϕ) . Portanto, o campo $\mathcal{X}' = B'\partial_x + A'\partial_y + \phi'\partial_z + h\mathcal{Z}_R$ é equivalente ao campo original $\mathcal{X}$. Resumimos a discussão no seguinte resultado:

Proposição 1.3.3. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ campos de vetores em $\mathbb{C}^3$. Então $\mathcal{X}$ define o mesmo campo de direções que $\mathcal{Y}$ em $\mathbb{P}^2$ se, e somente se, $\mathcal{Y} = \mathcal{X} + h\mathcal{Z}_R$, com h polinômio e $\mathcal{Z}_R = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$.*

Definição 1.3.4. *Uma **folheação** $\mathcal{F}$ de codimensão 1 e grau n sobre $\mathbb{P}^2$ é o campo de retas dual definido por uma 1-forma*

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

em que P, Q e R são polinômios homogêneos de grau $n + 1$ sem componente comum e satisfazem $Px + Qy + Rz = 0$.

1.4 Número de Milnor

Definição 1.4.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação representada pela forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Dizemos que $\mathcal{F}$ possui uma **singularidade** no ponto $p = (p_0 : p_1 : p_2)$ se $P(p_0, p_1, p_2) = Q(p_0, p_1, p_2) = R(p_0, p_1, p_2) = 0$.*

Em outras palavras, p é uma singularidade de $\mathcal{F}$ se a forma ω se anula no ponto p . O conjunto de singularidades de $\mathcal{F}$ é denotado por $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

Podemos também nos restringir à carta afim $\mathbb{A}_z^2 = \{z \neq 0\}$ e com isto escrever

$$\omega = A dx + B dy + \phi(x dy - y dx) \quad (1.7)$$

em que A, B são polinômios de grau no máximo n e ϕ é nulo ou tem grau exatamente n nas variáveis x e y .

Se p é uma singularidade de $\mathcal{F}$, podemos utilizar uma mudança de coordenadas para identificar p a $(0, 0)$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$.

Definição 1.4.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação descrita em carta afim pela forma $P dx + Q dy$ e p uma singularidade de $\mathcal{F}$ então*

$$\mu(\mathcal{F}, p) = (C_P \cdot C_Q)_p$$

*é chamado de **Número de Milnor** da folheação $\mathcal{F}$ em p .*

Teorema 1.4.3. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação homogênea de grau n em $\mathbb{P}^2$ com singularidades isoladas então*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = n^2 + n + 1.$$

Dem. Seja

$$\begin{aligned} \omega &= A(z dx - x dz) + B(y dz - z dy) + \phi(x dy - y dx) \\ &= (zA - y\phi) dx + (x\phi - zB) dy + (yB - xA) dz \end{aligned}$$

a forma que descreve a folheação com A, B, ϕ polinômios homogêneos de grau n . Visto que as singularidades são isoladas, podemos aplicar uma mudança de coordenadas tal que $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{A}_z^2$. Note que sob estas condições $\text{Sing}(\mathcal{F}) = V(zA - y\phi, x\phi - zB) \cap \mathbb{A}_z^2$ em que $V(\cdot)$ representa a variedade induzida pelo anulamento de polinômios em $\mathbb{P}^2$. Denotamos $M := zA - y\phi$, $N := x\phi - zB$, note que

$$C_M \cap C_N \cap C_z = C_{\phi(x, y, 0)} \cap C_z.$$

Visto que $\phi(x, y, 0)$ é polinômio homogêneo de grau n , o Teorema de Bézout nos garante que $|C_{\phi(x, y, 0)} \cap C_z| = |V(zA - y\phi, x\phi - zB, z)| = n$. Aplicando novamente o Teorema de Bézout, obtemos

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= \sum_{p \in C_M \cap C_N} (C_M \cdot C_N)_p = \sum_{p \in C_M \cap C_N \cap \mathbb{A}_z^2} (C_M \cdot C_N)_p + \sum_{p \in C_M \cap C_N \cap C_z} (C_M \cdot C_N)_p \\ &= \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} (C_M \cdot C_N)_p + n \end{aligned}$$

de onde podemos concluir

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} \mu(\mathcal{F}, p) = (n+1)^2 - n = n^2 + n + 1.$$

□

Observação 1.4.4. *Segue imediatamente deste teorema que não existem folheações homogêneas em $\mathbb{P}^2$ sem singularidades.*

1.5 Folheações de grau 2 com uma singularidade

Graças ao resultado da seção anterior, podemos começar a investigar o teorema de classificação de folheações de grau dois com uma singularidade presente no artigo de Cerveau, Déserti, Meziani e Garba Belko [1].

Seja $\mathcal{F}$ é uma folheação homogênea de grau 2 com uma única singularidade em $\mathbb{P}^2$, que podemos assumir ser no ponto $0 = (0, 0)$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$, descrita pela forma $\omega = Pdx + Qdy$. O Teorema 1.4.3 nos dá

$$\mu(\mathcal{F}, 0) = (C_P \cdot C_Q)_0 = 7. \quad (1.8)$$

Portanto as multiplicidades do ponto singular em C_P e C_Q satisfazem $m_0(P)m_0(Q) \leq 7$.

Note que não podemos ter $m_0(P) = m_0(Q) = 1$, pois sendo 0 a única singularidade, C_P e C_Q teriam tangentes distintas em 0, o que implicaria que $\mu(\mathcal{F}, 0) = (C_P \cdot C_Q)_0 = 1$, uma contradição. Neste caso, a menos de mudanças de coordenadas, restam-nos três possibilidades:

1. $m_0(Q) = 1$ e $m_0(P) \geq 2$, logo $\omega = ydy + \text{termos de grau} \geq 2$, chamado caso nilpotente.
2. $m_0(P) = 1$ e $m_0(Q) \geq 2$, logo $\omega = ydx + \text{termos de grau} \geq 2$, chamado caso sela-nó.
3. $m_0(P), m_0(Q) \geq 2$, logo ω não possui termos lineares, chamado caso de 1-jato nulo.

Observação 1.5.1. *As nomenclaturas utilizadas acima descrevem o comportamento das Jacobianas do campo associado à forma ω no ponto 0. Por exemplo o caso nilpotente tem campo associado $\mathcal{X} = -y\partial_x + \text{termos de grau} \geq 2$ donde*

$$J_{\mathcal{X}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente.

Um estudo mais detalhado de cada caso nos proverá uma classificação dos possíveis tipos de folheação. Utilizando a fórmula (1.7) obtemos a forma geral para as folheações que estudamos: $\omega = A dx + B dy + \phi(x dy - y dx)$, em que

$$\begin{aligned} A &= a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ B &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \\ \phi &= \phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2 \end{aligned}$$

$a_{ij}, b_{ij}, \phi_{ij} \in \mathbb{C}$ e se, como antes, $\omega = P dx + Q dy$ obtemos $P = A - y\phi$ e $Q = B + x\phi$.

Além da classificação em carta afim, analisamos também o comportamento de possíveis integrais primeiras das folheações.

Definição 1.5.2. *Seja ω uma 1-forma. Se existe aberto U de $\mathbb{C}^2$ e uma função holomorfa $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\omega \wedge dF = 0$, então dizemos que ω possui uma **integral primeira** F . Também, dizemos que uma 1-forma ω é **fechada** se $d\omega = 0$.*

Lembramos que, em termos do campo dual, $\mathcal{X} = -Q\partial_x + P\partial_y$ associado a $\omega = P dx + Q dy$, uma integral primeira é uma função F tal que $F(\alpha(t)) = c$ constante para toda curva integral $\alpha(t)$ do fluxo $\exp(t\mathcal{X})$.

Observação 1.5.3. *Se ω é fechada, então $\partial P/\partial y = -\partial Q/\partial x$. Dado que as singularidades de ω são isoladas, existe U aberto tal que $\mathcal{X}$ é conservativo com função potencial $F = \int P dx + Q dy$, que será uma integral primeira da forma, cf. [6] Cap. 1.1 Exemplo 2.*

Observação 1.5.4. *Se g é uma função holomorfa e F é uma integral primeira de uma forma ω , então F é claramente integral primeira de $g\omega$.*

1.6 Caso Nilpotente

Proposição 1.6.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau 2 com uma única singularidade descrita em carta afim por uma 1-forma ω . A parte linear de ω não pode ser conjugada a $y dy$. Em outras palavras, não existem folheações deste tipo com singularidade nilpotente.*

Dem. Suponha que $\mathcal{F}$ é nilpotente, então aplicando uma mudança de coordenadas, a forma que descreve a folheação $\omega = P dx + Q dy$ será tal que

$$\begin{aligned} P &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 - y(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2) \\ Q &= y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + x(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2) \end{aligned}$$

Afirmamos que $a_{20} = 0$. Com efeito, se assim não fosse, teríamos

$$Q - \left(\frac{b_{20}}{a_{20}} + \frac{\phi_{20}}{a_{20}}x \right) P = y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + x(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2) \\ - (b_{20}x^2 + yP_1) - (\phi_{20}x^3 + yP_2) = yQ_1$$

com P_1, P_2, Q_1 sendo polinômios de grau 2 e $Q_1 = 1 + (\text{termos de grau maior})$ sendo inversível no anel local $\mathcal{O}_0(\mathbb{A}^2)$. Disto segue que $y \in (P, Q)_{\mathfrak{m}_0}$ e concluímos que $(P, Q)_{\mathfrak{m}_0} = (y, x^2)_{\mathfrak{m}_0}$. Mas isto implicaria $\mu(\mathcal{F}, 0) = 2$, que é uma contradição com (1.8).

Portanto $P = y\tilde{P}$, com $\tilde{P} = a_{11}x + a_{02}y - (\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2)$. Também como 0 é singularidade isolada, Q não é divisível por y e assim b_{20} e ϕ_{20} não são simultaneamente nulos. Logo

$$\mu(\mathcal{F}, 0) = (C_P \cdot C_Q)_0 = (C_y \cdot C_Q)_0 + (C_{\tilde{P}} \cdot C_Q)_0.$$

Notemos que $(C_y \cdot C_Q)_0$ vale 2 ou 3. Se a_{11} é não nulo, $C_{\tilde{P}}$ é transversal a C_Q e $(C_{\tilde{P}} \cdot C_Q)_0 = 1$. Consequentemente $\mu(\mathcal{F}, 0) \leq 4$, contradição com (1.8). Concluimos que $a_{11} = 0$.

Quando $p = (p_1, 0)$, com $p_1 \neq 0$, é ponto da reta $C_y = \{y = 0\}$ a 1-forma ω_p se escreve $p_1^2(b_{20} + \phi_{20}p_1)dy$. Se $b_{20}\phi_{20} \neq 0$ o ponto $p' = \left(-\frac{b_{20}}{\phi_{20}}, 0\right)$ é uma singularidade de ω distinta de 0, o que é impossível, por hipótese. Portanto $b_{20}\phi_{20} = 0$. Mostraremos, por contradição, que $\phi_{20} \neq 0$. Se $\phi_{20} = 0$ vimos anteriormente que $b_{20} \neq 0$ e que

$$\omega = (y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{11}xy + x(\phi_{02}y^2 + \phi_{11}xy)) dy + y^2(a_{02} - \phi_{02}x - \phi_{11}y)dx.$$

Se a_{02} é diferente de 0, então $a_{02} - \phi_{02}x - \phi_{11}y$ é inversível no anel local $\mathcal{O}_0(\mathbb{A}^2)$, de modo que $\mu(\mathcal{F}, 0) = 2(C_Q \cdot C_y)_0 = 4$, o que é absurdo. Logo $a_{02} = 0$ e

$$\omega = (y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{11}xy + x(\phi_{02}y^2 + \phi_{11}xy)) dy - y^2(\phi_{02}x + \phi_{11}y)dx$$

Se $\phi_{02} \neq 0$, conseguimos $\mu(\mathcal{F}, 0) = 2(C_Q \cdot C_y)_0 + (C_Q \cdot C_{\phi_{02}x + \phi_{11}y})_0$. Mas a reta $C_{\phi_{02}x + \phi_{11}y}$ é transversal à reta tangente a 0 em C_Q , logo $\mu(\mathcal{F}, 0) = 4 + 1 = 5$. Se $\phi_{02} = 0$ temos $\mu(\mathcal{F}, 0) = 2(C_Q \cdot C_y)_0 + (C_Q \cdot C_{\phi_{11}y})_0 = 2(C_Q \cdot C_y)_0 + (C_{x^2} \cdot C_y)_0 = 6$ e não podemos ter nenhum destes casos. Logo, concluímos que $\phi_{20} \neq 0$. Finalmente,

$$\omega = (y + b_{02}y^2 + b_{11}xy + x(\phi_{20}x^2 + \phi_{02}y^2 + \phi_{11}xy)) dy \\ + y(a_{02}y - (\phi_{20}x^2 + \phi_{02}y^2 + \phi_{11}xy))dx,$$

com $\phi_{20} \neq 0$. Disto temos $\mu(\mathcal{F}, 0) = (C_y \cdot C_Q)_0 + (C_{\tilde{P}} \cdot C_Q)_0$ em que $\tilde{P} = a_{02}y - (\phi_{20}x^2 + \phi_{02}y^2 + \phi_{11}xy)$. Sabemos que $(C_y \cdot C_Q)_0 = 3$ e, no anel local $\mathcal{O}_0(\mathbb{A}^2)$,

$$\begin{aligned} (Q, \tilde{P})_{\mathfrak{m}_0} &= (Q + x\tilde{P}, \tilde{P})_{\mathfrak{m}_0} = (y + b_{02}y^2 + (a_{02} + b_{11})xy, \tilde{P})_{\mathfrak{m}_0} \\ &= (y(1 + b_{02}y + (a_{02} + b_{11})x), \tilde{P})_{\mathfrak{m}_0} = (y, a_{02}y - (\phi_{20}x^2 + \phi_{02}y^2 + \phi_{11}xy))_{\mathfrak{m}_0} \\ &= (y, x^2)_{\mathfrak{m}_0}, \end{aligned}$$

do que deduzimos $\mu(\mathcal{F}, 0) = 3 + 2 = 5$, absurdo. Portanto não existe folheação de grau dois em $\mathbb{P}^2$ com singularidade do tipo nilpotente. $\square$

1.7 Caso Sela-nó

Na Seção 1.2 definimos curvas integrais de um campo. Estamos interessados em curvas algébricas, portanto, apresentamos, a seguir, a definição equivalente em termos de curvas algébricas:

Definição 1.7.1. *Seja $\alpha : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma solução do sistema (1.1). Dizemos que α é uma **solução algébrica** se existe um polinômio não nulo $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $f(\alpha(t)) = 0$ para todo t em U .*

Definição 1.7.2. *Seja f polinômio não nulo em $\mathbb{C}[x, y]$. Dizemos que a curva algébrica C_f é **invariante** por (1.1) se para toda solução $\alpha : U \rightarrow \mathbb{C}^2$, em que U é um disco centrado em 0, satisfazendo $f(\alpha(0)) = 0$ então temos que $f(\alpha(t)) = 0$ para todo t em U .*

Proposição 1.7.3. *Se $\mathcal{F}$ é uma folheação descrita em carta afim pela forma ω , a curva algébrica C_f é invariante por $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\omega \wedge df = f\Theta$ com Θ uma 2-forma polinomial.*

Dem. Suponha $\omega = -Bdx + Ady$ a forma associada ao sistema (1.1) e a curva C_f invariante, então para toda solução $\alpha(t) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ do sistema contida em C_f vale $(\omega \wedge df)(\alpha(t)) = 0$ para todo t em U . Pelo Teorema de Zeros de Hilbert f divide o coeficiente de $dx \wedge dy$ em $\omega \wedge df$, portanto $\omega \wedge df = f\Theta$.

Reciprocamente, suponha que existe uma 2-forma polinomial Θ tal que $\omega \wedge df = f\Theta$. Seja $\alpha(t) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ solução do sistema tal que $\alpha(0)$ é ponto não singular e $f(\alpha(0)) = 0$. Os pontos de C_f anulam $\omega \wedge df$ e, portanto, contêm soluções para o sistema que passam por $\alpha(0)$. Pela unicidade de soluções, $\alpha(t) : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ está contida em C_f e é solução algébrica de (1.1). $\square$

Observação 1.7.4. *É também comum se referir às curvas algébricas invariantes como **folhas algébricas** de uma folheação.*

Note, também, que, se uma curva C_f não é invariante pela folheação $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}$ é tangente a C_f em um número finito de pontos. Com efeito, um ponto de tangência $p \in C_f$ é tal que $(Af_y - Bf_x)(p) = 0$. Isto é, os pontos de tangência formam um conjunto próprio de Zariski da curva C_f e, portanto, consistem numa quantidade finita de pontos.

Proposição 1.7.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau 2 com única singularidade em $\mathbb{P}^2$. Se a singularidade de $\mathcal{F}$ for do tipo sela-nó então, a menos de mudança de variáveis, $\mathcal{F}$ é descrita em carta afim pela forma*

$$\omega_4 = (x + y^2 - x^2y)dy + x(x + y^2)dx$$

Dem. Como anteriormente, suporemos que 0 é a única singularidade de $\mathcal{F}$. Uma vez mais, considere $\omega = Pdx + Qdy$ em que:

$$\begin{aligned} P &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 - y(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2) \text{ e} \\ Q &= x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + x(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2). \end{aligned}$$

Primeiramente, mostraremos, por contradição, que o eixo C_x não é invariante por $\mathcal{F}$. Se assim fosse, teríamos $Q = xg$, com $g \in \mathbb{C}[x, y]$; donde concluiríamos que b_{02} é nulo e g é inversível em $\mathcal{O}_0(\mathbb{A}^2)$. Como 0 é singularidade isolada, vemos que a_{02} e ϕ_{02} não poderiam ser simultaneamente nulos. Portanto,

$$(P, Q)_{\mathfrak{m}_0} = (a_{02}y^2 - \phi_{02}y^3, x)_{\mathfrak{m}_0},$$

o que nos conduziria a $\mu(\mathcal{F}, 0) \leq 3$, contradição com (1.8).

