

A Dinâmica de 2-Corpos sobre a Superfície de um Cilindro Infinito

Gladston Duarte Ferreira

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Orientadora: Stefanella Boatto

Coorientadora: Teresinha Stuchi

Rio de Janeiro

26 de julho de 2016

A Dinâmica de 2-Corpos sobre a Superfície de um Cilindro Infinito

Gladston Duarte Ferreira

Orientadora: Stefanella Boatto

Coorientadora: Teresinha Stuchi

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof^a. Stefanella Boatto - IM/UFRJ

Teresinha de Jesus Stuchi - IF/UFRJ

Sonia Pinto de Carvalho - ICEx/UFMG

Michael Benjamin Deutsch - IM/UFRJ

Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás - IF/UFRJ

Rio de Janeiro

26 de julho de 2016

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por, literalmente, tudo em minha vida!

À minha família, pelo apoio incondicional, pelos ensinamentos e pela proteção, e aos e às parentes por todos os momentos divididos e por ajudarem a me formar como cidadão! Em especial, agradeço ao pessoal da casa da Lea, pelo abrigo e acolhimento no momento em que precisei.

Aos amigos e às amigas, que não tenho a coragem de enumerar aqui, pelas alegrias, pelos cafés, pelas danças, pelas conversas, por não me deixarem desanimar, pelas viagens, e por tudo mais! Em especial, agradeço ao Rodrigo e à Renata, colegas de orientação, pela facilitação do trajeto.

Às minhas orientadoras: Stefanella, pelo bom humor, pelos ensinamentos e pelas orientações acadêmicas além do mestrado, responsáveis por me fazerem enxergar o mundo com outros olhos; e Teresinha também pelo bom humor costumeiro, pela infinita paciência comigo e pelas várias tardes em que trabalhamos juntos, sempre regadas a muito café, conversas agradabilíssimas, gargalhadas e muitas linhas de códigos!!!

Aproveitando o ensejo: à minha orientadora da graduação, Valéria, por me dirigir à UFRJ para o mestrado!

Aos professores e às professoras que tive no mestrado, pelos ensinamentos. Em especial, ao Rolci, pelo acolhimento inicial; ao Flávio, por toda a paciência comigo; à Marianty, pela excelente aula, pela amizade e também pela paciência;

ao Gabriel, por me apresentar uma perspectiva bem interessante sobre matemática; ao Umberto, também pela paciência e pela seriedade e prestreza em me ajudar com a elaboração deste trabalho; e ao Alexander pela forma interessantíssima como enxerga a matemática e faz quem está perto enxergar também! Agradeço também aos professores e às professoras das aulas de dança que tive durante esta estadia na UFRJ: Rodrigo, Vitor, Johnny, Carol, Thiago, Naty, Michel e Tarso, agradecimento este que estendo a quem acompanhava essas aulas comigo. Com certeza, a dança foi também uma grande responsável por me manter no eixo e me fazer ter forças para continuar e concluir este trabalho!

À banca, por aceitar ler este trabalho!

Aos funcionários e às funcionárias da UFRJ, por fazerem com que este sonho fosse possível!

À CAPES e à UFRJ, pelo apoio financeiro!

Resumo

Este trabalho visa compreender melhor a dinâmica de dois corpos vistos como massas puntiformes sobre a superfície de um cilindro infinito.

Como ferramentas, são utilizadas técnicas da dinâmica de vórtices, visto que essas dinâmicas - de vórtices e de massas - têm um ponto de vista em comum. Na verdade, inclui-se também nesta lista de dinâmicas em comum a dinâmica de cargas puntiformes.

São formuladas as equações da dinâmica de massas na geometria intrínseca do plano e do cilindro. Após ser notado que a dinâmica de duas massas na geometria intrínseca do plano é integrável e a busca por novas integrais - independentes das já conhecidas - do cilindro falha, o estudo se volta para compreender a dinâmica no cilindro, em particular, o impacto da topologia do cilindro nesta dinâmica.

Com técnicas analíticas e numéricas, conclui-se que a dinâmica no cilindro possui muitos aspectos em comum com a dinâmica do plano - de fato, mostra-se que a dinâmica no cilindro pode ser vista como uma perturbação da dinâmica no plano - em energias baixas, mas, em energias altas, ocorrem fenômenos intrínsecos à topologia do cilindro e perde-se essa identificação com o plano.

Palavras-chave: Dinâmica de n corpos, mecânica celeste, seções de Poincaré.

Abstract

This work aims to better understand the two-body dynamics seen as point-masses on the surface of a cylinder.

Tools from the field of vortex dynamics are used, because these areas - vortex and mass dynamics - have a common point of view. Actually, one could add to this list of dynamics, the dynamics of pointcharges.

The equations of the mass dynamics are formulated on the plane and on the cylinder intrinsic geometry. Being noticed that the two-body problem on the plane is integrable and the search for new first integrals - which are independents from those already known - on the cylinder fails, the study aims to realize what the impact of the topology of the cylinder in this dynamics is.

Using both analytical and numerical techniques one can conclude that the dynamics on the cylinder has a lot of aspects related the dynamics on the plane - in fact, one can see the dynamics on the cylinder as a perturbation of the dynamics on the plane - at low energies, but, at higher energies, the topology of the cylinder plays a key role in the dynamics and the connection with the plane is lost.

Key words: n -body dynamics, celestial mechanics, Poincaré sections.

Sumário

1	Um Ponto de Vista Comum para a Dinâmica de Vórtices, Massas e Cargas	14
1.1	Decomposição de Campos Vetoriais - O Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge	14
1.2	Algumas Definições sobre Formas Diferenciais	18
1.3	Decomposição de Formas Diferenciais - O Teorema da Decomposição de Hodge	25
1.4	Forças Centrais	28
1.5	Fluidos Incompressíveis	32
2	Cálculos Iniciais Sobre Superfícies de Interesse	35
2.1	Derivação da Hamiltoniana dos vórtices no plano	35
2.1.1	Vórtices em fluidos incompressíveis	38
2.2	Derivação da Hamiltoniana dos vórtices no cilindro	39
2.3	Massas e Cargas em Forças Centrais	42

3	Redução Simplética dos Graus de Liberdade do Problema de Dois Corpos no Plano e no Cilindro	46
3.1	Plano	47
3.2	Cilindro	53
3.2.1	A não-existência de integrais primeiras extras	58
4	Estudo do Sistema de 2-corpos sobre o Cilindro	65
4.1	Ponto de equilíbrio	65
4.2	Variedades Invariantes	70
4.2.1	Estudo da dinâmica sobre a variedade $\psi = \pi, p_\psi = 0$. . .	71
4.2.2	Estudo da dinâmica sobre a variedade $\psi = 0, p_\psi = 0$. . .	74
4.2.3	Estudo da dinâmica sobre a variedade $z = 0, p_z = 0$. . .	76
5	Seções de Poincaré	80
5.1	2-Corpos no Plano	81
5.1.1	$m_1 = m_2 = 1$	84
5.1.2	$m_1 = 2, m_2 = 1$	86
5.1.3	$m_1 = 10, m_2 = 1$	88
5.1.4	$m_1 = 100, m_2 = 1$	90
5.1.5	$m_1 = 1, m_2 = 0.1$	92
5.1.6	$m_1 = 1, m_2 = 0.01$	94
5.2	2-Corpos no Cilindro	95

5.2.1	Relação entre os parâmetros $m_1 m_2$, R e H	100
5.2.2	Comparação entre as seções em $\psi = 0$ e $\psi = \pi$	107
5.2.3	Análise das seções em $\psi = 0$	111
5.2.4	Energias negativas	116
6	A Dinâmica no Cilindro Vista como uma Perturbação da Dinâmica no Plano	126
A	Algumas contas	135
A.1	Equação (2.8)	135
A.2	Equação (2.9)	137
A.3	Equação (3.5)	138
A.4	Equação (6.1)	139
B	Teorema de Arnold-Liouville	142
C	Teorema de Noether	147
D	Teoria de Hamilton-Jacobi	150
E	Teorema KAM	154

Introdução

Há, sempre houve e continuará havendo (durante muito tempo) interesse em mecânica celeste na humanidade. Desde os primeiros tempos das civilizações que conhecemos, podemos ver registros de estrelas, a confecção de calendários baseados nesses registros, a adaptação da agricultura a esses calendários, etc. Muita ciência foi feita a partir de conhecimentos em astronomia/engenharia espacial; por exemplo: a teoria do caos dentro da área de sistemas dinâmicos surgiu com Poincaré estudando o problema dos 3-corpos; muitos métodos numéricos para os mais variados fins (calcular soluções de sistemas de equações não lineares, calcular integrais, calcular soluções de EDO's, etc.) surgiram de estudos e cálculos de efemérides; muitos produtos utilizados hoje em dia pela sociedade surgiram de pesquisas em engenharia aeroespacial, etc. Os satélites que utilizamos hoje (para comunicação, para mapeamentos, para fins militares, dentre outros) necessitam abundantemente de estudos em mecânica celeste e seu aprimoramento passa invariavelmente pelo estudo mais aprofundado dessa área. Poderíamos continuar dando mais alguns motivos para justificar estudos nessa área, mas não será necessário se alongar aqui.

Como esse texto contempla também, mesmo que por um instante pequeno e não seja seu foco, a área de dinâmica de vórtices e cargas, podemos ver além da mecânica celeste, e justificar o fato de serem importantes de serem estudados: na área de dinâmica de vórtices, temos estudos/resultados em dinâmica de fluidos (que modelam áreas importantes da ciência e tecnologia, por exemplo, engenharia aeronáutica e meteorologia) e na área da dinâmica de cargas, há interesse em estudar dinâmica de partículas eletricamente carregadas (em-

bora, se essas partículas forem da escala atômica, se utilize um ponto de vista quântico e não clássico para tais estudos).

Naturalmente, os estudos em mecânica celeste surgiram nos espaços Euclidianos, uma vez que a própria geometria diferencial estava evoluindo junto com a mecânica celeste. Conforme se entendiam mais as geometrias intrínsecas das variedades, tais estudos foram sendo utilizados para entender a dinâmica de distribuições pontuais de massa como se estes estivessem nas superfícies de tais variedades.

Estudos em outras variedades que não as Euclidianas surgiram no século XIX e se desenvolveram até os dias de hoje. Os primeiros foram Bolyai e Lobachevsky, os fundadores da geometria hiperbólica, que estudaram o problema de Kepler no espaço hiperbólico tridimensional ([15] *apud.* [9, 23]).

No mesmo século alguns estudos de matemáticos como Paul Joseph Serret, Ernst Schering, Lejeune Dirichlet, dentre outros continuaram os estudos em variedades de curvatura negativa, e estudaram também em variedades de curvatura positiva ([15]).

Para o caso da variedade ser um cilindro (também uma variedade com curvatura Gaussiana constante, mas não simplesmente conexa), existem poucos trabalhos presentes na literatura ([2, 21, 26]).

Esta dissertação tem um objetivo exploratório/quantitativo sobre o problema dos dois corpos sobre a superfície de um cilindro, embora aqui serão apresentadas as ferramentas para se entender um contexto mais geral de problemas, a saber, a relação que existe entre o problema dos n -corpos, dos n -vórtices e das n -cargas, a dedução de suas hamiltonianas e algumas reduções possíveis

de serem aplicadas em contextos mais gerais e que serão feitas e somente depois particularizadas. Tais ferramentas serão apresentadas desde o princípio mostrando primeiramente a relação entre os problemas e onde a Decomposição de Hodge nos ajuda a derivar a dinâmica de uma partícula sujeita a qualquer um dos campos destes problemas, logo após, utilizando uma mesma hipótese de trabalho vemos que é possível escrever as dinâmicas acima em suas formas Hamiltonianas, logo após, particularizando para o caso das massas, estudaremos como aplicar o processo de redução do espaço de fase, calculando algumas simetrias. Por fim, serão apresentadas seções de Poincaré para o caso de 2 massas e será feita uma análise destas seções de forma a garimpar informações importantes a cerca dessa dinâmica.

No primeiro capítulo, apresentamos dois teoremas sobre como decompor campos veoriais e/ou formas diferenciais em componentes mais facilmente tratadas isoladamente. Além disso, apresentamos também os conceitos de fluido incompressível e força central e veremos algumas dinâmicas que podemos definir nestes casos.

Veremos, no segundo capítulo, dinâmicas de partículas sobre certas superfícies, sob o ponto de vista Hamiltoniano, isto é, veremos como calcular as expressões Hamiltonianas de cada caso.

Mais adiante, no terceiro capítulo, dadas as formas Hamiltonianas de tais dinâmicas, vamos focar na dinâmica de massas e vamos ver o processo de redução dos graus de liberdade dessa dinâmica, de forma que podemos ver um conjunto maior de órbitas através de quocientes realizados no espaço delas e tomando apenas uma representante.

No quarto capítulo, fazemos um estudo do sistema reduzido de 2-corpos na superfície de um cilindro, com a finalidade de obtermos algumas informações sobre essa dinâmica.

Prosseguindo, no quinto capítulo, apresentamos algumas seções de Poincaré deste problema a fim de explorar mais a fundo esse problema, e complementar a obtenção de informações iniciada no capítulo anterior. São apresentadas também algumas seções de Poincaré do problema de 2 corpos no plano para fins comparativos e ilustrativos.

Finalmente, no sexto capítulo, vemos como a dinâmica no cilindro pode ser escrita como uma perturbação da dinâmica no plano.

Capítulo 1

Um Ponto de Vista Comum para a Dinâmica de Vórtices, Massas e Cargas

1.1 Decomposição de Campos Vetoriais - O Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge

Nesta seção apresentaremos o Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge (DHH) que trata da decomposição de campos suaves (C^∞) em \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) em três componentes, cada qual mais facilmente tratada. Futuramente, apresentaremos também como essa decomposição nos ajuda a entender a dinâmica de uma partícula cuja trajetória é determinada pelo fluxo de um campo vetorial, nos casos em que este campo é um campo de vorticidades, um campo gravitacional ou um campo elétrico.

A ideia por trás da DHH é investigar o quanto o campo vetorial em questão é rotacional e o quanto ele é divergente, separando-o em duas componentes: uma rotacional com divergente nulo e uma divergente com rotacional nulo; além disso, uma terceira componente - a saber, a harmônica - aparece nesta decom-

posição. Então não é possível dividir o campo em apenas uma componente rotacional e uma divergente, contudo, tal decomposição já nos ajuda a obter informações sobre o campo uma vez que saibamos lidar com cada componente separadamente.

Teorema: (da Decomposição de Helmholtz-Hodge)

Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) um campo de vetores suave.

u pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

onde

$$\operatorname{div}u_1 = -\gamma\rho \text{ e } \operatorname{rot}u_1 = 0,$$

$$\operatorname{div}u_2 = 0 \text{ e } \operatorname{rot}u_2 = \Sigma,$$

$$\operatorname{div}u_3 = 0 \text{ e } \operatorname{rot}u_3 = 0,$$

com $\gamma \in \mathbb{R}$, ρ uma função e Σ um campo vetorial.

u_1 é dito ser irrotacional, u_2 solenoidal e u_3 harmônico.

Observação: Como os operadores divergente e rotacional são lineares segue que

$$\operatorname{div}u = \operatorname{div}(u_1 + u_2 + u_3) = \operatorname{div}u_1 + \operatorname{div}u_2 + \operatorname{div}u_3 = \operatorname{div}u_1 = -\gamma\rho$$

e

$$\operatorname{rot}u = \operatorname{rot}(u_1 + u_2 + u_3) = \operatorname{rot}u_1 + \operatorname{rot}u_2 + \operatorname{rot}u_3 = \operatorname{rot}u_2 = \Sigma.$$

Observemos que tal decomposição não está bem especificada porque, se $\bar{u}_1 = u_1 + h_1$, $\bar{u}_2 = u_2 + h_2$ e $\bar{u}_3 = u_3 - h_1 - h_2$, onde h_1 e h_2 são campos

harmônicos, então u pode ser decomposto como

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_3},$$

com u_1 e $\overline{u_1}$ irrotacionais, u_2 e $\overline{u_2}$ solenoidais e u_3 e $\overline{u_3}$ harmônicos.

Para resolver esta situação, devemos impor condições sobre o campo u , dependendo do domínio Ω . Por exemplo, se $\Omega = \mathbb{R}^n$ temos que, se exigirmos que $u \rightarrow 0$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$ qualquer campo harmônico h é identicamente nulo, de tal forma que nas decomposições acima $h_1 = h_2 = \overline{u_3} = u_3 = 0$, $u_1 = \overline{u_1}$ e $u_2 = \overline{u_2}$ será uma decomposição única.

Observação: Quando Ω não for simplesmente conexo ou tiver fronteira, podem existir campos harmônicos não triviais. Assim como no caso de $\Omega = \mathbb{R}^n$, as condições podem ser impostas para que a decomposição seja única. Neste caso, as condições são sobre a fronteira de Ω . Tal estudo está fora do escopo deste texto. Para maiores informações, consulte [4] e [5] e suas referências.

Façamos agora uma análise desta decomposição em \mathbb{R}^2 :

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X(x_1, x_2) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2))$.

O operador rotacional $\text{rot} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser definido como

$$\begin{aligned} \text{rot}X &= \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \cdot (X_1, X_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot (X_1, X_2) \\ &= J\nabla \cdot X, \end{aligned}$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

é chamada de matriz simplética.

Observação: Os outros operadores do cálculo de várias variáveis (o gradiente, o divergente e o laplaciano) são definidos da maneira padrão.

Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} J \nabla f &= \operatorname{div} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) = \operatorname{div} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

e

$$\operatorname{rot} \nabla f = \operatorname{rot} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0. \quad (1.2)$$

Na DHH, do fato de $\operatorname{rot} u_1 = 0$ e de (1.1), segue que existe uma função ϕ tal que $u_1 = \nabla \phi$, e do fato de $\operatorname{div} u_2 = 0$ e de (1.2), segue que existe uma função ψ tal que $u_2 = J \nabla \psi$.

Com isso, segue então que

$$-\gamma \rho = \operatorname{div} u = \operatorname{div} u_1 = \operatorname{div} \nabla \phi = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \Delta \phi$$

e

$$\Sigma = \operatorname{rot} u = \operatorname{rot} u_2 = \operatorname{rot} (J \nabla \psi) = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \Delta \psi.$$

Portanto, para determinar as funções ϕ e ψ basta resolver as duas equações de Poisson:

$$\begin{cases} \Delta \phi = -\gamma \rho \\ \Delta \psi = \Sigma. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2 Algumas Definições sobre Formas Diferenciais

Nesta seção apresentamos algumas definições sobre formas diferenciais. Em particular serão apresentadas as definições de produto interno, dos operadores estrela de Hodge, Laplace-Beltrami, divergente, rotacional e gradiente sobre variedades Riemannianas. Esta seção está baseada em [13].

Notação: Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional.

Denotaremos por $\Omega^k(M)$ o espaço das k -formas diferenciais em M .

Notação: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional com métrica g .

Em um sistema (U, x_i) de coordenadas local em M , se $g = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ denotaremos por $g^{-1} = (g^{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Definição (Produto Interno):

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional e ω_1, ω_2 duas k -formas.

Podemos escrever ω_1 e ω_2 como

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ \omega_2 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} b_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.\end{aligned}$$

Definimos o produto interno de ω_1 com ω_2 como:

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_g: \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_g := \sum_{i_1 < \dots < i_k} a^{i_1 \dots i_k} b_{i_1 \dots i_k},\end{aligned}$$

onde $a^{i_1 \dots i_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} a_{j_1 \dots j_k}$.

Exemplo 1: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com métrica diagonal, isto é,

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1/g_{11} & 0 \\ 0 & 1/g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & 0 \\ 0 & g^{22} \end{pmatrix}.$$

Sejam $\omega_1 = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$ e $\omega_2 = b_1 dx^1 + b_2 dx^2$ duas 1-formas em M .

Calculemos a^1 e a^2 :

- $a^1 = g^{11}a_1 + g^{12}a_2 = \frac{1}{g_{11}}a_1 + 0a_2 = \frac{a_1}{g_{11}};$
- $a^2 = g^{21}a_1 + g^{22}a_2 = 0a_1 + \frac{1}{g_{22}}a_2 = \frac{a_2}{g_{22}}.$

$$\text{Logo } \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_g = a^1 b_1 + a^2 b_2 = \frac{a_1 b_1}{g_{11}} + \frac{a_2 b_2}{g_{22}}.$$

Sejam agora $\eta = a_{12} dx^1 \wedge dx^2$ e $\eta = b_{12} dx^1 \wedge dx^2$ duas 2-formas em M .

Calculemos a^{12} :

- $a^{12} = g^{11}g^{22}a_{12} = \frac{1}{g_{11}} \frac{1}{g_{22}} a_{12} = \frac{a_{12}}{g_{11}g_{22}}.$

$$\text{Portanto } \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_g = a^{12} b_{12} = \frac{a_{12} b_{12}}{g_{11} g_{22}}.$$

Exemplo 2: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com métrica $g = (g_{ij})_{i,j=1,2}$.

Note que

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_{22}}{\det g} & \frac{-g_{21}}{\det g} \\ \frac{-g_{12}}{\det g} & \frac{g_{11}}{\det g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

Sejam $\omega_1 = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$ e $\omega_2 = b_1 dx^1 + b_2 dx^2$ duas 1-formas em M .

Calculemos a^1 e a^2 :

- $a^1 = g^{11}a_1 + g^{12}a_2 = \frac{g_{22}}{\det g}a_1 - \frac{g_{21}}{\det g}a_2$;
- $a^2 = g^{21}a_1 + g^{22}a_2 = -\frac{g_{12}}{\det g}a_1 + \frac{g_{11}}{\det g}a_2$.

Assim $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_g = a^1 b_1 + a^2 b_2 = \frac{1}{\det g} [(g_{22}a_1 - g_{21}a_2)b_1 + (-g_{12}a_1 + g_{11}a_2)b_2]$.

Sejam agora $\eta = a_{12} dx^1 \wedge dx^2$ e $\eta = b_{12} dx^1 \wedge dx^2$ duas 2-formas em M .

Calculemos a^{12} :

- $a^{12} = g^{11}g^{22}a_{12} = \frac{g_{11}g_{22}}{(\det g)^2}a_{12}$.

Com isso, $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_g = a^{12}b_{12} = \frac{g_{11}g_{22}}{(\det g)^2}a_{12}b_{12}$.

Exemplo 3: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica diagonal, isto é, $g = \text{diag}(g_{11}, \dots, g_{nn})$.

Note que $g^{-1} = \text{diag}(1/g_{11}, \dots, 1/g_{nn}) = \text{diag}(g^{11}, \dots, g^{nn})$.

Sejam $\omega_1 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ e $\omega_2 = \sum_{j_1 < \dots < j_k} b_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ duas k -formas em M .

Calculemos $a^{i_1 \dots i_k}$:

$$\begin{aligned}
\bullet a^{i_1 \dots i_k} &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} a_{j_1 \dots j_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} g^{i_1 i_1} \dots g^{i_k i_k} a_{i_1 \dots i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{a_{i_1 \dots i_k}}{g_{i_1 i_1} \dots g_{i_k i_k}},
\end{aligned}$$

pois g é diagonal, ou seja, $g_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

$$\text{Com isso, } \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_g = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a^{i_1 \dots i_k} b_{i_1 \dots i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{a_{i_1 \dots i_k}}{g_{i_1 i_1} \dots g_{i_k i_k}}.$$

Definição (Estrela de Hodge):

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n .

O operador estrela de Hodge é definido como segue:

$$\begin{aligned}
*: \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^{n-k}(M) \\
\omega &\mapsto *\omega,
\end{aligned}$$

onde $*\omega$ é tal que $\psi \wedge *\omega = \langle \psi, \omega \rangle_g \nu$, $\forall \psi$ k -forma em M com $\nu = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ a forma volume.

Exemplo 4: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2 com métrica $g = \text{diag}(g_{11}, g_{22})$.

Seja $\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$ uma 1-forma em M .

Vamos calcular $*\omega$.

Seja $\psi = b_1 dx^1 + b_2 dx^2$ uma 1-forma qualquer em M .

Segundo os cálculos do Exemplo 1, temos que

$$\langle \psi, \omega \rangle_g = \frac{a_1 b_1}{g_{11}} + \frac{a_2 b_2}{g_{22}}. \quad (1.4)$$

Pondo $*\omega = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$ temos que

$$\psi \wedge *\omega = (b_1 dx^1 + b_2 dx^2) \wedge (\alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2) = (b_1 \alpha_2 - b_2 \alpha_1) dx^1 \wedge dx^2. \quad (1.5)$$

Assim, como por definição sabemos que $\psi \wedge * \omega = \langle \psi, \omega \rangle_g \nu$ temos, utilizando (1.4) e (1.5) e comparando termos, que $(b_1 \alpha_2 - b_2 \alpha_1) = \left(\frac{a_1 b_1}{g_{11}} + \frac{a_2 b_2}{g_{22}} \right) \sqrt{g_{11} g_{22}}$, logo, como queremos determinar α_1 e α_2 , podemos concluir que $\alpha_1 = -a_2 \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}$ e $\alpha_2 = a_1 \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}$.

Seja agora $\eta = a_{12} dx^1 \wedge dx^2$ uma 2-forma em M .

Vamos calcular $*\eta$.

Seja $\phi = b_{12} dx^1 \wedge dx^2$ uma 2-forma qualquer em M .

Segundo o Exemplo 1, temos que

$$\langle \phi, \eta \rangle_g = \frac{a_{12} b_{12}}{g_{11} g_{22}}. \quad (1.6)$$

Pondo $*\eta = \beta$ temos que

$$\phi \wedge *\eta = (b_{12} dx^1 \wedge dx^2) \wedge \beta = \beta b_{12} dx^1 \wedge dx^2. \quad (1.7)$$

Portanto, por (1.6) e (1.7) temos, comparando termos, que $\beta b_{12} = \frac{a_{12} b_{12}}{g_{11} g_{22}}$, ou seja, $*\eta = \frac{a_{12}}{g_{11} g_{22}}$.

Definição: (Divergente)

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional, $u \in \mathfrak{X}(M)$ e ω_u a 1-forma em M correspondente a u através da métrica g , isto é, $\omega_u(\cdot) = g(u, \cdot)$.

Definimos o divergente como sendo:

$$\begin{aligned} \text{div}: \Omega^1(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ \omega_u &\mapsto \text{div}(u) := *d*\omega_u. \end{aligned}$$

Definição: (Rotacional)

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional, $u \in \mathfrak{X}(M)$ e ω_u a

1-forma em M correspondente a u através da métrica g , isto é, $\omega_u(\cdot) = g(u, \cdot)$.

Para $n = 2$ definimos o rotacional como:

$$\begin{aligned} \text{rot}: \Omega^1(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ \omega_u &\mapsto \text{rot}(u) := *d\omega_u. \end{aligned}$$

Para $n = 3$ definimos o rotacional como:

$$\begin{aligned} \text{rot}: \Omega^1(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ \omega_u &\mapsto \text{rot}(u) := \hat{g}^{-1}(*d\omega_u), \end{aligned}$$

onde \hat{g} é o homomorfismo canônico entre fibrados, dado por,

$$\hat{g}: TM \rightarrow T^*M, \hat{g}(u)(\cdot) = g(u, \cdot) = \omega_u(\cdot).$$

Definição: (Gradiente)

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana n -dimensional e $f \in C^\infty(M)$.

Definimos o gradiente de f como sendo:

$$\begin{aligned} \text{grad}: C^\infty(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ f &\mapsto \text{grad}(f) := \hat{g}^{-1}(df), \end{aligned}$$

onde \hat{g} é o homomorfismo definido acima.

Definição: (Operador de Laplace-Beltrami)

O operador de Laplace-Beltrami é um operador no espaço das k -formas diferenciais ($\Omega^k(M)$) definidas sobre uma variedade n -dimensional (M, g) , dado por:

$$\begin{aligned} \Delta_g: \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^k(M) \\ \omega &\mapsto \Delta_g\omega := (d\delta + \delta d)\omega, \text{ onde } \delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \eta &\mapsto \delta\eta := (-1)^{n(k+1)+1} * d*. \end{aligned}$$

Observação: Diremos que uma p -forma é harmônica quando $\Delta_g\omega = 0$ e denotaremos por $\mathcal{H}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M); \Delta_g\omega = 0\}$ o espaço das k -formas

harmônicas.

Note que $\Delta_g \omega = 0 \iff d\omega = \delta\omega = 0$.

Observações:

Em coordenadas, podemos escrever os operadores definidos acima como:

- $\operatorname{div}(u) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \sqrt{\det g});$
- (Para $n = 2$) $\operatorname{rot}(u) = \frac{g_{11}g_{22}}{(\det g)^{3/2}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{i=1}^2 g_{i2}u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{i=1}^2 g_{i1}u_i \right) \right];$
- $\operatorname{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j};$
- $\Delta_g = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$

Note ainda que os operadores assim definidos são generalizações dos operadores já conhecidos do cálculo de várias variáveis no espaço Euclidiano. De fato, em \mathbb{R}^n com a métrica Euclidiana temos $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $\det g = 1$, o que implica:

- $\operatorname{div}(u) = \frac{1}{1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \sqrt{1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i};$
- $\operatorname{rot}(u) = \frac{1 \cdot 1}{1^{3/2}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_1) \right] = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2};$
- $\operatorname{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i};$
- $\Delta_g = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$

1.3 Decomposição de Formas Diferenciais - O Teorema da Decomposição de Hodge

Enunciamos agora o Teorema da Decomposição de Hodge (DH) para formas diferenciais, que pode ser visto, ao mesmo tempo, como um análogo e uma generalização da DHH para formas diferenciais.

Teorema (da Decomposição de Hodge):

Seja M uma variedade Riemmaniana, compacta, sem bordo e orientada, munida com uma métrica g .

Temos que

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) &= \Delta_g(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M) \\ &= d\delta_g(\Omega^k(M)) \oplus \delta_g d(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M) \\ &= d(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta_g(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M).\end{aligned}$$

Em outras palavras, dada $\theta \in \Omega^k(M)$ existem $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$ e $\gamma \in \mathcal{H}^k(M)$ tais que

$$\theta = d\alpha + \delta\beta + \gamma.$$

Demonstração: Ver [34].

Vale a mesma afirmação, feita para a DHH, que tal decomposição não está bem definida, uma vez que, se γ_1 e γ_2 são duas formas harmônicas, então, se definirmos $\bar{\alpha} = \alpha + \gamma_1$ e $\bar{\beta} = \beta + \gamma_2$, temos que θ pode ser decomposta como

$$\theta = d\alpha + \delta\beta + \gamma = d\bar{\alpha} + \delta\bar{\beta} + \gamma.$$

E novamente, para resolver essa situação, condições sobre a forma ω e sua

relação com a fronteira da variedade (caso ela exista) podem ser requeridas.

Vejam agora - superficialmente ainda nesta seção e com mais detalhes nas próximas - como a DH nos ajuda a compreender melhor o comportamento da dinâmica de massas e cargas (forças centrais) e vórtices (fluidos incompressíveis).

Mas primeiro, podemos nos perguntar o que são os conceitos de campo de forças centrais e fluido incompressível. Seguem as definições:

Definição(Campo de Forças Central):

Seja M uma variedade. Um campo de forças central sobre M é um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\text{rot}(X) = 0$.

Definição(Fluido Incompressível):

Seja M uma variedade.

Suponhamos M preenchida por um fluido incompressível. Temos então que as partículas que ocupam este fluido satisfarão $\text{div}(u) = 0$, onde u é o campo vetorial de velocidades dessas partículas.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, de dimensão 2 com métrica diagonal.

(Vale também para $M = \mathbb{R}^2$ com g a métrica Euclideana ([33]).)

Sejam $u \in \mathfrak{X}(M)$ e ω_u a 1-forma correspondente a u em M através da métrica $\omega_u(\cdot) = g(u, \cdot)$.

Aplicando o Teorema da Decomposição de Hodge podemos escrever $\omega_u = d\omega_1 + \delta\omega_2 + \omega_3$, onde $\omega_1 \in \Omega^0(M)$, $\omega_2 \in \Omega^2(M)$ e $\omega_3 \in \mathcal{H}^1(M)$.

Temos dois casos para investigar:

- (i) Para u um campo de acelerações de forças centrais, isto é, $\text{rot}(u) = 0$, estamos trabalhando com a classe de formas exatas ($d\omega_1$);
- (ii) Para u um campo de velocidade em um fluido incompressível, isto é, $\text{div}(u) = 0$, estamos lidando com a classe de formas co-exatas ($\delta\omega_2$).

De fato,

- (i) $0 = \text{rot}(u) = *d\omega_u = *d(dw_1 + \delta\omega_2 + \omega_3) = *dd\omega_1 + *d\delta\omega_2 + *d\omega_3 = *d\delta\omega_2 \implies **d\delta\omega_2 = *0 = 0 \implies (-1)^0 d\delta\omega_2 = d\delta\omega_2 = 0$, mas como $\delta\delta\omega_2 = 0$, podemos afirmar que $\delta\omega_2$ é harmônica.

Assim, $\omega_u = d\omega_1 + \underbrace{\zeta}_{\delta\omega_2 + \omega_3}$, com ζ harmônica.

Temos que ζ é fechada, isto é, $d\zeta = 0$, portanto, como M é simplesmente conexa, ζ é exata, isto é, existe $\tau \in \Omega^0(M)$ tal que $\zeta = d\tau$.

Logo, $\omega_u = d \underbrace{\phi}_{\omega_1 + \tau}$.

- (ii) $0 = \text{div}(u) = *d*\omega_u = *d*(d\omega_1 + \delta\omega_2 + \omega_3) = *d*d\omega_1 + *d*\delta\omega_2 + *d*\omega_3 \iff 0 = -0 = -*d*d\omega_1 - *d*\delta\omega_2 - *d*\omega_3 = \delta d\omega_1 + \delta\delta\omega_2 + \delta\omega_3 = \delta d\omega_1$, mas como $dd\omega_1 = 0$, podemos afirmar que $d\omega_1$ é harmônica.

Portanto, $\omega_u = \delta\omega_2 + \underbrace{\zeta}_{d\omega_1 + \omega_3}$, com ζ harmônica.

Temos que ζ é co-fechada, isto é, $\delta\zeta = 0$, portanto, como M é simplesmente conexa, ζ é co-exata, isto é, existe $\tau \in \Omega^2(M)$ tal que $\zeta = \delta\tau$ ([17]).

Logo, $\omega_u = \delta \underbrace{\phi}_{\omega_2 + \tau}$.

Nas duas próximas seções veremos cada caso mais detalhadamente.

1.4 Forças Centrais

Nesta seção apresentaremos como derivar as equações que governam a dinâmica de n -massas ou n -cargas em uma variedade Riemanniana (M, g) nas hipóteses supracitadas (compacta, simplesmente conexa, de dimensão 2 com métrica diagonal ou $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclideana).

O espaço de fase é $\underbrace{T^*M \times \cdots \times T^*M}_{n\text{-vezes}}$.

Seja $a(q, t)$ um campo de acelerações, onde q é a posição de uma partícula.

Definimos a densidade de massa (carga) de um campo vetorial gravitacional (elétrico) como $-\gamma\rho(q, t) = \text{div}(a(q, t))$.

Observação: O termo γ é uma constante que indica aumento ($\gamma > 0$) ou diminuição ($\gamma < 0$) de volume conforme a natureza da força: atrativo (gravitacional, cargas iguais) ou repulsivo (cargas diferentes).

Considerando o campo como sendo de forças centrais ($\text{rot}(a) = 0$) e as massas (cargas) sendo pontuais, temos que a densidade de massa (carga) será dada por $\gamma\rho(q, t) = \gamma \sum_{i=1}^n m_i \delta(q - q_i(t)) \left(= \gamma \sum_{i=1}^n k_i \delta(q - q_i(t)) \right)$, onde m_i (k_i) é a massa (carga) do i -ésimo corpo.

Vamos primeiramente estudar a dinâmica de uma partícula teste:

Seja (x_1, x_2) um sistema de coordenadas em M .

Vamos adicionar a informação da massa à métrica - processo este que será chamado “massificação da métrica” - de tal forma que ela fique representada

pela matriz $g = \begin{pmatrix} mg_{11} & 0 \\ 0 & mg_{22} \end{pmatrix}$.

Se $a = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, então $\omega_a = g(a, \cdot) = mg_{11}a_1 dx^1 + mg_{22}a_2 dx^2$.

Já vimos que, se $g = (g_{ij})$, então

$$\text{rot}(a) = \frac{g_{11}g_{22}}{(\det g)^{3/2}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{i=1}^2 g_{i2}a_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{i=1}^2 g_{i1}a_i \right) \right].$$

Neste caso, temos que

$$0 = \text{rot}(a) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (mg_{22}a_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (mg_{11}a_1) \right) \iff$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (mg_{22}a_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (mg_{11}a_1) = 0.$$

Assim, podemos afirmar que existe $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} mg_{22}a_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ mg_{11}a_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{cases}.$$

A fim de determinar ϕ vamos utilizar o fato de que $\text{div}(a) = -cS$.

Temos que

$$\text{div}(a) = *d*\omega_a = \frac{1}{m\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (m\sqrt{g_{11}g_{22}}a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (m\sqrt{g_{11}g_{22}}a_2) \right).$$

Assim, notando que $m\sqrt{g_{11}g_{22}}a_i = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{ii}} (mg_{ii}a_i) = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{ii}} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)$, temos que

$$\begin{aligned} \text{div}(a) &= \frac{1}{m\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{11}} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{22}} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g^{11} \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g^{22} \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \right) = -\Delta_g \phi. \end{aligned}$$

Portanto, para calcular ϕ , o potencial da partícula teste, temos que resolver uma equação de Poisson $\Delta_g \phi = \gamma \rho = \gamma \sum_{i=1}^n m_i \delta(q - q_i(t)) \left(= \gamma \sum_{i=1}^n k_i \delta(q - q_i(t)) \right)$.

Dada a métrica $g = \text{diag}(mg_{11}, mg_{22})$ temos que o gradiente será dado por $\text{grad}(f) = \frac{1}{mg_{11}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{mg_{22}} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Assim, como $a_i = -\frac{1}{mg_{ii}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, temos que $a = -\text{grad}(\phi)$.

Como a dinâmica de massas e cargas é um sistema mecânico, vale a Segunda Lei de Newton, que diz que $F = ma$, onde m é a massa da partícula, e F a força que ela sofre.

Sabemos que $a(q, t)$ é um campo de acelerações e $q = (x_1, x_2)$ a posição da partícula, assim $a = \ddot{q} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$.

Portanto, temos que determinar $(x_1(t), x_2(t))$ tal que $m\ddot{q}(t) = F(q(t))$.

Tal equação de segunda ordem pode ser transformada em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $p = m\dot{q}$, e assim teremos

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = F(q) = m\ddot{q} = ma = -m\text{grad}(\phi) \end{cases}.$$

Se tomarmos $H = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + m\phi$ poderemos escrever

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases}$$

que é a forma Hamiltoniana da partícula teste.

Para determinar a dinâmica de uma distribuição pontual de massas (cargas) vamos utilizar a seguinte hipótese de trabalho: “Cada massa (carga) se

comporta como partícula teste no campo dos outros”.

Seja $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_1^n, x_2^n) \in \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-vezes}}$ as posições das n massas (cargas).

Tomando a métrica massificada como

$$\text{diag}(m_1 g_{11}, m_1 g_{22}, m_2 g_{11}, m_2 g_{22}, \dots, m_n g_{11}, m_n g_{22})$$

e fazendo contas análogas às feitas para a partícula teste teremos que, chamando $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_1^n, a_2^n)$ as acelerações, temos

$$\begin{cases} a_1^i = -\frac{1}{m_i g_{11}} \frac{\partial \phi}{\partial x_1^i} \\ a_2^i = -\frac{1}{m_i g_{22}} \frac{\partial \phi}{\partial x_2^i} \end{cases}$$

e portanto, $a = -\text{grad}(\phi)$.

Podemos escrever a Segunda Lei de Newton da forma $M\ddot{q}(t) = F(q(t))$, onde $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, \dots, m_n, m_n)$.

Se escrevemos $p = M\dot{q}$ então a equação de segunda ordem acima se transforma no seguinte sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1}p \\ \dot{p} = F(q) = M\ddot{q} = Ma = -M\text{grad}(\phi) \end{cases}.$$

Com isso, tomando $H = \frac{1}{2}p^T M p + M\phi$ poderemos escrever

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases}$$

temos assim a dinâmica das n -massas (cargas) escrita em forma Hamiltoniana.

Mais à frente veremos casos mais específicos de dinâmicas em certas variedades, mas antes, vamos analisar o caso dos fluidos incompressíveis.

1.5 Fluidos Incompressíveis

No caso de fluidos incompressíveis, vamos estudar a dinâmica de n -vórtices numa variedade Riemanniana (M, g) , novamente nas hipóteses supracitadas.

Sabemos que, neste caso, o espaço de fase é $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{n\text{-vezes}}$ ([24]).

Seja $v(q, t)$ um campo de velocidades, onde q é a posição de uma partícula.

