



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Erick Javier Palacios Escobar

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare

Co-orientador: Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel

# A Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Rio de Janeiro

04 de Fevereiro de 2016



# A Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Erick Javier Palacios Escobar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Hugo D. Fernández Sare.

**Co-Orientador:** Carlos D. Espinoza Peñafiel.

Rio de Janeiro  
04 de Fevereiro de 2016

# A Aplicação de Gauss e a Segunda Forma Fundamental de Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Erick Javier Palacios Escobar

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare.  
Co-Orientador: Calos Diosdado Espinoza Peñafiel.

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

---

(Presidente) Prof. Hugo Danilo Fernández Sare - IM/UFRJ

---

Prof. Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel - IM/UFRJ

---

Prof. Albetã Costa Mafra - IM/UFRJ

---

Prof. Tito Mejia Paredez - IME/UFF

Rio de Janeiro  
04 de Fevereiro de 2016

*A minha bonitinha Fernanda  
por ser a razão de meu existir.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, fonte da minha força e conhecimento.

Agradeço a minha família, que sempre me apoiaram para que eu tivesse a melhor educação que me permitiram chegar até aqui.

Agradeço a meu melhor amigo Carlos e sua esposa Abigail, pelo apoio, incentivo e paciência nas muitas horas a mim dispensadas.

Agradeço a minha namorada Fernanda, pela paciência, compreensão e sobre todo amor e carinho incondicional nos momentos bons e ruins.

Agradeço à família de minha namorada Fernanda, que sempre me apoiaram e me incentivaram a estudar.

Agradeço a meu orientador e co-orientador, pelo exemplo de ética e profissionalismo.

Agradeço aos professores do meu curso de graduação em matemática, especialmente aos professores Edgar Vera, Renato Benazic, Nuñez Lay, Agripino García (in memoriam) e Roxana López.

Agradeço aos professores do meu curso de mestrado: Cecília Salgado, Pedro Gamboa, Andrew Clarke, Paulo Amorím, Wladimir Neves e Ademir Pazoto.

Agradeço aos professores que compuseram a minha banca avaliadora e é claro por suas importantes correções e sugestões.

Agradeço a todos aqueles que permitiram tornar este trabalho melhor, aos meus companheiros e colegas do mestrado, em especial a Gladston, Daniel, Oscar, David Paternina e Alex, pelos nossos momentos de estudo; ao Davi Obata por muitas vezes ter tirado as minhas dúvidas de geometria riemanniana.

Agradeço a todos os funcionários do IM-UFRJ que nos possibilitam as melhores condições de ambiente e suporte burocrático.

Agradeço a todos que participaram de maneira direta ou indireta desta conquista.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

# Resumo

Baseada no artigo de José A. Gálvez e A. Martínez, esta dissertação mostra que, uma vez fornecidos uma superfície  $M$  com curvatura de Gauss positiva, um mapa  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  e uma estrutura conformal (métrica conformal) sobre  $M$ , é possível resolver, sob determinadas condições, os problemas de existência e unicidade de uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com mapa de Gauss  $N$  e tal que a estrutura conformal sobre  $M$  é a induzida por sua segunda forma fundamental.

**Palavras chaves:** Aplicação de Gauss, segunda forma fundamental, parâmetro conformal, mapas harmônicos, superfície de Riemann.

# Abstract

Based on article José A. Gálvez and A. Martínez, this work shows that once supplied one surface  $M$  with positive Gaussian curvature, a map  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  and a conformal structure (conformal metric) on  $M$ , its possible solve, under certain conditions, the existence and uniqueness problems of an immersion  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , with Gauss map  $N$  and such that the conformal structure on  $M$  is induced by his second fundamental form.

**Key words:** Gauss map, second fundamental form, conformal parameter, harmonic maps, Riemann surface.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Superfícies	3
1.1.1 Plano tangente a uma superfície regular	9
1.1.2 Primeira forma fundamental	11
1.2 Normais e orientabilidade	14
1.2.1 A aplicação de Gauss	17
1.2.2 Segunda forma fundamental	22
<b>2 Teorema de Frobenius e Parâmetros Isotérmicos</b>	<b>28</b>
2.1 Variedades diferenciáveis e superfícies de Riemann	28
2.1.1 Imersões e mergulhos	32
2.1.2 Subvariedades	33
2.2 Teorema de Frobenius	34
2.2.1 Campos $f$ -relacionados	34
2.2.2 Distribuições	36
2.2.3 O teorema de Frobenius	40
2.3 Parâmetros isotérmicos	41
2.3.1 Pares fundamentais	41
2.3.2 Complexificação de uma forma quadrática	43
2.3.3 Parâmetros isotérmicos	44
<b>3 Superfícies em <math>\mathbb{R}^3</math> com estrutura conformal</b>	<b>46</b>
3.1 Superfícies com curvatura de Gauss positiva	46
3.2 Resultados sobre imersões de superfícies	48
<b>4 Sobre Existência e Unicidade</b>	<b>63</b>
4.1 Abertos simplesmente conexos	63
4.2 Mapas harmônicos	65
4.3 O teorema de existência e unicidade	68

# Introdução

A existência e a unicidade de uma imersão de uma superfície ou hipersuperfície em  $\mathbb{R}^n$  com uma métrica dada (ou uma estrutura conformal) e um dado mapa de Gauss têm sido estudados por vários autores. D. A. Hoffman, R. Osserman e K. Kenmotsu (ver [7], [8], [9]) pesquisaram o problema de existência e unicidade para superfícies. Eles provaram que existe uma imersão conformal não-minimal de uma superfície simplesmente conexa em  $\mathbb{R}^n$  com um dado mapa de Gauss se, e somente se, um conjunto de equações diferenciais dependentes da estrutura conformal e do mapa de Gauss é satisfeito. O problema da unicidade para hipersuperfícies também foi estudado por K. Abe e J. Erbacher (ver [1]).

O principal objetivo deste trabalho é estudar propriedades do mapa de Gauss de uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Em particular, estaremos interessados nas propriedades relacionadas com a geometria da imersão e da estrutura conformal (ou métrica conformal) proveniente de sua segunda forma fundamental. Os principais problemas considerados são os de existência e de unicidade de uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de uma superfície  $M$ , com estrutura conformal dada, que produz um determinado mapa de Gauss e para a qual a segunda forma fundamental é uma métrica conformal sobre  $M$ . Dentre os resultados obtidos, provaremos que para uma superfície simplesmente conexa com curvatura de Gauss positiva, a existência de uma tal imersão é equivalente à satisfazer uma equação diferencial de terceira ordem que envolve o mapa de Gauss e a estrutura conformal. Além disso, também mostraremos que é possível recuperar a imersão por uma representação similar à fórmula de Enneper-Weierstrass (Teorema 4.3.2).

A presente dissertação está dividida em quatro capítulos.

No capítulo 1, introduziremos os pré-requisitos e fixaremos a notação utilizada ao longo do texto. Alguns conceitos básicos e resultados da Análise e da Geometria, principalmente, serão admitidos, enquanto outros - considerados importantes para uma boa leitura do texto - serão demonstrados.