Seja $p_0 = (0 : y_0 : 1)$ um ponto genérico de C_x e C_t a tangente à folha de $\mathcal{F}$ passando por p_0 com equação $t = ax + by + cz$. Pelo discutido acima podemos supor que esta tangente é distinta do eixo C_x , do contrário basta tomarmos outro ponto. Consideramos, agora, a homogeneização $\Omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ da forma ω e aplicamos a mudança de coordenadas $\varphi(x, y, z) = (x, y, ax + by + cz)$ em $\mathbb{P}^2$ que envia $p_0 = (0 : y_0 : 1)$ ao ponto no infinito $(0 : 1 : 0)$, preservando C_x e C_y e enviando C_t na reta no infinito $C_z = \{z = 0\}$. A condição de tangência no ponto $(0 : 1 : 0)$ nos diz que $\phi_{02} = 0$. Podemos então aplicar uma nova transformação linear $x = b_{02}x'$, o que nos dá, em carta afim, $Q = b_{02}Q'$ em que

$$Q' = x' + b_{20}x'^2 + b_{11}x'y + y^2 + x'(\phi_{20}x'^2 + \phi_{11}x'y),$$

de onde podemos utilizar a normalização $b_{02} = 1$. Também vemos que $(\partial Q'/\partial x')(0,0) = 1$. Portanto o Teorema da Função Implícita nos garante que a curva $Q' = 0$ é um gráfico de função numa vizinhança de 0. Logo, podemos escrever x' localmente como uma série de potências em y , através do método de Newton (expansão de Puiseux); ver Seção 1 de Willis [7]. Fazemos isto utilizando o sistema de computação algébrica Singular e determinamos que

$$\begin{aligned} x' = x'(y) = & -y^2 + b_{11}y^3 - (b_{11}^2 + b_{20})y^4 + (3b_{20}b_{11} - \phi_{11} + b_{11}^3)y^5 \\ & + (\phi_{20} - b_{11}^4 + 3\phi_{11}b_{11} - 2b_{20}^2 - 6b_{20}b_{11}^2)y^6 + (10b_{20}^2b_{11} \\ & - 4b_{20}\phi_{11} + 10b_{20}b_{11}^3 - 4\phi_{20}b_{11} - 6\phi_{11}b_{11}^2 + b_{11}^5)y^7 \bmod y^8. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Detalhamos este processo de expansão no apêndice B.1. Portanto, a condição $\mu(\mathcal{F}, 0) = 7$ se traduz pelo fato de $P(x(y), y)$ ter ordem exatamente 7; isto é, o menor grau possível entre os monômios de P em y deve ser 7. Escrevendo esta condição explicitamente obtemos as seguintes relações (ver apêndice B.1)

$$\phi_{11} + a_{20} = 0, \quad \phi_{20} + a_{20}b_{11} = 0, \quad a_{02} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{20}b_{20} = 0, \quad -a_{20}^2 \neq 0;$$

de onde concluímos $b_{20} = 0$ e $a_{20} \neq 0$. Finalmente, normalizando $a_{20} = 1$,

$$\omega = (x + y^2 + b_{11}xy - x^2(b_{11}x + y)) dy + x(x + y(b_{11}x + y)) dx \quad (1.10)$$

que possui forma homogênea

$$\begin{aligned} \Omega = & (xz^2 + y^2z + b_{11}xyz - x^2(b_{11}x + y)) dy + x(xz + y(b_{11}x + y)) dx \\ & - (xyz + y^3 + b_{11}xy^2 + x^3) dz. \end{aligned}$$

Aplicamos a mudança de variáveis homogênea $(x, y, z - b_{11}y)$ e obtemos

$$\Omega = (xz^2 + y^2z - x^2y) dy + (x^2z + xy^2) dx - (xy(z - b_{11}y) + y^3 + b_{11}xy^2 + x^3) dz,$$

que assume a forma ω_4 do enunciado na carta afim $\{z = 1\}$. Equivalentemente poderíamos considerar $\omega_4 = \varphi^*\omega$ com $\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{1-b_{11}y}, \frac{y}{1-b_{11}y}\right)$ e ω da equação (1.10). $\square$

A folheação $\mathcal{F}_4$ definida por ω_4 apresenta um comportamento mais misterioso se comparada às demais folheações. A saber ω_4 não possui integral primeira racional e suas curvas invariantes não são algébricas. Isto decorre de uma afirmação mais geral: $\mathcal{F}_4$ não apresenta estrutura “transversalmente projetiva”. Tal conceito é discutido no capítulo 6 de Lins Neto [8] e na Proposição 1.3 de Cerveau et al [1]. Este comportamento drasticamente distinto já pode ser observado no retrato de fase real da folheação próximo singularidade na Figura A.4 na página 56.

1.8 Caso em que o 1-jato é nulo

Definição 1.8.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação descrita em carta afim por uma forma $\omega = \omega_m + \omega_{m+1} + \dots + \omega_n$ em que $\omega_i = P_i dx + Q_i dy$ e P_i, Q_i são polinômios homogêneos de grau i , o **cone tangente** de $\mathcal{F}$ em 0 é definido por $\mathcal{C}_\omega := V(xP_m + yQ_m)$.*

As folheações do caso de 1-jato nulo são descritas por formas $\omega = A dx + B dy + \phi(x dy - y dx)$ em que $A, B, \phi \in \mathbb{C}[x, y]$ são homogêneos de grau 2. Investigaremos o comportamento dos possíveis cones tangentes dados por $\mathcal{C}_\omega = V(Ax + By)$.

Note que a equação de $\mathcal{C}_\omega$ não pode ser identicamente nula, do contrário $y \mid A$ e $x \mid B$ i.e. $A = Cy$ e $B = -Cx$, donde $A dx + B dy = C(x dy - y dx)$ e, finalmente, $\omega = (\phi + C)(x dy - y dx)$ o que é absurdo pois ω possui apenas uma singularidade.

Da mesma forma, ϕ não pode ser identicamente nulo, pois se assim fosse, a forma homogênea de $\omega(x, y, 1) = A dx + B dy$ seria dada por

$$\begin{aligned}\omega(x, y, z) &= A(x, y)(z dx - x dz) + B(x, y)(z dy - y dz) \\ &= z A dx + z B dy - (Ax + By) dz\end{aligned}$$

e disto concluímos que há singularidades no eixo $\{z = 0\}$ o que não é possível.

Lema 1.8.2. *Se o cone tangente $\mathcal{C}_\omega$,*

(a) *é constituído por três retas distintas então*

$$A dx + B dy = xy(y - x) \left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{d(y - x)}{y - x} \right)$$

(b) *é constituído por duas retas distintas então*

$$A dx + B dy = x^2 y \left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 d\left(\frac{y}{x}\right) \right)$$

(c) *é constituído por uma reta então*

$$A dx + B dy = x^3 \left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + d\left(\frac{\lambda_2 xy + \lambda_3 y^2}{x^2}\right) \right)$$

a menos de mudança de variáveis, com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$

Dem.

(a) A menos de mudança de variáveis podemos supor que as retas são $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{y - x = 0\}$. Neste caso $xy(y - x)$ divide $Ax + By$. Escrevendo

$$\begin{aligned}A &= a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 \text{ e} \\ B &= b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2\end{aligned}$$

temos,

$$Ax + By = a_1x^3 + (a_2 + b_1)x^2y + (a_3 + b_2)xy^2 + b_3y^3 = cxy(y - x)$$

com c constante. Disto concluímos que $a_1 = b_3 = 0$, $a_2 + b_1 = c$ e $a_3 + b_2 = -c$. Substituindo estes resultados obtemos:

$$\begin{aligned} Adx + Bdy &= ((c - b_1)xy - (c + b_2)y^2)dx + (b_1x^2 + b_2xy)dy \\ &= xy \left((c - b_1) - (c + b_2)\frac{y}{x} \right) dx + xy \left(b_1\frac{x}{y} + b_2 \right) dy \\ &= xy \left(cdx - b_1dx - c\frac{y}{x}dx - b_2\frac{y}{x}dx + b_1\frac{x}{y}dy + b_2dy \right) \\ &= xy \left(\frac{cx - cy}{x}dx - b_1dx + (b_1dy - b_1dy) + b_1\frac{x}{y}dy + b_2dy + (b_2dx - b_2dx) - b_2\frac{y}{x}dx \right) \\ &= xy \left(-c(y - x)\frac{dx}{x} - b_1(y - x)\frac{dy}{y} - b_2(y - x)\frac{dx}{x} + (b_2 - b_1)(-dx + dy) \right) \\ &= xy(y - x) \left((-c - b_2)\frac{dx}{x} - b_1\frac{dy}{y} + (b_2 - b_1)\frac{d(y - x)}{y - x} \right), \end{aligned}$$

que é a expressão desejada de forma explícita com $\lambda_1 = -c - b_2$, $\lambda_2 = -b_1$ e $\lambda_3 = b_2 - b_1$.

(b) e (c) são obtidas por manipulações similares fazendo as adaptações necessárias.

□

Lema 1.8.3. *O cone tangente $\mathcal{C}_\omega$ não pode ser a união de três retas distintas.*

Dem. Por contradição, suponha que assim fosse. Pelo Lema 1.8.2 segue-se que

$$\begin{aligned} \omega &= xy(y - x) \left(\lambda_1\frac{dx}{x} + \lambda_2\frac{dy}{y} + \lambda_3\frac{d(y - x)}{y - x} \right) \\ &\quad + (\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2)(ydx - xdy). \end{aligned}$$

Nos pontos da reta $\{x = 0\}$ temos que $\omega = (\lambda_1 + \phi_{02}y)y^2dx$. Visto que 0 é a única singularidade de $\mathcal{F}$, é necessário que λ_1 ou ϕ_{02} seja nulo. Procurando de maneira semelhante para as outras retas obtemos

$$\lambda_2\phi_{20} = \lambda_3(\phi_{20} + \phi_{11} + \phi_{02}) = 0.$$

Porém, homogeneizando a forma ω , obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= xy(y - x) \left(\lambda_1\frac{zdx - xdz}{x} + \lambda_2\frac{zdy - ydz}{y} + \lambda_3\frac{zd(y - x) - (y - x)dz}{y - x} \right) \\ &\quad + (\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2)(ydx - xdy). \end{aligned}$$

disto, como $(0 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 0)$ e $(1 : 1 : 0)$ são não singulares, ϕ_{02}, ϕ_{20} e $(\phi_{20} + \phi_{11} + \phi_{02})$ não podem ser nulos. Portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e o cone tangente é nulo, absurdo. $\square$

Lema 1.8.4. *Se $\mathcal{C}_\omega$ é composto de duas retas distintas então $\mathcal{F}$ é descrita pela forma*

$$\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$$

a menos de mudança de coordenadas.

Dem. Pelo Lema 1.8.2 podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega = & x^2y \left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 d\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ & + (\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2)(ydx - xdy). \end{aligned}$$

De maneira análoga ao Lema anterior, calculamos a forma nos pontos das retas $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$, para concluirmos que

$$\lambda_2\phi_{20} = \lambda_3\phi_{02} = 0.$$

Como $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ são não singulares, $\phi_{20}, \phi_{02} \neq 0$ e, portanto, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Como a equação de $\mathcal{C}_\omega$ não pode ser nula, $\lambda_1 \neq 0$ donde podemos supor $\lambda_1 = 1$. Logo

$$\frac{\omega}{x^3y} = \frac{dx}{x^2} + \frac{\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2}{x^2} \left(\frac{d(x/y)}{(x/y)} \right).$$

Aplicando a transformação linear $(\phi_{20}^{-1}x, (\phi_{20}\phi_{02})^{-\frac{1}{2}}y)$ obtemos

$$(\phi_{20})^{\frac{9}{2}}(\phi_{02})^{\frac{1}{2}}\omega = xydx + (x^2 + \phi_{11}(\phi_{20}\phi_{02})^{-\frac{1}{2}}xy + y^2)(ydx - xdy).$$

Logo, podemos supor $\phi_{20} = \phi_{02} = 1$ e aplicar um raciocínio similar ao passo final da Proposição 1.7.5, ou simplesmente considerar o difeomorfismo $\varphi = \left(\frac{x}{1+\phi_{11}y}, \frac{y}{1+\phi_{11}y} \right)$ e calcular $\varphi^*\omega$, donde a forma pode ser escrita como no enunciado. $\square$

Note que $\frac{\omega_3}{x^3y}$ é fechada. De fato,

$$\frac{\omega_3}{x^3y} = \frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} + \frac{y}{x^2}dy - \frac{y^2}{x^3}dx.$$

Logo,

$$d\left(\frac{\omega_3}{x^3y}\right) = -2\frac{y}{x^3}dx \wedge dy - 2\frac{y}{x^3}dy \wedge dx = 0.$$

Das observações 1.5.3 e 1.5.4 podemos, então, calcular uma integral primeira para ω_3 (ver detalhes na seção B.4 do Apêndice), obtendo

$$F = \frac{y}{x} \exp\left(\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

Lema 1.8.5. *Se $\mathcal{C}_\omega$ é composto de uma única reta então $\mathcal{F}$ é descrita por uma das seguintes formas*

$$\begin{aligned}\omega_1 &= x^2 dx + y^2(xdy - ydx); \\ \omega_2 &= x^2 dx + (x + y^2)(xdy - ydx).\end{aligned}$$

a menos de mudança de coordenadas.

Dem. Pelo Lema 1.8.2 podemos escrever

$$\begin{aligned}\omega &= x^3 \left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + d \left(\frac{\lambda_2 xy + \lambda_3 y^2}{x^2} \right) \right) \\ &\quad + (\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2)(ydx - xdy).\end{aligned}$$

Mais uma vez calculamos a forma nos pontos de $\{x = 0\}$ e concluímos $\lambda_3\phi_{02} = 0$. Como $(0 : 1 : 0)$ é não singular, $\phi_{02} \neq 0$ e, portanto, $\lambda_3 = 0$. Mas,

$$\omega = x^3 \left(\lambda_1 \frac{dx}{x} + d \left(\frac{\lambda_2 y}{x} \right) \right) = \lambda_1 x^2 dx + \lambda_2 x(xdy - ydx).$$

Como a folheação representada por ω é de grau dois, não pode ser escrita como $\omega = f(xdy - ydx)$, com f polinomial e, portanto, $\lambda_1 \neq 0$ donde podemos supor $\lambda_1 = 1$. Se aplicarmos a mudança de coordenadas $(\phi_{02}^{1/2}x, y)$ poderemos supor $\phi_{02} = 1$ e $\lambda_2 = \lambda$. Portanto,

$$\omega = x^2 dx + (\lambda x + \phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + y^2)(xdy - ydx). \quad (1.11)$$

A mudança de variáveis $(x, y - \frac{\phi_{11}}{2}x)$ nos permite supor também que $\phi_{11} = 0$. Por fim, utilizamos uma argumentação similar às Proposições 1.7.5 e 1.8.4. Consideramos a 1-forma homogênea

$$\Omega = ((-\lambda xy + x^2)z - y^3 - \phi_{20}x^2y)dx + (xy^2 + \phi_{20}x^3)dy - x^3dz.$$

Caso λ seja nulo, aplicamos a mudança de coordenadas homogênea $\varphi = (x, y, z + \phi_{20}y)$ e obtemos

$$\begin{aligned}\varphi^*\Omega &= (x^2(z + \phi_{20}y) - y^3 - \phi_{20}x^2y)dx + (xy^2 + \phi_{20}x^3)dy - x^3(dz + \phi_{20}dy) \\ &= (x^2z - y^3)dx + xy^2dy - x^3dz.\end{aligned}$$

Esta forma possui a configuração de ω_1 na carta afim $\mathbb{A}_z^2$. Caso $\lambda \neq 0$, então, a título de diversidade na argumentação, consideramos a transformação afim $\varphi = (x/(1 - \phi_{20}\lambda^{-1}x), y/(1 - \phi_{20}\lambda^{-1}x))$ aplicada na forma ω e obtemos, assim,

$$\varphi^*\omega = (-\lambda^4 y^3 - \lambda^5 xy + \lambda^4 x^2)dx + (\lambda^4 xy^2 + \lambda^5 x^2)dy.$$

Calculamos esta transformação explicitamente no apêndice B.2. À forma acima aplicamos a mudança de coordenadas $(\lambda^3 x, \lambda^2 y)$ para obtermos uma forma equivalente a $\lambda^{13}\omega_2$, em outras palavras, ω em (1.11) é conjugada a ω_2 . $\square$

Podemos também calcular integrais primeiras para ω_1 e ω_2 dadas respectivamente por:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{y}{x} \right)^3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \left(2 + \frac{1}{x} + 2 \left(\frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) \exp \left(-\frac{y}{x} \right),$$

devidamente calculadas em B.4 no Apêndice.

1.9 Teorema de Classificação

Unificando os resultados das subseções anteriores, a saber a Proposição 1.7.5 e os Lemas 1.8.3, 1.8.4 e 1.8.5 deduzimos o seguinte resultado crucial:

Teorema 1.9.1. *A menos de automorfismo de $\mathbb{P}^2$, uma folheação $\mathcal{F}$ de grau dois em $\mathbb{P}^2$ com uma única singularidade assume uma das disposições $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ ou $\mathcal{F}_4$ descritas em carta afim respectivamente pelas formas*

- (a) $\omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx)$
- (b) $\omega_2 = x^2 dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$
- (c) $\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$
- (d) $\omega_4 = (x + y^2 - x^2 y)dy + x(x + y^2)dx.$

Capítulo 2

Interstício Teórico

Uma vez que temos em mãos a classificação das folheações com uma singularidade, gostaríamos de extrair algumas propriedades de folheações que admitem mais singularidades em $\mathbb{P}^2$. Porém, antes de nos lançarmos nesta empreitada, se faz necessária a discussão terminológica e teórica que apresentamos neste capítulo.

2.1 Grupos algébricos e suas ações

Definição 2.1.1. *Seja G uma variedade (irredutível ou não) munida de uma estrutura de grupo multiplicativo. Se as duas aplicações $\mu : G \times G \rightarrow G$ em que $\mu(x, y) = xy$ e $\iota : G \rightarrow G$ em que $\iota(x) = x^{-1}$ são morfismos de variedades, dizemos que G é um **grupo algébrico**.*

Um **isomorfismo** de grupos algébricos é um isomorfismo de variedades que é simultaneamente um isomorfismo de grupos.

Um **automorfismo** de G é um isomorfismo de G em G .

Exemplo 2.1.2. *O grupo aditivo G_+ é a reta afim $\mathbb{A}^1$ munida da lei $\mu(x, y) = x+y$ (com $\iota(x) = -x$ e neutro $e = 0$). O grupo multiplicativo $G_\times$ é o aberto afim $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{A}^1$ munido da lei $\mu(x, y) = xy$ (com $\iota(x) = x^{-1}$ e neutro $e = 1$).*

Exemplo 2.1.3. *O grupo linear geral notado $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ é o conjunto de matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas em $\mathbb{C}$.*

Note que $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto de matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ pode ser identificado com $\mathbb{A}^{n^2}$ e $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ é o aberto principal definido pelo não anulamento do determinante. Relembramos que se A e B são matrizes invertíveis, então

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(A) \det(B), \\ \det(A^{-1}) &= 1/\det(A).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Estas fórmulas implicam que a multiplicação de matrizes e a inversão de matrizes são morfismos de variedades e, portanto, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ é grupo algébrico.

Exemplo 2.1.4. *O grupo de transformações afins $A_n(\mathbb{C})$ é o conjunto das aplicações $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x} + \mathbf{b}$, com $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ com a operação de composição. Denotaremos uma tal aplicação por $(B, \mathbf{b})$.*

Dadas duas aplicações $(B, \mathbf{b})$ e $(C, \mathbf{c})$ de $A_n(\mathbb{C})$, sua composição pode ser escrita da forma

$$(B, \mathbf{b}) \cdot (C, \mathbf{c}) = (BC, \mathbf{b} + B\mathbf{c}),$$

donde $A_n(\mathbb{C})$ pode ser entendido como subgrupo de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ ao associarmos cada $(B, \mathbf{b})$ à matriz $\begin{pmatrix} B & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.1.5. *O grupo linear especial notado $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ é o conjunto de matrizes $n \times n$ com determinante 1 e entradas em $\mathbb{C}$.*

Note que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ é fechado em $\mathbb{A}^{n^2}$ pois é o conjunto de zeros do polinômio $\det(X) - 1$, em que X é a matriz que tem como entradas as variáveis x_{ij} com $1 \leq i, j \leq n$. Mais uma vez, pelas propriedades (2.1) vemos que este objeto é um grupo algébrico. Além disso, como é o anulamento de um único polinômio, temos uma hipersuperfície em $\mathbb{A}^{n^2}$. Portanto $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ tem dimensão $n^2 - 1$.

Exemplo 2.1.6. *Seja V um espaço vetorial, o grupo linear de V , notado $\mathrm{GL}(V)$ é o conjunto de todos os isomorfismos lineares de V (em outras palavras todas as transformações lineares bijetivas de V em si próprio) munido da composição como operação de grupo.*

Se V possui dimensão finita n sobre $\mathbb{C}$ então $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De fato, fixada uma base de V , a transformação $T_A \in \mathrm{GL}(V)$ é dada por uma matriz $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Além disso, $A \mapsto T_A$ é um isomorfismo entre $\mathrm{GL}(V)$ e $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exemplo 2.1.7. *O conjunto de automorfismos de $\mathbb{P}^n$, é um grupo algébrico que age em $\mathbb{P}^n$, chamado grupo linear geral projetivo.*

Lembramos que automorfismos de $\mathbb{P}^n$ são transformações lineares representadas por matrizes invertíveis $(n+1) \times (n+1)$. Também, em espaços projetivos, temos que duas transformações são equivalentes se uma é múltipla da outra por um fator constante não nulo. Chamamos esta equivalência de $\sim$ e notamos que o grupo de automorfismos de $\mathbb{P}^n$ é dado por $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = (\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})/\sim)$. Denotaremos este grupo $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Da estrutura extra de grupos em uma variedade provém uma série de resultados interessantes. Por exemplo, um grupo algébrico é sempre não-singular. De fato, sejam $x, y \in G$ com x um ponto não-singular de G . Como a multiplicação por elementos de G é morfismo inversível de G , então vimos na página 5 que o espaço tangente $T_y G$ do ponto $y = (yx^{-1})x$ é isomorfo ao espaço tangente $T_x G$. Logo, y é um ponto não-singular.

