

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Fernanda Mendonça de Vasconcellos

Caos Distribucional para Operadores  
sobre Espaços de Fréchet

Rio de Janeiro  
29 de Janeiro de 2016

# Caos Distribucional para Operadores sobre Espaços de Fréchet

Fernanda Mendonça de Vasconcellos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2016

# Caos Distribucional para Operadores sobre Espaços de Fréchet

Fernanda Mendonça de Vasconcellos  
Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

---

(Presidente) Prof. Nilson da Costa Bernardes Junior - IM/UFRJ

---

Prof. Rolci de Almeida Cipolatti - IM/UFRJ

---

Prof. Carlos Kubrusly - PUC-Rio

---

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Junior - IME/UFF

Rio de Janeiro  
29 de Janeiro de 2016

*Ao companheiro de toda a minha vida  
Erick.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Nelma, por seu exemplo de mulher e pessoa, cujo esforço e dedicação de uma vida inteira se traduzem na entrega total à felicidade de seus filhos e sem a qual eu certamente não teria chegado até aqui.

Ao meu irmão Augusto, por sua amizade incondicional, por suas palavras de incentivo sempre presentes e também pelas correções ortográficas.

Ao meu companheiro, amigo e namorado Erick, por seu carinho incomensurável, sua compreensão infinita, paciência inesgotável e por estar sempre ao meu lado nos momentos difíceis.

Aos colegas e amigos do Polo Regional UAB/CEDERJ de Rio Bonito, por tornarem meus sábados sempre tão agradáveis, que repletos de boas conversas e inúmeros sorrisos, contribuíram para tornar menos árdua minha passagem pelo mestrado.

Ao meu orientador, Professor Nilson, por seu apoio, por suas ótimas aulas e por várias vezes ter abdicado de seu tempo de descanso para me auxiliar neste trabalho. Seu comprometimento e seu profissionalismo são exemplos a serem seguidos.

Aos professores que compuseram a minha banca avaliadora, por suas importantes correções e sugestões, em especial ao Professor Rolci, por todo o seu grande incentivo.

Ao CNPq pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

# Resumo

Baseado no artigo de Bernardes, Bonilla, Müller e Peris, a proposta deste trabalho é fazer um estudo inicial das noções de caos distribucional para operadores sobre espaços de Fréchet e, em particular, para operadores sobre espaços de Banach. Apresentamos uma caracterização do caos distribucional para operadores sobre espaços de Fréchet através de uma condição computável (CCD) e também da existência de um vetor distribucionalmente irregular. Uma condição suficiente para a existência de uma variedade uniformemente distribucionalmente irregular densa é apresentada. Procuramos ilustrar os resultados obtidos através do estudo de dois tipos de operadores particulares, a saber, operadores de deslocamento com pesos e operadores de composição.

Palavras-chave: Espaços de Fréchet, dinâmica linear, caos distribucional, operadores, vetores irregulares.

# Abstract

Based on a paper by Bernardes, Bonilla, Müller and Peris, the purpose of this work is to make an initial study of the notions of distributional chaos for operators on Fréchet spaces and, in particular, for operators on Banach spaces. We present a characterization of distributional chaos for operators on Fréchet spaces through a computable condition (CCD) and also the existence of a distributionally irregular vector. A sufficient condition for the existence of a dense uniformly distributionally irregular manifold is presented. We illustrated the results obtained through the study of two particular classes of operators, namely, weighted shifts and composition operators.

Keywords: Fréchet spaces, linear dynamics, distributional chaos, operators, irregular vectors.

# Sumário

|          |                                                                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Preliminares</b>                                                                             | <b>3</b>  |
| 1.1      | Categorias de Baire . . . . .                                                                   | 3         |
| 1.2      | Espaços de Banach vs espaços de Fréchet . . . . .                                               | 4         |
| 1.3      | O que é um operador? . . . . .                                                                  | 9         |
| 1.4      | Um pouco de dinâmica linear . . . . .                                                           | 9         |
| <b>2</b> | <b>Caos Distribucional</b>                                                                      | <b>12</b> |
| 2.1      | Definições e resultados básicos . . . . .                                                       | 12        |
| 2.2      | Sobre vetores distribucionalmente irregulares . . . . .                                         | 16        |
| <b>3</b> | <b>Uma Caracterização para o Caos Distribucional</b>                                            | <b>23</b> |
| 3.1      | Órbitas distribucionalmente ilimitadas e órbitas distribucionalmente próximas de zero . . . . . | 23        |
| 3.2      | Crítério para o caos distribucional (CCD) . . . . .                                             | 38        |
| <b>4</b> | <b>Caos Distribucional Denso</b>                                                                | <b>43</b> |
| 4.1      | Caracterização . . . . .                                                                        | 43        |
| 4.2      | Aplicações . . . . .                                                                            | 54        |
| <b>5</b> | <b>Caos Distribucional Denso: Casos Especiais</b>                                               | <b>61</b> |
| 5.1      | Operadores deslocamento à esquerda com pesos . . . . .                                          | 61        |
| 5.2      | Operadores de composição . . . . .                                                              | 68        |
| 5.3      | Observações finais . . . . .                                                                    | 73        |

# Introdução

Baseado em [4], o objetivo deste trabalho é estudar brevemente as noções de caos distribucional para operadores sobre espaços de Fréchet e, em particular, para operadores sobre espaços de Banach. Assim, a menos que seja especificado o contrário, este trabalho considerará que  $X$  é sempre um espaço de Fréchet arbitrário e estaremos interessados em estudar a dinâmica de operadores sobre  $X$ . Denotaremos por  $B(X)$  o conjunto de todos os operadores  $T : X \rightarrow X$ .

Sobre pré-requisitos, alguns resultados, especialmente de Análise e de Topologia Geral, serão admitidos. Outros, considerados importantes para uma boa leitura do texto, serão apresentados no primeiro capítulo, denominado Preliminares. Este texto é acessível, portanto, a pessoas que estejam cursando entre os últimos semestres da graduação em matemática e os primeiros períodos do mestrado, ou que queiram conhecer um pouco mais sobre dinâmica de operadores.

Na primeira seção do segundo capítulo procuramos inserir conceitos básicos, como os de densidade superior e inferior, bem como algumas de suas propriedades, necessárias para a compreensão do caos distribucional. Na segunda seção deste mesmo capítulo, com o objetivo de ilustrar o quão delicado é o caos distribucional em comparação com outros tipos de caos, abordamos um exemplo de operador sobre  $\ell^1(\mathbb{N})$  em que a existência de um conjunto residual de vetores com órbitas ilimitadas não garante a existência de vetores com órbitas distribucionalmente ilimitadas, mesmo em espaços de Banach. Pretendemos que o leitor perceba, portanto, que o caos distribucional exige uma atenção um pouco mais cuidadosa.

No terceiro capítulo, finalmente, voltamo-nos para a efetiva dinâmica de operadores, apresentando proposições úteis e um critério que caracteriza o caos distribucional para operadores sobre espaços de Fréchet.

O Capítulo 4 é dedicado a um tipo especial de caos distribucional: o caos distribucional denso. Procuramos definir conceitos fundamentais deste tipo de caos no contexto de operadores. Apresentamos um teorema de caracterização para o mesmo e também algumas de suas aplicações.

No capítulo 5, voltamos nossa atenção para o estudo do caos distribucional denso de maneira mais particular, a fim de ilustrar os resultados obtidos neste trabalho. Buscamos ca-

racterizar tal comportamento caótico no caso dos operadores deslocamento à esquerda com pesos sobre um espaço de Fréchet de sequências, bem como para os operadores de composição sobre o espaço  $H(\mathbb{D})$ . Julgamos interessante, ao final do capítulo 5, introduzir uma seção com algumas observações breves a respeito da relação entre caos distribucional e outros tipos de comportamento caótico, como hiperciclicidade frequente e caos Devaney.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Categorias de Baire

Se  $X$  é um espaço topológico e  $A$  é um subconjunto de  $X$ , definimos o *interior de  $A$*  como sendo a união de todos os abertos de  $X$  que estão contidos em  $A$ . Assim, dizer que  $A$  tem *interior vazio* é o mesmo que dizer que  $A$  não contém abertos de  $X$  além do conjunto vazio. De maneira equivalente, podemos dizer que se todo ponto de  $A$  é ponto de acumulação<sup>1</sup> de  $X \setminus A$ , então  $A$  tem interior vazio, o que significa dizer que o complementar de  $A$  é denso<sup>2</sup> em  $X$ .

**Definição 1.1.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Dizemos que:*

- (a)  $A$  é um **conjunto nunca denso** se  $\overline{A}$  tem interior vazio.
- (b)  $A$  é um **conjunto de primeira categoria** se  $A$  é a união de uma família enumerável de conjuntos nunca densos.
- (c)  $A$  é um **conjunto de segunda categoria** se  $A$  não é um conjunto de primeira categoria.
- (d)  $A$  é um **conjunto residual** se  $X \setminus A$  é um conjunto de primeira categoria.

**Proposição 1.2.** *Para todo espaço topológico  $X$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Toda interseção enumerável de conjuntos abertos e densos em  $X$  é um conjunto denso em  $X$ ;*

---

<sup>1</sup>Sejam  $B$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  é um *ponto de acumulação* de  $B$  se, para toda vizinhança  $V$  de  $x$ , temos  $B \cap (V \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ .

<sup>2</sup>Um conjunto  $A$  é *denso* em  $X$  se  $\overline{A} = X$ .

- (ii) Toda união enumerável de conjuntos fechados com interiores vazios em  $X$  é um conjunto com interior vazio em  $X$ ;
- (iii) Todo conjunto aberto e não-vazio em  $X$  é um conjunto de segunda categoria em  $X$ ;
- (iv) Todo conjunto residual em  $X$  é denso em  $X$ .

**Definição 1.3.** Um espaço topológico  $X$  é dito um **espaço de Baire** se  $X$  satisfaz às condições equivalentes da Proposição 1.2.

**Teorema 1.4** (Baire). Todo espaço completamente metrizável (isto é, que admite uma métrica completa compatível com a topologia) e todo espaço localmente compacto de Hausdorff são espaços de Baire.

A demonstração do Teorema de Baire pode ser encontrada em [16] e não a faremos aqui. Um dado curioso é que o termo “categoria” foi introduzido pelo próprio René-Louis Baire (1874-1932) através da formulação dada pelo item (ii) da Proposição 1.2 (cf. [15]).

**Definição 1.5.** Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito um **conjunto  $G_\delta$**  (ou um  $G_\delta$ -conjunto<sup>3</sup>) se  $A$  pode ser escrito como uma interseção enumerável de conjuntos abertos em  $X$ .

**Proposição 1.6.** Se  $X$  é um espaço de Baire e  $A \subset X$ , então  $A$  é um conjunto residual em  $X$  se, e somente se,  $A$  contém um conjunto  $G_\delta$ -denso em  $X$ .

A prova da Proposição 1.6 pode ser vista em [15].

**Exemplo 1.7.** Ambos os conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  são densos em  $\mathbb{R}$ . No entanto,  $\mathbb{Q}$  não é um conjunto residual em  $\mathbb{R}$  (na verdade,  $\mathbb{Q}$  é de primeira categoria em  $\mathbb{R}$ ) e  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  é um conjunto residual em  $\mathbb{R}$ .

De maneira intuitiva, um conjunto residual em um espaço de Baire  $X$  é comumente visto como um conjunto que contém a “maioria topológica dos pontos” de  $X$ . Neste sentido, o Exemplo 1.7 nos diz que a maioria dos números reais são irracionais.

## 1.2 Espaços de Banach vs espaços de Fréchet

O leitor que já teve a oportunidade de trabalhar com números reais (ou complexos) certamente já está familiarizado com algumas propriedades de espaços de Banach - mesmo que

---

<sup>3</sup>A notação “ $G_\delta$ ” veio do alemão, onde “G” é de “gebiet”, que neste contexto significa “conjunto aberto” e “ $\delta$ ” é de “durchschnitt”, que significa “interseção” (c.f [15], p.194).

nunca tenha sido apresentado a esses espaços com esta denominação. Isso se deve ao fato de que  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  (com  $n \in \mathbb{N}$ ) são os exemplos mais simples de espaços de Banach que costumam ser introduzidos a alunos que iniciam seus estudos em matemática.

Formalmente, um espaço de Banach é um espaço vetorial  $X$  munido de uma *norma*, geralmente denotada por  $\|\cdot\|$ , cuja topologia é induzida pela métrica

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X),$$

na qual  $X$  é completo. Se, mais do que isso, a norma provém de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  através da fórmula

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X,$$

então  $X$  é dito um espaço de Hilbert.

Vejamos alguns exemplos de espaços de Banach, bem diferentes daqueles introduzidos nos cursos de Cálculo e de introdução à Análise.

**Exemplo 1.8.** Considere  $c_0 := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$ , isto é, o espaço das seqüências em  $\mathbb{K}$  com limite nulo. Munido da chamada “norma do máximo”, dada por

$$\|x\| := \max_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

obtemos que  $c_0$  é um espaço de Banach.

**Exemplo 1.9.** Seja  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \leq p < \infty$ . O espaço das seqüências  $p$ -somáveis

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

munido da norma  $\|x\|_p := \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$  é um espaço de Banach.

**Exemplo 1.10.** O espaço

$$C[a, b] := \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é contínua} \}$$

munido da norma  $\|f\| := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$  é um espaço de Banach.

Os espaços apresentados nos Exemplos 1.8, 1.9 e 1.10 são também exemplos de espaços separáveis<sup>4</sup>. Mas há também espaços de Banach não separáveis (veja o exemplo a seguir).

---

<sup>4</sup>Dizemos que um espaço  $X$  é *separável* quando  $X$  possui um subconjunto enumerável denso em  $X$ .

**Exemplo 1.11.** O espaço  $\ell^\infty := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$  munido da norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

é um espaço de Banach não separável.

O que ocorre com espaços de Fréchet, no entanto, é um pouco diferente. Esses espaços são mais gerais, pois não necessariamente possuem métrica induzida por uma norma. Alguns deles sequer são normáveis, o que significa que não podemos definir uma norma cuja métrica proveniente mantenha as propriedades topológicas originais do espaço. Assim, para ajudar a compreender a estrutura dos espaços de Fréchet, essenciais para o desenvolvimento deste trabalho, convém definir alguns conceitos importantes.

**Definição 1.12.** Se  $\mathbb{K}$  representa  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , um **espaço vetorial topológico (sobre  $\mathbb{K}$ )** é um espaço vetorial  $X$  (sobre  $\mathbb{K}$ ) munido de uma topologia pré-fixada tal que:

- i) Todo subconjunto unitário de  $X$  é fechado;
- ii) As operações de espaço vetorial:

$$\begin{aligned} (x, y) \in X \times X &\mapsto x + y \in X \\ &e \\ (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X &\mapsto \alpha x \in X \end{aligned}$$

são contínuas, onde  $X \times X$  e  $\mathbb{K} \times X$  estão munidos das suas topologias produto, sendo  $\mathbb{K}$  munido da topologia usual de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$  dada pelas respectivas normas.

**Definição 1.13.** Dizemos que  $X$  é um **espaço localmente convexo (ELC)** se  $X$  é um espaço vetorial topológico que possui uma base local<sup>5</sup> para  $0 \in X$  cujos elementos são convexos.

**Definição 1.14.** Uma **seminorma** sobre um espaço vetorial  $X$  é um funcional  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\begin{aligned} (S1) \quad p(\alpha x) &= |\alpha| p(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in X; \\ (S2) \quad p(x + y) &\leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Observe que as condições para que um funcional  $p$  seja uma seminorma excluem a equivalência “ $x = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0$ ”. Diferentemente do que ocorre em uma norma, isso significa que é possível obter um vetor não nulo de  $X$  tal que sua seminorma seja nula. Entretanto, é verdade que  $p(0) = 0$ : basta fazer  $\alpha = 0$  em (S1). Em particular, toda norma é uma seminorma.

---

<sup>5</sup>Se  $X$  é um espaço topológico e  $x \in X$ , uma *base local para  $x$*  é uma coleção  $\mathcal{B}(x)$  de vizinhanças de  $x$  com a propriedade de que toda vizinhança de  $x$  contém algum elemento de  $\mathcal{B}(x)$ . Por exemplo, no caso em que  $X$  é um espaço métrico, a coleção  $\mathcal{B}(x) := \{B(x; r); r > 0\}$  de todas as bolas abertas de centro em  $x$  e raio  $r$  é uma base local para  $x$ .

**Definição 1.15.** Dizemos que uma família  $\mathcal{P}$  de seminormas sobre um espaço vetorial  $X$  é **separante** se, para cada  $x \neq 0$  em  $X$ , existe  $p \in \mathcal{P}$  tal que  $p(x) \neq 0$ .

Um fato importante sobre famílias separantes de seminormas é que se  $\mathcal{P}$  é uma tal família sobre um espaço vetorial  $X$ , então a topologia induzida por  $\mathcal{P}$  torna  $X$  um espaço localmente convexo. A recíproca deste fato também é verdadeira: se  $X$  é um ELC, então existe uma família de seminormas que induz a sua topologia. A demonstração destes fatos pode ser vista em [16] e fogem do objetivo principal deste trabalho. No entanto, tais resultados são importantes para demonstrar a seguinte caracterização de metrizabilidade para espaços localmente convexos, que também pode ser encontrada em [16]:

**Teorema 1.16.** Seja  $X$  um espaço localmente convexo. Então  $X$  é metrizável se, e somente se, existe uma sequência de seminormas  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que gera a topologia de  $X$ . Neste caso,

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{1, p_k(x - y)\} \quad (x, y \in X) \quad (1.1)$$

é uma métrica invariante<sup>6</sup> que induz a topologia de  $X$ .

De posse desses resultados, podemos finalmente definir o conceito de espaço de Fréchet.

**Definição 1.17.** Dizemos que  $X$  é um **espaço de Fréchet** se  $X$  é um espaço localmente convexo metrizável tal que a métrica (1.1) é completa.

**Observação 1.18.** Na Definição 1.17, é possível provar que a completude da métrica  $d$  não depende da escolha da sequência de seminormas  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que induz a topologia de  $X$ . Em particular, se  $X$  é um espaço de Fréchet, podemos escolher  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  crescente<sup>7</sup>. Além disso, os seguintes fatos são verdadeiros:

- a) Se  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente e induz a topologia de  $X$ , então toda subsequência  $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  induz a topologia de  $X$ .
- b) Se  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induz a topologia de  $X$ , então  $(a_n p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  também a induz, desde que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seja uma sequência de escalares não nulos.
- c) Todo espaço de Banach pode ser visto como um espaço de Fréchet: basta tomar  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como sendo a sequência constante  $(\|\cdot\|)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma do espaço de Banach.

---

<sup>6</sup>Uma métrica  $d$  é invariante se  $d(x + z, y + z) = d(x, y), \forall x, y, z \in X$ .

<sup>7</sup>A sequência de seminormas  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente se  $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots \leq p_n(x) \leq \dots, \forall x \in X$ .

**Exemplo 1.19.** Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto não vazio de  $\mathbb{K}^n$  e defina

$$C(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é contínua}\}.$$

Observe que  $C(\Omega)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere

$$K_n := \left\{ x \in \overline{B}(0; n); d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

onde  $\overline{B}(0; n)$  é a bola fechada de centro em 0 e raio  $n$  em  $\mathbb{K}^n$ . Os seguintes fatos são verdadeiros:

- i)  $K_n$  é compacto para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- ii)  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ;
- iii)  $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ .

Se considerarmos a sequência separante de seminormas<sup>8</sup> dada por

$$p_n(f) = \sup \{|f(x)|; x \in K_n\},$$

teremos que  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$  e os conjuntos  $V_n = \left\{ f \in C(\Omega); p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , formam uma base local convexa para  $C(\Omega)$ . Como a métrica induzida pela sequência  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é completa (cf. [16]), segue que  $C(\Omega)$  é um espaço de Fréchet.

**Exemplo 1.20.** Se  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , é possível demonstrar que

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é holomorfa}\}$$

é um subespaço fechado de  $C(\Omega)$  e, portanto, é completo na métrica induzida por  $C(\Omega)$ . Logo,  $H(\Omega)$  também é um espaço de Fréchet. Em particular, se  $\Omega = \mathbb{C}$ , então

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é holomorfa}\}$$

é um espaço de Fréchet.

**Observação 1.21.** Os espaços  $C(\Omega)$  e  $H(\Omega)$  não são normáveis (cf. [16], p.34). Logo, não são espaços de Banach.

---

<sup>8</sup>A topologia induzida pela família de seminormas definida no exemplo (1.19) é chamada de *topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de  $\Omega$* .

De agora em diante, sempre que  $X$  for um espaço de Fréchet, utilizaremos a notação  $(\|\cdot\|_{X,k})_{k \in \mathbb{N}}$  para designar uma sequência crescente de seminormas que gera a topologia de  $X$ . Caso não haja dúvidas sobre qual é o espaço  $X$  em questão, omitiremos o subscrito  $X$  e escreveremos  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ao invés de  $(\|\cdot\|_{X,k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

### 1.3 O que é um operador?

**Definição 1.22.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Fréchet. Um **operador** de  $X$  em  $Y$  é uma aplicação linear contínua  $T : X \rightarrow Y$ . Denotamos por  $B(X, Y)$  o **espaço vetorial** de todos os operadores de  $X$  em  $Y$ . Se  $X = Y$ , dizemos que  $T$  é um **operador sobre  $X$**  e denotamos  $B(X, X)$  por  $B(X)$ .*

O teorema a seguir apresenta uma relevante caracterização para operadores.

**Teorema 1.23.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Fréchet e  $T : X \rightarrow Y$  uma aplicação linear. Então*

$$T \text{ é contínuo} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{N} \text{ e } \exists C > 0 \text{ tais que } \|Tx\|_{Y,k} \leq C \|x\|_{X,j}, \forall x \in X.$$

A demonstração do Teorema 1.23 será deixada ao leitor e pode ser encontrada em [9].

Exemplos de operadores lineares já devem ser bem conhecidos pelo leitor. Vejamos alguns deles.

**Exemplo 1.24.** *A aplicação  $D : f \rightarrow f'$ , onde  $f'$  denota a derivada de  $f$ , é um operador sobre  $H(\mathbb{C})$ , pois segue das estimativas de Cauchy que para qualquer  $n \geq 1$ , temos que  $\sup_{|z| \leq n} |f'(z)| \leq \sup_{|z| \leq n+1} |f(z)|$ .*

**Exemplo 1.25.** *O mapa **translação**  $T_a$ , definido por  $T_a f(z) = f(z+a)$ , com  $a \in \mathbb{C}$ , também é um operador sobre  $H(\mathbb{C})$ .*

**Exemplo 1.26.** *A aplicação denominada **deslocamento à esquerda**  $B : \ell^p \rightarrow \ell^p$ , onde  $1 \leq p < \infty$ , definida por  $B(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$  é um operador sobre o espaço  $\ell^p$ , com  $\|B\| = 1$ .*

### 1.4 Um pouco de dinâmica linear

De maneira geral, um *sistema dinâmico topológico (discreto)* é um par  $(X, T)$  que consiste de um espaço métrico  $X$  e uma aplicação contínua  $T : X \rightarrow X$ . Por uma questão de simplicidade, diremos apenas que  $T$  ou que  $T : X \rightarrow X$  é um sistema dinâmico e estaremos interessados na evolução deste sistema que começa com um certo estado  $x_0$ . Para isto, definimos

as iteradas  $T^n : X \rightarrow X$ , com  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ , por:

$$T^0 = id_X \quad \text{e} \quad T^n := T \circ \cdots \circ T \quad (n \text{ vezes}) \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Quando  $T^n x = x$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in X$ , dizemos que  $x$  é *ponto periódico* de  $T$ . Neste caso, o menor  $n$  que satisfaz a condição de periodicidade é chamado de *período* de  $x$ .