No capítulo 2, apresentaremos e provaremos uma versão do Teorema de Frobenius. Também discorreremos sobre as parametrizações isotérmicas de uma superfície, as quais são parametrizações especiais, a fim de obter uma estrutura conformal (métrica conformal) na superfície proveniente de uma métrica riemanniana.

No capítulo 3, apresentaremos dois teoremas que são condições necessárias para uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de uma superfície  $M$ , com estrutura conformal dada, que produz um determinado mapa de Gauss e para a qual a segunda forma fundamental é uma métrica conformal sobre  $M$ .

No capítulo 4, apresentaremos os mapas harmônicos que são os pontos críticos de um funcional, bem como condições necessárias e suficientes para a existência e a unicidade de uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $M$  é simplesmente conexo.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as principais definições, notações e resultados básicos da análise e da geometria que serão usados ao longo do texto. As variedades consideradas serão sempre de Hausdorff, diferenciáveis e com base enumerável, conhecidas como variedades topológicas. A palavra diferenciável significará de classe  $C^\infty$ .

### 1.1 Superfícies

Nesta seção, estudaremos as superfícies euclidianas, as quais são generalizações naturais dos objetos estudados na geometria diferencial. Além disso, tais superfícies servirão como modelos concretos para as variedades diferenciáveis abstratas, como veremos mais adiante.

**Definição 1.1.1.** Dizemos que  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma **superfície de dimensão  $m$  de classe  $C^k$**  (com  $1 \leq k \leq \infty$ ) se, para cada ponto  $p \in M$ , existem um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $p$ , e uma aplicação  $X : U \rightarrow M \cap V$ , com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^m$ , que satisfaz às seguintes propriedades:

- (i)  $X : U \rightarrow M \cap V$  é um homeomorfismo<sup>1</sup>, onde  $M \cap V$  indica que  $M$  está munida com a topologia usual induzida de  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto  $M \cap V$  é denominado **vizinhança coordenada de  $p$** .
- (ii)  $X$  é uma imersão de classe  $C^k$ . Isso significa que, para cada  $x_0 \in U$ , a derivada  $X'(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação linear injetiva. Observe que essa situação ocorre apenas quando  $m \leq n$  (veja Figura 1.1).

No caso da Definição 1.1.1, a aplicação  $X$  é chamada de *parametrização de classe  $C^k$  de  $M$*  ou *sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de)  $p$* . O número  $n - m$  chama-se *codimensão de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$* . No caso em que  $m = 1$ ,  $M$  é chamado de *curva de  $\mathbb{R}^n$* . Quando  $n - m = 1$ , dizemos que  $M$  é uma *hipersuperfície de  $\mathbb{R}^n$* .

**Observação 1.1.2.** O item (i) da Definição 1.1.1 implica que toda superfície de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  é uma variedade topológica de dimensão  $m$  (em relação à topologia induzida de  $\mathbb{R}^n$ ). Isso significa que, para todo  $p \in M$ , existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $p$  tal que  $M \cap V$  é homeomorfo a um aberto de  $\mathbb{R}^m$ .

---

<sup>1</sup> $X$  é um homeomorfismo se, e somente se,  $X$  é bijetiva, contínua e com inversa  $X^{-1} : M \cap V \rightarrow U$  contínua.

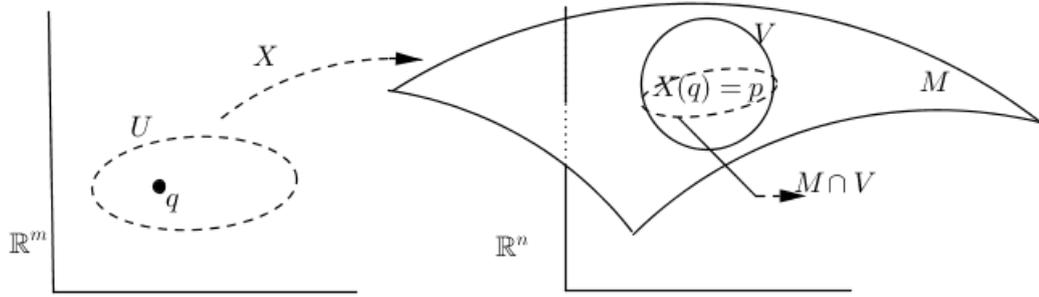


Figura 1.1: O ponto  $q \in U$  é levado pela aplicação  $X$  em um ponto  $p = X(q) \in M \cap V$ .

**Observação 1.1.3.** *As afirmações a seguir são equivalentes:*

- (a)  $X$  é uma imersão;
- (b)  $dX_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injetiva;
- (c) O conjunto de vetores  $\{dX_q(e_i) : 1 \leq i \leq m\}$  é linearmente independente, onde  $\{e_1, \dots, e_m\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^m$ ;
- (d) A matriz jacobiana de ordem  $n \times m$

$$JX(q) = \left( \frac{\partial X_i}{\partial X_j}(q) \right)$$

tem posto  $m$ , onde  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$  e  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , ou seja, algum de seus determinantes menores  $m \times m$  é diferente de zero em  $q \in U$ .

Vejamos alguns exemplos de superfícies de dimensão  $m$ .

**Exemplo 1.1.4.** *Qualquer subespaço vetorial  $m$ -dimensional  $E \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície de dimensão  $m$  e de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$ . De fato, seja  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow E$  um isomorfismo linear. Munindo  $E$  com a topologia induzida de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T$  torna-se um homeomorfismo. Além disso, como toda transformação linear é de classe  $C^\infty$ , segue que  $T$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ .*

**Exemplo 1.1.5.** *A esfera unitária  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  é uma superfície de dimensão  $n$  e classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Com efeito, denotemos por  $P_N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$  o polo norte de  $\mathbb{S}^n$ . Considere a projeção estereográfica  $\pi_N : \mathbb{S}^n - \{P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que leva pontos  $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$  da esfera menos o polo norte  $P_N$  sobre o hiperplano  $X_{n+1} = 0$ . Geometricamente,  $\pi_N(x)$  é o ponto em qualquer semi-reta*

$$P_N x = \{P_N + t(x - P_N) : t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

que intercepta o hiperplano  $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : X_{n+1} = 0\}$ . Note que este ponto pertence ao hiperplano  $X_{n+1} = 0$  se, e somente se,  $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0$ . Assim, devemos ter

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}.$$

Portanto, a aplicação  $\pi_N$  é dada por

$$\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Observe que  $\pi_N$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  entre  $\mathbb{S}^n - \{P_N\}$  e  $\mathbb{R}^n$ , já que a sua inversa  $Y := \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n - \{P_N\}$  é dada por

$$Y(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}(2x_1, \dots, 2x_n, x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1)$$

onde  $\theta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^\infty$ . Analogamente define-se  $\pi_S : \mathbb{S}^n - \{P_S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $P_S = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$  é o polo sul. Logo, da Definição 1.1.1,  $\mathbb{S}^n$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definição 1.1.6.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $U$  aberto, dizemos que  $p \in U$  é um **ponto crítico de  $F$**  se a diferencial  $dF_p : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamada de **valor crítico de  $F$** . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico é chamado de **valor regular de  $F$** .