Definimos o campo de vorticidades gerado pelos vórtices como sendo $\Sigma(q, t) = \text{rot}(v(q, t))$.

Considerando o fluido no qual os vórtices e a partícula estão imersos como incompressível ($\text{div}(v) = 0$) e os vórtices como pontuais, temos que o campo de vorticidades será dado por $\Sigma(q, t) = \Gamma_i \delta(q - q_i(t))$, onde Γ_i é a vorticidade do i -ésimo vórtice.

Vamos primeiramente estudar a dinâmica da partícula teste:

Seja (x_1, x_2) um sistema de coordenadas em M .

Se $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, então $\omega_v = g(v, \cdot) = g_{11}v_1 dx^1 + g_{22}v_2 dx^2$.

Já vimos que $\text{div}(v) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \sqrt{\det g})$.

Neste caso $0 = \text{div}(v) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \sqrt{g_{11}g_{22}}) \iff \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1 \sqrt{g_{11}g_{22}}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (v_2 \sqrt{g_{11}g_{22}}) = 0$.

Logo, podemos afirmar que existe $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} v_1 \sqrt{g_{11}g_{22}} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ v_2 \sqrt{g_{11}g_{22}} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases} .$$

Como v é um campo de velocidades e $q = (x_1, x_2)$ é a posição da partícula, podemos escrever $v = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ e portanto

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases}.$$

Vamos agora determinar ψ utilizando o fato de que $\text{rot}(v) = \Sigma$.

$$\text{Temos que } \text{rot}(v) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (g_{22}v_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (g_{11}v_1) \right).$$

Note que

$$\begin{aligned} g_{22}v_2 &= \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{11}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = g^{11} \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ g_{11}v_1 &= -\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -g^{22} \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{rot}(v) &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g^{11} \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-g^{22} \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\det g} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(g^{11} \sqrt{\det g} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(g^{22} \sqrt{\det g} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \right) = -\Delta_g \psi. \end{aligned}$$

Portanto, analogamente ao caso das massa e cargas, para determinar ψ , a hamiltoniana da partícula teste, teremos que resolver uma equação de Poisson

$$\Delta_g \psi = \Sigma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(q - q_i(t)).$$

Para a dinâmica dos vórtices, utilizaremos a mesma hipótese de trabalho:

“cada vórtice se comporta como partícula teste no campo das outras”.

Seja $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_1^n, x_2^n) \in \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-vezes}}$ as posições dos n vórtices.

Utilizando a hipótese de trabalho e fazendo contas análogas às feitas para a partícula teste, temos que, se chamarmos $(v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_1^n, v_2^n)$ as velocidades, isto é, $v_j^i = \dot{x}_j^i$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, 2$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1^i = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x_2^i} \\ \dot{x}_2^i = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x_1^i} \end{cases} .$$

Nas próximas seções apresentamos a derivação desse hamiltoniano para o caso em que a variedade é o plano e no caso em que ela é um cilindro de raio R .

Para um tratamento mais geral dessa variedade, ver [24].

Capítulo 2

Cálculos Iniciais Sobre Superfícies de Interesse

2.1 Derivação da Hamiltoniana dos vórtices no plano

Temos agora, em ambos os casos (forças centrais e fluidos incompressíveis), que resolver uma equação de Poisson: $\Delta u = f$, cujo termo de fonte é dado.

A fim de resolvermos tal equação, consideremos a solução fundamental, solução do problema $\Delta\phi = \delta_0$:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} |r|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log|r|, & \text{se } n = 2, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde α_n é o volume da bola unitária de \mathbb{R}^n ([16]).

Como estamos em \mathbb{R}^2 , temos que

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{2\pi} \log|r| \\ &= \frac{1}{4\pi} \log|r|^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim sendo, a solução fundamental ϕ nos dá a resposta sentida por um observador localizado na posição x a uma excitação provocada por uma partícula localizada na origem (por isso δ_0); se quisermos estender isto para uma partícula localizada, digamos, em $\rho \in \mathbb{R}^2$, basta considerar uma composição de ϕ com uma translação, ou seja, basta considerar a função $\phi(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \log|r - \rho|^2$, que é solução da equação $\Delta\phi = \delta_\rho$.

Se estivermos interessados agora na resposta sentida por um observador a um estímulo de uma distribuição discreta e finita de partículas, digamos n delas, basta considerarmos uma combinação linear das soluções, uma vez que a equação de Poisson é linear.

Portanto, tal resposta pode ser vista como a solução de $\Delta\psi = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{r_j(t)}$, onde $r_1(t), \dots, r_n(t)$ são as posições das n partículas no tempo t e a_1, \dots, a_n são escalares associados a cada uma das partículas, que dependem de sua natureza. Por exemplo, se estamos tratando de vórtices em um fluido incompressível, tais escalares são as vorticidades Γ_j de cada vórtice; se estamos em um problema gravitacional (forças centrais), as partículas podem ser vistas como pontos de massa m_j ; ou, no caso de um problema de eletrodinâmica (também de forças centrais), como pontos de carga q_j , $j = 1, \dots, n$.

Finalmente, como sabemos a solução fundamental da equação de Poisson, podemos resolver $\Delta\psi = f = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{r_j(t)}$.

A solução será dada por

$$\begin{aligned}
\psi(r, r_j(t)) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(r, \rho) f(r, \rho) d\rho \\
&= \sum_{j=1}^n a_j \phi(r, r_j(t)) \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n a_j \log|r - r_j(t)|^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Vejamos como determinar a dinâmica de uma partícula teste sujeita a um campo gerado por vórtices em fluidos incompressíveis.

Como u é um campo de velocidades, em coordenadas cartesianas, temos que $u = (\dot{x}, \dot{y})$.

Por outro lado, como estamos em um fluido incompressível, sabemos que existe uma função ψ (denominada função de corrente) tal que $u = J \text{grad} \psi$.

Assim

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = u = J \nabla \psi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix},$$

ou seja

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{x - x_j(t)}{|r - r_j(t)|^2} \\ \dot{y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{y - y_j(t)}{|r - r_j(t)|^2}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Recapitulando o que fizemos até aqui: Estamos em \mathbb{R}^2 e sabemos que uma distribuição discreta e finita de partículas gera um campo vetorial neste espaço. Por este motivo podemos nomear tais partículas de “motores”, pois são elas que geram o movimento de outras.

Supomos conhecida a dinâmica destes motores e gostaríamos de estudar o que acontece com uma partícula teste sujeita à ação do campo gerado por eles.

Determinada ψ , conhecemos então as equações que geram a dinâmica da partícula teste. m outras palavras, dada a dinâmica dos motores, é possível determinar a dinâmica de uma partícula teste sujeita ao campo vetorial gerado por eles.

A questão agora é: como determinar a dinâmica dos motores?

Para isso, utilizamos a seguinte hipótese de trabalho: “cada motor se comporta como partícula teste no campo gerado pelos outros.”

Assumindo tal hipótese, podemos modelar tal problema utilizando o mesmo formalismo Hamiltoniano utilizado no problema da partícula teste.

2.1.1 Vórtices em fluidos incompressíveis

Como cada vórtice se comporta como uma partícula teste no campo dos outros, temos que a Hamiltoniana de cada um deles será dada por (2.4).

Para determinar a Hamiltoniana do problema dos n -vórtices é conveniente lembrar que a derivada é um operador linear e portanto podemos escrever a Hamiltoniana como:

$$H = \sum_{j < k} \Gamma_j \Gamma_k \psi(r_j, r_k) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j < k} \Gamma_j \Gamma_k \log |r_j - r_k|^2. \quad (2.5)$$

Notemos que, em coordenadas cartesianas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_j \dot{x}_j = -\frac{\partial H}{\partial y_j} = -\frac{\Gamma_j}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Gamma_k \frac{x_j - x_k}{|r_j - r_k|^2} \\ \Gamma_j \dot{y}_j = \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\Gamma_j}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Gamma_k \frac{y_j - y_k}{|r_j - r_k|^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Gamma_k \frac{x_j - x_k}{|r_j - r_k|^2} \\ \dot{y}_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Gamma_k \frac{y_j - y_k}{|r_j - r_k|^2} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

À primeira vista, a introdução do termo Γ_j do lado esquerdo das equações (2.2) pode parecer artificial, mas observemos que H é, na verdade, a Hamiltoniana na variedade simplética $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega)$ com coordenadas $(x_j, \Gamma_j y_j)$, (ou $(\Gamma_j x_j, y_j)$) e $\Omega = \sum_{j=1}^n \Gamma_j dx_j \wedge dy_j$.

A introdução deste termo Γ_j e a mudança na generalização canônica da forma simplética ($\Omega = \sum_{j=1}^n \Gamma_j dx_j \wedge dy_j$ em vez de $\Omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$) ocorrem para que possamos justificar a hipótese de trabalho; de fato, comparando as equações (2.4) e (2.2) podemos perceber que tal hipótese é válida, uma vez que, em um certo sentido, as equações são as mesmas.

2.2 Derivação da Hamiltoniana dos vórtices no cilindro

Nesta seção seguiremos como em [26].

Notemos que podemos considerar o cilindro de raio R como uma faixa infinita no plano de comprimento $2\pi R$ com seus lados identificados, ou ainda como infinitas faixas, todas de comprimento $2\pi R$.

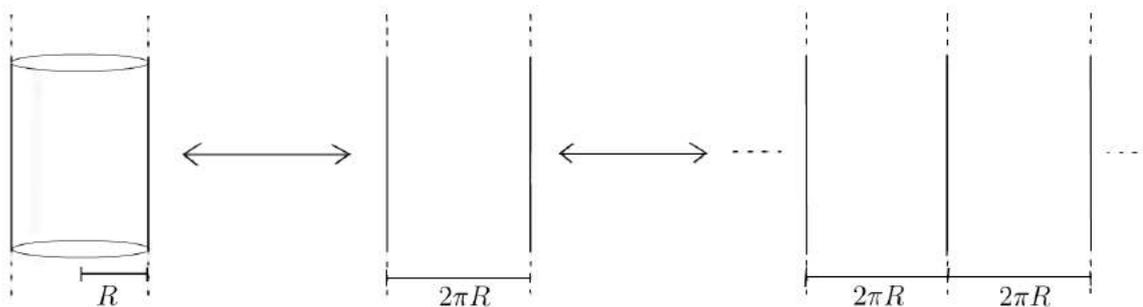


Figura 2.1: Identificação cilindro \longleftrightarrow faixa de comprimento $2\pi R$ com suas bordas identificadas \longleftrightarrow infinitas faixas de comprimento $2\pi R$.

Para a derivação da Hamiltoniana e da dinâmica dos vórtices no cilindro, a

última identificação nos é especialmente agradável. Vejamos.

A partir deste ponto nos será útil também a identificação $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

Se temos um sistema com n vórtices no cilindro, podemos, através da identificação cilindro de raio $R \leftrightarrow$ infinitas faixas de comprimento $2\pi R$ no plano, deduzir que, em cada faixa, há um sistema de n -vórtices, conforme a Figura 2.2.

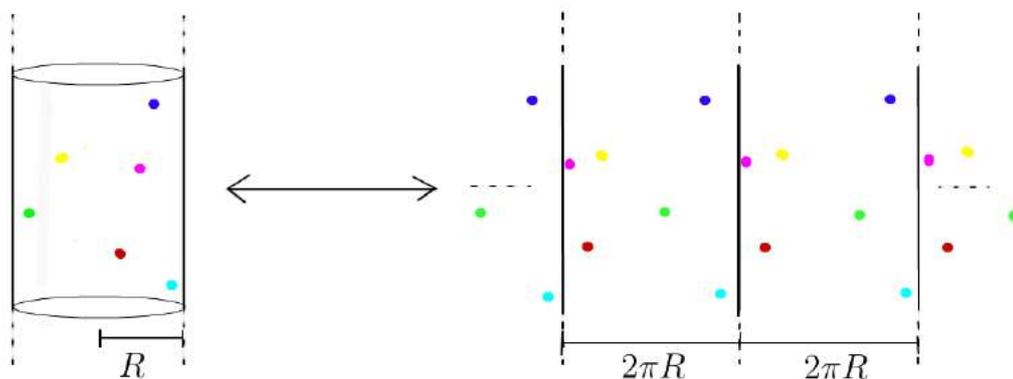


Figura 2.2: Ilustração da dinâmica de n -vórtices na identificação cilindro \longleftrightarrow infinitas faixas de comprimento $2\pi R$.

Tal sistema pode ser visto como uma interação de cada vórtice com infinitos outros; cada um deles interage com infinitos outros dispostos em uma distribuição $2\pi R$ -periódica.

Sabemos que, no plano, a função de Green para o Laplaciano é

$$\psi(r_j, r_k) = \frac{1}{4\pi} \log|r_j - r_k|^2.$$

Levando em conta apenas uma das faixas, essa seria a função de Green, mas como temos infinitas cópias da faixa (logo infinitas cópias deste sistema) e a distribuição dos vórtices é periódica, podemos periodizar ψ .

Identificando $r_j = (x_j, y_j)$ com $\zeta_j = x_j + iy_j$, temos que a função de Green

periodizada é $\psi_p(\zeta_j, \zeta_k) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \log |\zeta_j - (\zeta_k + 2\pi Rn)|^2$, de tal forma que a Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \psi(\zeta_k, \zeta_l) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |\zeta_k - \zeta_l - 2\pi Rn|^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esta série diverge, mas isto não é um problema, visto que a adição de termos constantes na função Hamiltoniana não altera a dinâmica das partículas (pois só nos interessam as derivadas de H_0).

Definindo $H = H_0 - \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2\pi Rn|^2 - \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2R|^2$, temos que H também é Hamiltoniana deste sistema e agora não temos mais problemas de convergência, pois (ver Apêndice A)

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_k - \zeta_l}{2R} \right) \right|^2 \quad (2.8)$$

Em coordenadas complexas ($\zeta_j = x_j + iy_j$), as equações da dinâmica são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_k &= \frac{2}{i} \cdot \frac{1}{\Gamma_k} \cdot \frac{\partial H}{\partial \bar{\zeta}_k} \\ &= \frac{2}{i\Gamma_k} \cdot \frac{1}{4\pi} \Gamma_k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \Gamma_l \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k} \left(\log \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_k - \zeta_l}{2R} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_l}{2R} \right) \right) \right) \\ &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \Gamma_l \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_k - \zeta_l}{2R} \right) \cos \left(\frac{\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_l}{2R} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_k - \zeta_l}{2R} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_l}{2R} \right)} \cdot \frac{1}{2R} \\ &= -\frac{i}{4\pi R} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \Gamma_l \cotg \left(\frac{\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_l}{2R} \right), \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, n$.

Para escrever esta Hamiltoniana em coordenadas reais, observamos primeiramente que (ver Apêndice A)

$$\left| \operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_k - \zeta_l}{2R} \right) \right|^2 = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2R} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2R} \right) \quad (2.9)$$

de forma que

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left| \operatorname{sen} \frac{\zeta_k - \zeta_l}{2R} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left(\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2R} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2R} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

e portanto as equações de Hamilton são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_k = -\frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{\Gamma_k}{8\pi R} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \Gamma_l \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{y_k - y_l}{R} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2R} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2R} \right)} \\ \dot{y}_k = \frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{\Gamma_k}{8\pi R} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \Gamma_l \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x_k - x_l}{R} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2R} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2R} \right)}, \end{array} \right.$$

$k = 1, \dots, n.$

2.3 Massas e Cargas em Forças Centrais

No caso da dinâmica de massas e cargas, que é uma dinâmica de forças centrais, a função Hamiltoniana tem uma parte potencial (que se deriva de forma análoga à Hamiltoniana dos vórtices feita anteriormente) juntamente com uma parte cinética, que será construída adiante.

Proposição: Dada uma variedade (M, g) , um sistema mecânico (isto é, que obedece à Segunda Lei de Newton) sobre ela de uma distribuição discreta de

n -pontos de massa m_1, m_2, \dots, m_n tem como energia cinética

$$K(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} \|p_i\|_{g^{-1}}^2,$$

onde p_i é o momento da i -ésima massa.

Demonstração: Pode ser vista em [7, 19].

Sendo L o Lagrangiano de um sistema de n partículas de massas m_1, \dots, m_n , com posições r_1, \dots, r_n e velocidades v_1, \dots, v_n , podemos escrevê-lo em nessas coordenadas como

$$L = K - V,$$

onde $K = K(r_1, \dots, r_n)$ é a energia cinética do sistema e $V = V(v_1, \dots, v_n)$ a energia potencial.

Assim,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v_i\|_g^2 - V \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^T g v_i - V. \end{aligned}$$

O momento p_i é definido como $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$, logo $p_i = m_i v_i^T g$, e portanto, $v_i = \frac{1}{m_i} (g^{-1})^T p_i^T$.

Assim, a energia cinética K expressa como função dos momentos p_i é dada por

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{p_i g^{-1}}{m_i} g \frac{(g^{-1})^T p_i^T}{m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} p_i g^{-1} p_i^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} \|p_i\|_{g^{-1}}^2.$$

Sobre a métrica g , podemos vê-la de duas formas:

(i) Vendo o cilindro como imerso em \mathbb{R}^3 , aproveitando suas coordenadas car-

tesianas (x', y', z) e transformando-as em coordenadas cilíndricas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix},$$

onde $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$ e R é o raio do cilindro, temos que a métrica se escreve como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

e pode ser representada pela matriz

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Vendo agora o cilindro como na identificação com as infinitas faixas de comprimento $2\pi R$, e utilizando a métrica Euclideana, chegamos a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

que implica na expressão da métrica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

que pode ser representado pela matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cada uma desses pontos de vista nos é útil em algum momento do trabalho.

No caso das forças centrais, à parte potencial será agregada uma constante multiplicativa γ responsável por dar a natureza atrativa/repulsiva da força.

Assim, somando a parte cinética com a potencial, temos que a função Hamiltoniana do problema das n -massas é dada por:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} \|p_i\|_{g^{-1}}^2 + \gamma \sum_{i<j} m_i m_j G(r_i, r_j), \quad (2.11)$$

onde G é a função de Green.

(i) No caso em que $r_k = (\varphi_k, z_k)$:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} \left(\frac{p_{\varphi_i}^2}{R^2} + p_{z_i}^2 \right) + \sum_{i<j} \frac{\gamma m_i m_j}{4\pi R} \log \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{z_i - z_j}{2R} \right) \right). \quad (2.12)$$

(ii) No caso em que $r_k = (x_k, y_k)$:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2) + \sum_{i<j} \frac{\gamma m_i m_j}{4\pi R} \log \left(\text{sen}^2 \left(\frac{x_i - x_j}{2R} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{y_i - y_j}{2R} \right) \right). \quad (2.13)$$

Observação: A diferença no caso da dinâmica de n -cargas é o escalar associado a cada corpo na parte potencial, que será a carga k_i , ou seja, a função hamiltoniana no caso de n -cargas terá a parte potencial dada por

(i)

$$U = \sum_{i<j} \frac{\gamma k_i k_j}{4\pi R} \log \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{z_i - z_j}{2R} \right) \right).$$

(ii)

$$U = \sum_{i<j} \frac{\gamma k_i k_j}{4\pi R} \log \left(\text{sen}^2 \left(\frac{x_i - x_j}{2R} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{y_i - y_j}{2R} \right) \right).$$

Capítulo 3

Redução Simplética dos Graus de Liberdade do Problema de Dois Corpos no Plano e no Cilindro

Nesta seção apresentaremos o processo de redução dos graus de liberdade do problema dos dois corpos sobre o plano e o cilindro.

Seguiremos como feito em [29].

Lembramos que o problema dos dois corpos é um sistema Hamiltoniano que pode ser descrito pela Hamiltoniana em (2.11).

Para realizar o processo de redução, procuramos por simetrias das equações do sistema. Elas podem ser próprias das equações, ou então da função Hamiltoniana que induz uma simetria nas equações. Em outras palavras, simetrias da função Hamiltoniana induzem simetrias nas equações do sistema Hamiltoniano, mas nem toda simetria do sistema é induzida por uma simetria da função. Assim sendo, temos que investigar tanto as simetrias da função quanto as simetrias das equações.

3.1 Plano

Fixando notação, sejam:

- x_i a componente x da posição do i -ésimo corpo;
- y_i a componente y da posição do i -ésimo corpo;
- p_{x_i} a componente x do momento do i -ésimo corpo;
- p_{y_i} a componente y do momento do i -ésimo corpo.

Sendo um sistema Hamiltoniano, temos que a dinâmica destes corpos é descrita pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_{x_1}}, & \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_{x_2}}, & \dot{y}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_{y_1}}, & \dot{y}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_{y_2}}, \\ \dot{p}_{x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}, & \dot{p}_{x_2} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}, & \dot{p}_{y_1} &= -\frac{\partial H}{\partial y_1}, & \dot{p}_{y_2} &= -\frac{\partial H}{\partial y_2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

No caso da dinâmica dos dois corpos no plano, podemos escrever $H(q, p) = T(p) + U(q)$, onde estamos denotando p como o momento e q a posição. Em outras palavras, essa função Hamiltoniana pode ser “quebrada” na soma de duas outras funções, cada uma dependente unicamente de uma parte das variáveis de H , onde, por convenção, costuma-se chamar T de “a parte cinética” da Hamiltoniana e U de “a parte potencial”.

Como nas coordenadas cartesianas a métrica pode ser representada pela matriz $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a parte cinética da Hamiltoniana é dada por

$$T(q) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2m_i} \|p_i\|_{g^{-1}}^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2) = \frac{p_{x_1}^2}{2m_1} + \frac{p_{y_1}^2}{2m_1} + \frac{p_{x_2}^2}{2m_2} + \frac{p_{y_2}^2}{2m_2}.$$

Pela observação acima somada ao fato de que a função potencial U depende somente da norma da distância entre os corpos, podemos afirmar que o sistema é invariante com respeito a rotações e translações, pois se tivermos que $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ forem transformações lineares, respectivamente, de rotação e translação, então segue que como R é um operador unitário, R preserva normas e como T é uma translação, T também preserva normas, isto é $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \|R(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\| = \|T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|$ e portanto $U(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) = U(\|R(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|) = U(\|T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\|)$.

Podemos assim concluir que:

- (i) O momento angular total do sistema $L = x_1 p_{y_1} - y_1 p_{x_1} + x_2 p_{y_2} - y_2 p_{x_2}$ é constante;
- (ii) A soma das componentes x dos momentos lineares $p_x = p_{x_1} + p_{x_2}$ é constante, assim como a soma das componentes y : $p_y = p_{y_1} + p_{y_2}$.

Observação: Vale a pena frisar que essas simetrias acima são simetrias da função Hamiltoniana H .

De (ii) concluimos que $p_{x_2} = k_x - p_{x_1}$ e $p_{y_2} = k_y - p_{y_1}$, onde $k_x, k_y \in \mathbb{R}$ são constantes que representam, respectivamente, as componentes em x e em y do momento do centro de massa do sistema.

Assim, se pudermos escolher um sistema de coordenadas “que viaja junto com o centro de massa”, isto é, tal que o centro de massa fique em repouso com relação à origem do sistema, concluiremos que

$$\begin{cases} p_{x_2} = -p_{x_1} \\ p_{y_2} = -p_{y_1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

É possível fazer tal escolha, pois dado $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, temos que se

$$\begin{cases} x' = x + wt \\ y' = y + wt, \end{cases}$$

(o grupo de simetrias Galileano) onde $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} + w \\ \dot{y}' = \dot{y} + w, \end{cases}$$

de onde concluímos que a aceleração dos sistemas (x', y') e (x, y) é igual, isto é, $\ddot{x}' = \ddot{x}$ e $\ddot{y}' = \ddot{y}$, e portanto como $p_{x_1} = m_1 \dot{x}_1$, temos que $m_1 \ddot{x}_1 = \dot{p}_{x_1} \stackrel{(3.1)}{=} -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1}$. Um raciocínio análogo pode ser aplicado a y_1, x_2 e y_2 .

Isto é, as equações (3.1) se mantem na mesma dinâmica independentemente da velocidade com que o sistema de coordenadas se desloca.

Observemos que a simetria apresentada acima é uma simetria das equações (3.1) e não da função Hamiltoniana H . De fato, H varia ao adotarmos um sistema de coordenadas com velocidade constante, mas isto não é um problema, visto que estamos interessados nas simetrias do sistema e não da função.

De $p_x = p_{x_1} + p_{x_2} = 0$ e $p_y = p_{y_1} + p_{y_2} = 0$ temos que

$$\begin{cases} m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = 0 \\ m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 = 0. \end{cases}$$

Integrando o sistema acima obtemos

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 = c_x \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = c_y, \end{cases}$$

onde $c_x, c_y \in \mathbb{R}$, representam, respectivamente, as coordenadas em x e em y da posição do centro de massa com relação à origem do sistema.

Assim, como o sistema é invariante com relação a translações em x e em y , se escolhermos a origem do sistema fixada no centro de massa teremos então que

$$\begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \\ m_1y_1 + m_2y_2 = 0, \end{cases}$$

de onde segue que

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{m_1}{m_2}x_1 \\ y_2 = -\frac{m_1}{m_2}y_1, \end{cases} \quad (3.3)$$

Até aqui reduzimos os graus de liberdade do sistema de 8 para 4. De fato, as variáveis p_{x_2} , p_{y_2} , x_2 e y_2 não são mais independentes das outras, por (3.2) e (3.3) isto é, para conhecer as órbitas do sistema bastam 4 informações (variáveis).

Para passarmos à redução devida ao momento angular utilizaremos coordenadas polares.

Com a redução já feita de 8 para 4 graus de liberdade, podemos nos concentrar somente na interação entre os dois corpos, deixando de lado as órbitas deles. De fato, por (3.2) e (3.3) podemos determinar a posição e o momento do segundo corpo, através das informações do primeiro.

Assim sendo, para passarmos para as coordenadas polares, apliquemos

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1 = r\cos\phi \\ y = y_2 - y_1 = r\sin\phi. \end{cases}$$

Nas coordenadas cartesianas, a métrica é dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2$, cuja matriz representante é dada por $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Já nas coordenadas polares, a

métrica é dada por $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, com matriz representante $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$.

Dessa forma, a parte cinética da Hamiltoniana nas coordenadas polares fica

$$\frac{\|p\|_{g^{-1}}^2}{2m_1} = \frac{1}{2M}(p_r, p_\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_r \\ p_\varphi \end{pmatrix} = \frac{p_r^2}{2m_1} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2 m_1}.$$

Além disso, temos também que a parte potencial U só depende de r , pois, como estamos considerando a posição relativa entre os dois corpos, o problema que estamos estudando agora é o Problema de Kepler, cujo potencial não depende do ângulo, mas somente do raio.

Com essas considerações, temos que a Hamiltoniana H é dada por

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{\|p\|_{g^{-1}}^2}{2m_1} + U(r) = \frac{p_r^2}{2m_1} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2 m_1} + U(r),$$

e o sistema é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r}, & \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observemos que H não depende de φ , logo, $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, ou seja, $p_\varphi = L$ constante, ou seja, reduzimos assim os graus de liberdade do sistema, de 4 para 3.

Voltando ao sistema (3.4), calculando algumas derivadas, obtemos

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{M}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{L}{r^2 M}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{L^2}{r^3 m_1} + U'(r).$$

A segunda equação acima é dependente das outras, isto é, ela não influencia as equações de r e p_r (visto que estas não dependem de φ), mas é influenciada por elas, isto significa que, resolvendo as equações de r e p_r , a equação de φ

pode ser resolvida. Em outras palavras, o sistema agora só possui 2 graus de liberdade, pois φ está “amarrada” a r e p_r .

Utilizando agora que H é constante, digamos, $H = E$, reduzimos os graus de liberdade do sistema para somente 1.

De fato, como $H = E$ é constante, temos que $E = \frac{p_r^2}{2m_1} + \frac{L^2}{2r^2m_1} + U(r)$, assim, $p_r = \frac{\sqrt{2m_1Er^2 + 2m_1U(r)r^2 - L^2}}{r}$, isto é, o sistema agora depende somente de r , ou seja, tem somente 1 grau de liberdade.

Conforme pode ser visto em [3, 29], através da análise do potencial efetivo na geometria intrínseca do plano $V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2r^2m_1} + U(r) = \frac{L^2}{2r^2m_1} + \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \log(r)$, todas as órbitas são limitadas, mas existe somente uma órbita fechada.

Veamos um exemplo de gráfico do potencial efetivo, onde escolhemos as constantes L , m_1 , m_2 e γ de tal forma que $\frac{L^2}{2m_1} = 0.5$ e $\frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} = 3$ ([29]):

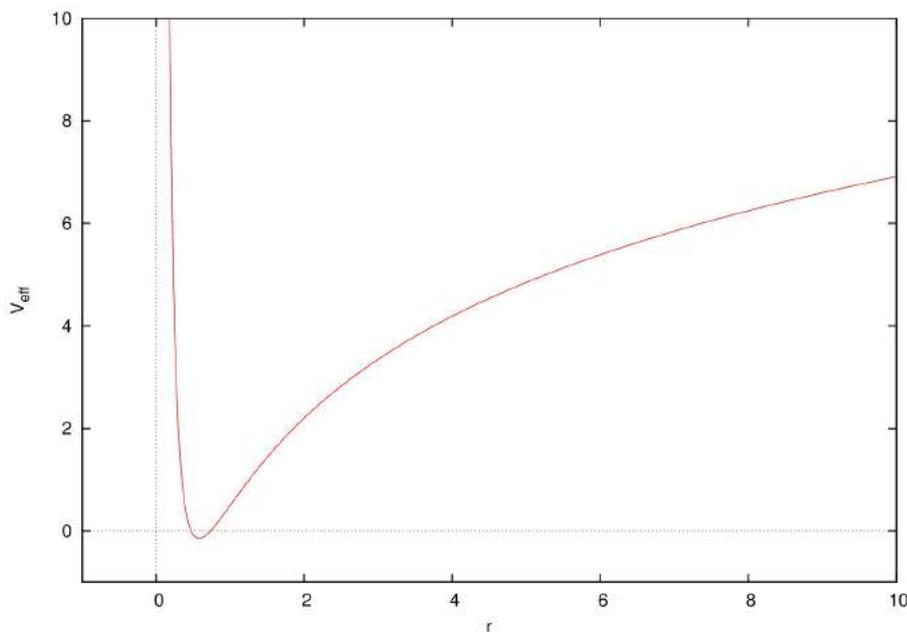


Figura 3.1: Gráfico do potencial efetivo $V_{eff} = \frac{0.5}{r^2} + 3 \log(r)$.

Em resumo: colocando o sistema de coordenadas em repouso com relação ao centro de massa reduzimos os graus de liberdade do sistema de 8 para 6; colocando a origem deste sistema no centro de massa, de 6 para 4 e passamos a estudar um Problema de Kepler, pois as informações de um dos corpos ficam completamente determinadas a partir das do outro; do fato que o momento angular é constante reduzimos mais um grau de liberdade, agora de 4 para 3; do fato de r e p_r serem independentes de φ reduzimos de 3 para 2; e, finalmente, utilizando que a energia total do sistema - que associamos a H - é constante, reduzimos o problema a uma quadratura.

3.2 Cilindro

No cilindro de raio R , a matriz que representa a métrica é dada por

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para estudarmos o problema dos dois corpos no plano, o centro de massa foi muito importante, mas, no caso do cilindro, isto é um problema, pois o centro de massa dos dois corpos não está no cilindro.

O que se pode fazer para contornar este problema é, em vez de estudar essa dinâmica no cilindro C , considerarmos a variedade produto $C \times C$ e faremos o estudo nesta variedade. Note que tal artifício é possível, porque um ponto em $C \times C$ representa uma configuração dos dois corpos em C , isto é, um ponto em $C \times C$ representa dois pontos em C , um para cada corpo.

Temos que, em $C \times C$, a dinâmica dos dois corpos pode ser descrita pela

Hamiltoniana $H = \frac{1}{2} \|P\|_{G^{-1}}^2 + U(Q)$, onde:

- $Q = (\vec{q}_1, \vec{q}_2)$;
- $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$;
- G é a matriz que representa a métrica de $C \times C$ - que chamamos de métrica massificada - e é dada por

$$G = \left(\begin{array}{c|c} m_1g & 0 \\ \hline 0 & m_2g \end{array} \right).$$

Como vimos anteriormente, podemos utilizar como matriz que representa a métrica do cilindro

$$g = \left(\begin{array}{cc} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right),$$

que assim teremos

$$G = \left(\begin{array}{cc|cc} m_1R^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{array} \right).$$

A métrica em $C \times C$ é chamada massificada pois envolve informações das massas dos corpos; de fato, tal métrica é definida por $ds_M^2 = \sum_{i=1}^2 m_i ds_i^2 =$

$$\sum_{i=1}^2 m_i (R^2 d\varphi_i^2 + dz_i^2) = m_1 R^2 d\varphi_1^2 + m_1 dz_1^2 + m_2 R^2 d\varphi_2^2 + m_2 dz_2^2.$$

A fim de realizar a redução, vamos realizar primeiramente uma mudança de coordenadas.

Sejam

$$\begin{cases} \psi = \varphi_2 - \varphi_1 \\ z = z_2 - z_1 \\ \bar{\psi} = \frac{m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2}{M} \\ \bar{z} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{M}, \end{cases}$$

onde $M = m_1 + m_2$.

Explicitemos φ_1 , φ_2 , z_1 e z_2 em função de ψ , z , $\bar{\psi}$ e \bar{z} :

Multiplicando ambos os lados de

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad | \quad \psi = \varphi_2 - \varphi_1$$

por

$$-\frac{m_2}{M} \quad | \quad \frac{m_1}{M}$$

obtemos

$$-\frac{m_2}{M}\psi = -\frac{m_2}{M}\varphi_2 + \frac{m_2}{M}\varphi_1 \quad | \quad \frac{m_1}{M}\psi = \frac{m_1}{M}\varphi_2 - \frac{m_1}{M}\varphi_1$$

e somando com

$$\bar{\psi} = \frac{m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2}{M} \quad | \quad \bar{\psi} = \frac{m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2}{M}$$

segue que

$$-\frac{m_2}{M}\psi + \bar{\psi} = \frac{m_1 + m_2}{M}\varphi_1 = \varphi_1 \quad | \quad \frac{m_1}{M}\psi + \bar{\psi} = \frac{m_2 + m_1}{M}\varphi_2 = \varphi_2$$

ou seja,

$$\varphi_1 = \bar{\psi} - \frac{m_2}{M}\psi \quad \Big| \quad \varphi_2 = \bar{\psi} + \frac{m_1}{M}\psi.$$

Seguindo um raciocínio análogo, obtemos: $z_1 = \bar{z} - \frac{m_2}{M}z$ e $z_2 = \bar{z} + \frac{m_1}{M}z$.

Se $Q = (\psi, z, \bar{\psi}, \bar{z})^T$ e $\tilde{Q} = (\varphi_1, z_1, \varphi_2, z_2)^T$ então a transformação de coordenadas acima pode ser vista como $Q = A\tilde{Q}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{m_1}{M} & 0 & \frac{m_2}{M} & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{M} & 0 & \frac{m_2}{M} \end{pmatrix},$$

e a transformação de coordenadas dos momentos, se escrevemos $P = (p_\psi, p_z, p_{\bar{\psi}}, p_{\bar{z}})^T$ e $\tilde{P} = (p_{\varphi_1}, p_{z_1}, p_{\varphi_2}, p_{z_2})^T$, é dada por $P = (A^{-1})^T \tilde{P}$ ([3, 7, 19]), ou seja,

$$\begin{pmatrix} p_\psi \\ p_z \\ p_{\bar{\psi}} \\ p_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m_2}{M} & 0 & \frac{m_1}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{m_2}{M} & 0 & \frac{m_1}{M} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{\varphi_1} \\ p_{z_1} \\ p_{\varphi_2} \\ p_{z_2} \end{pmatrix},$$

de forma que chegamos às transformações:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\psi = \frac{m_1 p_{\varphi_2} - m_2 p_{\varphi_1}}{M} \\ p_z = \frac{m_1 p_{z_2} - m_2 p_{z_1}}{M} \\ p_{\bar{\psi}} = p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2} \\ p_{\bar{z}} = p_{z_1} + p_{z_2}. \end{array} \right.$$

A métrica nestas novas coordenadas é dada por

$$ds_M^2 = \mu R^2 d\psi^2 + \mu dz^2 + MR^2 d\bar{\psi}^2 + Md\bar{z}^2, \quad (3.5)$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ é conhecido como massa reduzida. (Vide Apêndice A.)

Tal métrica pode ser representada pela matriz

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \mu R^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}.$$

Nessas novas coordenadas, a Hamiltoniana é dada por $H = \frac{1}{2} \|P\|_{\bar{G}^{-1}}^2 + U(\psi, z)$, onde

$$\bar{G}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu R^2)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mu)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (MR^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (M)^{-1} \end{pmatrix},$$

assim, $H = \frac{1}{2} \|P\|_{\bar{G}^{-1}}^2 + U(\psi, z) = \frac{p_\psi^2}{2\mu R^2} + \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{p_{\bar{\psi}}^2}{2MR^2} + \frac{p_{\bar{z}}^2}{2M} + U(\psi, z)$.

Dessa forma, segue que as equações do sistema nessas novas coordenadas são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, & \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z}, & \dot{\bar{\psi}} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{\psi}}}, & \dot{\bar{z}} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{z}}}, \\ \dot{p}_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z}, & \dot{p}_{\bar{\psi}} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}, & \dot{p}_{\bar{z}} &= -\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observemos que H não depende de $\bar{\psi}$ e \bar{z} , logo $\frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0$, e portanto $p_{\bar{\psi}}$ e $p_{\bar{z}}$ são constantes.

Assim, como $\frac{\partial H}{\partial p_{\bar{\psi}}} = \frac{p_{\bar{\psi}}}{MR^2}$ e $\frac{\partial H}{\partial p_{\bar{z}}} = \frac{p_{\bar{z}}}{M}$ temos que $\dot{\bar{\psi}} = \frac{p_{\bar{\psi}}}{MR^2}$ e $\dot{\bar{z}} = \frac{p_{\bar{z}}}{M}$, logo, como $\frac{p_{\bar{\psi}}}{MR^2}$ e $\frac{p_{\bar{z}}}{M}$ são constantes, integrando diretamente, obtemos $\bar{\psi}(t) = \frac{p_{\bar{\psi}}}{MR^2}t + \bar{\psi}_0$ e $\bar{z}(t) = \frac{p_{\bar{z}}}{M}t + \bar{z}_0$, onde $\bar{\psi}_0 = \bar{\psi}(0)$ e $\bar{z}_0 = \bar{z}(0)$.

Portanto, reduzimos com isso os graus de liberdade do sistema de 8 para 4. Dessa forma, nos resta somente lidar com as variáveis ψ , z , p_ψ e p_z .

Em outras palavras, o subsistema $(\bar{\psi}, \bar{z}, p_{\bar{\psi}}, p_{\bar{z}})$ já está na forma de variáveis ação-ângulo (ver Apêndice C), e portanto, nos resta somente analisar o subsistema (ψ, z, p_ψ, p_z) , que tem como função Hamiltoniana

$$H = \frac{p_\psi^2}{2\mu R^2} + \frac{p_z^2}{2\mu} + U(\psi, z). \quad (3.7)$$

Sabendo que H é constante, podemos explicitar uma das variáveis em função das outras, e portanto os graus de liberdade se reduzem de 4 para 3.

3.2.1 A não-existência de integrais primeiras extras

Nesta seção veremos que é possível mostrar que não existem integrais primeiras extras independentes para o problema de dois corpos no cilindro que são quadráticas nos momentos, isto é, veremos que se

$$I = a(\psi, z)p_\psi^2 + b(\psi, z)p_\psi p_z + c(\psi, z)p_z^2 + \phi(\psi, z), \quad (3.8)$$

então, se I for uma integral primeira, I não é independente das integrais já conhecidas (a função Hamiltoniana).

Seguiremos como em [29].

Sabemos que I é uma integral primeira $\iff \frac{dI}{dt} = 0 \iff [H, I] = 0$.