Outra propriedade interessante se manifesta ao notarmos que existe um único componente irredutível de G que passa por e , a identidade. Com efeito, sejam $G_1, \dots, G_s$ os componentes irredutíveis que passam por e e considere a imagem $G_1 \cdots G_s$ da variedade irredutível $G_1 \times \cdots \times G_s$ sob o morfismo do produto, i.e. $(g_1, \dots, g_s) \mapsto g_1 \cdots g_s$. Esta imagem é também irredutível e passa por e . Portanto, está contida em algum G_i . Da definição dos G_j temos $G_j \subseteq G_1 \cdots G_s \subseteq G_i$ logo $s = 1$. Chamamos o componente G_i de **componente neutro** de G e o denotamos G° .

Definição 2.1.8. *Seja G um grupo (abstrato) com identidade e . Dizemos que G **age** sobre um conjunto A se existe uma aplicação $\varphi : G \times A \rightarrow A$, chamada **ação** de G em A e abreviada $\varphi(x, a) = xa$, tal que:*

$$(a) \quad x_1(x_2 a) = (x_1 x_2) a, \forall x_i \in G, a \in A$$

$$(b) \quad ea = a, \forall a \in A$$

Considere, então, que G age em A . Dizemos que $Ga = \{ga \mid g \in G\}$ é a **órbita** do elemento a . Note que as diferentes órbitas formam uma partição de A . Dizemos que G age **transitivamente** em A se $Ga = A$ para qualquer $a \in A$; isto é, A é composto de uma única órbita. O conjunto A^G é chamado conjunto de **pontos fixos** de A pela ação de G e consiste no conjunto de elementos $a \in A$ tais que $Ga = a$. Definimos o **grupo de isotropia** ou **estabilizador** de um elemento a como $G_a = \{x \in G \mid xa = a\}$, note que G_a é subgrupo de G .

Exemplo 2.1.9. *Um grupo algébrico G pode agir sobre si próprio com translação à esquerda (ou à direita) dada por $y \mapsto xy$ (ou $y \mapsto yx^{-1}$). Essa ação é transitiva e seu grupo de isotropia é trivial.*

Usaremos o seguinte resultado da Seção 8.3 de Humphreys [9].

Proposição 2.1.10. *Seja G grupo algébrico que age na variedade não vazia X . Então cada órbita da ação é lisa e é um conjunto localmente fechado (interseção de um fechado e um aberto) de X , cuja fronteira é a união de órbitas de dimensão estritamente menor. Em particular, órbitas de dimensão minimal são fechadas.*

2.2 Álgebras de Lie em $\mathbb{P}^2$

Definição 2.2.1. Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial V imbuído de uma operação bilinear alternada $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ que satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \text{ para todo } a, b, c \in V.$$

Exemplo 2.2.2. Uma álgebra associativa A com colchete de Lie definido por $[a, b] = ab - ba$ é uma álgebra de Lie.

Note que a operação é claramente bilinear e alternada, e a identidade de Jacobi pode ser verificada de maneira explícita.

Exemplo 2.2.3. O conjunto de campos de vetores $\text{Vec}(X)$ em uma variedade X é uma álgebra de Lie com colchete definido por $[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha$.

Com efeito, da definição de campo de vetores algébrico, $[\alpha, \beta]$ é um campo, $[\cdot, \cdot]$ é claramente bilinear e simétrica e a identidade de Jacobi é verificada de maneira similar ao caso de álgebras associativas. A título de exemplo, seja $X = \mathbb{A}^2$, calculemos:

$$\begin{aligned} [x\partial_y, y\partial_x] &= x\partial_y(y\partial_x) - y\partial_x(x\partial_y) \\ &= x \left(\partial_x + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) - y \left(\partial_y + x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) = x\partial_x - y\partial_y. \end{aligned}$$

Voltamos, agora, nossa atenção aos grupos algébricos. Como já vimos, um grupo algébrico G é não-singular e, se $x \in G$, o morfismo produto induz um isomorfismo entre $T_e G$ e $T_x G$. Logo, podemos concentrar nossos esforços em analisar o espaço tangente de um grupo algébrico na identidade e .

Queremos também imbuir nosso espaço tangente com a estrutura de álgebra de Lie. A princípio isto pode ser confuso porém calcularemos o comportamento explicitamente para os grupos algébricos cruciais do texto subsequente.

Para isto recorreremos à definição do objeto $X(R)$ para X variedade e R uma $\mathbb{C}$ -álgebra e de espaço tangente, ambas no início da seção 1.2.

Considere G um grupo algébrico. Além disso, seja $\mathbb{C}[\varepsilon][\eta] = \mathbb{C}[\varepsilon][t]/(t^2) = \mathbb{C}[\varepsilon] \oplus \mathbb{C}[\varepsilon]\eta$ e a aplicação

$$ad : G(\mathbb{C}[\varepsilon]) \longrightarrow \text{Aut}(T_e G(\mathbb{C}[\varepsilon]))$$

definida por $ad(g)(x) = i(g) \cdot x \cdot i(g)^{-1}$, em que $g \in G(\mathbb{C}[\varepsilon])$, i é a inclusão natural $G(\mathbb{C}[\varepsilon]) \rightarrow G(\mathbb{C}[\varepsilon][\eta])$ e x pertence ao espaço tangente $T_e G(\mathbb{C}[\varepsilon])$ de $G(\mathbb{C}[\varepsilon])$ na identidade. Em outras palavras, $x \in \ker(G(\mathbb{C}[\varepsilon][\eta]) \rightarrow G(\mathbb{C}[\varepsilon]))$, ver página 5.

Definição 2.2.4. A *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ de um grupo algébrico G é o espaço tangente na identidade $T_e G$, munido da operação de colchete $[x, y] := \text{ad}(x)(y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 2.2.5. A *álgebra linear geral* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ é a álgebra de Lie de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ e é isomorfa a $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto de matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$ e seu colchete é dado por $[A, B] = AB - BA$ com $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

Primeiramente note que se I é a identidade e $A \in M_n(\mathbb{C})$ então $I + \varepsilon A$ é inversível com inversa $I - \varepsilon A$ e portanto pertence a $\text{GL}_n(\mathbb{C}[\varepsilon])$. Logo

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) &= \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}[\varepsilon]) \mid A \mapsto I \text{ em } \text{GL}_n(\mathbb{C}[\varepsilon]) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})\} \\ &= \{I + \varepsilon A' \mid A' \in M_n(\mathbb{C})\} \simeq M_n(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Para provar o comportamento do colchete considere o homomorfismo de grupos

$$\text{Ad} : \text{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$$

definido por

$$\text{Ad}(B)(I + \varepsilon A) = i(B) \cdot (I + \varepsilon A) \cdot i(B)^{-1}$$

em que $i(B) = B + \varepsilon 0$. Assim

$$\text{Ad}(B)(I + \varepsilon A) = B \cdot (I + \varepsilon A) \cdot B^{-1} = I + \varepsilon BAB^{-1}.$$

Denotaremos também a álgebra de Lie de um grupo G por $\text{Lie}(G)$. Com esta notação temos $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, porém, ao curso do raciocínio que se segue, denotaremos $I + \eta A$ como elemento de $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C}))$ e $I + \varepsilon A$ como elemento de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Procuramos um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\text{ad} : \text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \longrightarrow \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))).$$

Para isto usamos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{GL}_n(\mathbb{C}[\eta]) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})[\eta]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{GL}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))\end{array}$$

A aplicação ad é induzida pela aplicação φ que por sua vez é induzida por Ad . Porém, os elementos de $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C}))$ são da forma $I + \eta A$ com $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $\eta^2 = 0$. Então $\varphi(I + \eta A)$ é automorfismo de

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})[\eta] = \{I + \varepsilon B + \eta(I + \varepsilon C) \mid B, C \in M_n(\mathbb{C})\}.$$

Contudo, podemos escrever

$$\begin{aligned} I + \varepsilon B + \eta(I + \varepsilon C) &= (1 + \eta)I + \varepsilon B + \eta\varepsilon C \\ &= (1 + \eta)I + \varepsilon(B + \eta C) \end{aligned}$$

Multiplicando por $(1 - \eta)$,

$$I + (1 - \eta)\varepsilon(B + \eta C) = I + \varepsilon(B + \eta(C - B))$$

Desta forma podemos reformular nossa notação e considerar que os elementos de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})[\eta]$ são da forma $I + \varepsilon(B + \eta C)$. O que corresponde dizer que existe um homomorfismo natural entre $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})[\eta]$ e $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}[\eta])$.

Com isso,

$$\begin{aligned} \varphi(I + \eta A)(I + \varepsilon(B + \eta C)) &= (I + \eta A)(I + \varepsilon(B + \eta C))(I - \eta A) \\ &= (I + \eta A)(I - \eta A) + \varepsilon(I + \eta A)(B + \eta C)(I - \eta A) \\ &= I + \varepsilon(B + \eta(AB + C))(I - \eta A) \\ &= I + \varepsilon(B + \eta(-BA + AB + C)) \\ &= I + \varepsilon(B + \eta C + \eta[A, B]). \end{aligned}$$

Logo, se identificarmos $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}[\eta])$ com $M_n(\mathbb{C}[\eta])$ temos

$$\varphi(I + \eta A)(B + \eta C) = (B + \eta C) + \eta[A, B].$$

Portanto, com esta convenção $\varphi(I + \eta A) = id + \alpha(A) \in \text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$, em que $\alpha(A)$ é a aplicação que leva X em $[A, X]$.

Com isso, obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) &\longrightarrow \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))) \\ I + \eta A &\longmapsto id + \alpha(A). \end{aligned}$$

Mas $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \simeq M_n(\mathbb{C}) \simeq \text{End}(\mathbb{C}^n)$ identificando $I + \eta A$ com A , ao passo que

$$\begin{aligned} \text{Lie}(\text{Aut}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))) &\xrightarrow{\sim} \text{End}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})) . \\ id + \eta\alpha(A) &\longmapsto \alpha(A) \end{aligned}$$

Definimos então, para $I + \eta A, I + \eta B \in \text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{C}))$:

$$[I + \eta A, I + \eta B] := \text{ad}(A)(B) = \alpha(A)(B) = [A, B],$$

donde obtemos o colchete desejado para o exemplo 2.2.5.

Exemplo 2.2.6. A álgebra linear especial $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ é a álgebra de Lie de $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ e é isomorfa ao conjunto de matrizes $n \times n$ com traço nulo.

O raciocínio é análogo ao do exemplo anterior, com o adendo da seguinte observação: o determinante de $I + \varepsilon A$ em ambas situações é igual a 1, o que ocorre se e somente se $\text{tr}(A) = 0$. De fato, como $\varepsilon^2 = 0$, o determinante de uma matriz dessa forma é dado por $1 + \varepsilon \text{tr}(A)$.

Restringimo-nos ao caso particular de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ por um momento. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

uma matriz em $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Podemos associar esta matriz ao campo linear

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &= (a_1x + a_2y + a_3z)\partial_x + (b_1x + b_2y + b_3z)\partial_y + (c_1x + c_2y + c_3z)\partial_z \\ &= L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z \end{aligned}$$

em $\text{Vec}(\mathbb{P}^2)$. Além disso a condição de A possuir traço nulo é equivalente a

$$a_1 + b_2 + c_3 = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Fato 2.2.7. O subconjunto de campos de $\text{Vec}(\mathbb{P}^2)$ tais que a relação (2.2) é satisfeita é uma subálgebra de Lie denotada $\chi(\mathbb{P}^2)$, que por sua vez é isomorfa a $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ a menos de inversão da ordem do colchete.

Com efeito, mostramos que a operação de colchete em $\chi(\mathbb{P}^2)$ é fechada no conjunto. Sejam $\mathcal{X} = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z$ e $\mathcal{Y} = L'\partial_x + M'\partial_y + N'\partial_z$ em $\chi(\mathbb{P}^2)$, logo $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \tilde{L}\partial_x + \tilde{M}\partial_y + \tilde{N}\partial_z$ onde

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= LL'_x + ML'_y + NL'_z - L'L_x - M'L_y - N'L_z \\ \tilde{M} &= LM'_x + MM'_y + NM'_z - L'M_x - M'M_y - N'M_z \\ \tilde{N} &= LN'_x + MN'_y + NN'_z - L'N_x - M'N_y - N'N_z \end{aligned}$$

sendo L, M, N, L', M', N' polinômios lineares, podemos verificar explicitamente que $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ são lineares e satisfazem (2.2).

Considere ainda a aplicação $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \mathcal{X}_A \in \chi(\mathbb{P}^2)$. Note que esta aplicação é um anti-isomorfismo de álgebras de Lie. De fato, ela é claramente bijetiva e

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{[A,B]}|_p &= (AB - BA)p = \mathcal{X}_A|_{Bp} - \mathcal{X}_B|_{Ap} \\ &= \mathcal{X}_B \circ \mathcal{X}_A|_p - \mathcal{X}_A \circ \mathcal{X}_B|_p = [\mathcal{X}_B, \mathcal{X}_A]_p.\end{aligned}$$

2.3 Representações de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Incluimos nesta seção material básico sobre teoria de representações de grupos algébricos e enunciamos como classificar completamente as representações de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, que utilizaremos em resultados posteriores.

Definição 2.3.1. *Seja G um grupo algébrico (ou $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie) e V um espaço vetorial de dimensão finita. Um homomorfismo $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ (ou $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$) é uma **representação** de G (ou $\mathfrak{g}$).*

Uma representação $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ é também chamada **representação matricial** de G .

Duas representações $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ e $\mu : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ são **equivalentes** se existe isomorfismo linear $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ tal que $\varphi(\rho(g)(v)) = \mu(g)\varphi(v)$ para todo $g \in G$ e $v \in V$.

Exemplo 2.3.2. *Toda representação $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ define uma ação linear de G em V e vice-versa.*

De fato, se ρ é homomorfismo basta considerar a ação $\mu : \mathrm{GL}(V) \times V \rightarrow V$, $(g, v) \mapsto \rho(g)v$. Reciprocamente se μ é uma ação linear, então $\mu_g : V \rightarrow V$, $v \mapsto gv$ é linear para todo $g \in G$ e $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, $g \mapsto \mu_g$ é uma representação de G .

Definição 2.3.3. *Uma representação $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ é dita **irredutível** se $\{0\}$ e V são os únicos subespaços de V que são estáveis sob a ação de G . Caso contrário a representação é dita **redutível**.*

Seja $\mathbb{C}[x, y]$ o anel de polinômios em duas variáveis, denotamos $W_d = \langle x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ o espaço vetorial de dimensão $d+1$ gerado pelos monômios de grau d . Note que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ age sobre W_d da seguinte maneira: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ e $x^i y^j \in W_d$, então $A(x^i y^j) = (ax + by)^i (cx + dy)^j$.

Os subespaços W_d nos permitem dar uma caracterização completa das possíveis representações de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ num espaço vetorial de dimensão finita através do teorema abaixo, cuja prova é assunto do Capítulo 3 das notas de Neunhöffer [12].

Teorema 2.3.4. *Seja V espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ uma representação. Então, existem s subrepresentações irredutíveis $\rho_i : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow V_i$ e números $d_1, \dots, d_s$ tais que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ e $V_i \cong W_{d_i}$.*

A título de exemplo, explicitamos uma propriedade das representações irredutíveis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}^3$. Primeiramente, note que se ρ é uma representação que satisfaz estas condições, então $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow W_d$, com $W_d \simeq \mathbb{C}^3$. Com isto, concluímos que $d = 2$.

Fato 2.3.5. *Se ρ é irredutível, então sua ação induzida não admite nenhum conjunto finito invariante diferente de $\{0\}$.*

Suponha que assim não fosse. Da discussão anterior podemos considerar apenas a ação induzida em $W_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$. Seja $S \subset W_2$ um conjunto finito de polinômios invariante pela ação de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; isto é, se $0 \neq P \in S$ e $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ então $A(P) \in S$. Se A é um elemento de ordem infinita, como S é finito então existe $n > 0$ tal que $A^n(P) = P$.

Seja, então, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = ax^2 + bxy + cy^2$. Concluímos que $A^n(P) = ax^2 + (2an + b)xy + (an^2 + bn + c)y^2 = P$ se, e só se,

$$a = a, \quad 2an + b = b \quad an^2 + bn + c = c$$

ou, equivalentemente, $a = b = 0$ e $P = cy^2$, com $c \in \mathbb{C}$.

Considere agora $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e o mesmo $P = ax^2 + bxy + cy^2$. Neste caso as relações implicam $b = c = 0$ e $P = ax^2$ com $a \in \mathbb{C}$. Donde concluiríamos $P \equiv 0$, contradição. Logo S não pode ser invariante pela ação de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

2.4 Teorema de Lie

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie podemos definir o subespaço

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$$

chamado **comutador de $\mathfrak{g}$** e a **série derivada de $\mathfrak{g}$** consistindo nos subconjuntos

$$D^0 \mathfrak{g} \supset D^1 \mathfrak{g} \supset D^2 \mathfrak{g} \supset \dots$$

tais que $D^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ e $D^{i+1} \mathfrak{g} = [D^i \mathfrak{g}, D^i \mathfrak{g}]$. Dizemos que uma álgebra de Lie é **solúvel** se existe n tal que $D^n \mathfrak{g} = 0$.

Lema 2.4.1. *Seja $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie solúvel em um espaço vetorial de dimensão finita. Então existe um vetor v de V tal que $\rho(x)v = \lambda_x v$ para todo x em $\mathfrak{g}$, isto é, v é autovetor para todo operador $\rho(x)$.*

Dem. A demonstração segue por indução na dimensão de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ é solúvel, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ e, visto que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é subespaço de $\mathfrak{g}$, existe $\mathfrak{g}'$ subespaço de codimensão 1 tal que $\mathfrak{g} \supsetneq \mathfrak{g}' \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Como $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'$, temos que $\mathfrak{g}'$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Portanto, $\mathfrak{g}'$ é solúvel. Note que, da definição, $[g, h] \in \mathfrak{g}'$ para quaisquer $g, h \in \mathfrak{g}$ e também como $\mathfrak{g}'$ é de codimensão 1 existe elemento $g \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}g$.

Segue da hipótese de indução que existe um vetor $v \in V$, que é autovetor de $\rho(h)$ para todo $h \in \mathfrak{g}'$; isto é, $\rho(h)v = \lambda_h v$.