**Observação 1.1.7.** Segue da Definição 1.1.6, que se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  (com  $n > m$ ), é uma aplicação diferencial, dizemos que  $c \in \mathbb{R}^{n-m}$  é **valor regular de  $f$**  se a diferencial  $df_p$  é sobrejetiva para todo  $p \in f^{-1}(c)$ .

A definição 1.1.6, pode ser rescrita para  $n = 3$  e  $m = 1$  da seguinte forma:  $dF_p$  não é sobrejetiva se, e somente se  $F_x = F_y = F_z = 0$  em  $p$ . Isto é,  $a \in F(U)$  é um valor regular de  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $F_x, F_y$  e  $F_z$  não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$F^{-1} = \{(x, y, z) \in U; F(x, y, z) = a\}.$$

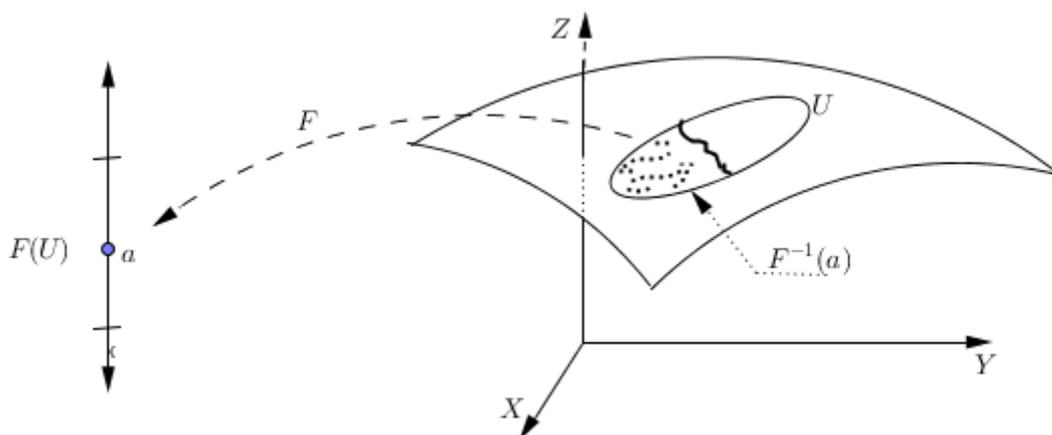


Figura 1.2: Valor regular de  $F$

A proposição a seguir fornece caracterizações equivalentes à Definição 1.1.1.

**Proposição 1.1.8.** *Seja  $M$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $M$  é uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Para todo  $p \in M$ , existem abertos  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$ , com  $p \in V$ , e uma aplicação de classe  $C^k$   $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tal que  $M \cap V = \text{Graf}(g)$ .
- (c) Para todo  $p \in M$ , existem um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $p$  e uma submersão<sup>2</sup> de classe  $C^k$   $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  tal que  $M \cap V = f^{-1}(0)$ .
- (d) Para todo  $p \in M$ , existe um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $p$  e um difeomorfismo de classe  $C^k$   $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$  que satisfaz  $\varphi(M \cap V) = \varphi(V) \cap \mathbb{R}^m$ .

O Teorema da Função Inversa e o seguinte Lema de Álgebra Linear serão úteis na prova da Proposição 1.1.8.

**Teorema 1.1.9** (Teorema da Função Inversa). *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ) em um conjunto aberto  $U$  e seja  $p \in U$  tal que  $f'(p)$  é um isomorfismo linear em  $\mathbb{R}^m$ . Então existem abertos  $V \subset U$  vizinhança de  $p$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  vizinhança de  $f(p)$  tal que  $f|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .*

A demonstração do Teorema 1.1.9 pode ser encontrada em [11].

**Lema 1.1.10.** *Seja  $E$  um subespaço vetorial  $m$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$  tal que a primeira projeção  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\pi(x, y) = x$ , transforma  $E$  isomorficamente sobre  $\mathbb{R}^m$ .*

A prova do Lema 1.1.10 pode ser vista em [14].

*Demonstração da Proposição 1.1.8.* (a)  $\Rightarrow$  (b) Dado  $p \in M$ , existe  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  uma parametrização de classe  $C^k$  de  $M$ , com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^m$  tal que  $p = \varphi(q) \in U$ . Como  $d\varphi_q(\mathbb{R}^m)$  é um subespaço vetorial  $m$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ , pelo Lema 1.1.10, existe uma decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$  tal que  $\pi|_E$  é um isomorfismo linear entre  $E$  e  $\mathbb{R}^m$ . Defina a aplicação  $\eta = \pi \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Como  $d\eta_q = \pi \circ d\varphi_q$  é um isomorfismo linear, segue do Teorema da Função Inversa que existe um aberto  $W \subset \mathbb{R}^m$ , com  $q \in W \subset U$ , tal que  $\eta|_W : W \rightarrow \eta(W) = Z$  é um difeomorfismo linear de classe  $C^k$ . Defina

$$\xi = (\eta|_W)^{-1} : Z \rightarrow W \text{ e } \psi = \varphi \circ \xi.$$

Assim,  $\psi$  é uma parametrização de classe  $C^k$  de  $M$  e

$$\pi \circ \psi = \pi \circ (\varphi \circ \xi) = \eta \circ \xi = Id.$$

Da igualdade acima, segue que  $x$  é a primeira coordenada de  $\psi(x)$  em relação à decomposição  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ . Denote por  $g(x)$  a segunda coordenada de  $\psi(x)$ . Assim,

$$\psi(z) = (\varphi \circ \xi)(z) = \varphi(\xi(z)) = \varphi(w) = \{(x, g(x)) : x \in W\} = \text{Graf}(g),$$

para alguma aplicação de classe  $C^k$ ,  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ . Como  $\varphi$  é aberta, temos que  $\varphi(W) = M \cap V = \text{Graf}(g)$ , para algum aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contendo  $p$ .

---

<sup>2</sup>Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se *submersão* quando, para cada  $x \in U$ , a derivada  $f'(x) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetiva.

(b)  $\Rightarrow$  (c) Defina a aplicação  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ , pondo  $f(x, y) = y - g(x)$  onde  $V \subset \mathbb{R}^n$  é tal que

$$V = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$$

é o aberto dado na hipótese. Temos

$$\begin{aligned} M \cap V &= \text{Graf}(g) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y = g(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : f(x, y) = 0\} \\ &= f^{-1}(0). \end{aligned}$$

Resta provar que  $df(x, y)$  é sobrejetiva para todo  $(x, y) \in V$ . De fato, dados  $(x, y) \in V$  e  $(u, v) \in \mathbb{R}^n$ , temos:

$$\begin{aligned} df(x, y) \cdot (u, v) &= df(x, y) \cdot (u, 0) + df(x, y) \cdot (0, v) \\ &= Id(0) - dg(x) \cdot u + Id(v) - dg(x) \cdot 0 \\ &= v - dg(x) \cdot u. \end{aligned}$$

Portanto, dado  $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ , tem-se  $df(x, y) \cdot (0, v) = v$ , ou seja,  $df(x, y) : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  é sobrejetiva. Portanto,  $f$  é uma submersão de classe  $C^k$ , com  $M \cap V = f^{-1}(0)$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d) Dado  $p \in M$ , seja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  uma submersão de classe  $C^k$  tal que  $M \cap V = f^{-1}(0)$ . Como  $df_p : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  é sobrejetiva, o conjunto  $\{df_p \cdot e_1, \dots, df_p \cdot e_n\}$  gera  $\mathbb{R}^{n-m}$  e, assim, podemos escolher vetores  $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}}$  tais que  $\{df_p \cdot e_{i_1}, \dots, df_p \cdot e_{i_{n-m}}\}$  seja uma base de  $\mathbb{R}^{n-m}$ .