Calculemos $[H, I]$:

Omitiremos em alguns pontos as dependências das funções das suas variáveis,

isto é, escrevemos $a(\psi, z) = a$, $b(\psi, z) = b$ e $c(\psi, z) = c$.

$$\begin{aligned}
[H, I] &= \frac{\partial H}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial I}{\partial p_\psi} - \frac{\partial H}{\partial p_\psi} \cdot \frac{\partial I}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial I}{\partial p_z} - \frac{\partial H}{\partial p_z} \cdot \frac{\partial I}{\partial z} \\
&= \frac{\gamma m_1 m_2}{8\pi} \cdot \frac{\text{sen}\psi}{\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}} \cdot (2ap_\psi + bp_z) \\
&\quad - \frac{p_\psi}{\mu R^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \psi} p_\psi^2 + \frac{\partial b}{\partial \psi} p_\psi p_z + \frac{\partial c}{\partial \psi} p_z^2 + \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right) \\
&\quad + \frac{\gamma m_1 m_2}{8\pi R} \cdot \frac{\text{senh} \frac{z}{R}}{\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}} \cdot (bp_\psi + 2cp_z) \\
&\quad - \frac{p_z}{\mu} \left(\frac{\partial a}{\partial z} p_\psi^2 + \frac{\partial b}{\partial z} p_\psi p_z + \frac{\partial c}{\partial z} p_z^2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \cdot \frac{\text{sen}\psi}{\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}} \cdot ap_\psi + \frac{\gamma m_1 m_2}{8\pi} \cdot \frac{\text{sen}\psi}{\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}} \cdot bp_z \\
&\quad - \frac{1}{\mu R^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial \psi} p_\psi^3 - \frac{1}{\mu R^2} \cdot \frac{\partial b}{\partial \psi} p_\psi^2 p_z - \frac{1}{\mu R^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial \psi} p_\psi p_z^2 - \frac{1}{\mu R^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \psi} p_\psi \\
&\quad + \frac{\gamma m_1 m_2}{8\pi R} \cdot \frac{\text{senh} \frac{z}{R}}{\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}} \cdot bp_\psi + \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi R} \cdot \frac{\text{senh} \frac{z}{R}}{\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}} \cdot cp_z \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial z} p_\psi^2 p_z - \frac{1}{\mu} \frac{\partial b}{\partial z} p_\psi p_z^2 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial c}{\partial z} p_z^3 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} p_z \\
&= \left(\frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R})} \left(a \text{sen}\psi + \frac{b}{2R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) - \frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right) p_\psi \\
&\quad + \left(\frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R})} \left(\frac{b}{2} \text{sen}\psi + \frac{c}{R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) p_z \\
&\quad - \frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial a}{\partial \psi} p_\psi^3 - \left(\frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial b}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial z} \right) p_\psi^2 p_z - \left(\frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial c}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial b}{\partial z} \right) p_\psi p_z^2 - \frac{1}{\mu} \frac{\partial c}{\partial z} p_z^3.
\end{aligned}$$

Assim, $[H, I] = 0 \iff$ as seguintes condições são satisfeitas:

$$(a) \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R})} \left(a \text{sen}\psi + \frac{b}{2R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) - \frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} = 0;$$

$$(b) \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R})} \left(\frac{b}{2} \sin \psi + \frac{c}{R} \sinh \frac{z}{R} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0;$$

$$(c) \frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial a}{\partial \psi} = 0;$$

$$(d) \frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial b}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial z} = 0;$$

$$(e) \frac{1}{\mu R^2} \frac{\partial c}{\partial \psi} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial b}{\partial z} = 0;$$

$$(f) \frac{1}{\mu} \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

De (c) podemos concluir que $a(\psi, z) = a(z)$ e, de (f), que $c(\psi, z) = c(\psi)$.

Analisemos (d) e (e).

De (d) segue que $\frac{\partial b}{\partial \psi} = -a'(z)R^2$ e, integrando em ψ obtemos

$$b(\psi, z) = -a'(z)R^2\psi - f(z), \quad (3.9)$$

onde f é uma função incógnita.

Analogamente, de (e), segue que $\frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{c'(\psi)}{R^2}$ e integrando em z , temos que

$$b(\psi, z) = -\frac{c'(\psi)}{R^2}z - g(\psi), \quad (3.10)$$

onde g é também uma função incógnita.

Derivando (3.9) com relação a z , obtemos $\frac{\partial b}{\partial z} = -a''(z)R^2\psi - f'(z)$, que juntamente com (3.10) nos fornece

$$a''(z)R^2\psi + f'(z) = \frac{c'(\psi)}{R^2}. \quad (3.11)$$

Por outro lado, derivando (3.10) com relação a ψ , obtemos $\frac{\partial b}{\partial \psi} = -\frac{c''(\psi)}{R^2}z -$

$g'(\psi)$, que juntamente com (3.9) nos fornece

$$\frac{c''(\psi)}{R^2}z + g'(\psi) = a'(z)R^2. \quad (3.12)$$

Derivando, agora, (3.11) com relação a ψ e multiplicando por z obtemos

$$\begin{aligned} a''(z)R^2z &= \frac{c''(\psi)}{R^2}z \stackrel{(3.12)}{=} a'(z)R^2 - g'(\psi) \iff \\ \iff \underbrace{a''(z)R^2z - a'(z)R^2}_{\text{depende somente de } z} &= \underbrace{-g'(\psi)}_{\text{depende somente de } \psi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalmente, derivando (3.12) com relação a z e multiplicando por ψ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{c''(\psi)}{R^2}\psi &= a''(z)R^2\psi \stackrel{(3.11)}{=} \frac{c'(\psi)}{R^2} - f'(z) \iff \\ \iff \underbrace{\frac{c''(\psi)}{R^2}\psi - \frac{c'(\psi)}{R^2}}_{\text{depende somente de } \psi} &= \underbrace{-f'(z)}_{\text{depende somente de } z} \end{aligned} \quad (3.14)$$

De (3.13) e (3.14) podemos afirmar que $a''(z)z - a'(z) = k_1$ e $c''(\psi)\psi - c'(\psi) = k_2$, onde k_1 e k_2 são constantes, o que implica que

$$\begin{cases} a(z) = -k_1z + k_3z^2 + k_5 \\ c(\psi) = -k_2\psi + k_4\psi^2 + k_6, \end{cases}$$

com k_3, k_4, k_5 e k_6 constantes, e portanto, utilizando (3.9) e (3.10)

$$\begin{cases} b(\psi, z) = (k_1 - 2k_3z)R^2\psi - f(z) \\ b(\psi, z) = \frac{k_2 - 2k_4\psi}{R^2}z - g(\psi) \end{cases}$$

Assim, igualando ambas as equações acima, concluímos que

$$b(\psi, z) = k_1R^2\psi + \frac{k_2}{R^2}z - 2k_3R^2\psi z + k_7,$$

onde k_7 é também uma constante.

Analisemos agora as condições (a) e (b):

Temos que (a) e (b) são satisfeitas se

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} = \frac{\mu R^2 \gamma m_1 m_2}{4\pi(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R})} \left(a \text{sen} \psi + \frac{b}{2R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) = M(\psi, z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\mu \gamma m_1 m_2}{4\pi(\text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R})} \left(\frac{b}{2} \text{sen} \psi + \frac{c}{R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) = N(\psi, z) \end{cases} \quad (3.15)$$

A fim de que exista tal função ϕ é necessário que $\frac{\partial N}{\partial \psi} = \frac{\partial M}{\partial z}$.

Utilizaremos as notações $f = f(\psi, z) = \text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{senh}^2 \frac{z}{2R}$, $a(z) = a$, $b(\psi, z) = b$ e $c(\psi) = c$ para carregar menos as expressões a seguir.

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z} &= -\frac{\mu R^2 \gamma m_1 m_2}{8\pi R f^2} \text{senh} \frac{z}{R} \left(a \text{sen} \psi + \frac{b}{2R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) \\ &\quad - \frac{\mu R^2 \gamma m_1 m_2}{4\pi f} \left[a' \text{sen} \psi + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial b}{\partial z} \text{senh} \frac{z}{R} + \frac{b}{R} \cosh \frac{z}{R} \right) \right] \\ &= \frac{\mu R^2 \gamma m_1 m_2}{4\pi f^2} \left(f R^2 a' \text{sen} \psi + \frac{f R}{2} \frac{\partial b}{\partial z} \text{senh} \frac{z}{R} + \frac{f b}{2} \cosh \frac{z}{R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{2} a \text{sen} \psi \text{senh} \frac{z}{R} - \frac{b}{4} \text{senh}^2 \frac{z}{R} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \psi} &= -\frac{\mu \gamma m_1 m_2}{8\pi f^2} \text{sen} \psi \left(\frac{b}{2} \text{sen} \psi + \frac{c}{R} \text{senh} \frac{z}{R} \right) \\ &\quad - \frac{\mu \gamma m_1 m_2}{4\pi f} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial \psi} \text{sen} \psi + b \cos \psi \right) + \frac{c'}{R} \text{senh} \frac{z}{R} \right] \\ &= \frac{\mu \gamma m_1 m_2}{4\pi f^2} \left(\frac{f}{2} \frac{\partial b}{\partial \psi} \text{sen} \psi + \frac{f}{2} b \cos \psi + \frac{f}{2R} c' \text{senh} \frac{z}{R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b}{4} \text{sen}^2 \psi - \frac{c}{2R} \text{sen} \psi \text{senh} \frac{z}{R} \right). \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial \psi} \iff$$

$$\begin{aligned}
fR^2a'\text{sen}\psi + \frac{fR}{2}\frac{\partial b}{\partial z}\text{senh}\frac{z}{R} + \frac{f}{2}b\cosh\frac{z}{R} - \frac{R}{2}a\text{sen}\psi\text{senh}\frac{z}{R} - \frac{b}{4}\text{senh}^2\frac{z}{R} = \\
= \frac{f}{2}\frac{\partial b}{\partial\psi}\text{sen}\psi + \frac{f}{2}b\frac{\partial b}{\partial z}\cos\psi + \frac{f}{2R}c'\text{senh}\frac{z}{R} - \frac{b}{4}\text{sen}^2\psi - \frac{c}{2R}\text{sen}\psi\text{senh}\frac{z}{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff \left(fR^2a' - \frac{f}{2}\frac{\partial b}{\partial\psi} \right) \text{sen}\psi + \left(\frac{fR}{2}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{f}{2R}c' \right) \text{senh}\frac{z}{R} + \frac{f}{2}b\cosh\frac{z}{R} \\
- \frac{f}{2}b\cos\psi + \left(\frac{c}{2R} - \frac{aR}{2} \right) \text{sen}\psi\text{senh}\frac{z}{R} + \frac{b}{4}\text{sen}^2\psi - \frac{b}{4}\text{senh}^2\frac{z}{R} = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad fR^2a' - \frac{f}{2}\frac{\partial b}{\partial\psi} = 0; \\ \text{(ii)} \quad \frac{fR}{2}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{f}{2R}c' = 0; \\ \text{(iii)} \quad \frac{fb}{2} = 0; \\ \text{(iv)} \quad \frac{c}{2R} - \frac{aR}{2} = 0; \\ \text{(v)} \quad \frac{b}{4} = 0. \end{array} \right.$$

Da equação (iv) obtemos que $\frac{c}{2R} = \frac{aR}{2}$, ou seja, $c = aR^2$, mas, lembrando que $a = a(z)$ e $c = c(\psi)$, temos então que $a = a_0$ e $c = c_0$, onde a_0 e c_0 são constantes e, da equação (v), concluimos que $b = 0$.

Assim, podemos afirmar que, se $a = a_0$, $b = 0$ e $c = c_0 = a_0R^2$ então poderemos determinar ϕ satisfazendo (3.15).

Integrando as equações em (3.15) podemos perceber que $\phi = \alpha H$, onde $\alpha = a_0\mu R^2$ é uma constante.

$$\text{Assim, } I = a_0p_\psi^2 + a_0R^2p_z^2 + a_0\mu R^2H.$$

Vamos ver agora que tal constante a_0 deve ser nula.

Como sabemos, a fim de que I seja uma integral de movimento, devemos ter $[H, I] = 0$.

Utilizando I dada acima e propriedades do colchete de Poisson, temos que

$$\begin{aligned}
 [H, I] &= [H, a_0 p_\psi + a_0 R^2 p_z^2 + a_0 \mu R^2 H] \\
 &= a_0 [H, p_\psi^2] + a_0 R^2 [H, p_z^2] + a_0 \mu R^2 \underbrace{[H, H]}_{=0} \\
 &= a_0 ([H, p_\psi] p_\psi + p_\psi [H, p_\psi]) + a_0 R^2 ([H, p_z] p_z + p_z [H, p_z]) \\
 &= 2a_0 [H, p_\psi] p_\psi + 2a_0 R^2 [H, p_z] p_z
 \end{aligned}$$

que é nulo somente se a_0 for nula, pois nem p_ψ , nem p_z são constantes de movimento.

Assim, concluimos que $I = 0$.

Logo, a integral I procurada não é independente de H , e portanto, podemos afirmar que não existem integrais quadráticas nos momentos, independentes.

A importância de tais integrais quadráticas se dá pelo fato de, no plano, uma integral extra do sistema ter tal forma, a saber, o vetor de Laplace-Runge-Lenz ([7]). Quando procuramos generalizá-la para o cilindro vemos que isto não é possível.

Capítulo 4

Estudo do Sistema de 2-corpos sobre o Cilindro

4.1 Ponto de equilíbrio

As equações reduzidas do movimento dos dois corpos no cilindro são

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \frac{p_{\psi}}{\mu R^2} \\ \dot{z} = \frac{p_z}{\mu} \\ \dot{p}_{\psi} = -\frac{m_1 m_2}{8\pi} \frac{\text{sen}\psi}{\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R})} \\ \dot{p}_z = -\frac{m_1 m_2}{8\pi R} \frac{\text{senh}(\frac{z}{R})}{\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R})}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde $\bar{\psi}$, \bar{z} , $p_{\bar{\psi}}$ e $p_{\bar{z}}$ já foram integradas.

$X^* = (\psi, z, p_{\psi}, p_z) = (\pi, 0, 0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio do sistema, pois o ponto $(\psi, z, p_{\psi}, p_z) = (0, 0, 0, 0)$ não está no domínio de definição da Hamiltoniana. Afirmamos que tal ponto de equilíbrio é instável.

De fato, a matriz hessiana da função Hamiltoniana é

$$\text{Hess}(H(X)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \psi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

onde

- $\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \frac{m_1 m_2}{4\pi} \cdot \frac{\cos \psi (\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R})) - \frac{\text{sen}^2 \psi}{2}}{(\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R}))^2};$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \psi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \psi \partial z} = -\frac{m_1 m_2}{8\pi R} \cdot \frac{\text{sen} \psi \text{senh}(\frac{z}{R})}{(\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R}))^2};$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{m_1 m_2}{4\pi R^2} \cdot \frac{\cosh(\frac{z}{R})(\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R})) - \frac{\text{senh}^2(\frac{z}{R})}{2}}{(\text{sen}^2(\frac{\psi}{2}) + \text{senh}^2(\frac{z}{2R}))^2}.$

Veamos que $X^* = (\pi, 0, 0, 0)$ é um ponto de sela; para isso, analisemos tal ponto com relação a cada direção:

- $\frac{\partial^2 H}{\partial p_\psi^2}(X^*) = \frac{1}{\mu R^2} > 0$, e portanto X^* é mínimo na direção p_ψ ;
- $\frac{\partial^2 H}{\partial p_z^2}(X^*) = \frac{1}{\mu} > 0$, e portanto X^* é mínimo na direção p_z ;
- $\frac{\partial^2 H}{\partial \psi^2}(X^*) = \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}(X^*) = -\frac{m_1 m_2}{4\pi} < 0$, logo X^* é máximo na direção ψ ;
- $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(X^*) = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(X^*) = \frac{m_1 m_2}{4\pi R^2} > 0$, logo X^* é mínimo na direção z .

Como temos uma direção na qual X^* é máximo e outra na qual ele é mínimo, podemos afirmar que X^* é um ponto de sela.

Assim, sabemos que a Hessiana em X^* é dada por

$$Hess(H(X)) = \begin{pmatrix} -\frac{m_1 m_2}{4\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 m_2}{4\pi R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

Vamos agora analisar as estabilidades linear e não-linear de X^* ([6, 8]):

- (I) Estabilidade Linear (ou Espectral): Sabemos que um sistema Hamiltoniano pode ser escrito da forma $\frac{dX}{dt} = J\nabla H$, e, se X^* é um ponto de equilíbrio, podemos aproximar este sistema por sua linearização considerando $X = X^* + \Delta X$ que pode ser escrito no sistema $\frac{d\Delta X}{dt} = JS\Delta X$, onde $S = Hess(H(X^*))$.

Diagonalizando S , obtemos que $S = PDP^{-1}$ e o sistema acima pode ser reescrito como

$$\frac{d\Delta Y}{dt} = P^{-1} \frac{d\Delta X}{dt} = P^{-1} JPDP^{-1} \Delta X = JD\Delta Y.$$

Assim, em coordenadas, temos que

$$\Delta \dot{Y} = \begin{pmatrix} \Delta \dot{y}_1 \\ \Delta \dot{y}_2 \\ \Delta \dot{p}_{y_1} \\ \Delta \dot{p}_{y_2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_{1+n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{2+n} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta p_{y_1} \\ \Delta p_{y_2} \end{pmatrix},$$

e portanto,

$$\begin{cases} \Delta \dot{y}_1 &= -\lambda_{1+n} \Delta p_{y_1} \\ \Delta \dot{p}_{y_1} &= \lambda_1 \Delta y_1 \\ \Delta \dot{y}_2 &= -\lambda_{2+n} \Delta p_{y_2} \\ \Delta \dot{p}_{y_2} &= \lambda_2 \Delta y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \Delta \ddot{y}_1 &= -\lambda_1 \lambda_{1+n} \Delta y_1 \\ \Delta \ddot{y}_2 &= -\lambda_2 \lambda_{2+n} \Delta y_2 \end{cases} .$$

Assim, caso exista algum par de autovalores da matriz Hessiana com sinais opostos, este ponto de equilíbrio do sistema não é linearmente estável, pois terá um crescimento exponencial em uma das direções.

Como podemos observar, a matriz Hessiana do problema de dois corpos no cilindro possui pares de autovalores com sinais opostos, logo X^* não é linearmente estável.

- (II) Dizemos que um sistema é não-linearmente estável (ou estável no sentido de Lyapunov) quando existem duas vizinhanças de X^* (ponto de equilíbrio), U e V tais que $\forall X \in U$ temos que $X(t) \in V, \forall t \geq 0$, onde estamos denotando por $X(t)$ a órbita que começa em X .

Existe um critério de suficiência para a estabilidade não-linear chamado Critério de Dirichlet, que diz que se existe um integral primeira que é positiva definida ou negativa definida em X^* então X^* é não-linearmente estável.

Observemos que não podemos aplicar tal critério ao ponto X^* , pois $Hess(H(X^*))$ não é nem positiva definida, nem negativa definida, o que não implica que X^* não seja estável no sentido de Lyapunov, mas conforme já visto na Seção 3.2.1, não existem outras integrais quadráticas

deste problema, sendo assim, não é possível aplicar o Critério de Dirichlet.

Os gráficos da Figura 4.1 mostram o potencial V .

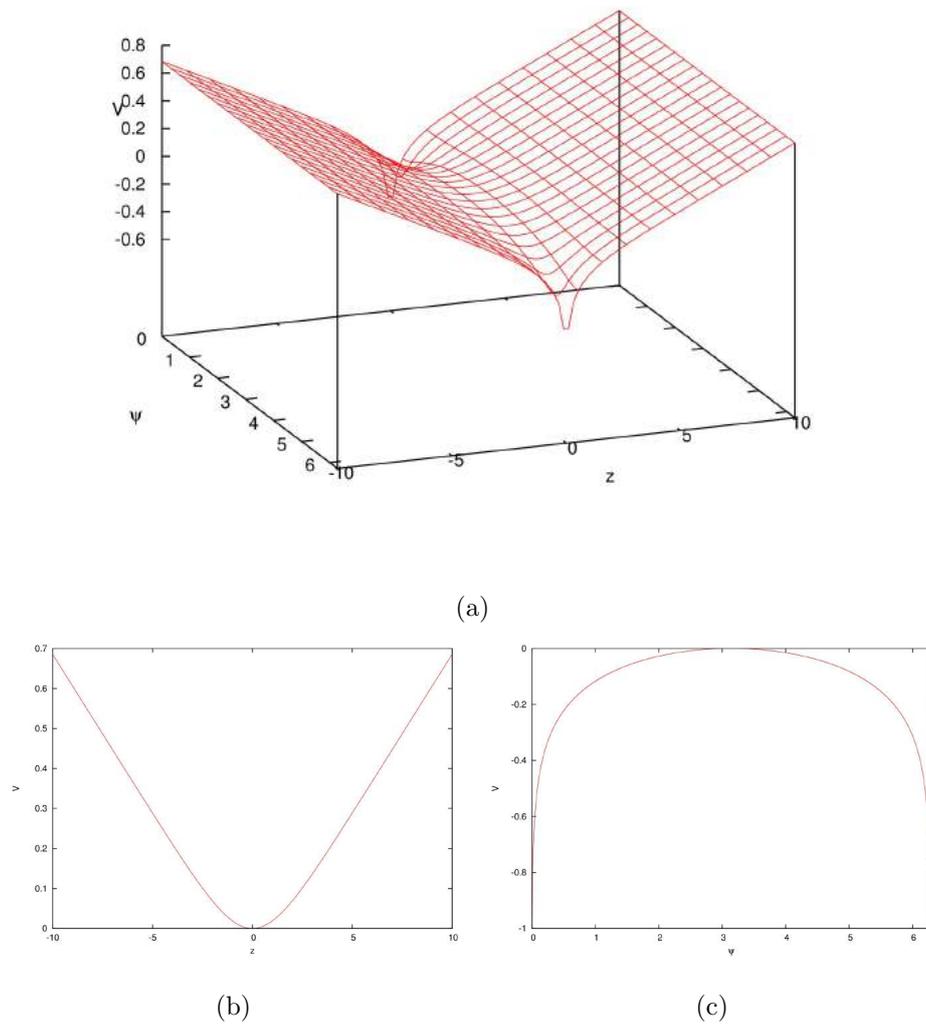


Figura 4.1: Gráficos (a) do potencial $V(\psi, z)$, (b) do potencial $V(z; \psi = \pi)$ e (c) do potencial $V(\psi; z = 0)$

4.2 Variedades Invariantes

Definição: Dizemos que uma variedade M é invariante quando, dada uma condição inicial X_0 , se $X_0 \in M$ então $X(t) \in M, \forall t \geq 0$, onde novamente estamos utilizando a notação de $X(t)$ representar a órbita que começa em X_0 .

Existem três variedades invariantes neste sistema:

- (i) $\psi = \pi, p_\psi = 0$;
- (ii) $\psi = 0, p_\psi = 0$;
- (iii) $z = 0, p_z = 0$.

De fato, analisando o sistema (4.1), podemos perceber que:

- (i) Fazendo $\psi(0) = \pi, p_\psi(0) = 0$ em (4.1) obtemos $\dot{\psi} = \dot{p}_\psi = 0$ e portanto, a dinâmica reduzida a esta variedade é dada pela equações

$$\begin{cases} \dot{z} &= \frac{p_z}{\mu} \\ \dot{p}_z &= -\frac{m_1 m_2}{4\pi R} \cdot \frac{\sinh(\frac{z}{R})}{1 + \sinh^2(\frac{z}{2R})} = -\frac{m_1 m_2}{4\pi R} \cdot \frac{2\sinh(\frac{z}{2R})\cosh(\frac{z}{2R})}{\cosh^2(\frac{z}{2R})} \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2\pi R} \cdot \operatorname{tgh}(\frac{z}{2R}); \end{cases} \quad (4.2)$$

- (ii) Fazendo $\psi(0) = 0, p_\psi(0) = 0$ em (4.1) obtemos $\dot{\psi} = \dot{p}_\psi = 0$ e portanto, a dinâmica reduzida a esta variedade é dada pela equações

$$\begin{cases} \dot{z} &= \frac{p_z}{\mu} \\ \dot{p}_z &= -\frac{m_1 m_2}{4\pi R} \cdot \frac{\sinh(\frac{z}{R})}{\sinh^2(\frac{z}{2R})} = -\frac{m_1 m_2}{4\pi R} \cdot \frac{2\sinh(\frac{z}{2R})\cosh(\frac{z}{2R})}{\sinh^2(\frac{z}{2R})} \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2\pi R} \cdot \operatorname{cotgh}(\frac{z}{2R}); \end{cases} \quad (4.3)$$

(iii) Fazendo $z(0) = 0, p_z(0) = 0$ em (4.1) obtemos $\dot{z} = \dot{p}_z = 0$ e portanto, a dinâmica reduzida a esta variedade é dada pela equações

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{\mu R^2} \\ \dot{p}_\psi &= -\frac{m_1 m_2}{4\pi} \cdot \frac{\text{sen}(\psi)}{\text{sen}^2(\frac{\psi}{2})} = -\frac{m_1 m_2}{4\pi} \cdot \frac{2\text{sen}(\frac{\psi}{2})\text{cos}(\frac{\psi}{2R})}{\text{sen}^2(\frac{\psi}{2})} \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2\pi} \cdot \text{cotg}(\frac{\psi}{2}). \end{cases} \quad (4.4)$$

Vamos nas próximas linhas estudar a dinâmica em cada caso, ver suas características e o que podemos esperar de cada uma.

Nas subseções adiante os valores de m_1, m_2 e R serão escolhidos de forma que $\frac{m_1 m_2}{2\pi R} = 1$, simplesmente pela facilidade em ver a dinâmica com estes valores. Mas isso não quer dizer que estamos particularizando a dinâmica; na verdade, tais valores são representativos para quaisquer dinâmicas que poderíamos estudar.

Detalhes do porquê podemos fazer isso serão dados no próximo capítulo, quando fizermos comparações entre as seções de Poincaré computadas.

4.2.1 Estudo da dinâmica sobre a variedade $\psi = \pi, p_\psi = 0$

Potencial Reduzido à Variedade

Vejamos novamente o gráfico do potencial reduzido a esta variedade, isto é, $V(z; \psi = \pi) = \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \log \left(1 + \text{senh}^2 \left(\frac{z}{2R} \right) \right)$:

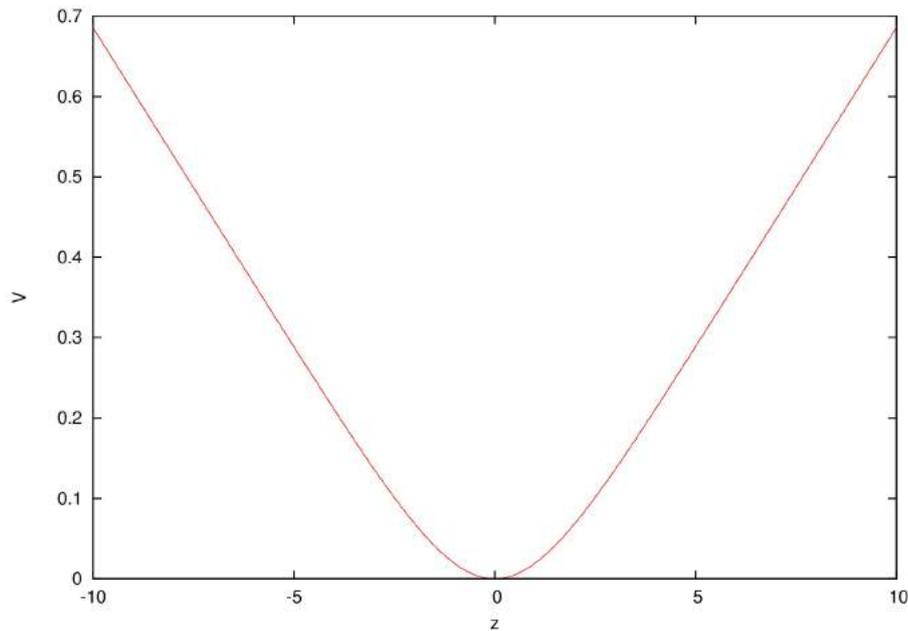


Figura 4.2: Gráfico do potencial $V(z; \psi = \pi)$.

Podemos então perceber, se analisarmos a dinâmica pelo gráfico do potencial, que, fixado um nível de energia, temos uma órbita limitada, com uma certa simetria com relação aos valores positivos e negativos de z .

Análise do Sistema (4.2)

Além disso, podemos analisar o sistema (4.2): se observamos o gráfico da função $-\operatorname{tgh}(\frac{z}{2R})$ (que define \dot{p}_z) podemos ver que \dot{p}_z e z tem sinais contrários, isto é, quando $z > 0$, a variação de p_z é negativa, o que significa que p_z pode até estar crescendo, mas cada vez mais lentamente, até parar e começar a decrescer, e quando $z < 0$, a variação de p_z é agora positiva. Observemos que \dot{z} e p_z tem o mesmo sinal, ou seja, a variação de z está diretamente relacionada a p_z .

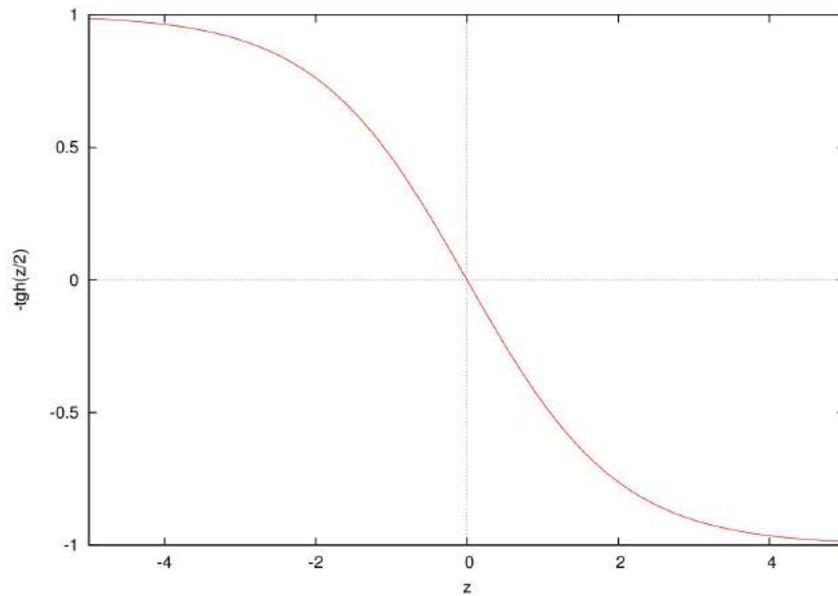


Figura 4.3: Gráfico da função $p_z = -\operatorname{tgh}\left(\frac{z}{2R}\right)$.

Curvas de Nível

Por fim, vale a pena também observar as curvas de nível da função Hamiltoniana $H(z, p_z; \psi = \pi, p_\psi = 0) = \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{m_1 m_2}{2\pi} \cdot \log\left(1 + \sinh^2\left(\frac{z}{2R}\right)\right)$:

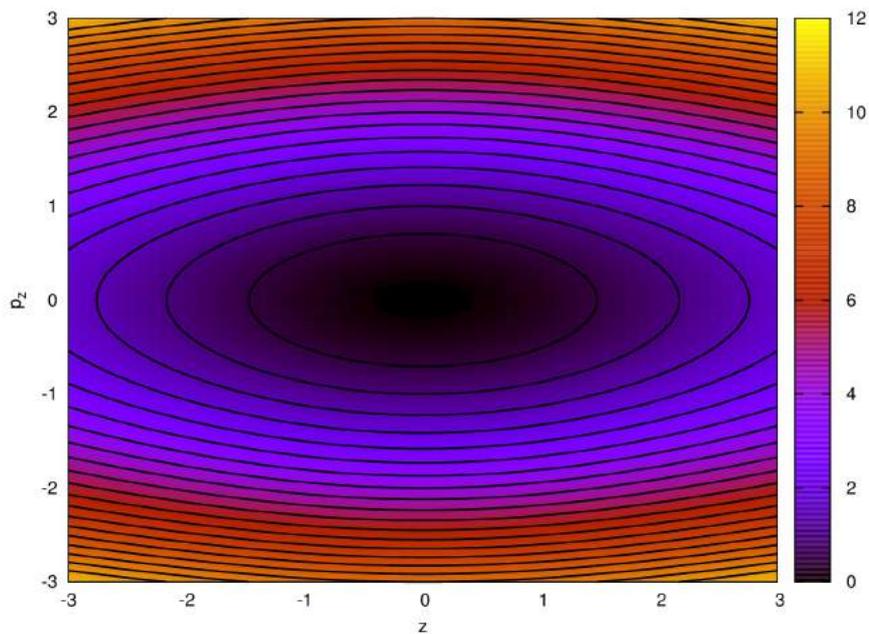


Figura 4.4: Curvas de nível da função $H(z, p_z; \psi = \pi, p_\psi = 0)$.

Observemos que todas as órbitas do sistema (4.2) são periódicas.

4.2.2 Estudo da dinâmica sobre a variedade $\psi = 0, p_\psi = 0$

Potencial Reduzido à Variedade

Veamos o gráfico do potencial reduzido a esta variedade, isto é, $V(z; \psi = 0) = \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \log \left(\sinh^2 \left(\frac{z}{2R} \right) \right)$:

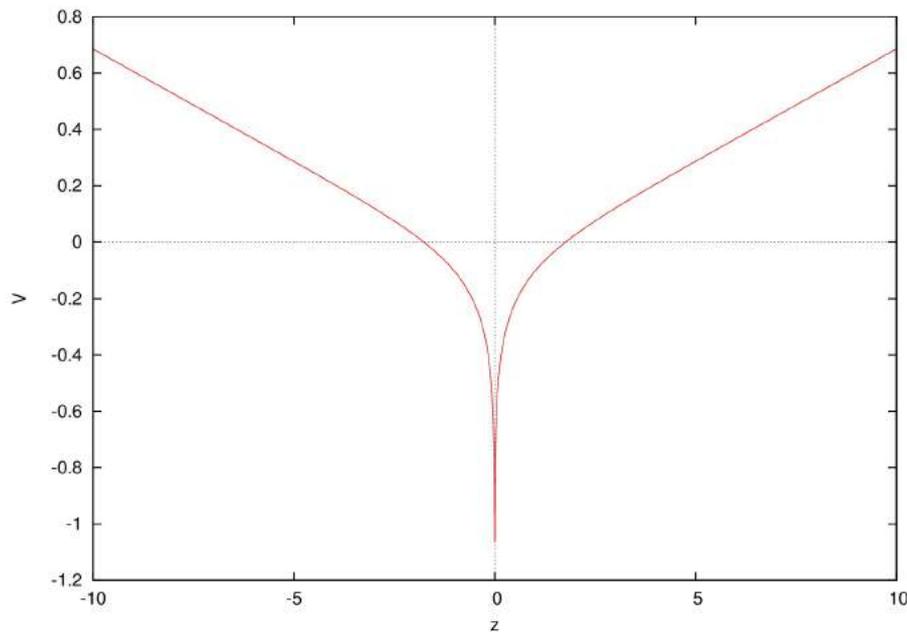


Figura 4.5: Gráfico do potencial $V(z; \psi = 0)$.

Analisando este gráfico agora, podemos pensar à primeira vista que o comportamento dele se assemelha ao sistema anterior. No entanto, lembrando que não podemos ter $\psi = z = 0$, vemos que, na verdade, com este potencial, fixado o nível de energia, o que acontece é que a órbita apesar de limitada, aumenta indefinidamente os momentos, pois ela não pode transitar entre os valores positivos e negativos de z . Em outras palavras, se a condição inicial de uma dada órbita (com uma dada energia) tem um valor de z positivo, este sinal se

manterá para qualquer tempo.

Análise do Sistema (4.3)

Analiseemos também o sistema (4.3): Observando o gráfico de $-\operatorname{cotgh}(\frac{z}{2R})$ (que define \dot{p}_z) podemos perceber novamente que z e \dot{p}_z tem sinais contrários e vale a mesma análise feita anteriormente; a diferença é que, neste caso, além da variação de p_z ser maior (pois a função $z \mapsto -\operatorname{tgh}(\frac{z}{2R})$ é limitada, enquanto $z \mapsto -\operatorname{cotgh}(\frac{z}{2R})$ não), temos também o fato de o sinal de z não mudar (e, conseqüentemente o sinal de \dot{p}_z), o que concorda também com o comportamento do gráfico de $-\operatorname{cotgh}(\frac{z}{2R})$ (a reta $p_z = 0$ é uma assíntota vertical).

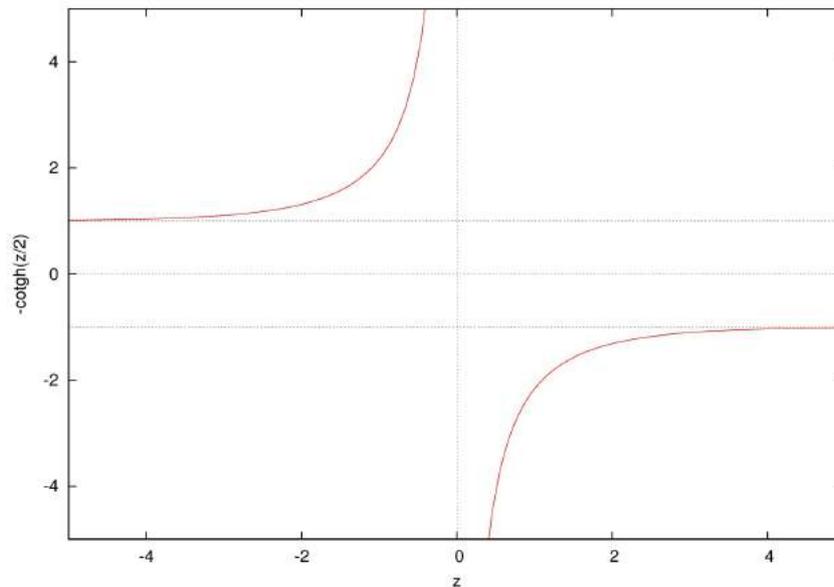


Figura 4.6: Gráfico da função $\dot{p}_z = -\operatorname{cotgh}(\frac{z}{2R})$.

Curvas de Nível

Além disso, podemos analisar também as curvas de nível da função Hamiltoniana $H(z, p_z; \psi = 0, p_\psi = 0) = \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{m_1 m_2}{2\pi} \cdot \log(\sinh^2(\frac{z}{2R}))$:

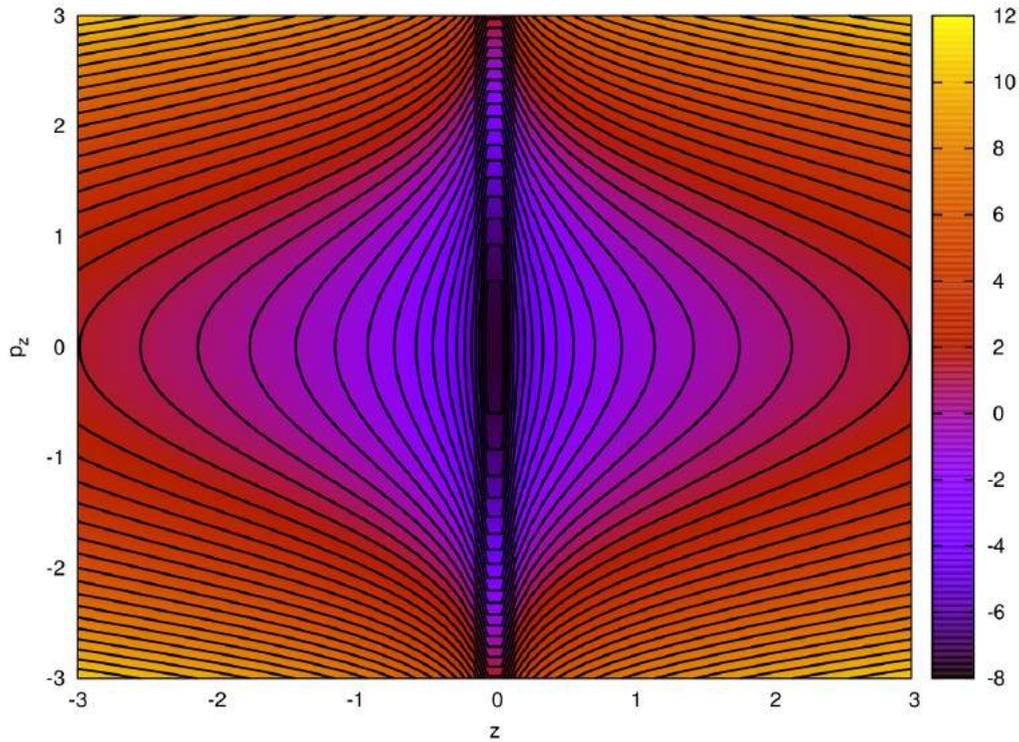


Figura 4.7: Curvas de nível da função $H(z, p_z; \psi = 0, p_\psi = 0)$.

Observemos que as órbitas deste sistema tendem a $z = 0$ assintoticamente.