Considere o espaço vetorial W gerado por $v_0 := v, v_1 := \rho(g)v, v_2 := \rho^2(g)v, \dots$. Afirmamos que W é estável sob a ação de qualquer $h \in \mathfrak{g}'$. Mais especificamente

$$\rho(h)v_k = \lambda_h v_k + \sum_{l < k} a_l(h)v_l, \quad a_l(h) \in \mathbb{C}.$$

A prova da afirmação segue por indução. O caso de v_0 é trivial e

$$\rho(h)v_k = \rho(h)\rho(g)v_{k-1} = \rho(g)\rho(h)v_{k-1} + \rho([h, g])v_{k-1} = \lambda_h v_k + \lambda_{[h, g]}v_{k-1} + \dots$$

Portanto, W é estável sob a ação de $\mathfrak{g}'$. Como possui W dimensão finita existe um inteiro n tal que $v_0, \dots, v_n$ formam uma base para W . Vemos que, nesta base, e restrita a este espaço, a matriz de $\rho(h)$ é triangular superior com λ_h nas posições da diagonal. Em particular, $\text{tr}_W \rho(h) = (n+1)\lambda_h$. Lembrando que $\text{tr}_W [\rho(h), \rho(g)] = 0$, isto implica que $\lambda_{[h, g]} = 0$ para todo h em $\mathfrak{g}'$. Portanto, a fórmula acima se reescreve na forma $\rho(h)v_k = \lambda_h v_k$. Concluimos que todo vetor $w \in W$ é autovetor para $\rho(h)$ para todo h em $\mathfrak{g}'$. Escolhamos w autovetor de $\rho(g)$ em W . Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}g$, então $\rho(h + ag)w = \rho(h)w + a\rho(g)w = (\lambda_h + a\lambda_g)w$. $\square$

Teorema 2.4.2. (Lie) *Seja $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie solúvel em um espaço vetorial de dimensão finita. Então, existe uma base de V tal que $\rho(x)$ é triangular superior para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Dem. Aplicamos indução sobre a dimensão n de V . Pelo Lema anterior, existe $v \in V$ autovetor de $\rho(x)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Seja $\langle v \rangle$ o subespaço gerado por v e considere $W = V/\langle v \rangle$. Pela hipótese de indução, existe uma base $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ de W , tal que a ação de $\mathfrak{g}$ nessa base de W é triangular superior, escolhamos uma pré-imagem $\tilde{v}_i$ em V para cada vetor da base, então é claro que a ação de ρ na base $v, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ é triangular superior. $\square$

As demonstrações do Lema e do Teorema anteriores tomam o seguinte sentido: se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel, uma representação de $\mathfrak{g}$ num espaço de dimensão finita V induz uma ação de $\mathfrak{g}$ em V . Esta ação, por sua vez, mantém uma reta de V invariante (a reta na direção do autovetor). Uma vez que garantimos a existência de uma reta invariante sob a ação de ρ , a aplicação sucessiva do Lema em espaços quocientes nos garante a existência de uma sequência de subespaços $V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V$ invariantes sob a ação de ρ com $\dim V_d = d$.

2.5 Álgebras de Lie de dimensão 2

No trabalho de Fulton e Harris [13], pág. 134, encontramos uma classificação de grupos algébricos simplesmente conexos que possuem álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com dimensão até três. Comentamos a classificação no caso de álgebras de Lie de dimensão dois sem entrar em detalhes técnicos. Tal classificação se ramifica se $\mathfrak{g}$ é abeliana ou não.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita **abeliana** se $[x, y] = 0$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ (em particular, $\mathfrak{g}$ é solúvel).

Os grupos do caso abeliano se reduzem a $\mathbb{C}^2$ com a operação de adição e quocientes de $\mathbb{C}^2$ por subgrupos discretos, também munidos da operação de adição.

O único grupo do caso não abeliano é dado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Note que este grupo é o grupo de transformações afins da reta $A_1(\mathbb{C})$ já discutido no exemplo 2.1.4.

2.6 Simetrias e Derivadas de Lie

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ e $\mathcal{X}$ um campo em $\chi(\mathbb{P}^2)$, diremos que $\mathcal{X}$ é uma **simetria** da folheação se o fluxo desse campo coincide com o fluxo do campo associado à folheação. Tornemos esta definição mais precisa: se $\mathcal{F}$ é descrita em carta afim pela forma ω , diremos que $\mathcal{X}$ é simetria de $\mathcal{F}$ se o fluxo $\exp(t\mathcal{X}) = \Psi_t$ satisfaz a igualdade $\Psi_t^*(\omega) = \lambda_t \omega$ com $\lambda_t \in \mathbb{C}$ para todo t .

Uma forma de identificar simetrias é utilizando o conceito de derivada de Lie de um campo, em relação a um segundo campo. A grosso modo, a derivada de Lie de $\mathcal{Y}$ em relação a $\mathcal{X}$ faz o papel de uma derivada direcional em relação ao campo $\mathcal{X}$ e nos diz o quão “alinhados” estão os campos.

Definição 2.6.1. *Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ campos em uma variedade e p um ponto. A **derivada de Lie** de $\mathcal{Y}$ com respeito a $\mathcal{X}$ no ponto p é definida por*

$$(L_{\mathcal{X}}\mathcal{Y})_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi_{-t})_*(\mathcal{Y}|_{\Psi_t(p)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Psi_{-t})_*(\mathcal{Y}|_{\Psi_t(p)}) - \mathcal{Y}|_p}{t}$$

em que $(\Psi_{-t})_*$ é o pushforward pelo fluxo de $\mathcal{X}$ em $-t$.

Exemplo 2.6.2. $(L_{\mathcal{X}}\mathcal{X})_p = 0$ para todo p . Isso decorre simplesmente de $(\Psi_{-t})_*(\mathcal{X}|_{\Psi_t(p)}) = \mathcal{X}|_{\Psi_0(p)} = \mathcal{X}|_p$ e da definição.

Observamos também que a derivada de Lie está relacionada a uma conhecida estrutura, a saber a estrutura do colchete de Lie:

Proposição 2.6.3. *Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ campos em $\mathbb{P}^2$, então $L_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$.*

Dem. Suponha, inicialmente, que p é um ponto não singular de $\mathbb{P}^2$ em ambos campos. Nesse caso podemos usar o Teorema da Vizinhança Tubular 1.2.6 e encontrar uma vizinhança de p tal que $\mathcal{X} = \partial_x$. Com isso, seu fluxo é dado por $\Psi_t(p) = (p_1 + t, p_2)$ e $\mathcal{Y} = Y_1\partial_x + Y_2\partial_y$. A Jacobiana de $\Psi_t(p)$ relativamente a x e y , nestas coordenadas, é a identidade. Portanto,

$$(\Psi_{-t}(p))_* ((Y_1\partial_x)|_{\Psi_t(p)} + (Y_2\partial_y)|_{\Psi_t(p)}) = Y_1(p_1 + t, p_2)\partial_x|_p + Y_2(p_1 + t, p_2)\partial_y|_p.$$

Lembrando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y_1(p_1 + t, p_2) - Y_1(p_1, p_2))}{t} = \frac{\partial Y_1}{\partial x}(p_1, p_2)$$

e que vale uma igualdade similar para a outra coordenada, obtemos da definição de derivada de Lie

$$\begin{aligned} (L_{\mathcal{X}}\mathcal{Y})_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi_{-t})_*(\mathcal{Y}|_{\Psi_t(p)}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Psi_{-t})_*(\mathcal{Y}|_{\Psi_t(p)}) - \mathcal{Y}|_p}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y_1(p_1 + t, p_2) - Y_1(p_1, p_2))}{t} \partial_x|_p + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y_2(p_1 + t, p_2) - Y_2(p_1, p_2))}{t} \partial_y|_p \\ &= \frac{\partial Y_1}{\partial x}(p_1, p_2) \partial_x|_p + \frac{\partial Y_2}{\partial x}(p_1, p_2) \partial_y|_p \\ &= [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_p \end{aligned}$$

como desejávamos. Além disso, visto que as singularidades dos campos são isoladas, pelo Teorema de Extensão de Hartogs (ver [11], Cap. VI, Teorema 4.2), podemos estender continuamente $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ para tais pontos e a igualdade é satisfeita em todo ponto de $\mathbb{P}^2$. $\square$

Similarmente a campos podemos definir a derivada de Lie para formas da seguinte maneira:

Definição 2.6.4. *A **derivada de Lie** de uma forma ω , com respeito ao campo $\mathcal{X}$, num ponto p , é definida por*

$$L_{\mathcal{X}}\omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_t^*(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi_t^*(\omega|_{\Psi_t(p)}) - \omega|_p}{t}$$

em que Ψ_t^* é o pullback do fluxo com respeito a $\mathcal{X}$.

Sejam $\omega = w_0 dx_0 + \dots + w_n dx_n$ uma 1-forma polinomial e $\mathcal{X} = \alpha_0 \partial_{x_0} + \dots + \alpha_n \partial_{x_n}$ um campo em $\mathbb{C}^{n+1}$. Utilizamos o produto interior de ω por $\mathcal{X}$ (definido na página 9):

$$\iota_{\mathcal{X}}\omega = \alpha_0 w_0 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Um caso particular interessante se dá quando $\omega = df$, em que f é uma função holomorfa em $n + 1$ variáveis. Neste caso

$$\iota_{\mathcal{X}}df = \alpha_0 f_{x_0} + \cdots + \alpha_n f_{x_n} = \mathcal{X}(f),$$

em que $f_{x_i} = \partial f / \partial x_i$. Generalizamos a construção para d -formas da seguinte maneira: se $\omega_1, \dots, \omega_d$ são 1-formas então

$$\iota_{\mathcal{X}}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_d) = \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \iota_{\mathcal{X}}\omega_j \wedge \cdots \wedge \omega_d,$$

Destas regras $\iota_{\mathcal{X}}\omega$ está bem definido para toda d -forma em n variáveis. Quando não houver risco de ambiguidade na notação utilizaremos $\iota_{\mathcal{X}}\omega = \omega(\mathcal{X})$.

Note que as propriedades do pullback $d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(d\omega)$ e $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$ implicam respectivamente

$$\begin{aligned} dL_{\mathcal{X}}\omega &= L_{\mathcal{X}}d\omega \\ L_{\mathcal{X}}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= L_{\mathcal{X}}\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_{\mathcal{X}}\omega_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para detalhes, ver [10], pág. 61. Em particular, se f é uma função holomorfa $L_{\mathcal{X}}(f\omega) = L_{\mathcal{X}}(f)\omega + fL_{\mathcal{X}}(\omega)$. Usamos estas propriedades para demonstrar:

Proposição 2.6.5. (*Fórmula Mágica de Cartan*) *Seja ω uma 1-forma e $\mathcal{X}$ um campo em $\mathbb{C}^{n+1}$ então $L_{\mathcal{X}}\omega = \iota_{\mathcal{X}}d\omega + d(\iota_{\mathcal{X}}\omega)$.*

Dem. Note, primeiramente, que vale uma igualdade equivalente para polinômios homogêneos f em $n + 1$ variáveis, isto é $L_{\mathcal{X}}f = \iota_{\mathcal{X}}df$. Com efeito, se $p \in \mathbb{P}^n$ e $\alpha(t) = (\alpha_0(t), \dots, \alpha_n(t))$ é a curva integral de $\mathcal{X}$ tal que $\alpha(0) = p$, então

$$\begin{aligned} (L_{\mathcal{X}}f)_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Psi_t^* f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha) \\ &= f_{x_0}(p)\alpha'_0(0) + \cdots + f_{x_n}(p)\alpha'_n(0) = df(\mathcal{X})|_p. \end{aligned}$$

Suponha, então, que ω é uma 1-forma. Pela linearidade da derivada de Lie, basta provar a igualdade quando $\omega = fdx_0$, com f polinômio. Mas,

$$L_{\mathcal{X}}\omega = (L_{\mathcal{X}}f)dx_0 + fL_{\mathcal{X}}(dx_0) = (\iota_{\mathcal{X}}df)dx_0 + fd(\iota_{\mathcal{X}}dx_0).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{X}}(d\omega) + d(\iota_{\mathcal{X}}\omega) &= \iota_{\mathcal{X}}(d(fdx_0)) + d(\iota_{\mathcal{X}}(fdx_0)) = \iota_{\mathcal{X}}(df \wedge dx_0) + d(f(\iota_{\mathcal{X}}dx_0)) \\ &= (\iota_{\mathcal{X}}df)dx_0 - df(\iota_{\mathcal{X}}dx_0) + df(\iota_{\mathcal{X}}dx_0) + fd(\iota_{\mathcal{X}}dx_0) = L_{\mathcal{X}}\omega. \end{aligned}$$

□

Observação 2.6.6. *O argumento acima pode ser generalizado para d -formas por indução.*

Podemos observar agora o comportamento da derivada de Lie em presença de simetrias de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 2.6.7. *Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ campos em um aberto de $\mathbb{C}^2$ e seja ω a forma dual de $\mathcal{Y}$. Então $\mathcal{X}$ é simetria de $\mathcal{Y}$ se, e somente se, existe uma função holomorfa g tal que $L_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} = g\mathcal{Y}$, ou equivalentemente, $L_{\mathcal{X}}\omega = g\omega$.*

Dem. Suponha que $\mathcal{X}$ é simetria de $\mathcal{Y}$. Podemos utilizar as definições de derivada de Lie e simetria para formas nos pontos não singulares de $\mathcal{X}$ para obtermos

$$L_{\mathcal{X}}\omega = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi_t^*(\omega) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_t \right) \omega.$$

Resta-nos provar que $g = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \lambda_t$ é holomorfa. De fato, seja $\mathcal{Z} = L_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}$, a igualdade acima pode ser reescrita como $\mathcal{Z} = g\mathcal{Y}$. Sejam Y_i e Z_i funções polinomiais da i -ésima coordenada de $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ respectivamente. Então $g = Z_i/Y_i$ para cada i nos pontos em que Y_i é diferente de 0. Mas, nestes pontos, g é holomorfa, e como as singularidades dos campos são isoladas, o Teorema de Extensão de Hartogs, garante que podemos estender g de forma que g seja holomorfa em $\mathbb{P}^2$.

Reciprocamente, suponha que $L_{\mathcal{X}}\omega = g\omega$. Pelo Teorema da Vizinhança Tubular, 1.2.6, existem coordenadas locais (x, y) tais que $\mathcal{X} = \partial_x$. Neste caso, $\Psi_t(p) = (p_0 + t, p_1)$. Seja $\omega = A dx + B dy$ com A, B funções holomorfas. Da fórmula de Cartan temos

$$g\omega = L_{\partial_x}\omega = \iota_{\partial_x}d\omega + d(\iota_{\partial_x}\omega) = A_x dx + B_x dy,$$

que induz o sistema

$$\begin{cases} A_x = gA \\ B_x = gB. \end{cases}$$

Podemos, então, calcular soluções explícitas para obter os coeficientes A e B gerais da forma

$$\omega = \tilde{A}(y, z) \exp \left(\int_0^x g ds \right) dx + \tilde{B}(y, z) \exp \left(\int_0^x g ds \right) dy.$$

Concluimos que $\Psi_t^*(\omega) = \exp \left(\int_x^{x+t} g ds \right) \omega = G_t \omega$ para cada t , em outras palavras, o campo $\mathcal{X} = \partial_x$ é simetria de $\mathcal{Y}$. □

Corolário 2.6.8. *O campo polinomial $\mathcal{X}$ é simetria do campo polinomial $\mathcal{Y}$ em $\mathbb{C}^2$ se, e somente se, existe função polinomial g em $\mathbb{C}^2$ tal que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = g\mathcal{Y}$.*

Dem. De acordo com a proposição anterior, existe uma função holomorfa g em $\mathbb{C}^2$ tal que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = g\mathcal{Y}$. Como $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são polinomiais, então

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{X} \circ \mathcal{Y} - \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}$$

também é polinomial, logo g é racional e pode ser escrita g_1/g_2 com g_1 e g_2 polinomiais. Por outro lado, g é holomorfa em todo $\mathbb{C}^2$ e, portanto,

$$g = g_1/g_2 = \sum_{i+j \geq 0} s_{ij} x^i y^j = S.$$

Como $g_1 = g_2 S$ é polinomial então S é uma soma finita, portanto, polinomial e g_2 é constante. Concluimos, assim, que g é polinomial. $\square$

Lema 2.6.9. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação definida pela 1-forma ω . Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são duas simetrias de $\mathcal{F}$, independentes sobre $\mathbb{C}$, então $\frac{\omega(\mathcal{X})}{\omega(\mathcal{Y})}$ é uma integral primeira racional não constante de $\mathcal{F}$.*

Dem. O lema segue da seguinte observação: se g e h são funções racionais tais que $h \neq 0$, $g \neq ch$, para todo $c \in \mathbb{C}$, e, além disso, $g\omega$ e $h\omega$ são formas fechadas então g/h é uma integral primeira racional não constante de ω . Esta afirmação, por sua vez, segue da definição de integral primeira e da regra de Leibniz para diferenciais.

Primeiramente, note que se $\mathcal{X}$ é simetria de $\mathcal{F}$ então $\omega(\mathcal{X})$ é fator integrante, isto é $\frac{\omega}{\omega(\mathcal{X})}$ é fechada. De fato, o numerador de $d\left(\frac{\omega}{\omega(\mathcal{X})}\right)$ é dado por

$$\iota_{\mathcal{X}}(\omega)d\omega - \omega \wedge d(\iota_{\mathcal{X}}\omega).$$

Como $\mathcal{X}$ é simetria vale $L_{\mathcal{X}}\omega = \iota_{\mathcal{X}}d\omega + d(\iota_{\mathcal{X}}\omega) = g\omega$. Com isso, a expressão acima se torna

$$\iota_{\mathcal{X}}(\omega)d\omega - \omega \wedge (g\omega - d(\iota_{\mathcal{X}}\omega)) = (\iota_{\mathcal{X}}\omega)d\omega + \omega \wedge d(\iota_{\mathcal{X}}\omega).$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\omega = a_0 dx_0$. Seja $\mathcal{X} = \sum_{i=0}^n A_i \partial_{x_i}$.

Portanto, $\iota_{\mathcal{X}}\omega = A_0 a_0$, $d\omega = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial x_i} (dx_0 \wedge dx_i)$ e $\iota_{\mathcal{X}}d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial x_i} (A_0 dx_i - A_i dx_0)$.

Com isto, obtemos,

$$\begin{aligned}
& \iota_{\mathcal{X}}(\omega)d\omega + \omega \wedge d(\iota_{\mathcal{X}}\omega) \\
&= -A_0a_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial x_i} (dx_0 \wedge dx_i) + (a_0 dx_0) \wedge \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial x_i} (A_0 dx_i - A_i dx_0) \\
&= -A_0a_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial x_i} (dx_0 \wedge dx_i) + A_0a_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial x_i} (dx_0 \wedge dx_i) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que o numerador de $d\left(\frac{\omega}{\omega(\mathcal{X})}\right)$ é nulo, o que prova o resultado desejado. $\square$

Capítulo 3

Órbitas sob a ação de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$

Estamos agora prontos para analisar o efeito de automorfismos de $\mathbb{P}^2$ nas folheações classificadas anteriormente e em folheações de grau dois mais gerais. Primeiramente, vemos o efeito da ação do grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ nas órbitas dessas folheações para determinar suas dimensões.

3.1 Dimensão das Órbitas

Lembramos que vimos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ no exemplo 2.1.7 da página 26. Nos restringimos à ação de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ em $\mathbb{P}^2$, que também age em particular em $\mathcal{F}(2, n)$, o conjunto de folheações de codimensão 1 e grau n em $\mathbb{P}^2$. Denotaremos o grupo de isotopia de uma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, n)$ por $\mathrm{iso}(\mathcal{F})$ e sua órbita sob a ação de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ por $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

Fato 3.1.1. *O conjunto $\mathcal{F}(2, n)$ é um aberto Zariski num espaço projetivo.*

Tal conjunto pode ser representado como o conjunto das 1-formas de grau n nas variáveis x, y e z , com P, Q, R polinômios homogêneos de grau $n+1$ sem componente comum que satisfazem a identidade de Euler $Px + Qy + Rz = 0$ (ver Definição 1.3.4).

Seja Ω_d o espaço das 1-formas polinomiais de grau d em x, y, z , satisfazendo a identidade de Euler em $\mathbb{P}^2$ e S_k o conjunto de polinômios homogêneos de grau k em três variáveis. Considere agora a aplicação:

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathbb{P}(S_k) \times \mathbb{P}(\Omega_{n+1-k}) &\longrightarrow \mathbb{P}(\Omega_{n+1}) \\ [f] \times [\omega] &\longmapsto [f\omega] \end{aligned}$$

Desta forma, a imagem de π_k consiste nas formas $Pdx + Qdy + Rdz$ satisfazendo a identidade de Euler tais que P, Q, R são divisíveis por um polinômio de grau k . Provemos que esta imagem é fechada: note que a aplicação não estaria definida

apenas se $[f\omega] = 0$, o que ocorreria se, e somente se, $[f] = 0$ ou $[\omega] = 0$, o que é impossível. Logo, π_k é um morfismo regular, cujo domínio é uma variedade projetiva. Isto implica que sua imagem é fechada. Concluimos que $\mathcal{F}(2, n) = \Omega_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} \text{Im}(\pi_k)$ é aberto.