Considere a decomposição em soma direta  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$  tal que

$$\mathbb{R}^{n-m} = \text{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}}\}$$

em  $\mathbb{R}^m$  é gerado pelos demais vetores canônicos. Assim,  $df_p|_{\mathbb{R}^{n-m}}$  é um isomorfismo linear. Defina  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ , pondo  $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$  para todo  $(x, y) \in V$ . Então  $\varphi$  é aplicação de classe  $C^k$  e  $d\varphi_p$  é um isomorfismo. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto  $\widehat{V} \subset \mathbb{R}^n$ , com  $p \in \widehat{V} \subset V$ , tal que  $\varphi|_{\widehat{V}} : \widehat{V} \rightarrow \varphi(\widehat{V})$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ . Dessa maneira, podemos supor sem perda de generalidade, que  $\varphi(\widehat{V}) = Z \times W \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ , onde  $W$  é um aberto contendo  $0 \in \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ . Assim,

$$(x, y) \in M \cap \widehat{V} \Leftrightarrow \varphi(x, y) = (x, f(x, y)) \Leftrightarrow \varphi(x, y) = (x, 0).$$

Portanto,  $\varphi(M \cap \widehat{V}) = \varphi(\widehat{V}) \cap \mathbb{R}^m$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a) Dado  $p \in M$ , considere  $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$  o difeomorfismo de classe  $C^k$  tal que  $\varphi(M \cap V) = \varphi(V) \cap \mathbb{R}^m$ , onde  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , com  $p \in V$ . Como  $\varphi(V)$  é aberto de  $\mathbb{R}^n$ , segue que  $U = \varphi(V) \cap \mathbb{R}^m$  é aberto de  $\mathbb{R}^m$ . Defina  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pondo  $\psi = (\varphi|_U)^{-1}$ . Assim,  $\psi$  é uma parametrização de classe  $C^k$  de  $M$ , com  $\psi(U) = M \cap V$ . ■

**Corolário 1.1.11.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  (com  $n > m$ ) uma aplicação de classe  $C^k$ . Se  $c \in \mathbb{R}^{n-m}$  é valor regular de  $f$ , então  $M = f^{-1}(c)$  é uma superfície de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Exemplo 1.1.12.** A esfera  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  pode ser escrita como a imagem inversa  $f^{-1}(1)$  da função  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \langle x, x \rangle$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual. Note que  $f$  é diferenciável e, dados  $x, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ , tem-se

$$df(x) \cdot v = 2\langle x, v \rangle.$$

Isso implica que  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  é o único ponto crítico de  $f$ . Como  $f(0) = 0 \neq 1$ , concluímos que  $1$  é um valor regular de  $f$ . Logo,  $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$  é uma superfície de dimensão  $n$  e classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Observação 1.1.13.** O conjunto  $f^{-1}(c)$  pode ser uma superfície sem que  $c$  seja um valor regular de  $f$ . Por exemplo, considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = y^2$ . Note que  $f^{-1}(0) = \text{Eixo } -OX$  é uma curva de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$ . No entanto,  $0 \in \mathbb{R}$  não é um valor regular de  $f$ , pois  $df(x, 0) = 0$  para todo  $(x, 0) \in f^{-1}(0)$ .

**Corolário 1.1.14.** Sejam  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow M \cap V_1$  e  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow M \cap V_2$  parametrizações de classe  $C^k$  (com  $1 \leq k \leq \infty$ ) de uma superfície  $M$ , com  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ . Então,  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  e  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  são de classe  $C^k$ .

*Demonstração.* Dado  $p \in M \cap V_1 \cap V_2$ , seja  $f : V \rightarrow f(V)$  um difeomorfismo de classe  $C^k$ , com  $V$  aberto de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $f(M \cap V) = f(V) \cap \mathbb{R}^m$ . Como  $\varphi_1(U_1) = M \cap V_1$  e  $V$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , existe um aberto  $\widehat{U}_1 \subset \mathbb{R}^m$ , com  $\varphi_1^{-1} \in \widehat{U}_1 \subset U_1$ , tal que  $\varphi_1(\widehat{U}_1) \subset M \cap U_1$ . Assim,  $f \circ \varphi_1(\widehat{U}_1) \subset \mathbb{R}^m$ . Analogamente, existe um aberto  $\widehat{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$ , com  $\varphi_2^{-1} \in \widehat{U}_2 \subset U_2$ , tal que  $f \circ \varphi_2(\widehat{U}_2) \subset \mathbb{R}^m$ . Dessa forma, no aberto  $\varphi_1^{-1}(W)$ , em que  $W = \varphi_2(\widehat{U}_2) \cap \varphi_1(\widehat{U}_1)$ , temos:  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi_1 = (f \circ \varphi_2)^{-1} \circ (f \circ \varphi_1)$ .

A composição  $f \circ \varphi_1$  é de classe  $C^k$ . Como  $df(f \circ \varphi_2)(x)$  é um isomorfismo linear, segue do Teorema da Função Inversa que  $f \circ \varphi_2$  é de classe  $C^k$ . Assim,  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  é de classe  $C^k$ . Utilizando argumentos análogos aos anteriores, prova-se que  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$  também o é. ■

**Exemplo 1.1.15.** Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  parametrizada pelas coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ , onde  $\theta$  é o complemento de latitude e  $\varphi$  a longitude, sendo

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

e  $U = \{(\theta, \varphi) : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ . Considere também a parametrização da esfera dada pela projeção estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^2 - \{P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que leva pontos  $p = (x, y, z)$  da esfera (exceto o polo norte  $P_N = (0, 0, 1)$ ) sobre o plano  $XY$ . Seja

$$\pi(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y) = (u, v).$$

Assim, obtemos uma parametrização  $Y = \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{P_N\}$ , dada por

$$Y(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right),$$

onde  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Agora, consideremos a parte da esfera  $\mathbb{S}^2$  onde  $y > 0$ . Então, usando mais duas parametrizações (dadas acima), temos

$$X^{-1}(x, y, z) = \left( \arccos(z), \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right),$$

$$Y^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Logo,

$$h^{-1} = X^{-1} \circ Y = X^{-1}(Y(u, v)) = \left( \arccos\left(\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right), \arctan\left(\frac{u}{v}\right) \right) \quad e$$

$$h^{-1} = X^{-1} \circ Y = Y^{-1}(X(\theta, \varphi)) = \left( \frac{\sin \theta \cos \varphi}{1-\cos \theta}, \frac{\sin \theta \sin \varphi}{1-\cos \theta} \right),$$

são difeomorfismos.