4.2.3 Estudo da dinâmica sobre a variedade $z = 0, p_z = 0$

Potencial Reduzido à Variedade

Vejamos novamente o gráfico do potencial reduzido a esta variedade, isto é,

$$V(\psi; z = 0) = \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \log \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) \right):$$

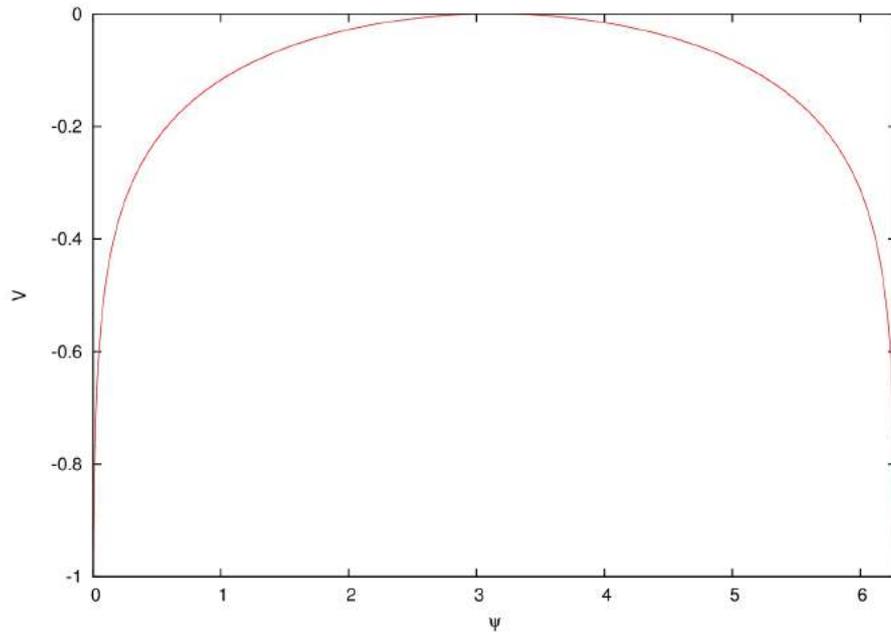


Figura 4.8: Gráfico do potencial $V(\psi; z = 0)$.

Lembrando que estamos em um cilindro e a variável ψ é a variável angular, podemos identificar as retas $\psi = 0$ e $\psi = 2\pi$.

Assim, em um primeiro momento, somos levados a acreditar que a dinâmica deste sistema é, fixado um nível de energia, a existência de órbitas limitadas, mas, lembrando que não podemos ter que $\psi = z = 0$, e, neste caso, como identificamos $\psi = 0$ com $\psi = 2\pi$, não podemos ter também que $z = 0$ e $\psi = 2\pi$, vemos que, na verdade, a dinâmica deste sistema (4.4) é parecida com a do sistema (4.3): órbitas com crescimento indefinido nos momentos pois, agora neste caso, o valor de ψ não pode transitar entre os valores numa vizinhança à direita de $\psi = 0$ e uma vizinhança à esquerda de $\psi = 2\pi$, em outras palavras, tal valor de ψ não mudará de um menor que π para um maior.

Análise do Sistema (4.4)

Analogamente, vamos analisar o sistema (4.4): O que podemos perceber agora, é que, os sinais de $-\cotg(\frac{\psi}{2})$ e $\sin(\psi)$ são contrários; logo, a mesma análise feita sobre o sistema (4.3) vale, incluindo os fatos de $\psi \mapsto -\cotg(\frac{\psi}{2})$ ser também ilimitada e ψ não mudar de menor que π para maior que π e, além disso, que a reta $\psi = 0$ (que também pode ser vista como $\psi = 2\pi$) ser uma assíntota vertical do gráfico de $-\cotg(\frac{\psi}{2})$.

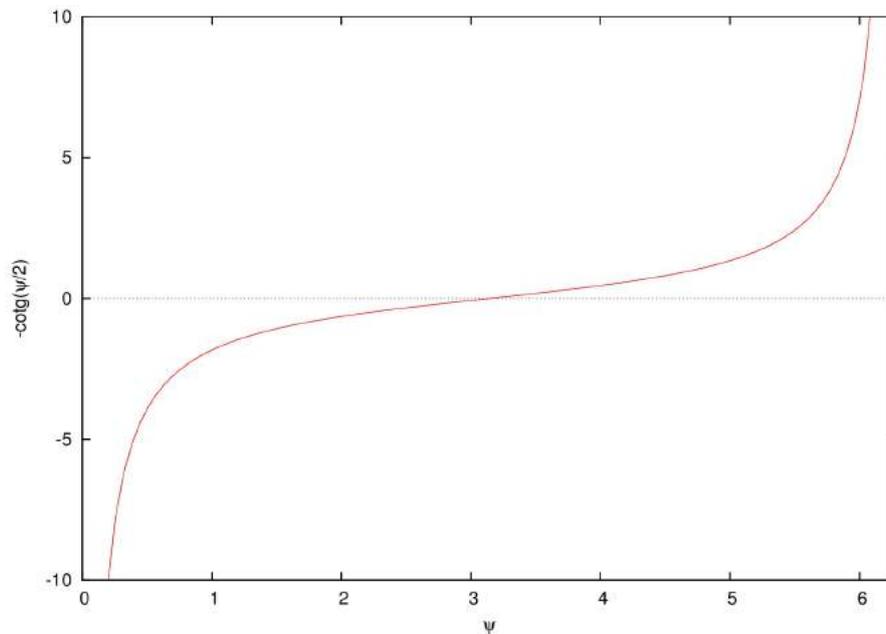


Figura 4.9: Gráfico da função $\dot{p}_\psi = -\cotg(\frac{\psi}{2})$.

Curvas de Nível

Por fim, vejamos também as curvas de nível da função hamiltoniana $H(\psi, p_\psi; z = 0, p_z = 0) = \frac{p_\psi^2}{2\mu R} + \frac{m_1 m_2}{2\pi} \cdot \log\left(\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)$:

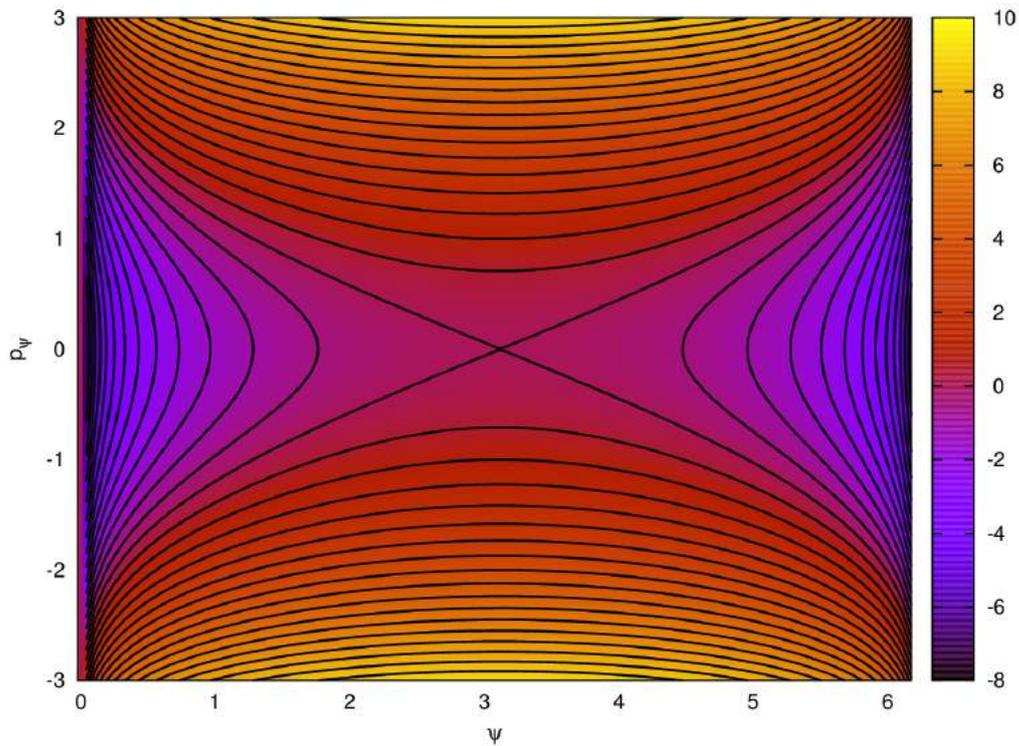


Figura 4.10: Curvas de nível da função $H(\psi, p_\psi; z = 0, p_z = 0)$.

Note que, de fato, as órbitas tendem assintoticamente à reta $\psi = 0$ (ou $\psi = 2\pi$) sem nunca transitar entre menor que π e maior que π , nas energias negativas.

Além disso, note também a presença do ponto de equilíbrio instável $\psi = \pi$, $z = 0$ e sua ilustração do porquê de ser instável.

Capítulo 5

Seções de Poincaré

As seções de Poincaré surgem como uma ferramenta no contexto do estudo do comportamento de sistemas dinâmicos.

Sejam M uma variedade e Φ um fluxo em M , $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que seja recorrente. Uma seção de Poincaré é uma seção transversal Σ ao fluxo recorrente Φ definido sobre a variedade M , tal que o vetor velocidade do fluxo não é tangente à seção ([30]).

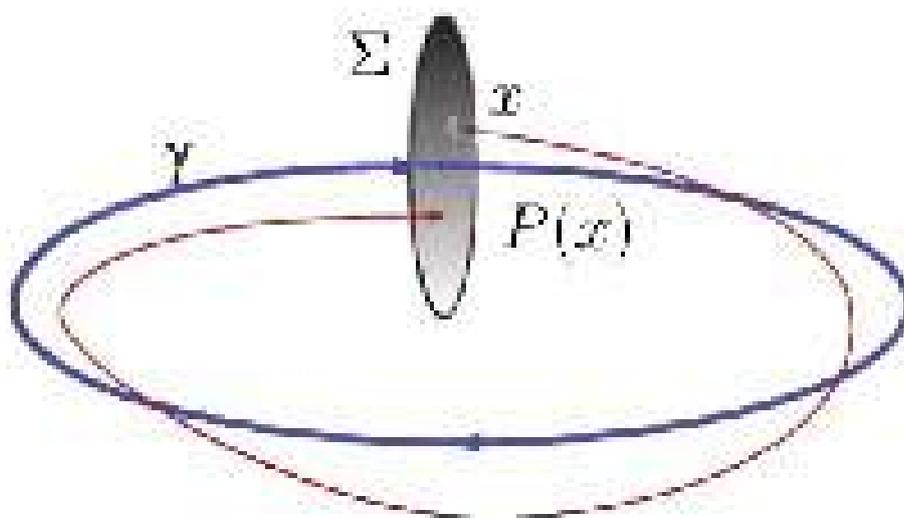


Figura 5.1: Ilustração de uma seção de Poincaré

Um detalhe importante a ser destacado é que a seção de Poincaré tem um caráter local! Apenas em uma classe especial de sistemas a seção pode ser definida globalmente ([25, 27]).

Devido à sua natureza local, podemos assumir que a seção Σ seja um disco aberto contendo $x_0 \in \gamma$ e perpendicular a $X_\Phi|_{x_0}$.

Um mapa de Poincaré é um mapa definido através do fluxo Φ como segue: tome $x \in \Sigma$ e siga a órbita de x por Φ até o momento em que o fluxo corta a seção novamente, digamos no tempo $\tau(x)$. Assim, o mapa de Poincaré é definido como $P(x) = \Phi(\tau(x), x)$.

Pela continuidade do campo X_Φ , existe um aberto U de Σ contendo x_0 tal que $X_\Phi|_x$ é transversal a Σ , onde $x \in U$.

A grande utilidade da seção de Poincaré está no fato de que, através dela, conseguimos informações sobre o comportamento de sistemas sem analisá-los trajetória a trajetória, pois a seção diminui a dimensão em 1 e tais informações são mais fáceis de serem extraídas.

Todas as seções aqui apresentadas foram calculadas utilizando como método numérico de integração um método do tipo Runge-Kutta de oitava ordem, devido a Dormand e Prince [20].

5.1 2-Corpos no Plano

Como um exemplo de aplicação do cálculo de seções de Poincaré, vamos considerar o sistema de dois corpos na geometria intrínseca do plano antes de aplicarmos a redução completa.

Como já vimos na Seção 3.1, com a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1 \\ y = y_2 - y_1 \\ \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \\ \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M} \end{cases}$$

temos que o sistema de dois corpos pode ser escrito como dois subsistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} + \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{x}}} \\ \dot{\bar{y}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{y}}} \\ \dot{p}_{\bar{x}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \\ \dot{p}_{\bar{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{y}} \end{cases},$$

onde p_x , p_y , $p_{\bar{x}}$ e $p_{\bar{y}}$ são os momentos respectivos em x , em y , em \bar{x} e em \bar{y} dados por $p_x = \frac{m_1 p_{x_2} - m_2 p_{x_1}}{M}$, $p_y = \frac{m_1 p_{y_2} - m_2 p_{y_1}}{M}$, $p_{\bar{x}} = p_{x_1} + p_{x_2}$ e $p_{\bar{y}} = p_{y_1} + p_{y_2}$ e H é a Hamiltoniana do plano dada por $H = H_1(x, y, p_x, p_y) + H_2(p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}})$. O subsistema determinado pela função Hamiltoniana H_2 já está na forma das variáveis ação-ângulo; logo, já está completamente compreendido.

Vamos, por questão de notação, identificar daqui em diante $H = H_1$.

Sendo assim, o sistema a ser analisado será dado pela Hamiltoniana $H = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu} + \frac{m_1 m_2}{4\pi} \log(x^2 + y^2)$, ou seja, estudaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{p_x}{\mu} \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{\mu} \\ \dot{p}_x &= -\frac{m_1 m_2}{2\pi(x^2 + y^2)} x \\ \dot{p}_y &= -\frac{m_1 m_2}{2\pi(x^2 + y^2)} y. \end{cases} \quad (5.1)$$

Abaixo seguem algumas seções ($\Sigma_E = \{(y, p_y | x = 0, p_x > 0 \text{ e } H = E \text{ constante})\}$).

Serão mostradas da Figura 5.2 à Figura 5.13 as seções acima considerando alguns valores de massas diferentes, a saber,

- $m_1 = m_2 = 1$ para as Figuras 5.2 e 5.3;
- $m_1 = 2, m_2 = 1$ para as Figuras 5.4 e 5.5;
- $m_1 = 10, m_2 = 1$ para as Figuras 5.6 e 5.7;
- $m_1 = 100, m_2 = 1$ para as Figuras 5.8 e 5.9;
- $m_1 = 1, m_2 = 0.1$ para as Figuras 5.10 e 5.11;
- $m_1 = 1, m_2 = 0.01$ para as Figuras 5.12 e 5.13;

5.1.1 $m_1 = m_2 = 1$

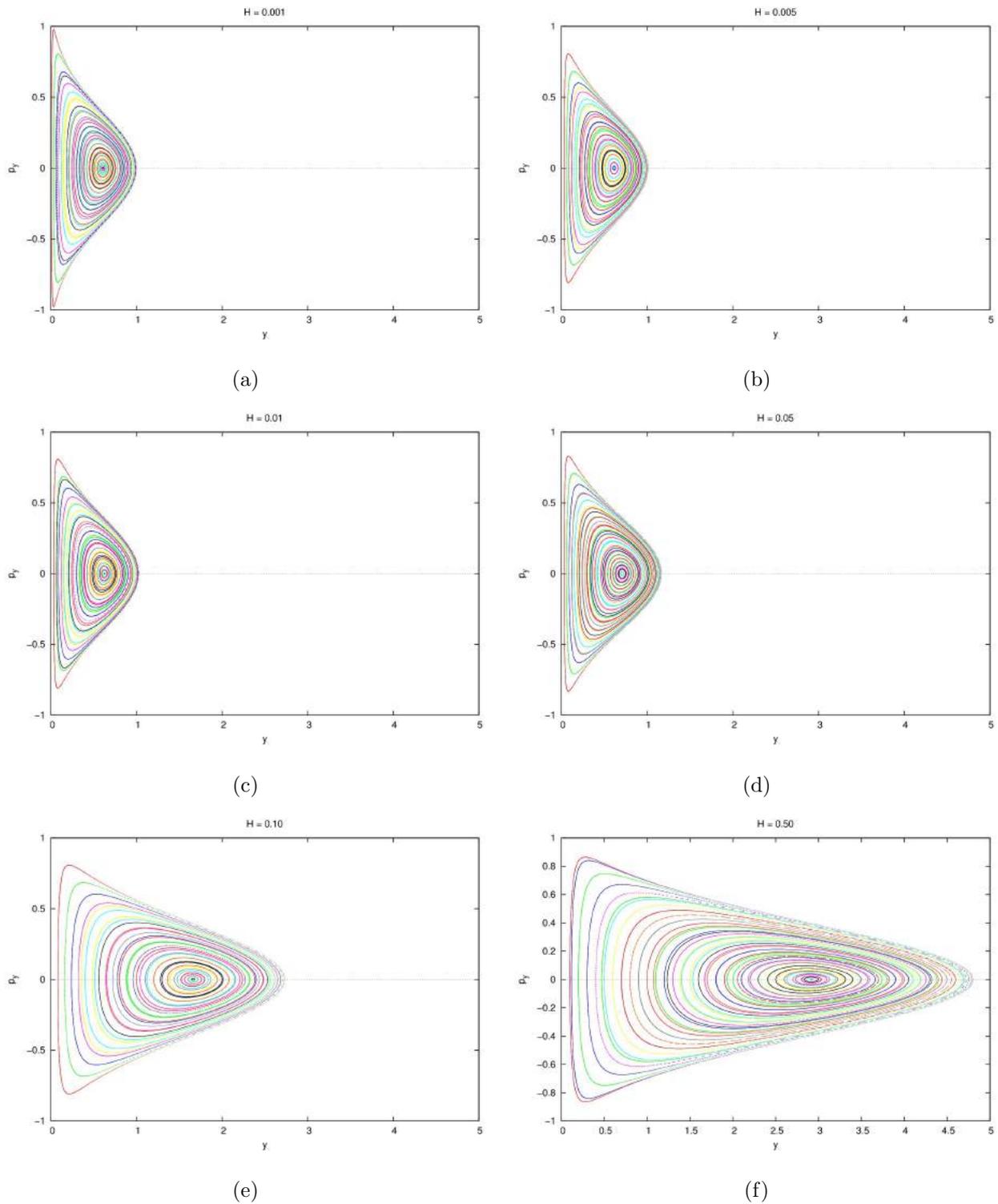


Figura 5.2: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) na mesma escala com $m_1 = m_2 = 1$ (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

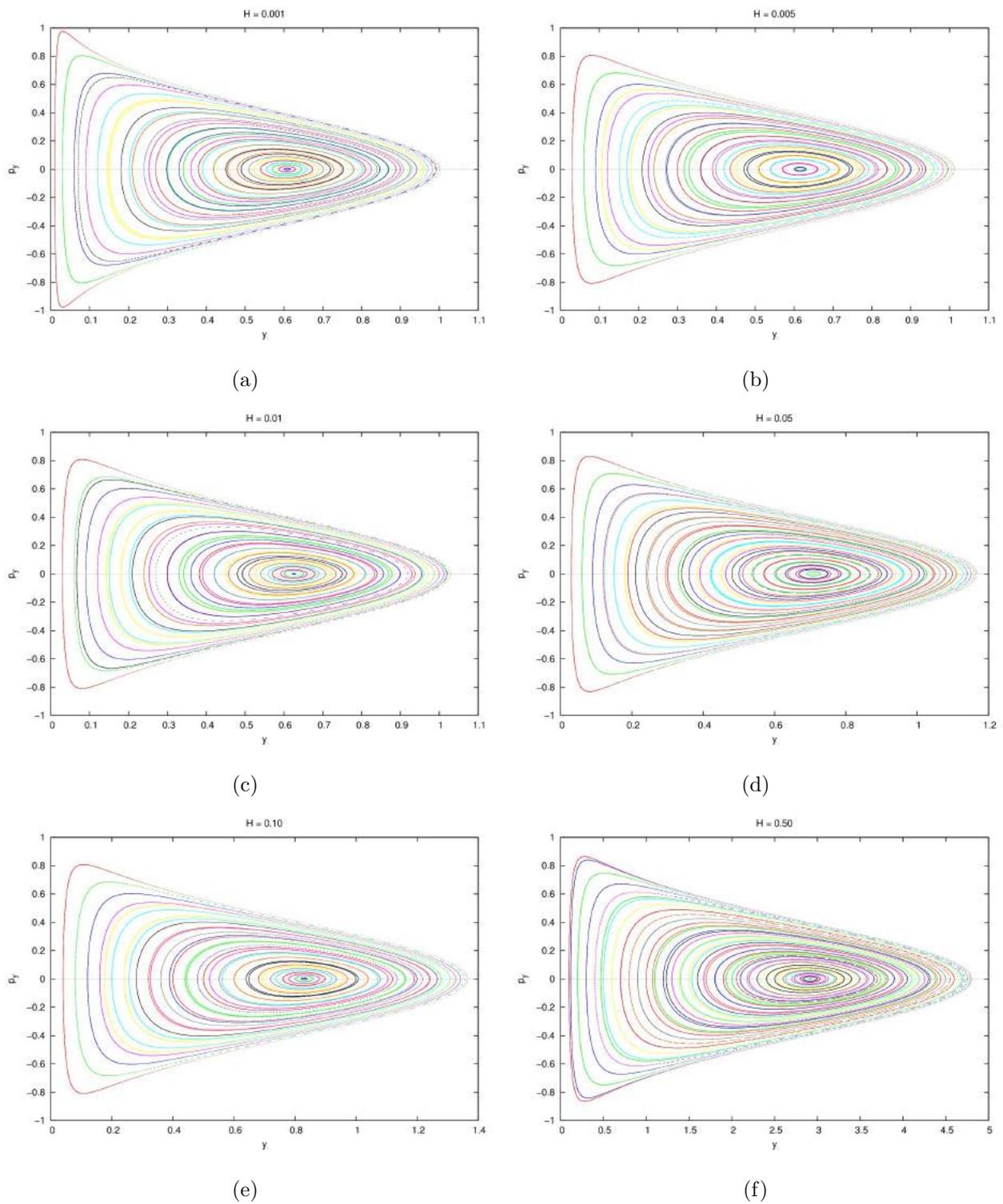


Figura 5.3: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) em escalas diferentes com $m_1 = m_2 = 1$
 (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

5.1.2 $m_1 = 2, m_2 = 1$

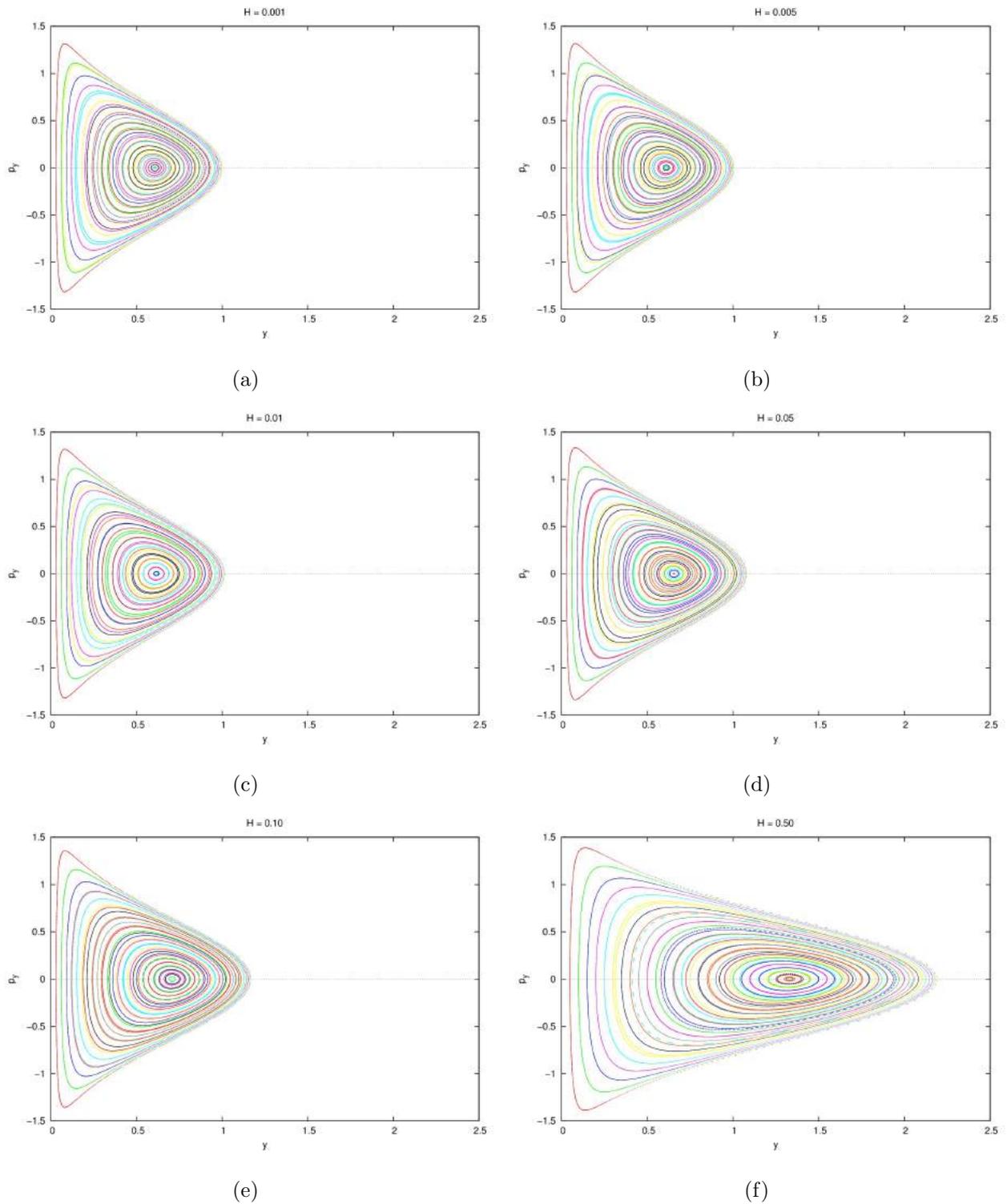


Figura 5.4: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) na mesma escala com $m_1 = 2, m_2 = 1$ (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

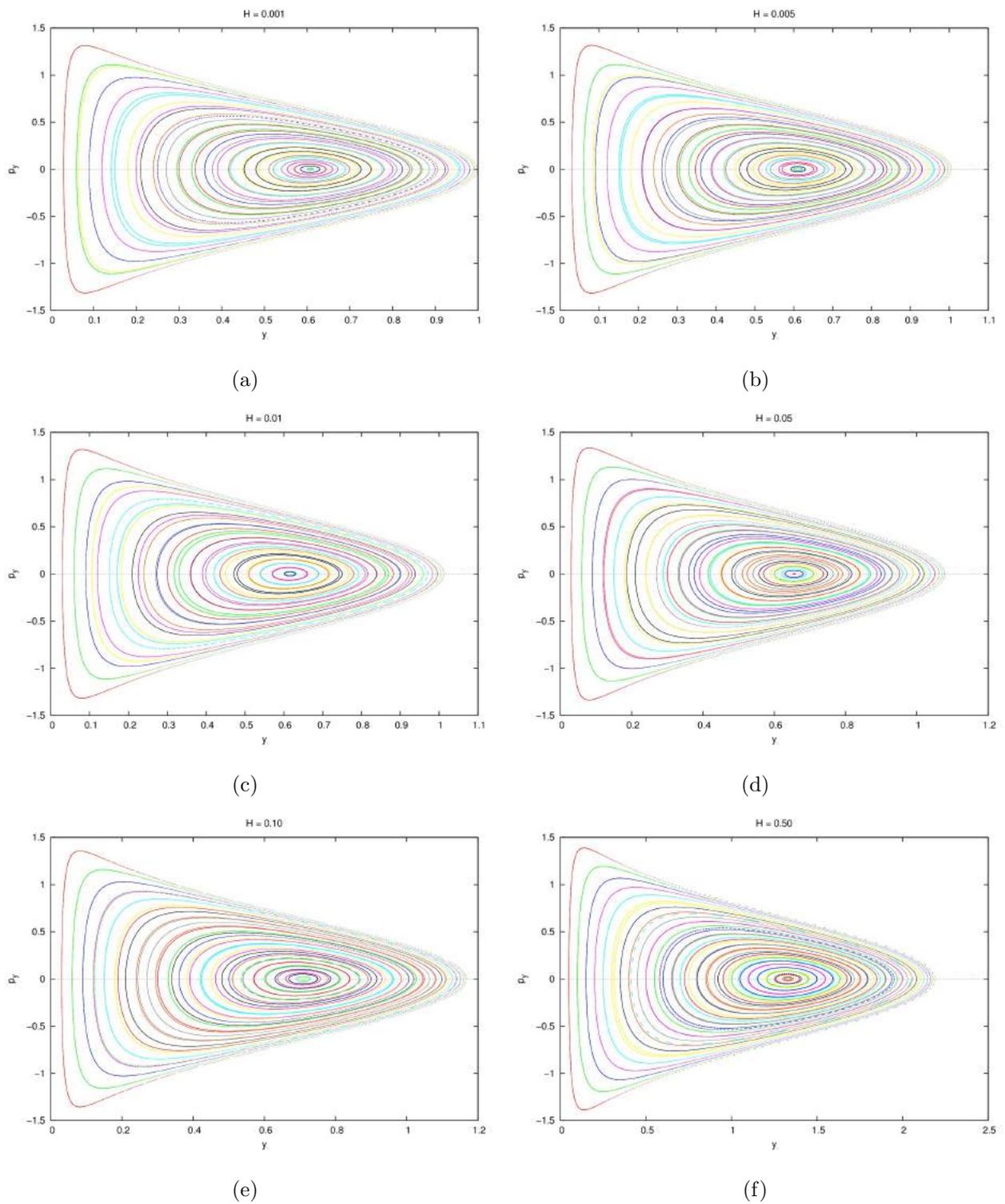


Figura 5.5: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) em escalas diferentes com $m_1 = 2$, $m_2 = 1$
 (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

5.1.3 $m_1 = 10, m_2 = 1$

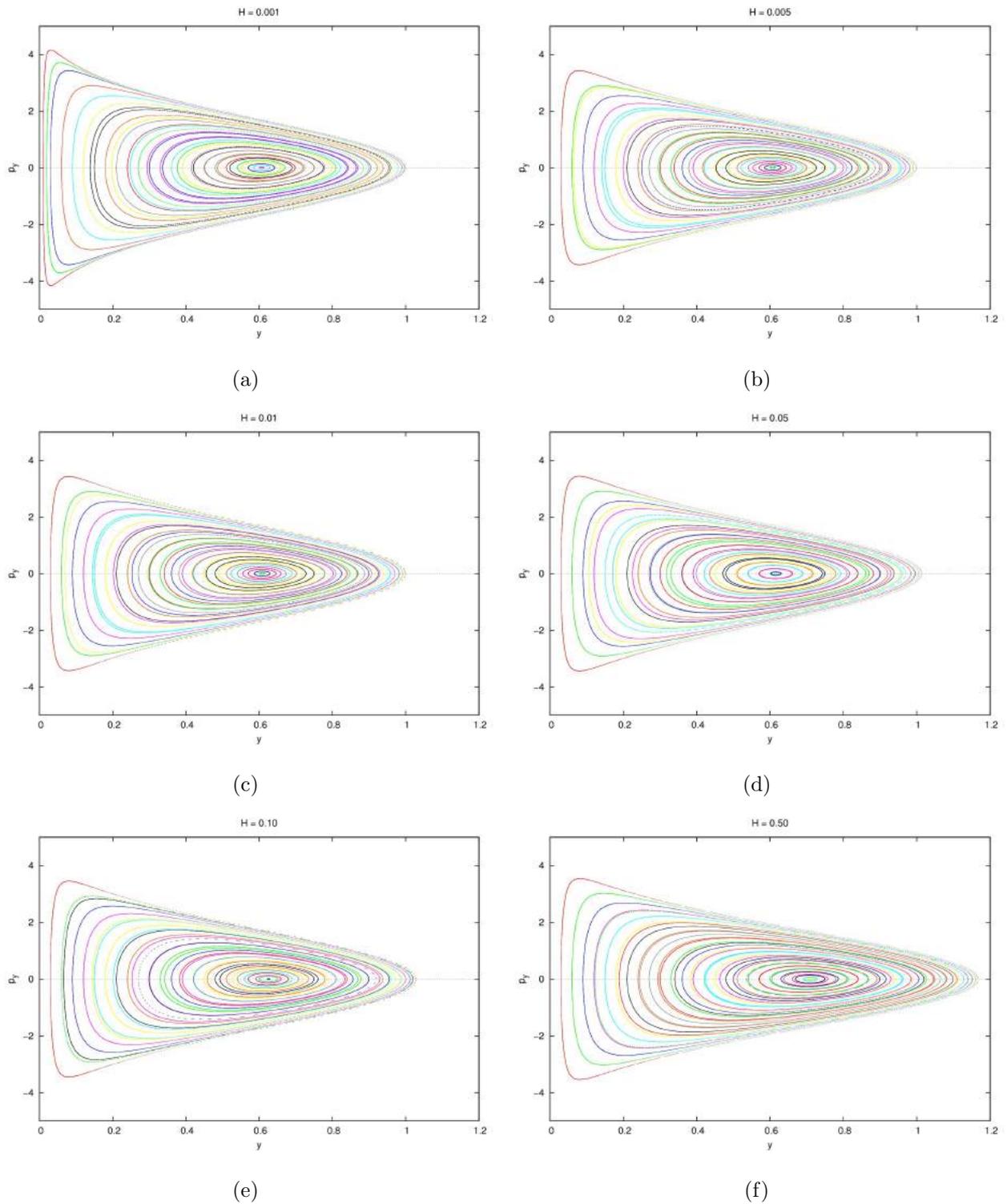


Figura 5.6: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) na mesma escala com $m_1 = 10, m_2 = 1$
 (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

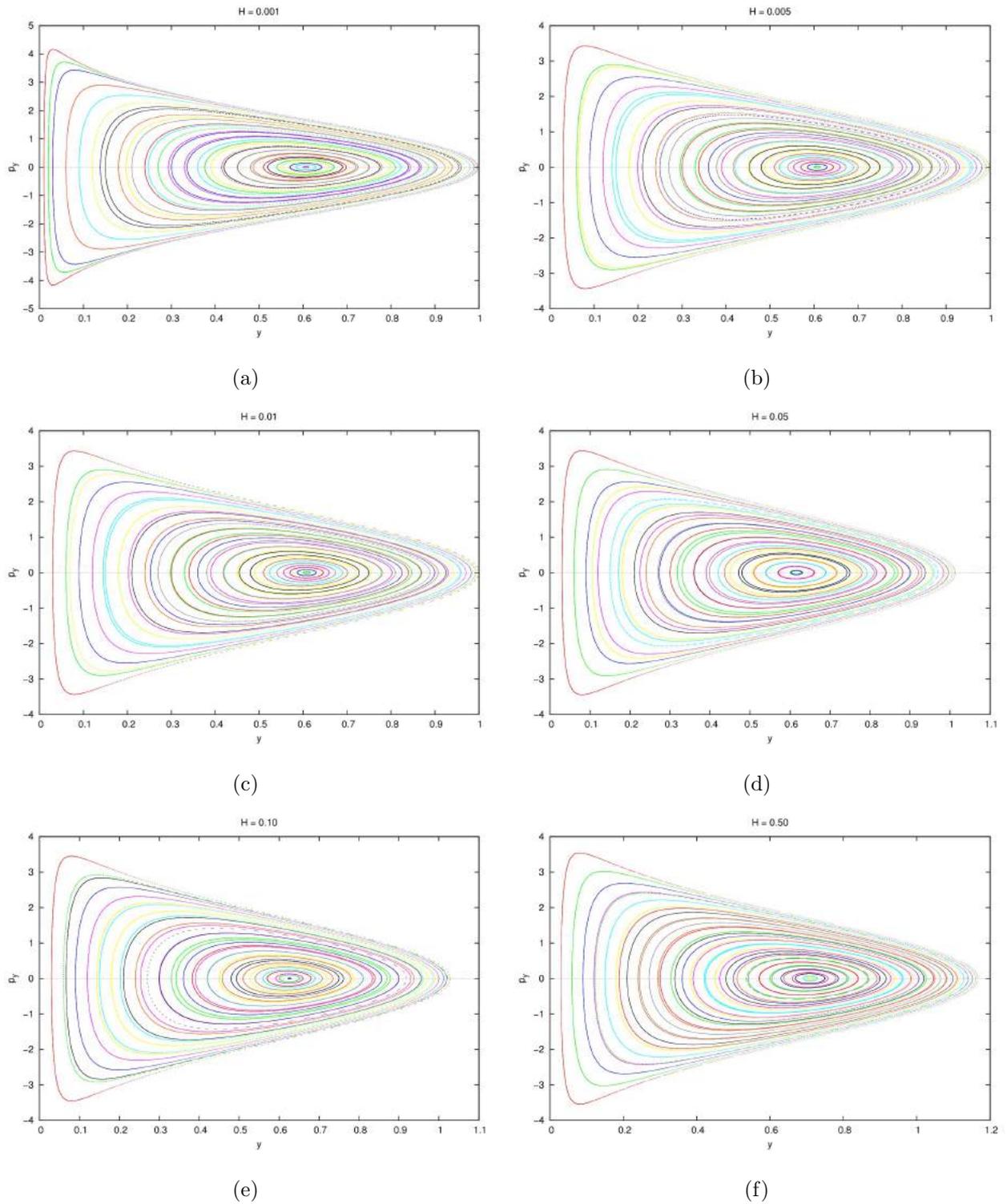


Figura 5.7: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) em escalas diferentes com $m_1 = 10$, $m_2 = 1$
 (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

5.1.4 $m_1 = 100, m_2 = 1$

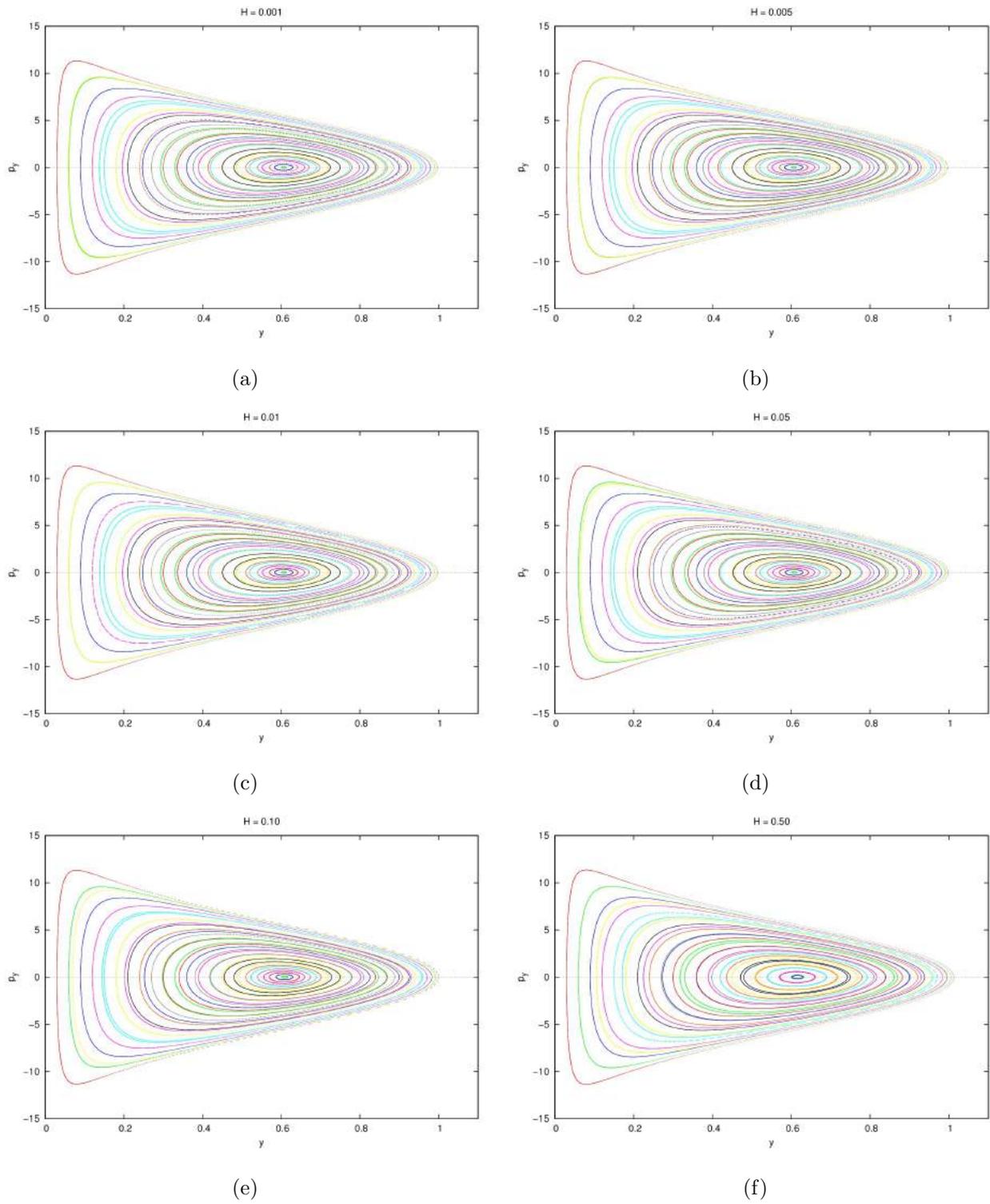


Figura 5.8: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) na mesma escala com $m_1 = 100, m_2 = 1$
 (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