Por outro lado, $\mathcal{F}(2, n)$ está contido no espaço projetivo parametrizado pelos coeficientes de P, Q e R . Ademais, a identidade de Euler impõe condições lineares neste espaço projetivo. Portanto, o conjunto $\mathcal{F}(2, n)$ é isomorfo a um aberto de um $\mathbb{P}^N$.

Em particular, no caso de $\mathcal{F}(2, 2)$, P, Q e R são polinômios homogêneos em x, y, z de grau 3. Portanto, a quantidade de monômios destes três polinômios é dada por $3\binom{5}{3} = 30$ e a identidade de Euler induz 15 hiperplanos em $\mathbb{P}^{29}$ (ver B.3 no apêndice), concluimos que $\mathcal{F}(2, 2)$ é um aberto em $\mathbb{P}^{14}$.

Proposição 3.1.2. *As dimensões de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_i}$ são*

$$\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}_1} = 6, \dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}_2} = 7, \dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}_3} = 7, \dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}_4} = 8.$$

Mais precisamente, os grupos $\text{iso}(\mathcal{F}_i)$ são dados por

- (a) $\text{iso}(\mathcal{F}_1) = \{(a^3x : a^2y : z + bx) \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$
- (b) $\text{iso}(\mathcal{F}_2) = \{(x : ax + y : -a(a+2)x - 2ay + z) \mid a \in \mathbb{C}\}$
- (c) $\text{iso}(\mathcal{F}_3) = \{(x : \pm y : z + ax) \mid a \in \mathbb{C}\}$
- (d) $\text{iso}(\mathcal{F}_4) = \{id, (jx : j^2y : z), (j^2x : jy : z) \mid j = e^{2\pi i/3}\}$

Dem. Conseguimos determinar os grupos de isotopia na lista de modo computacional. Para acompanhar o método nos referimos à Seção B.5 no Apêndice. Disto segue que $\dim \text{iso}(\mathcal{F}_1) = 2, \dim \text{iso}(\mathcal{F}_2) = \dim \text{iso}(\mathcal{F}_3) = 1$ e $\dim \text{iso}(\mathcal{F}_4) = 0$.

Quanto à dimensão das órbitas, seja $\varphi : \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}_i}$. Pelo Teorema de Dimensão das Fibras (ver Shafarevich [14], Cap. I, Seção 6.3., Teorema 7) existe um aberto $W \subset \mathcal{O}_{\mathcal{F}_i}$ tal que $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}_i} = \dim \text{PGL}_3(\mathbb{C}) - \dim \varphi^{-1}(\omega)$ para todo $\omega \in W$.

Note, porém, que todo $\omega \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}_i}$ é da forma $\omega = g\omega_i$, em que ω_i é a forma que descreve a folheação $\mathcal{F}_i$ e $g \in \text{PGL}_3(\mathbb{C})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\omega) &= \varphi^{-1}(g\omega_i) = \{h \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \mid h\omega_i = g\omega_i\} \\ &= \{h \in \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \mid g^{-1}h\omega_i = \omega_i\} \simeq \text{iso}(\mathcal{F}_i). \end{aligned}$$

Como $\dim \text{PGL}_3(\mathbb{C}) = 8$, segue-se o resultado desejado. $\square$

Voltamos nossa atenção à integral primeira racional F de uma 1-forma ω que descreve a folheação $\mathcal{F}$. É possível definir uma aplicação de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ no conjunto de integrais primeiras racionais de $\mathcal{F}$. Para isto basta considerar $F = f/g$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

e a aplicação $A \mapsto F_A = \frac{a_1 f + a_2 g}{b_1 f + b_2 g}$. Note que

$$\begin{aligned} dF_A &= \frac{(a_1 df + a_2 dg)(b_1 f + b_2 g) - (b_1 df + b_2 dg)(a_1 f + a_2 g)}{(cf + dg)^2} \\ &= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{(cf + dg)^2} (gdf - fdg). \end{aligned}$$

Como F é integral primeira de $\mathcal{F}$ então F_A também o é.

No que segue, faremos uso de um teorema cuja demonstração pode ser encontrada no trabalho de Cerveau e Mattei [15], pág.137.

Teorema 3.1.3. *Seja ω um germe em $0 \in \mathbb{C}^n$ de uma 1-forma holomorfa integrável possuindo integral primeira meromorfa pura. Então existe um germe de função meromorfa $\tilde{F}$, única, a menos de composição à esquerda com a aplicação definida acima, tal que o conjunto de integrais primeiras meromorfas de ω é $\mathbb{C}(\tilde{F}) = \{R \circ \tilde{F} \mid R \in \mathbb{C}(x)\}$. Diremos neste caso que $\tilde{F}$ é minimal.*

Com isto, estamos prontos para minorar a dimensão das órbitas de $\mathcal{F}(2, n)$ sob ação de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ através da

Proposição 3.1.4. *Seja $n \geq 2$ e $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, n)$. Então $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \geq 6$.*

Dem. Suponha, por contradição, que $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \leq 6$. Pelo Teorema de dimensão das fibras temos

$$\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}} + \dim \mathrm{iso}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) = \dim \chi(\mathbb{P}^2) = 8.$$

Portanto, $\dim \mathrm{iso}(\mathcal{F}) = \dim \mathbf{iso}(\mathcal{F}) \geq 2$. Logo, existem campos $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbf{iso}(\mathcal{F})$ tais que $\mathcal{X} \neq c\mathcal{Y}$ para todo $c \in \mathbb{C}^*$. Mas isto implica, pelo Lema 2.6.9, que $\mathcal{F}$ admite integral primeira racional não constante, digamos $F = f/g$. Pelo Teorema acima, podemos escolher $\tilde{F}$ minimal para $\mathcal{F}$. Note que, se $\varphi \in \mathrm{iso}(\mathcal{F})$, então $\tilde{F} \circ \varphi = \varphi^* \tilde{F}$ é integral primeira minimal de $\varphi^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Portanto, a afirmação sobre unicidade no Teorema anterior nos garante que $\varphi^* \tilde{F} = \tau_{\varphi}(\tilde{F})$ com τ_{φ} em $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Desta forma escrevemos o morfismo de grupos algébricos

$$\begin{aligned} \tau : \mathrm{iso}(\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \\ \varphi &\longmapsto \tau_{\varphi}. \end{aligned}$$

Demonstraremos, por contradição, que o núcleo de τ é um subgrupo discreto de $\text{iso}(\mathcal{F})$. Suponha que a $\dim(\ker \tau)$ fosse maior ou igual a 1. Poderíamos, então, tomar um subgrupo parametrizado $\{\varphi_t\} \subseteq \ker \tau$ tal que $f \circ \varphi_t = f$ para todo t . Em outras palavras, dado $p \in \mathbb{P}^2$:

$$(f \circ \varphi_t)(p) = f(p) = c \text{ ou } \varphi_t(p) \subset f^{-1}(c).$$

Portanto, a curva $\varphi_t(p)$ está contida numa folha de $\mathcal{F}$, de modo que $\Psi(t, p) = \varphi_t(p)$ define um fluxo que coincide com o fluxo da folheação $\mathcal{F}$. Porém, $\varphi_t \in \text{iso}(\mathcal{F}) \subset \text{PGL}_3(\mathbb{C})$, donde $\varphi_t = A(t)$, em que $A(t)$ é uma matriz 3×3 . Logo, $\Psi(t, p) = A(t)p$ depende linearmente de p . Absurdo, pois supomos que o campo associado a $\mathcal{F}$ tem grau ≥ 2 .

Disto concluímos que a aplicação entre espaços tangentes

$$d_{id}\tau : \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

é injetiva. Logo, $\dim \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) = \dim \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) \leq \dim \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3$.

Suponhamos que $\dim \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) = 3$. Neste caso $\mathfrak{iso}(\mathcal{F}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Considere $\text{iso}^\circ(\mathcal{F})$ o componente neutro de $\text{iso}(\mathcal{F})$. Como $\mathfrak{iso}(\mathcal{F}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\text{iso}^\circ(\mathcal{F})$ é irredutível, obteremos a menos de isomorfismo $\text{iso}^\circ(\mathcal{F}) = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\text{iso}^\circ(\mathcal{F}) = \text{PGL}_2(\mathbb{C})$, pois estes são os únicos grupos algébricos irredutíveis com tal álgebra de Lie (ver Teorema 1 da seção “Lie Group-Lie Algebra Correspondence” de [16]).

Visto que podemos encarar $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ como o grupo quociente $\text{SL}_2(\mathbb{C})/\{1, -1\}$, em ambas as situações existe uma ação ρ de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{P}^2$. Restam-nos, portanto, dois casos a analisar:

Caso 1: ρ é irredutível. Logo ρ é a projeção da ação irredutível $\tilde{\rho}$ de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}^3$ que não admite a existência de folheação invariante $\mathcal{F}$ de grau maior ou igual a dois. De fato, se $\mathcal{F}$ fosse invariante, seu conjunto finito de singularidades $\text{Sing}(\mathcal{F})$ também o seria, o que contradiz o Fato 2.3.5.

Caso 2: ρ é redutível. Dessa forma a ação se decompõe em $\mathbb{C}^3$ como uma ação em $\mathbb{C}^2$ e uma ação em $\mathbb{C}$, que será necessariamente trivial. Assim, é possível escolher um sistema de coordenadas (x, y, z) tal que a ação pode ser escrita da forma

$$\text{SL}_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \ni \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (x, y, z) \mapsto (a_1x + a_2y, b_1x + b_2y, z).$$

Como a ação em z é trivial podemos nos restringir à ação em x, y ,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, (x, y) \mapsto (a_1x + a_2y, b_1x + b_2y). \quad (3.1)$$

Afirmação: Esta ação preserva apenas a folheação radial, cujo campo é $\mathcal{Z}_R = x\partial_x + y\partial_y$ e possui grau zero.

Provamos esta afirmação separadamente no Lema seguinte. Logo, pela impossibilidade de ambos os casos com $\dim \text{iso}(\mathcal{F}) = 3$, segue-se que $\dim \text{iso}(\mathcal{F}) \leq 2$ e, portanto, $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \geq 6$. $\square$

A demonstração da proposição torna-se completa ao demonstrarmos o:

Lema 3.1.5. *A ação (3.1) preserva apenas a folheação radial $\mathcal{Z}_R = x\partial_x + y\partial_y$.*

Dem. Primeiramente, denotamos um elemento da ação (3.1) por A e a forma dual de $\mathcal{Z}_R$ por $\omega_R = xdy - ydx$. Assim, obtemos,

$$\begin{aligned} A(\omega_R) &= (a_1x + a_2y)(b_1dx + b_2dy) - (b_1x + b_2y)(a_1dx + a_2dy) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)(xdy - ydx) = (a_1b_2 - a_2b_1)\omega_R \end{aligned}$$

Como $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ a folheação $\mathcal{Z}_R$ é invariante sob (3.1). Suponha que existe uma folheação não radial, determinada por um campo $\mathcal{X}$, invariante por esta ação. Então existe um ponto genérico p tal que a tangente à folha $\exp(t\mathcal{X})p$ que passa por p não passa pela origem (do contrário a folheação seria radial). Podemos aplicar uma mudança de coordenadas para supor $p = (1, 0)$. Considere o subgrupo

$$H = \{(x + a_2y, b_2y) \mid a_2 \in \mathbb{C}, b_2 \in \mathbb{C}^*\} \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

e note que ele fixa p . Além disso, como H fixa a folheação em questão, a folha $\exp(t\mathcal{X})p$ também permanece fixa. Concluimos, então, que a tangente à folha em p permanece fixa. Mas isto é impossível pois, se a tangente é dada pela equação

$$c_1x + c_2y + c_3 = 0, \text{ com } c_i \in \mathbb{C}$$

então, aplicando um elemento de H a esta equação, obteríamos que a equação da tangente possuiria a configuração

$$c_1x + (c_2b_2 + c_1a_2)y + c_3 = 0$$

donde $c_2 = c_2b_2 + c_1a_2$ para todo $b_2 \in \mathbb{C}^*$ e $a_2 \in \mathbb{C}$, absurdo. $\square$

Com isto, demonstramos a Proposição 3.1.4 e uma aplicação direta nos dá o seguinte resultado:

Corolário 3.1.6. *A folheação $\mathcal{F}_1$ realiza a dimensão minimal de órbitas em $\mathcal{F}(2, 2)$.*

3.2 Casos de dimensão minimal em $\mathcal{F}(2, n)$

Na última seção descobrimos a dimensão minimal para órbitas de $\mathcal{F}$ e, simultaneamente, a dimensão máxima de $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$. Através desta dimensão é possível entender melhor o comportamento da álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$, que expomos na proposição seguinte.

Proposição 3.2.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau n em $\mathbb{P}^2$. Se $\dim \mathfrak{iso}(\mathcal{F}) = 2$, então $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$ é isomorfa à álgebra de Lie de $A_1(\mathbb{C})$, o grupo de transformações afins da reta.*

Dem. Recorremos à discussão da Seção 2.5. A partir da mesma, basta mostrar que $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$ não é abeliana. Supomos, por contradição, que esse seja o caso.

Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ geradores de $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$. Segue do Teorema de Lie 2.4.2 que existe uma reta em $\mathbb{P}^2$ invariante por $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Podemos supô-la a reta no infinito C_z e que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são afins numa carta. Nesta mesma carta descreveremos $\mathcal{F}$ pelo campo $\mathcal{Z}$.

Provaremos que os colchetes $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}]$ e $[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]$ possuem um bom comportamento. Para tanto, considere $\mathcal{V}$ um elemento arbitrário de $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$. Lembramos que este campo é linear. Em todo ponto não singular, temos que $[\mathcal{V}, \mathcal{Z}]$ é múltiplo de $\mathcal{Z}$. Segundo o Corolário 2.6.8, existe uma função polinomial g em $\mathbb{C}^2$ tal que $[\mathcal{V}, \mathcal{Z}] = g\mathcal{Z}$. Como $\mathcal{V}$ é um campo linear afim, então possui grau 1. Logo, $\mathcal{V} \circ \mathcal{Z} - \mathcal{Z} \circ \mathcal{V}$ possui grau menor ou igual a $\mathcal{Z}$, i.e., grau $[\mathcal{V}, \mathcal{Z}] \leq \text{grau } \mathcal{Z}$. Portanto, g é constante. Aplicando esta observação aos campos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ temos

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = p\mathcal{Z} \qquad [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = q\mathcal{Z}$$

com p, q em $\mathbb{C}$. Da bilinearidade do colchete de Lie e a menos de substituir $\mathcal{X}$ por uma combinação linear apropriada de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ podemos supor

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = 0 \qquad [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = q\mathcal{Z}$$

com $q \in \mathbb{C}$. Analisamos, agora, a transversalidade dos campos. Suponhamos, primeiramente, que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são transversais. Neste caso, dado um ponto p não singular para $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, podemos aplicar o Teorema da Vizinhança Tubular (teorema 1.2.6) para obter uma vizinhança U de p e coordenadas x e y em U de modo que $\mathcal{X} = \partial_x$ e $\mathcal{Y} = \partial_y$. Expressando $\mathcal{Z}$ nestas coordenadas, obtemos

$$\mathcal{Z} = \alpha(x, y)\partial_x + \beta(x, y)\partial_y.$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\{x, y\}$, onde $\mathbb{C}\{x, y\}$ é o anel de séries de potência convergentes nas variáveis x e y . Mas, a igualdade

$$0 = [\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = \alpha_x \partial_x + \beta_x \partial_y$$

implica que α e β são independentes de x . Por outro lado, de

$$q\mathcal{Z} = [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = \alpha_y \partial_x + \beta_y \partial_y$$

obtemos

$$\alpha_y = q\alpha \text{ e } \beta_y = q\beta. \quad (3.2)$$

Como α e β são independentes de x , temos de (3.2) que $\alpha = re^{qy}$ e $\beta = se^{qy}$ para alguma escolha de $r, s \in \mathbb{C}$. Disto concluímos que

$$\mathcal{Z} = e^{qy}(r\partial_x + s\partial_y) = e^{qy}(r\mathcal{X} + s\mathcal{Y}).$$

Deduziremos que os campos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W} = r\mathcal{X} + s\mathcal{Y}$ são campos paralelos em $\mathbb{C}^2$. Suponha que $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W}$ são paralelos em abertos U_1 e U_2 que se intersectam, então podemos estender esta relação a $U_1 \cup U_2$ por extensão analítica. Concluímos que $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W}$ são paralelos em $\mathbb{C}^2 \setminus (\text{Sing}(\mathcal{Z}) \cap \text{Sing}(\mathcal{W}))$. Podemos utilizar novamente o Teorema de Extensão de Hartogs (já utilizado na Proposição 2.6.7) para concluir que $\mathcal{Z}$ é paralelo a $\mathcal{W}$ em todo $\mathbb{C}^2$. Onde a folheação $\mathcal{F}$ definida por $\mathcal{Z}$ é linear. Contradição.

Supomos, então, que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são sempre colineares (porém não $\mathbb{C}$ -colineares). Logo, em um ponto genérico uma nova aplicação do Teorema da Vizinhança Tubular nos permite encontrar coordenadas tais que

$$\mathcal{X} = \partial_x \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} = \delta \partial_x$$

com $\delta \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Mas, por hipótese, $\text{iso}(\mathcal{F})$ é abeliana. Logo, $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = 0$ e disto obtemos $\delta_x = 0$. Em outras palavras, $\delta = \delta(y) \in \mathbb{C}\{y\}$. Como $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ não podem ser $\mathbb{C}$ -colineares, $\delta(y)$ não pode ser constante e de $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = 0$ obtemos novamente

$$\mathcal{Z} = \alpha(y)\partial_x + \beta(y)\partial_y$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\{y\}$. Observe que $\beta \not\equiv 0$, caso contrário $\mathcal{Z}$ seria colinear a $\mathcal{X}$. A igualdade $[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = q\mathcal{Z}$ implica $q\alpha(y) = 0$ e $\beta(y)(q + \delta_y) = 0$ e portanto $\alpha \equiv 0$ e $\delta_y = -q \neq 0$, ou seja

$$\mathcal{X} = \partial_x, \quad \mathcal{Y} = (-qy + r)\partial_x, \quad \mathcal{Z} = \beta(y)\partial_y$$

com $q, r \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{C}\{y\}$.

O Lema 2.6.9 afirma que $\mathcal{F}$ possui uma integral primeira racional não constante F e de $\mathcal{Z}(F) = 0$ segue-se $F = F(x)$. Além disso, o fluxo de $\mathcal{Y}$ é dado por $\Psi_t(x, y) = (x + t\delta(y), y)$. Visto que $\mathcal{Y}$ é simetria de $\mathcal{F}$, $\Psi_t^*(F) = F(x + t\delta(y))$ ainda é integral primeira de $\mathcal{F}$. Portanto,

$$0 = \mathcal{Z}(F(x + t\delta(y))) = \beta F_x(x + t\delta(y))\delta_y(y)$$

Como $\beta \neq 0$, isto implica que $\delta_y(y) = 0$, contradição com $\delta_y(y) = -q \neq 0$ que deduzimos anteriormente. $\square$

Uma vez que sabemos mais sobre a estrutura de $\mathbf{iso}(\mathcal{F})$, é possível determinar com mais precisão o lugar geométrico das singularidades de $\mathcal{F}$ através do:

Lema 3.2.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau dois em $\mathbb{P}^2$. Suponha que a álgebra de Lie $\mathbf{iso}(\mathcal{F})$ é gerada por dois campos de vetores $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ tais que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$. Então existe uma reta em $\mathbb{P}^2$, invariante pelos campos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, à qual pertencem todos os pontos singulares de $\mathcal{F}$.*

Dem. Primeiramente, denotamos $\mathfrak{g} = \mathbf{iso}(\mathcal{F})$ e afirmamos que, nas condições do enunciado, esta álgebra é solúvel. De fato, $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é gerada por $\mathcal{Y}$. Como $[\mathcal{Y}, \mathcal{Y}] = 0$, temos $D^2\mathfrak{g} = [D\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}] = 0$. Logo, pelo Teorema de Lie, existe uma reta em $\mathbb{P}^2$ invariante por $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos supor que esta reta é C_z . Novamente nos restringimos à carta $\mathbb{A}_z^2$. Seja $\mathcal{Z}$ o campo que determina a folheação $\mathcal{F}$. Repetindo um argumento da Proposição anterior, obtemos

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = p\mathcal{Z} \quad \quad \quad \text{e} \quad \quad \quad [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = q\mathcal{Z}$$

com $p, q \in \mathbb{C}$. Da identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{X}, [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]] + [\mathcal{Y}, [\mathcal{Z}, \mathcal{X}]] + [\mathcal{Z}, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]] \\ &= [\mathcal{X}, q\mathcal{Z}] + [\mathcal{Y}, -p\mathcal{Z}] + [\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] = pq\mathcal{Z} - pq\mathcal{Z} - q\mathcal{Z} = -q\mathcal{Z} \end{aligned}$$

deduzimos $q = 0$.