### 1.1.1 Plano tangente a uma superfície regular

Assumiremos daqui por diante que as superfícies são de classe  $C^\infty$  (superfícies regulares). Como havíamos mencionado na Observação 1.1.3, a condição (ii) da Definição 1.1.1 exclui a possibilidade de existir “bicos” em uma superfície de dimensão  $m$ , bem como a possibilidade de autointerseção em superfícies. Tal condição nos permite definir a noção de plano tangente em todo os pontos de uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Nesta seção, mostraremos que para cada ponto  $p \in M$ , o conjunto de vetores tangentes às curvas (parametrizadas) em  $M$ , passando por  $p$ , constituem um plano que denotaremos por  $T_p M$ .

- Primeiramente, analisaremos o que ocorre com as curvas sobre as superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  uma parametrização em uma vizinhança de  $p \in M$ , tal que  $p$  esteja na imagem de  $U$ , ou seja, digamos que exista um par  $(u_0, v_0) \in U$  tal que  $X(u_0, v_0) = p$ .
- Seja  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  uma curva em  $U$  parametrizada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , tal que  $\beta(0) = (u_0, v_0)$ .
- Seja  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma curva em  $M$ , passando por  $p$ , tal que  $\gamma$  é dada por  $\gamma = X \circ \beta$ . Logo, o vetor  $\gamma'(0)$  é tangente à curva  $\gamma$  em  $p$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= X \circ \beta(0) = X(u_0, v_0) = p \quad e \\ \gamma'(0) &= dX(\beta(0)) \cdot \beta'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(0). \end{aligned}$$

Portanto, a diferencial  $dX_q$ , com  $q = (u_0, v_0)$ , leva os vetores velocidade de curvas passando por  $\beta(0) = q$  em vetores velocidade se suas respectivas imagens em  $p = X(q)$ . Veja a figura a seguir. Figura 1.3:

**Definição 1.1.16.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície regular de dimensão  $m$  e  $p$  um ponto de  $M$ . Dizemos que  $v \in \mathbb{R}^n$  é **vetor tangente a  $M$  em  $p$**  se existe alguma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  (de classe  $C^\infty$ ) tal que  $v = \alpha'(0)$  e  $\alpha(0) = p$ . O conjunto de todos os vetores tangentes a  $M$  em  $p$  é denominado **espaço tangente de  $M$  em  $p$**  e é denotado por  $T_p M$ .*

**Proposição 1.1.17.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular de dimensão 2 e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ , uma parametrização de uma vizinhança de  $p \in M$  e  $q \in U$ . O subespaço vetorial bidimensional  $T = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$  coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $M$  em  $p = X(q) \in X(U) \subset M$ , isto é,  $T_p M = dX_q(\mathbb{R}^2)$ .*

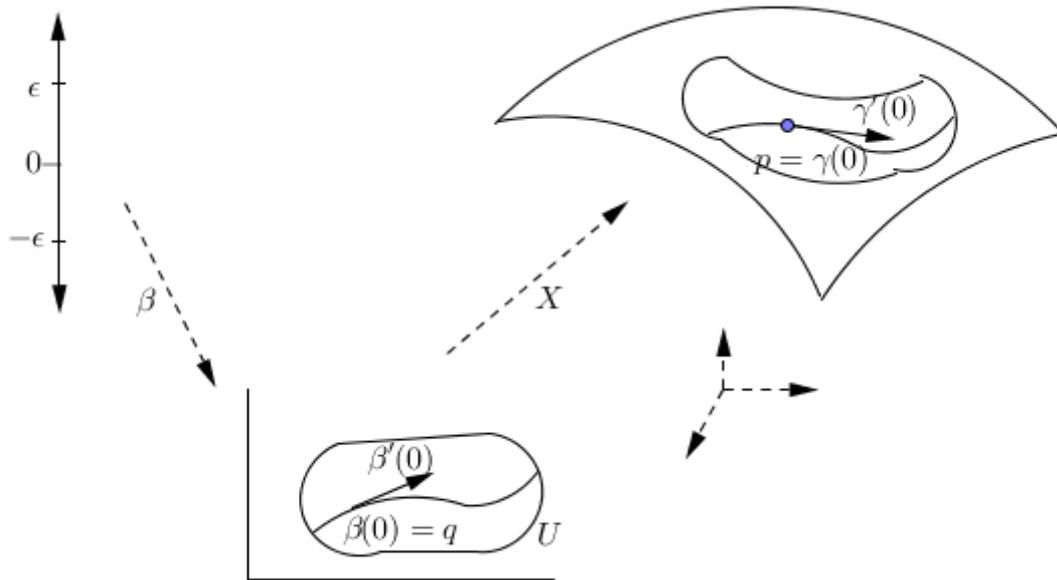


Figura 1.3: O vetor  $\gamma'(0)$  é tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $p = \gamma(0)$ .

*Demonstração.* Seja  $V$  um vetor tangente em  $p = X(q)$ , ou seja  $V = \alpha'(0)$  onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U) \subset M$  é diferenciável com  $\alpha(0) = X(q) = p$ . Assim, a curva  $\beta = X^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é diferenciável, com valores em  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Logo,  $\beta(0) = X^{-1}(\alpha(0)) = q$  e

$$\begin{aligned} dX_q(\beta(0)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + t\beta'(0)) - X(q)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + t\beta'(0)) - X(\beta(0))}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (X \circ \beta)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(X^{-1}(\alpha(t))) = \alpha'(0) = v. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $v \in dX_q(\mathbb{R}^2)$ . Portanto,  $dX_q(\mathbb{R}^2)$  contém todos os vetores tangentes a  $M$  também se  $w = dX_q(v)$  para algum  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = X(q + tv)$  é uma curva  $C^\infty$  tomando vetores em  $M$ , com  $\alpha(0) = X(q) = p$ . Assim,

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(q + tv) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + tv) - X(q)}{t} = dX_q(v) = w. \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que todo elemento da imagem da derivada  $dX_q(\mathbb{R}^2)$  é um vetor tangente. ■

**Observação 1.1.18.** Como  $T_p M = dX_q(\mathbb{R}^2)$  e  $dX_q(\mathbb{R}^2)$  é um subespaço vetorial de dimensão 2, de agora em diante  $T_p M$  denotará o plano tangente a  $M$  em  $p$ .

A escolha de uma parametrização  $X$  determina uma base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  de  $T_p M$ , chamada *base coordenada* a  $X$ . No entanto,  $T_p M$  não depende da escolha de  $X$ .

**Proposição 1.1.19.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma parametrização de uma superfície  $M$  contendo o ponto  $p \in M$ . Considere  $(u, v)$  as coordenadas de  $U$ . O espaço tangente a  $M$  em  $p$  ( $T_p M$ ) é o subespaço vetorial gerado pelos vetores  $X_u$  e  $X_v$  (as derivadas estão definidas no ponto  $(u_0, v_0) \in U$  de modo que  $X(u_0, v_0) = p$ ).*

A demonstração da Proposição 1.1.19 não será apresentada aqui, porém o leitor interessado pode encontrá-la em [18].