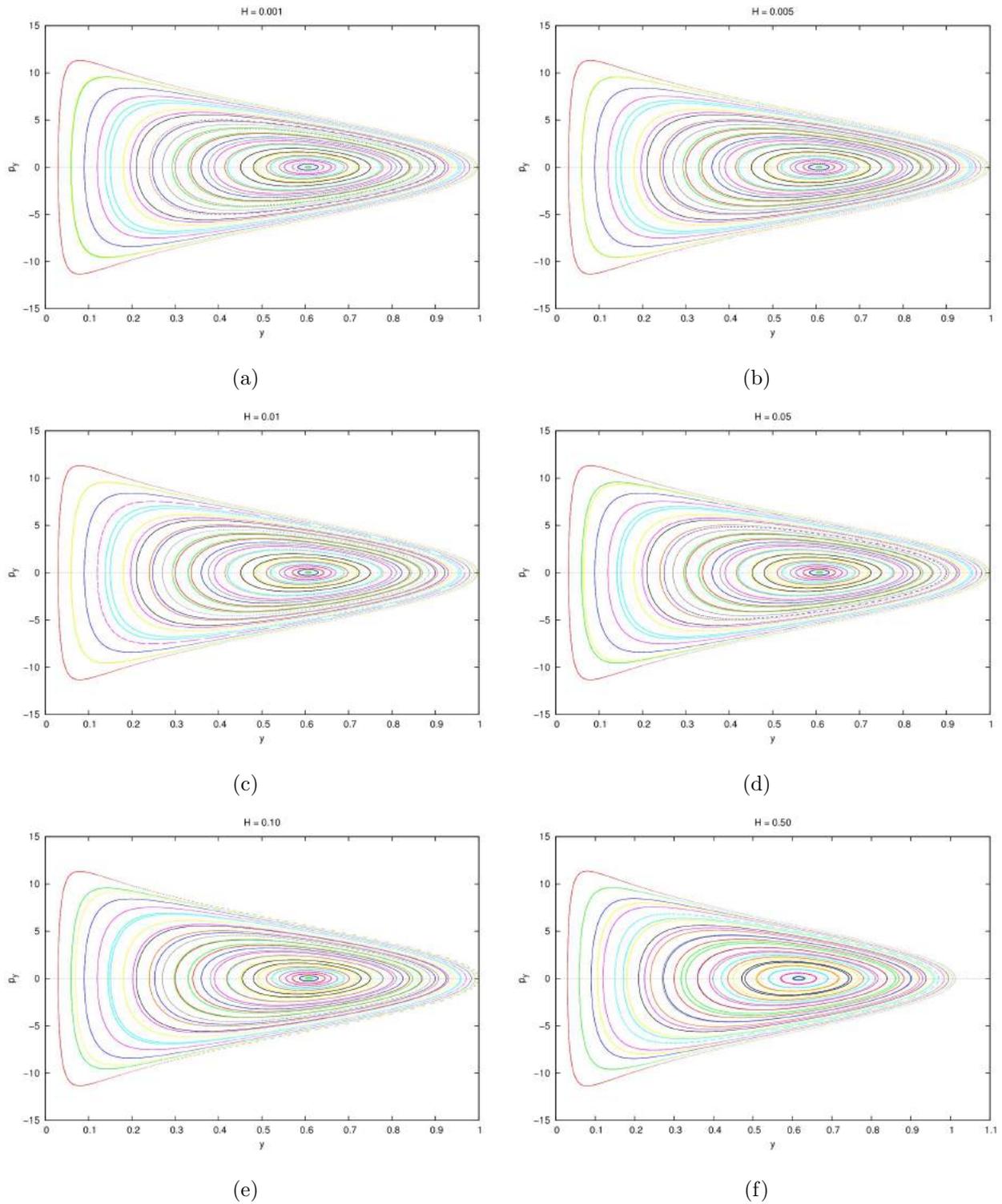


Figura 5.9: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) em escalas diferentes com $m_1 = 100$, $m_2 = 1$ (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$, (e) $H = 0.10$ e (f) $H = 0.50$

5.1.5 $m_1 = 1, m_2 = 0.1$

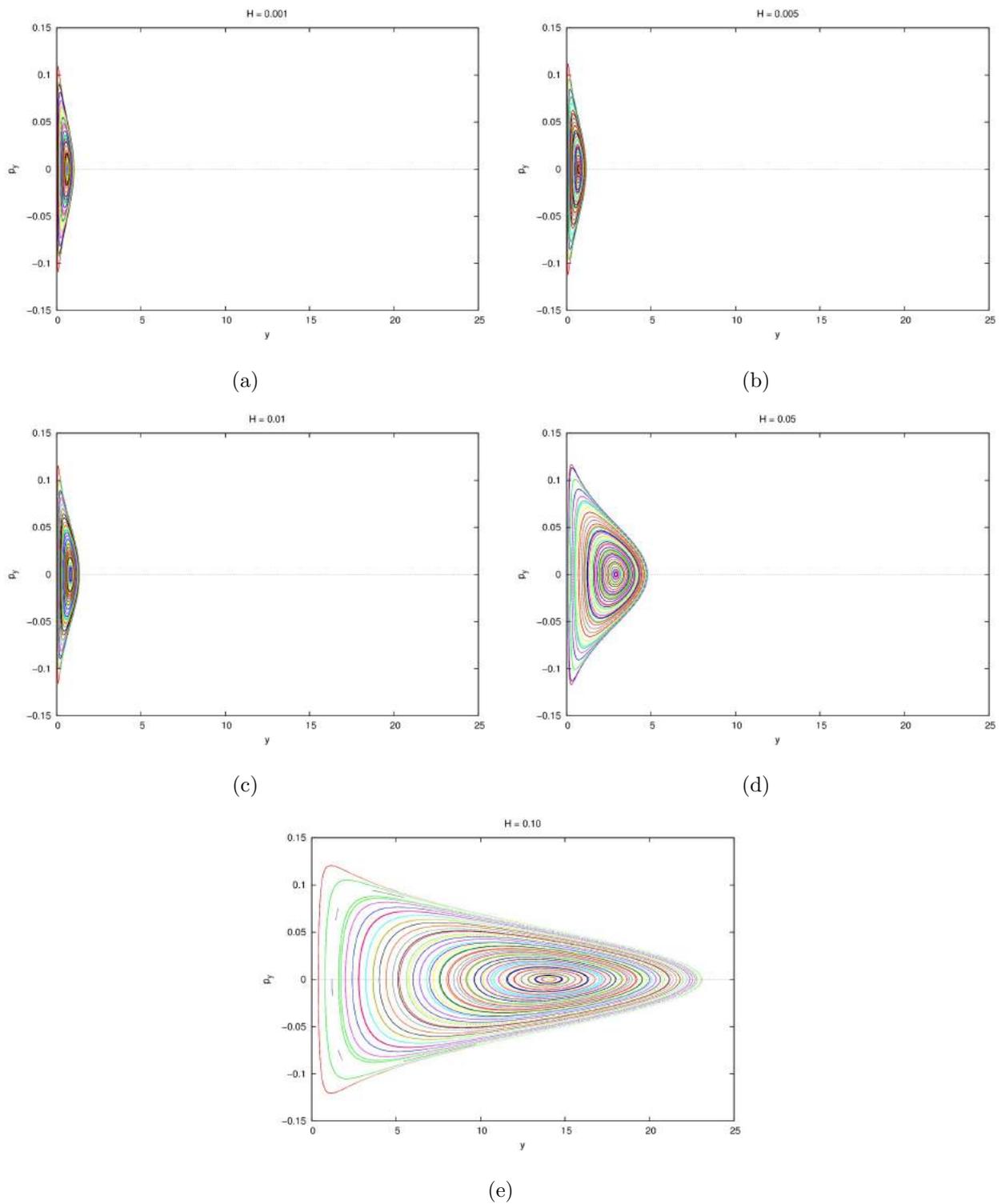


Figura 5.10: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) na mesma escala com $m_1 = 1, m_2 = 0.1$

(a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$ e (e) $H = 0.10$

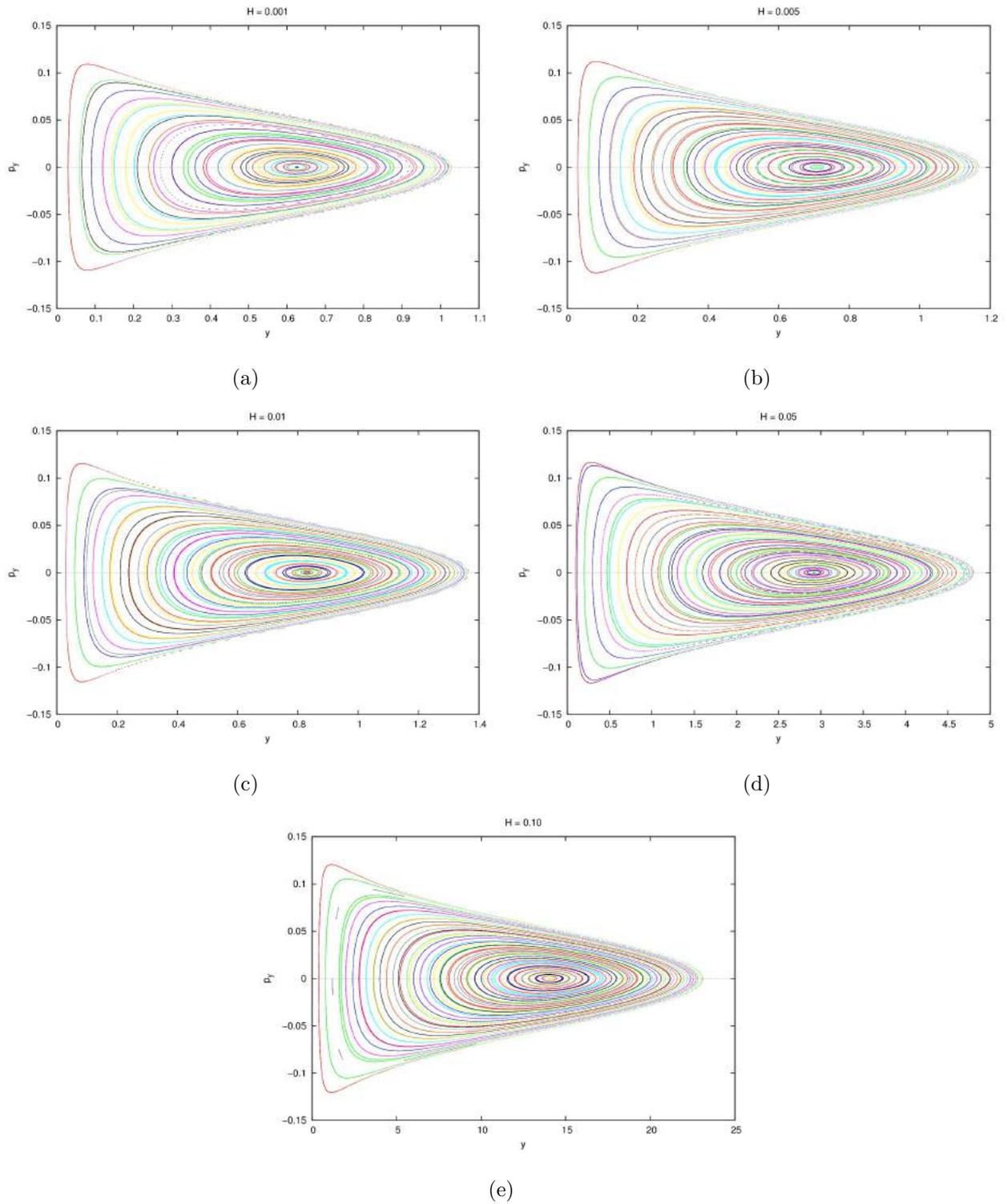


Figura 5.11: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) em escalas diferentes com $m_1 = 1$, $m_2 = 0.1$
 (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$, (c) $H = 0.01$, (d) $H = 0.05$ e (e) $H = 0.10$

5.1.6 $m_1 = 1, m_2 = 0.01$

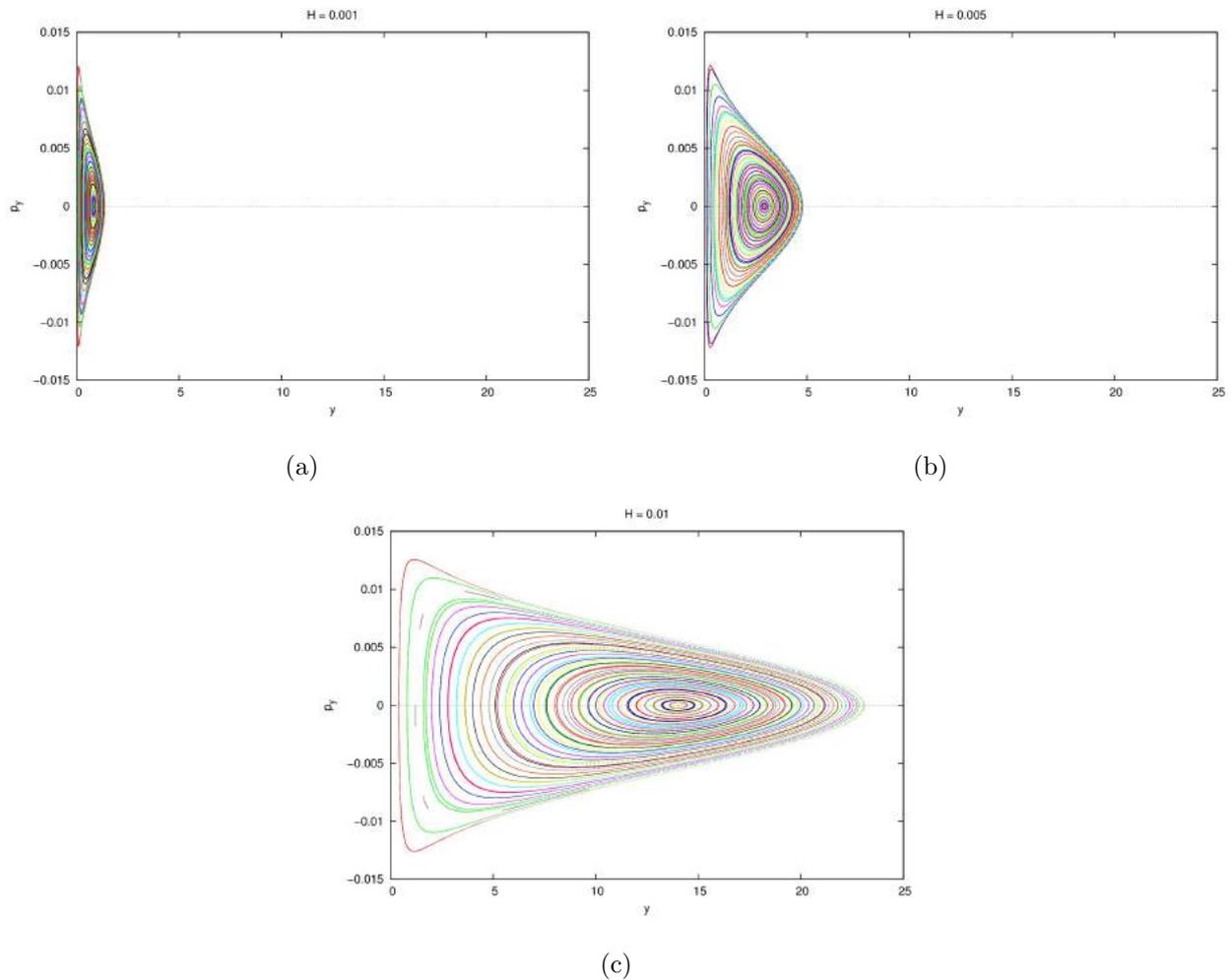


Figura 5.12: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) na mesma escala com $m_1 = 1, m_2 = 0.01$ (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$ e (c) $H = 0.01$

É interessante observar que essas seções são, na verdade, metade das seções completas do plano. O que acontece é que existe uma simetria com relação ao eixo p_y , mas não ganhamos informação nenhuma adicional ao plotarmos esta parte.

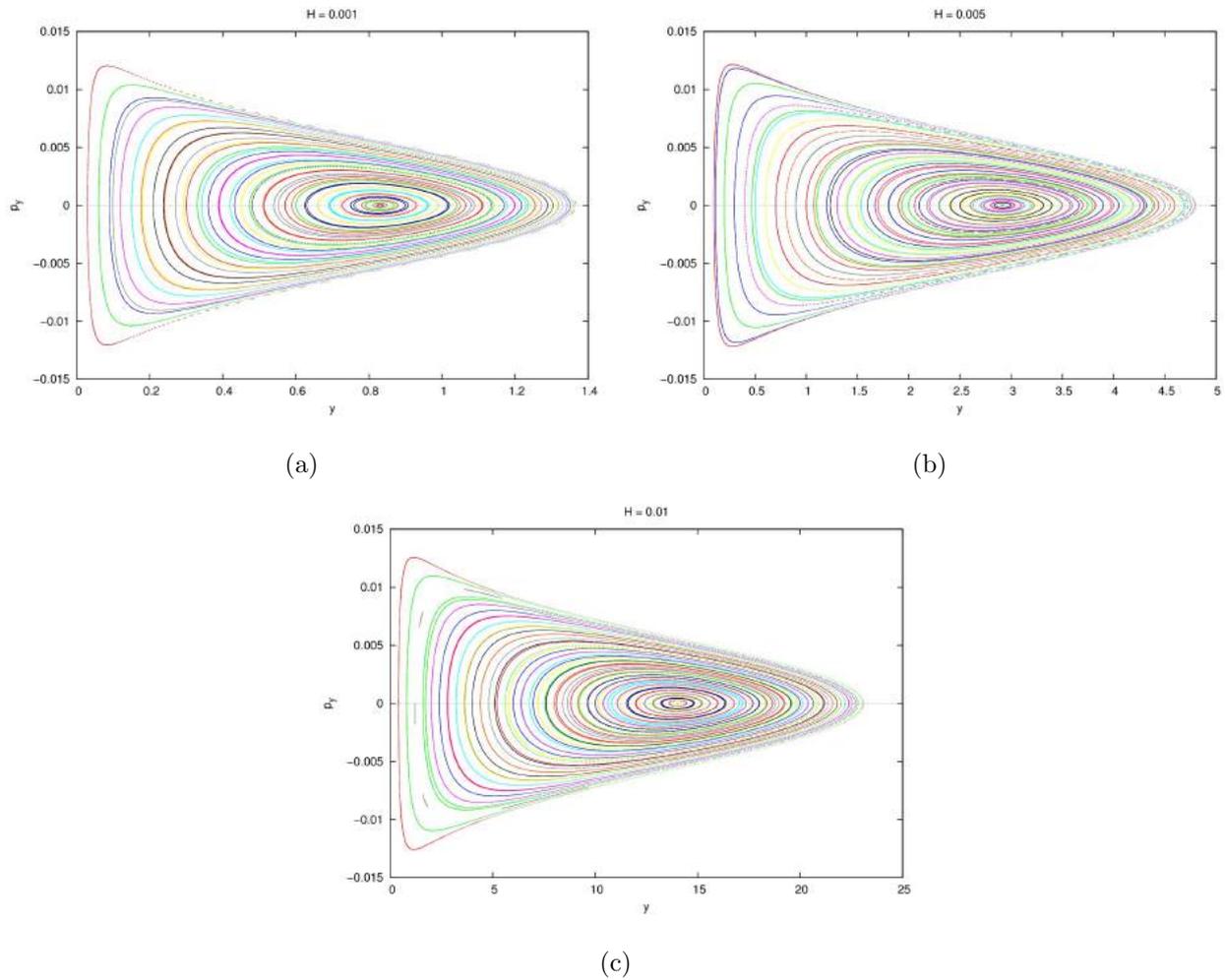


Figura 5.13: Seções de Poincaré para o sistema (5.1) em escalas diferentes com $m_1 = 1$, $m_2 = 0.01$ (a) $H = 0.001$, (b) $H = 0.005$ e (c) $H = 0.01$

5.2 2-Corpos no Cilindro

Conforme já visto na Seção 3.2, com a mudança de coordenadas pontuais

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \varphi_2 - \varphi_1 \\ z = z_2 - z_1 \\ \bar{\psi} = \frac{m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2}{M} \\ \bar{z} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{M} \end{array} \right.$$

temos que o sistema de dois corpos no cilindro pode ser escrito como dois subsistemas

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \\ \dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\psi}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{\psi}}} \\ \dot{\bar{z}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{z}}} \\ \dot{p}_{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}} \\ \dot{p}_{\bar{z}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}, \end{array} \right.$$

onde p_ψ , p_z , $p_{\bar{\psi}}$ e $p_{\bar{z}}$ são os momentos respectivos em ψ , em z , em $\bar{\psi}$ e em \bar{z} dados por $p_\psi = \frac{m_1 p_{\varphi_2} - m_2 p_{\varphi_1}}{M}$, $p_z = \frac{m_1 p_{z_2} - m_2 p_{z_1}}{M}$, $p_{\bar{\psi}} = p_{\varphi_1} + p_{\varphi_2}$ e $p_{\bar{z}} = p_{z_1} + p_{z_2}$ e H é a Hamiltoniana do plano dada por $H = H_1(\psi, z, p_\psi, p_z) + H_2(p_{\bar{\psi}}, p_{\bar{z}})$, onde o subsistema determinado pela função Hamiltoniana H_2 já está na forma das variáveis ação-ângulo, logo, já está completamente compreendido.

Vamos aqui também, por questão de notação, identificar $H = H_1$.

Sendo assim, o sistema a ser analisado será dado pela Hamiltoniana $H = \frac{p_\psi^2}{2\mu R^2} + \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{m_1 m_2}{4\pi} \log \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} \right)$, ou seja, estudaremos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\mu R^2} \\ \dot{z} = \frac{p_z}{\mu} \\ \dot{p}_\psi = -\frac{m_1 m_2}{8\pi} \frac{\sin \psi}{\sin^2(\frac{\psi}{2}) + \sinh^2(\frac{z}{2R})} \\ \dot{p}_z = -\frac{m_1 m_2}{8\pi R} \frac{\sinh(\frac{z}{R})}{\sin^2(\frac{\psi}{2}) + \sinh^2(\frac{z}{2R})}, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

No cilindro, como vimos, podemos reduzir o sistema a um de 3 graus de liberdade, mas, a princípio, não temos mais simetrias conhecidas que nos dariam mais reduções; vimos, inclusive, na Seção 3.2.1 que não existem integrais

primeiras quadráticas nos momentos.

Sendo assim, uma ferramenta útil para estudar o comportamento do fluxo são as seções de Poincaré.

Como pode ser visto nas figuras abaixo, tal sistema, de fato, não é integrável, pois há a presença de órbitas que preenchem o espaço possível para tal nível de energia onde não há a presença de toros, o que indica caos.

Seguem abaixo alguns exemplos de seções obtidas fixando como seção transversal $\Sigma_E = \{(z, p_z) \mid \psi = \pi, p_\psi > 0 \text{ e } H = E \text{ constante}\}$:

Todas elas foram feitas tomando $R = 1$, onde R é o raio do cilindro. Mais adiante falaremos sobre as variações de R .

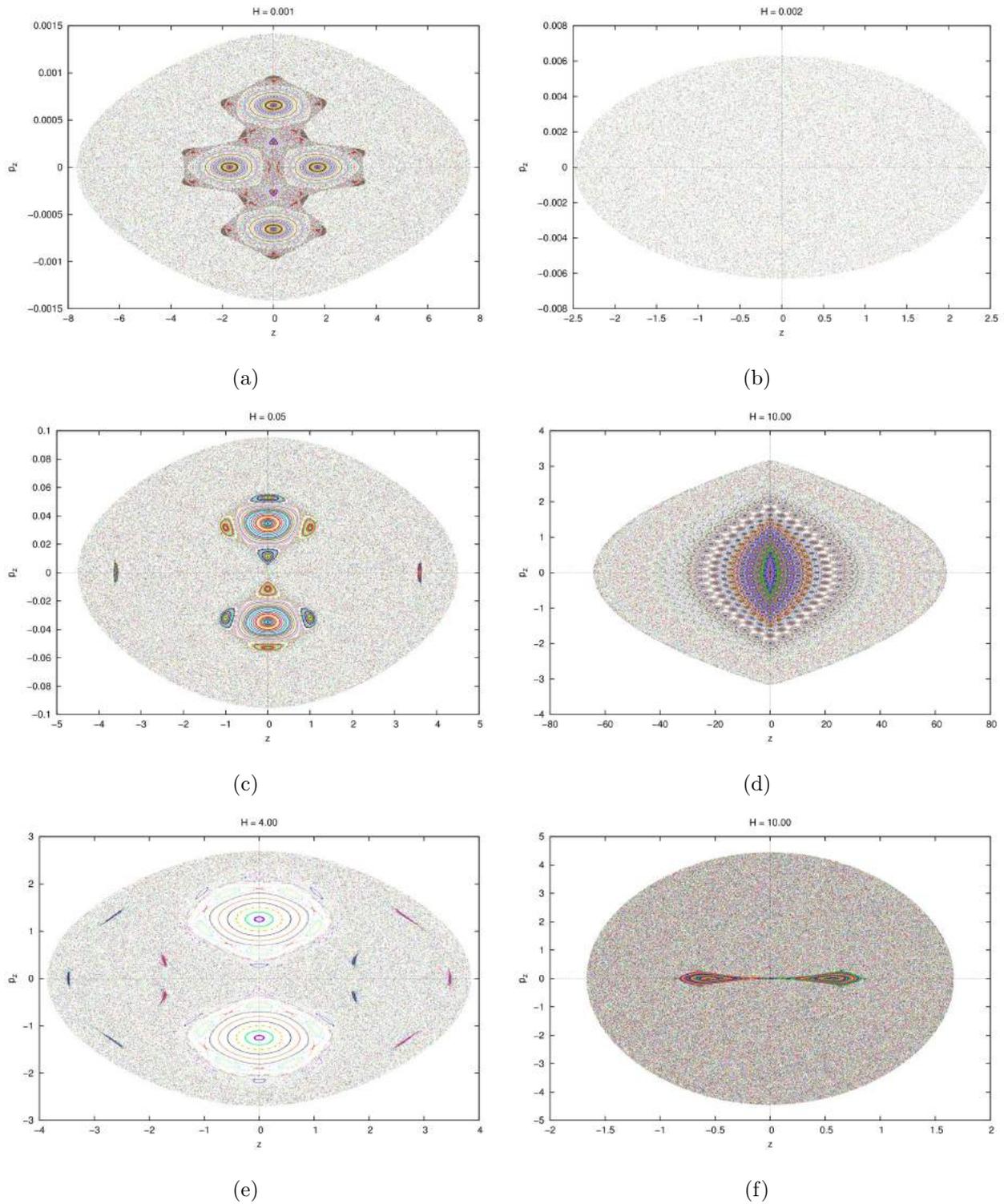


Figura 5.14: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com (a) $m_1 = 1$, $m_2 = 0.001$ e $H = 0.001$; (b) $m_1 = 1$, $m_2 = 0.01$ e $H = 0.002$; (c) $m_1 = 1$, $m_2 = 0.1$ e $H = 0.05$; (d) $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ e $H = 10$; (e) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$ e $H = 4$; (f) $m_1 = 100$, $m_2 = 1$ e $H = 10$.

À primeira vista, pode parecer que temos um espaço muito grande de procura e investigação de parâmetros. De fato, poderíamos nos fazer várias perguntas sobre casos especiais dos parâmetros, por exemplo:

- o caso de duas massas iguais $m_1 = m_2 = 1$ e variar a energia;
- o caso de manter as massas iguais mas multiplicá-las por um fator λ ;
- o caso de uma das massas ser muito pequena com relação à outra, em outras palavras, $m_1 = 1$ e $m_2 = \epsilon$, com $\epsilon \ll 1$;
- o caso reverso, isto é, uma massa muito maior que a outra, $m_1 = 1$, $m_2 = M$, com $M \gg 1$;
- variar também o raio do cilindro e ver esse efeito nas seções e, consequentemente, na dinâmica;
- na variação do raio, poderíamos, assim como no caso das massas, considerar um “caso limite” isto é, o caso em que R é muito grande ($R \rightarrow \infty$) para ver se essa dinâmica se aproxima, pelo menos localmente, de uma dinâmica em um plano;
- procurar por valores críticos de energia em algumas dessas configurações;
- etc.

Há, no entanto, uma coisa interessante a se notar quando comparamos algumas seções:

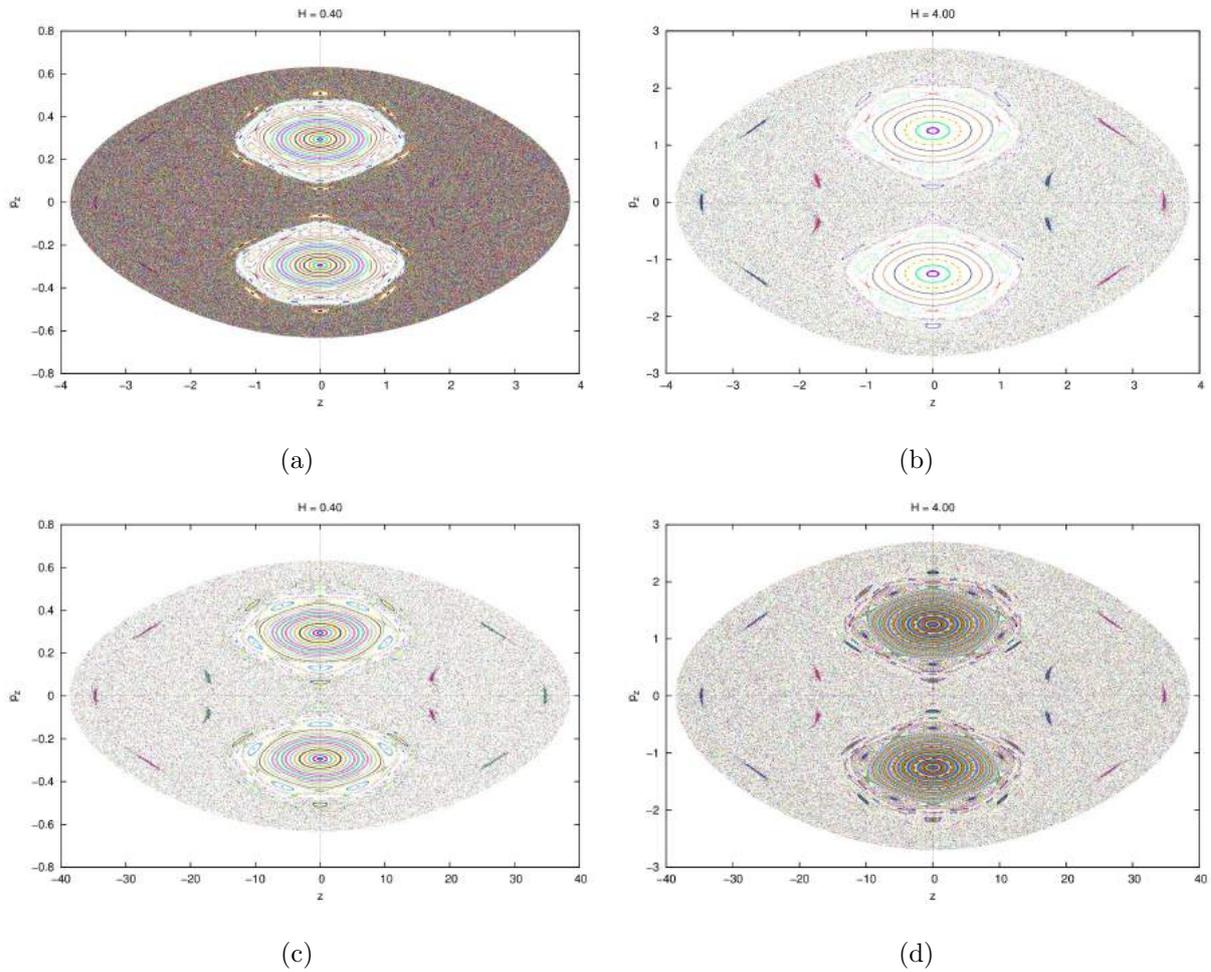


Figura 5.15: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com (a) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 1$; (b) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 1$; (c) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 10$; (d) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 10$.

Como podemos perceber, a menos de escolha de mais ou menos condições iniciais e escala, os mapas anteriores são os mesmos, no entanto os parâmetros $m_1 \cdot m_2$, H e R são diferentes; os parâmetros $m_1 m_2$, R e H estão interligados.

5.2.1 Relação entre os parâmetros $m_1 m_2$, R e H

A primeira e mais fácil variação a se notar é a de R . Note que as Figuras 5.15(a) e 5.15(c) são seções do sistema (5.2) uma com o raio do cilindro 10

vezes maior que a outra, e a variação que podemos perceber nela é uma escala 10 vezes maior nas posições. Analogamente com as Figuras 5.15(b) e 5.15(d).

Comparando agora as figuras 5.15(a) com 5.15(b) e 5.15(c) com 5.15(d), o que podemos perceber é que ao multiplicarmos $m_1 \cdot m_2$ e H por um fator 10, ambas se mantem a mesma seção com posições iguais.

Vejam as seções anteriores com algumas escalas diferentes:

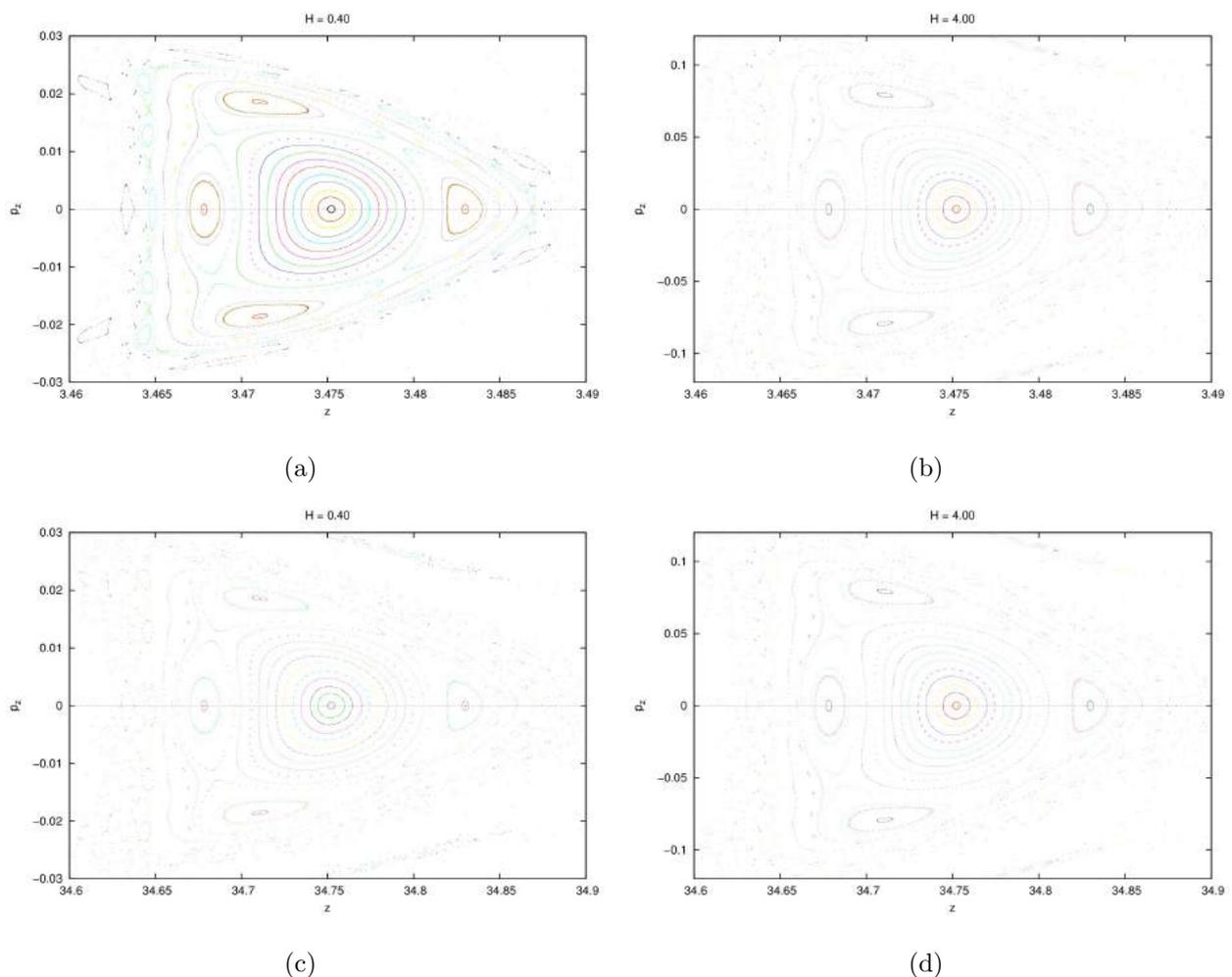


Figura 5.16: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com (a) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 1$; (b) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 1$; (c) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 10$; (d) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 10$.

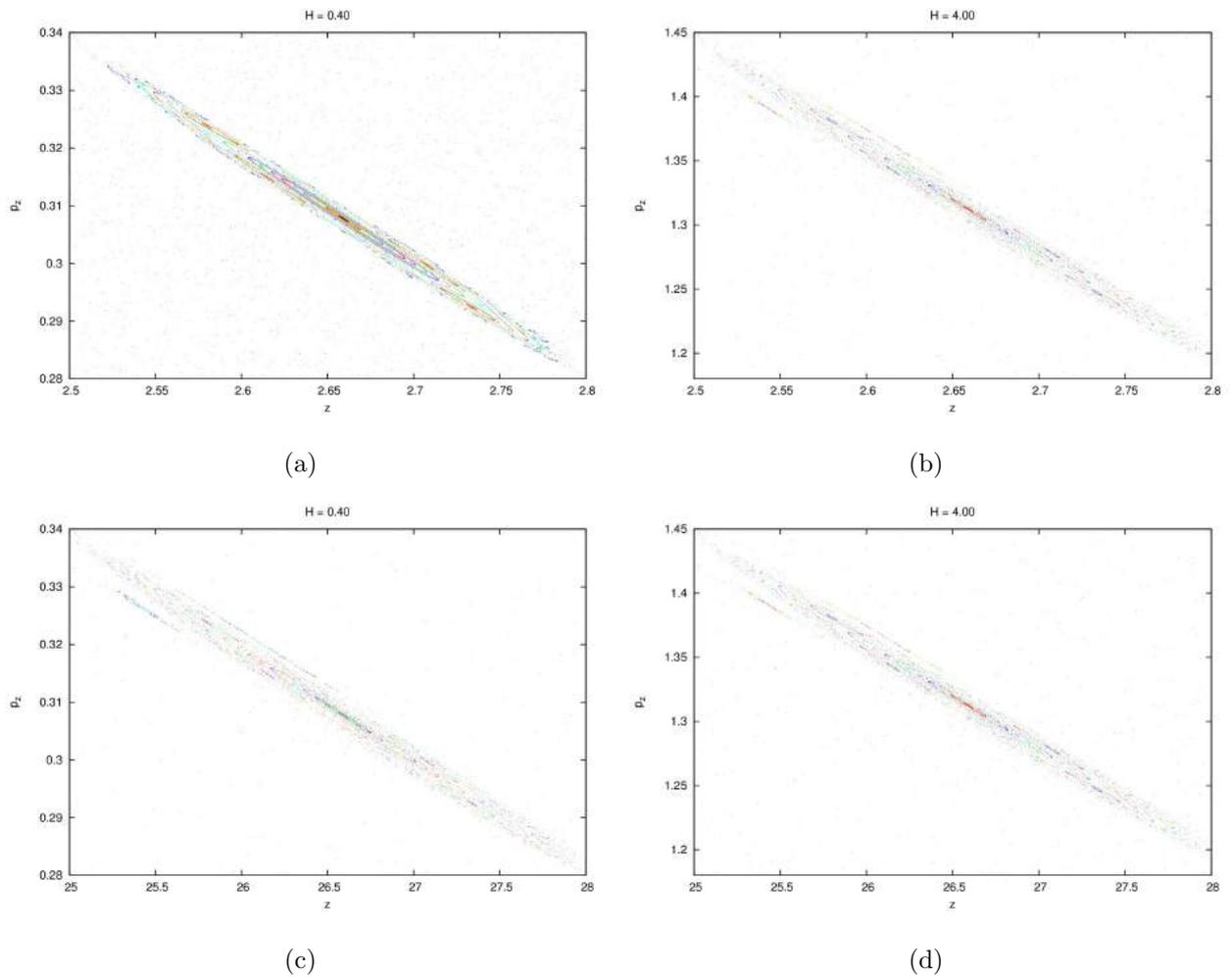


Figura 5.17: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com (a) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 1$; (b) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 1$; (c) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 10$; (d) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 10$.