**Definição 1.27.** *Seja  $T : X \rightarrow X$  um sistema dinâmico. Dado  $x \in X$ , chamaremos*

$$orb(x, T) := \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}$$

de **órbita de  $x$  sob  $T$** .

No caso de sistemas dinâmicos lineares, além de  $X$  ser um espaço métrico (topológico), exigimos que ele também possua uma estrutura linear, como é o caso dos espaços de Banach e, mais geralmente, dos espaços de Fréchet. Assim, estabelecemos a seguinte definição:

**Definição 1.28.** *Um **sistema dinâmico linear** é um par  $(X, T)$  que consiste de um espaço de Fréchet  $X$  e um operador  $T : X \rightarrow X$ .*

De agora em diante,  $T$  ou  $T : X \rightarrow X$  denotará sempre um sistema dinâmico linear, salvo quando especificado algo distinto.

Vejamos a seguir algumas noções de comportamento caótico.

**Definição 1.29.** *Um sistema dinâmico linear  $T : X \rightarrow X$  é chamado **hipercíclico** se existe algum  $x \in X$  tal que a órbita de  $x$  sob  $T$  é densa em  $X$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é um **vetor hipercíclico para  $T$** .*

**Definição 1.30.** *Um operador  $T : X \rightarrow X$  é chamado de **(topologicamente) misturador** se para qualquer par  $U, V$  de subconjuntos abertos não vazios de  $X$ , existe algum  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ , para todo  $n \geq n_0$ .*

**Definição 1.31.** *Um operador  $T : X \rightarrow X$  é dito **Devaney caótico** se é hipercíclico e possui um conjunto denso de pontos periódicos.*

Observe que se  $T$  é hipercíclico, dado qualquer par  $U, V$  de abertos não vazios de  $X$ , então  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para algum  $n \in \mathbb{N}_0$ . Com efeito, suponha  $T$  hipercíclico e seja  $x$  um vetor hipercíclico para  $T$ . Fixemos um par  $U, V$  de conjuntos abertos e não vazios em  $X$ . Como  $orb(x, T)$  é densa em  $X$ , existe  $j \in \mathbb{N}_0$  tal que  $T^j x \in U$ . Como  $X$  não possui pontos isolados, segue que  $T^j x$  também é um vetor hipercíclico para  $T$ . Logo, existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $T^n(T^j x) \in V$ . Daí,  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Observação 1.32.** *De maneira recíproca, se dado qualquer par  $U, V$  de abertos não vazios de  $X$ ,  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para algum  $n \in \mathbb{N}_0$ , é possível mostrar que  $T$  é hipercíclico. Esta implicação é garantida pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, cuja demonstração pode ser encontrada em [9].*

Note que se um determinado operador é misturador (ou Devaney caótico), então ele é hipercíclico. No entanto, não vale a implicação reversa (veja [9]).

# Capítulo 2

## Caos Distribucional

### 2.1 Definições e resultados básicos

Começemos definindo o seguinte conceito, que costuma ser apresentado nos cursos de Análise Real.

**Definição 2.1.** *Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência limitada de números reais. O **limite inferior** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotado por  $\liminf x_n$ , é o menor valor de aderência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Analogamente, o **limite superior** de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denotado por  $\limsup x_n$ , é o seu maior valor de aderência (cf. [10], p. 122).*

Recordemos também que um número real  $x$  é valor de aderência de uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quando  $x$  é limite de alguma subsequência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

De posse da Definição 2.1, estabeleceremos a seguir um conceito essencial para que possamos compreender o caos distribucional.

**Definição 2.2.** *Seja  $A$  um conjunto de números naturais. Definimos a **densidade superior** e a **densidade inferior** de  $A$  como sendo, respectivamente:*

$$\overline{dens}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n}$$

e

$$\underline{dens}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n}.$$

Observe que o valor de  $\text{card}(A \cap [1, n])$  é sempre um número inteiro (pois  $A \subset \mathbb{N}$ ) e que nos informa quantos elementos de  $A$  estão presentes no intervalo natural  $[1, n]$ . Como este valor é,

no máximo, igual a  $n$ , temos que o quociente  $\frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n}$  nunca ultrapassa 1.

Pensando em termos de sequências, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos denotar  $(x_n)$  como sendo

$$x_n := \frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n}.$$

Portanto, a sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , assim definida, é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1. Dessa forma, graças à Definição 2.1 podemos interpretar  $\overline{\text{dens}}(A)$  e  $\underline{\text{dens}}(A)$  como sendo o maior e o menor valor de aderência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , respectivamente.

Além disso, de acordo com a Definição 2.2, temos que  $\underline{\text{dens}}(A)$  é nula se, e somente se,  $\overline{\text{dens}}(\mathbb{N} \setminus A)$  é igual a 1. Com efeito,

$$\begin{aligned} \overline{\text{dens}}(\mathbb{N} \setminus A) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}((\mathbb{N} \setminus A) \cap [1, n])}{n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \text{card}(A \cap [1, n])}{n} = \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n} \right) &= 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n} = 1 - \underline{\text{dens}}(A). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Na penúltima igualdade acima, utilizamos o fato visto em [10] de que  $\sup(-X) = -\inf(X)$ , onde  $X$  é um subconjunto de números reais não vazio e limitado inferiormente.

Dessa maneira, podemos escrever (2.1) como

$$\overline{\text{dens}}(\mathbb{N} \setminus A) + \underline{\text{dens}}(A) = 1. \quad (2.2)$$

Daí concluímos que  $\underline{\text{dens}}(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{\text{dens}}(\mathbb{N} \setminus A) = 1$ .

Outro fato importante sobre a densidade superior de um conjunto de números naturais está na proposição a seguir.

**Proposição 2.3.** *Se  $A \subset \mathbb{N}$  é tal que  $\overline{\text{dens}}(A) > 0$ , então  $A$  é infinito.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $A$  seja finito e que  $\text{card}(A) = m$ . Como  $A$  é bem ordenado, suponha  $A = \{a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m\}$ . Então, para qualquer  $n$  maior do que  $a_m$ , temos que  $\frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n} = \frac{m}{n}$ . Assim,

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap [1, n])}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0,$$

uma contradição. ■

**Observação 2.4.** Como consequência da Proposição 2.3, temos que se  $A$  é um conjunto finito de números naturais, então  $\overline{\text{dens}}(A) = 0$ .

**Definição 2.5.** Seja  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua sobre um espaço métrico  $X$ . Dizemos que  $T$  é **distribucionalmente caótica** se existem um conjunto não-enumerável  $\Gamma \subset X$  e um  $\varepsilon > 0$  tais que, para quaisquer  $x, y \in \Gamma$  distintos, temos

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon\} = 1 \quad \text{e} \quad \overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} = 1$$

para todo  $\tau > 0$ .

**Observação 2.6.** Note que, graças à igualdade (2.2), temos que a condição sobre as densidades superiores vista na Definição 2.5 pode ser substituída por

$$\underline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \varepsilon\} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} = 1$$

para todo  $\tau > 0$ , conforme visto em [4]. Repare também que os conjuntos

$$\{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} \quad \text{e} \quad \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon\}$$

são complementares apenas quando  $\tau = \varepsilon$ .

**Definição 2.7.** Dados  $x, y \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , dizemos que  $(x, y)$  é um **par distribucionalmente  $\varepsilon$ -caótico** para uma aplicação  $T : X \rightarrow X$  se

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon\} = 1 \quad \text{e} \quad \overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} = 1, \quad \forall \tau > 0.$$

Observe que, pelas Definições 2.5 e 2.7, se  $T$  é uma aplicação distribucionalmente caótica, então todo par de elementos distintos de  $\Gamma$  é um par distribucionalmente  $\varepsilon$ -caótico para  $T$ . Neste caso, diremos que  $\Gamma$  é um **conjunto distribucionalmente  $\varepsilon$ -caótico** para  $T$ .

**Definição 2.8.** Sejam  $X$  um espaço de Fréchet,  $T \in B(X)$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  é um **vetor distribucionalmente irregular**<sup>1</sup> para  $T$  se existem  $m \in \mathbb{N}$  e  $A, B \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = \overline{\text{dens}}(B) = 1$ , tais que

$$\lim_{n \in A} T^n x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \in B} \|T^n x\|_m = \infty.$$

---

<sup>1</sup>A definição 2.8 trata-se de uma generalização para espaços Fréchet da definição de vetor distribucionalmente irregular no contexto de espaços Banach apresentada em [3], onde a norma do espaço Banach foi trocada pela seminorma  $\|\cdot\|_m$  e os conjuntos  $A = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $B = (m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , formados por sequências crescentes de inteiros positivos, respectivamente, foram representados simplesmente por  $A$  e  $B$ .

A respeito dos conjuntos  $A$  e  $B$  na Definição 2.8, utilizaremos a notação  $A = (n_k)_{k \in \mathbb{N}} = \{n_1 \leq \dots \leq n_k \leq \dots\}$  e  $B = (m_k)_{k \in \mathbb{N}} = \{m_1 \leq \dots \leq m_k \leq \dots\}$  sempre que for conveniente.

Para referências futuras, cabe enunciar e demonstrar a seguinte proposição:

**Proposição 2.9.** *Seja  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathbb{R}_+$ . São equivalentes:*

$$(i) \exists A \subset \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{\text{dens}}(A) = 1 \text{ e } \lim_{n \in A} r_n = 0;$$

$$(ii) \forall \tau > 0, \overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; r_n < \tau\} = 1.$$

*Demonstração.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Considere  $A = \{n_1 \leq \dots \leq n_k \leq \dots\}$  e tome  $\tau > 0$  qualquer. Por hipótese,  $\lim_{n \in A} r_n = 0$ . Assim, segue da definição de limite de sequências de números reais que existe um índice  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $r_{n_k} < \tau$ , para todo  $k \geq k_0$ . Considere  $M := A \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_{k_0}\}$ . Como  $\{n_1, n_2, \dots, n_{k_0}\}$  é finito, segue dos resultados vistos acima que  $\overline{\text{dens}}(M) = \overline{\text{dens}}(A) = 1$ . Como  $M \subset \{n \in \mathbb{N}; r_n < \tau\}$ , concluímos que  $\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; r_n < \tau\} = 1$  e a afirmativa (ii) está provada.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , defina  $A_k := \left\{n \in \mathbb{N}; r_n < \frac{1}{k}\right\}$ . Por hipótese,  $\overline{\text{dens}}(A_k) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $\overline{\text{dens}}(A_1) = 1$ . Daí, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{\text{card}(A_1 \cap [1, n_1])}{n_1} > 1 - \frac{1}{2}.$$

Como o intervalo inteiro  $[1, n_1]$  é finito, segue que  $\overline{\text{dens}}(A_2 \setminus [1, n_1]) = 1$ . Portanto, existe  $n_2 > n_1$  tal que

$$\frac{\text{card}((A_2 \setminus [1, n_1]) \cap [1, n_2])}{n_2} > 1 - \frac{1}{3}.$$

Note que  $(A_2 \setminus [1, n_1]) \cap [1, n_2] = A_2 \cap [n_1 + 1, n_2]$ , pois  $n_2 > n_1$ . Assim, podemos escrever que

$$\frac{\text{card}(A_2 \cap [n_1 + 1, n_2])}{n_2} > 1 - \frac{1}{3}.$$

Prosseguindo indutivamente, como  $\overline{\text{dens}}(A_k \setminus [1, n_{k-1}]) = 1$ , encontramos um índice  $n_k > n_{k-1}$  tal que

$$\frac{\text{card}(A_k \cap [n_{k-1} + 1, n_k])}{n_k} > 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Dessa maneira, temos que  $\frac{\text{card}(A_k \cap [n_{k-1} + 1, n_k])}{n_k} \rightarrow 1$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Considere

$$A := (A_1 \cap [1, n_1]) \cup (A_2 \cap [n_1 + 1, n_2]) \cup \dots \cup (A_k \cap [n_{k-1} + 1, n_k]) \cup \dots.$$

Então  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$ . Além disso,

$$n \in A \text{ e } n > n_k \Rightarrow n \in A_{k+1} \Rightarrow r_n < \frac{1}{k+1},$$

provando que  $\lim_{n \in A} r_n = 0$ . ■

Nas definições a seguir, considere um espaço de Fréchet  $X$ ,  $T \in B(X)$  e  $x \in X$ .

**Definição 2.10.** Dizemos que  $x$  tem órbita **distribucionalmente próxima de zero** se existe  $A \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$ , tal que  $\lim_{n \in A} T^n x = 0$ .

**Definição 2.11.** Dizemos que  $x$  tem órbita **distribucionalmente ilimitada** se existem  $m \in \mathbb{N}$  e  $B \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(B) = 1$ , tais que  $\lim_{n \in B} \|T^n x\|_m = \infty$ . Em particular, quando quisermos enfatizar tal número  $m \in \mathbb{N}$ , diremos que  $x$  tem órbita **distribucionalmente  $m$ -ilimitada**.

Em suma, dizer que um vetor  $x \in X$  satisfaz simultaneamente às Definições 2.10 e 2.11 é o mesmo que dizer que  $x$  é um vetor distribucionalmente irregular para  $T$ . A seguir, faremos algumas observações e estudaremos de maneira um pouco mais profunda esses tipos de vetores.

## 2.2 Sobre vetores distribucionalmente irregulares

Sabemos que, dados um espaço Banach  $X$ , um espaço normado  $Y$ , e  $\mathcal{X} \subset B(X, Y)$  (isto é,  $\mathcal{X}$  é um conjunto de aplicações lineares contínuas de  $X$  em  $Y$ ), uma das versões para o Teorema de Banach-Steinhaus (cf. [16]) afirma que se  $A := \{x \in X; \mathcal{X}(x) \text{ é limitado}\}$  é de segunda categoria em  $X$ , então  $\mathcal{X}$  é limitado em  $B(X, Y)$ . Assim, se  $T \in B(X)$  e  $\|T^n\| \rightarrow \infty$ , então este teorema nos garante a existência de um conjunto residual de vetores em  $X$  com órbitas ilimitadas. De fato, defina  $\mathcal{X} := \{T^n; n \geq 0\}$ . Então  $\mathcal{X}(x) = \text{orb}(x, T)$ . Claramente,  $\mathcal{X}$  é um subconjunto de  $B(X)$  e como  $\|T^n\| \rightarrow \infty$ , temos que  $\mathcal{X}$  não é limitado em  $B(X)$ . Pela negação do Teorema de Banach-Steinhaus enunciado acima, segue que

$$A := \{x \in X; \mathcal{X}(x) \text{ é limitado}\}$$

não é de segunda categoria. Portanto,  $A$  deve ser de primeira categoria e isto implica que  $X \setminus A$  é residual. Como

$$X \setminus A = \{x \in X; \mathcal{X}(x) \text{ é ilimitado}\} = \{x \in X; \text{orb}(x, T) \text{ é ilimitado}\},$$

nossa afirmação está provada.

No entanto, a hipótese  $\|T^n\| \rightarrow \infty$  não é capaz de garantir a existência de um subconjunto de vetores de  $X$  com órbitas *distribucionalmente* ilimitadas e, por conseguinte, a de vetores distribucionalmente irregulares. Com efeito, apresentaremos a seguir um exemplo de operador definido em um espaço Banach que não possui vetores com órbitas distribucionalmente ilimitadas, apesar de satisfazer à condição  $\|T^n\| \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 2.12.** *Seja  $X := \ell^1(\mathbb{N})$ . Dado  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$ , existe  $T \in B(X)$  tal que  $\|T^n\| \rightarrow \infty$ , mas nenhum  $x \in X$  possui órbita distribucionalmente ilimitada e, portanto,  $\ell^1(\mathbb{N})$  não possui vetor distribucionalmente irregular para  $T$ .*

Para obter tal operador, a ideia é proceder da seguinte forma:

1º) Vamos definir  $T \in B(X)$  de modo que  $\|T^n\| = (n+1)^{(1-\varepsilon)}$ . Observe que  $\|T^n\| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

2º) Vamos supor que exista  $x \in X$  e  $B \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(B) = 1$ , tais que  $\lim_{n \in B} \|T^n x\| = \infty$  (isto é, vamos supor que  $X$  possui um vetor com órbita distribucionalmente ilimitada) e obteremos uma contradição.

*Demonstração.* Considere  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  a base (de Schauder) canônica de  $X$ . Como  $X = \ell^1(\mathbb{N})$  é um espaço de Banach, basta definir  $T$  em termos dos vetores da base canônica de  $X$ . Assim, considere

$$Te_k := \begin{cases} 0, & \text{se } k = 1 \\ \left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\varepsilon} e_{k-1}, & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

com  $\varepsilon$  no intervalo  $(0, \frac{1}{5})$  fixado. Então,

$$Te_1 = 0, Te_2 = 2^{1-\varepsilon} e_1, Te_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1-\varepsilon} e_2, Te_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} e_3, \dots$$

e assim por diante.

Defina  $w_k := \left(\frac{k+1}{k}\right)^{1-\varepsilon}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Então podemos escrever que  $Te_{k+1} = w_k e_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto, se  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$ , a forma geral de  $T$  é dada por:

$$\begin{aligned}
Tx &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n T e_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} w_n e_n = (w_1 x_2, w_2 x_3, w_3 x_4, \dots).
\end{aligned}$$

Isto significa que  $T$  é uma aplicação que *desloca para a esquerda* as coordenadas do vetor  $x$  e multiplica cada uma delas pelos termos de uma certa sequência de escalares não nulos  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , chamada de *pesos*. Note que  $T$ , assim definido, é linear e para que seja um operador sobre  $X$ , resta mostrar que  $T$  é contínuo. Para tanto, utilizaremos o seguinte lema:

**Lema 2.13.** *Seja  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathbb{K}$  e  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  (com  $1 \leq p < \infty$ ) uma aplicação tal que  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (w_1 x_2, w_2 x_3, w_3 x_4, \dots)$ . Então  $T \in B(\ell^p)$  se, e somente se, a sequência  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada.*

*Demonstração.* Sejam  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a base canônica de  $\ell^p$  e  $\|\cdot\|_p$  a norma de  $\ell^p$ . Suponha  $T \in B(\ell^p)$ . Então,

$$|w_n| = \|w_n e_n\|_p = \|T e_{n+1}\|_p \leq \|T\| \|e_{n+1}\|_p = \|T\|,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como o operador está fixo, segue que  $\|T\|$  está fixo e, portanto,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada.

Reciprocamente, suponha  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  limitada e seja  $C \in \mathbb{R}_+$  tal que  $|w_n| \leq C$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, se  $x \in \ell^p$ , temos:

$$\|Tx\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_{n+1}|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |C|^p |x_{n+1}|^p\right)^{1/p} \leq C \|x\|_p, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Logo,  $Tx \in \ell^p, \forall x \in \ell^p$  e isto prova que  $T$  está bem definido. Além disso, pela desigualdade (2.3), segue do Teorema 1.23 que  $T$  é contínuo, com  $\|T\| \leq C$ . ■

Dessa maneira, como  $w_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{1-\varepsilon}$  e  $4/5 < 1 - \varepsilon < 1$ , temos que  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência convergente de números reais e, portanto, limitada. Assim,  $T$  é um operador<sup>2</sup> sobre  $\ell^1(\mathbb{N})$ .

Observe também que  $\|T^n\| = \|T^n e_{n+1}\| = (n+1)^{1-\varepsilon}$ . Com efeito:

---

<sup>2</sup>Neste caso, dizemos que  $T$  é um *operador deslocamento à esquerda com pesos* (veja a Seção 5.1 e a referência [9]).

- $T^2 e_k = T(T e_k) = T \left( \left( \frac{k}{k-1} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-1} \right) = \left( \frac{k}{k-1} \right)^{1-\varepsilon} T e_{k-1}$   
 $= \left( \frac{k}{k-1} \right)^{1-\varepsilon} \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-2} = \left( \frac{k}{k-2} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-2}, \quad \text{para } k \geq 3.$
- $T^3 e_k = T(T^2 e_k) = T \left( \left( \frac{k}{k-2} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-2} \right) = \left( \frac{k}{k-2} \right)^{1-\varepsilon} T e_{k-2}$   
 $= \left( \frac{k}{k-2} \right)^{1-\varepsilon} \left( \frac{k-2}{k-3} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-3} = \left( \frac{k}{k-3} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-3}, \quad \text{para } k \geq 4.$

Prosseguindo indutivamente, obtemos que

$$T^n e_k = \left( \frac{k}{k-n} \right)^{1-\varepsilon} e_{k-n}, \quad \text{para } k \geq n+1. \quad (2.4)$$

Daí,  $T^n e_{n+1} = \left( \frac{n+1}{n+1-n} \right)^{1-\varepsilon} e_{n+1-n} = (n+1)^{1-\varepsilon} e_1$ , donde

$$\|T^n e_{n+1}\| = (n+1)^{1-\varepsilon} \|e_1\| = (n+1)^{1-\varepsilon}.$$

Para provar que  $\|T^n\| = \|T^n e_{n+1}\|$ , note que

$$\begin{aligned} T^n x &= T^n(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) \\ &= ((w_1 \dots w_{n-1} w_n) x_{n+1}, (w_2 \dots w_n w_{n+1}) x_{n+2}, \dots, \underbrace{(w_k \dots w_{n+k-1}) x_{n+k}}_{\text{posição } k\text{-ésima}}, \dots). \end{aligned}$$

Fixe  $n \in \mathbb{N}$  e denote  $c_k := \prod_{j=k}^{n+k-1} w_j$ . Então  $c_k = \prod_{j=k}^{n+k-1} \left( \frac{j+1}{j} \right)^{1-\varepsilon}$  e, portanto, a sequência

$(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é decrescente. Logo,  $|c_k| \leq |c_1|$ ,  $\forall k$ . Assim,  $\|T^n x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k x_{n+k}| \leq |c_1| \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n+k}| \leq |c_1| \|x\|_1$ ,  $\forall x \in \ell^1$ , de onde concluímos que  $\|T^n\| \leq |c_1| = c_1$ . Mas  $\|T^n e_{n+1}\| = |c_1| = c_1$ . Logo,  $\|T^n\| = \|T^n e_{n+1}\| = (n+1)^{1-\varepsilon}$  e isto termina a construção do operador  $T$ .