**Observação 1.1.20.** *Note que se  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é função diferenciável e  $c \in \mathbb{R}$  é um valor regular de  $F$ , então  $M := F^{-1}(c) = \{p \in \mathbb{R}^3; F(p) = c\}$  é uma superfície de dimensão 2 e classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ).*

Levantemos a seguinte questão: para  $q \in M$ , como identificar  $T_q M$ ?

Para responder a essa pergunta, seja  $q \in M$  tal que  $F(p) = c$ , isto é,  $q \in F^{-1}(c)$ . Como  $dF_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear, então  $c$  é um valor regular, o que implica que  $dF_q$  é sobrejetiva. Logo,  $\text{Ker}(dF_q) := \{v \in \mathbb{R}^3; dF_q(v) = 0\}$  é 2-dimensional (pelo Teorema do Núcleo e da Imagem para transformações lineares). Assim, se  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M = F^{-1}(c)$  é uma curva em  $M$  tal que  $\alpha(0) = q$ , então  $F(\alpha(t)) = c$ . Daí,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(\alpha(t)) = 0 = dF_q(\alpha'(0)).$$

Então, necessariamente, todo vetor  $v := \alpha'(0) \in T_p M$  pertence a  $\text{Ker}(dF_q)$ . Como  $T_q M$  e  $\text{Ker}(dF_q)$  são ambos bidimensionais, temos que  $T_q M = \text{Ker}(dF_q)$ .

**Exemplo 1.1.21.** *a) Considere a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ ,  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $c = 1$  o valor regular de  $F$ . Em  $q = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , temos que  $dF_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por*

$$dF_q \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (2x, 2y, 2z) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

*Logo,  $\text{Ker}(dF_q) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle q, v \rangle = 0\} = T_q \mathbb{S}^2$ .*

*b) Se  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 + y^2 = 0\}$ ,  $F(x, y, z) = z - x^2 + y^2$  e  $c = 0$  é valor regular de  $F$  então, para  $q = (x, y, z) \in M$ , temos*

$$T_q M = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} : v_3 - 2xv_1 + 2yv_2 = 0 \right\}.$$

## 1.1.2 Primeira forma fundamental

Nesta seção, apresentaremos a primeira forma fundamental, a qual trata-se de uma forma quadrática que nos permite efetuar alguns cálculos geométricos sem fazer menção ao espaço ambiente onde está a superfície, tais como o comprimento de arco, ângulo entre curvas e áreas de regiões em uma superfície.

**Definição 1.1.22.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma superfície regular de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ . Considere  $T_p M$  o plano tangente a  $M$  no ponto  $p$ . A forma quadrática  $I_p$ , dada por*

$$\begin{aligned} I_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

é chamada de **primeira forma fundamental da superfície**  $M$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e  $\|\cdot\|$  são o produto interno e a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^3$  restrito aos vetores tangentes a  $M$  em  $p$ , respectivamente.

Como podemos observar, se  $M \subset \mathbb{R}^3$ , a primeira forma fundamental é basicamente o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$  (produto interno induzido) restrito aos vetores tangentes a  $M$  em  $p$ .

Expressemos agora a primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$ , associada à parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  em uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ . Considere o vetor  $w \in T_p M$  e tomemos uma curva  $\gamma \subset X(U)$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$  e  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ , dada por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  isto é,  $\beta = X^{-1} \circ \gamma$  tal que  $\beta(0) = q$ , com  $X(q) = p$ .

Note que  $\gamma(t) = X \circ \beta(t)$  e, para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , temos

$$\gamma'(t) = dX(\beta(t))(\beta'(t)) = X_u(\beta(t))u'(t) + X_v(\beta(t))v'(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle w, w \rangle = \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_{\gamma(0)} \\ &= \langle X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0), X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p u'^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p v'^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sejam  $E(q) = \langle X_u, X_u \rangle_p$ ,  $F(q) = \langle X_u, X_v \rangle_p$  e  $G(q) = \langle X_v, X_v \rangle_p$ , os quais chamaremos de *coeficientes da primeira forma fundamental*. Então,  $I_p(\gamma') = E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2$ . Além disso, como  $\gamma(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$ , temos de (1.1) que

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = E(u')^2 + 2F(u')(v') + G(v')^2.$$

Isso implica que o comprimento de arco  $\ell(\gamma)$  de  $\gamma$  é dado por:

$$\ell(\gamma) = \int_0^t (E(u')^2 + 2F(u')(v') + G(v')^2)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (1.2)$$

Suponha agora que  $X(u, v)$  seja uma parametrização em uma vizinhança (coordenada) de  $p \in M$ . Então qualquer vetor tangente a  $M$  em  $p$  na imagem de  $X$  pode ser expresso unicamente como combinação linear de  $X_u$  e  $X_v$ . Assim, defina as aplicações lineares  $du : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $dv : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$du(w) = \lambda \text{ e } dv(w) = \mu, \text{ se } w = \lambda X_u + \mu X_v.$$

Usando o fato que o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  é simétrico e bilinear, temos

$$\langle w, w \rangle = \langle \lambda X_u + \mu X_v, \lambda X_u + \mu X_v \rangle = \lambda \langle X_u, X_u \rangle + 2\lambda\mu \langle X_u, X_v \rangle + \mu \langle X_v, X_v \rangle,$$

e escrevemos  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$ ,  $G = \langle X_v, X_v \rangle$ . Dessa maneira, temos:

$$\langle w, w \rangle = Edu(w)^2 + 2Fdu(w)dv(w) + Gdv(w)^2.$$

Note que a expressão acima não faz sentido globalmente em  $M \subset \mathbb{R}^3$ , mas está bem definida em  $X(U) \subset M$ , onde  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  e  $U$  é aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e para  $p \in X(U)$ , podemos escrever

$$g_p := \mathcal{I}_p(w) = \langle w, w \rangle_p = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (1.3)$$

Ou seja, (1.3) é a primeira forma fundamental da parametrização  $X(u, v)$  em uma vizinhança coordenada de  $p \in M$ . Note que  $E, F, G$  e os mapas lineares  $du$  e  $dv$  dependem da escolha da parametrização de  $M$ .