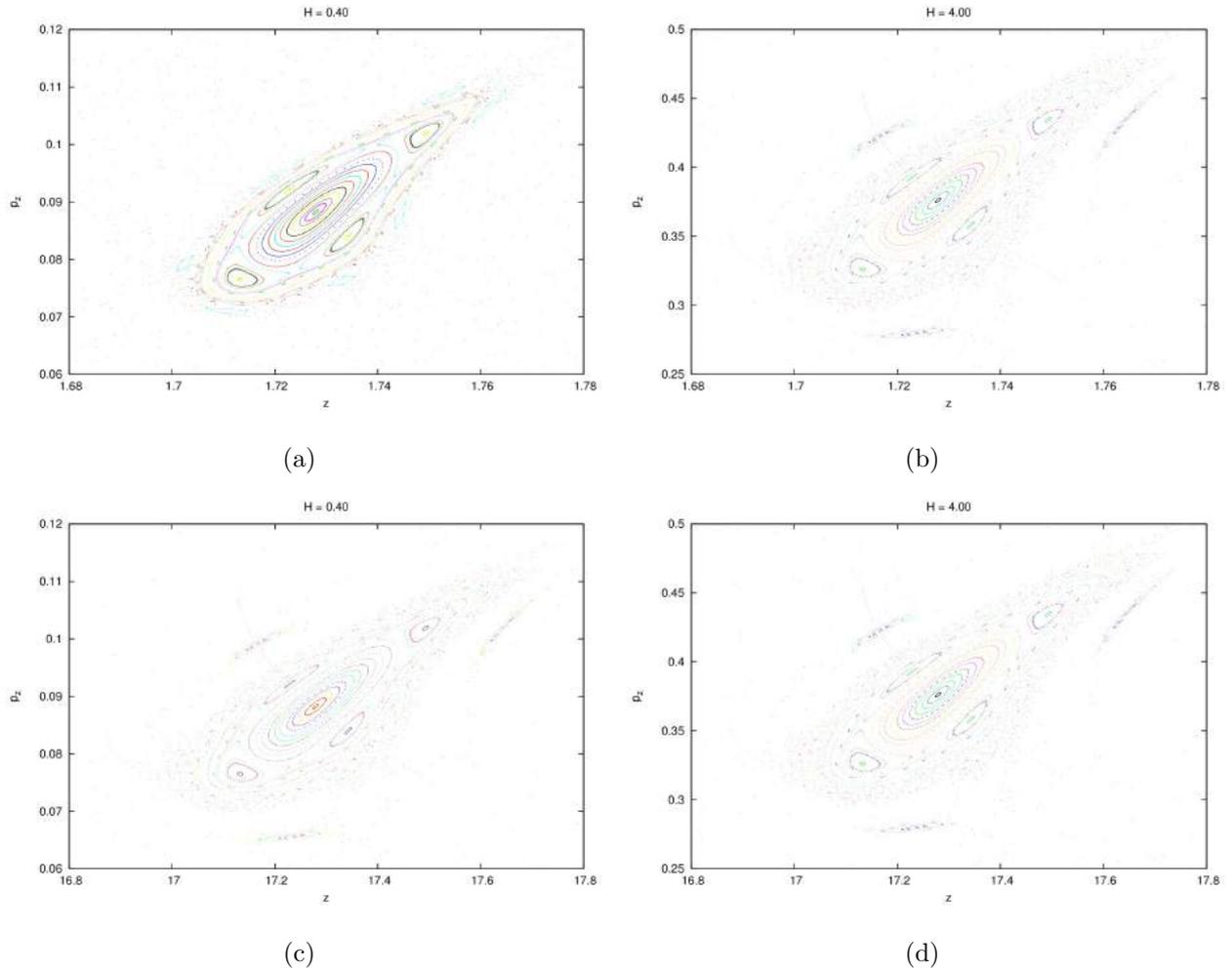


Figura 5.18: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com (a) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 1$; (b) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 1$; (c) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 10$; (d) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 10$.

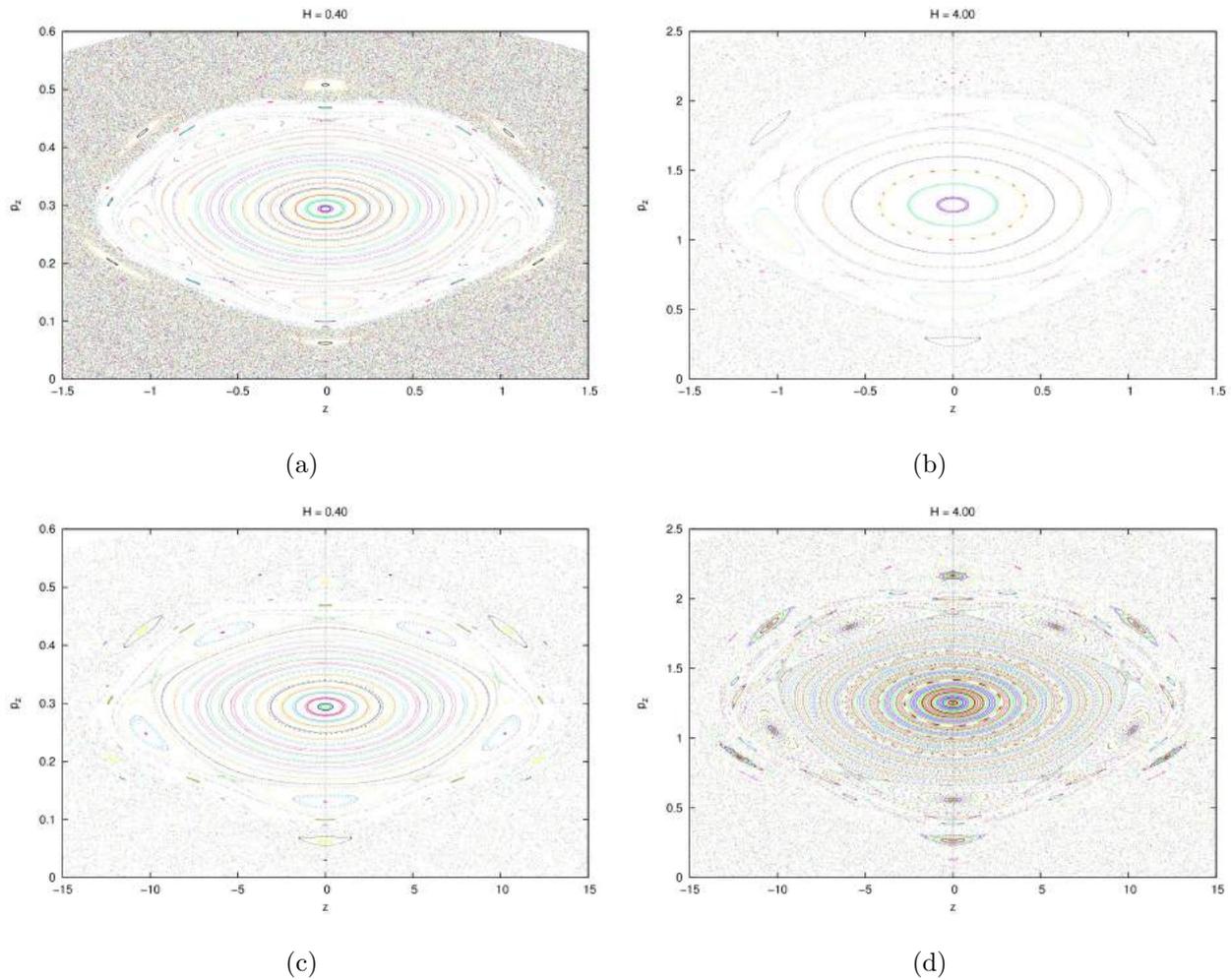


Figura 5.19: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com (a) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 1$; (b) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 1$; (c) $m_1 = m_2 = 1$, $H = 0.40$ e $R = 10$; (d) $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $H = 4$ e $R = 10$.

Portanto, podemos nos ater a apenas variar um desses parâmetros, digamos H , fixando $m_1 \cdot m_2$ e R a fim de compreender melhor a dinâmica deste sistema, ou então, quando necessário por questões computacionais, variar os outros parâmetros (por exemplo, diminuindo as massas e o raio do cilindro para que o tempo de computação seja menor) e fazer a identificação com o valor da energia H de acordo com os valores de massas e raio previamente fixados.

Vejam a seguir um exemplo desta identificação:

Fixando $m_1 \cdot m_2 = 1$ e $R = 1$, e variando H obtivemos as seguintes seções:

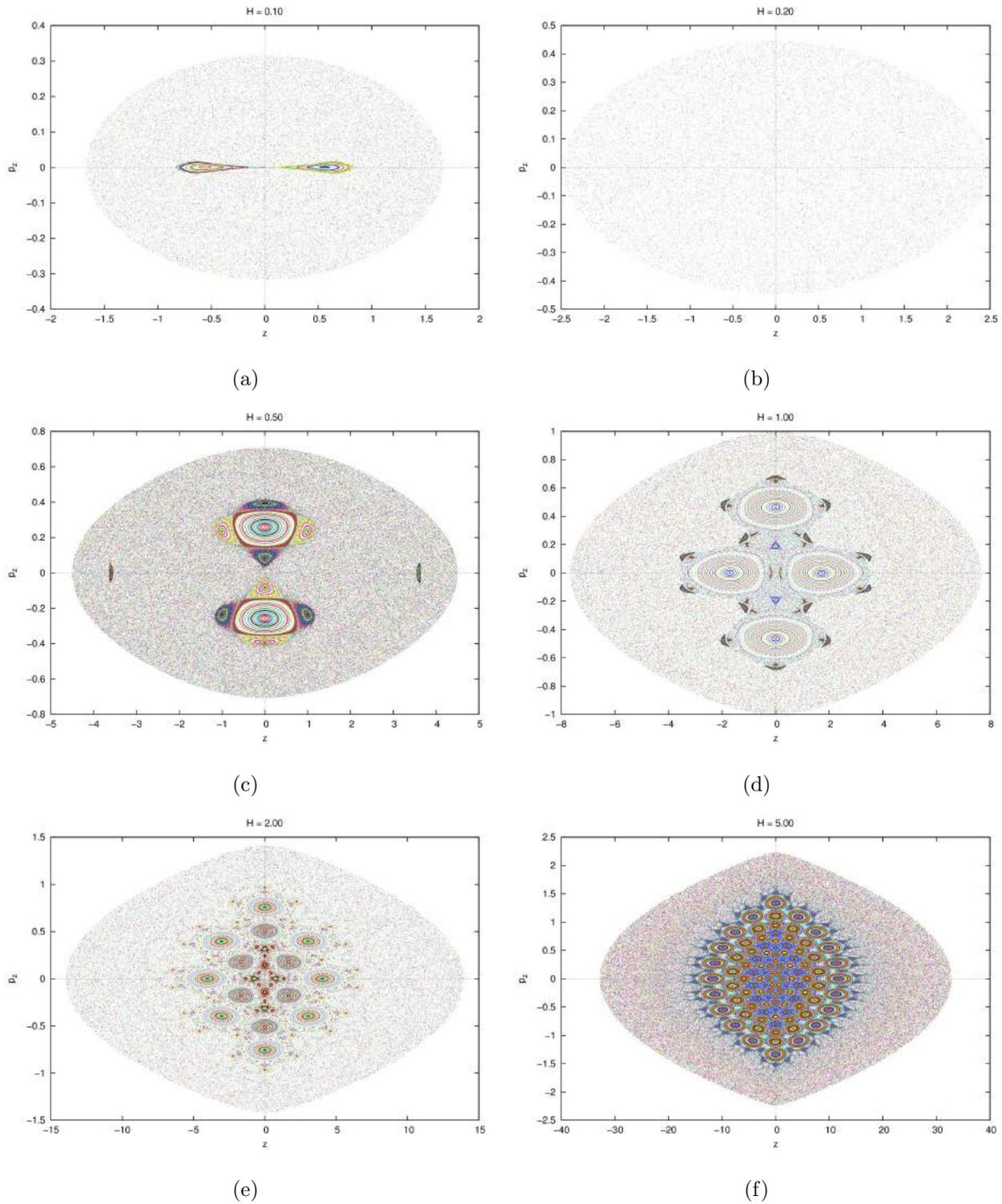


Figura 5.20: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$ e (a) $H = 0.10$, (b) $H = 0.20$, (c) $H = 0.50$, (d) $H = 1.00$, (e) $H = 2.00$, (f) $H = 5.00$.

Seguem abaixo algumas seções com $m_1 \cdot m_2 = 10$ e $R = 1$:

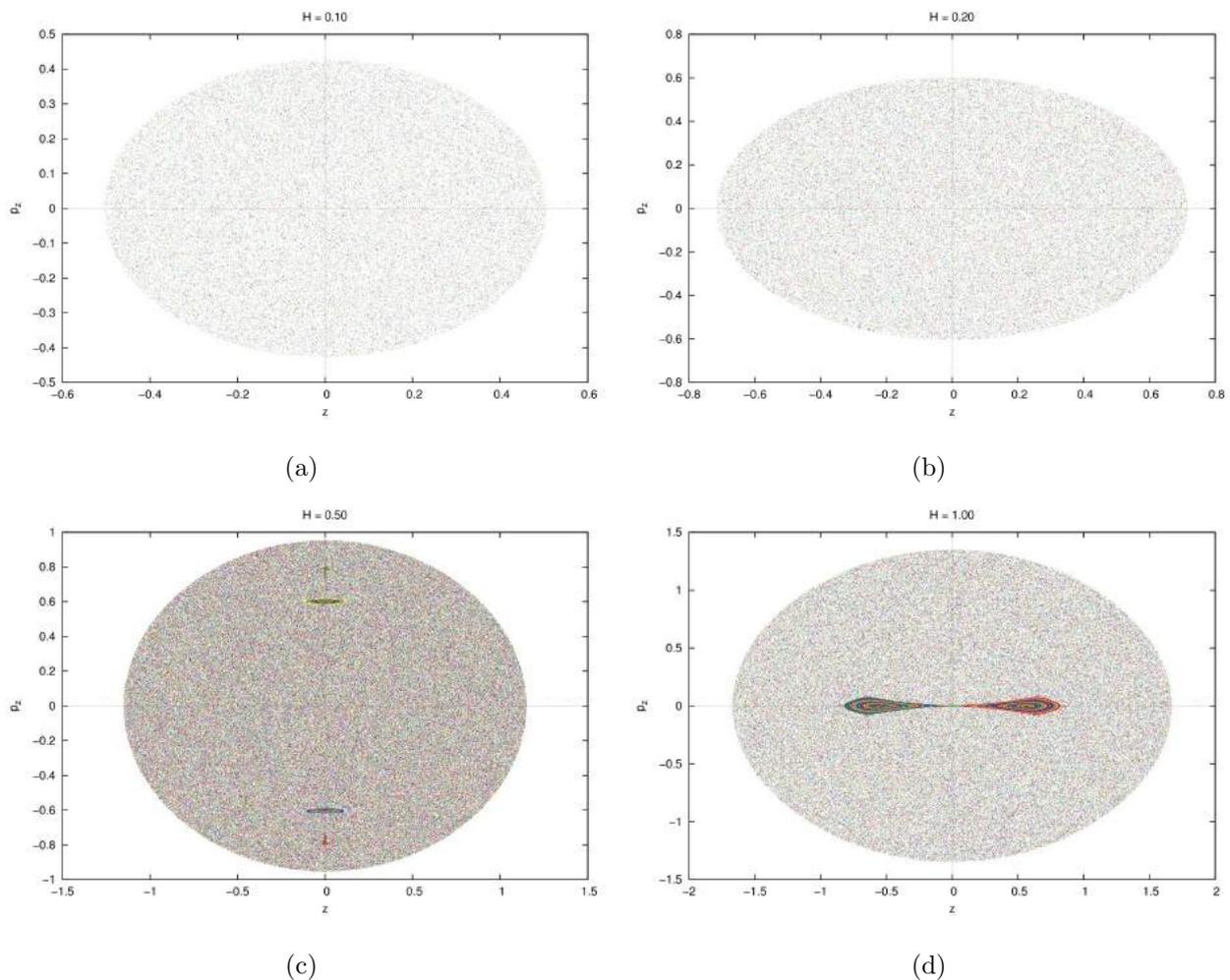


Figura 5.21: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 10$, $R = 1$ e (a) $H = 0.10$, (b) $H = 0.20$, (c) $H = 0.50$, (d) $H = 1.00$.

Notemos que da Figura 5.20 para a Figura 5.21 multiplicamos $m_1 \cdot m_2$ por um fator de 10, assim, para recuperar as seções correspondentes nos parâmetros anteriores (neste caso, dividindo $m_1 \cdot m_2$ por 10), basta dividir também H por 10, que assim obtemos que 5.21(d) é a correspondente de 5.22(d) e as correspondentes das outras são as seções de níveis de energia $H = 0.01$ (5.21(a)), $H = 0.02$ (5.21(b)) e $H = 0.05$ (5.21(c)) (não mostradas).

Em suma, ao aumentarmos a energia H a partir de certo valor o número de

ilhas aumenta, com uma região caótica cada vez maior cercado essas ilhas.

No sentido contrário, se diminuirmos a cada vez mais a energia, as seções aqui mostradas não dizem muita coisa, além do fato de que, em algumas delas, não há a presença de órbitas periódicas ou quase-periódicas. Podemos, no entanto, ver as seções $\Sigma_E = \{(z, p_z) \mid \psi = \pi, p_\psi > 0 \text{ e } H = E \text{ constante}\}$, para obtermos informações complementares, visto que as seções não são globais.

5.2.2 Comparação entre as seções em $\psi = 0$ e $\psi = \pi$

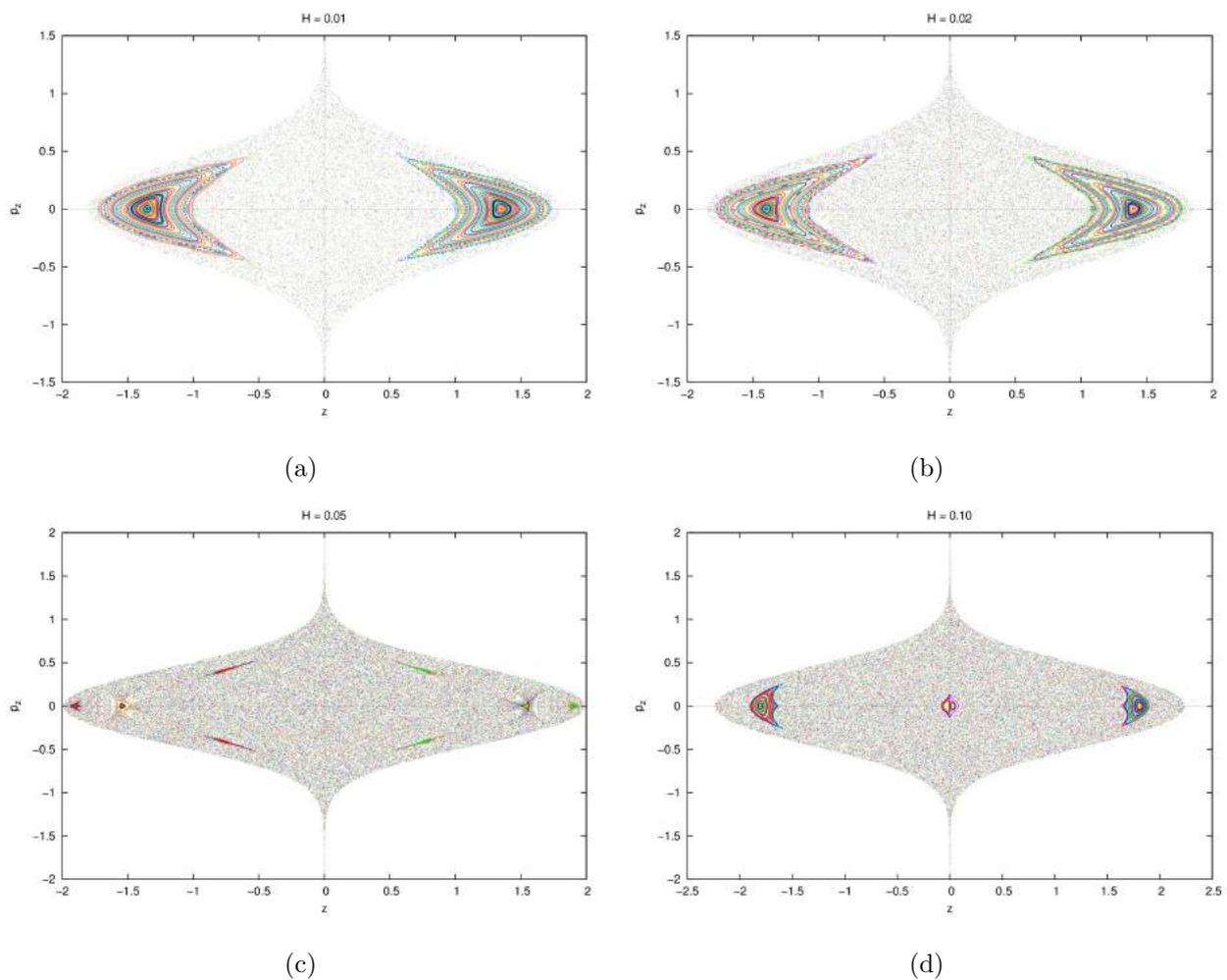


Figura 5.22: Seções de Poincaré (agora em $\psi = 0$) para o sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$ e (a) $H = 0.01$, (b) $H = 0.02$, (c) $H = 0.05$, (d) $H = 0.10$.

Notemos que, comparando as seções $\{(z, p_z) \mid \psi = 0, p_\psi > 0\}$ e $\{(z, p_z) \mid \psi = \pi, p_\psi > 0\}$, podemos perceber que na seção em $\psi = 0$ capturamos o aparecimento de duas órbitas periódicas a mais (e uma ilha de órbitas quase-periódicas cercado cada uma delas).

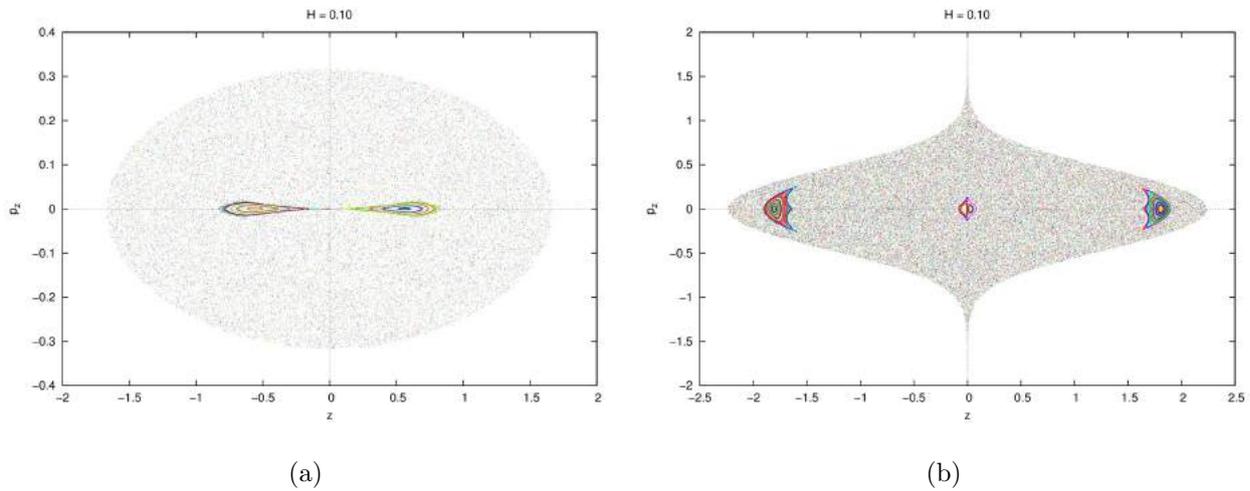


Figura 5.23: Seções de Poincaré para o sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$, $H = 0.10$ e (a) em $\{(z, p_z) \mid \psi = \pi, p_\psi > 0\}$, (b) em $\{(z, p_z) \mid \psi = 0, p_\psi > 0\}$.

Vejamos projeções de duas órbitas quase-periódicas, próximas de centros de ilhas da seção $\{(z, p_z) \mid \psi = 0, p_\psi > 0\}$, uma em $z = 0.07$ e outra em $z = 1.81$:

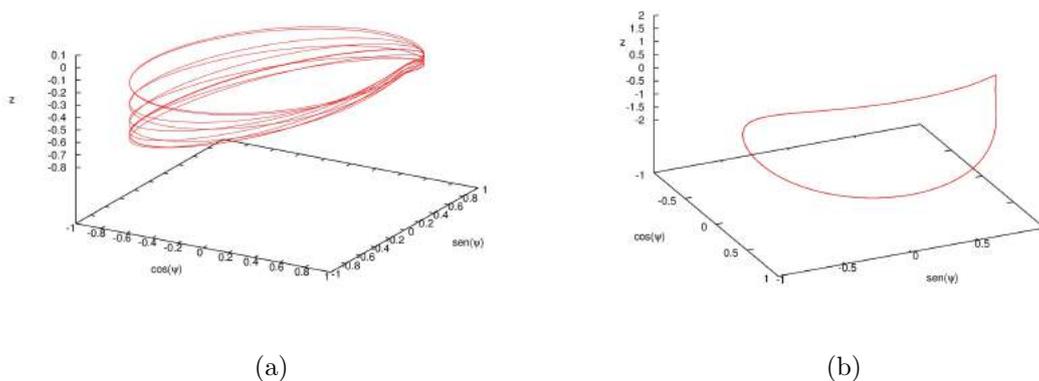


Figura 5.24: Órbitas do sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$, $H = 0.10$ sobre o cilindro com coordenadas $x = \cos(\psi)$, $y = \sin(\psi)$ e z ; com condições iniciais $\psi = 0$, $p_z = 0$, [(a) $z = 0.07$, (b) $z = 1.81$] e p_ψ calculado a partir dos dados iniciais e da energia H .

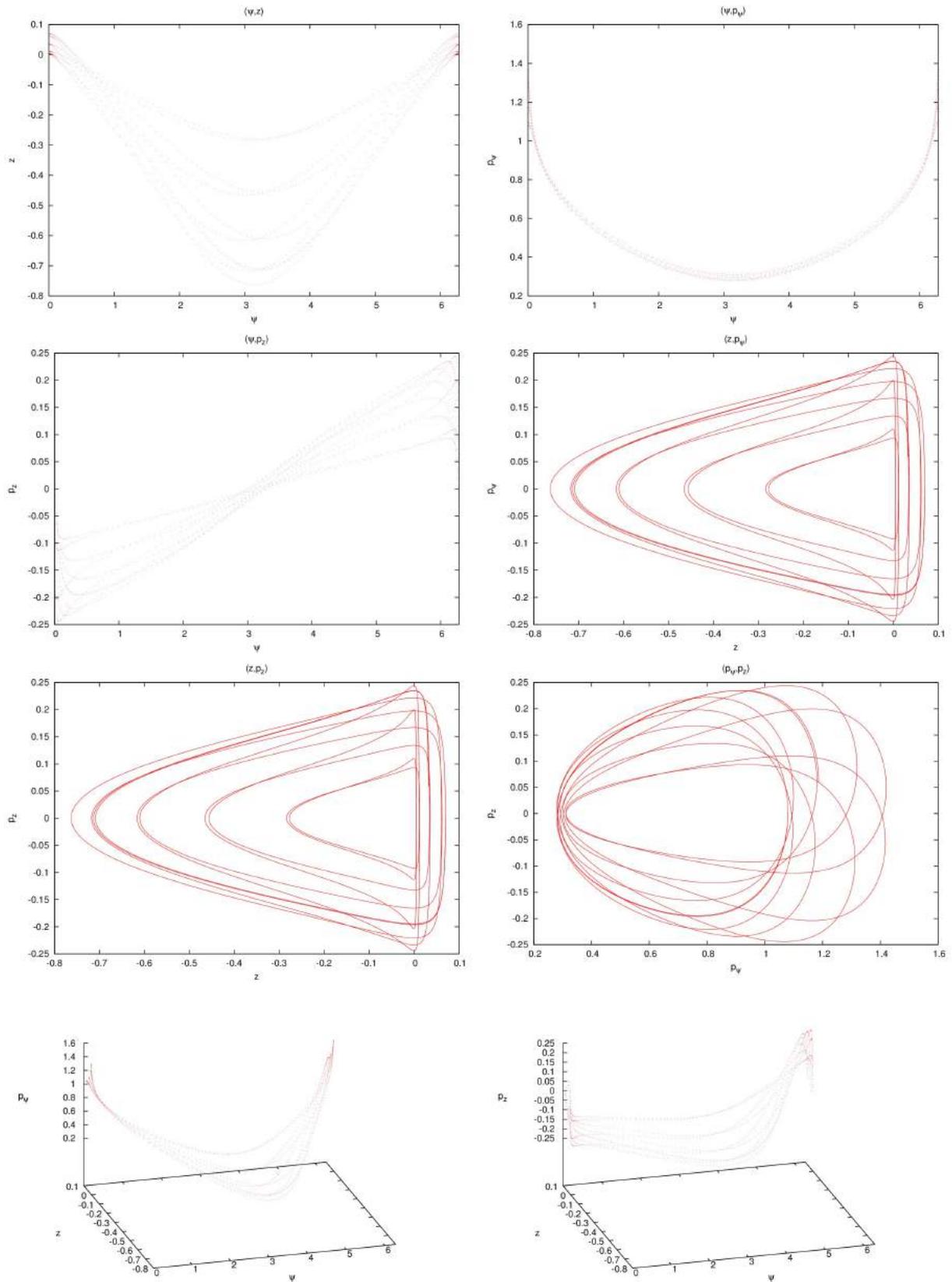


Figura 5.25: Projeções da órbita do sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$, $H = 0.10$ e condições iniciais $\psi = 0$, $p_z = 0$, $z = 0.07$ e p_ψ calculado a partir dos dados iniciais e da energia H .

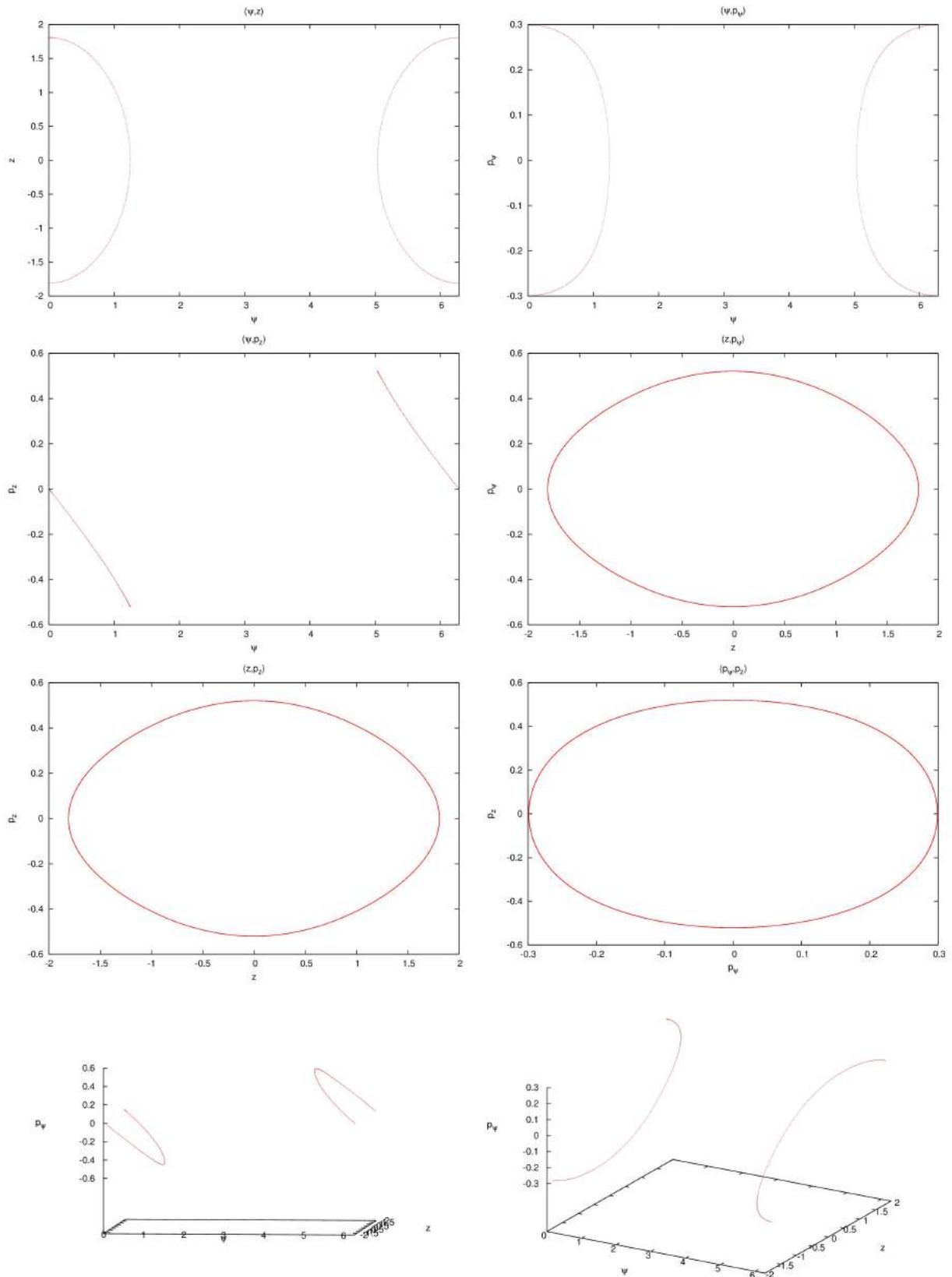


Figura 5.26: Projeções da órbita do sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$, $H = 0.10$ e condições iniciais $\psi = 0$, $p_z = 0$, $z = 1.81$ e p_ψ calculado a partir dos dados iniciais e da energia H .

O fluxo está definido em $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, um espaço quadri-dimensional. Sendo assim, podemos ver o fluxo através de suas projeções, e, além disso, podemos também projetar a variável ψ em $\cos(\psi)$ e $\sin(\psi)$ e, juntamente com a variável z , ver o fluxo no cilindro.

Podemos, através dessas projeções presentes nas Figuras 5.24, 5.25 e 5.26, notar uma diferença fundamental no comportamento destas órbitas: a órbita com condição inicial $z = 1.81$ não “dá a volta” no cilindro, isto é, seus valores de ψ ficam sempre próximos de 0, enquanto a com condição inicial $z = 0.07$ passa algumas vezes por $\psi = \pi$, em outras palavras, a órbita de $z = 1.81$ não aparece na seção $\psi = \pi$ (e, por consequência as órbitas que estão na mesma ilha na seção mostrada na Figura 5.23(b)), enquanto a órbita com $z = 0.07$ aparece. (Vale um raciocínio análogo para os valores de z negativos.) Isto explica a diferença na contagem de ilhas de órbitas quase-periódicas nas seções de mesma energia.

5.2.3 Análise das seções em $\psi = 0$

Vejamos mais algumas seções em ordem crescente de energia em $\psi = 0$ (a saber, de $H = 0.01$ a $H = 0.25$):

Observação: Em todas essas seções em $\psi = 0$, não fazemos nenhuma análise em $z = 0$. De fato, as próximas seções não possuem nenhum ponto sobre o eixo $z = 0$.

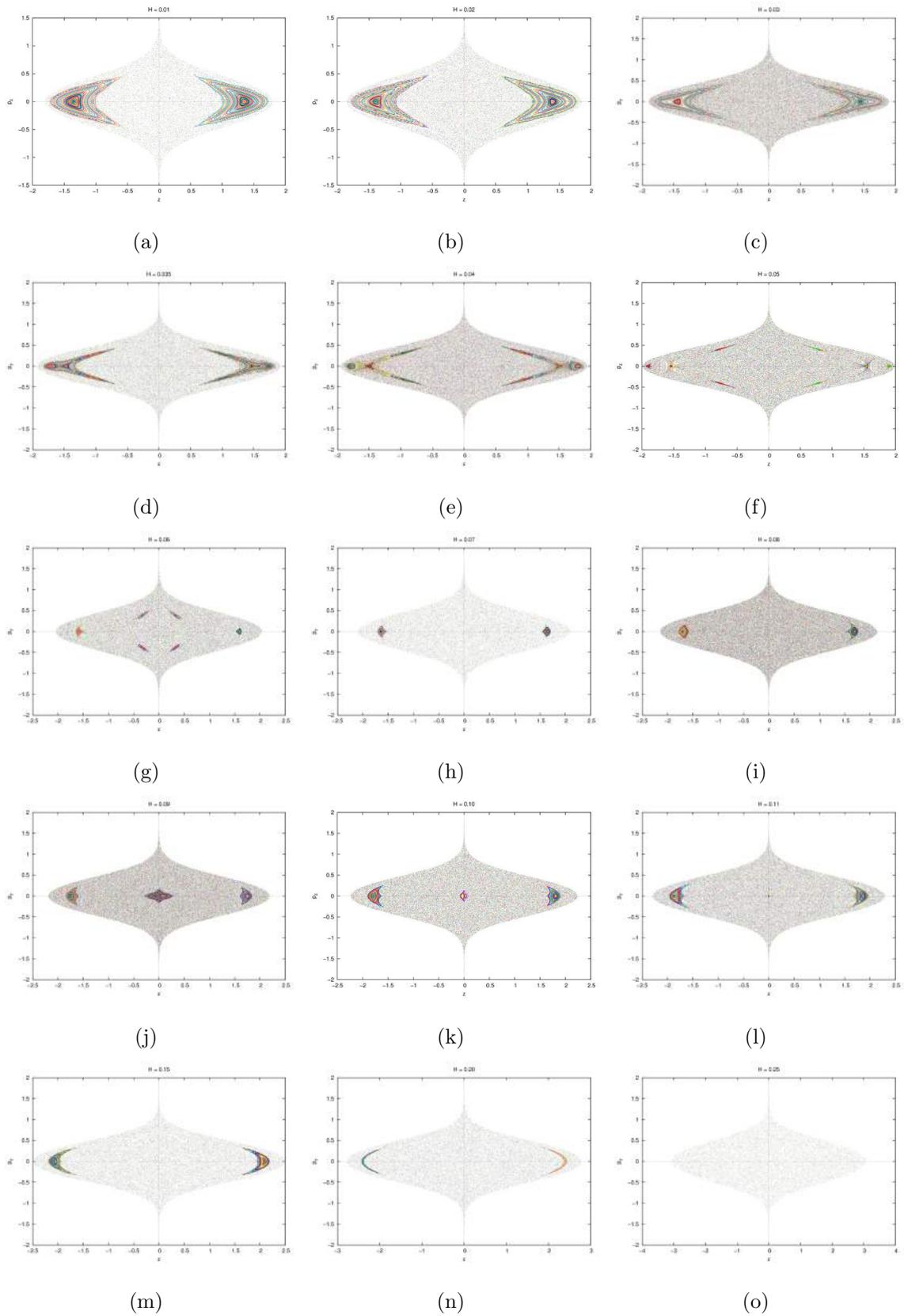


Figura 5.27: Seções de Poincaré em $\psi = 0$ para o sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$ e (a) $H = 0.01$, (b) $H = 0.02$, (c) $H = 0.03$, (d) $H = 0.035$, (e) $H = 0.04$, (f) $H = 0.05$, (g) $H = 0.06$, (h) $H = 0.07$, (i) $H = 0.08$, (j) $H = 0.09$, (k) $H = 0.10$, (l) $H = 0.11$, (m) $H = 0.15$, (n) $H = 0.20$, (o) $H = 0.25$.