Suponha agora que existam  $x \in \ell^1$ , com  $\|x\| = 1$ , e uma sequência  $(n_k)$  em  $\mathbb{N}$  tal que  $\|T^{n_k} x\| \rightarrow \infty$ , com densidade superior igual a 1. Considere  $B := \left\{ n \in \mathbb{N}; \|T^n x\| > \frac{3}{\varepsilon} \right\}$ . Então  $\overline{\text{dens}}(B) = 1$  (pois  $\{n_k\} \setminus B$  é finito). Portanto, para algum  $N$  suficientemente grande, temos que  $\text{card}(B \cap [1, N]) \geq N(1 - \varepsilon)$ . Isto é

$$\text{card} \left\{ 1 \leq n \leq N; \|T^n x\| > \frac{3}{\varepsilon} \right\} \geq N(1 - \varepsilon).$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^N \|T^n x\| \geq \frac{3}{\varepsilon} N(1 - \varepsilon) = N \left( \frac{3}{\varepsilon} - 3 \right),$$

donde

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|T^n x\| \geq \frac{3}{\varepsilon} - 3. \quad (2.5)$$

Por outro lado, podemos escrever o vetor  $x \in \ell^1(\mathbb{N})$  em função dos vetores de sua base canônica, a saber

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j,$$

onde  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de escalares, nem todos nulos. Como supusemos  $\|x\| = 1$ , segue que  $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = 1$ . Assim,

$$\sum_{j=1}^{2N} |\alpha_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = 1. \quad (2.6)$$

Dessa forma, obtemos:

$$\sum_{n=1}^N \|T^n x\| = \sum_{n=1}^N \left\| T^n \left( \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \right) \right\| = \sum_{n=1}^N \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T^n e_j \right\| = \sum_{n=1}^N \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j T^n e_j \right\|,$$

pois  $T^n e_j = 0$  se  $n \geq j$ . Usando a equação (2.4),

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j T^n e_j \right\| &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| \|T^n e_j\| \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| \left( \frac{j}{j-n} \right)^{1-\varepsilon} \|e_{j-n}\| \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-n)^{\varepsilon-1} \\ &= \sum_{j=1+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-1)^{\varepsilon-1} + \sum_{n=2}^N \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-n)^{\varepsilon-1} \\ &= (|\alpha_2| 2^{1-\varepsilon} (2-1)^{\varepsilon-1} + |\alpha_3| 3^{1-\varepsilon} (3-1)^{\varepsilon-1} + \dots) + \\ &+ \sum_{j=2+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-2)^{\varepsilon-1} + \sum_{n=3}^N \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-n)^{\varepsilon-1} \\ &= (|\alpha_2| 2^{1-\varepsilon} (2-1)^{\varepsilon-1} + |\alpha_3| 3^{1-\varepsilon} (3-1)^{\varepsilon-1} + \dots) + \\ &+ (|\alpha_3| 3^{1-\varepsilon} (3-2)^{\varepsilon-1} + |\alpha_4| 4^{1-\varepsilon} (4-3)^{\varepsilon-1} + \dots) + \\ &+ \sum_{j=3+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-3)^{\varepsilon-1} + \sum_{n=4}^N \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} (j-n)^{\varepsilon-1}, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Como as séries acima são absolutamente convergentes, podemos reordenar seus termos de maneira conveniente e obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \|T^n x\| &= |\alpha_2| 2^{1-\varepsilon} (2-1)^{\varepsilon-1} + |\alpha_3| 3^{1-\varepsilon} [(3-1)^{\varepsilon-1} + (3-2)^{\varepsilon-1}] + \\
&\quad + |\alpha_4| 4^{1-\varepsilon} [(4-1)^{\varepsilon-1} + (4-2)^{\varepsilon-1} + (4-3)^{\varepsilon-1}] + \dots + \\
&\quad + |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} [(j-1)^{\varepsilon-1} + (j-2)^{\varepsilon-1} + \dots + (j-(j-1))^{\varepsilon-1}] + \dots = \\
&= |\alpha_2| 2^{1-\varepsilon} \underbrace{\sum_{n=1}^{\min\{N,1\}} (2-n)^{\varepsilon-1}}_{N \geq 2} + |\alpha_3| 3^{1-\varepsilon} \underbrace{\sum_{n=1}^{\min\{N,2\}} (3-n)^{\varepsilon-1}}_{N \geq 3} + |\alpha_4| 4^{1-\varepsilon} \underbrace{\sum_{n=1}^{\min\{N,3\}} (4-n)^{\varepsilon-1}}_{N \geq 4} + \dots = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} \sum_{n=1}^{\min\{N,j-1\}} (j-n)^{\varepsilon-1} \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{2N} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} \sum_{n=1}^{j-1} (j-n)^{\varepsilon-1}}_{(I)} + \underbrace{\sum_{j=2N+1}^{\infty} |\alpha_j| \sum_{n=1}^N \left(\frac{j}{j-n}\right)^{1-\varepsilon}}_{(II)}.
\end{aligned}$$

Escrevendo  $k = j - n$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{j-1} (j-n)^{\varepsilon-1} &= \sum_{k=1}^{j-1} k^{\varepsilon-1} = 1^{\varepsilon-1} + 2^{\varepsilon-1} + \dots + (j-1)^{\varepsilon-1} \\
&\leq 1 + \int_1^{j-1} x^{\varepsilon-1} dx = \frac{(j-1)^{\varepsilon}}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Como  $1 - \frac{1}{\varepsilon} < 0$ , pois  $\varepsilon < 1$ , temos que  $\frac{(j-1)^{\varepsilon}}{\varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \leq \frac{j^{\varepsilon}}{\varepsilon}$ . Daí,  $\sum_{n=1}^{j-1} (j-n)^{\varepsilon-1} \leq \frac{j^{\varepsilon}}{\varepsilon}$  e podemos escrever:

$$(I) = \sum_{j=1}^{2N} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} \sum_{n=1}^{j-1} (j-n)^{\varepsilon-1} \leq \sum_{j=1}^{2N} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} \frac{j^{\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Por outro lado, para  $j > 2N$  e  $n \leq N$ , temos que  $\frac{j}{j-n} \leq 2$ . Como  $0 < 1 - \varepsilon < 1$ , segue que  $\left(\frac{j}{j-n}\right)^{1-\varepsilon} \leq 2^{1-\varepsilon} \leq 2$ . Portanto,  $\sum_{n=1}^N \left(\frac{j}{j-n}\right)^{1-\varepsilon} \leq 2N$ . Logo,

$$(II) = \sum_{j=2N+1}^{\infty} |\alpha_j| \sum_{n=1}^N \left(\frac{j}{j-n}\right)^{1-\varepsilon} \leq 2N \sum_{j=2N+1}^{\infty} |\alpha_j| \leq 2N, \quad (2.8)$$

pois  $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = 1$ . Assim, das desigualdades (2.7) e (2.8), temos:

$$\sum_{n=1}^N \|T^n x\| \leq \sum_{j=1}^{2N} |\alpha_j| j^{1-\varepsilon} \frac{j^\varepsilon}{\varepsilon} + 2N,$$

donde

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|T^n x\| \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{2N} |\alpha_j| \frac{j}{\varepsilon} + 2 \leq 2 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

No entanto, observe que  $2 + \frac{2}{\varepsilon} < \frac{3}{\varepsilon} - 3$ , já que  $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$ . Com efeito,

$$0 < 5\varepsilon < 1 \Leftrightarrow 0 < 2\varepsilon + 3\varepsilon < 3 - 2.$$

Isso significa que

$$2\varepsilon + 2 < 3 - 3\varepsilon.$$

Portanto,

$$\frac{2\varepsilon + 2}{\varepsilon} < \frac{3 - 3\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow 2 + \frac{2}{\varepsilon} < \frac{3}{\varepsilon} - 3.$$

Logo,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|T^n x\| \leq 2 + \frac{2}{\varepsilon} < \frac{3}{\varepsilon} - 3,$$

contradizendo a desigualdade em (2.5), como queríamos.

Tendo em vista o Exemplo 2.12, somos motivados a indagar: que condições, portanto, devemos impor sobre um operador  $T \in B(X)$  para garantir a existência de um vetor (ou de um conjunto de vetores) com órbita distribucionalmente ilimitada? Se tal (ou tais) vetor(es) existe(m), o que podemos afirmar a respeito de  $T$ ? Poderemos garantir que  $T$  é distribucionalmente caótico? Trataremos destas questões no próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Uma Caracterização para o Caos Distribucional

### 3.1 Órbitas distribucionalmente ilimitadas e órbitas distribucionalmente próximas de zero

A fim de obter um critério para o caos distribucional de operadores em espaços de Fréchet, veremos a seguir algumas condições necessárias e suficientes para que ocorra a existência de vetores com órbitas distribucionalmente ilimitadas.

**Proposição 3.1.** *Se  $T \in B(X)$  e  $m \in \mathbb{N}$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existem  $\varepsilon > 0$ , uma sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  e uma sequência crescente  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  e*

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\} \geq N_k \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

*para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;*

- (ii) *Existe  $y \in X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada;*  
(iii) *O conjunto de todos os  $y \in X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada é residual em  $X$ .*

*Demonstração.* (iii)  $\Rightarrow$  (ii): Se  $Y$  é o conjunto de todos os  $y \in X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada, então  $Y$  contém um  $G_\delta$ -conjunto denso em  $X$ , pela Proposição 1.6. Em particular,  $Y \neq \emptyset$  e segue a afirmação (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Seja  $y$  um vetor de  $X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada. Pela definição, existe  $A \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$  tal que  $\lim_{n \in A} \|T^n y\|_m = \infty$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tome  $y_k := \frac{1}{k}y$ . Então  $y_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Escolha  $\varepsilon > 0$  qualquer. Como  $T \in B(X)$ , segue que  $Ty_k = \frac{1}{k}Ty$ . Portanto,  $T^j y_k = \frac{1}{k}T^j y$ , donde

$$\|T^j y_k\|_m = \left\| \frac{1}{k} T^j y \right\|_m = \frac{1}{k} \|T^j y\|_m, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como  $\lim_{n \in A} \|T^n y\|_m = \infty$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $j_0 \in A$  tal que  $\|T^j y\|_m > \varepsilon k$ , para todo  $j \in A$  com  $j \geq j_0$ . Assim, fixado  $k$  qualquer, temos que  $\|T^j y_k\|_m = \frac{1}{k} \|T^j y\|_m > \varepsilon$ , para todo  $j \in A$  suficientemente grande. Daí,

$$\overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\} = \overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; \|T^j y\|_m > \varepsilon k\} \geq \overline{\text{dens}}(A) = 1.$$

(pois os “ $j$ ’s” que satisfazem  $\|T^j y\|_m > \varepsilon k$  são, pelo menos, todos os elementos de  $A$  a partir de um certo número natural  $j_0 \in A$ , podendo haver outros que não estão em  $A$ ). Assim,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{1 \leq j \leq N; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\})}{N} = \overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\} = 1 > 1 - \frac{1}{k}.$$

Logo, existe  $N_k \in \mathbb{N}$  tão grande quanto se queira tal que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\} \geq N_k \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Como os  $N_k$ ’s podem ser escolhidos arbitrariamente grandes, podemos escolher os  $N_k$ ’s de modo que a sequência  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  seja crescente e isto completa a prova de (i).

(i)  $\Rightarrow$  (iii): Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja

$$M_k := \{x \in X; \exists n \in \mathbb{N} \text{ com } \text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j x\|_m > k\} \geq n(1 - k^{-1})\}.$$

Vamos mostrar que as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1)  $M_k$  é aberto em  $X$ ;
- (2)  $M_k$  é denso em  $X$  e, portanto,  $M := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$  é denso em  $X$  (pelo Teorema de Baire) e residual;
- (3) Se  $x \in M$ , então  $x$  tem órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada.

Com efeito:

- (1) Suponha  $M_k \neq \emptyset$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  (caso contrário, se  $M_k = \emptyset$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , nada teríamos a demonstrar). Tome  $x_0 \in M_k$ . Pela definição de  $M_k$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j x_0\|_m > k\} \geq n(1 - k^{-1}). \quad (3.1)$$

Sejam  $j_1 < j_2 < \dots < j_r$  todos os “ $j$ ’s” no intervalo inteiro  $[1, n]$  para os quais

$$\|T^{j_i} x_0\|_m > k. \quad (3.2)$$

Então  $\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j x_0\|_m > k\} = r$ . Pela desigualdade (3.1), segue que  $r \geq n(1 - k^{-1})$ . Defina  $\varphi_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi_j(x) := \|T^j x\|_m$ . Então  $\varphi_j$  é contínua, pois a aplicação seminorma é contínua (c.f [16]). Considere  $V := \bigcap_{i=1}^r \varphi_{j_i}^{-1}(]k, +\infty[)$ . Da continuidade de  $\varphi_j$ , segue que  $\varphi_{j_i}^{-1}(]k, +\infty[)$  é aberto em  $X$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Logo,  $V$  é aberto em  $X$ . Pela desigualdade (3.2), obtemos  $x_0 \in V$ . Portanto,  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$ . Tome  $x \in V$ , com  $x \neq x_0$  ( $V$  não pode ser um conjunto unitário, pois  $X$  não possui pontos isolados, já que é um espaço de Fréchet). Então  $\varphi_{j_i}(x) \in ]k, +\infty[$ , para todo  $i \in [1, r]$ . Isto é o mesmo que dizer que  $\|T^{j_i} x\|_m > k$ , para todo  $i \in [1, r]$ . Daí,

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^{j_i} x\|_m > k\} \geq r \geq n(1 - k^{-1}),$$

implicando que  $x \in M_k$ . Concluimos assim que  $x_0 \in V \subset M_k$  e, portanto,  $M_k$  é aberto, como queríamos provar.

- (2) Para mostrar que  $M_k$  é denso em  $X$ , considere  $x \in X$ ,  $\delta > 0$  e  $m_1 \in \mathbb{N}$ . Vamos provar que existe  $u \in M_k$  tal que  $\|u - x\|_{m_1} < \delta$ . Pela hipótese (i), existem  $\varepsilon > 0$ , uma sequência  $\{y_1, y_2, \dots\}$  em  $X$  com  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$  e uma sequência crescente  $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tais que

$$\text{card} \left\{ 1 \leq j \leq N_i; \|T^j y_i\|_{m_1} > \varepsilon \right\} \geq N_i \left( 1 - \frac{1}{i} \right).$$

Tome  $C := \frac{\delta \varepsilon}{4k^2} > 0$ . Em particular, existem  $u \in \{y_1, y_2, \dots\}$  com  $\|u\|_{m_1} < C$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j u\|_m > \varepsilon\} \geq n \left( 1 - \frac{1}{2k} \right) \quad (3.3)$$

Considere os vetores  $u_s := x + \frac{\delta s}{2kC} u$ , com  $s = 0, 1, \dots, 2k - 1$ . Então

$$\|u_s - x\|_{m_1} = \left\| \frac{\delta s}{2kC} u \right\|_{m_1} = \frac{\delta s}{2kC} \|u\|_{m_1} \leq \frac{\delta s}{2kC} C = \frac{\delta s}{2k} = \frac{s}{2k} \delta.$$

Como  $s$  pertence ao intervalo inteiro  $[0, 2k - 1]$ , segue que  $\frac{s}{2k} < 1$  e, portanto,  $\frac{s}{2k}\delta < \delta$ . Logo,

$$\|u_s - x\|_{m_1} < \delta, \forall s \in [0, 2k - 1].$$

**Afirmção 3.1.1.** *Existe  $s \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$  tal que  $u_s \in M_k$ .*

Para provar a afirmação acima, considere primeiramente

$$A := \{1 \leq j \leq n; \|T^j u\|_m > \varepsilon\}.$$

Pela desigualdade (3.3), temos que  $\text{card}(A) \geq n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ . Para cada  $s = 0, 1, \dots, 2k - 1$ , seja

$$B_s := \{1 \leq j \leq n; \|T^j u_s\|_m \leq k\}.$$

Vamos mostrar que se  $t, s \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$  e  $s \neq t$ , então  $B_s \cap B_t \cap A = \emptyset$  e, portanto,  $(B_s \cap A)$  e  $(B_t \cap A)$  são disjuntos. Com efeito, se  $s \neq t$  e  $j \in B_s \cap B_t \cap A$ , então

$$\begin{aligned} \|T^j u_s - T^j u_t\|_m &= \left\| T^j \left( x + \frac{\delta s}{2kC} u \right) - T^j \left( x + \frac{\delta t}{2kC} u \right) \right\|_m = \\ &= \left\| T^j x + \frac{\delta s}{2kC} T^j u - T^j x - \frac{\delta t}{2kC} T^j u \right\|_m = \left\| \left( \frac{\delta s}{2kC} - \frac{\delta t}{2kC} \right) T^j u \right\|_m = \\ &= \frac{\delta}{2kC} \underbrace{|s - t|}_{\geq 1, \text{ pois } s \neq t} \underbrace{\|T^j u\|_m}_{> \varepsilon} > \frac{\delta \varepsilon}{2kC} = \frac{\delta \varepsilon}{2k} \cdot \frac{4k^2}{\delta \varepsilon} = 2k. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|T^j u_s - T^j u_t\|_m \leq \underbrace{\|T^j u_s\|_m}_{\leq k, \text{ pois } j \in B_s} + \underbrace{\|T^j u_t\|_m}_{\leq k, \text{ pois } j \in B_t} \leq 2k,$$

uma contradição. Logo,  $B_s \cap B_t \cap A = \emptyset$ , como queríamos. Além disso, note que existe  $s_0 \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$  tal que  $\text{card}(B_{s_0} \cap A) \leq \frac{\text{card } A}{2k}$ . Com efeito, caso  $B_s = \emptyset$  para algum  $s$  em  $\{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ , então  $B_s \cap A = \emptyset$  e, portanto,  $\text{card}(B_s \cap A) = 0 \leq \frac{\text{card}(A)}{2k}$ . Caso contrário, se  $B_s \neq \emptyset$  e

$$\text{card}(B_{s_0} \cap A) > \frac{\text{card}(A)}{2k}, \forall s \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\},$$

tome  $V_s := B_s \cap A$ , para cada  $s \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ . Pelo que provamos acima, temos que os conjuntos  $V_s$  e  $V_t$  são disjuntos, desde que  $s \neq t$ . Logo,

$$\text{card}\left(\bigcup_{s=0}^{2k-1} V_s\right) = \sum_{s=0}^{2k-1} \text{card}(B_s \cap A) > \frac{\text{card}(A)}{2k} \cdot 2k = \text{card}(A).$$

Mas  $\bigcup_{s=0}^{2k-1} V_s \subset A$ . Absurdo. Logo, existe pelo menos um  $s_0$  em  $\{0, 1, \dots, 2k-1\}$  tal que  $\text{card}(B_{s_0} \cap A) \leq \frac{\text{card}(A)}{2k}$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \text{card}(A \setminus B_{s_0}) &= \text{card}(A) - \text{card}(B_{s_0} \cap A) \geq \text{card}(A) \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \\ &\geq n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{card}(A \setminus B_{s_0}) \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Se  $j \in A \setminus B_{s_0}$ , temos que  $j \notin B_{s_0}$  e, daí,  $\|T^j u_{s_0}\|_m > k$ . Logo,

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j u_{s_0}\|_m > k\} \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Isto implica que  $u_{s_0} \in M_k$  e demonstramos a Afirmação 3.1.1 acima.

Em particular, podemos concluir que  $M_k$  é denso em  $X$ . Logo, o conjunto

$$M := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$$

é uma interseção enumerável de abertos densos de um espaço métrico completo, donde é denso em  $X$  pelo Teorema de Baire. Portanto,  $M$  é residual pela Definição 1.1.

- (3) Seja  $x \in M$ . Vamos mostrar que  $x$  tem órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada. De fato, como  $x$  pertence a todos os  $M_k$ , segue que para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $n_k \in \mathbb{N}$ , com

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n_k; \|T^j x\|_m > k\} \geq n_k \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Considere  $A_k := \{1 \leq j \leq n_k; \|T^j x\|_m > k\}$  e denote  $A := \bigcup_k A_k$ . Como

$$\frac{\text{card}(A \cap [1, n_k])}{n_k} \geq \frac{\text{card}(A_k)}{n_k} \geq 1 - \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

segue que  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$ . Além disso, dado  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $j_0 \in A$  tal que  $\|T^j x\|_m > k$ , para todo  $j \geq j_0$  em  $A$ . Logo,  $\lim_{j \in A} \|T^j x\|_m = \infty$ . Portanto,  $x$  tem órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada.

Pelo item (3), o conjunto de todos os vetores de  $X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada contém  $M$ , donde é residual em  $X$  pelo item (2). Isto completa a prova da Proposição 3.1. ■

A proposição a seguir possui uma versão para espaços de Banach.

**Proposição 3.2.** *Se  $T \in B(X)$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *Existem  $\varepsilon > 0$ , uma sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  e uma sequência crescente  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} = 1;$$

- (ii) *Existe  $y \in X$  com órbita distribucionalmente ilimitada;*

- (iii) *O conjunto de todos os  $y \in X$  com órbita distribucionalmente ilimitada é residual em  $X$ .*

No caso em que  $X$  é um espaço de Banach, as afirmativas acima são equivalentes às seguintes:

- (i') *Existem  $\varepsilon > 0$ , uma sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  e uma sequência crescente  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  e*

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\| > \varepsilon\} \geq \varepsilon N_k, \forall k \in \mathbb{N};$$

- (ii') *Existem  $y \in X$  e  $A \subset \mathbb{N}$  com  $\overline{\text{dens}}(A) > 0$  tais que  $\lim_{j \in A} \|T^j y\| = \infty$ ,*

onde  $\|\cdot\|$  é a norma que induz a topologia de  $X$ .

*Demonstração.* (iii)  $\Rightarrow$  (ii): Com efeito, se  $M$  é o conjunto dos elementos de  $X$  com órbita distribucionalmente ilimitada, segue da hipótese que  $M$  contém um  $G_\delta$ -conjunto denso e, portanto,  $M \neq \emptyset$ . Logo, existe pelo menos um  $y \in M$ . Como  $M \subset X$ , segue a afirmativa (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Seja  $y \in X$  um elemento com órbita distribucionalmente ilimitada. Por definição, existem  $m \in \mathbb{N}$  e  $A \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$ , tais que  $\lim_{n \in A} \|T^n y\|_m = \infty$ . Em particular,  $y$  tem órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada. Pela Proposição 3.1, existem  $\varepsilon > 0$ , uma sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  e uma sequência crescente  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  e

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\} \geq N_k \left(1 - \frac{1}{k}\right), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Além disso, lembremos que  $d(T^j y_k, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min \{1, \|T^j y_k\|_j\}$ . Como  $(\|\cdot\|_j)_{j \in \mathbb{N}}$  é uma família crescente de seminormas, vamos mostrar que é verdadeira a seguinte afirmação:

**Afirmção 3.1.2.** Dados  $m \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $\varepsilon' = \varepsilon'(m, \varepsilon)$  tal que  $\|x\|_m > \varepsilon$  implica  $d(x, 0) > \varepsilon'$ .

Com efeito, suponha  $\|x\|_m > \varepsilon$ . Pela definição da métrica, temos:

$$d(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, \|x\|_k\} \geq \frac{1}{2^m} \min \{1, \|x\|_m\} = \begin{cases} \frac{\|x\|_m}{2^m}, & \text{se } \|x\|_m < 1 \\ 1/2^m, & \text{se } \|x\|_m \geq 1 \end{cases}.$$

Como  $\|x\|_m > \varepsilon$ , segue que

$$d(x, 0) \geq \frac{1}{2^m} \min \{1, \|x\|_m\} = \begin{cases} \frac{\|x\|_m}{2^m} > \frac{\varepsilon}{2^m}, & \text{se } \|x\|_m < 1 \\ 1/2^m, & \text{se } \|x\|_m \geq 1 \end{cases}.$$

Logo,  $d(x, 0) \geq \min \left\{ \frac{1}{2^m}, \frac{\varepsilon}{2^m} \right\}$ . Assim, escolha  $\varepsilon' > 0$  tal que  $\min \left\{ \frac{1}{2^m}, \frac{\varepsilon}{2^m} \right\} > \varepsilon'$  e dessa forma obtemos um  $\varepsilon'$  tal que  $d(x, 0) > \varepsilon'$ , conforme o desejado.

Daí, se  $\|T^j y_k\|_m > \varepsilon$ , então  $d(T^j y_k, 0) > \varepsilon'$  para algum  $\varepsilon' > 0$ . Portanto,

$$\frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon'\}}{N_k} \geq \frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\}}{N_k} \geq 1 - \frac{1}{k},$$

pois  $\{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon\} \subset \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon'\}$ . Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon'\} \geq 1.$$

Por outro lado, como o quociente  $\frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon'\}}{N_k}$  nunca é superior a 1, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon'\} = 1$$

e obtemos verdadeira a afirmativa (i).