Se as singularidades de $\mathcal{F}$ estão todas em C_z o lema está demonstrado. Caso contrário, existe um ponto p singular de $\mathcal{F}$ na carta $\mathbb{A}_z^2$. Em particular, note que p é ponto singular de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Com efeito, como p é singularidade, então p permanece fixo sob ação de qualquer elemento de $\mathbf{iso}(\mathcal{F})$, o que por sua vez implica que os campos de $\mathbf{iso}(\mathcal{F})$ são nulos em p .

Recorremos a uma mudança de coordenadas afim para supor $p = (0, 0)$ e $\mathcal{Y} = y\partial_x$ (ver Apêndice B.6). Como $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são lineares (pertencem a $\mathbf{iso}(\mathcal{F})$), temos que $\mathcal{X} = (a_1x + a_2y)\partial_x + (a_3x + a_4y)\partial_y$, para uma escolha de a_i em $\mathbb{C}$. Porém,

$$y\partial_x = \mathcal{Y} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = (a_3x + (a_4 - a_1)y)\partial_x - a_3y\partial_y.$$

Portanto, denotando $a_3 = a$ e considerando $\mathcal{X} - a_2\mathcal{Y}$ podemos supor

$$\mathcal{X} = -(1+a)x\partial_x - ay\partial_y \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} = y\partial_x.$$

Por sua vez, $\mathcal{Z}$ pode ser escrito como $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \phi\mathcal{Z}_R$ com $\mathcal{Z}_i$ campos de grau i , ϕ polinômio homogêneo quadrático e $\mathcal{Z}_R = x\partial_x + y\partial_y$ o campo radial. De $[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = 0$, obtemos, ao considerar os graus,

$$[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}_1] = [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}_2] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathcal{Y}, \phi\mathcal{Z}_R] = \mathcal{Y}(\phi)\mathcal{Z}_R = 0$$

Mas, $\mathcal{Y}(\phi) = 0$ implica que $\phi = by^2$, com $b \in \mathbb{C}$. Das igualdades anteriores segue-se também que

$$\mathcal{Z}_1 = (cx + ey)\partial_x + cy\partial_y \quad \mathcal{Z}_2 = (fy^2 + gxy)\partial_x + gy^2\partial_y$$

com $c, e, f, g \in \mathbb{C}$. Observe que, se $c = 0$, então $\mathcal{Z}$ é divisível por y e, portanto, não descreve uma folheação com conjunto singular finito. Disto resulta que $c \neq 0$ e, recorrendo a $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = p\mathcal{Z}$, obtemos

$$p(cx + ey)\partial_x + pcy\partial_y = p\mathcal{Z}_1 = [\mathcal{X}, \mathcal{Z}_1] = e(1+a)y\partial_x + aey\partial_y$$

de modo que $pc = 0$. Como $c \neq 0$, temos que $p = 0$. Escrevendo explicitamente as outras parcelas de $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}, \mathcal{Z}_2] &= ((1-a)fy^2 - agxy)\partial_x - agy^2\partial_y \\ [\mathcal{X}, \phi\mathcal{Z}_R] &= -ab(2y^2x\partial_x + 2y^3\partial_y). \end{aligned}$$

Logo, valem as relações

$$e = ab = ag = f(a-1) = 0.$$

Se f for nulo, $\mathcal{Z}$ é colinear ao campo radial e seu conjunto singular não será finito. Concluímos, portanto, que $a = 1$ e $b = g = 0$; donde $\mathcal{Z} = c\mathcal{Z}_R + ey^2\partial_x$. Podemos normalizar estes dois coeficientes a 1 (basta aplicar a mudança $(c^{-1}e^{\frac{1}{3}}x, e^{-\frac{1}{3}}y)$) o que faz com que o campo descreva a folheação dada por $ydx - xdy - y^2dy$ que possui integral primeira $\frac{x}{y} - y$ (ver algoritmo em B.4). Os pontos singulares desta folheação são $(1 : 0 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$ e a reta $\{y = 0\}$ satisfaz o enunciado. $\square$

Proposição 3.2.3. *Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, 2)$ uma folheação e suponha que a álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$ seja de dimensão 2, então $\mathcal{F}$ é, a menos de ação de automorfismo de $\mathbb{P}^2$, definida em carta afim por uma das seguintes 1-formas:*

$$(a) \ \omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx),$$

$$(b) \ \omega_5 = x^2 dy + y^2(xdy - ydx).$$

Em outras palavras, as órbitas associadas a estas formas são as únicas de dimensão 6 e são fechadas em $\mathcal{F}(2, 2)$. Os grupos de isotropia destas folheações são descritos em carta afim por:

$$\begin{aligned} \text{iso}(\mathcal{F}_1) &= \left\{ (a^3x, a^2y), \left(\frac{x}{1+bx}, \frac{y}{1+bx} \right) \middle| a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}, \\ \text{iso}(\mathcal{F}_5) &= \left\{ (a^2x, ay), \left(\frac{x}{1+by}, \frac{y}{1+by} \right) \middle| a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Dem. Primeiramente, o Lema 3.2.1 nos indica que $\text{iso}(\mathcal{F})$ é gerada por simetrias $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ tais que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$. Do Lema 3.2.2 estas duas simetrias preservam uma reta, que suporemos ser C_y , contendo $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

Caso $\mathcal{F}$ possua apenas um ponto singular, sabemos, do Teorema de classificação e da Proposição 3.1.2, que $\mathcal{F}$ é conjugada a $\mathcal{F}_1$. Consideremos, portanto, o caso em que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ possui dois pontos singulares distintos, que poderemos supor serem $(1 : 0 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$, a menos de automorfismo. Notemos que, em particular, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são singulares nestes pontos por pertencerem a $\text{iso}(\mathcal{F})$, como na proposição anterior.

Utilizamos a identidade $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$ para deduzirmos

$$\mathcal{X} = (r_1x + r_2y)\partial_x + r_3y\partial_y + \alpha y\mathcal{Z}_R \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} = sy\partial_x + \beta y\mathcal{Z}_R \quad (3.3)$$

com $r_i, s, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ satisfazendo as relações

$$(r_3 - r_1)s = s \text{ e } r_3\beta = \beta \quad (3.4)$$

e $\mathcal{Z}_R$ o campo radial. Como na proposição anterior, seja $\mathcal{Z}$ um campo que descreve a folheação $\mathcal{F}$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$ escrito da forma $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \phi\mathcal{Z}_R$ com $\mathcal{Z}_i$ campos de grau i e ϕ polinômio homogêneo quadrático.

Podemos supor que C_z não é invariante por $\mathcal{F}$ a menos de mudança de coordenadas. Isto por sua vez implica que ϕ não é identicamente nulo. Uma vez que $\mathcal{F}$ é singular em $(1 : 0 : 0)$ segue-se que $\phi = \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2$.

Sabendo que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são simetrias segue novamente, do Corolário 2.6.8 e da argumentação usada na proposição anterior, que

$$L_{\mathcal{X}}\mathcal{Z} = [\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = P_1\mathcal{Z} \quad (3.5)$$

$$L_{\mathcal{Y}}\mathcal{Z} = [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = P_2\mathcal{Z} \quad (3.6)$$

com P_i polinômios lineares em $\mathbb{C}$.

Tendo em vista que, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são campos afins e P é polinômio linear, vale a relação

$$[\mathcal{X}, P\mathcal{Y}] = \mathcal{X}(P)\mathcal{Y} + P[\mathcal{X}, \mathcal{Y}],$$

consideramos novamente a identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{X}, [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]] + [\mathcal{Y}, [\mathcal{Z}, \mathcal{X}]] + [\mathcal{Z}, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]] \\ &= [\mathcal{X}, P_2\mathcal{Z}] + [\mathcal{Y}, -P_1\mathcal{Z}] + [\mathcal{Z}, \mathcal{Y}] \\ &= \mathcal{X}(P_2)\mathcal{Z} + P_2[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] + \mathcal{Y}(-P_1)\mathcal{Z} - P_1[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] - P_2\mathcal{Z} \\ &= \mathcal{X}(P_2)\mathcal{Z} + P_1P_2\mathcal{Z} - \mathcal{Y}(P_1)\mathcal{Z} - P_1P_2\mathcal{Z} - P_2\mathcal{Z} \end{aligned}$$

da qual decorre

$$\mathcal{X}(P_2) - \mathcal{Y}(P_1) = P_2.$$

Além disso, escrevendo de maneira mais explícita $P_i = a_i + b_i x + c_i y$, a relação acima se reescreve da seguinte maneira

$$b_2(r_1 x + r_2 y) + c_2 r_3 y + \alpha y(b_2 x + c_2 y) - b_1 s y - \beta y(b_1 x + c_1 y) = a_2 + b_2 x + c_2 y.$$

Comparando os monômios obtemos que $a_2 = 0$ e também

$$\alpha(b_2 x + c_2 y) = \beta(b_1 x + c_1 y).$$

A comparação dos termos de maior grau em (3.5) implica que $[\alpha y \mathcal{Z}_R, \phi \mathcal{Z}_R] = (b_1 x + c_1 y)\phi \mathcal{Z}_R$. Mas, uma vez que ϕ é não nulo, obtemos $\alpha y = b_1 x + c_1 y$ e a comparação análoga em (3.6) nos dá $\beta y = b_2 x + c_2 y$. Disto obtemos as relações:

$$b_1 = b_2 = 0, \quad \alpha = c_1 \quad \beta = c_2.$$

A argumentação se bifurca de acordo com o anulamento ou não do coeficiente s : caso s seja nulo, argumentamos que a folheação $\mathcal{F}$ é conjugada a $\mathcal{F}_5$ descrita pela segunda 1-forma no enunciado; caso $s \neq 0$ demonstramos que esta configuração é impossível e isto conclui a demonstração da proposição. A título de organização e coerência tratamos cada caso separadamente em forma de lemas apresentados abaixo.

Note também que os grupos de isotropia são dados pelas afinizações dos grupos de ω_1 e ω_5 calculados em B.5. $\square$

Lema 3.2.4. *Sob as hipóteses da Proposição 3.2.3, supondo que $(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)$ pertencem a $\text{Sing}(\mathcal{F})$ e que $s = 0$ nas relações (3.3), então $\mathcal{F}$ é descrita em carta afim por $\omega_5 = x^2 dy + y^2(x dy - y dx)$.*

Dem. Sob estas condições podemos supor $\beta = 1$ em (3.3) e fazer uma combinação linear conveniente das simetrias para obter $\alpha = 0$. Reescrevemos $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$ e constatamos que $r_3 = 1$, além de obtermos as novas relações

$$\mathcal{X} = (r_1 x + r_2 y) \partial_x + y \partial_y \quad e \quad \mathcal{Y} = y \mathcal{Z}_R. \quad (3.7)$$

Disto, (3.5) e (3.6) se simplificam para

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = a_1 \mathcal{Z} \quad e \quad [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = y \mathcal{Z}$$

Esta última equação nos fornece

$$\begin{aligned} y(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \phi \mathcal{Z}_R) &= [y \mathcal{Z}_R, \mathcal{Z}_1] + [y \mathcal{Z}_R, \mathcal{Z}_2] + [y \mathcal{Z}_R, \phi \mathcal{Z}_R] \\ &= -\mathcal{Z}_1(y) \mathcal{Z}_R + y \mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_2(y) \mathcal{Z}_R + y \phi \mathcal{Z}_R \end{aligned}$$

donde, igualando os campos de mesmo grau, $\mathcal{Z}_2(y) = 0$ e $-\mathcal{Z}_1(y) \mathcal{Z}_R = y \mathcal{Z}_1$. Mas esta última igualdade implica $\mathcal{Z}_1 \equiv 0$. Portanto, segue-se que $\mathcal{Z} = Q \partial_x + \phi \mathcal{Z}_R$, com $Q = q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2$ polinômio quadrático tal que ϕ e Q não possuam componentes comuns e sejam ambos não nulos (o que implica em particular $q_{20} \neq 0$).

A identidade $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = a_1 \mathcal{Z}$ nos direciona ao sistema

$$\begin{cases} (r_1 x + r_2 y) \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} = (a_1 + r_1) Q, \\ (r_1 x + r_2 y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = a_1 \phi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Provaremos que podemos supor que $r_2 = 0$. Com efeito, encaremos $\mathcal{X}$ como operador linear no espaço W_2 dos polinômios homogêneos de grau dois. As equações acima nos indicam que Q e ϕ são autovetores do operador com autovalores $(a_1 + r_1)$ e a_1 respectivamente. A matriz do operador $\mathcal{X} = (r_1 x + r_2 y) \partial_x + y \partial_y$ na base $\{x^2, xy, y^2\}$ de W_2 é

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 2r_1 & 0 & 0 \\ 2r_2 & r_1 + 1 & 0 \\ 0 & r_2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se $r_1 = 1$, $\mathcal{X}$ tem autovalor 2 com multiplicidade 3 e a primeira equação do sistema (3.8) no conduz a

$$2q_{20}x^2 = (a_1 + 1)q_{20}x^2 \quad e \quad (2q_{20}r_2 + 2q_{11})xy = (a_1 + 1)q_{11}xy.$$

Como $q_{20} \neq 0$, a primeira relação implica que $a_1 = 1$ e, consequentemente, a segunda relação nos dá $r_2 = 0$. Se $r_1 \neq 1$, $\mathcal{X}$ possui autovalores distintos e é, portanto, diagonalizável. O vetor $\phi = \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2$ se escreve $\phi = \phi'_{11}xy + \phi'_{02}y^2$ na base de autovetores, ou seja, a diagonalização do operador não afeta o formato de ϕ ou de Q e portanto podemos supor $r_2 = 0$.

Por conseguinte, o sistema é dado pelas relações

$$\begin{aligned} 0 &= (r_1 - a_1)q_{20} = (1 - a_1)q_{11} = (2 - r_1 - a_1)q_{02} \\ &= (r_1 + 1 - a_1)\phi_{11} = (2 - a_1)\phi_{02}. \end{aligned}$$

Levando em conta $q_{20} \neq 0$, teremos que $r_1 = a_1$ e $\phi_{11} = 0$, que por sua vez implica $\phi_{02} \neq 0$ visto que ϕ é não trivial. Portanto $r_1 = a_1 = 2$ e $q_{11} = q_{02} = 0$.

Assim sendo, o campo que descreve a folheação é $\mathcal{Z} = q_{20}x^2\partial_x + \phi_{02}y^2\mathcal{Z}_R$. Usando uma mudança de coordenadas conveniente podemos normalizar $q_{20} = \phi_{02} = 1$ e $\mathcal{Z}$ é o campo associado a forma ω_5 . $\square$

Lema 3.2.5. *Sob as hipóteses da Proposição 3.2.3 e supondo que $(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)$ pertencem a $\text{Sing}(\mathcal{F})$, e que $s \neq 0$ nas relações (3.3), então $\mathcal{F}$ ainda é descrita em carta afim por $\omega_5 = x^2dy + y^2(xdy - ydx)$.*

Dem. Suponha que $s \neq 0$. Neste caso podemos normalizar ao caso $s = 1$. Disto a relação $(r_3 - r_1)s = s$ em (3.4) se torna $r_3 = r_1 + 1$. Considerando uma combinação linear conveniente $\mathcal{X} - r_2\mathcal{Y}$ no lugar de $\mathcal{X}$, podemos reescrever (3.3) como

$$\mathcal{X} = r_1x\partial_x + (r_1 + 1)y\partial_y + \alpha y\mathcal{Z}_R \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} = y\partial_x + \beta y\mathcal{Z}_R. \quad (3.9)$$

Considere as igualdades $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = (a_1 + \alpha y)\mathcal{Z}$ e $[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = \beta y\mathcal{Z}$, a identidade de Jacobi nos diz que

$$[\mathcal{X}, \beta y\mathcal{Z}] + [\mathcal{Y}, -(a_1 + \alpha y)\mathcal{Z}] - \beta y\mathcal{Z} = 0,$$

o que resulta em $\beta r_1 = 0$.

Caso $\beta = 0$: note que o campo $\mathcal{Y} = y\partial_x$ possui forma dual ydy , cuja homogeneização é $y(zdy - ydz)$. Aplicando a mudança de coordenadas projetiva $\varphi(x, y, z) = (z, y, x)$, esta última forma se torna $y(xdy - ydx)$ a homogeneização da forma afim $y(xdy - ydx)$ dual a $y\mathcal{Z}_R$ e os pontos singulares $(1 : 0 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$ trocam de papel. Podemos, portanto, supor $\mathcal{Y} = y\mathcal{Z}_R$. Fazendo uma combinação linear conveniente de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ recaímos no sistema (3.7) do Lema anterior, caso este já tratado.

Caso $r_1 = 0$: caso seja necessário, podemos aplicar a mudança $x = \beta^{-1}x$, de modo que podemos supor $\beta = 1$. Substituindo $\mathcal{X}$ por $\mathcal{X} - \alpha\mathcal{Y}$ podemos também supor que

$$\mathcal{X} = -\alpha y \partial_x + y \partial_y \quad \text{e} \quad \mathcal{Y} = y \partial_x + y \mathcal{Z}_R. \quad (3.10)$$

Que possuem formas duais $ydx + \alpha ydy$ e $-ydx + y(xdy - ydx)$ respectivamente. Utilizando a transformação linear $(x, y) \mapsto (x - \alpha y, y)$ transformamos a primeira forma em ydx e mantemos a segunda invariante, em outras palavras, podemos supor $\mathcal{X} = \mathcal{Z}_R$ e o campo $\mathcal{Y}$ permanece o mesmo. Note que esta simplificação implica que $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = a_1 \mathcal{Z}$ que, por sua vez, nos conduz novamente a um sistema como (3.8) (neste caso $r_1 = r_2 = 0$). Lembrando que $\mathcal{Z} = Q\partial_x + \phi\mathcal{Z}_R$, em que $Q = q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2$ e $\phi = \phi_{11}xy + \phi_{02}y^2$. A segunda equação de (3.8) implica

$$\phi_{11}xy + 2\phi_{02}y^2 = a_1\phi_{11}xy + a_1\phi_{02}y^2,$$

donde podemos extrair as relações $\phi_{11}(1 - a_1) = \phi_{02}(2 - a_1) = 0$, resultando em $a_1 = 1$ ou $a_1 = 2$. Se $a_1 = 1$, então $\phi_{02} = 0$ e, portanto, $\mathcal{Z}$ é divisível por y e, consequentemente, não possui uma quantidade finita de pontos singulares.

Se $a_1 = 2$, então $\phi_{11} = 0$. Portanto, levando em consideração a igualdade $[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] = a_1 \mathcal{Z}$, temos que $\mathcal{Z}$ ainda é divisível por y . Concluimos, portanto, que o único caso em que $s \neq 0$ é o caso do Lema anterior, no qual a folheação $\mathcal{F}$ é descrita por ω_5 . $\square$

Com isto, terminamos a exposição dos teoremas que concernem a geometria de folheações de grau 2. A seguir, apresentamos nos apêndices retratos de fase reais das principais folheações do texto e métodos computacionais utilizados em diversas proposições até aqui.