Nove fenômenos merecem destaque:

- (i) A presença de órbitas que não “dão a volta” no cilindro (os toros das extremidades). Analisaremos sua relação com órbitas no plano em maiores detalhes mais adiante.
- (ii) Com a diminuição da energia ocorre o aumento do volume da região dos toros que cercam as órbitas das extremidades;
- (iii) Quebra destes toros nas extremidades:

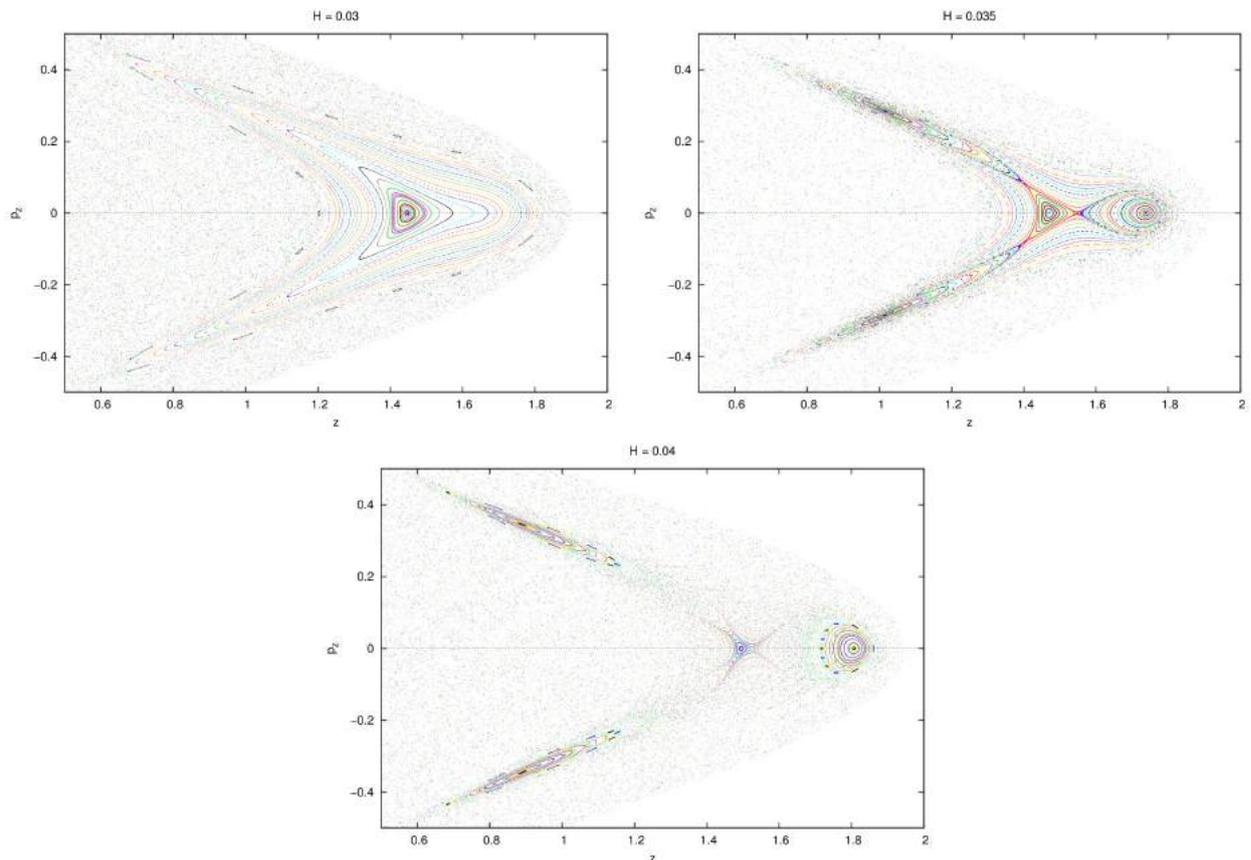


Figura 5.28: Diferentes escalas das figuras anteriores

- (iv) Desaparecimento de outras órbitas periódicas, de $H = 0.06$ para $H = 0.07$ e persistência destas como únicas órbitas até $H = 0.08$;

- (v) Reaparecimento de outras órbitas periódicas de $H = 0.08$ para $H = 0.09$ e a diminuição do volume destes toros de $H = 0.09$ até $H = 0.11$ (note que tais órbitas são aquelas que podem ser vistas na seção $\psi = \pi$ conforme visto acima na seção de $H = 0.10$).
- (vi) Desaparecimento mais uma vez de outras órbitas periódicas e quase-periódicas que não as já estudadas nas extremidades das seções;
- (vii) A quebra do toro que cercava a órbita periódica de período 1:

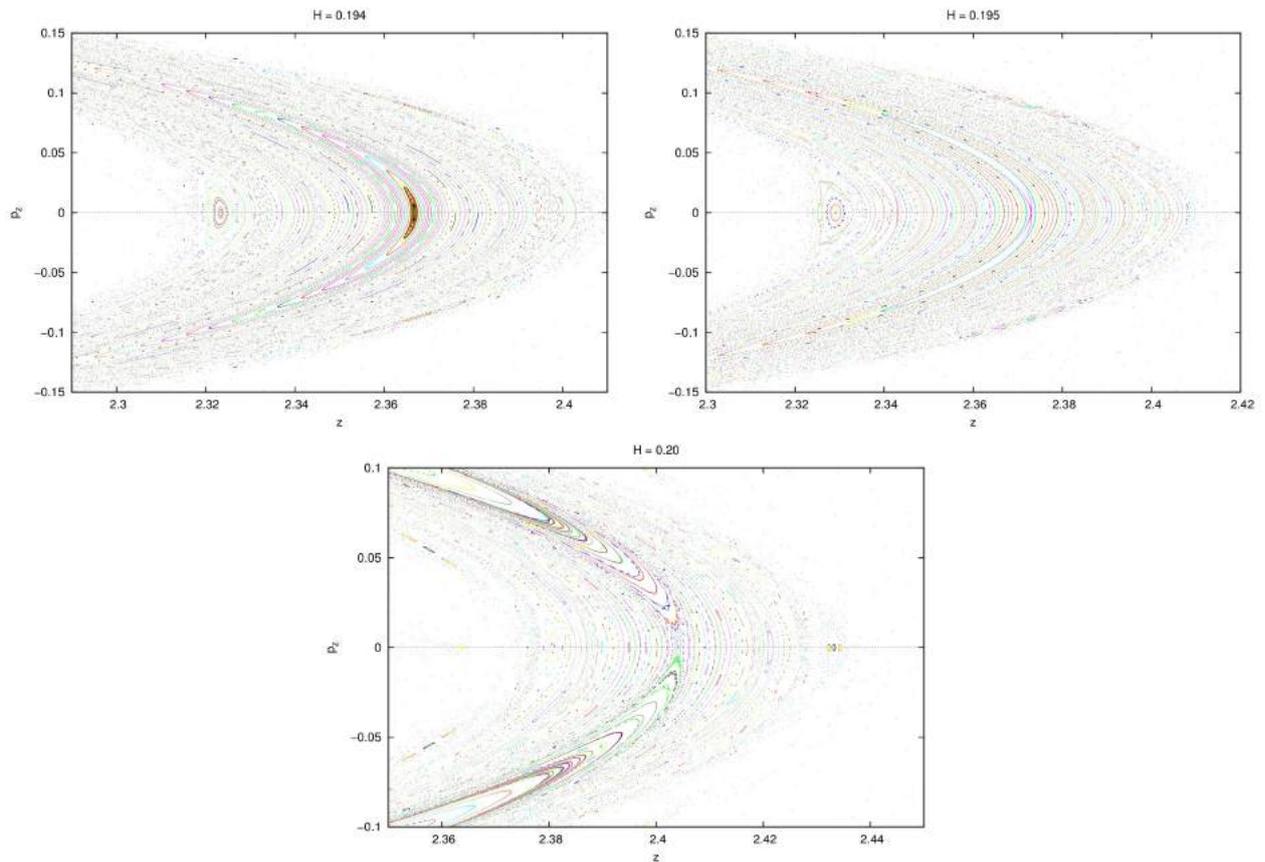


Figura 5.29: Diferentes escalas das figuras anteriores

(viii) Diminuição do volume dos toros nas extremidades:

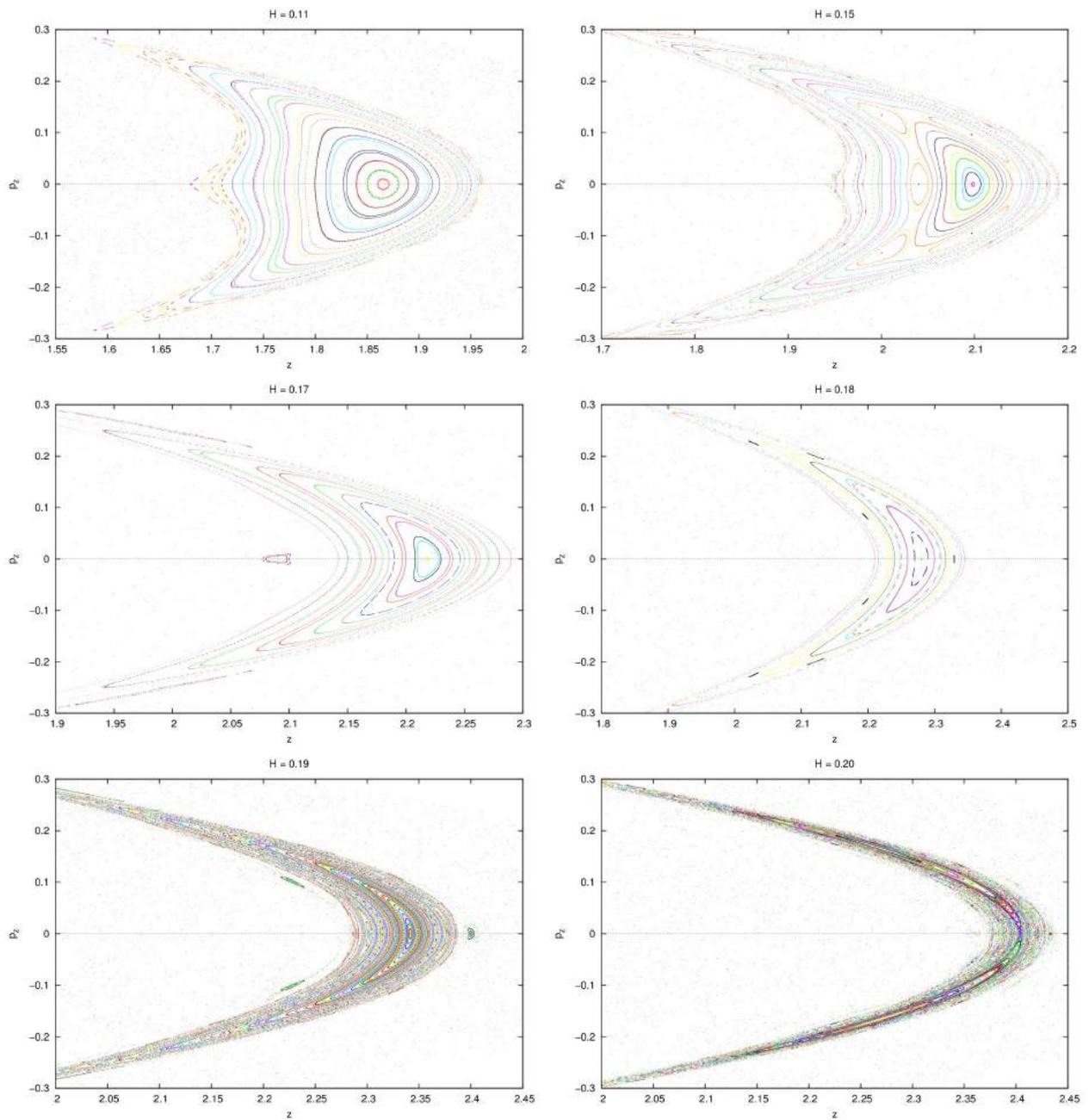


Figura 5.30: Diferentes escalas das figuras anteriores

(ix) O desaparecimento de quaisquer órbitas periódicas/quase-periódicas (conforme mostra a seção em $H = 0.25$).

5.2.4 Energias negativas

Até este ponto, analisamos somente valores de energia positivos, pois, se estivermos interessados em obter informações da dinâmica do sistema (5.2) através da comparação entre as seções $\{(z, p_z) \mid \psi = \pi, \dot{\psi} > 0\}$ e $\{(z, p_z) \mid \psi = 0, \dot{\psi} > 0\}$ temos que analisar tais valores.

Vejamos mais uma vez os gráficos do potencial restrito a $\psi = \pi$ e a $\psi = 0$:

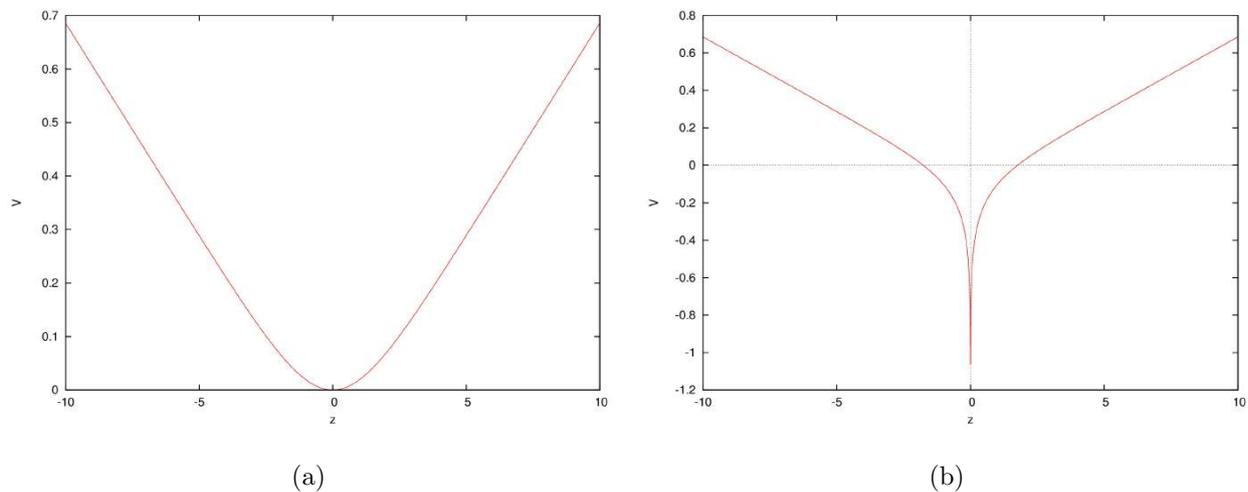


Figura 5.31: Gráficos (a) do potencial $V(z; \psi = \pi)$ e (b) do potencial $V(z; \psi = 0)$

Note que o potencial em $\psi = \pi$ não possui valores negativos, ou seja, fixado um certo nível de energia, caso este seja positivo, há a presença de órbitas que passam por $\psi = \pi$ (e a densidade delas aumenta relativamente ao volume do nível de energia conforme aumentamos a energia), mas, caso o valor de energia fixado seja negativo, não há a possibilidade da órbita passar por $\psi = \pi$.

Vejamos isto através de uma análise simples da função Hamiltoniana deste problema:

$$H = \frac{p_\psi^2}{2\mu R^2} + \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{m_1 m_2}{2\pi R} \log \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} \right). \quad (5.3)$$

Note que $\frac{p_\psi^2}{2\mu R^2} > 0$ $\frac{p_z^2}{2\mu} > 0$ de forma que, caso $H < 0$ essa negatividade vem da parte potencial, uma vez que é possível que $\frac{m_1 m_2}{2\pi R} \log \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} \right) < 0$, mas como $\frac{m_1 m_2}{2\pi R} > 0$, investiguemos, na verdade, quando $\log \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} \right) < 0$.

Sabemos que $\log \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} \right) < 0 \iff 0 < \sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} < 1$.

Note que, se $\psi = \pi$ então $\sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$.

Assim, como $\sinh^2 \frac{z}{2R} \geq 0$, podemos concluir que não existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} < 1$ (e, por consequência, $\log \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sinh^2 \frac{z}{2R} \right) < 0$) seja satisfeita, isto é, para $H < 0$ não ocorre $\psi = \pi$.

Vejam algumas seções com valores não-positivos de energia (a saber, de $H = 0$ até $H = -2$):

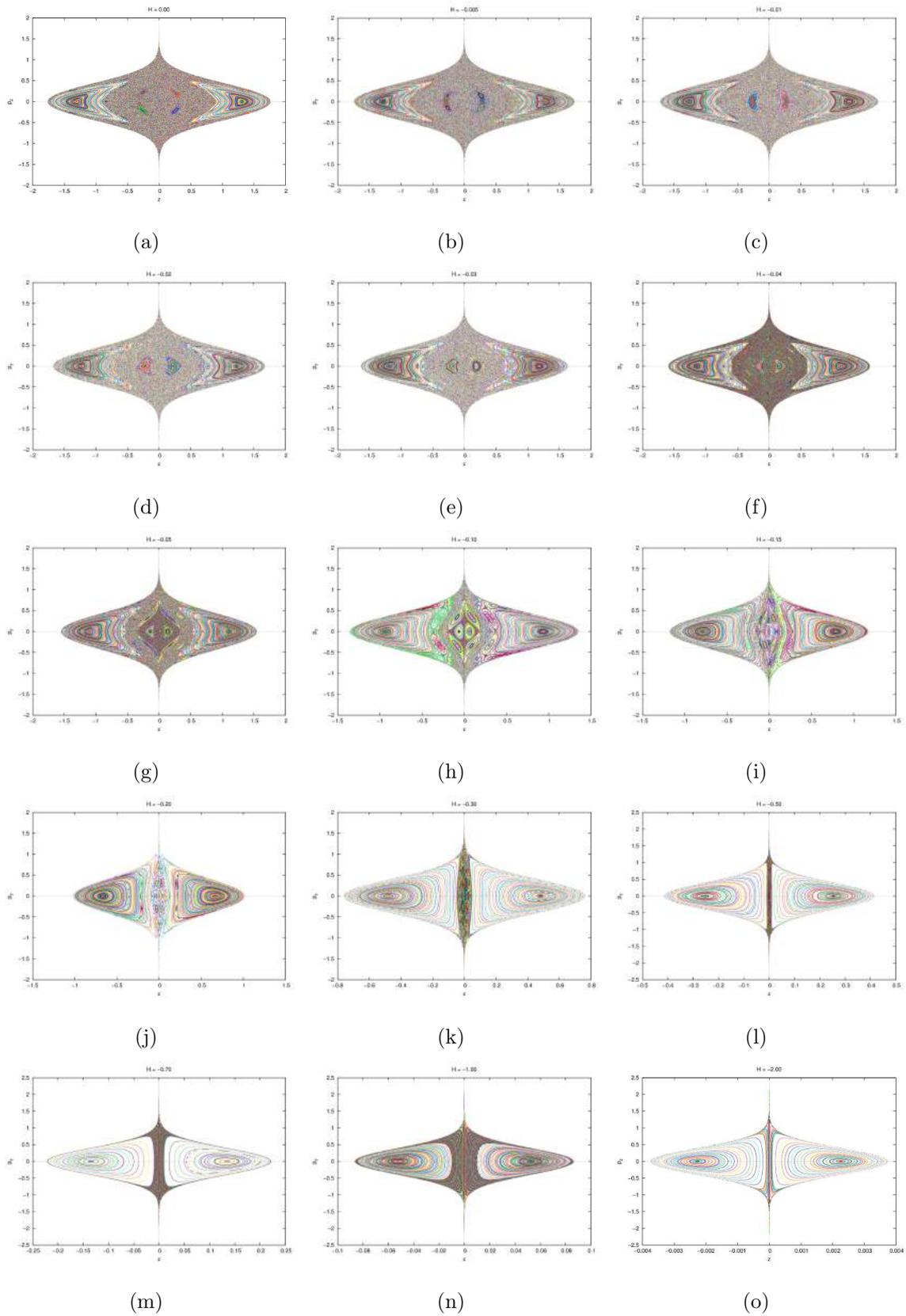


Figura 5.32: Seções de Poincaré em $\psi = 0$ para o sistema (5.2) com $m_1 \cdot m_2 = 1$, $R = 1$ e (a) $H = 0$, (b) $H = -0.005$, (c) $H = -0.01$, (d) $H = -0.02$, (e) $H = -0.03$, (f) $H = -0.04$, (g) $H = -0.05$, (h) $H = -0.10$, (i) $H = -0.15$, (j) $H = -0.20$, (k) $H = -0.30$, (l) $H = -0.50$, (m) $H = -0.70$, (n) $H = -1.00$, (o) $H = -2$.

Vamos analisá-las com mais cuidado, destacando os seguintes fatos:

- (i) O reaparecimento de outras órbitas periódicas além daquelas nas extremidades, de $H = 0.01$ para $H = 0$;
- (ii) O surgimento de mais órbitas periódicas e quase-periódicas conforme se diminui a energia:

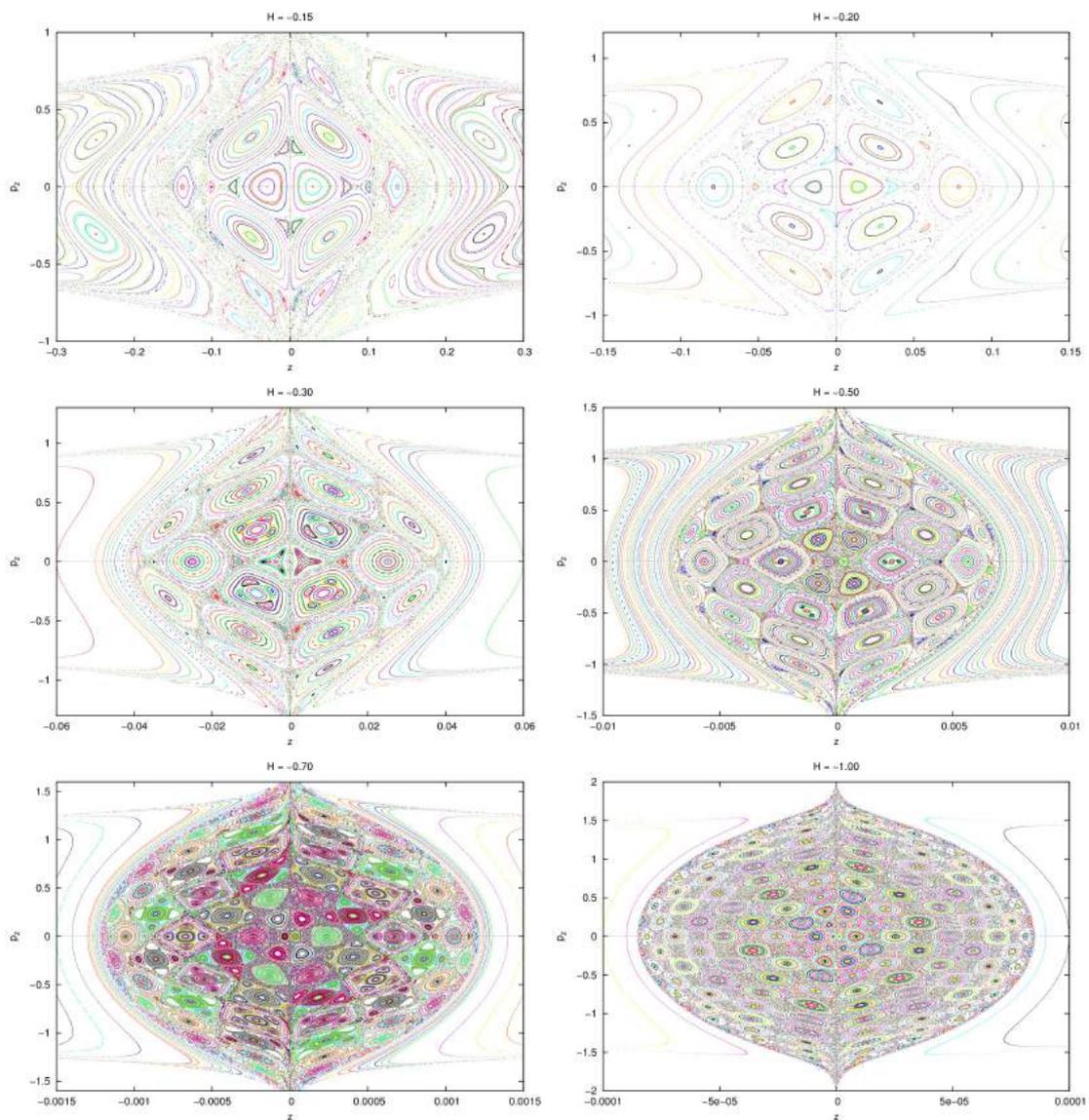


Figura 5.33: Diferentes escalas das figuras anteriores

- (iii) O aumento do volume dos toros das extremidades proporcionalmente ao volume de todo o espaço de fase;
- (iv) A semelhança que existe (e aumenta cada vez mais conforme diminuimos a energia) entre as seções no plano (esquerda) e no cilindro (direita):

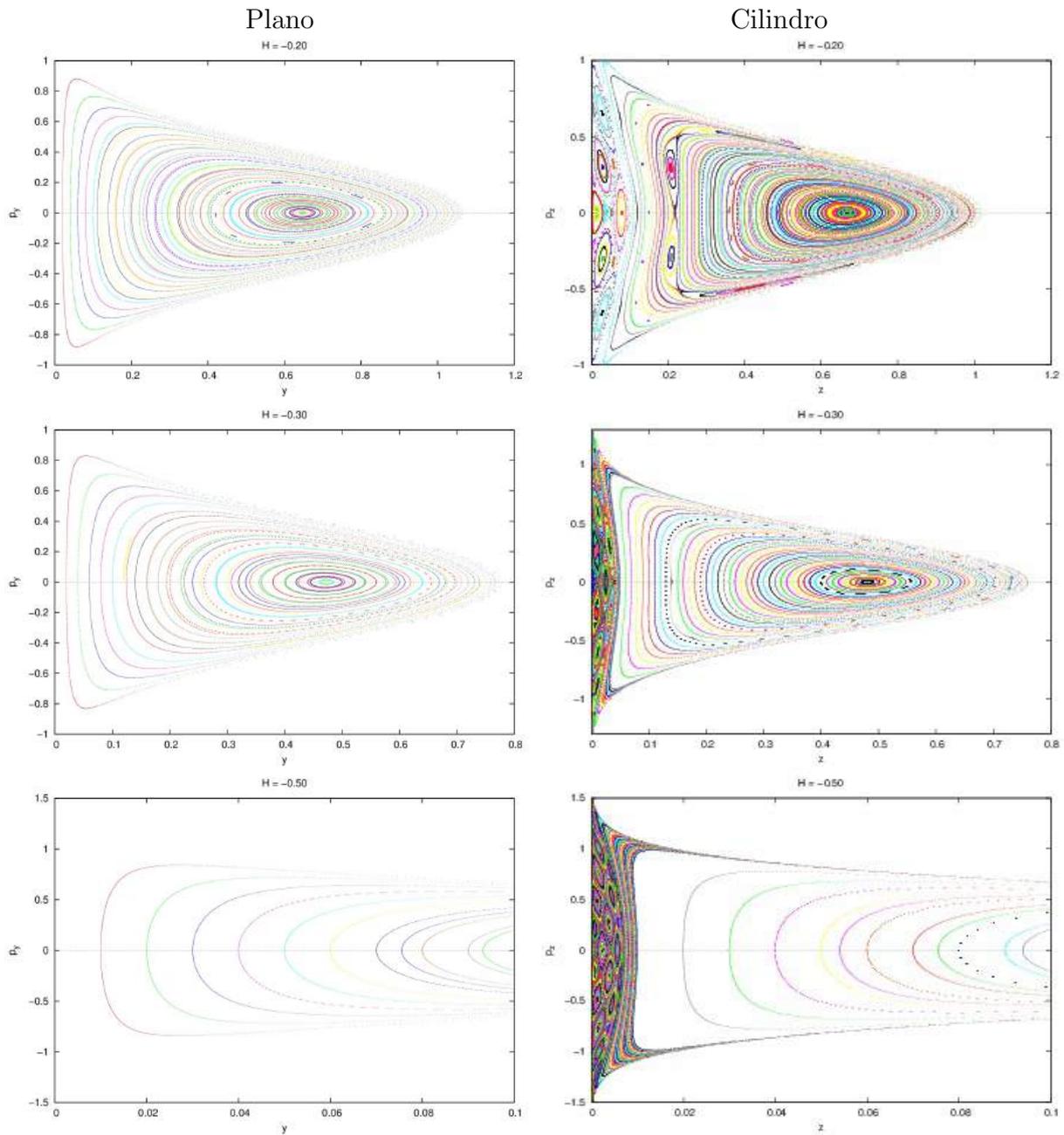


Figura 5.34: Comparação entre seções do plano e do cilindro

- (v) A diminuição da escala na posição conforme se diminui a energia, note que em $H = 0$ a escala é de $[-2, 2]$, já em $H = -2$, é de $[-0.004, 0.004]$:

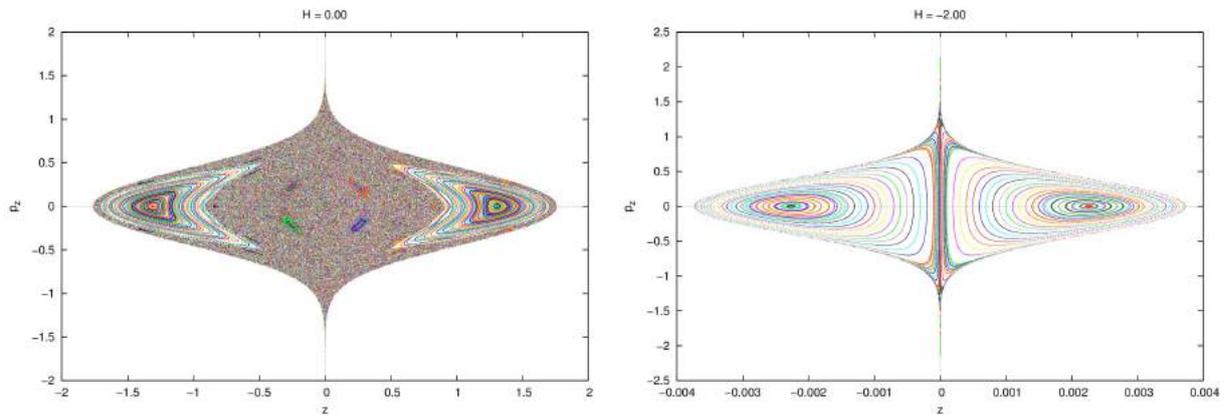


Figura 5.35: Mudança na escala conforme a energia varia

- (vi) O limite da precisão numérica do algoritmo utilizado neste trabalho na convergência de certas condições iniciais de módulo pequeno, para a detecção da diferença entre as dinâmicas do cilindro e do plano, quando a energia é muito baixa:

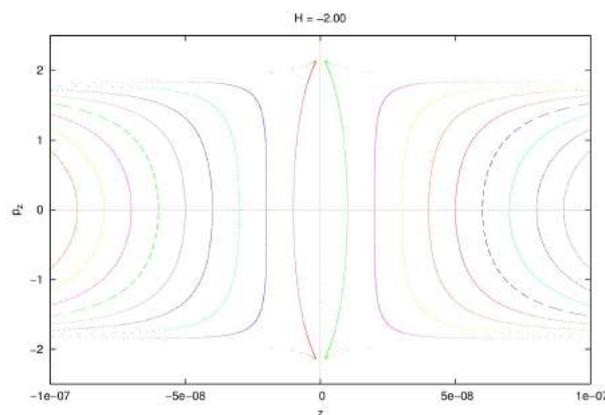


Figura 5.36: Precisão numérica

Na seção acima, para condições iniciais de z menores que 10^{-8} , o método utilizado não foi capaz de obter pontos nesta seção com os parâmetros de

tolerância passados. Note que esta seção poderia ser interpretada como uma seção do plano, pois não foram detectadas as órbitas caóticas e outras órbitas periódicas e quase-periódicas próximas a $(0, 0)$.

Como conclusão, podemos notar que conforme diminuimos a energia notamos uma semelhança com as seções do problema no plano.

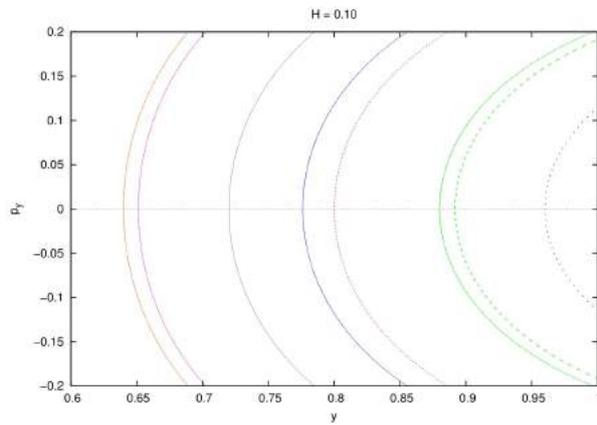
Isso se dá pois com a energia muito baixa, a partícula não consegue se movimentar por todo o cilindro, e fica “presa” numa certa região onde, dada a geometria do cilindro, esta fica com uma dinâmica próxima à de uma no plano.

Isto pode ser visto também comparando-se as seções do plano e do cilindro conforme fixamos uma parte da seção (uma janela) e diminuimos a energia.

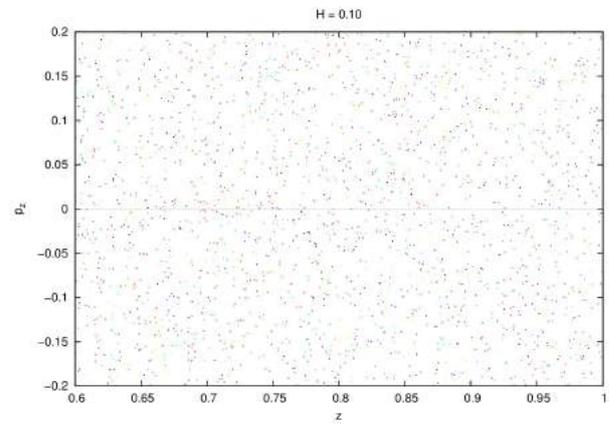
Vamos estudar as energias $H = 0.10$ e $H = -0.10$ no cilindro e no plano, fixando a janela $[0.6, 1] \times [-0.2, 0.2]$:

Plano

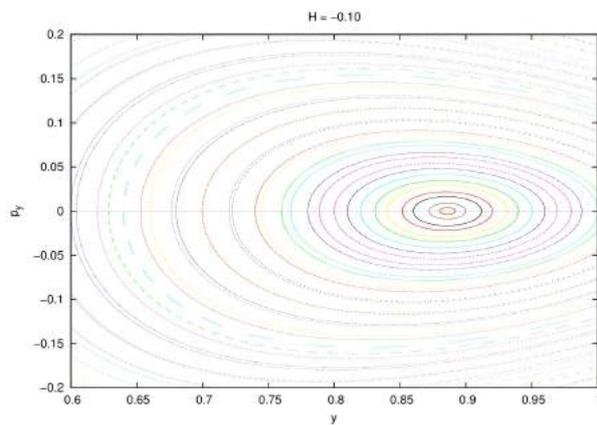
Cilindro



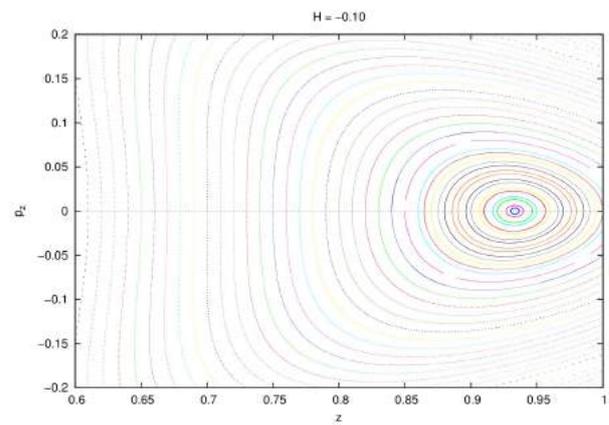
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.37: Janela $[0.6, 1] \times [-0.2, 0.2]$ nas seções do plano (a), (c) e do cilindro (b), (d) em (a), (b) $H = 0.10$ e (c), (d) $H = -0.10$.

Além disso, note também pela Figura 5.38 que o centro das ilhas se desloca para a esquerda conforme a energia abaixa, isto é, diminuindo a energia a órbita periódica tem um raio cada vez menor.

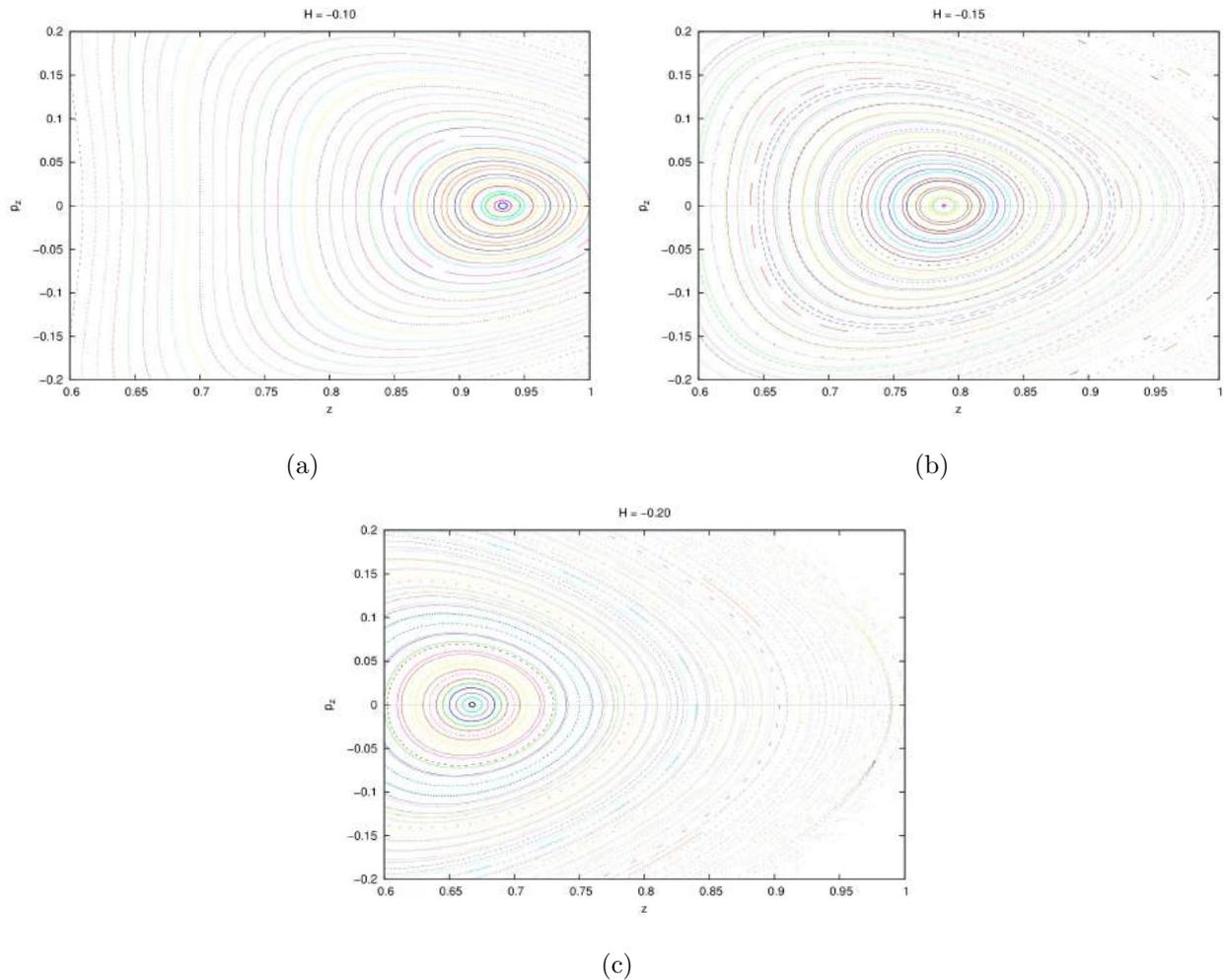


Figura 5.38: Janela $[0.6, 1] \times [-0.2, 0.2]$ nas seções do cilindro em (a) $H = -0.10$, (b) $H = -0.15$ e (c) $H = -0.20$.

Conforme podemos lembrar, o sistema de dois corpos no plano é integrável e suas seções são todas formadas por uma órbita periódica cercada por uma ilha de órbitas quase-periódicas. Já no cilindro, isto não acontece: temos a presença de caos, órbitas com periodicidade diferente de 1, pontos hiperbólicos, etc.

Mas, como vimos acima, se estamos em energias muito baixas, as seções do cilindro e do plano se assemelham, o que pode indicar que existe uma relação entre as duas dinâmicas.

Isto pode ser confirmado também por outro ponto de vista, o da Figura 5.37.

Se temos como condições iniciais algo dentro desta janela fixada $[0.6, 1.0] \times [-0.2, 0.2]$, em $H = 0.10$, podemos decidir se a dinâmica ocorre no plano ou no cilindro - pois, reparando apenas dentro dessa tal janela, a dinâmica no plano é composta por órbitas quase-periódicas, enquanto que a no cilindro, por órbitas caóticas - mas em $H = -0.10$, não somos capazes de fazer tal separação. Em outras palavras, a partícula “não sabe” se está no plano ou no cilindro quando o nível de energia é de, por exemplo, $H = -0.10$.

Capítulo 6

A Dinâmica no Cilindro Vista como uma Perturbação da Dinâmica no Plano

Neste capítulo iremos responder ao questionamento que surgiu no final do capítulo anterior. Iremos notar como a dinâmica no cilindro pode ser vista como uma perturbação da dinâmica do plano, ou então, como podemos aproximar a dinâmica no cilindro pela dinâmica no plano.

Sabemos que $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} z^i$, para $|z| < 1$ ([28, 31]).

Assim, $\log(1-\epsilon z) = -\sum_{i=1}^n \frac{\epsilon^i}{i} z^i$, para $|\epsilon z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\epsilon}$.

Relembrando algumas contas do Capítulo 2, vimos (Equação (2.7)) que a função Hamiltoniana dos vórtices (que, no caso das massas, é a função potencial) pode ser escrita como

$$H_0 = \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |z_k - z_l - 2\pi r n|^2,$$

e ser somada com constantes sem que a dinâmica em questão seja afetada.