(i)  $\Rightarrow$  (iii): Antes de demonstrar esta implicação, provaremos a seguinte assertiva:

**Afirmção 3.1.3.**  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  e  $\exists \varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon)$  tais que  $d(x, 0) > \varepsilon \Rightarrow \|x\|_m > \varepsilon'$ .

Com efeito, suponha  $d(x, 0) > \varepsilon$ . Como a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  converge para 1, segue que existe

$m \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Daí,

$$\varepsilon < d(x, 0) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \min \{1, \|x\|_k\} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, \|x\|_k\}}_{< \varepsilon/2},$$

donde

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \min \{1, \|x\|_k\} \leq \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \|x\|_k \leq \left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} \right) \|x\|_m \leq \|x\|_m,$$

onde na penúltima desigualdade utilizamos o fato de que a sequência de seminormas  $\|\cdot\|_k$  é crescente e, portanto,  $\|x\|_m \geq \|x\|_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ . Assim,  $\frac{\varepsilon}{2} \leq \|x\|_m$ . Dessa forma, basta tomar  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$  e obtemos  $\|x\|_m \geq \varepsilon'$ . Isso conclui a prova da Afirmativa 2.

Em particular, se  $d(T^j y_k, 0) > \varepsilon$ , então  $\|T^j y_k\|_m > \varepsilon'$ , com  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ . Daí, para cada  $j$  no intervalo inteiro  $[1, N_k]$  que satisfaz  $d(T^j y_k, 0) > \varepsilon$ , temos que  $\|T^j y_k\|_m > \varepsilon'$ , isto é:

$$\{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} \subset \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\|_m > \varepsilon'\}.$$

Por hipótese,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} = 1.$$

Assim, temos que existe uma sequência  $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$ , tal que

$$1 - \frac{1}{k} \leq \frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_{i_k}; d(T^j y_{i_k}, 0) > \varepsilon\}}{N_{i_k}} \leq \frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_{i_k}; \|T^j y_{i_k}\|_m > \varepsilon'\}}{N_{i_k}}.$$

Isto implica que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_{i_k}; \|T^j y_{i_k}\|_m > \varepsilon'\} \geq N_{i_k} \left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, pela Proposição 3.1, obtemos que o conjunto de todos os vetores de  $X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada é residual em  $X$ . Considere  $Y$  tal conjunto. Então o conjunto de todos os vetores de  $X$  com órbita distribucionalmente ilimitada contém  $Y$ , que é residual. Daí, segue o item (iii) da Proposição 3.2.

(ii)  $\Rightarrow$  (ii'): Se existe  $y \in X$  com órbita distribucionalmente ilimitada, segue da definição que existe  $A \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1 > 0$  e  $\lim_{j \in A} \|T^j y\| = \infty$ . Isso prova (ii').

(ii')  $\Rightarrow$  (i'): Seja  $L := \overline{\text{dens}}(A) > 0$  e escolha  $\varepsilon \in (0, L)$ . Defina  $y_k := \frac{1}{k}y$ . Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ . Como

$$\|T^j y_k\| > \varepsilon \Leftrightarrow \|T^j y\| > \varepsilon k$$

e como  $\lim_{j \in A} \|T^j y\| = \infty$ , temos que

$$\overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; \|T^j y_k\| > \varepsilon\} = \overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; \|T^j y\| > \varepsilon k\} \geq \overline{\text{dens}}(A) = L > \varepsilon,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , podemos escolher  $N_k \in \mathbb{N}$  arbitrariamente grande tal que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\| > \varepsilon\} \geq \varepsilon N_k.$$

Por conseguinte, podemos escolher tais  $N_k$ 's de modo que a sequência  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  seja crescente, o que nos fornece  $(i')$ .

$(i') \Rightarrow (i)$ : Considere  $\varepsilon > 0$  da hipótese  $(i')$ . Tome  $\delta > 0$  e considere a seguinte propriedade  $P(\delta)$ :

" $\forall L > 0$ , existem  $y \in X$ , com  $\|y\| = 1$ , e  $n \in \mathbb{N}$ , tais que  $\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y\| > L\} \geq \delta n$ ".

E seja  $P'(\delta)$  a seguinte propriedade:

"Existem  $y' \in X$ ,  $\|y'\| \leq \varepsilon/L$ , e  $n \in \mathbb{N}$  com  $\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y'\| > \varepsilon\} \geq \delta n$ ".

Vamos mostrar que  $P(\delta)$  é equivalente a  $P'(\delta)$ .

De fato, suponha inicialmente que  $P(\delta)$  seja válida. Então, se  $\|T^j y\| > L$ , podemos multiplicar ambos os membros desta desigualdade por  $\varepsilon/L$  e obtemos:

$$\|T^j y\| \cdot \frac{\varepsilon}{L} > L \cdot \frac{\varepsilon}{L},$$

donde

$$\left\| \frac{\varepsilon}{L} T^j y \right\| > \varepsilon,$$

o que fornece

$$\left\| T^j \left( \frac{\varepsilon}{L} y \right) \right\| > \varepsilon.$$

Considere  $y' := \frac{\varepsilon}{L} y$ . Então  $\|y'\| = \frac{\varepsilon}{L} \|y\| = \frac{\varepsilon}{L}$ , pois  $\|y\| = 1$ . Logo,  $\|T^j y\| > L \Rightarrow \|T^j y'\| > \varepsilon$ . Daí, se  $\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y\| > L\} \geq \delta n$ , segue que  $\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y'\| > \varepsilon\} \geq \delta n$  e isto prova a validade de  $P'(\delta)$ .

Reciprocamente, suponha  $P'(\delta)$  verdadeira. Então, se  $\|T^j y'\| > \varepsilon$ , com  $\|y'\| \leq \varepsilon/L$ , temos:

$$L = \varepsilon \cdot \frac{L}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon/L} \leq \frac{\varepsilon}{\|y'\|} \leq \frac{1}{\|y'\|} \|T^j y'\| = \left\| T^j \left( \frac{y'}{\|y'\|} \right) \right\|.$$

Assim, tomando  $y := \frac{y'}{\|y'\|}$ , obtemos  $\|y\| = 1$  e  $\|T^j y\| \geq L$ . Portanto,

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y'\| > \varepsilon\} \geq \delta n,$$

o que implica

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y\| > L\} \geq \delta n,$$

com  $\|y\| = 1$ . Dessa forma,  $P(\delta)$  vale.

Seja  $\delta_0$  o supremo de todos os  $\delta$  para os quais  $P(\delta)$  é verdadeira. Como para cada  $L > 0$  existe  $y' \in X$  tal que  $\|y'\| \leq \varepsilon/L$ , segue de (i') que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y'\| > \varepsilon\} \geq \varepsilon n.$$

Portanto,  $P(\varepsilon)$  também é verdadeira. Daí,  $\delta_0 \geq \varepsilon \geq 0$ .

Seja  $k \in \mathbb{N}$  e  $\delta_1 > 0$  satisfazendo

$$\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \delta_1} \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Como  $\delta_0 + \delta_1 > \delta_0$  e  $\delta_0$  é o supremo dos  $\delta$  que fazem  $P(\delta)$  verdadeira, segue que  $P(\delta_0 + \delta_1)$  não é verdadeira. Portanto, existe  $L > 0$  tal que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y\| > L\} \geq (\delta_0 + \delta_1)n, \quad (3.4)$$

para todo  $y \in X$  com  $\|y\| = 1$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Defina  $A_L := \text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j y\| > L\}$ . Note que se  $M > L$ , então  $A_M \subset A_L$ . Com efeito,

$$j \in A_M \Rightarrow \|T^j y\| > M > L \Rightarrow \|T^j y\| > L \Rightarrow j \in A_L.$$

Dessa forma,  $\text{card}(A_M) \leq \text{card}(A_L)$  sempre que  $M > L$ . Em particular, se  $M := L + \max \{k, \|T^k\|\}$ , então  $\text{card}(A_M) \leq (\delta_0 + \delta_1)n$ ,  $\forall y \in X$  com  $\|y\| = 1$ , e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, trocando  $L$  por  $M$ , se necessário, podemos assumir  $L > \max \{k, \|T^k\|\}$  e a desigualdade (3.4) continua verdadeira.

Por outro lado, como  $P(\delta_0 - \delta_1)$  é válida, existe um vetor unitário  $u \in X$  e  $n_1 \in \mathbb{N}$  tais que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq n_1; \|T^j u\| > L^2\} \geq (\delta_0 - \delta_1)n_1 \quad (3.5)$$

(pois  $P(\delta_0 - \delta_1)$  vale para todo  $L > 0$  e, em particular, vale para  $L^2$ ). Considere

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{1 \leq j \leq n_1; \|T^j u\| \leq L\}, \\ A_2 &:= \{1 \leq j \leq n_1; L < \|T^j u\| \leq L^2\}, \\ A_3 &:= \{1 \leq j \leq n_1; \|T^j u\| \geq L^2\}. \end{aligned}$$

Observe que estes conjuntos são dois a dois disjuntos e que  $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n_1$ .

Além disso,  $\|T\| < L$ , uma vez que  $\|T\|^k < L$  implica  $\|T\| < L^{1/k} < L$ . Daí,  $1 \in A_1$ .

Considere  $A_1 = \{r_1, \dots, r_d\}$ , com  $1 = r_1 < r_2 < \dots < r_d$  e tome  $r_d + 1 = n_1 + 1$ . Para cada  $s = 1, \dots, d$ , defina:

$$B_s := A_2 \cap ]r_s, r_{s+1}[ \quad \text{e} \quad C_s := A_3 \cap ]r_s, r_{s+1}[.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^d \text{card}(C_s) &= \text{card}(C_1) + \text{card}(C_2) + \cdots + \text{card}(C_d) = \\
&= \text{card}(A_3 \cap ]r_1, r_2[) + \text{card}(A_3 \cap ]r_2, r_3[) + \cdots + \text{card}(A_3 \cap ]r_d, r_{d+1}[) \\
&= \text{card}(A_3 \cap ]r_1, r_{d+1}[) \\
&= \text{card}(A_3 \cap ]1, n_1 + 1[) \\
&= \text{card}(A_3 \cap [1, n_1]) \quad (\text{pois } 1 \notin A_3) \\
&= \text{card}A_3 \geq (\delta_0 - \delta_1)n_1, \text{ pela desigualdade (3.5).}
\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^d \text{card}(C_s \cup B_s) &= \text{card}(C_1 \cup B_1) + \text{card}(C_2 \cup B_2) + \cdots + \text{card}(C_d \cup B_d) = \\
&= \text{card}(C_1) + \text{card}(B_1) + \cdots + \text{card}(C_d) + \text{card}(B_d) \quad (\text{pois } (C_s \cap B_s) = \emptyset) \\
&= \sum_{s=1}^d \text{card}(C_s) + \sum_{s=1}^d \text{card}(B_s) \\
&= \text{card}(A_3) + \text{card}(A_2) \\
&= \text{card}(A_3 \cup A_2) \leq (\delta_0 + \delta_1)n_1, \text{ pela desigualdade (3.4).}
\end{aligned}$$

Além disso, como  $\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \delta_1} > 0$  e  $\delta_0 + \delta_1 > 0$ , temos que  $\delta_0 - \delta_1 > 0$ . Portanto,  $\sum_{s=1}^d \text{card}(C_s) = \text{card}A_3 \geq (\delta_0 - \delta_1)n_1 > 0$ . Dessa forma, deve existir pelo menos um  $s_0$ , com  $1 \leq s_0 \leq d$ , tal que  $\text{card}(C_{s_0}) > 0$ . Em particular,  $\text{card}(C_{s_0} \cup B_{s_0}) = \text{card}(C_{s_0}) + \text{card}(B_{s_0}) > 0$ . Daí,

$$\frac{\text{card}(C_{s_0})}{\text{card}(C_{s_0} \cup B_{s_0})} \geq \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \delta_1} \geq \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \delta_1} \geq 1 - \frac{1}{k}. \quad (3.6)$$

Como  $s_0$  está entre 1 e  $d$ , segue que  $r_{s_0} \in A_1$ . Logo,  $\|T^{r_{s_0}}u\| \leq L$ . Portanto,

$$\|T^{r_{s_0}+j}u\| \leq \|T\|^j \|T^{r_{s_0}}u\| \leq \|T\|^j \cdot L \leq \|T\|^k \cdot L \leq L^2, \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Ou seja,  $\|T^{r_{s_0}+1}u\| \leq L^2$ ;  $\|T^{r_{s_0}+2}u\| \leq L^2$ ;  $\dots$ ;  $\|T^{r_{s_0}+k}u\| \leq L^2$  e isto implica que nenhum dos elementos do conjunto  $\{r_{s_0} + 1, r_{s_0} + 2, \dots, r_{s_0} + k\}$  pertence ao conjunto  $A_3$ . Como  $C_{s_0} := A_3 \cap ]r_{s_0+1}, r_{s_0} + k[$ , então

$$C_{s_0} \cap \{r_{s_0} + 1, r_{s_0} + 2, \dots, r_{s_0} + k\} = A_3 \cap ]r_{s_0}, r_{s_0+1}[ \cap \{r_{s_0} + 1, r_{s_0} + 2, \dots, r_{s_0} + k\} = \emptyset.$$

Como  $]r_{s_0}, r_{s_0+1}[$  é um intervalo de números inteiros, isto significa que nenhum dos números  $r_{s_0} + 1, r_{s_0} + 2, \dots, r_{s_0} + k$  está em  $]r_{s_0}, r_{s_0+1}[$ . Logo, a distância entre  $r_{s_0} + 1$  e  $r_{s_0+1}$  é, pelo menos, maior do que  $k$  unidades. Seja  $n := r_{s_0+1} - (r_{s_0} + 1)$ . Então  $n > k$ . Como  $k$  é arbitrário, concluímos que  $n$  pode assumir valores arbitrariamente grandes.

Tome  $v := \frac{\varepsilon T^{r_{s_0}} u}{k \|T^{r_{s_0}} u\|}$ . Para cada  $j \in C_{s_0}$ , temos:

$$\begin{aligned} T^{j-r_{s_0}} v &= T^{j-r_{s_0}} \left( \frac{\varepsilon T^{r_{s_0}} u}{k \|T^{r_{s_0}} u\|} \right) = \frac{\varepsilon}{k \|T^{r_{s_0}} u\|} T^{j-r_{s_0}} T^{r_{s_0}} u = \frac{\varepsilon}{k \|T^{r_{s_0}} u\|} T^j u \Rightarrow \\ \frac{\|T^{j-r_{s_0}} v\|}{\|v\|_{L^2}} &= \frac{\varepsilon}{k \|T^{r_{s_0}} u\|} \cdot \frac{\|T^j u\|}{\|v\|} = \frac{\|T^j u\|}{\|T^{r_{s_0}} u\|} > \\ &> \frac{\|T^{r_{s_0}} u\|}{L^2} \quad (\text{pois } j \in C_{s_0}. ) \\ &> \frac{L^2}{L} = L \quad (\text{pois } r_{s_0} \in A_1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T^j u\| \geq L \|T^{r_{s_0}} u\|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\text{card} \{1 \leq j \leq n; d(T^j v, 0) > \varepsilon\} = \\ &= \text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j v\| > \varepsilon\} \quad (\text{pois } \varepsilon = k \|v\|) \\ &= \text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j v\| > k \|v\|\} \\ &= \text{card} \left\{ 1 \leq j \leq n; \frac{\|T^j v\|}{\|v\|} > k \right\} \geq \\ &\geq \text{card} \left\{ r_{s_0} < j < r_{s_0+1}; \frac{\|T^{j-r_{s_0}} v\|}{\|v\|} > k \right\} \quad (\text{pois } n = r_{s_0+1} - (r_{s_0} + 1)) \\ &= \text{card} \left\{ r_{s_0} < j < r_{s_0+1}; \frac{\|T^j u\|}{\|T^{r_{s_0}} u\|} > k \right\} \\ &= \text{card} \{r_{s_0} < j < r_{s_0+1}; \|T^j u\| > k \|T^{r_{s_0}} u\|\}. \end{aligned}$$

Como  $L > k$ , temos que se  $j \in C_{s_0}$ , então

$$\|T^j u\| \geq L^2 = L \cdot L > L \underbrace{\|T^{r_{s_0}} u\|}_{r_{s_0} \in A_1} > k \|T^{r_{s_0}} u\|.$$

Portanto,  $j \in \{r_{s_0} < j < r_{s_0+1}; \|T^j u\| > k \|T^{r_{s_0}} u\|\}$ . Com isso,

$$C_{s_0} \subset \{r_{s_0} < j < r_{s_0+1}; \|T^j u\| > k \|T^{r_{s_0}} u\|\}$$

e isso implica que  $\text{card} \{r_{s_0} < j < r_{s_0+1}; \|T^j u\| > k \|T^{r_{s_0}} u\|\} \geq \text{card}(C_{s_0})$ . Pelas desigualdades em (3.6), vem

$$\text{card}(C_{s_0}) \geq \text{card}(B_{s_0} \cup C_{s_0}) \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \text{card} \{(A_2 \cup A_3) \cap ]r_{s_0}, r_{s_0+1}[ \} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Como os elementos de  $A_1$  foram enumerados em ordem crescente de  $r_1$  a  $r_d$ , concluímos que  $A_1 \cap ]r_s, r_{s+1}[ = \emptyset, \forall s$ . Em particular,  $]r_{s_0}, r_{s_0+1}[ \subset (B_{s_0} \cup C_{s_0})$  e, portanto<sup>1</sup>,

---

<sup>1</sup>Como  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  são dois a dois disjuntos e  $A_1 \cap ]r_s, r_{s+1}[ = \emptyset \forall s$ , temos que  $B_s \cup C_s = ]r_s, r_{s+1}[$ . Assim,  $(B_{s_0} \cup C_{s_0}) = ]r_{s_0}, r_{s_0+1}[$  o que implica  $\text{card}(B_{s_0} \cup C_{s_0}) = n$ .

$$n = \text{card}([r_{s_0}, r_{s_0+1}[) \leq \text{card}(B_{s_0} \cup C_{s_0}).$$

Dessa forma,  $\text{card}(C_{s_0}) \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ .

Em suma, obtivemos um  $\varepsilon > 0$ ; uma sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  cujos termos são dados por  $y_k := \frac{\varepsilon T^{r_{s_0}} u}{k \|T^{r_{s_0}} u\|}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , com  $\|y_k\| = \frac{\varepsilon}{k}$  (e, portanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ ); e uma sequência crescente de números naturais tal que para cada  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos um número natural  $n > k$ . Seja  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal sequência de “ $n$ ’s”. Então, trocando  $n$  por  $N_k$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j v\| > \varepsilon\} = \\ & = \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j v\| > \varepsilon\} \\ & = \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\| > \varepsilon\} \\ & = \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} \quad (\text{pois } X \text{ é um espaço de Banach}). \end{aligned}$$

Usando que  $\text{card} \{1 \leq j \leq n; \|T^j v\| > \varepsilon\} \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  e as desigualdades acima, temos que

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} \geq N_k \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

E assim,

$$1 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\}}{N_k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{k} = 1,$$

Logo,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\}}{N_k} = 1$ , como queríamos demonstrar. ■

A proposição a seguir apresenta condições suficientes para que o conjunto de vetores com órbitas distribucionalmente próximas de zero para um operador  $T$  seja residual.

**Proposição 3.3.** *Considere  $T \in B(X)$  e suponha que exista um subconjunto denso  $X_0$  de  $X$  tal que a órbita de cada  $x \in X_0$  é distribucionalmente próxima de zero para  $T$ . Então o conjunto de todos os vetores com órbita distribucionalmente próxima de zero para  $T$  é residual.*

*Demonstração.* Para cada  $k, m \in \mathbb{N}$ , seja

$$M_{k,m} = \left\{ x \in X; \exists n \in \mathbb{N} \text{ com } \text{card} \left\{ 1 \leq j \leq n; \|T^j x\|_m < \frac{1}{k} \right\} \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right\}.$$

**Afirmção 3.1.4.**  $X_0 \subset M_{k,m}$ .

Com efeito, seja  $x \in X_0$ . Por hipótese,  $x$  tem órbita distribucionalmente próxima de zero e, portanto, existe  $A \subset \mathbb{N}$  com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$  tal que  $\lim_{j \in A} T^j x = 0$ . Então  $\lim_{j \in A} \|T^j x\|_m = 0$ . Pela

definição de limite, dado  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $j_0 \in A$  tal que  $\|T^j x\|_m < 1/k$ , para todo  $j \geq j_0$ , com  $j \in A$ . Portanto,

$$A \setminus \{1, \dots, j_0\} \subset \{j \in A; \|T^j x\|_m < 1/k\},$$

donde

$$\overline{\text{dens}} \{j \in A; \|T^j x\|_m < 1/k\} = \overline{\text{dens}}(A) = 1.$$

Assim,  $(1 - \frac{1}{k})$  não é o maior valor de aderência da sequência

$$x_N := \frac{\text{card}(\{j \in A; \|T^j x\|_m < 1/k\} \cap [1, N])}{N}, \text{ com } N \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, existe uma subsequência  $(x_{N_s})_{s \in \mathbb{N}}$  de  $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$  tal que

$$1 - \frac{1}{k} \leq x_{N_s}, \forall s \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para  $s = 1$ , temos que  $1 - \frac{1}{k} \leq x_{N_1}$ , isto é,

$$1 - \frac{1}{k} \leq \frac{\text{card}(\{j \in A; \|T^j x\|_m < 1/k\} \cap [1, N_1])}{N_1} \leq \frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_1; \|T^j x\|_m < 1/k\}}{N_1},$$

donde

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_1; \|T^j x\|_m < 1/k\} \geq N_1 \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

provando que  $x \in M_{k,m}$ . Logo,  $X_0 \subset M_{k,m}$  e isto demonstra a Afirmação 3.1.4.

**Afirmação 3.1.5.**  $M_{k,m}$  é aberto em  $X$ .

De fato, suponha  $M_{k,m} \neq \emptyset$  e considere  $x' \in M_{k,m}$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{card} \left\{ 1 \leq j \leq n; \|T^j x'\|_m < \frac{1}{k} \right\} \geq n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Sejam  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $s = \text{card} \left\{ 1 \leq j \leq n; \|T^j x'\|_m < \frac{1}{k} \right\}$  e  $j_1 < \dots < j_s$  os elementos do intervalo inteiro  $[1, n]$  para os quais

$$\|T^{j_i} x'\|_m < \frac{1}{k}. \quad (3.7)$$

Defina  $g_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $x \mapsto \|T^j x\|_m$ . Como  $g_j$  é contínua para todo  $j \in \mathbb{N}$ , obtemos que  $g_j^{-1}(]0, 1/k[)$  é aberto em  $X$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Considere  $U := \bigcap_{i=1}^s g_{j_i}^{-1}(]0, 1/k[)$ . Com os mesmos argumentos utilizados na prova da implicação (i)  $\Rightarrow$  (iii) da Proposição 3.1, obtemos que  $U$  é vizinhança de  $x'$  em  $X$  tal que  $x' \in U \subset M_{k,m}$ . Como  $x' \in M_{k,m}$  foi escolhido arbitrariamente, segue que  $M_{k,m}$  é aberto em  $X$ .

Seja  $M := \bigcap_{k,m} M_{k,m}$ . Como  $X_0 \subset M_{k,m}$ ,  $\forall k, m \in \mathbb{N}$ , segue que cada  $M_{k,m}$  é denso em  $X$ . Portanto,  $M$  é uma interseção enumerável de abertos densos. Logo,  $M$  é residual.