Apêndice A

Planos de Fase Reais

Apresentamos alguns planos de fase obtidos com o auxílio do aplicativo `pplane.jar` que pode ser obtido no endereço <http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html>.

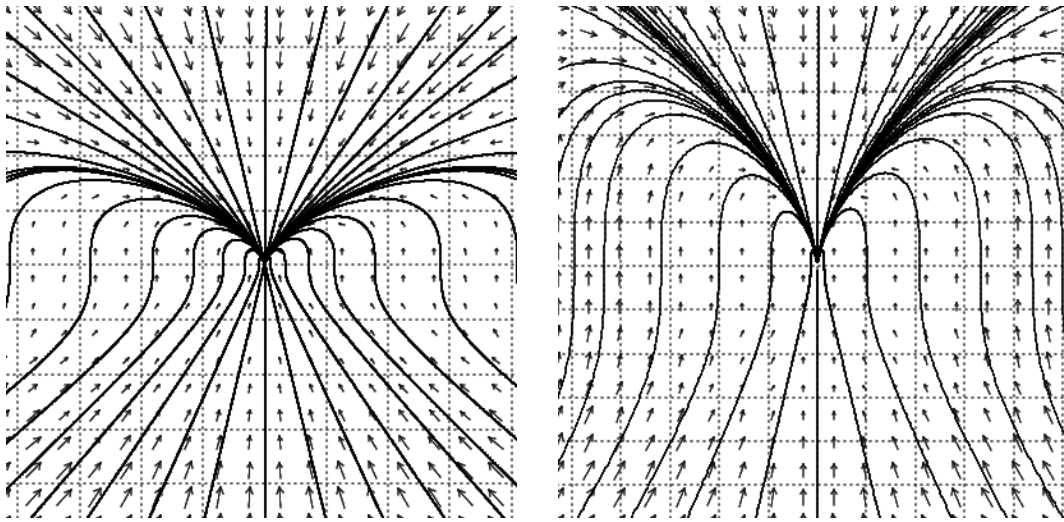


Figura A.1: $\mathcal{F}_1$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$

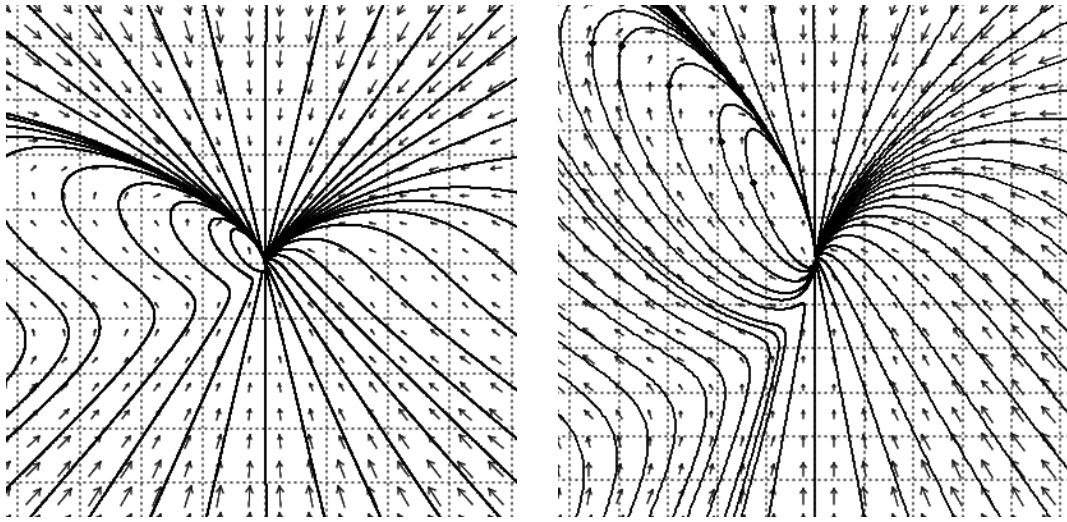


Figura A.2: $\mathcal{F}_2$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$

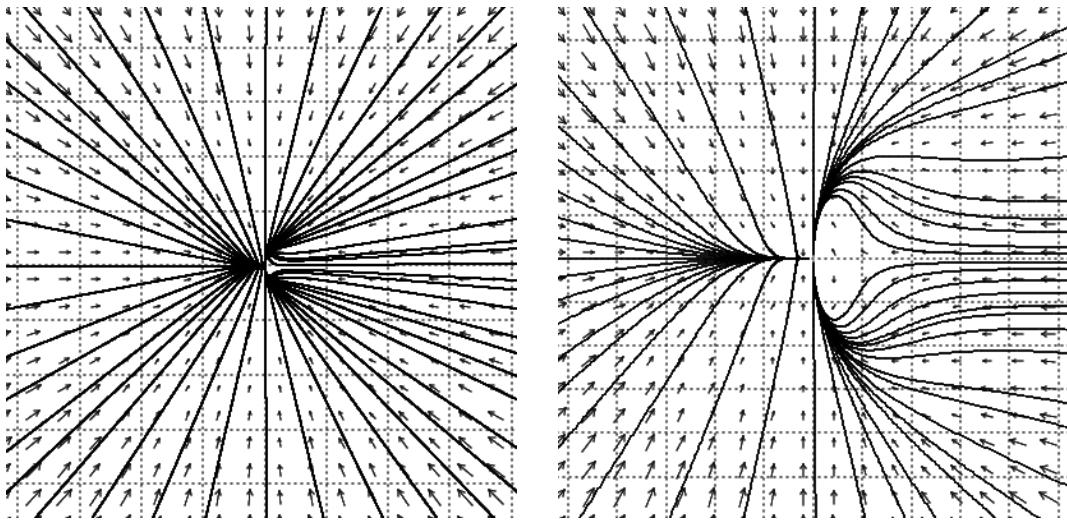


Figura A.3: $\mathcal{F}_3$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$

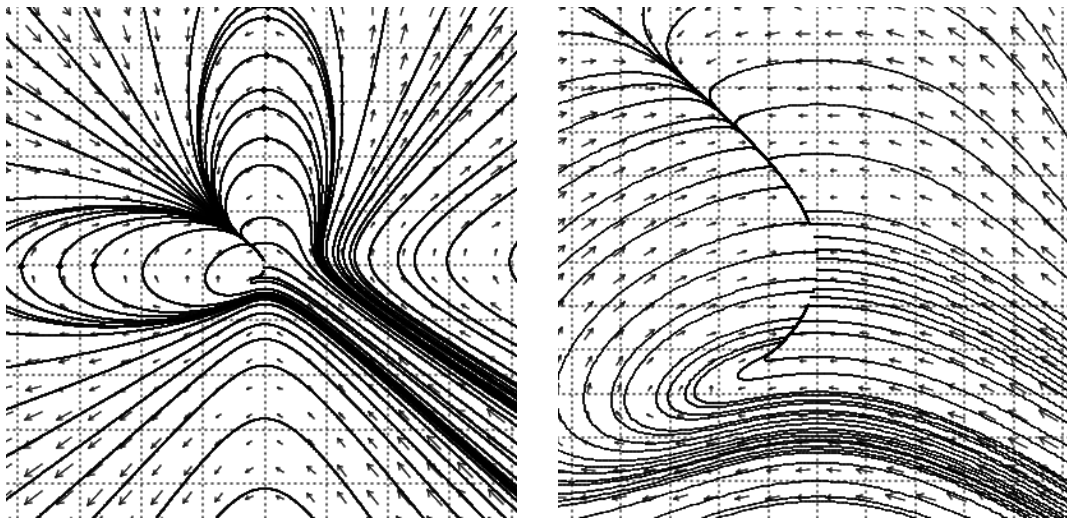


Figura A.4: $\mathcal{F}_4$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$

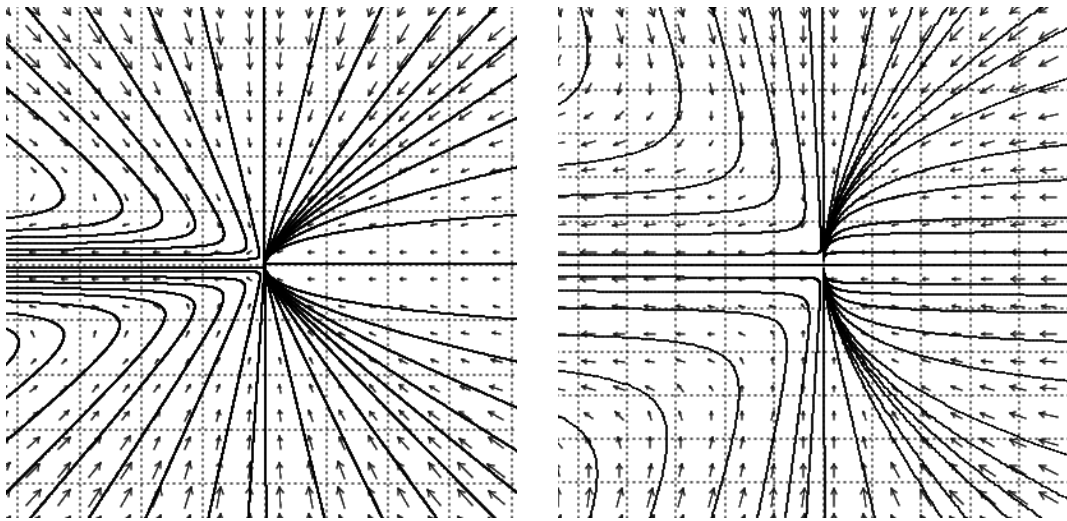


Figura A.5: $\mathcal{F}_5$ na carta afim $\mathbb{A}_z^2$

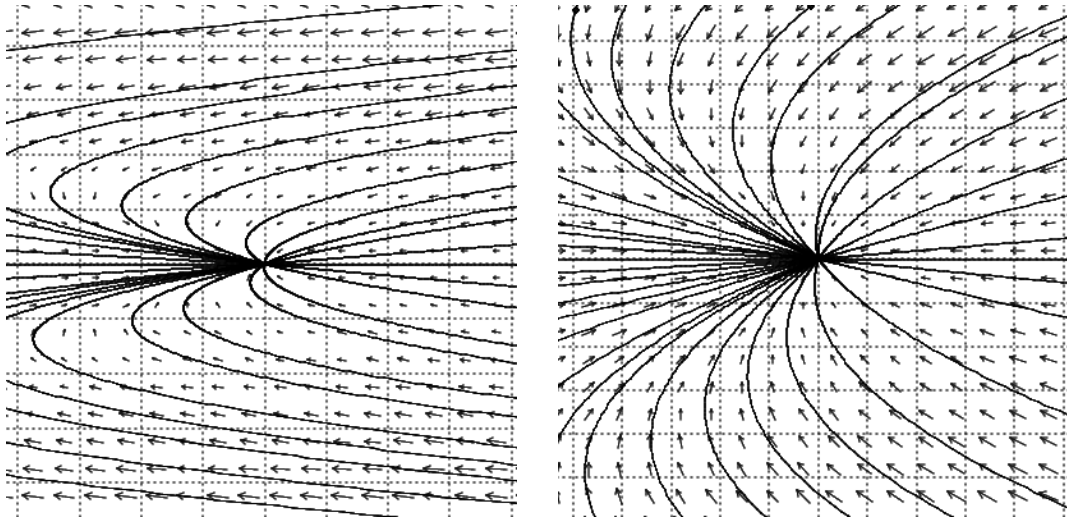


Figura A.6: $\mathcal{F}_5$ na carta afim $\mathbb{A}_x^2$

Apêndice B

Métodos Computacionais

Em algumas proposições do texto fizemos uso de sistemas de computação algébrica para obter nossos resultados. Neste apêndice comentamos os algoritmos utilizados em cada uma dessas situações.

B.1 Proposição 1.7.5

Nesta proposição o Teorema da Função implícita nos garante que existe expansão de x em potências de y através da equação

$$Q = x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + y^2 + x(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy) = 0.$$

Para isto poderíamos utilizar diversos métodos de expansão, os mais comuns são a expansão de Newton, ver Christensen [18], e a expansão de Puiseux, ver Winkler [19] ou, a que de fato escolhemos no sistema de computação algébrica Singular, a expansão de Hamburger-Noether. Expandimos pela variável auxiliar t , e adotamos a notação

$$\begin{array}{lll} a_{02} = a(0), & a_{11} = a(1), & a_{20} = a(2), \\ b_{02} = b(0), & b_{11} = b(1), & b_{20} = b(2), \\ \phi_{02} = f(0), & \phi_{11} = f(1), & \phi_{20} = f(2). \end{array}$$

```
LIB "hnoether.lib";
ring exring=(0,a(0..2),b(0..2),f(0..2)),(x,y,t),ds;
poly Q = x+b(2)*x^2+b(0)*y^2+b(1)*x*y+x*(f(2)*x^2+f(0)*y^2+f(1)*x*y);
list Hne=develop(Q);
list hne_extended=extdevelop(Hne,7);
```

```
list L = param(hne_extended);
poly g = L[1][1];
g = subst(g,f(0),0);
g = subst(g,b(0),1);
```

e obtemos g:

```
-t^2+(b(1))*t^3+(-b(1)^2-b(2))*t^4+(b(1)^3+3*b(1)*b(2)-f(1))*t^5
+(-b(1)^4-6*b(1)^2*b(2)+3*b(1)*f(1)-2*b(2)^2+f(2))*t^6+(b(1)^5
+10*b(1)^3*b(2)-6*b(1)^2*f(1)+10*b(1)*b(2)^2-4*b(1)*f(2)
-4*b(2)*f(1))*t^7,
```

que é uma expressão equivalente à fórmula (1.9) na proposição em questão. Resta agora analisar o polinômio $P = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 - y(\phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy)$ quando esta expansão é aplicada. Dado que sua ordem é 7 as equações determinadas pelos coeficientes de monômios de P de graus menores que 7 devem se anular, enquanto o coeficiente do monômio de grau exatamente 7 deve ser distinto de zero. Obtivemos estas equações com:

```
poly P = a(2)*x^2+a(0)*t^2+a(1)*x*t -t*(f(2)*x^2+f(1)*x*t);
P = subst(P,x,g);
matrix M = coef(P,t);
ideal j = M[2,14], M[2,13], M[2,12], M[2,11], M[2,10];
poly coeficiente = M[2,9];
ring s = 0, (f(0..2),a(0..2),b(0..2)),ds;
ideal j = imap(exring,j);
poly coeficiente = imap(exring, coeficiente);
option(redSB);
j = std(j);
coeficiente= reduce(coeficiente,j);
```

que nos retorna j e coeficiente:

```
j[1]=f(1)+a(2)
j[2]=f(2)+a(2)*b(1)
j[3]=a(0)
j[4]=a(1)
j[5]=a(2)*b(2)
-a(2)^2
```

que são as condições requeridas na proposição.

B.2 Proposição 1.8.5

Nesta proposição desejamos aplicar a mudança de coordenada afim $\varphi = (x/(1 - \phi_{20}\lambda^{-1}x), y/(1 - \phi_{20}\lambda^{-1}x))$ na forma

$$\omega = x^2 dx + (\lambda x + \phi_{20}x^2 + \phi_{11}xy + y^2)(x dy - y dx)$$

em que λ é não nulo.

Utilizando o sistema Axiom, definimos o espaço de formas em 2 variáveis e o pullback através de:

```
coefRing := Integer
lv :List Symbol := [x,y]
der := DERHAM(coefRing,lv)
R := Expression coefRing
dx :der := generator(1)
dy :der := generator(2)

pullback2(l:List(R),w:der):der ==
  a1:= coefficient(w,dx)
  a2:= coefficient(w,dy)
  a1:= eval(a1,[x=1.1,y=1.2])
  a2:= eval(a2,[x=1.1,y=1.2])
  w:= a1*totalDifferential(1.1)$der
  w:= w+a2*totalDifferential(1.2)$der
  return(w)
```

Utilizando a notação $\lambda = s$ e $\phi_{02} = f$ podemos, então, definir

```
w:der:= x^2*dx + (s*x + f*x^2 + y^2)*(x*dy - y*dx)
varphi:=[x/(1-(f/s)*x),y/(1-(f/s)*x)].
```

Com estas definições `pullback2(varphi,w)` retorna

$$\frac{\begin{array}{c} 4 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \\ s^4 x^2 y^2 + s^5 x^2 \end{array}}{\text{-----}} dy + \frac{\begin{array}{c} 4 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 2 \\ -s^4 x^3 y^2 - s^5 x^4 y^2 + s^4 x^2 \end{array}}{\text{-----}} dx$$

$$\frac{\begin{array}{c} 4 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ f^4 x^4 - 4f^3 s x^3 + 6f^2 s^2 x^2 - 4f s^3 x + s^4 \end{array}}{\text{-----}} + \frac{\begin{array}{c} 4 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ f^4 x^4 - 4f^3 s x^3 + 6f^2 s^2 x^2 - 4f s^3 x + s^4 \end{array}}{\text{-----}}$$

que é a forma equivalente à utilizada na proposição.

B.3 Hiperplanos em $\mathbb{P}^{29}$

Nosso objetivo é definir quantas condições lineares a identidade de Euler $Px + Qy + Rz = 0$ impõe nos coeficientes de P, Q, R quando estes são polinômios homogêneos de grau 3 nas variáveis x, y, z . Podemos realizar isto através do sistema Axiom. Primeiramente, definimos polinômios genéricos P, Q, R e o polinômio da identidade de Euler através de

```
genericHomPoly(d:PI,a:Symbol):POLY(INT) ==
  i:NNI:=0
  p:POLY(INT):=0
  contacoef:PI:= 1
  while i <= d repeat
    j:=0
    while j <= d-i repeat
      p:= p+a[contacoef]*x^i*y^j*z^((d-i-j)::NNI)
      contacoef:=contacoef+1
      j:= j+1
    i:= i+1
  return(p)
```

```
P:= genericHomPoly(3,a)
Q:= genericHomPoly(3,b)
R:= genericHomPoly(3,c)
```

```
E:= x*P+y*Q+z*R
```

Vemos agora os coeficientes do polinômio E, que definem as condições lineares já referidas.

```
L:=[[[coefficient(E,[x,y,z],[i,j,k]) for i in 0..4] for j in 0..4] for k in 0..4]
```

```
L1:=reduce(concat,L)
```

```
L2:=reduce(concat,L1)
```

A lista L2 é dada por

```
[
  [c10 + a8, c9 + b8 + a6, c8 + a5, c7 + b6 + a3, c6 + b5 + a2, c5 + a1,
   c4 + b3, c3 + b2, c2 + b1, c1, b10 + a9, b9 + a7, b7 + a4, b4, a10]
].
```

Esta lista consiste em 15 polinômios claramente independentes (nenhuma variável aparece em mais de uma equação), porém podemos calcular o número de elementos que gera a base de Gröbner deste ideal através de

```
G:=groebnerFactorize(L2)
```

```
 #(G.1)
```

para recebermos 15, como esperado.

B.4 Integrais Primeiras

Nesta seção procuramos calcular as integrais primeiras das formas ω_1, ω_2 e ω_3 . Para isto utilizaremos as Observações 1.5.3 e 1.5.4 e uma observação extra: se F é uma integral primeira de uma 1-forma ω então $\exp(F)$ também o é. Isto é claro da definição de integral primeira e do fato de que $d(\exp(F)) = \exp(F)dF$.