Vamos aqui utilizar a identificação Hamiltoniana dos vórtices \longleftrightarrow potencial das massas com o objetivo de escrever a dinâmica no cilindro como uma perturbação da dinâmica do plano:

Vamos nos restringir, sem perda de generalidade, à dinâmica de duas massas para uma maior clareza notacional.

Temos que, no caso das massas, o potencial (somado com uma certa constante) é dado por

$$U = \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \log |\zeta_1 - \zeta_2 - 2\pi R n|^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \log (2\pi R n)^2.$$

Se denotarmos por $\epsilon = \frac{1}{R}$ e $\zeta_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, então

$$U = \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \left[\log((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) - \frac{\epsilon^2}{12}((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right]. \quad (6.1)$$

Vejamos que o Teorema KAM (Apêndice E) se aplica neste caso.

Baseado em [29], sabemos que, na dinâmica na geometria intrínseca do plano, temos que a órbita periódica (e centro das ilhas nas seções apresentadas no Capítulo 5) é dada pelo mínimo do potencial efetivo

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2Mr^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \log(r^2),$$

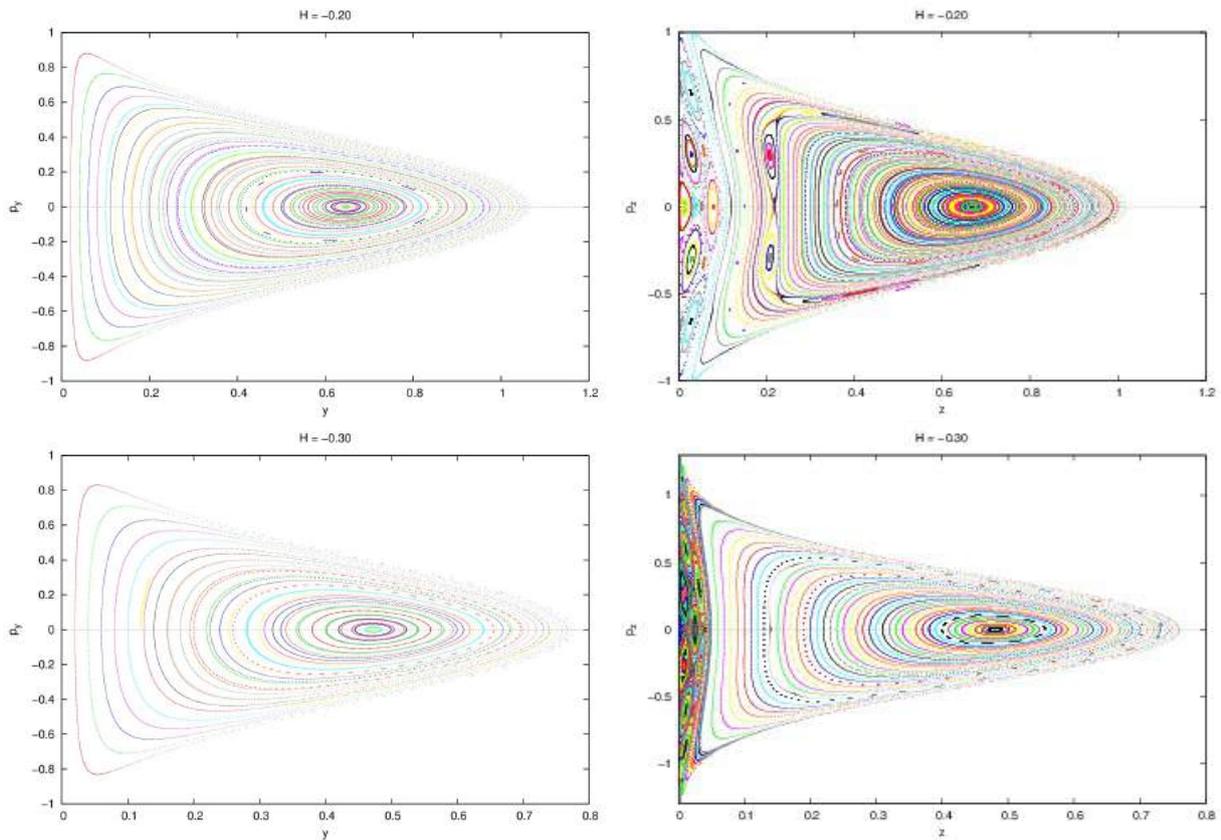
que ocorre em $r = \sqrt{\frac{4\pi L^2}{\gamma M m_1 m_2}}$.

Como as seções apresentadas do plano são todas feitas em $x = 0$, temos que, nelas, $r = y$.

Logo, os centros das ilhas apresentadas nas seções se localizam em

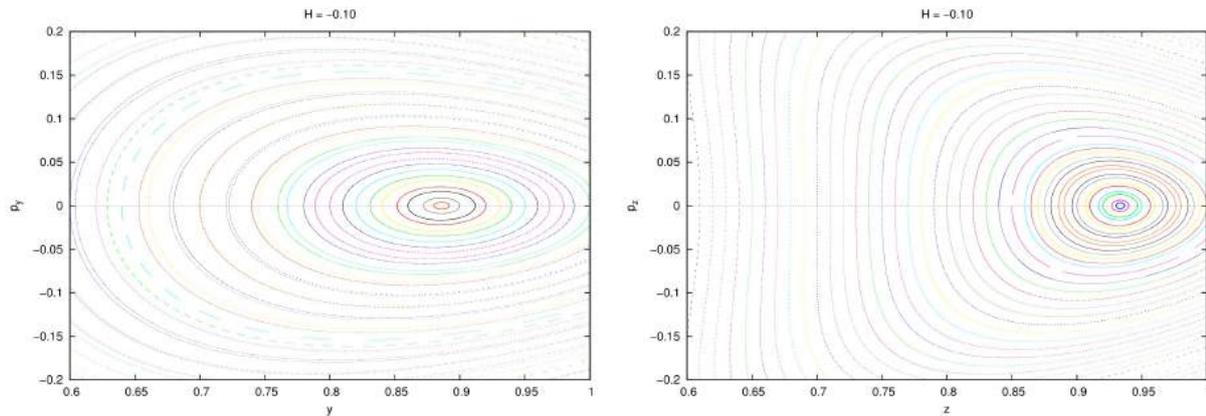
$$y = \sqrt{\frac{4\pi L^2}{\gamma M m_1 m_2}}.$$

Tomemos como exemplo primeiramente as seções em $H = -0.20$ e em $H = -0.30$ no plano e no cilindro:



Note que, de fato, os toros são levemente deformados e preenchem a maioria do espaço no sentido de que a região que não é preenchida por toros diminui conforme se diminui a perturbação.

Além disso, vamos observar mais atentamente as seções em $H = -0.10$:



Observemos que, além da deformação dos toros, podemos notar também que a órbita periódica no cilindro é próxima à do plano.

Para podermos aplicar o Teorema KAM teríamos duas estratégias a seguir:

- (I) Considerar a trajetória do sistema reduzido sob o ponto de visto de fluxos e calcular as variáveis de ação-ângulo para o problema não-perturbado (2-corpos no plano) (Apêndices D e E);
- (II) Considerar o mapa de Poincaré e aplicar o Teorema KAM sob o ponto de vista de mapa do plano para o plano (Apêndice E).

A abordagem (I) visa adaptar um resultado já presente na literatura ([11, 18, 19]), mas tal abordagem falha, pois para calcular as variáveis de ação faz-se necessário o cálculo de integrais que não foram possíveis de ser escritas na forma de funções elementares; mesmo a adaptação *ipsis literis* do método presente em [19] não é possível pelo fato de as funções a serem integradas serem diferentes e não cumprirem as hipóteses dos teoremas utilizados.

Já a abordagem (II) falha em não poder ser calculada analiticamente, pois não temos expressão analítica para o mapa de Poincaré.

Conclusão e Perspectivas

Podemos concluir através deste trabalho que o problema fundamental da mecânica celeste em sua maior simplicidade - o problema de n -corpos com $n = 2$ - falha em poder ser resolvido analiticamente. De fato, através das seções de Poincaré aqui apresentadas, vemos que este problema não é integrável (há a presença de caos).

Foram utilizadas ferramentas da área de dinâmica de vórtices, e isto também é interessante de ser notado, pois, a princípio, são duas áreas distintas que são abordadas com ferramentas diferentes da mecânica clássica. Em geral, a dinâmica de vórtices é encarada como um problema Hamiltoniano, descrito por um sistema de equações de primeira ordem, enquanto a mecânica celeste é primeiramente encarada como Lagrangiana descrita por equações de segunda ordem - no entanto, podemos perceber que as duas áreas têm muito em comum e podem ser vistas sob um ponto de vista em comum.

Como perspectivas, temos a aplicação do mesmo tipo de estudo a outras superfícies. Existem na literatura muitos trabalhos sobre o problema de n -corpos sobre superfícies ([1, 7, 10, 24, 26, 29]). No entanto, tais estudos ainda estão longe do esgotamento, e ainda existem muitas superfícies a serem exploradas. Além disso, temos também a transposição das dificuldades encontradas para a aplicação do Teorema KAM descritas no Capítulo 6.

Referências

- [1] H. Aref. Point vortex dynamics: A classical mathematics playground. *Journal of Mathematical Physics*, 48(6), 2007.
- [2] H. Aref and M. A. Stremler. On the motion of three point vortices in a periodic strip. *Journal of Fluid Mechanics*, 314:1–25, 1996.
- [3] V. I. Arnold, A. Weinstein, and K. Vogtmann. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 1989.
- [4] H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci, and Peer-Timo Bremer. The helmholtz-hodge decomposition - a survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 19(8):1386–1404, 2013.
- [5] H. Bhatia, V. Pascucci, and P.-T. Bremer. The natural helmholtz-hodge decomposition for open-boundary flow analysis. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (TVCG)*, 99:1566–1578, 2014.
- [6] S. Boatto and D. Crowdy. *Point-vortex dynamics*. Encyclopedia of Mathematical Physics, 1 edition, 2006.
- [7] S. Boatto, D. Dritschel, and R. Schaefer. N-body dynamics on closed

surfaces. the axioms of mechanics. to appear in the royal society publishing, 2015.

- [8] S. Boatto and C. Simó. Thomson's heptagon: A case of bifurcation at infinity. *Physica D, Nonlinear phenomena*, 237:2051–2055, 2008.
- [9] W. Bolyai and J. Bolyai. Geometrische untersuchungen. *Hrsg. P. Stäckel, Teubner*, 1913.
- [10] A. V. Borizov, I. S. Mamaev, and A. A. Kilin. Two-body problem on a sphere. reduction, stochasticity, periodic orbits. *eprint arXiv:nlin/0502027*, February 2005.
- [11] M. Born. *The Mechanics of the Atom*. F. Ungar Pub. Co., 1st edition edition, 1960.
- [12] R. Bryant. An introduction to lie groups and symplectic geometry, June and July 1991.
- [13] M. P. Do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Universitext. Springer-Verlag, 1 edition, 2000.
- [14] R. Cipelatti. *Cálculo Avançado*. Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro-RJ-Brasil, 4a edição, 2014.
- [15] F. Diacu. *Relative Equilibria of the Curved N-Body Problem*, volume 1 of *Atlantis Studies in Dynamical Systems*. Atlantis Press, 2012.
- [16] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, V. 19 GSM/19. American Mathematical Society, 1998.

- [17] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics 71. Springer-Verlag New York, 2 edition, 1992.
- [18] S. Ferraz-Mello. *Canonical Perturbation Theories: Degenerate Systems and Resonance*. Astrophysics and Space Science Library 345. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2007.
- [19] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Company, 2 edition, 1980.
- [20] E. Hairer, G. Wanner, and S. P. Nørsett (auth.). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics 8. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition, 1993.
- [21] D. Hally. Stability of streets of vortices of surfaces of revolution with a reflection symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, 21:211–217, 1980.
- [22] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 218. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2012.
- [23] N. I. Lobachevsky. The new foundations of geometry with full theory of parallels [in russian], 1835-1838. *In Collected Works, v. 2, GITTL*, page 159, 1949.
- [24] R. S. Loiola. Dinâmica de vórtices e massas sobre superfícies hiperbólicas. Dissertação de mestrado, Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016.
- [25] J. D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

- [26] J. Montaldi, A. Soulière, and T. Tokieda. Vortex dynamics on a cylinder. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2(3):417–430, 2003.
- [27] T. S. Parker and L. O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer, corrected edition, 1989.
- [28] H. A. Priestley. *Introduction to Complex Analysis*. Oxford University Press, USA, 2 edition, 2003.
- [29] R. G. Schaefer. A dinâmica de n corpos sobre superfícies: um exemplo para 2 corpos. Dissertação de mestrado, Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.
- [30] C. Simó. Comunicação particular.
- [31] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, 2003.
- [32] Y. M. Strzhemechny. Two body problem. disponível em <http://personal.tcu.edu/ystrzhemechn/classes/2013/fall/lectures/3-central.ppt>. acessado em 07/07/2016.
- [33] M. Troyanov. On the hodge decomposition in \mathbb{R}^n . *Moscow Mathematical Journal*, 9(4):899–926, October-December 2009.
- [34] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1st ed. 1971. 2nd printing edition, 2010.

Apêndice A

Algumas contas

A.1 Equação (2.8)

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |z_k - z_l - 2\pi r n|^2 - \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2\pi r n|^2 \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2r|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l [\log(z_k - z_l - 2\pi r n)(\bar{z}_k - \bar{z}_l - 2\pi r n) - \log |2\pi r n|^2] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2r|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l [\log(z_k - z_l - 2\pi r n) - \log(2\pi r n) \\
&\quad + \log(\bar{z}_k - \bar{z}_l - 2\pi r n) - \log(2\pi r n)] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2r|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \left[\log \left(\frac{z_k - z_l}{2\pi r n} - 1 \right) + \log \left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2\pi r n} - 1 \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l [\log(z_k - z_l) + \log(\bar{z}_k - \bar{z}_l)] - \frac{1}{4\pi} \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2r|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log \left(\frac{z_k - z_l}{2\pi r n} - 1 \right) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log \left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2\pi r n} - 1 \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l [\log(z_k - z_l) + \log(\bar{z}_k - \bar{z}_l)] - \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \log |2r|^2 \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \left[\log \left(\prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{z_k - z_l}{2\pi r n} - 1 \right) \right) + \log \left(\prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2\pi r n} - 1 \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \log(z_k - z_l) + \log(\bar{z}_k - \bar{z}_l) - \log 2r - \log 2r \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \left[\log \left(\left(\frac{z_k - z_l}{2r} \right) \cdot \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{z_k - z_l}{2\pi r n} - 1 \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \log \left(\left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2r} \right) \cdot \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2\pi r n} - 1 \right) \right) \right] \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \left[\log \left(\left(\frac{z_k - z_l}{2r} \right) \cdot \prod_{n \geq 1} \left(1 - \left(\frac{z_k - z_l}{2\pi r n} \right)^2 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \log \left(\left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2r} \right) \cdot \prod_{n \geq 1} \left(1 - \left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2\pi r n} \right)^2 \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \left[\log \left(\operatorname{sen} \left(\frac{z_k - z_l}{2r} \right) \right) + \log \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_l}{2r} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{k<l} \Gamma_k \Gamma_l \log \left| \operatorname{sen} \left(\frac{z_k - z_l}{2r} \right) \right|^2
\end{aligned}$$

$$* \left(\frac{x}{n} - 1 \right) \left(\frac{x}{(-n)} - 1 \right) = \left(\frac{x}{n} - 1 \right) \left(-\frac{x}{n} - 1 \right) = 1 - \left(\frac{x}{n} \right)^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.2 Equação (2.9)

$$\begin{aligned}
\left| \operatorname{sen} \left(\frac{z_k - z_l}{2r} \right) \right|^2 &= \operatorname{sen} \left(\frac{z_k - z_l}{2r} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\overline{z_k - z_l}}{2r} \right) \\
&= \operatorname{sen} \left(\frac{(x_k - x_l) + i(y_k - y_l)}{2r} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(x_k - x_l) - i(y_k - y_l)}{2r} \right) \\
&= \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \cos \left(\frac{i(y_k - y_l)}{2r} \right) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen} \left(\frac{i(y_k - y_l)}{2r} \right) \cos \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \right] \\
&\quad \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \cos \left(\frac{i(y_k - y_l)}{2r} \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen} \left(\frac{i(y_k - y_l)}{2r} \right) \cos \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \right] \\
&= \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \cosh \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \right. \\
&\quad \left. + i \operatorname{senh} \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \cos \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \right] \\
&\quad \left[\operatorname{sen} \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \cosh \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \right. \\
&\quad \left. - i \operatorname{senh} \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \cos \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \right] \\
&= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \cosh^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \\
&\quad + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \cos^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \\
&= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \left(1 + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \right) \\
&\quad + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \left(1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \right) \\
&= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \\
&\quad + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right) \\
&= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_k - x_l}{2r} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{y_k - y_l}{2r} \right),
\end{aligned}$$

A.3 Equação (3.5)

$$\begin{aligned}
ds_M^2 &= m_1(R^2 d\varphi_1^2 + dz_1^2) + m_2(R^2 d\varphi_2^2 + dz_2^2) \\
&= m_1 \left(R^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\psi}} d\bar{\psi} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} d\psi \right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial z_1}{\partial z} dz \right)^2 \right) \\
&\quad + m_2 \left(R^2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{\psi}} d\bar{\psi} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} d\psi \right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial z_2}{\partial z} dz \right)^2 \right) \\
&= m_1 \left(R^2 \left(d\bar{\psi} - \frac{m_2}{M} d\psi \right)^2 + \left(d\bar{z} - \frac{m_2}{M} dz \right)^2 \right) \\
&\quad + m_2 \left(R^2 \left(d\bar{\psi} + \frac{m_1}{M} d\psi \right)^2 + \left(d\bar{z} + \frac{m_1}{M} dz \right)^2 \right) \\
&= m_1 \left(R^2 \left(d\bar{\psi}^2 - \frac{2m_2}{M} d\bar{\psi} d\psi + \frac{m_2^2}{M^2} d\psi^2 \right) + \left(d\bar{z}^2 - \frac{2m_2}{M} d\bar{z} dz + \frac{m_2^2}{M^2} dz^2 \right) \right) \\
&\quad + m_2 \left(R^2 \left(d\bar{\psi}^2 + \frac{2m_1}{M} d\bar{\psi} d\psi + \frac{m_1^2}{M^2} d\psi^2 \right) + \left(d\bar{z}^2 + \frac{2m_1}{M} d\bar{z} dz + \frac{m_1^2}{M^2} dz^2 \right) \right) \\
&= m_1 R^2 d\bar{\psi}^2 + \frac{m_1 R^2 m_2^2}{M^2} d\psi^2 + m_1 d\bar{z}^2 + \frac{m_1 m_2^2}{M^2} dz^2 \\
&\quad + m_2 R^2 d\bar{\psi}^2 + \frac{m_1^2 R^2 m_2}{M^2} d\psi^2 + m_2 d\bar{z}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{M^2} dz^2 \\
&= (m_1 + m_2) R^2 d\bar{\psi}^2 + \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2} R^2 d\psi^2 \\
&\quad + (m_1 + m_2) d\bar{z}^2 + \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2} dz^2 \\
&= MR^2 d\bar{\psi}^2 + \frac{(m_1 + m_2) m_1 m_2}{M^2} R^2 d\psi^2 + M d\bar{z}^2 + \frac{(m_1 + m_2) m_1 m_2}{M^2} dz^2 \\
&= MR^2 d\bar{\psi}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} R^2 d\psi^2 + M d\bar{z}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} dz^2 \\
&= MR^2 d\bar{\psi}^2 + \mu R^2 d\psi^2 + M d\bar{z}^2 + \mu dz^2,
\end{aligned}$$

A.4 Equação (6.1)

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \log |z_1 - z_2 - 2\pi Rn|^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \log (2\pi Rn)^2 \\
&= \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \left[\log |z_1 - z_2|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log \frac{|z_1 - z_2 - 2\pi Rn|^2}{(2\pi Rn)^2} \right] \\
&= \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} [U_{pl} + U_{per}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{per} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log \left| \frac{z_1 - z_2}{2\pi Rn} - 1 \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log \left| 1 - \frac{z_1 - z_2}{2\pi Rn} \right|^2 \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log \left| 1 - \epsilon \left(\frac{z_1 - z_2}{2\pi n} \right) \right|^2 \stackrel{**}{=} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log |1 - \epsilon Z_n|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \log(1 - \epsilon Z_n) \cdot \overline{(1 - \epsilon Z_n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\log(1 - \epsilon Z_n) + \log(1 - \epsilon \overline{Z_n}) \right) \\
&\stackrel{***}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m} Z_n^m - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m} \overline{Z_n^m} \right) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m} (Z_n^m + \overline{Z_n^m}) \\
&= - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m} \left(\left(\frac{z_1 - z_2}{2\pi n} \right)^m + \overline{\left(\frac{z_1 - z_2}{2\pi n} \right)^m} \right) \\
&= - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m (2\pi n)^m} \left[(z_1 - z_2)^m + (\overline{z_1} - \overline{z_2})^m \right] \\
&\stackrel{****}{=} - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\epsilon}{2\pi n} (z_1 - z_2 + \overline{z_1} - \overline{z_2}) - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\epsilon^2}{8\pi^2 n^2} \left((z_1 - z_2)^2 + (\overline{z_1} - \overline{z_2})^2 \right) - \\
&\quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\epsilon^3}{24\pi^3 n^3} \left((z_1 - z_2)^3 + (\overline{z_1} - \overline{z_2})^3 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&\stackrel{*****}{=} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{4\pi^2 n^2} (z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2 + \overline{z_1}^2 - 2\overline{z_1} \overline{z_2} + \overline{z_2}^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{4\pi^2 n^2} ((x_1 + iy_1)^2 - 2(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) + (x_2 + iy_2)^2 + \\
&\quad (x_1 - iy_1)^2 - 2(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_2 - iy_2)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{4\pi^2 n^2} \left(x_1^2 - y_1^2 + 2ix_1y_1 - 2x_1x_2 + 2y_1y_2 - 2i(x_1y_2 + x_2y_1) + \right. \\
&\quad \left. x_2^2 - y_2^2 + 2ix_2y_2 + x_1^2 - y_1^2 - 2ix_1y_1 - \right. \\
&\quad \left. 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2i(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2^2 - y_2^2 - 2ix_2y_2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{4\pi^2 n^2} (2x_1^2 - 2y_1^2 - 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2x_2^2 - 2y_2^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{2\pi^2 n^2} ((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&= - \frac{\epsilon^2}{2\pi^2} ((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&= - \frac{\epsilon^2}{2\pi^2} ((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) \cdot \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
&= - \frac{\epsilon^2}{12} ((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$U = \frac{\gamma m_1 m_2}{4\pi} \left[\log((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) - \frac{\epsilon^2}{12} ((x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right].$$

$$* \quad \epsilon = \frac{1}{R}.$$

$$** \quad Z_n = \frac{z_1 - z_2}{2\pi n}.$$

$$*** \quad |Z_n| < \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \left| \frac{z_1 - z_2}{2\pi n} \right| < \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| < \frac{2\pi n}{\epsilon} = 2\pi R n \Leftrightarrow |z_1 - z_2| < 2\pi R.$$

$$**** \quad |z_1 - z_2| < 2\pi R \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\epsilon^m}{m(2\pi n)^m} \left[(z_1 - z_2)^m + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^m \right] \right| < \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m(2\pi n)^m} \left[(z_1 - z_2)^m + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^m \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\epsilon^m}{m(2\pi n)^m} \left[(z_1 - z_2)^m + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^m \right].$$

$$\begin{aligned} \text{***** } m \text{ ímpar} &\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^-} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} = \\ &\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi(-n))^m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} - \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \text{ par} &\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^-} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} = \\ &\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi(-n))^m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m} = \\ &2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon^2}{m(2\pi n)^m}. \end{aligned}$$

Apêndice B

Teorema de Arnold-Liouville

Definição (Integral Primeira): Dizemos que $W : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira do sistema autônomo

$$\dot{x} = F(x), \tag{B.1}$$

onde $A \subset \mathbb{R}^n$ (aberto) e $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, quando W é constante ao longo de cada trajetória solução de (B.1), isto é W é uma integral primeira de (B.1) quando $W(x(t)) = c$, onde c é uma constante real e $x(t)$ é uma solução de (B.1).

Definição (Independência linear de integrais primeiras): Dizemos que as integrais primeiras W_1, W_2, \dots, W_{n-1} do sistema (B.1) são linearmente independentes em $A \subset \mathbb{R}^n$ quando os vetores $\nabla W_1(x), \nabla W_2(x), \dots, \nabla W_{n-1}(x)$ são linearmente independentes para todo $x \in A \setminus \{x \in A; F(x) = 0\}$.

Definição (Sistema integrável): Dizemos que o sistema (B.1) é integrável em $A \subset \mathbb{R}^n$ quando existem $n - 1$ integrais primeiras de (B.1) linearmente independentes.

A quantidade $n - 1$ e o fato de serem linearmente independentes são necessárias para podermos identificar as curvas soluções de (B.1).

Isto pode ser visto como aplicação direta do Teorema da Função Implícita:

Teorema (da Função Implícita): Seja $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função suave e coloquemos coordenadas $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ em \mathbb{R}^{n+m} .

Dado um ponto $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ com $f(a, b) = c \in \mathbb{R}^m$, se a matriz

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right]$$

é invertível então existem:

- um subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ contendo a ;
- um subconjunto aberto $B \subset \mathbb{R}^m$ contendo b ;
- e uma única função $g : A \rightarrow B$ suave,

tais que $\{(x, g(x)); x \in A\} = \{(x, y) \in A \times B; f(x, y) = c\}$.

Demonstração: Veja [14].

Assim, seguindo a notação do teorema acima, se tomarmos $n = 1$, $m = n - 1$ e $f = (W_1, \dots, W_{n-1})$ teremos que a matriz

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \nabla W_1 & \nabla W_2 & \cdots & \nabla W_{n-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

é invertível (pois $\nabla W_1, \nabla W_2, \dots, \nabla W_{n-1}$ são l.i.) e, portanto, que existem $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e $g : A \rightarrow B$ suave tais que $\{(x, g(x)); x \in A\} = \{(x, y) \in A \times B; f(x, y) = c\}$ (curva solução de (B.1)).

No caso de sistemas mecânicos autônomos definidos, por exemplo, através de um dado campo de forças, digamos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, diremos que tal sistema

$\frac{d}{dt}(x, \dot{x}) = F(x, \dot{x}) = \left(\dot{x}, \frac{1}{m}f(x) \right)$ em \mathbb{R}^{2n} é integrável quando existem $2n - 1$ integrais primeiras deste sistema.

Definição (Colchetes de Poisson): Os colchetes de Poisson são um operador binário que toma duas funções suaves definidas no espaço de fase de um sistema mecânico e devolve uma constante real e que obedece às seguintes propriedades:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
- $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$;
- $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$;
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Além disso, calculados sobre as coordenadas de Darboux (digamos, (q_i, p_i)) do espaço de fase de uma variedade, os colchetes tomam a seguinte forma:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\},$$

onde $f = f(q_i, p_i, t)$ e $g = g(q_i, p_i, t)$ são funções definidas sobre o espaço de fase e do tempo (que, no caso de sistemas autônomos, pode ser “ignorado”).

Observação: Podemos ver as coordenadas de Darboux (q_i, p_i) também como funções no espaço de fase. Vistas dessa forma, o colchete de Poisson aplicado sobre elas obedece:

- $\{q_i, q_j\} = 0$;
- $\{p_i, p_j\} = 0$;
- $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$.

Definição (Liouville-integrabilidade de sistemas hamiltonianos): Dizemos que um sistema hamiltoniano com n graus de liberdade é Liouville-integrável quando existem n integrais primeiras, digamos F_i , linearmente independentes e em involução, isto é, $\{F_i, F_j\} = 0$.

Um sistema hamiltoniano pode ser escrito da forma $\dot{x} = \{x, H\}$, onde H é a função Hamiltoniana que o define.

Se um sistema Hamiltoniano que tem n graus de liberdade possui n integrais primeiras em involução, digamos $F_i, i = 1, \dots, n$, então tal sistema é integrável.

Isto se deve à estrutura canônica dos sistemas Hamiltonianos.

De fato, podemos escrever o sistema de equações diferenciais $\frac{d}{ds_i} = \{x, F_i\}$, $i = 1, \dots, n$ e, como as integrais estão em involução, cada uma delas é uma integral primeira dos sistemas determinados pelas outras.

Neste contexto, temos o Teorema de Arnold-Liouville:

Teorema (de Arnold-Liouville): Suponha que a função H determine um sistema Hamiltoniano Liouville-integrável, digamos com integrais primeiras $F_i, i = 1, \dots, n$.

Para $c \in \mathbb{R}^n$ seja $M_c = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; F_i = c, i = 1, \dots, n\}$ um conjunto de nível das integrais onde elas são l.i..

Então M_c é uma subvariedade suave e invariante.

Além disso, se M_c for compacta e conexa, então ela é difeomorfa a um n -toro.

Neste caso, existem n variáveis, chamadas de coordenadas de ângulo, denotadas por $\theta_i, i = 1, \dots, n$, em M_c tais que o fluxo Hamiltoniano é conjugado ao fluxo de $\frac{d}{dt}\theta = \Omega(F)$, para algum vetor Ω .

Demonstração: Vide [3].

Uma consequência muito interessante deste teorema é que existe uma escolha de variáveis de ângulo que tem momentos conjugados definidos numa vizinhança de M_c .

Tais momentos são comumente chamados de variáveis de ação e denotados por $I_i, i = 1, \dots, n$.

Um sistema Hamiltoniano integrável é dito estar na forma de ação-ângulo se este só depende das variáveis momento; neste caso, quando $H(I, \theta) = H(I)$.

As equações de movimento em tais variáveis são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \Omega(I). \end{cases}$$

Note que as variáveis de ação são invariantes sob a ação do fluxo, logo, tais variáveis devem ser funções de $F_i, i = 1, \dots, n$.

Apêndice C

Teorema de Noether

Definição: Fixando notação diremos que uma variedade simplética (M, ω) junto com uma função suave $H \in C^\infty(M)$ é dita ser um sistema Hamiltoniano.

A função H é chamada de função Hamiltoniana do sistema.

O fluxo do campo vetorial Hamiltoniano X_H (dado por $X_H = i_{X_H}\omega = dH$) é dito ser o fluxo Hamiltoniano e suas curvas integrais são chamadas de trajetórias ou órbitas do sistema, que, em coordenadas de Darboux, satisfazem as equações de Hamilton.

Observação: Podemos utilizar a notação (M, ω, H) para designar um sistema Hamiltoniano, onde fica entendido que (M, ω) é a variedade simplética e H é a função Hamiltoniana.

Definição: Seja (M, ω, H) um sistema Hamiltoniano.

Uma função $f \in C^\infty(M)$ que é constante em cada curva integral de X_H é dita ser uma quantidade conservada do sistema.

Definição: Um campo vetorial suave V em M é dito ser uma simetria infinitesimal de (M, ω, H) se ω e H são invariantes sob o fluxo de V .

Observação: Da caracterização geométrica do colchete de Poisson ($\{f, g\} = X_g f$ é uma medida da taxa de variação de f ao longo do fluxo Hamiltoniano de g), não é difícil ver que uma função $f \in C^\infty(M)$ é uma quantidade conservada do sistema (M, ω, H) se, e somente se, $\{f, H\} = 0$.

Definição: Um campo vetorial X em M é dito ser simplético se ω é invariante sob o fluxo de X .

X é dito ser Hamiltoniano (ou globalmente Hamiltoniano) se existe uma função $f \in C^\infty(M)$ tal que $X = X_f$, e localmente Hamiltoniano se cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança na qual X é Hamiltoniano.

Lema: Seja (M, ω) uma variedade simplética.

Um campo vetorial suave em M é simplético se, e somente se, é localmente Hamiltoniano.

Todo campo vetorial localmente Hamiltoniano em M é globalmente Hamiltoniano se, e somente se, toda 1-forma fechada em M for exata.

Demonstração: Veja [12, 22].

Teorema (de Noether): Seja (M, ω, H) um sistema hamiltoniano.

Se f é uma quantidade conservada então seu campo vetorial Hamiltoniano é uma simetria infinitesimal.

Reciprocamente, se toda 1-forma fechada em M for exata, então cada simetria infinitesimal é um campo vetorial Hamiltoniano de uma quantidade conservada, que é único a menos da adição de uma função constante em cada componente de M .

Demonstração: Seguiremos como em [22].

Suponha que f é uma quantidade conservada.

Assim $X_f H = \{H, f\} = -\{f, H\} = 0$, ou seja, H é constante ao longo do fluxo de X_f .

Como ω é invariante ao longo do fluxo de qualquer campo vetorial Hamiltoniano (pois todo campo Hamiltoniano é simplético) concluímos que X_f é uma simetria infinitesimal.

Suponha agora que M seja uma variedade na qual toda 1-forma fechada seja exata.

Seja V uma simetria infinitesimal de (M, ω, H) .

Então, como V deixa ω invariante, V é simplética por definição, e, portanto, globalmente Hamiltoniana.

Escrevendo $V = X_f$, o fato de H ser constante ao longo do fluxo de V implica que $\{H, f\} = X_f H = V H = 0$ (pois V é uma simetria infinitesimal, logo ω e H são invariantes ao longo do fluxo de V), então f é uma quantidade conservada.

Se \tilde{f} é qualquer outra função que satisfaz $X_{\tilde{f}} = V = X_f$, então $d(f - \tilde{f}) = d\tilde{f} - df = \omega(X_{\tilde{f}}) - \omega(X_f) = \omega(X_{\tilde{f}} - X_f) = i_{\omega}(X_{\tilde{f}} - X_f) = 0$, então $\tilde{f} - f$ deve ser constante em cada componente de M .

Apêndice D

Teoria de Hamilton-Jacobi

Este apêndice foi escrito com base em [19, 32].

A ideia da teoria de Hamilton-Jacobi é que resolvendo uma certa EDP (a equação de Hamilton-Jacobi) podemos encontrar ao mesmo tempo uma solução de um problema mecânico.

Tal EDP envolve uma função que denotamos por S , chamada de função geratriz, responsável por determinar uma transformação de coordenadas de tal forma que a função Hamiltoniana transformada K se relaciona com a antiga H através da equação:

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Temos assim que, se $K = 0$ e tomarmos S como função das antigas coordenadas q_i e dos novos momentos P_i a equação acima se torna:

$$H \left(q, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (\text{D.1})$$

A equação acima é a chamada Equação de Hamilton-Jacobi, e os momentos

p_i são dados por

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Uma solução para a equação de Hamilton-Jacobi pode ser expressa como $S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são constantes independentes que podem ser escolhidas como os novos momentos, isto é, $P_i = \alpha_i, \forall i = 1, \dots, n$.

As novas coordenadas Q_i são obtidas através da função geratriz S por

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i},$$

e tais coordenadas serão constantes, que podemos denotar por $Q_i = \beta_i, \forall i = 1, \dots, n$.

As equações que definem as novas coordenadas e momentos podem ser algebricamente manipuladas de tal forma que podemos escrever as coordenadas e momentos antigos como

$$\begin{cases} q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \\ p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \end{cases}$$

Observação: No caso de sistemas Hamiltonianos que não dependem do tempo a função geratriz $S(q, \alpha, t)$ assume a forma $S(q, \alpha, t) = S_0(\alpha, t) + W(q, \alpha)$, e assim, a Equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0,$$

que possui solução se ocorrer

$$\begin{cases} \frac{\partial S_0}{\partial t} = -\alpha_1 \\ H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1. \end{cases}$$

A segunda equação acima é a Equação de Hamilton-Jacobi para W , e a constante α_1 é a Hamiltoniana (que normalmente a associada à energia total do sistema E).

Exemplo (Problema de Kepler):

Consideremos o Problema de Kepler em coordenadas esféricas (r, θ, φ) .

A Equação de Hamilton-Jacobi para este problema é dada por

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right) + V = E,$$

onde V é o potencial do problema.

Sob certas hipóteses é possível assumir que a função geratriz W pode ser completamente separada, isto é, $W(r, \theta, \varphi) = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi)$ (veja [11, 19] e suas referências).

$$\text{Assim, } \frac{1}{2m} \left((W'_r)^2 + \frac{1}{r^2} (W'_\theta)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (W'_\varphi)^2 \right) + V = E.$$

A coordenada φ é cíclica, logo, $W'_\varphi = \alpha_\varphi$, isto é $W_\varphi = \alpha_\varphi \varphi$.

Além disso, $(W'_\theta)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$ deve ser constante, pois é a parte da equação que somente depende de θ , ou seja, $(W'_\theta)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta} = \alpha_\theta^2$.

Assim, obtemos que

$$(W'_r)^2 \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} + 2mV = 2mE,$$

e portanto que $(W'_r)^2 = 2m(E + V) = \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}$.

Assim, se denotamos por J_φ , J_θ e J_r as variáveis de ação, sabemos ([19]) que

$$J_\varphi = \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi, J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta \text{ e } J_r = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr.$$

Calculemos cada uma dessas variáveis, lembrando que, no caso do problema de Kepler em \mathbb{R}^3 , o potencial V é dado por $V = \frac{k}{r}$ e estamos aqui considerando somente o caso $E < 0$ (órbitas limitadas):

$$J_\varphi = \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi = \oint \alpha_\varphi d\varphi = 2\pi\alpha_\varphi.$$

$$J_\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = 2\pi\alpha_\theta - 2\pi\alpha_\varphi,$$

onde essa integral foi calculada utilizando algumas substituições trigonométricas.

Note que $\alpha_\theta = \frac{J_\varphi + J_\theta}{2\pi}$.

$$\begin{aligned} J_r &= \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr = \\ &= \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\varphi + J_\theta)^2}{4\pi^2 r^2}} dr = -J_\varphi - J_\theta + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \end{aligned}$$

Assim, $E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}$, e as frequências são dadas por $\nu_r = \frac{\partial H}{\partial r} =$
 $\nu_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \nu_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{4\pi^2 mk^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3}$.

Portanto, podemos concluir que o problema de Kepler possui as frequências coincidentes, temos um caso degenerado.

Apêndice E

Teorema KAM

As ideias e definições aqui apresentadas foram retiradas de [3].

Sejam $H(I, \theta)$ uma função Hamiltoniana para um sistema escrita nas suas variáveis ação-ângulo (I, θ) e $H_0(I)$ uma função Hamiltoniana para um outro sistema.

Note que H_0 escrita somente nas suas variáveis de ação implica que temos um sistema integrável no sentido do Teorema de Arnold-Liouville.

Vamos supor agora que H seja um perturbação de H_0 , isto é, $H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta)$, com ϵ pequeno o suficiente.

Conhecendo a dinâmica determinada por H_0 , conseguimos informações sobre a dinâmica de H ?

Definição: Um sistema integrável H_0 é dito não-degenerado quando

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right) \neq 0.$$

Definição: Um sistema integrável H_0 é dito ser isoenergeticamente não-

degenerado quando

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \frac{\partial H_0}{\partial I} \\ \frac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

A condição de não-degenerescência isoenergética em sistemas com dois graus de liberdade Hamiltoniana, por exemplo, determina que um ponto que se encontra em um círculo resultante de uma seção de Poincaré (uma seção transversal ao fluxo), após dar uma volta no toro ao qual ele pertence, volta e intersecta o mesmo círculo.

Teorema (Kolmogorov-Arnold-Moser): Se um sistema não-perturbado é não-degenerado, então, para perturbações Hamiltonianas conservativas suficientemente pequenas, a maioria dos toros não-resonantes (com frequências de cada variável de ângulo diferentes) não desaparecem, mas são levemente deformados, de tal forma que, no espaço de fase do sistema perturbado, há também a presença de toros invariantes densamente preenchidos por trajetórias do sistema com um número de frequências independentes igual ao número de graus de liberdade Hamiltoniana.

Tais toros invariantes formam a maioria no sentido do que a medida do complementar de sua união é pequena, quando a perturbação é pequena.

Para o caso de mapas simpléticos do plano no plano (nosso caso, quando estamos estudando as seções vistas no Capítulo 5, pois podemos estudar, em vez do fluxo definido no nível de energia em questão, o mapa de Poincaré, definido como o mapa do primeiro retorno de um ponto na seção), o Teorema KAM pode ser visto com as seguintes condições:

Sejam λ e $\bar{\lambda}$ os autovalores da linearização do mapa.

A condição ausência de ressonância nas frequências assume a forma $\lambda^3 \neq 1$ e $\lambda^4 \neq 1$. Isto também significa que tal ponto fixo é estável no sentido de Lyapunov.

E, além disso, tal mapa, se desconsiderarmos termos de ordem maior que 3 na expansão em série de Taylor, pode ser escrito na forma normal de Birkhoff, e se tivermos que o coeficiente ω_{11} for diferente de zero, garantimos a dependência não-trivial do ângulo de rotação.

Ou seja, no caso de uma aplicação do plano no plano, temos que verificar se $\lambda^3 \neq 1$, $\lambda^4 \neq 1$ e $\omega_{11} \neq 0$.