Além disso, se  $x \in X$  tem órbita distribucionalmente próxima de zero, então  $x \in M$  (observe a prova da Afirmação 3.1.4 e note que não utilizamos o fato de que  $X_0$  é denso em  $X$  para obter  $X_0 \subset M_{k,m}$ ). Assim, basta mostrar que todo vetor de  $M$  tem órbita distribucionalmente próxima de zero para concluir a prova da Proposição 3.3.

Fixe  $x \in M$  e provemos que  $x$  tem órbita distribucionalmente próxima de zero. Como isso é óbvio se  $T^n x = 0$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , podemos supor que este não é o caso. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , como  $x \in M_{k,k}$ , existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{card}(A_k) \geq n_k \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

onde

$$A_k := \left\{1 \leq j \leq n_k; \|T^j x\|_k < \frac{1}{k}\right\}.$$

A hipótese de que  $T^n x \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implica que  $n_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Com efeito, para cada  $L \in \mathbb{N}$ , temos que

$$k \geq \frac{1}{\min\{\|Tx\|_1, \dots, \|T^L x\|_1\}} \Rightarrow n_k > L.$$

Seja  $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Como

$$\frac{\text{card}(A \cap [1, n_k])}{n_k} \geq \frac{\text{card}(A_k)}{n_k} \geq 1 - \frac{1}{k}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$ . Além disso,

$$\lim_{j \in A} T^j x = 0.$$

De fato, fixe  $m \in \mathbb{N}$  e  $\varepsilon > 0$ . Escolha  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k_0 \geq m$  e  $\frac{1}{k_0} \leq \varepsilon$ . Ponha  $j_0 := \max\{n_1, \dots, n_{k_0}\} + 1$ . Se  $j \in A$  e  $j \geq j_0$ , então  $j \in A_k$  para algum  $k > k_0$ , donde

$$\|T^j x\|_m \leq \|T^j x\|_{k_0} \leq \|T^j x\|_k < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} \leq \varepsilon.$$

Isso completa a demonstração. ■

### 3.2 Critério para o caos distribucional (CCD)

**Definição 3.4.** *Seja  $T \in B(X)$ . Dizemos que  $T$  satisfaz o **critério para o caos distribucional (CCD)** se existem sequências  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X$  tais que:*

(a) *Existe  $A \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$ , tal que  $\lim_{n \in A} T^n x_k = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;*

(b)  *$y_k \in \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  e existem  $\varepsilon > 0$  e uma sequência crescente  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tais que*

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} \geq N_k \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

*para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Observação 3.5.**

1. *Podemos assumir que  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  são a mesma sequência, pois existe uma sequência  $(\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$  que satisfaz a condição (a) do CCD pela linearidade e a condição (b) pela densidade.*

2. *No caso em que  $X$  é um espaço de Banach, segue da Proposição 3.2 que a condição (b) na definição do CCD pode ser substituída por:*

(b')  *$y_k \in \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$ ,  $\|y_k\| \rightarrow 0$  e existem  $\varepsilon > 0$  e uma sequência crescente  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tais que*

$$\text{card} \{1 \leq j \leq N_k; \|T^j y_k\| > \varepsilon\} \geq \varepsilon N_k,$$

*para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

Finalmente, vejamos condições necessárias e suficientes para que um operador  $T$  sobre um espaço de Fréchet  $X$  seja distribucionalmente caótico.

**Teorema 3.6.** *Se  $T \in B(X)$ , então as seguintes afirmativas são equivalentes:*

- (i)  *$T$  satisfaz o (CCD);*
- (ii)  *$T$  possui um vetor distribucionalmente irregular;*
- (iii)  *$T$  é distribucionalmente caótico;*
- (iv)  *$T$  admite um par distribucionalmente caótico.*

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sejam  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  duas sequências em  $X$  que satisfazem às condições (a) e (b) do (CCD). Considere

$$X_0 := \left\{ x \in X; \lim_{n \in A} T^n x = 0 \right\}.$$

**Afirmção 3.2.1.**  $X_0$  é um subespaço de  $X$ .

Com efeito, é claro que  $0 \in X_0$ , pois  $T^n 0 = 0$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, tome  $x, y \in X_0 \setminus \{0\}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Vamos mostrar que  $\alpha x + \beta y \in X_0$ . Como  $T \in B(X)$ , segue que  $T^n \in B(X)$ . Logo,

$$\lim_{n \in A} T^n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \in A} (\alpha T^n x + \beta T^n y) = \alpha \lim_{n \in A} T^n x + \beta \lim_{n \in A} T^n y = 0 \quad (\text{pois } x, y \in X_0)$$

e, portanto,  $\alpha x + \beta y \in X_0$ , como queríamos.

**Afirmção 3.2.2.**  $X_0$  é invariante por  $T$  (isto é,  $T(X_0) \subset X_0$ ).

Seja  $w \in T(X_0)$ . Então existe  $x \in X_0$  tal que  $w = Tx$ . Além disso,  $\lim_{n \in A} T^n x = 0$ , pois  $x \in X_0$ . Em particular,

$$T^{n+1}x = T^n(Tx) = T^n w.$$

Logo, utilizando a continuidade de  $T$ , obtemos:

$$\lim_{n \in A} T^n w = \lim_{n \in A} T^{n+1}x = \lim_{n \in A} T(T^n x) = T(0) = 0.$$

Portanto,  $w = Tx \in X_0$ , provando que  $T(X_0) \subset X_0$ .

**Afirmção 3.2.3.** O fecho de  $X_0$  é invariante por  $T$ .

Considere  $\bar{w} \in T(\overline{X_0})$ . Então existe  $z \in \overline{X_0}$  tal que  $\bar{w} = Tz$ . Como  $z \in \overline{X_0}$ , segue que existe uma sequência  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X_0$  tal que  $z_k \rightarrow z$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Da continuidade de  $T$  em  $X$ , obtemos  $Tz_k \rightarrow Tz = \bar{w}$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Pela Afirmção 3.2.2, temos que a sequência  $(Tz_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está em  $X_0$ . Portanto,  $(Tz_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $X_0$  que converge para  $\bar{w}$ . Assim,  $\bar{w} \in \overline{X_0}$  e, portanto,  $T(\overline{X_0}) \subset \overline{X_0}$ .

Por outro lado, como  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz a condição (a) do (CCD), segue que  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $X_0$ . Além disso, como  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz a condição (b) do (CCD), temos que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $y_k$  é limite de uma sequência em  $\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ . Mas  $\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset X_0$  e, portanto,  $y_k \in \overline{X_0}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Como  $X_0$  é denso em  $\overline{X_0}$ , a Afirmção 3.2.3 nos garante que  $T|_{\overline{X_0}} \in B(\overline{X_0})$ . Logo,  $\overline{X_0}$  tem um subconjunto denso (no caso,  $X_0$ ) tal que a órbita de cada elemento de tal subconjunto é distribucionalmente próxima de zero para  $T$ . Com isso, podemos aplicar a Proposição 3.3 e

concluir que o conjunto  $Y$  de todos os vetores de  $\overline{X_0}$  com órbita distribucionalmente próxima de zero é residual em  $\overline{X_0}$ .

Por outro lado, a sequência  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\overline{X_0}$  satisfaz à hipótese (i) da Proposição 3.2 e, portanto, o conjunto  $W$  de todos os vetores de  $\overline{X_0}$  com órbita distribucionalmente ilimitada é residual em  $\overline{X_0}$ .

Como  $Y$  e  $W$  são residuais em  $\overline{X_0}$ , o conjunto  $Y \cap W$  também o é. Em particular, podemos tomar um vetor  $s \in Y \cap W$  e tal vetor é distribucionalmente irregular para  $T$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Seja  $u \in X$  um vetor distribucionalmente irregular para  $T$  e considere  $\Gamma = \{\lambda u; \lambda \in \mathbb{K}\}$ . Vamos mostrar que  $\Gamma$  é um conjunto não enumerável e que existe um  $\varepsilon > 0$  tal que todo par de elementos distintos de  $\Gamma$  é um par distribucionalmente  $\varepsilon$ -caótico para  $T$ .

Com efeito, como a aplicação  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \Gamma$ , que associa  $\lambda \mapsto \varphi(\lambda) = \lambda u$  é bijetiva, segue que  $\Gamma$  é não enumerável.

Sejam  $x$  e  $y$  elementos distintos de  $\Gamma$ . Então existem  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em  $\mathbb{K}$ , também distintos, tais que  $x = \lambda_1 u$  e  $y = \lambda_2 u$ . Portanto,

$$T^n x = \lambda_1 T^n u \quad \text{e} \quad T^n y = \lambda_2 T^n u.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^n y) &= d(\lambda_1 T^n u, \lambda_2 T^n u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, \|\lambda_1 T^n u - \lambda_2 T^n u\|_k\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, |\lambda_1 - \lambda_2| \|T^n u\|_k\} = d((\lambda_1 - \lambda_2) T^n u, 0). \end{aligned}$$

Defina  $\lambda_0 := \lambda_1 - \lambda_2$ . Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , temos  $\lambda_0 \neq 0$ .

Segue do fato de que  $u$  é um vetor distribucionalmente irregular para  $T$  que existe  $A \subset \mathbb{N}$  tal que  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$  e  $\lim_{n \in A} T^n u = 0$ . Assim,  $\lim_{n \in A} d(\lambda_0 T^n u, 0) = 0$ . Portanto, pela Proposição 2.9, temos<sup>2</sup> que para todo  $\tau > 0$ ,

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(\lambda_0 T^n u, 0) < \tau\} = 1.$$

Em particular, como  $d(\lambda_0 T^n u, 0) = d(T^n x, T^n y)$ , segue que

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} = 1, \quad (3.8)$$

para todo  $\tau > 0$ .

Por outro lado, como  $u$  tem órbita distribucionalmente ilimitada para  $T$ , segue que existem  $m \in \mathbb{N}$  e  $B \subset \mathbb{N}$  tais que  $\overline{\text{dens}}(B) = 1$  e  $\lim_{n \in B} \|T^n u\|_m = \infty$ . Daí,  $\lim_{n \in B} \|\lambda_0 T^n u\|_m = \infty$ . Em

---

<sup>2</sup>Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos  $r_n := d(\lambda_0 T^n u, 0)$  para aplicar a Proposição 2.9.

particular, existe  $n_0 \in B$  tal que  $\|\lambda_0 T^{n_0} u\|_m > 1$ , para todo  $n \geq n_0$ , com  $n \in B$ . Pela Afirmação 3.1.2, segue que  $d(\lambda_0 T^n u, 0) \geq \frac{1}{2^m}$ , para todo  $n \in B$  tal que  $n \geq n_0$ . Denotando  $\varepsilon := \frac{1}{2^m}$ , temos

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(\lambda_0 T^n u, 0) \geq \varepsilon\} \geq \overline{\text{dens}}(B) = 1.$$

Logo,

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon\} = 1. \quad (3.9)$$

Dessa forma, segue das igualdades (3.8) e (3.9) que o par  $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ , escolhido arbitrariamente, é um par distribucionalmente  $\varepsilon$ -caótico<sup>3</sup> para  $T$ , donde  $T$  é distribucionalmente caótico.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Segue diretamente da definição de operador distribucionalmente caótico.

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Seja  $(x, y) \in X \times X$  um par distribucionalmente caótico para  $T$  e considere  $u := x - y$ . Pela definição, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; d(T^j u, 0) \geq \varepsilon\} = 1 \quad (3.10)$$

e

$$\overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; d(T^j u, 0) < \delta\} = 1,$$

para todo  $\delta > 0$ .

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tome  $r_j := d(T^j u, 0)$ . Assim, temos uma sequência  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{R}_+$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , vale

$$\overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; r_j < \delta\} = 1.$$

Pela Proposição 2.9, existe  $A \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$  tal que  $\lim_{j \in A} r_j = 0$ . Ou seja,  $\lim_{j \in A} d(T^j u, 0) = 0$ , donde  $\lim_{n \in A} T^n u = 0$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , considere  $x_k := T^k u$ . Como  $T \in B(X)$ , segue que  $T^k$  é contínua para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\lim_{n \in A} T^n x_k = \lim_{n \in A} T^n (T^k u) = \lim_{n \in A} T^k (T^n u) = T^k(0) = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n \in A} T^n x_k = 0,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo, a sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  satisfaz o item (a) do (CCD).

---

<sup>3</sup>Mais do que isso, podemos dizer que todos os pares de elementos distintos de  $\Gamma$  são distribucionalmente  $\frac{1}{2^m}$ -caóticos para  $T$ .

Escolha  $s_k \in A$  tal que  $\|T^{s_k}u\|_k < \frac{1}{k}$  e tome  $y_k := T^{s_k}u$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência de  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Em particular, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $y_k \in \overline{\text{span}\{x_k; k \in \mathbb{N}\}}$ . Como  $\lim_{n \in A} T^n u = 0$ , segue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{s_k}u = 0$ , isto é,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$ .

Como

$$T^j y_k = T^j(T^{s_k}u) = T^{s_k}(T^j u) = T^{s_k+j}u,$$

segue que

$$\{j \in \mathbb{N}; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} = \{s_k + j \in \mathbb{N}; d(T^{s_k+j}u, 0) > \varepsilon\}.$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , note que

$$\{s_k + j \in \mathbb{N}; d(T^{s_k+j}u, 0) \geq \varepsilon\} \subset \{j \in \mathbb{N}; d(T^j u, 0) \geq \varepsilon\}$$

e que a diferença entre as cardinalidades de ambos é, no máximo, igual a  $s_k$ . Como  $s_k$  está fixo para cada  $k$ , segue que esta diferença entre as cardinalidades é sempre um número finito e, portanto,

$$\overline{\text{dens}} \{s_k + j \in \mathbb{N}; d(T^{s_k+j}u, 0) \geq \varepsilon\} = \overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; d(T^j u, 0) \geq \varepsilon\} = 1,$$

pela equação (3.10). Logo,

$$\overline{\text{dens}} \{j \in \mathbb{N}; d(T^j y_k, 0) \geq \varepsilon\} = 1,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$\begin{aligned} 1 &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{j \in \mathbb{N}; d(T^j y_k, 0) \geq \varepsilon\} \cap [1, N])}{N} = \\ &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{1 \leq j \leq N; d(T^j y_k, 0) \geq \varepsilon\}}{N}. \end{aligned}$$

Como 1 é o maior valor de aderência da sequência

$$(x_N)_{N \in \mathbb{N}} = \left( \frac{\text{card}\{1 \leq j \leq N; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\}}{N} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

e  $1 > 1 - \frac{1}{k}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , segue que existe uma subsequência  $(x_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$  tal que

$$1 - \frac{1}{k} \leq x_{N_k} \leq 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Isto é,

$$1 \geq \frac{\text{card}\{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\}}{N_k} \geq 1 - \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\text{card}\{1 \leq j \leq N_k; d(T^j y_k, 0) > \varepsilon\} \geq N_k \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Isso prova que  $T$  satisfaz o (CCD) e encerra a prova do Teorema 3.6. ■

# Capítulo 4

## Caos Distribucional Denso

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre a existência de conjuntos densos de vetores distribucionalmente irregulares e sua relação com o caos distribucional de operadores.

### 4.1 Caracterização

**Definição 4.1.** *Seja  $T : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua sobre um espaço métrico  $X$ . Dizemos que  $T$  é **densamente distribucionalmente caótica** se existem um conjunto denso  $\Gamma$  em  $X$  e um  $\varepsilon > 0$  tais que, para quaisquer  $x, y \in \Gamma$  distintos, temos*

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon\} = 1 \quad \text{e} \quad \overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} = 1$$

para todo  $\tau > 0$ .

**Definição 4.2.** *Dado  $T \in B(X)$ , um subespaço vetorial  $Y$  de  $X$  é chamado de **variedade uniformemente distribucionalmente irregular para  $T$**  se existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que a órbita de todo vetor não nulo  $y$  de  $Y$  é, simultaneamente, distribucionalmente  $m$ -ilimitada e distribucionalmente próxima de zero. Neste caso, dizemos que os vetores não nulos de  $Y$  são distribucionalmente  $m$ -irregulares para algum  $m \in \mathbb{N}$ .*

Note que, se  $Y$  satisfaz à Definição 4.2, então existe um mesmo  $m \in \mathbb{N}$  para o qual a órbita de cada vetor não nulo de  $Y$  é distribucionalmente  $m$ -ilimitada.

Por exemplo, se  $Y$  é uma variedade desse tipo, podemos dizer que  $Y$  é um conjunto distribucionalmente  $2^{-m+1}$ -caótico para  $T$  (embora este número não seja único). Com efeito, sejam  $x, y \in Y$  vetores não nulos tais que  $x \neq y$ . Denote  $u := x - y$ . Então,  $u \neq 0$  e  $u \in Y$  (pois  $Y$  é subespaço vetorial de  $X$ ). Logo,  $u$  é um vetor distribucionalmente  $m$ -irregular para  $T$  e,

portanto, existem  $A \subset \mathbb{N}$  e  $B \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$  e  $\overline{\text{dens}}(B) = 1$ , tais que

$$\lim_{n \in A} T^n u = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \in B} \|T^n u\|_m = \infty.$$

Da igualdade  $\lim_{n \in A} T^n u = 0$ , obtemos facilmente (veja Proposição 2.9)

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n u, 0) < \tau\} = 1,$$

para todo  $\tau > 0$ , isto é,

$$\overline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) < \tau\} = 1, \quad \forall \tau > 0.$$

Por outro lado, para  $\varepsilon = 1$ , existe  $n_0 \in B$  tal que  $\|T^n u\|_m > 1$ , para todo  $n \geq n_0$ , com  $n \in B$ . Como a sequência de seminormas  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é crescente, segue que

$$\|T^n u\|_k > 1, \quad \forall k \geq m \quad \text{e} \quad \forall n \in B, \quad \text{com} \quad n \geq n_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^n y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, \|T^n x - T^n y\|_k\} \\ &\geq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, \|T^n x - T^n y\|_k\}. \end{aligned}$$

Mas  $\min \{1, \|T^n x - T^n y\|_k\} = \min \{1, \|T^n u\|_k\} = 1$ , para todo  $k \geq m$  e para todo  $n \in B$ , com  $n \geq n_0$ . Portanto,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \{1, \|T^n x - T^n y\|_k\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

para todo  $n \in B$ , com  $n \geq n_0$ . Além disso,

$$\{n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq 1/2^{m-1}\} \supset B \setminus \{1, \dots, n_0 - 1\}.$$

Assim,

$$\overline{\text{dens}} \left\{ n \in \mathbb{N}; d(T^n x, T^n y) \geq \frac{1}{2^{m-1}} \right\} = \overline{\text{dens}}(B) = 1.$$

Daí, obtemos que qualquer par de elementos distintos não nulos de  $Y$  é um par distribucionalmente  $2^{-m+1}$ -caótico para  $T$ . No entanto, utilizando a Afirmação 3.1.2, é possível demonstrar que os pares de elementos distintos não nulos de  $Y$  também são distribucionalmente  $2^{-m}$ -caóticos (basta escolher  $\varepsilon' = 1$ ). Isso mostra que a estimativa  $2^{-m+1}$  não é única (como havíamos afirmado no começo desta seção), embora ela sirva para todos os pares de elementos distintos não nulos de  $Y$ . Dessa forma, podemos concluir que a existência de uma variedade uniformemente distribucionalmente irregular densa para  $T$  implica automaticamente em caos distribucional denso para  $T$ .

O teorema a seguir - talvez um dos mais interessantes deste trabalho - mostra que sob determinadas condições, basta que  $T \in B(X)$  admita um vetor com órbita distribucionalmente ilimitada para que exista tal variedade uniformemente distribucionalmente irregular densa para  $T$ .

**Teorema 4.3.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet separável e suponha que  $T \in B(X)$  satisfaz*

$$T^n x \rightarrow 0 \text{ para todo } x \in X_0,$$

*onde  $X_0$  é um subconjunto denso de  $X$ . Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i)  $T$  é distribucionalmente caótico;
- (ii)  $T$  é densamente distribucionalmente caótico;
- (iii)  $T$  admite uma variedade uniformemente distribucionalmente irregular densa;
- (iv)  $T$  admite uma órbita distribucionalmente ilimitada.

*Demonstração.* (iii)  $\Rightarrow$  (ii): Segue da Definição 4.2 e da hipótese (iii) que existe um subespaço vetorial  $Y$  de  $X$ , denso, e um  $m \in \mathbb{N}$  tais que todos os vetores não nulos de  $Y$  são distribucionalmente  $m$ -irregulares. Foi provado logo após a Definição 4.2, que  $Y$  é um conjunto distribucionalmente  $2^{-m+1}$ -caótico. Como  $Y$  é denso em  $X$ , segue (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Observe que, de acordo com a Definição 4.1, o caos distribucional denso é um caso particular do caos distribucional.

(i)  $\Rightarrow$  (iv): Segue diretamente de (iii)  $\Rightarrow$  (ii) no Teorema 3.6.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii): Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $X_0$  é um subespaço vetorial denso de  $X$  (caso  $X_0$  não seja subespaço vetorial, basta trocá-lo por  $\text{span}(X_0)$ , o qual é denso em  $X$ , já que  $X_0 \subset \text{span}(X_0)$ ).

Seja  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente de seminormas que gera a topologia de  $X$ .

Pela continuidade de  $T$ , segue do Teorema 1.23 que, para  $k = 1$ , existem  $C_1 > 1$  e  $j_1 \in \mathbb{N}$  tais que  $\|Tx\|_1 \leq C_1 \|x\|_{j_1}$ , para todo  $x \in X$ . Defina  $k_1 := j_1 + 1$  e observe que  $k_1 > 1$ . Então,

$$\|Tx\|_1 \leq C_1 \|x\|_{k_1}, \quad \forall x \in X.$$

De maneira análoga, temos que existem  $C_2 > C_1$  e  $j_2 \in \mathbb{N}$  tais que  $\|Tx\|_{k_1} \leq C_2 \|x\|_{j_2}$ , para todo  $x \in X$ . Assim, defina  $k_2 := j_2 + k_1$  e, novamente, observe que  $k_2 > k_1$ . Então,

$$\|Tx\|_{k_1} \leq C_2 \|x\|_{k_2}, \quad \forall x \in X.$$

Continuando esse procedimento de maneira indutiva, obtemos uma sequência  $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$  em  $\mathbb{N}$  e uma sequência  $C_1 < C_2 < \dots < C_n < \dots$  em  $(1, \infty)$  tais que

$$\|Tx\|_{k_n} \leq C_{n+1} \|x\|_{k_{n+1}}, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, considere a seguinte sequência

$$(C_1 \|\cdot\|_{k_1}, C_1 C_2 \|\cdot\|_{k_2}, C_1 C_2 C_3 \|\cdot\|_{k_3}, C_1 C_2 C_3 C_4 \|\cdot\|_{k_4}, \dots)$$

e denote  $\|\cdot\|'_n := C_1 \cdots C_n \|\cdot\|_{k_n}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como a sequência  $(C_1 \cdots C_n)$  é crescente em  $\mathbb{R}_+$ , os itens (a) e (b) da Observação 1.18 nos garantem que  $(\|\cdot\|'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência crescente de seminormas que também induz a topologia de  $X$ . Além disso, se  $x \in X$ , temos

$$\begin{aligned} \|Tx\|'_1 &= C_1 \|Tx\|_{k_1} \leq C_1 C_2 \|x\|_{k_2} = \|x\|'_2 \\ \|Tx\|'_2 &= C_1 C_2 \|Tx\|_{k_2} \leq C_1 C_2 C_3 \|x\|_{k_3} = \|x\|'_3 \\ \|Tx\|'_3 &= C_1 C_2 C_3 \|Tx\|_{k_3} \leq C_1 C_2 C_3 C_4 \|x\|_{k_4} = \|x\|'_4 \\ &\vdots \\ \|Tx\|'_n &= C_1 \cdots C_n \|Tx\|_{k_n} \leq C_1 \cdots C_{n+1} \|x\|_{k_{n+1}} = \|x\|'_{n+1}, \end{aligned}$$

para todo  $n \geq 1$ . Dessa forma, podemos trocar  $\|\cdot\|_k$  por  $\|\cdot\|'_n$ , se necessário, para obter sem perda de generalidade a seguinte propriedade:

$$\|Tx\|_k \leq \|x\|_{k+1}, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Por hipótese, existe um vetor  $y \in X$  com órbita distribucionalmente ilimitada. Portanto, existe  $B \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(B) = 1$ , tal que  $\lim_{n \in B} \|T^n y\|_m = \infty$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Em particular, pela Proposição 3.1, o conjunto de pontos de  $X$  com órbita distribucionalmente  $m$ -limitada é residual e, portanto, denso em  $X$ . Isso significa que é possível encontrar vetores em  $X$  com órbitas distribucionalmente  $m$ -ilimitadas tão próximos de zero quanto queiramos. Logo, para cada  $L > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$ , podemos obter  $x' \in X$  arbitrariamente próximo de zero e um  $n \in \mathbb{N}$  tão grande quanto se queira, de modo que

$$\text{card} \left\{ 1 \leq i \leq n; \|T^i x'\|_m > L \right\} > n \left( 1 - \frac{1}{k} \right). \quad (4.2)$$

Como a desigualdade em (4.2) é uma relação aberta, segue que, fixados  $L$ ,  $k$  e  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $x'$  em  $X$  tal que a relação em (4.2) é válida para todo vetor em  $V$ . Além disso, a densidade de  $X_0$  nos garante que existe  $x \in X_0 \cap V$ . Dessa forma, podemos trocar  $x'$  por  $x \in X_0$  em (4.2) sem perder a generalidade.