Uma vez que obtemos uma forma fechada basta integrar esta forma ao longo de qualquer caminho. Por exemplo, no segmento que vai de $(1, 1)$ a (a, b) , e obteremos a integral primeira. Utilizamos o sistema de computação algébrica Axiom e construímos, então, nosso espaço das formas usando o complexo de DeRham, que nos permite diferenciar formas da maneira usual, com a variável auxiliar t e a função que aplica uma transformação à forma.

```
coefRing := FRAC(INT)
lv :List Symbol := [x,y,t]
der := DERHAM(coefRing,lv)
R := Expression coefRing
dx :der := generator(1)
dy :der := generator(2)
dt :der := generator(3)
```

Utilizamos a função criada por S. C. Coutinho para o cálculo do pullback de uma 1-forma por uma transformação dada.

```
pullback(l>List(R),w:der):der ==
  a1:= coefficient(w,dx)
  a2:= coefficient(w,dy)
  a1:= eval(a1,[x=1.1,y=1.2])
  a2:= eval(a2,[x=1.1,y=1.2])
  w:= a1*totalDifferential(1.1)$der
```

```
w:= w+a2*totalDifferential(1.2)$der
return(w)
```

Podemos, então, criar o algoritmo que tem como entrada uma forma fechada ω e tem como saída a integral primeira F . Dada a forma, basta aplicar a transformação que parametriza o segmento de $(1, 1)$ a (a, b) pela variável auxiliar t e integrar neste caminho. Segue:

```
pw:der:=pullback([(1-t)+t*a,(1-t)+t*b],w)
f:= coefficient(pw,dt)
F:R:=integrate(f,t)::R
F:= eval(F,[a=x,b=y])
F:= eval(F,t=1)-eval(F,t=0)
```

Tomamos $\omega_1 = x^2 dx + y^2(xdy - ydx)$ e aplicamos o algoritmo na forma fechada $\frac{\omega_1}{x^4}$, que nos retorna

$$\frac{\frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{3}x^3 - x^2}{x^3}$$

que é equivalente a $F = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}$, podemos descartar a parte constante, pois não afeta o fato de F ser integral primeira, obtendo, assim, a integral desejada.

Tomando $\omega_2 = x^2 dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$ vemos que a forma $\frac{\omega_2}{x^2(2x^2 + 2xy + x + y^2)}$ é fechada. Aplicando o algoritmo, obtemos

$$\frac{-x \log(y^2 + 2xy + 2x^2 + x) + 2x \log(x) + x \log(6) + y^2 - x}{x}$$

Multiplicando o resultado por -1 , exponenciando e, por fim, multiplicando por constante, obtemos

$$F = \left(2 + \frac{1}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{y}{x}\right).$$

Se $\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$, a forma fechada é $\frac{\omega_3}{x^3y}$. Aplicando o algoritmo, obtemos

$$\frac{x^2 \log(y) - x^2 \log(x) + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - x}{x^2}$$

Simplificando e exponenciando esta função, obtemos a integral primeira

$$F = \frac{y}{x} \exp \left(\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{x} \right).$$

B.5 Proposição 3.1.2

Nesta seção buscamos calcular o grupo de isotropia de uma folheação descrita por uma forma já conhecida e permanecemos com o sistema de computação Axiom.

Definimos, similarmente à seção anterior, o complexo de DeRham sobre o anel de polinômios em três variáveis:

```
coefRing := Integer
lv :List Symbol := [x,y,z]
der := DERHAM(coefRing,lv)
R := Expression coefRing
dx :der := generator(1)
dy :der := generator(2)
dz :der := generator(3)
```

Antes de definir o algoritmo utilizado, definimos duas funções auxiliares: a homogeneização de formas em relação à variável z e a aplicação de transformação na forma homogeneizada dada uma lista com as imagens das variáveis x, y e z da seguinte forma:

```
homogenizeForm(w:der):der ==
  a:= coefficient(w,dx)
  b:= coefficient(w,dy)
  da:= totalDegree(a)
  db:= totalDegree(b)
  d:= max(da, db)
  A:= z^(d)*eval(a,[x=x/z,y=y/z])
  B:= z^(d)*eval(b,[x=x/z,y=y/z])
  C:= x*A+y*B
  if zero?(eval(C,z=0)) = true then
    C:= C/z
    W:= A*dx+B*dy-C*dz
  else
    W:= (z*A)$R*dx+(z*B)$R*dy-(C)*dz
  return(W)
```

```

pullback3(l:List(R),w:der):der ==
  a1:= coefficient(w,dx)
  a2:= coefficient(w,dy)
  a3:= coefficient(w,dz)
  a1:= eval(a1,[x=1.1,y=1.2,z=1.3])
  a2:= eval(a2,[x=1.1,y=1.2,z=1.3])
  a3:= eval(a3,[x=1.1,y=1.2,z=1.3])
  w:= a1*totalDifferential(1.1)$der
  w:= w+a2*totalDifferential(1.2)$der
  w:= w+a3*totalDifferential(1.3)$der
  return(w)

```

Podemos, enfim, definir nosso algoritmo que tem como entrada a forma ω , na carta afim $\{z = 1\}$, e tem como saída uma lista com as relações induzidas pela transformação, que precisam ser nulas para que a transformação esteja no grupo de isotropia.

A forma geral de uma mudança de variáveis em $\mathbb{P}^2$ pode ser representada pela aplicação linear $\sigma(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z : a_2x + b_2y + c_2z : a_3x + b_3y + c_3z)$. Recordamos que o grupo de isotropia consiste nas aplicações σ que fixam ω . Procuramos, então, as aplicações σ tais que $\sigma^*\omega = t\omega$ com $t \in \mathbb{C}^*$ ou, equivalentemente, $\sigma^*\omega - t\omega = 0$.

Primeiramente, procuramos quais relações devem ser nulas. Para tanto, aplicamos o seguinte algoritmo:

```

sigma:= [a1*x+b1*y+c1*z,a2*x+b2*y+c2*z,a3*x+b3*y+c3*z]
W:=homogenizeForm(w)
W1:=pullback3(sigma,W)
W2:=W1-t*W

A:=coefficient(W2,dx)::POLY(INT)
B:=coefficient(W2,dy)::POLY(INT)
C:=coefficient(W2,dz)::POLY(INT)

L1:=reduce(concat,reduce(concat,[[[coefficient(A,[x,y,z],[i,j,k])
for i in 0..3] for j in 0..3] for k in 0..3]]))
L2:=reduce(concat,reduce(concat,[[[coefficient(B,[x,y,z],[i,j,k])
for i in 0..3] for j in 0..3] for k in 0..3]]))
L3:=reduce(concat,reduce(concat,[[[coefficient(C,[x,y,z],[i,j,k])

```

```
for i in 0..3] for j in 0..3] for k in 0..3]))
```

```
L:=append(L1,L2)
```

```
L:=append(L,L3)
```

Obtemos, assim, o ideal L gerado pelos polinômios que representam as relações que devem se anular. Utilizamos um algoritmo que calcula a base de Gröbner e fatora os polinômios deste ideal para obter as relações mais simples possíveis.

```
G:=groebnerFactorize(L)
```

```
G1:List(List(POLY(INT))):=[]
```

```
for g in G repeat
```

```
  if member?(t,g)=false then
```

```
    G1:= cons(g,G1)
```

O último teste nos garante que a relação indesejada $t = 0$ não ocorrerá em nossa lista. Temos, portanto, o algoritmo completo.

Aplicamos o algoritmo para $\omega_1 = x^2dx + y^2(xdy - ydx)$ e recebemos:

```
[[t - a1 b23, a1 c32 - b23, c2, c1, b3, b1, a3, a2],
 [t - a1 b23, a1 c32 - b23, c2, c1, b3, b1, a2], [1]]
```

O primeiro conjunto de relações pode ser encarado como caso particular do segundo (no qual $a_3 = 0$). Portanto, como estamos trabalhando com uma transformação projetiva, podemos supor $c_3 = 1$. Tomando $a_3 = b$ e $b_2 = a^2$, obtemos $a_1 = a^3$ e $\sigma = (a^3x : a^2y : z + bx)$ com $b \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}^*$. Também note que $\sigma^*(\omega) = a^{12}\omega$, como esperado da primeira relação.

Para $\omega_2 = x^2dx + (x + y^2)(xdy - ydx)$ e recebemos:

```
[[t - a14, c3 - a1, c2, c1, b3, b2 - a1, b1, a3, a2],
 [t - a14, c3 - a1, c2, c1, b3 + 2a2, b2 - a1, b1, a1 a3 + a22 + 2a1 a2], [1]]
```

O primeiro conjunto de relações induz σ da forma $(a_1x : a_1y : a_1z)$. Se $a_1 = 1$, σ é a identidade. Como antes supomos que $a_1 = 1$ e chamamos $a_2 = a$ no segundo conjunto, donde σ é da forma $(x : ax + y : -a(a + 2)x - 2ay + z)$ com $a \in \mathbb{C}$. Note que $\sigma^*(\omega) = \omega = a_1^4\omega$, como esperado da primeira relação.

Para $\omega_3 = xydx + (x^2 + y^2)(xdy - ydx)$ recebemos:

```
[[t - a14, c3 - a1, c2, c1, b3, b2 - a1, b1, a2],
 [t + a14, c3 - a1, c2, c1, b3, b2 + a1, b1, a2], [1]]
```

Supondo que $a_1 = 1$ e $a_3 = a$, esses conjuntos induzem $\sigma = (x : \pm y : z + ax)$ com $a \in \mathbb{C}$.

Para $\omega_4 = (x + y^2 - x^2y)dy + x(x + y^2)dx$ o algoritmo convencional extrapola o tempo computacional aceitável, de modo que precisamos alterar a ordenação monomial para otimizá-lo. Supomos que $c_3 = 1$ com

```
L:= eval(L,c3=1)
```

```
S:= HDMP([a1,a2,a3,b1,b2,b3,c1,c2,t],INT)
```

```
LL>List(S):= [g::S for g in L]
```

```
G:=groebner(LL)
```

Isto nos retorna uma lista de 333 relações que, simplificadas, ficam reduzidas a $a_1b_2 = 1$ e $b_2^3 = 1$ donde as isotropias podem ser descritas por

$$\{(x : y : z), (j^2x : jy : z), (jx : j^2y : z)\}$$

com $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

O caso de $\omega_5 = x^2dy + y^2(xdy - ydx)$ é similar ao caso de ω_1 e o algoritmo nos dá as relações

$$[[t^3 - a_1b_2^3, a_1c_3 - b_2^2, c_2, c_1, b_1, a_3, a_2], [1]]$$

Supondo que $c_3 = 1$, $b_2 = a$ e $b_3 = b$, vemos que σ é da forma $(a^2x : ay : z + by)$ com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Assim, descrevemos por fim todos os grupos de isotropia que desejávamos.

B.6 Proposição 3.2.2

Nesta proposição consideramos o campo $\mathcal{Y} = (a_1x + a_2y)\partial_x + (a_3x + a_4y)\partial_y$ e desejamos encontrar uma mudança de coordenadas $\sigma = (b_1x + b_2y, b_3x + b_4y)$ que transforma $\mathcal{Y}$ em $y\partial_x$, em outras palavras, a mudança transforma a forma dual ω de $\mathcal{Y}$ na forma ydy . Seguimos o método descrito por S. C. Coutinho. Como anteriormente utilizamos o complexo de DeRham e a função `pullback`:

```
w:=der:=(a1*x+a2*y)*dx+(a3*x+a4*y)*dy
sigma:=[b1*x+b2*y,b3*x+b4*y]
pw:=pullback(sigma,w)
```

donde

$$\begin{aligned}
& + (a_4 b_4^2 + (a_3 + a_2)b_2 b_4 + a_1 b_2^2)y \\
& + ((a_4 b_3 + a_3 b_1)b_4 + a_2 b_2 b_3 + a_1 b_1 b_2)x \\
& * dy \\
& + ((a_4 b_3 + a_2 b_1)b_4 + a_3 b_2 b_3 + a_1 b_1 b_2)y \\
& + (a_4 b_3^2 + (a_3 + a_2)b_1 b_3 + a_1 b_1^2)x \\
& * dx.
\end{aligned}$$

Extraímos os coeficientes de dx e dy :

$A := \text{coefficient}(pw, dx) :: \text{POLY}(\text{FRAC}(\text{INT}))$

$B := \text{coefficient}(pw, dy) :: \text{POLY}(\text{FRAC}(\text{INT})).$

Para que pw seja conjugada a ydy precisamos que A se anule e B seja puro em y . Portanto devemos obter relações decorrentes do anulamento dos polinômios na lista

$L := [\text{coefficient}(A, x, 1), \text{coefficient}(A, y, 1), \text{coefficient}(B, x, 1)].$

Precisamos, agora, analisar 3 casos. O primeiro $a_1 a_4 \neq 0$:

$L1 := L$

$G := \text{groebnerFactorize}(L1)$

que retorna

$$\begin{aligned}
& [\\
& \quad [a_4 b_3 b_4 + (a_3 + a_2)b_2 b_3 + a_1 b_1 b_2, b_1 b_4 - b_2 b_3, \\
& \quad \quad a_4 b_3^2 + (a_3 + a_2)b_1 b_3 + a_1 b_1^2] \\
& \quad , \\
& \quad [a_4 b_3 b_4 + 2a_2 b_2 b_3 + a_1 b_1 b_2, b_1 b_4 - b_2 b_3, \\
& \quad \quad a_4 b_3^2 + 2a_2 b_1 b_3 + a_1 b_1^2, a_3 - a_2] \\
& \quad , \\
& \quad \quad \quad 2 \\
& \quad [a_4 b_3 + a_2 b_1, a_2 b_3 + a_1 b_1, a_1 a_4 - a_2^2, a_3 - a_2], [1], [b_3, b_1, a_3 - a_2], \\
& \quad [b_3, b_1, a_4, a_3 - a_2], [b_1, a_4, a_3, a_2], [b_4, b_3, a_3 - a_2, a_1], [b_4, b_3, a_3, a_2, a_1], \\
& \quad [b_4, b_3, a_4, a_3 - a_2, a_1], [b_4, a_4, a_3, a_2, a_1], [b_3, b_1, a_3 - a_2, a_1], \\
& \quad [b_3, b_1, a_4, a_3 - a_2, a_1], [b_1, a_4, a_3, a_2, a_1], [b_3, a_3, a_2, a_1], [a_4, a_3, a_2, a_1]]
\end{aligned}$$

em que a única base viável é a primeira, visto que as outras impõe relações entre os a 's. Podemos supor $b_1 b_2 \neq 0$ e, como os polinômios na primeira relação são homogêneos, podemos supor também que $b_1 = b_2 = 1$. Resolvemos para b_3 e b_4 com

`radicalSolve(eval(G.1,[b1=1,b2=1]),[b3,b4])`

que retorna

$$\begin{aligned} & [\\ & \quad \begin{array}{c} +-----+ \\ | \\ - \sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2 \\ \hline 2a_4 \end{array} \\ & \quad b_3 = \frac{- \sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2}{2a_4}, \\ & \quad \begin{array}{c} +-----+ \\ | \\ - \sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2 \\ \hline 2a_4 \end{array} \\ & \quad b_4 = \frac{- \sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2}{2a_4} \\ & , \\ & \quad \begin{array}{c} +-----+ \\ | \\ \sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2 \\ \hline 2a_4 \end{array} \\ & \quad b_3 = \frac{\sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2}{2a_4}, \\ & \quad \begin{array}{c} +-----+ \\ | \\ \sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2 \\ \hline 2a_4 \end{array} \\ & \quad b_4 = \frac{\sqrt{-4a_1 a_4 + a_3^2 + 2a_2 a_3 + a_2^2} - a_3 - a_2}{2a_4} \\ &] . \end{aligned}$$

determinando possibilidades para σ no primeiro caso. Procedemos de maneira similar com o caso $a_1 = 0$ mas $a_4 \neq 0$:

`L2:=eval(L,a1=0)`

`G:= groebnerFactorize(L2)`

`radicalSolve(eval(G.1,[b1=1,b2=1]),[b3,b4])`

que retorna

$$[[b_3 = \frac{-a_3 - a_2}{a_4}, b_4 = \frac{-a_3 - a_2}{a_4}].$$

E também com o caso $a_1 \neq 0$ mas $a_4 = 0$:

`L3:=eval(L,a4=0)`

`G:= groebnerFactorize(L3)`

`radicalSolve(eval(G.1,[b3=1,b4=1]),[b1,b2])`

que retorna

```

L3:=eval(L,a4=0)
G:= groebnerFactorize(L3)
radicalSolve(eval(G.1,[b3=1,b4=1]),[b1,b2])

```

que retorna

$$[[b1 = \frac{-a_3 - a_2}{a_1}, b2 = \frac{-a_3 - a_2}{a_1}]] .$$

O caso $a_1 = a_4 = 0$ não pode ocorrer pois, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são os campos que geram $\mathfrak{iso}(\mathcal{F})$, então as condições da proposição nos dão $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{Y}$. Se $\mathcal{Y} = a_3x\partial_x - a_2y\partial_y$ e $\mathcal{X} = (c_1x + c_2y)\partial_x + (c_3x + c_4y)\partial_y$ então teríamos

$$\begin{aligned} (a_3 + a_2)c_2 &= a_3x \text{ e} \\ -(a_3 + a_2)c_3 &= a_2x. \end{aligned}$$

Portanto, resultaria $\mathcal{X} = 0$, o que é impossível.

Referências Bibliográficas

- [1] CERVEAU, D., DÉSERTE, J., GARBA BELKO, D., et al. “Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux”, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, v. 41, n. 2, pp. 161–198, 2010.
- [2] JOUANOLLOU, J. *Equations de Pfaff algébriques*. N. 708, Lecture Notes in Mathematics. Berlin and Heidelberg and New York, Springer-Verlag, 1979.
- [3] FULTON, W. *Algebraic Curves*. 2008. Disponível em: <<http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>>.
- [4] LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*. N. 218, Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2006.
- [5] ILYASHENKO, Y., YAKOVENKO, S. *Lectures on Analytic Differential Equations*. N. 86, Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2008.
- [6] PEREIRA, J. *Integrabilidade de Equações Diferenciais no Plano Complexo*. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Lima, 2001. Monografia.
- [7] WILLIS, N., DIDIER, A., SONNANBURG, K. “How to Compute a Puiseux Expansion”, 2012. arxiv:math/0807.4674.
- [8] LINS NETO, A., SCÁRDUA, B. *Introdução à Teoria das Folheações Algébricas Complexas*. N. 2, 21o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1997.
- [9] HUMPHREYS, J. *Linear Algebraic Groups*. N. 21, Graduate Texts in Mathematics. New York, Springer-Verlag, 1981.
- [10] OLVER, P. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. N. 107, Graduate Texts in Mathematics. Second edition ed. Berlin and Heidelberg and New York, Springer-Verlag, 1993.

- [11] FISCHER, W., LIEB, I. *A Course in Complex Analysis: From Basic Results to Advanced Topics*. 1 ed. Berlin, Vieweg+Teubner, 2012.
- [12] NEUNHÖFFER, M. “Lie Algebras”, . Lecture Notes, 2010. Disponível em: <http://www-circa.mcs.st-and.ac.uk/~neunhoef>.
- [13] FULTON, W., HARRIS, J. *Representation Theory: A First Course*. N. 129, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1991.
- [14] SHAFAREVICH, I. *Basic Algebraic Geometry I*. Second edition ed. Berlin and Heidelberg and New York, Springer-Verlag, 1994.
- [15] CERVEAU, D., MATTEI, J.-F. “Formes intégrables holomorphes singulières”, *Astérisque*, v. 97, 1982.
- [16] VARADAJARAN, V. “Lie theory”, . Lecture Notes, 2007. Disponível em: <http://www.math.ucla.edu/~vsv/>.
- [17] PEREIRA, J. “Vector fields, invariant varieties and linear systems”, *Annales de l’Institut Fourier*, v. 51, n. 5, pp. 1385–1405, 2001.
- [18] CHRISTENSEN, C. “Newton’s Method for Resolving Affected Equations”, *The College Mathematics Journal*, v. 27, n. 5, pp. 330–340, 1996.
- [19] WINKLER, F. “Local Parametrization and Puiseux Expansion”, . Lecture Notes, 2012. Disponível em: <http://www.risc.jku.at/education/courses/ss2012/caag>.
- [20] SILVA, M. *O Lema de Darboux e Aplicações*. Dissertação. Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.
- [21] ZAKHERI, S. “Dynamics of Singular Holomorphic Foliations on the Complex Projective Plane”. , 1998. arxiv:math/9809099.
- [22] MILNE, J. “Lie Algebras, Algebraic Groups and Lie Groups”. , 2013. Disponível em: <http://www.jmilne.org/math/>.