**Exemplo 1.1.23** (Superfícies de Revolução). *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana  $C$  ao redor de um eixo que não encontra a curva. Considere  $XZ$  o plano da curva  $C$  (denominada **curva geratriz**) e  $OZ$  o eixo de rotação. Assim, se*

$$x = f(u), z = g(u), a < u < b \text{ e } f(u) > 0$$

*é uma parametrização de  $C$  e denote por  $v$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $OZ$ . Assim, se  $U$  é o conjunto aberto onde o conjunto aberto  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < v < 2\pi, a < u < b\}$ , obtemos uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em uma vizinhança coordenada de  $p \in S$ , dada por*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

*Considere a curva  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$  com velocidade unitária, isto é,  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ . Então,*

$$\begin{aligned} X_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ X_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0). \end{aligned}$$

*Logo,*

$$\begin{aligned} E &= f'(u)^2 \cos^2 v + g'(u)^2 \sin^2 v + g'(u)^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1, \\ F &= 0, \\ G &= f(u)^2. \end{aligned}$$

*Assim, a primeira forma fundamental da superfície  $S$  em  $X(U)$  é*

$$g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p = du^2 + f(u)^2 dv^2.$$

*Note que a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  é um caso especial de superfície de revolução, quando excluímos os polos norte e sul. Com efeito, basta tomar  $u = \varphi$ ,  $v = \theta$ ,  $f(\varphi) = \cos \varphi$ ,  $g(\varphi) = \sin \varphi$ . Então, a primeira forma fundamental será dada por*

$$g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2.$$

*Como  $S$  pode ser inteiramente coberta por parametrizações, segue que  $S$  é uma superfície regular. A superfície  $S$ , tal com descrita neste exemplo, será chamada de **superfície de revolução**.*

**Exemplo 1.1.24.** *A esfera  $S$  de raio  $r > 0$  é dada por*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Seja  $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ . Para todo  $p \in S \setminus L$ , uma parametrização de  $S \setminus L$  em uma vizinhança coordenada de  $p$  (em coordenadas esféricas) é dada por

$$X(\theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta),$$

onde  $(\theta, \varphi) \in U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ . Logo,

$X_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, -r \operatorname{sen} \theta)$  e  $X_\varphi = (-r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, 0)$ . Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle_p = r^2 \\ F &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle_p = 0 \\ G &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle_p = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

Então, o comprimento de arco de uma curva  $\gamma$  (definida num intervalo) contida na esfera é

$$\begin{aligned} \ell(\gamma(t)) &= \int_a^b \sqrt{E(\theta'(t))^2 + 2F\theta'(t)\varphi'(t) + G(\varphi'(t))^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2(\theta'(t))^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + (\varphi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Fixe  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e varie  $\varphi = t$ , com  $t \in (0, 2\pi)$ . Então,  $\theta'(t) = 0$  e  $\varphi'(t) = 1$ . Logo,

$$\ell(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)} dt = r \int_0^{2\pi} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r,$$

que é o comprimento do equador de  $S$ .

## 1.2 Normais e orientabilidade

O plano tangente  $T_p M$  de uma superfície  $M$  em um ponto  $p \in M$  está completamente determinado por um vetor unitário perpendicular, chamado **vetor normal unitário** a  $M$  em  $p$ .

Existem, é claro, dois desse vetores. Mas a Proposição 1.1.19 mostra que a escolha da parametrização  $X : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  em uma vizinhança coordenada de  $p \in M$ , nos leva a uma escolha definitiva, dada por

$$N_X(q) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|}, \quad (1.4)$$

avaliada no ponto de  $U$  correspondente a  $p$ , e  $\times$  denota o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ .

Observe que  $N_X(q)$  é um vetor unitário em cada ponto  $q \in U$  perpendicular a toda combinação linear de  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ .

$N_X(q)$  é chamado de *normal unitário* referente à parametrização  $X$  em  $p$ . Diferentemente do plano tangente, no entanto,  $N_X$  depende da escolha de  $X$  contendo  $p$ . De fato, se  $Y : V \rightarrow M$  é outra parametrização em uma vizinhança coordenada de  $p \in M$ , com  $V \subset \mathbb{R}^3$  aberto, temos que o mapa de transição de  $X$  para  $Y$

$$\phi := Y^{-1} \circ X : X^{-1}(X(U) \cap Y(V)) \rightarrow Y^{-1}(X(U) \cap Y(V))$$

e para  $p \in X(U) \cap Y(V)$ ,  $T_p M$  tem duas bases  $\{\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\}$ ,  $\{\frac{\partial Y}{\partial \xi}, \frac{\partial Y}{\partial \eta}\}$  tal que  $(\xi, \eta) = Y^{-1} \circ X(u, v) = \phi(u, v)$ . Então,  $X(u, v) = (Y(Y^{-1} \circ X(u, v))) = Y(\phi(u, v)) = Y(\xi, \eta)$ . Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial v}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} &= X_u \times X_v \\ &= \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) Y_\xi \times Y_\eta \\ &= \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} Y_\xi \times Y_\eta.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$X_u \times X_v = \det(J\phi) Y_\xi \times Y_\eta. \quad (1.5)$$

Conclui-se que, o normal unitário referente a  $X$  é dado por

$$N_X = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \pm \frac{Y_\xi \times Y_\eta}{\|Y_\xi \times Y_\eta\|} = \pm N_Y$$

onde o sinal depende do sinal do  $\det(J\phi)$ , determinante da matriz jacobiana de  $\phi$ , Assim, temos a seguinte definição:

**Definição 1.2.1.** *Uma superfície regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  é **orientável** se existe uma família de parametrizações  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \subset M$  tais que*

$$(i) \quad M = \bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha),$$

$$(ii) \quad \text{Para cada } \alpha, \beta, \text{ temos } \det(J(X_\alpha^{-1} \circ X_\beta)) > 0 \text{ em } X_\beta^{-1}(X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta)).$$

A família  $\{X_\alpha\}_\alpha =: \mathcal{A}$  é chamada de um **atlas para  $M$** . A escolha de uma tal família é chamada uma **orientação** de  $M$ , e  $M$  neste caso, diz-se **orientada**. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é dita **não-orientável**.

**Exemplo 1.2.2.** *Uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. De fato, todas as superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são, trivialmente, orientáveis.*

**Exemplo 1.2.3.** *A esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  é uma superfície orientável. De fato, já vimos pelo exemplo 1.1.6 (usando a projeção estereográfica) que a esfera pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, a saber:  $Y := \pi_N^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  e  $\hat{Y} := \pi_S^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  onde  $\pi_N$  e  $\pi_S$  são as projeções estereográficas da esfera menos o polo norte  $P_N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$  sobre o hiperplano  $z = 0$  da esfera menos o polo sul  $P_S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$  sobre o hiperplano  $z = 0$ , respectivamente. Com parâmetro  $(u, v)$  e  $(\hat{u}, \hat{v})$  respectivamente, de tal modo que a interseção  $W := Y \cap \hat{Y}$  dessas vizinhanças, ou seja, a esfera menos dois pontos. Então,*

$W$  é um conjunto conexo. Fixando um ponto  $p \in W$ . Se o jacobiano  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\hat{u},\hat{v})}$  da mudança de coordenadas  $h := Y^{-1} \circ \hat{Y}$  em  $p$  for negativo, intercambiando  $u$  e  $v$  no primeiro sistema, e assim teremos o jacobiano positivo. Como o jacobiano é diferente de zero em  $W$  (já que,  $h$  é um difeomorfismo) e positivo em  $p \in W$ , segue-se pela conexidade de  $W$  que o jacobiano é positivo em todos os pontos de  $W$ . Existe, portanto, uma família de vizinhanças coordenadas satisfazendo a definição 1.6 1.2, o que mostra que a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  é orientável.

**Observação 1.2.4.** Pelo argumento que acabamos de usar no exemplo anterior, é claro que se uma superfície regular pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.

**Definição 1.2.5.** Um **campo diferenciável** de vetores normais unitários em um aberto  $U \subset M$  contido em uma superfície regular  $M$  é uma aplicação diferenciável  $N : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $N(p)$  é ortogonal à  $T_p M$ , para cada  $p \in U$  e  $\|N(p)\| = 1$ , para cada  $p \in U$ .