Como as seminormas são crescentes, podemos desconsiderar as  $(m-1)$ -primeiras delas e assumir, também sem perda de generalidade,  $m = 1$  em (4.2). Com isso, construiremos uma sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $X_0$  da seguinte forma:

- Para  $k = 1$ , tome  $x_1 \in X_0$  tal que

$$\|x_1\|_1 \leq 1$$

e  $n_1 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de modo que

$$\text{card} \{1 \leq i \leq n_1; \|T^i x_1\|_1 > 2\} > n_1 \left(1 - \frac{1}{1^2}\right) = 0.$$

- Para  $k = 2$ , tome  $x_2 \in X_0$  tal que

$$\|x_2\|_2 \leq 1$$

e  $n_2 > n_1$ , com  $n_2 \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \text{card} \{1 \leq i \leq n_2; \|T^i x_2\|_1 > 2 \cdot 2^1\} &> n_2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right), \\ \text{card} \left\{1 \leq i \leq n_2; \|T^i x_1\|_2 < \frac{1}{2}\right\} &> n_2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right), \end{aligned}$$

sendo a última desigualdade possível porque  $T^n x_1 \rightarrow 0$ , já que  $x_1 \in X_0$ .

- Para  $k = 3$ , tome  $x_3 \in X_0$  tal que

$$\|x_3\|_3 \leq 1$$

e  $n_3 > n_2$ , com  $n_3 \in \mathbb{N}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \text{card} \{1 \leq i \leq n_3; \|T^i x_3\|_1 > 3 \cdot 2^3\} &> n_3 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right), \\ \text{card} \left\{1 \leq i \leq n_3; \|T^i x_s\|_3 < \frac{1}{3}\right\} &> n_3 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right), \quad s = 1, 2. \end{aligned}$$

Prosseguindo assim indutivamente, obtemos uma sequência  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de vetores em  $X_0$ , com

$$\|x_k\|_k \leq 1, \tag{4.3}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e uma sequência crescente  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\mathbb{N}$  tal que

$$\text{card} \{1 \leq i \leq n_k; \|T^i x_k\|_1 > k \cdot 2^k\} > n_k \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \tag{4.4}$$

$$\text{card} \left\{1 \leq i \leq n_k; \|T^i x_s\|_k < \frac{1}{k}\right\} > n_k \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad s = 1, \dots, k-1. \tag{4.5}$$

Observe que em (4.4) reescrevemos, como funções de  $k$ , os valores de  $L$  e  $n$  que aparecem em (4.2).

Agora, dados  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{\text{conjunto de sequências de 0's e 1's}\}$ , dizemos que  $\beta \leq \alpha$  se  $\beta_i \leq \alpha_i$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Considere uma sequência crescente  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de inteiros positivos tal que

$$r_{j+1} \geq 1 + r_j + n_{r_j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Seja  $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  definido por  $\alpha_n = 1$  se, e somente se,  $n = r_j$  para algum  $j \in \mathbb{N}$ . Então  $\alpha_{r_j} = 1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Dado  $\beta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tal que  $\beta \leq \alpha$  e contém um número infinito de 1's, definimos o vetor

$$x_\beta := \sum_i \frac{\beta_i}{2^i} x_i.$$

Observe que

$$\sum_i \frac{\beta_i}{2^i} x_i = \sum_j \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} x_{r_j},$$

pois  $\beta_{r_j} \leq \alpha_{r_j} = 1$  e  $\beta_i \leq \alpha_i = 0$ , para todo  $i \notin \{r_1, r_2, \dots\}$ . Note também que

$$\left\| \frac{\beta_i}{2^i} x_i \right\|_i = \frac{|\beta_i|}{2^i} \|x_i\|_i \leq \frac{1}{2^i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Portanto,  $\sum_i \frac{\beta_i}{2^i} x_i$  é convergente.

Assim, vamos mostrar que a órbita de  $x_\beta$  é distribucionalmente 1-ilimitada e distribucionalmente próxima de zero.

Seja  $k \in \mathbb{N}$ , com  $\beta_{r_k} = 1$ . Se  $1 \leq i \leq n_{r_k}$ ,  $\|T^i x_{r_k}\|_1 > r_k 2^{r_k}$  e  $\|T^i x_s\|_{r_k} < \frac{1}{r_k}$ , para cada  $s < r_k$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \|T^i x_\beta\|_1 &= \left\| T^i \left( \sum_j \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} x_{r_j} \right) \right\|_1 \\ &= \left\| \frac{\beta_{r_k}}{2^{r_k}} T^i x_{r_k} + \sum_{j \neq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} T^i x_{r_j} \right\|_1 \\ &\geq \left\| \frac{\beta_{r_k}}{2^{r_k}} T^i x_{r_k} \right\|_1 - \left\| \sum_{j \neq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} T^i x_{r_j} \right\|_1 \\ &\geq \frac{|\beta_{r_k}|}{2^{r_k}} \|T^i x_{r_k}\|_1 - \sum_{j \neq k} \frac{|\beta_{r_j}|}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_1 \\ &= \frac{1}{2^{r_k}} \underbrace{\|T^i x_{r_k}\|_1}_{\geq r_k 2^{r_k}} - \sum_{j \neq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_1 \\ &\geq r_k - \left( \sum_{j < k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_1 + \sum_{j > k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_1 \right). \end{aligned}$$

Se  $j < k$ , então  $r_j \leq r_k$ , pois a sequência  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  foi tomada crescente. Logo,

$$\|T^i x_{r_j}\|_1 \leq \|T^i x_{r_j}\|_{r_k} < \frac{1}{r_k},$$

para cada  $r_j \leq r_k$ , já que as seminormas também são crescentes. Daí, como  $-\|T^i x_{r_j}\|_1 > -\frac{1}{r_k}$ , temos:

$$\begin{aligned} -\sum_{j < k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_1 &\geq -\frac{1}{r_k} \sum_{j < k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \\ &\geq -\frac{1}{r_k} \sum_{j < k} \frac{1}{2^{r_j}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se  $j > k$ , então  $r_j \geq r_k$ . Além disso, por (4.1),  $\|Tx\|_k \leq \|x\|_{k+1}$ , para qualquer  $x \in X$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \|T^2 x\|_k &= \|T(Tx)\|_k \leq \|Tx\|_{k+1} \leq \|x\|_{k+2}; \\ \|T^3 x\|_k &= \|T(T^2 x)\|_k \leq \|T^2 x\|_{k+1} = \|T(Tx)\|_{k+1} \leq \|Tx\|_{k+2} \leq \|x\|_{k+3}; \\ &\vdots \\ \|T^i x\|_k &\leq \|T^{i-1} x\|_{k+1} = \|T(T^{i-2} x)\|_{k+1} \leq \|T^{i-2} x\|_{k+2} \leq \dots \leq \|x\|_{k+i}, \end{aligned}$$

para todo  $x \in X$  e para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Em particular, temos

$$\|T^i x_{r_j}\|_1 \leq \|x_{r_j}\|_{1+i}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\sum_{j > k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_1 &\geq -\sum_{j > k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|x_{r_j}\|_{1+i} \\ &\geq -\sum_{j > k} \frac{\|x_{r_j}\|_{1+i}}{2^{r_j}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

pois  $\beta_{r_j} \leq 1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Portanto, de (4.7) e (4.8), podemos escrever:

$$\|T^i x_\beta\|_1 \geq r_k - \frac{1}{r_k} \sum_{j < k} \frac{1}{2^{r_j}} - \sum_{j > k} \frac{\|x_{r_j}\|_{1+i}}{2^{r_j}} \geq r_k - 1,$$

pois  $\|x_{r_j}\|_{1+i} \leq 1$ , para  $j > k$ . Isso vale porque supusemos  $1 \leq i \leq n_{r_k}$ . Como

$$1 + i \leq 1 + n_{r_k} \leq 1 + n_{r_{k+1}} \leq r_{k+1} - r_k - 1 < r_j,$$

então  $\|x_{r_j}\|_{1+i} \leq \|x_{r_j}\|_{r_j} \leq 1$ , por (4.3).

Sejam  $A := \{1 \leq i \leq n_{r_k}; \|T^i x_{r_k}\|_1 > r_k 2^{r_k}\}$  e  $B_s := \left\{1 \leq i \leq n_{r_k}; \|T^i x_s\|_{r_k} < \frac{1}{r_k}\right\}$ , para todo  $s = 1, \dots, r_k - 1$ . Por (4.4), temos que

$$\text{card}(A) > n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k^2}\right).$$

Por (4.5), temos que

$$\text{card}(B_s) > n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k^2}\right), \quad \forall s = 1, \dots, r_k - 1.$$

Portanto, provamos acima que

$$\{1 \leq i \leq n_{r_k}; \|T^i x_\beta\|_1 > r_k - 1\} \supset A \cap B_1 \cap \dots \cap B_{r_k-1}.$$

**Afirmção 4.1.1.**  $\text{card}(A \cap B_1 \cap \dots \cap B_{r_k-1}) \geq n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k^2}\right).$

Para demonstrar a Afirmção 4.1.1, utilizaremos o seguinte lema:

**Lema 4.4.** *Seja  $[1, n]$  um intervalo de inteiros positivos. Se  $H \subset [1, n]$  e  $w \in [1, n]$ , então*

$$\text{card}(H) \geq w \Leftrightarrow \text{card}([1, n] \setminus H) \leq n - w.$$

Para comprovar a veracidade do Lema 4.4, basta observar que  $\text{card}([1, n] \setminus H) = n - \text{card}(H)$  e o resultado segue trivialmente.

Como  $\text{card}(A) > n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k^2}\right)$ , segue do Lema 4.4 que

$$\text{card}([1, n_{r_k}] \setminus A) \leq n_{r_k} - \left(n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k^2}\right)\right) = \frac{n_{r_k}}{r_k^2}.$$

Analogamente,

$$\text{card}([1, n_{r_k}] \setminus B_s) \leq n_{r_k} - \left(n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k^2}\right)\right) = \frac{n_{r_k}}{r_k^2}, \quad \forall s = 1, \dots, r_k - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \text{card}([1, n_{r_k}] \setminus (A \cap B_1 \cap \dots \cap B_{r_k-1})) \\ &= \text{card}([1, n_{r_k}] \setminus A) \cup ([1, n_{r_k}] \setminus B_1) \cup \dots \cup ([1, n_{r_k}] \setminus B_{r_k-1}) \\ &\leq \text{card}([1, n_{r_k}] \setminus A) + \text{card}([1, n_{r_k}] \setminus B_1) + \dots + \text{card}([1, n_{r_k}] \setminus B_{r_k-1}) \\ &\leq \underbrace{\frac{n_{r_k}}{r_k^2} + \dots + \frac{n_{r_k}}{r_k^2}}_{r_k \text{ vezes}} \\ &= \frac{n_{r_k}}{r_k}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4,

$$\text{card}(A \cap B_1 \cap \dots \cap B_{r_k-1}) \geq n_{r_k} - \frac{n_{r_k}}{r_k} = n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k}\right),$$

o que demonstra a Afirmção 4.1.1. Assim,

$$\text{card} \{1 \leq i \leq n_{r_k}; \|T^i x_\beta\|_1 > r_k - 1\} \geq n_{r_k} \left(1 - \frac{1}{r_k}\right)$$

e, portanto, a órbita de  $x_\beta$  é distribucionalmente 1-ilimitada.

Por outro lado, se  $1 \leq i \leq n_{r_k+1}$  e  $\|T^i x_s\|_{r_k+1} < \frac{1}{r_k+1}$  para cada  $s < r_k+1$ , então:

$$\begin{aligned} \|T^i x_\beta\|_{r_k+1} &\leq \left\| T^i \left( \sum_j \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} x_{r_j} \right) \right\|_{r_k+1} \leq \sum_j \frac{|\beta_{r_j}|}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_{r_k+1} \\ &= \sum_{j \leq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_{r_k+1} + \sum_{j > k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_{r_k+1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Se  $j \leq k$ , então  $r_j \leq r_k < r_k+1$ . Logo,  $\|T^i x_{r_j}\|_{r_k+1} < \frac{1}{r_k+1}$ , sempre que  $j \leq k$ . Logo,

$$\sum_{j \leq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_{r_k+1} \leq \sum_{j \leq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \left( \frac{1}{r_k+1} \right) = \frac{1}{r_k+1} \sum_{j \leq k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \leq \frac{1}{r_k+1} \sum_{j \leq k} \frac{1}{2^{r_j}}. \quad (4.10)$$

Se  $j > k$ , então  $j-1 \geq k$ . Assim,  $r_{j-1} \geq r_k$  e, portanto,

$$r_{j-1} + 1 \geq r_k + 1. \quad (4.11)$$

Por (4.6), temos

$$\begin{aligned} r_j &\geq 1 + r_{j-1} + n_{r_{j-1}+1} \\ &\geq 1 + r_k + n_{r_k+1} \quad (\text{por (4.11)}) \\ &\geq 1 + r_k + i \quad (\text{pois } 1 \leq i \leq n_{r_k+1}). \end{aligned}$$

Como a sequência de seminormas é crescente, segue que  $\|x_{r_j}\|_{1+r_k+i} \leq \|x_{r_j}\|_{r_j} \leq 1$ . Daí,

$$\sum_{j > k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|T^i x_{r_j}\|_{r_k+1} \leq \sum_{j > k} \frac{\beta_{r_j}}{2^{r_j}} \|x_{r_j}\|_{r_k+1+i} \leq \sum_{j > k} \frac{1}{2^{r_j}}. \quad (4.12)$$

Como  $r_k+1 > 1$ , segue que  $\frac{1}{r_k+1} < 1$ . Dessa forma, utilizando (4.10) e (4.12), reescrevemos (4.9):

$$\begin{aligned} \|T^i x_\beta\|_{r_k+1} &\leq \frac{1}{r_k+1} \sum_{j \leq k} \frac{1}{2^{r_j}} + \sum_{j > k} \frac{1}{2^{r_j}} \\ &\leq \frac{1}{r_k+1} \sum_{j \leq k} \frac{1}{2^{r_j}} + \frac{1}{r_k+1} \sum_{j > k} \frac{1}{2^{r_j}} \\ &= \frac{1}{r_k+1} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r_j}} \right) \\ &< \frac{1}{r_k+1}. \end{aligned}$$

Considere  $C_s := \left\{ 1 \leq i \leq n_{r_k+1}; \|T^i x_s\|_{r_k+1} < \frac{1}{r_k+1} \right\}$ , para cada  $s < r_k + 1$ . Provamos, assim, que

$$\left\{ 1 \leq i \leq n_{r_k+1}; \|T^i x_\beta\|_{r_k+1} < \frac{1}{r_k+1} \right\} \supset C_1 \cap \dots \cap C_{r_k}.$$

Além disso,

$$\text{card}(C_s) > n_{r_k+1} \left( 1 - \frac{1}{(r_k+1)^2} \right), \quad \forall s = 1, \dots, r_k,$$

pela condição (4.5). De maneira análoga à feita na prova da Afirmação 4.1.1, podemos mostrar que

$$\text{card}(C_1 \cap \dots \cap C_{r_k}) \geq n_{r_k+1} \left( 1 - \frac{1}{r_k+1} \right).$$

Portanto,

$$\text{card} \left\{ 1 \leq i \leq n_{r_k+1}; \|T^i x_\beta\|_{r_k+1} < \frac{1}{r_k+1} \right\} \geq n_{r_k+1} \left( 1 - \frac{1}{r_k+1} \right),$$

de onde concluímos que  $x_\beta$  tem órbita distribucionalmente próxima de zero.

Como  $X$  é separável, podemos escolher uma sequência densa  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X_0$  e uma coleção enumerável  $\gamma_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) tal que cada sequência  $\gamma_n$  contém uma quantidade infinita de números 1's,  $\gamma_n \leq \alpha$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e as sequências  $\gamma_n$  possuem suporte mutuamente disjuntos ( $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é o que fixamos anteriormente de maneira que  $\alpha_n = 1 \Leftrightarrow n = r_j$  para algum  $j \in \mathbb{N}$ ). Denotaremos o suporte de  $\gamma_n$  por  $\text{supp}(\gamma_n)$ .

Tome a sequência de vetores

$$u_n := \sum_i \frac{\gamma_{n,i}}{2^i} x_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observe que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  é um vetor construído de maneira análoga a  $x_\beta$  e, portanto, a órbita de cada  $u_n$  é distribucionalmente 1-ilimitada e distribucionalmente próxima de zero. Defina, agora,

$$z_n := y_n + \frac{1}{n} u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que  $\{\|u_n\|_k; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado em  $\mathbb{R}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Com efeito, escolha  $k \in \mathbb{N}$

e  $n \in \mathbb{N}$  quaisquer. Então:

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_k &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\gamma_{n,i}|}{2^i} \|x_i\|_k \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|\gamma_{n,i}|}{2^i} \|x_i\|_k + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|\gamma_{n,i}|}{2^i} \|x_i\|_k \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{|\gamma_{n,i}|}{2^i} \|x_i\|_k + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|\gamma_{n,i}|}{2^i} \|x_i\|_i \quad (\text{pois a sequência de seminormas é crescente}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} \|x_i\|_k + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} \quad (\text{por (4.3)}).
\end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}$ , temos que  $R_k := \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} \|x_i\|_k + \frac{1}{2^{k-1}}$  é uma constante que depende de  $k$ . E também, como  $n$  e  $k$  foram escolhidos arbitrariamente em  $\mathbb{N}$ , segue que  $\|u_n\|_k \leq R_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\{\|u_n\|_k; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado em  $\mathbb{R}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Por conseguinte,  $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$  é limitado em  $X$ . Isso implica que

$$\frac{1}{n} u_n \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e, dessa forma, a sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é densa em  $X$  (pois  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é densa em  $X$ ). Logo, se  $Y := \text{span}\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ , temos que  $Y$  é um subespaço denso de  $X$ .

Seja  $u \in Y \setminus \{0\}$ . Então existem  $r \in \mathbb{N}$ , com  $r \geq 1$ , e escalares não nulos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  tais que

$$u = \sum_{i=1}^r \alpha_i z_i = (\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_r y_r) + \sum_{n=1}^r \frac{\alpha_n}{n} u_n.$$

Denote por  $y_0 := \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_r y_r$ . É claro que  $y_0 \in X_0$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^r \frac{\alpha_n}{n} u_n &= \sum_{n=1}^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \cdot \frac{\gamma_{n,k}}{2^k} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^r \frac{\alpha_n \gamma_{n,k}}{n} \right) \frac{1}{2^k} x_k.
\end{aligned}$$

Se, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , denotarmos  $\rho_k := \sum_{n=1}^r \frac{\alpha_n \gamma_{n,k}}{n}$ , podemos escrever

$$\sum_{n=1}^r \frac{\alpha_n}{n} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{2^k} x_k.$$

Assim,

$$u = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{2^k} x_k.$$

Repare que  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de escalares que toma, no máximo,  $r + 1$  valores, onde cada um aparece infinitas vezes, pois:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\alpha_n}{n}, & \text{se } k \in \text{supp}(\gamma_n) \text{ para algum } 1 \leq n \leq r \\ 0, & \text{se } k \notin \text{supp}(\gamma_1) \cup \dots \cup \text{supp}(\gamma_r) \end{cases}.$$

Assim, como no caso da prova feita acima para  $x_\beta$ , podemos mostrar de forma análoga que a órbita de

$$v := \sum_k \frac{\rho_k}{2^k} x_k$$

é distribucionalmente 1-ilimitada e distribucionalmente próxima de zero. Dessa forma, existem  $A, B \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(A) = \overline{\text{dens}}(B) = 1$  tais que

$$\lim_{k \in A} \|T^k v\|_1 = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{k \in B} T^k v = 0.$$

Como  $u = y_0 + v$  e  $T^k y_0 \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  (pois  $y_0 \in X_0$ ), segue que

$$\lim_{k \in B} T^k u = 0.$$

Por outro lado, como

$$\|T^k u\|_1 = \|T^k(v + y_0)\|_1 \geq \|T^k v\|_1 - \|T^k y_0\|_1,$$

temos que

$$\lim_{k \in A} \|T^k u\|_1 \geq \lim_{k \in A} \|T^k v\|_1 - \lim_{k \in A} \|T^k y_0\|_1 = \infty.$$

Portanto,  $u$  é um vetor distribucionalmente 1-irregular de  $Y$ . Mas como  $u$  foi escolhido arbitrariamente em  $Y \setminus \{0\}$ , segue que  $Y$  é uma variedade uniformemente distribucionalmente irregular densa para  $T$  e isso encerra a prova do Teorema 4.3. ■

## 4.2 Aplicações

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações do Teorema 4.3. Mas para demonstrar a primeira delas, faz-se necessária a utilização do seguinte teorema:

**Teorema 4.5.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach (real ou complexo) e  $T \in B(X)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

$$(i) \text{ Ou } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^n\|} < \infty;$$

$$(ii) \text{ Ou } X \text{ é um espaço de Hilbert e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^n\|^2} < \infty .$$

Então existe  $x \in X$  tal que  $\|T^n x\| \rightarrow \infty$ .

Não apresentaremos aqui a demonstração do Teorema 4.5, porém o leitor interessado pode encontrá-la em [14]. Mas de posse do resultado acima e do Teorema 4.3, a prova do teorema a seguir torna-se simples.

**Teorema 4.6.** *Considere  $X$  separável e suponha que  $T \in B(X)$  satisfaça às seguintes condições:*

(I) *Existe um subconjunto denso  $X_0$  de  $X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = 0$ , para todo  $x \in X_0$ .*

(II) *Uma das seguintes condições é verdadeira:*

(a)  *$X$  é um espaço de Fréchet e existe um autovalor  $\lambda$  tal que  $|\lambda| > 1$ .*

(b)  *$X$  é um espaço de Banach e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^n\|} < \infty$ .*

(c)  *$X$  é um espaço de Hilbert e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|T^n\|^2} < \infty$ .*

Então  $T$  é densamente distribucionalmente caótico.

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.3, é suficiente provar a existência de um vetor  $y \in X$  com órbita distribucionalmente ilimitada para  $T$  em cada uma das condições apresentadas em (II).

No caso (a), considere  $y \in X$  um autovetor não nulo associado ao autovalor  $\lambda$ , com  $|\lambda| > 1$ . Tome  $m \in \mathbb{N}$  e considere a seminorma  $\|\cdot\|_m$ . Como  $Ty = \lambda y$ , segue que  $T^k y = \lambda^k y$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Daí,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k y\|_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda^k y\|_m = \|y\|_m \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k = \infty.$$

Logo,  $y$  possui órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada<sup>1</sup> e, portanto,  $T$  é densamente distribucionalmente caótico pelo Teorema 4.3.

Agora, considere verdadeira a condição (b) em (II). Pelo Teorema 4.5, existe  $x \in X$  tal que  $\|T^n x\| \rightarrow \infty$ . Portanto, segue do Teorema 4.3 que  $T$  é densamente distribucionalmente caótico.

---

<sup>1</sup>Note que particularmente neste caso,  $m \in \mathbb{N}$  pôde ser tomado arbitrariamente e, assim,  $y$  possui órbita distribucionalmente  $m$ -ilimitada para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ .

A prova da condição (c) em (II) é análoga à demonstração do caso (b) de (II). ■

A fim de elucidar um corolário do Teorema 4.6, vejamos a seguir um critério de hiperciclicidade, cuja demonstração foge do objetivo principal deste trabalho e pode ser encontrada em [9].

**Teorema 4.7** (Critério de Godefroy-Shapiro). *Seja  $T \in B(X)$ . Suponha que os subespaços*

$$X_0 := \text{span} \{x \in X; Tx = \lambda x \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ com } |\lambda| < 1\}$$

*e*

$$Y_0 := \text{span} \{x \in X; Tx = \lambda x \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ com } |\lambda| > 1\}$$

*sejam densos em  $X$ . Então  $T$  é misturador e, em particular, é hipercíclico.*

**Corolário 4.8.** *Se  $T \in B(X)$  satisfaz o critério de Godefroy-Shapiro, então  $T$  é densamente distribucionalmente caótico.*

*Demonstração.* Com efeito, se  $T$  satisfaz às hipóteses do Teorema 4.7, temos que os subespaços

$$X_0 := \text{span} \{x \in X; Tx = \lambda x \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ com } |\lambda| < 1\}$$

*e*

$$Y_0 := \text{span} \{x \in X; Tx = \lambda x \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ com } |\lambda| > 1\}$$

são densos em  $X$ . Assim,  $X_0$  satisfaz à condição (I) do Teorema 4.6 e a densidade de  $Y_0$  garante a condição (II)-(a) do Teorema 4.6. ■

De acordo com [8], todo operador sobre  $H(\mathbb{C}^n)$  que comuta com qualquer operador translação e não é múltiplo escalar da identidade, satisfaz o critério de Godefroy-Shapiro. Assim, pelo Corolário 4.8, obtemos uma classe de operadores que são densamente distribucionalmente caóticos, através do seguinte resultado:

**Corolário 4.9.** *Todo operador sobre  $H(\mathbb{C}^n)$  que comuta com qualquer operador translação e não é múltiplo escalar da identidade é densamente distribucionalmente caótico.*

Em particular, o operador derivação

$$\begin{aligned} D : H(\mathbb{C}) &\rightarrow H(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto Df = f' \end{aligned}$$

é densamente distribucionalmente caótico.

**Definição 4.10.** *Uma série  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  em um espaço de Fréchet  $X$  é dita **incondicionalmente convergente** se para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \geq 1$  tal que*

$$d\left(\sum_{k \in F} x_k, 0\right) < \varepsilon$$

sempre que  $F \subset \mathbb{N}$  é finito e  $F \cap \{1, 2, \dots, N\} = \emptyset$ .

**Teorema 4.11.** *Seja  $X$  separável e  $T \in B(X)$ . Suponha que:*

- (a) *Existe um subconjunto denso  $X_0$  de  $X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = 0$ , para todo  $x \in X_0$ ;*
- (b) *Existem um subconjunto  $Y$  de  $X$ , um mapa  $S : Y \rightarrow Y$ , com  $TSy = y$  sobre  $Y$ , e um vetor  $z \in Y \setminus \{0\}$  tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} T^n z$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} S^n z$  convergem incondicionalmente.*

Então  $T$  é desamente distribucionalmente caótico.

*Demonstração.* Observe que  $TSz = z$ , pois  $z \in Y$ .

Defina  $w_{k_0} := \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0 n} z$ , para algum  $k_0 \in \mathbb{N}$ , suficientemente grande. Então  $w_{k_0} \neq 0$  (pois  $z \in Y \setminus \{0\}$ ) e, além disso,  $T^{k_0} w_{k_0} = w_{k_0}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
 T^{k_0} w_{k_0} &= T^{k_0} \left( \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0 n} z \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0 n} T^{k_0} z + T^{k_0} z + \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0} S^{k_0 n} z \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0(n+1)} z + T^{k_0} z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0(n-1)} z \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=2}^{\infty} S^{k_0(n-1)} z \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0 n} z \\
 &= w_{k_0}.
 \end{aligned}$$

Seja  $y_k := \sum_{n=k}^{\infty} S^{k_0 n} z$ . Como a série  $\sum_{n=1}^{\infty} S^n z$  converge incondicionalmente, segue que  $y_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . E também,

$$\begin{aligned}
 T^{k_0 j} y_k &= T^{k_0 j} \left( \sum_{n=k}^{\infty} S^{k_0 n} z \right) = T^{k_0 j} \left( \sum_{n=k}^{j-1} S^{k_0 n} z + S^{k_0 j} z + \sum_{n=j+1}^{\infty} S^{k_0 n} z \right) \\
 &= \sum_{n=k}^{j-1} T^{k_0 j} S^{k_0 n} z + T^{k_0 j} S^{k_0 j} z + \sum_{n=j+1}^{\infty} T^{k_0 j} S^{k_0 n} z \\
 &= \sum_{n=k}^{j-1} T^{k_0(j-n)} z + z + \sum_{n=j+1}^{\infty} S^{k_0(n-j)} z \\
 &= \sum_{n=1}^{j-k} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0 n} z.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$T^{k_0 j} y_k = \sum_{n=1}^{j-k} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0 n} z. \quad (4.13)$$

Logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} T^{k_0 j} y_k = \sum_{n=1}^{\infty} T^{k_0 n} z + z + \sum_{n=1}^{\infty} S^{k_0 n} z = w_{k_0}.$$

Da continuidade de  $T$ , segue que para  $0 \leq l < k_0$ , temos<sup>2</sup>:

$$T^l w_{k_0} = \lim_{j \rightarrow \infty} T^l T^{k_0 j} y_k = \lim_{j \rightarrow \infty} T^{l+k_0 j} y_k. \quad (4.14)$$

Portanto, o conjunto  $\{T^l w_{k_0}; 0 \leq l < k_0\}$  consiste de pontos de acumulação da órbita de  $y_k$ .

Tome  $\varepsilon := \frac{1}{2} \min \{d(T^l w_{k_0}, 0); 0 \leq l < k_0\}$ . Por (4.14), existe  $j_{0,k} \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(T^{l+k_0 j} y_k, T^l w_{k_0}) < \varepsilon, \quad \forall j \geq j_{0,k} \quad (4.15)$$

e para todo  $0 \leq l < k_0$ .

Pelo algoritmo da divisão, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq k_0$ , existem  $j_n \in \mathbb{N}$  e  $l_n \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$  tais que  $n = l_n + k_0 j_n$ . Em particular, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_{0,k} \in \mathbb{N}$ , com  $n_{0,k} \geq k_0$ , tal que se  $n \geq n_{0,k}$ , então  $j_n \geq j_{0,k}$ .

Afirmamos que, uma vez fixado  $k$ ,  $d(T^n y_k, 0) > \varepsilon$ , para todo  $n \geq n_{0,k}$ . Com efeito, suponha que  $d(T^n y_k, 0) \leq \varepsilon$ , para algum  $n \geq n_{0,k}$ . Então

$$d(T^{l_n + k_0 j_n} y_k, 0) \leq \varepsilon,$$

donde

$$\begin{aligned} d(T^{l_n} w_{k_0}, 0) &\leq d(T^{l_n} w_{k_0}, T^{l_n + k_0 j_n} y_k) + d(T^{l_n + k_0 j_n} y_k, 0) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \quad (\text{por (4.15)}) \end{aligned}$$

para algum  $n \geq n_{0,k}$ . Portanto,

$$d(T^{l_n} w_{k_0}, 0) < 2\varepsilon, \quad \text{para algum } n \geq n_{0,k}. \quad (4.16)$$

Mas  $2\varepsilon = \min \{d(T^l w_{k_0}, 0); 0 \leq l < k_0\}$ , isto é,

$$2\varepsilon \leq d(T^l w_{k_0}, 0),$$

---

<sup>2</sup>Se  $k_0 \leq l$ , segue do algoritmo da divisão que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $l = mk_0 + r$ , para algum  $0 \leq r < k_0$ . Daí,  $T^l w_{k_0} = T^{mk_0+r} w_{k_0} = T^{mk_0} (T^r w_{k_0}) = T^r (T^{mk_0} w_{k_0}) = T^r w_{k_0}$ .

para todo  $0 \leq l < k_0$ . Como  $0 \leq l_n < k_0$ , temos que (4.16) é uma contradição. Logo,

$$d(T^n y_k, 0) > \varepsilon, \quad \forall n \geq n_{0,k}.$$

Dessa forma, para  $k = 1$ , escolha  $N_1 \geq n_{0,1}$ , com  $N_1 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de modo que seja verdadeira a desigualdade

$$\frac{\text{card} \{1 \leq n \leq N_1; d(T^n y_1, 0) > \varepsilon\}}{N_1} > 1 - \frac{1}{2}.$$

Novamente, para  $k = 2$ , escolha  $N_2 \geq N_1$ , com  $N_2 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de modo que seja verdadeira a desigualdade

$$\frac{\text{card} \{1 \leq n \leq N_2; d(T^n y_2, 0) > \varepsilon\}}{N_2} > 1 - \frac{1}{3}.$$

Prosseguindo assim sucessivamente, obtemos uma sequência crescente de inteiros positivos  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , vale

$$\frac{\text{card} \{1 \leq n \leq N_k; d(T^n y_k, 0) > \varepsilon\}}{N_k} > 1 - \frac{1}{k+1}. \quad (4.17)$$

Assim, fazendo  $k \rightarrow \infty$  em (4.17), obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \{1 \leq n \leq N_k; d(T^n y_k, 0) > \varepsilon\} = 1.$$

Pela Proposição 3.2, segue que  $T$  admite um vetor com órbita distribucionalmente ilimitada. Logo, pelo Teorema 4.3,  $T$  é densamente distribucionalmente caótico. ■

**Definição 4.12.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet. Dado um operador  $T : X \rightarrow X$ , um vetor  $x \in X$  é chamado **frequentemente hipercíclico** para  $T$  se, para cada subconjunto aberto não vazio  $U$  de  $X$ , temos que*

$$\underline{\text{dens}} \{n \in \mathbb{N}; T^n x \in U\} > 0.$$

*Um operador  $T$  é **frequentemente hipercíclico** se possui um vetor frequentemente hipercíclico.*

Em [5], foi observado o seguinte critério para que uma aplicação linear contínua seja frequentemente hipercíclica:

**Teorema 4.13** (Critério da Hiperciclicidade Frequente). *Seja  $T$  um mapa linear contínuo sobre um  $F$ -espaço<sup>3</sup> separável  $X$ . Suponha que exista um subconjunto denso  $X_0$  de  $X$  e um mapa  $S : X_0 \rightarrow X_0$  tal que*

---

<sup>3</sup>Dizemos que  $X$  é um **F-espaço** se sua topologia é induzida por uma métrica completa e invariante.

- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} T^n x$  converge incondicionalmente para todo  $x \in X_0$ ;
- (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} S^n x$  converge incondicionalmente para todo  $x \in X_0$ ;
- (iii)  $TSx = x$ , para todo  $x \in X_0$ .

Então  $T$  é frequentemente hipercíclico.

Como um espaço de Fréchet é também, em particular, um F-espaço, o seguinte corolário do Teorema 4.11 mostra que se  $T \in B(X)$  satisfaz às hipóteses do Teorema 4.13, com  $X$  sendo um espaço de Fréchet, então  $T$  é densamente distribucionalmente caótico, além de frequentemente hipercíclico. Dessa forma, o Critério da Hiperciclicidade Frequente também é um critério para o caos distribucional denso.

**Corolário 4.14.** *Seja  $X$  separável e considere  $T \in B(X)$ . Suponha que exista um subconjunto denso  $X_0$  de  $X$  e um mapa  $S : X_0 \rightarrow X_0$  tal que, para qualquer  $x \in X_0$ ,*

- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} T^n x$  converge incondicionalmente;
- (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} S^n x$  converge incondicionalmente;
- (iii)  $TSx = x$ .

Então  $T$  é densamente distribucionalmente caótico.

*Demonstração.* Com efeito, como  $\sum_{n=1}^{\infty} T^n x$  converge incondicionalmente para todo  $x \in X_0$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = 0$ , para todo  $x \in X_0$ . As demais hipóteses do Corolário 4.14 implicam diretamente que a hipótese (b) do Teorema 4.11 é satisfeita e, portanto,  $T$  é densamente distribucionalmente caótico. ■

# Capítulo 5

## Caos Distribucional Denso: Casos Especiais

Neste capítulo, pretendemos caracterizar o caos distribucional denso para dois tipos especiais de operadores sobre espaços de Fréchet particulares. O primeiro deles se trata dos operadores deslocamento à esquerda com pesos sobre um espaço de Fréchet de sequências. O segundo tipo é o dos operadores de composição sobre o espaço  $H(\mathbb{D})$ .

### 5.1 Operadores deslocamento à esquerda com pesos

Na Seção 2.2, introduzimos um exemplo de operador deslocamento à esquerda com pesos sobre o espaço de Banach  $\ell^1(\mathbb{N})$ . Mostramos que, apesar de tal operador admitir vetor com órbita ilimitada, o mesmo não se poderia garantir sobre a existência de vetores com órbitas distribucionalmente ilimitadas e, portanto, de caos distribucional. No entanto, certas condições a respeito de operadores desse tipo podem ser impostas de modo a garantir não apenas caos distribucional, mas também caos distribucional denso. Para compreender tais condições, algumas definições fazem-se necessárias.

**Definição 5.1.** Dizemos que  $X$  é um **espaço de Fréchet de sequências** se  $X$  é um espaço de Fréchet cujos elementos são sequências unilaterais  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (ou bilaterais  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ) de escalares, cujas operações algébricas são dadas por

$$(i) \quad (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),$$

$$(ii) \quad \lambda(x_n) = (\lambda x_n), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K},$$

e cuja inclusão de  $X$  no espaço produto  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  (respectivamente,  $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ ) é contínua, ou seja, a convergência em  $X$  implica convergência coordenada a coordenada.

De agora em diante, consideraremos apenas o caso unilateral, isto é, abordaremos apenas o caso em que  $X$  é um espaço de Fréchet que é subespaço de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

**Definição 5.2.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de sequências (unilaterais). A sequência  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é **base canônica de  $X$**  se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i)  $e_n \in X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $e_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{posição } n}, 0, \dots)$ ;

(ii)  $\forall x \in X$ , temos  $x = \lim_{N \rightarrow \infty} (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$  (isto é,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$  é uma série convergente em  $X$ ).

**Definição 5.3.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de sequências e  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de escalares não nulos. A aplicação  $B_w : X \rightarrow X$  definida por*

$$B_w(x) = B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) := (w_1 x_2, w_2 x_3, w_3 x_4, \dots),$$

para todo  $x \in X$ , é chamada de **deslocamento (unilateral) à esquerda com pesos** e a sequência  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é chamada uma **sequência de pesos**.

Note que a aplicação deslocamento (unilateral) à esquerda sem pesos ocorre quando a sequência de pesos é constante e igual a 1. Além disso, se  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é base canônica de  $X$ , podemos descrever os deslocamentos à esquerda com pesos em termos dela, a saber:

$$B_w(e_n) := w_n e_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad \text{com } e_0 := 0.$$

Observe que essa foi a maneira como descrevemos inicialmente o operador  $T$  na Seção 2.2.

Outro detalhe importante é que a continuidade da inclusão  $X \hookrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  equivale à exigência de continuidade de cada funcional coordenada

$$X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \rightarrow x_n, \quad n \geq 1,$$

o qual implica que toda aplicação deslocamento com pesos possui gráfico fechado. Assim, segue do Teorema do Gráfico Fechado<sup>1</sup> que se  $B_w : X \rightarrow X$  está bem definido, então  $B_w$  é contínuo e, portanto, é um operador. É importante ter essas noções em mente, pois nem toda aplicação deslocamento com pesos está bem definida. Veja o exemplo abaixo.

**Exemplo 5.4.** *Considere  $w = (2, 3, 4, 5, \dots)$  uma sequência de pesos e  $B_w : c_0 \rightarrow c_0$ . O vetor  $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in c_0$ , mas*

$$B_w(x) = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \notin c_0.$$

Logo,  $B_w$  não está bem definido neste caso e, portanto, não pode ser um operador.

---

<sup>1</sup>O Teorema do Gráfico Fechado afirma que se  $X$  e  $Y$  são F-espacos e  $T : X \rightarrow Y$  é linear, com  $G(T) := \{(x, Tx); x \in X\}$  fechado em  $X \times Y$ , então  $T$  é contínua (veja [16]).

Assim, para que os resultados a seguir façam sentido, sempre que supusermos que uma aplicação deslocamento à esquerda (com ou sem pesos) é um operador sobre um espaço de Fréchet de seqüências, estaremos subentendendo-a bem definida.

De posse dos conceitos acima, finalmente estamos prontos para enunciar um resultado que caracteriza o caos distribucional denso para operadores deslocamento (unilateral) à esquerda com pesos sobre espaços de Fréchet de seqüências, em termos da existência de uma órbita distribucionalmente ilimitada.

**Teorema 5.5.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de seqüências tal que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é base canônica. Suponha que a aplicação deslocamento unilateral à esquerda com pesos*

$$B_w((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (w_n x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

*seja um operador sobre  $X$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $B_w$  é distribucionalmente caótico;
- (ii)  $B_w$  é densamente distribucionalmente caótico;
- (iii)  $B_w$  admite uma variedade uniformemente distribucionalmente irregular densa;
- (iv)  $B_w$  admite uma órbita distribucionalmente ilimitada.

*Demonstração.* Seja  $X_0$  o conjunto de todas as combinações lineares finitas dos vetores da base canônica. Tome  $x \in X$ . Então

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n e_n.$$

Como  $\sum_{n=1}^N x_n e_n \in X_0$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ , segue que  $x \in \overline{X_0}$ . Isto prova que  $\overline{X_0} = X$ , ou seja,  $X_0$  é denso em  $X$ .

Agora, tome  $x \in X_0$  qualquer. Então, para  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, temos que

$$(B_w)^n x = 0,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq n_0$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_w)^n x = 0,$$

para todo  $x \in X_0$ . Assim,  $B_w$  atende às hipóteses do Teorema 4.3 o que torna, portanto, o Teorema 5.5 um caso particular do primeiro. ■

Como uma aplicação do Teorema 5.5, apresentaremos a seguir uma condição suficiente para o caos distribucional denso de um operador deslocamento unilateral à esquerda sem pesos.

**Teorema 5.6.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de seqüências tal que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é base canônica. Suponha que a aplicação deslocamento unilateral à esquerda  $B$  seja um operador sobre  $X$ . Se existe um conjunto  $S \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(S) = 1$ , tal que*

$$\sum_{n \in S} e_n \text{ converge em } X,$$

*então  $B$  é densamente distribucionalmente caótico.*

*Demonstração.* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , considere

$$y_k := \sum_{n \in S, n \geq k} e_n.$$

Como a série  $\sum_{n \in S} e_n$  converge,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0.$$

Além disso,  $B^{n-1}e_n = e_1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em particular, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos que a primeira coordenada de  $B^{n-1}y_k$  é igual à primeira coordenada de  $e_1$ , para todo  $n \in S$ , com  $n \geq k$ . Considere o funcional

$$\begin{aligned} \pi_1 : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_1 \end{aligned},$$

onde  $x_1$  é a primeira coordenada de  $x \in X$ . Como  $\pi_1$  é contínuo, segue que dado  $\delta = 1$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $d(x, 0) \leq \varepsilon$ , então  $|\pi_1(x) - \pi_1(0)| = |x_1| < 1$ . Em particular, se para algum  $n \in S$ , com  $n \geq k$ , temos  $d(B^{n-1}y_k, 0) \leq \varepsilon$ , então

$$|\pi_1(B^{n-1}y_k)| < 1.$$

No entanto, isso contradiz o fato de que  $|\pi_1(B^{n-1}y_k)| = |\pi_1(e_1)| = 1$ . Logo,

$$d(B^{n-1}y_k, 0) > \varepsilon, \text{ para todo } n \in S, \text{ com } n \geq k.$$

Dessa forma, para  $k = 1$ , escolha  $N_1 \in S$  tal que  $N_1 > 1$  e

$$\frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_1; d(B^j y_1, 0) > \varepsilon\}}{N_1} \geq 1 - \frac{1}{2}.$$

Analogamente, para  $k = 2$ , escolha  $N_2 \in S$  tal que  $N_2 > \max \{2, N_1\}$  e

$$\frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_2; d(B^j y_2, 0) > \varepsilon\}}{N_2} \geq 1 - \frac{1}{3}.$$

Mais geralmente, para  $k = i$ , escolha  $N_i \in S$  tal que  $N_i > \max \{i, N_{i-1}\}$  e

$$\frac{\text{card} \{1 \leq j \leq N_i; d(B^j y_i, 0) > \varepsilon\}}{N_i} \geq 1 - \frac{1}{i+1}.$$

Dessa forma, obtemos uma sequência crescente de inteiros positivos  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \{1 \leq j \leq N_k; d(B^j y_k, 0) > \varepsilon\} = 1.$$

Pela Proposição 3.2,  $B$  admite um vetor com órbita distribucionalmente ilimitada. Logo, pelo Teorema 5.5,  $B$  é densamente distribucionalmente caótico. ■

A fim de demonstrar um corolário do Teorema 5.6, a seguinte definição e a próxima proposição fazem-se necessárias.

**Definição 5.7.** *Sejam  $f : U \rightarrow U$  e  $g : V \rightarrow V$  sistemas dinâmicos. Dizemos que  $f$  é **conjugado a  $g$**  se existe um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$ , denominado **conjugação**, tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

comuta, isto é,  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ .

**Definição 5.8.** *Sejam  $T : X \rightarrow X$  e  $S : Y \rightarrow Y$  sistemas dinâmicos lineares. Dizemos que  $T$  é **linearmente conjugado a  $S$**  se existe um homeomorfismo linear  $\varphi : X \rightarrow Y$ , denominado **conjugação linear**<sup>2</sup>, tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y & \xrightarrow{S} & Y \end{array}$$

comuta, isto é,  $\varphi \circ T = S \circ \varphi$ .

**Proposição 5.9.** *Caos distribucional denso é preservado por conjugação linear.*

*Demonstração.* Sejam  $T : X \rightarrow X$  e  $S : Y \rightarrow Y$  sistemas dinâmicos lineares e suponha que exista uma conjugação linear  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Suponha também que  $T$  é densamente distribucionalmente caótico e seja  $\Gamma \subset X$  um subconjunto denso em  $X$  para o qual todo par de elementos distintos de  $\Gamma$  é um par distribucionalmente  $\varepsilon$ -caótico, para algum  $\varepsilon > 0$  fixado. Como  $\varphi$  é um isomorfismo de EVTs, segue que  $\varphi(\Gamma)$  é denso em  $Y$ . Assim, dado um par  $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ , com  $x \neq y$ , para demonstrar a Proposição 5.9 é suficiente provar que existe  $\varepsilon' > 0$  tal que  $\varphi(\Gamma)$  é um conjunto distribucionalmente  $\varepsilon'$ -caótico para  $S$ . Com efeito, se  $x \neq y$ , então  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ , pois  $\varphi$  é injetivo.

---

<sup>2</sup>A conjugação e a conjugação linear são relações de equivalência entre sistemas dinâmicos e sistemas dinâmicos lineares, respectivamente. Sistemas dinâmicos (lineares) conjugados (linearmente) apresentam o mesmo comportamento dinâmico.

Considere  $d_X$  a métrica de  $X$  e  $d_Y$  a métrica de  $Y$ . Dado  $\tau > 0$ , defina

$$A := \{n \in \mathbb{N}; d_X(T^n x, T^n y) < \tau\} \text{ e } B := \{n \in \mathbb{N}; d_X(T^n x, T^n y) \geq \tau\}.$$

Como  $T$  é densamente distribucionalmente caótico, segue que  $\overline{\text{dens}}(A) = 1$  e  $\overline{\text{dens}}(B) = 0$ . Além disso,  $\varphi$  é uniformemente contínua e, portanto, dado  $\tau' > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $d_X(T^n x, T^n y) < \delta$ , então  $d_Y(\varphi(T^n x), \varphi(T^n y)) < \tau'$ , isto é

$$d_Y(S^n(\varphi(x)), S^n(\varphi(y))) < \tau'.$$

Pela Proposição 2.9, temos que  $\lim_{n \in A} d_X(T^n x, T^n y) = 0$ . Logo, existe  $n_0 \in A$  tal que

$$d_X(T^n x, T^n y) < \delta,$$

para todo  $n \in A$  tal que  $n \geq n_0$ . Portanto,

$$d_Y(S^n(\varphi(x)), S^n(\varphi(y))) < \tau',$$

para todo  $n \in A$  tal que  $n \geq n_0$ . Logo,

$$\overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}; d_Y(S^n(\varphi(x)), S^n(\varphi(y))) < \tau'\} = 1. \quad (5.1)$$

Por outro lado, como  $\varphi^{-1}$  é uniformemente contínua, existe  $\varepsilon' > 0$  tal que

$$d_Y(a, b) < \varepsilon' \Rightarrow d_X(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Pela definição de  $B$ ,

$$d_X(T^n x, T^n y) \geq \varepsilon,$$

para todo  $n \in B$ . Portanto, segue de (5.2), que

$$d_Y(S^n(\varphi(x)), S^n(\varphi(y))) = d_Y(\varphi(T^n x), \varphi(T^n y)) \geq \varepsilon'$$

para todo  $n \in B$ . Logo,

$$\overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}; d_Y(S^n(\varphi(x)), S^n(\varphi(y))) \geq \varepsilon'\} = 0. \quad (5.3)$$

Assim, segue de (5.1) e de (5.3) que  $(\varphi(x), \varphi(y))$  é um par distribucionalmente  $\varepsilon'$ -caótico para  $S$ , como queríamos demonstrar. ■

Um dado importante é que existe uma conjugação linear entre  $B_w$  e  $B$ , se ambos estão bem definidos. De fato, sejam  $X$  um espaço de Fréchet de seqüências e  $B_w : X \rightarrow X$  um operador deslocamento à esquerda com pesos, no qual  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é sua seqüência de pesos. Defina novos pesos, digamos  $v_n$ , por

$$v_n := \left( \prod_{\nu=1}^n w_\nu \right)^{-1}, \quad n \geq 1, \quad (5.4)$$

e considere o seguinte espaço de sequências:

$$X_v := \{(x_n)_n; (x_n v_n)_n \in X\}.$$

Se  $B : X_v \rightarrow X_v$  é um operador deslocamento à esquerda sem pesos, foi mostrado em [9] que o mapa

$$\begin{aligned} \varphi_v : X_v &\rightarrow X \\ (x_n)_n &\mapsto (x_n v_n)_n \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais tal que  $B_w \circ \varphi_v = \varphi_v \circ B$ .

Podemos usar  $\varphi_v$  para transferir a topologia de  $X$  para  $X_v$ : um conjunto  $U$  é aberto em  $X_v$  se, e somente se,  $\varphi_v(U)$  é aberto em  $X$ . Assim, se  $X$  é um espaço de Fréchet de sequências, então  $X_v$  também o é. Dessa forma,  $\varphi_v : X_v \rightarrow X$  é um isomorfismo de EVTs. Além disso, se  $(e_n)_n$  é base em  $X$ , então também é base em  $X_v$ .

**Corolário 5.10.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de sequências tal que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é base canônica. Seja  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de pesos em  $\mathbb{R}_+$ . Suponha que a aplicação deslocamento à esquerda com pesos  $B_w$  seja um operador sobre  $X$ . Se existe um conjunto  $S \subset \mathbb{N}$ , com  $\overline{\text{dens}}(S) = 1$ , tal que*

$$\sum_{n \in S} \left( \prod_{\nu=1}^n w_\nu \right)^{-1} e_n \text{ converge em } X, \quad (5.5)$$

*então  $B_w$  é densamente distribucionalmente caótico.*

*Demonstração.* Dadas as hipóteses do Corolário 5.10, considere a sequência de pesos descrita em (5.4) e  $\varphi_v$  a conjugação linear entre  $B_w$  e  $B$ . Conforme observado acima,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  também é uma base para  $X_v$ . Por hipótese,

$$\sum_{n \in S} v_n e_n \text{ converge em } X. \quad (5.6)$$

Assim, aplicando  $\varphi^{-1}$  em (5.6), segue que

$$\sum_{n \in S} e_n \text{ converge em } X_v.$$

Pelo Teorema 5.6, temos que  $B$  é densamente distribucionalmente caótico, donde a Proposição 5.9 garante que  $B_w$  também o é. ■

Considere o teorema a seguir, que pode ser visto em [9].

**Teorema 5.11.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de sequências tal que  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é base canônica. Suponha que a aplicação deslocamento à esquerda com pesos  $B_w$  seja um operador sobre  $X$ .*

Se  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma base incondicional<sup>3</sup>, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \prod_{\nu=1}^n w_{\nu} \right)^{-1} e_n$$

converge em  $X$ , se e somente se,  $B_w$  possui um ponto periódico não trivial.

A partir das hipóteses do Teorema 5.11, podemos aplicar o Corolário 5.10 e obter o seguinte resultado:

**Corolário 5.12.** *Seja  $X$  um espaço de Fréchet de seqüências no qual  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma base incondicional. Suponha que a aplicação deslocamento à esquerda com pesos  $B_w$  seja um operador sobre  $X$ . Se  $B_w$  possui um ponto periódico não trivial, então  $B_w$  é densamente distribucionalmente caótico.*

## 5.2 Operadores de composição

Nesta seção, objetivamos caracterizar o caos distribucional denso para operadores de composição sobre o espaço  $H(\mathbb{D})$ , onde  $\mathbb{D}$  trata-se do disco aberto unitário contido em  $\mathbb{C}$ . A fim de alcançar este objetivo, vejamos a seguir algumas definições e resultados úteis.

**Definição 5.13.** *Seja  $\Omega$  um domínio<sup>4</sup> arbitrário em  $\mathbb{C}$ . Um **automorfismo** de  $\Omega$  é uma função holomorfa bijetiva*

$$\varphi : \Omega \rightarrow \Omega,$$

*na qual sua inversa também é holomorfa. O conjunto de todos os automorfismos de  $\Omega$  é denotado por  $Aut(\Omega)$ .*

**Definição 5.14.** *Considere  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{C}$ . Para  $\varphi \in Aut(\Omega)$ , seu correspondente **operador composição** é definido por*

$$\begin{aligned} C_{\varphi} : H(\Omega) &\rightarrow H(\Omega), \\ f &\mapsto C_{\varphi}f \end{aligned}$$

onde  $C_{\varphi}f = f \circ \varphi$ , isto é,  $(C_{\varphi}f)(z) = f(\varphi(z))$ ,  $\forall z \in \Omega$ .

Observe que as iteradas do operador composição são dadas por  $C_{\varphi}^n f = f \circ \varphi^n$ .

---

<sup>3</sup>Uma seqüência  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço de Fréchet de seqüências é chamada uma **base incondicional** se é uma base para  $X$  tal que, para todo  $x \in X$ , a representação  $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$  converge incondicionalmente.

<sup>4</sup>Dizemos que  $D$  é um **domínio** em  $\mathbb{C}$  se  $D$  é um conjunto aberto, não vazio e conexo de  $\mathbb{C}$ .

**Proposição 5.15.** *Sejam  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  dois domínios em  $\mathbb{C}$  e  $\psi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  um mapa conforme<sup>5</sup>. Se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são automorfismos de  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente, tais que  $\varphi_2 \circ \psi = \psi \circ \varphi_1$ , então  $C_{\varphi_2}$  e  $C_{\varphi_1}$  são linearmente conjugados e o mapa*

$$\begin{aligned} J : H(\Omega_2) &\rightarrow H(\Omega_1), \\ f &\mapsto f \circ \psi \end{aligned}$$

*é a conjugação linear entre eles, isto é, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H(\Omega_2) & \xrightarrow{C_{\varphi_2}} & H(\Omega_2) \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ H(\Omega_1) & \xrightarrow{C_{\varphi_1}} & H(\Omega_1) \end{array}$$

*comuta.*

A demonstração da Proposição 5.15 foge do objetivo principal deste trabalho e será omitida aqui, mas pode ser vista em [9].

**Definição 5.16.** *Considere  $\hat{\mathbb{C}}$  o plano complexo estendido, isto é,  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Uma **transformação linear fracional** é um mapa da forma*

$$\begin{aligned} T : \hat{\mathbb{C}} &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

*com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ . O conjunto de todas as transformações lineares fracionais será denotado por  $LFT(\hat{\mathbb{C}})$ .*

Note que a condição  $ad - bc \neq 0$  é necessária e suficiente para que a expressão em (5.7) seja não constante. Além disso, se  $T \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$ , então  $T$  é inversível e possui pelo menos um ponto fixo (cf. [17]).

**Definição 5.17.** *Um mapa  $T \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$  é chamado **parabólico** se possui apenas um ponto fixo em  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

Assim, suponha  $T \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$  parabólico e  $\alpha \in \mathbb{C}$  seu ponto fixo. Se  $S \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$  é tal que leva  $\alpha$  em  $\infty$ , então  $V = S \circ T \circ S^{-1}$  pertence a  $LFT(\hat{\mathbb{C}})$  e fixa apenas o ponto  $\infty$ . Portanto,  $V(z) = z + \tau$ , para algum número complexo não nulo  $\tau$ . Isso significa dizer que se  $T$  é parabólica, então  $T$  é conjugada a uma translação cujo ponto fixo é  $\infty$ .

Por outro lado, se  $T \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$  não é parabólico, então existem dois pontos fixos - digamos  $\alpha$  e  $\beta$  - ambos em  $\hat{\mathbb{C}}$ . Seja  $S \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$  um mapa que leva  $\alpha$  em 0 e  $\beta$  em  $\infty$ . Então

---

<sup>5</sup>Um **mapa conforme** é uma bijeção holomorfa entre dois domínios de  $\mathbb{C}$ .

$V = S \circ T \circ S^{-1}$  pertence a  $LFT(\hat{\mathbb{C}})$  e fixa os pontos 0 e  $\infty$ . Logo,  $V$  deve ser da forma  $V(z) = \lambda z$ , para algum número complexo  $\lambda$ , chamado *multiplicador* de  $T$ . A partir disso, temos a seguinte classificação, de acordo com [17].

**Definição 5.18.** *Suponha que  $T \in LFT(\hat{\mathbb{C}})$  não seja parabólico e nem o mapa identidade. Considere  $\lambda \neq 1$  o multiplicador de  $T$ . Então,  $T$  é chamado:*

- *Elíptico se  $|\lambda| = 1$ ;*
- *Hiperbólico se  $\lambda > 0$ ;*
- *Loxodrômico se  $T$  não é elítico e nem hiperbólico.*

Assim, mapas parabólicos são conjugados às translações; mapas elípticos são conjugados às rotações; mapas hiperbólicos são conjugados às dilatações positivas; e mapas loxodrômicos são conjugados às dilatações complexas (cf. [17]).

**Teorema 5.19** (Teorema de Iteração de Denjoy-Wolff). *Seja  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  tal que  $\varphi$  não é elíptico. Denote por  $\varphi^n$  a  $n$ -ésima iterada de  $\varphi$ . Então, as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

1. *Se  $\varphi$  possui um ponto fixo  $p \in \mathbb{D}$ , então  $(\varphi^n)$  converge para  $p$  uniformemente sobre os subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ .*
2. *Se  $\varphi$  não possui ponto fixo em  $\mathbb{D}$ , então existe um ponto fixo  $p \in \partial\mathbb{D}$  tal que  $(\varphi^n)$  converge para  $p$  uniformemente sobre os subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ .*

A prova do Teorema 5.19 pode ser encontrada em [17].

Finalmente, temos a seguinte caracterização para o caos distribucional denso de operadores de composição sobre o espaço  $H(\mathbb{D})$ .

**Teorema 5.20.** *Seja  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ . Então, o operador composição  $C_\varphi : H(\mathbb{D}) \rightarrow H(\mathbb{D})$  é densamente distribucionalmente caótico se, e somente se,  $\varphi$  não possui ponto fixo em  $\mathbb{D}$ .*

*Demonstração.* Suponha, inicialmente, que  $\varphi$  possui pelo menos um ponto fixo em  $\mathbb{D}$ .

Se  $\varphi$  é elíptico, então  $\varphi$  é conjugado a uma rotação. Pela Proposição 5.15, segue que  $C_\varphi$  não é distribucionalmente caótico.

Se  $\varphi$  não é elíptico e possui um ponto fixo  $p \in \mathbb{D}$ , segue da afirmação 1 do Teorema 5.19 que  $(\varphi^n)$  converge para  $p$  uniformemente sobre os subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ . Portanto,  $(f \circ \varphi^n)$  converge para  $f(p)$  uniformemente sobre os subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$  e, portanto,  $C_\varphi$  não é distribucionalmente caótico.

Reciprocamente, se  $\varphi$  não é elíptico e não possui ponto fixo em  $\mathbb{D}$ , a afirmação 2 do Teorema 5.19 garante a existência de um ponto fixo  $p \in \partial\mathbb{D}$ , tal que  $(\varphi^n)$  converge para  $p$  uniformemente sobre os subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ . Seja  $X_0$  o conjunto de todas as funções contínuas em  $\overline{\mathbb{D}}$ , analíticas em  $\mathbb{D}$  e nulas em  $p$ . Então  $X_0$  é denso em  $H(\mathbb{D})$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_\varphi^n f = \lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ \varphi^n) = f(p) = 0,$$

para toda  $f \in X_0$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja

$$\begin{aligned} g_k : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \\ z &\mapsto g_k(z) = \frac{1}{k(p-z)}. \end{aligned}$$

Então  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $H(\mathbb{D})$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 0$ . Além disso, fixado  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_\varphi^j g_k = \lim_{j \rightarrow \infty} (g_k \circ \varphi^j) = \infty.$$

Logo, existe  $j_{0,k} \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(C_\varphi^j g_k, 0) > \frac{1}{2}, \quad \forall j \geq j_{0,k}, \quad \text{com } j \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, para  $k = 1$ , escolha  $N_1 \geq j_{0,1}$ , com  $N_1 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de modo que seja verdadeira a desigualdade

$$\frac{\text{card} \left\{ 1 \leq j \leq N_1; d(C_\varphi^j g_1, 0) > \frac{1}{2} \right\}}{N_1} > 1 - \frac{1}{2}.$$

Novamente, para  $k = 2$ , escolha  $N_2 \geq N_1$ , com  $N_2 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, de modo que seja verdadeira a desigualdade

$$\frac{\text{card} \left\{ 1 \leq j \leq N_2; d(C_\varphi^j g_2, 0) > \frac{1}{2} \right\}}{N_2} > 1 - \frac{1}{3}.$$

Prosseguindo assim sucessivamente, obtemos uma sequência crescente de inteiros positivos  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , vale

$$\frac{\text{card} \left\{ 1 \leq j \leq N_k; d(C_\varphi^j g_k, 0) > \frac{1}{2} \right\}}{N_k} > 1 - \frac{1}{k+1}. \quad (5.8)$$

Assim, fazendo  $k \rightarrow \infty$  em (5.8), obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \text{card} \left\{ 1 \leq j \leq N_k; d(C_\varphi^j g_k, 0) > \frac{1}{2} \right\} = 1.$$

Pela Proposição 3.2, segue que  $C_\varphi$  admite um vetor com órbita distribucionalmente ilimitada. Logo, pelo Teorema 4.3,  $C_\varphi$  é densamente distribucionalmente caótico. ■

**Definição 5.21.** *Sejam  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{C}$  e  $\varphi_n : \Omega \rightarrow \Omega$ , com  $n \geq 1$ , uma sequência de aplicações holomorfas. A sequência  $(\varphi_n)_n$  é dita **fugitiva** se, para qualquer subconjunto compacto  $K \subset \Omega$ , existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\varphi_n(K) \cap K = \emptyset.$$

No corolário a seguir, aplicaremos a Definição 5.21 à sequência  $(\varphi^n)_n$  de iteradas de um automorfismo  $\varphi$  sobre um domínio simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$ .

**Corolário 5.22.** *Sejam  $\Omega$  um domínio simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$  e  $\varphi \in \text{Aut}(\Omega)$ . Para o operador composição  $C_\varphi : H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $C_\varphi$  é Devaney caótico;
- (ii)  $C_\varphi$  é misturador;
- (iii)  $C_\varphi$  é hipercíclico;
- (iv)  $(\varphi^n)$  é uma sequência fugitiva;
- (v)  $\varphi$  não possui ponto fixo em  $\Omega$ ;
- (vi)  $C_\varphi$  é densamente distribucionalmente caótico.

*Demonstração.* As equivalências (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv)  $\Leftrightarrow$  (v) são bem conhecidas e suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Se  $\Omega \neq \mathbb{C}$ , então a equivalência (v)  $\Leftrightarrow$  (vi) segue do Teorema 5.20 via conjugação.

Assim, suponha  $\Omega = \mathbb{C}$ . Se  $\varphi$  não possui ponto fixo em  $\mathbb{C}$ , pelas considerações feitas no início desta seção, temos que  $C_\varphi$  é parabólico (pois possui apenas  $\infty$  como ponto fixo em  $\hat{\mathbb{C}}$ ). Portanto,  $C_\varphi$  é conjugado a um operador translação. Como tais operadores são densamente distribucionalmente caóticos (cf. [4]), vale a afirmativa (vi).

Por outro lado, se  $\varphi$  possui um ponto fixo em  $\mathbb{C}$ , então  $C_\varphi$  é conjugado a  $C_\psi$ , onde  $\psi(z) = az$  e, portanto,  $C_\varphi$  não é densamente distribucionalmente caótico. ■

### 5.3 Observações finais

Foi visto em [9] que se  $T \in B(X)$  é inversível e hipercíclico, então  $T^{-1}$  também é hipercíclico. No entanto, o mesmo não se pode afirmar a respeito de operadores densamente distribucionalmente caóticos. Por exemplo, sejam  $\ell^1(\mathbb{Z}) := \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$  e  $F_w$  o operador definido por

$$\begin{aligned} F_w : \ell^1(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}) \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto F_w(x) = (w_n x_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

em que  $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma sequência de pesos tal que  $w_i = 2$ , para todo  $i \leq 0$  e  $F_w^{-1}|_{\ell^1(\mathbb{N})}$  é o operador deslocamento unilateral à esquerda com pesos, apresentado no Exemplo 2.12. Então  $F_w$  é um operador inversível sobre  $\ell^1(\mathbb{Z})$  e densamente distribucionalmente caótico, de acordo com [4]. No entanto, vimos que  $F_w^{-1}|_{\ell^1(\mathbb{N})}$  não pode ser densamente distribucionalmente caótico.

Outro fato interessante é que existem operadores densamente distribucionalmente caóticos sobre espaços de Banach que não são frequentemente hipercíclicos e nem Devaney caóticos. Um exemplo de operador desse tipo é apresentado em [3].

Em contrapartida, Frédéric Bayart e Imre Ruzsa, em [2], apresentaram um exemplo de operador deslocamento com pesos frequentemente hipercíclico o qual não é distribucionalmente caótico. Isto significa que hiperciclicidade frequente não implica caos distribucional e vice-versa, embora um operador possa apresentar, simultaneamente, ambos os tipos de caos conforme vimos no Capítulo 4 deste trabalho.

Quentin Menet, em [13], recentemente apresentou um exemplo de operador Denaney caótico que não é distribucionalmente caótico e nem frequentemente hipercíclico.

# Referências

- [1] BEAUZAMI, B. *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland: Holanda, Amsterdam, 1988.
- [2] BAYART, F.; RUZSA, I. Difference sets and frequently hypercyclic weighted shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 35, p. 691-709, 2013.
- [3] BERMÚDEZ, T.; BONILLA, A.; MARTÍNEZ-GIMÉNEZ, F.; PERIS, A. Li-Yorke and distributionally chaotic operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 373, p. 83-93, 2011.
- [4] BERNARDES, N.C. JR.; BONILLA, A.; MÜLLER, V.; PERIS, A. Distributional chaos for linear operators. *Journal of Functional Analysis*, v. 265, p. 2143-2163, 2013.
- [5] BONILLA, A.; GROSSE-ERDMANN, K.-G. Frequently hypercyclic operators and vectors. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 27, p. 383-404, 2007.;
- [6] BONILLA, A.; GROSSE-ERDMANN, K.-G. Frequently hypercyclic operators and vectors (Erratum). *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 29, p. 1993-1994, 2009.
- [7] EL-FALLAH; O., RANSFORD, T. Peripheral point spectrum and growth of powers of operators. *Journal of Operator Theory*, v. 52, p. 89-101, 2004.
- [8] GODEFROY, G.; SHAPIRO, J.H. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *Journal of Functional Analysis*, v. 98, p. 229-269, 1991.
- [9] GROSSE-ERDMANN, K.-G.; PERIS, A. *Linear Chaos*. Springer: London, 2011.
- [10] LIMA, E.L. *Curso de Análise*. v. 1. 12 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.
- [11] MARTÍNEZ-GIMÉNEZ, F.; OPROCHA, P., PERIS, A. Distributional chaos for backward shifts. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 335, p. 607-615, 2009.
- [12] MARTÍNEZ-GIMÉNEZ, F.; OPROCHA, P., PERIS, A. Distributional chaos for operators with full scrambled sets. *Mathematische Zeitschrift*, v. 274, p. 603-612, 2013.

- [13] MENET, Q. Linear chaos and frequent hypercyclicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, a aparecer.
- [14] MÜLLER, V.; VRISOVSKY, J. Orbits of linear operators tending to infinity. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, v. 39, p. 219-230, 2009.
- [15] MUNKRES, J.R. *Topology*. 2 ed. Prentice Hall: Upper Saddle River, New Jersey, 2000.
- [16] RUDIN, W. *Functional Analysis*. 2 ed. McGraw-Hill: New York, 1991.
- [17] SHAPIRO, J. H. *Composition Operators and Classical Function Theory*. Springer Science+Business Media, LLC: New York, 1993.