**Proposição 1.2.6.** Uma superfície regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se existe um campo diferenciável  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais unitários em  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície orientável, então existe  $\mathcal{A} = \{X_\alpha\}_\alpha$  um atlas para  $M$  que é uma orientação de  $M$ . Nos pontos  $p = X_\alpha(u, v) \in M$  de cada vizinhança coordenada  $X_\alpha(U_\alpha) \subset M$ , com  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  aberto. Definimos a aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  pondo  $N(p) = N_{X_\alpha}(u, v)$ , onde

$$N_{X_\alpha}(u, v) = \frac{(X_\alpha)_u(u, v) \times (X_\alpha)_v(u, v)}{\|(X_\alpha)_u(u, v) \times (X_\alpha)_v(u, v)\|}.$$

Assim  $N(p)$  está bem definido, pois se  $p$  pertence a duas vizinhanças coordenadas, isto é  $p \in X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta)$  com parâmetro  $(u, v)$  e  $(\hat{u}, \hat{v})$ , respectivamente e mais ainda

$$(X_\beta)_{\hat{u}} \times (X_\beta)_{\hat{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\hat{u}, \hat{v})} (X_\alpha)_u \times (X_\alpha)_v$$

onde  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\hat{u}, \hat{v})} > 0$  é o Jacobiano da mudança de coordenadas  $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ . Logo

$$N_{X_\beta}(u, v) = \frac{(X_\alpha)_u \times (X_\alpha)_v}{\|(X_\alpha)_u \times (X_\alpha)_v\|} = N_{X_\alpha}(u, v).$$

Além disso, as coordenadas de  $N_{X_\alpha}(u, v)$  em  $\mathbb{R}^3$  são funções diferenciáveis de  $(u, v)$ , e portanto,  $N$  é diferenciável.

Por outro lado, seja  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo diferenciável de vetores normais unitários em  $M$ , e considere uma família de vizinhanças coordenadas conexas cobrindo  $M$ . Para os pontos  $p = X(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $X(U)$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, é possível, pela continuidade de  $N$  e, se necessário, intercambiando  $u, v$ , fazer com que

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

Com efeito, o produto interno

$$\langle N(p), \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} \rangle = f(p) = \pm 1$$

é uma função contínua em  $X(U)$ . Como  $X(U)$  é conexo, o sinal de  $f$  é constante. Se  $f = -1$ , intercambiando  $u$  e  $v$  na parametrização, obtemos a afirmação.

Procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na interseção de duas quaisquer delas, digamos,  $X(u, v)$  e  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$ , o Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})},$$

é positivo. Caso contrário, teríamos

$$\frac{\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \times \bar{X}_{\bar{v}}\|} = N(p) = -\frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = -N(p),$$

o que é uma contradição. Concluimos, portanto, que a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de  $u$  e  $v$ , satisfaz às condições da Definição 1.2.1, o que mostra que  $M$  é orientável. ■

### 1.2.1 A aplicação de Gauss

Discutiremos a seguir quando e em que sentido é possível ter funções diferenciáveis  $f$  e  $\varphi$ , dadas por  $f : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\varphi : V_1 \subset M_1 \rightarrow M_2$ , respectivamente, onde  $M_1, M_2$  são superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$ , com  $V$  aberto de  $M$  e  $V_1$  aberto de  $M_1$ .

**Definição 1.2.7** (Funções reais diferenciáveis em superfícies). *Seja  $f : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um subconjunto aberto  $V$  de uma superfície  $M$ . Então  $f$  é **diferenciável** em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $X : U \rightarrow M$  em uma vizinhança coordenada  $X(U) \subset V$  de  $p$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, a composição  $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $X^{-1}(p) \in U$ .*

A função  $f$  é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todo os pontos de  $V$ .

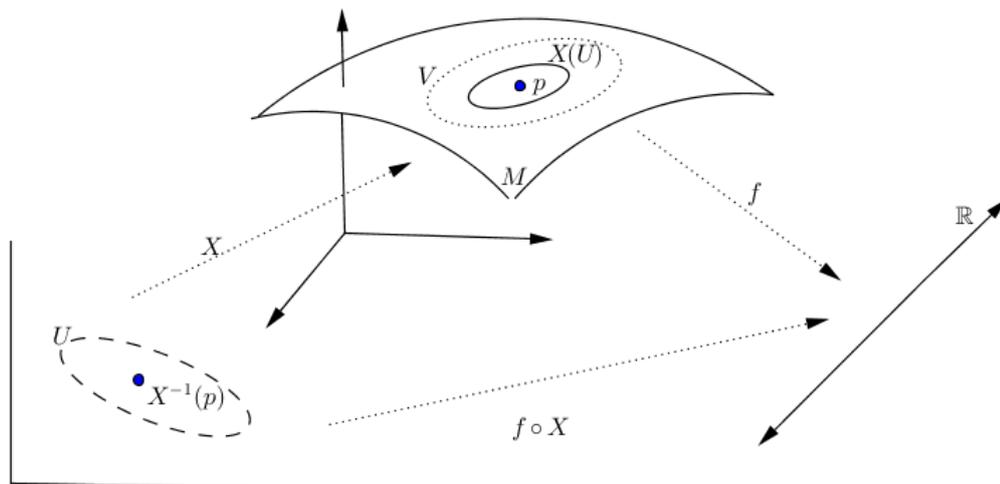


Figura 1.4: A função  $f$  é diferenciável em  $p$  se  $f \circ X$  é diferenciável em  $X^{-1}(p)$ .

**Observação 1.2.8.** Note que se  $M$  é uma superfície regular,  $V \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto tal que  $M \subset V$  e  $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função diferenciável. Então a restrição de  $f$  a  $M$  é uma função diferenciável sobre  $M$ . De fato, para qualquer  $p \in M$  e qualquer parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  em uma vizinhança coordenada de  $p$ , a função  $f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável.

A definição 1.2.7 acima não depende da escolha da parametrização  $X$ . Com efeito, se  $\hat{X} : \hat{U} \rightarrow M$  é uma outra parametrização em uma vizinhança  $\hat{X}(\hat{U}) \subset V$  de  $p$ , com  $\hat{U} \subset \mathbb{R}^2$  aberto, então  $p \in X(U) \cap \hat{X}(\hat{U}) \subset V$ . Denote por  $W := X(U) \cap \hat{X}(\hat{U})$ . Segue do Corolário 1.2 que  $h := X^{-1} \circ \hat{X} : \hat{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$  é diferenciável. Como  $f \circ X$  é diferenciável, obtemos que

$$f \circ \hat{X} = f \circ X \circ X^{-1} \circ \hat{X} = (f \circ X) \circ h$$

é diferenciável, já que é uma composição de funções diferenciáveis.

Faremos o abuso de notação indicando  $f$  e  $f \circ X$  pelo mesmo símbolo  $f(u, v)$  e diremos que  $f(u, v)$  é uma expressão de  $f$  no sistema de coordenadas  $X$  em uma vizinhança coordenada de  $p = X(u, v)$ .

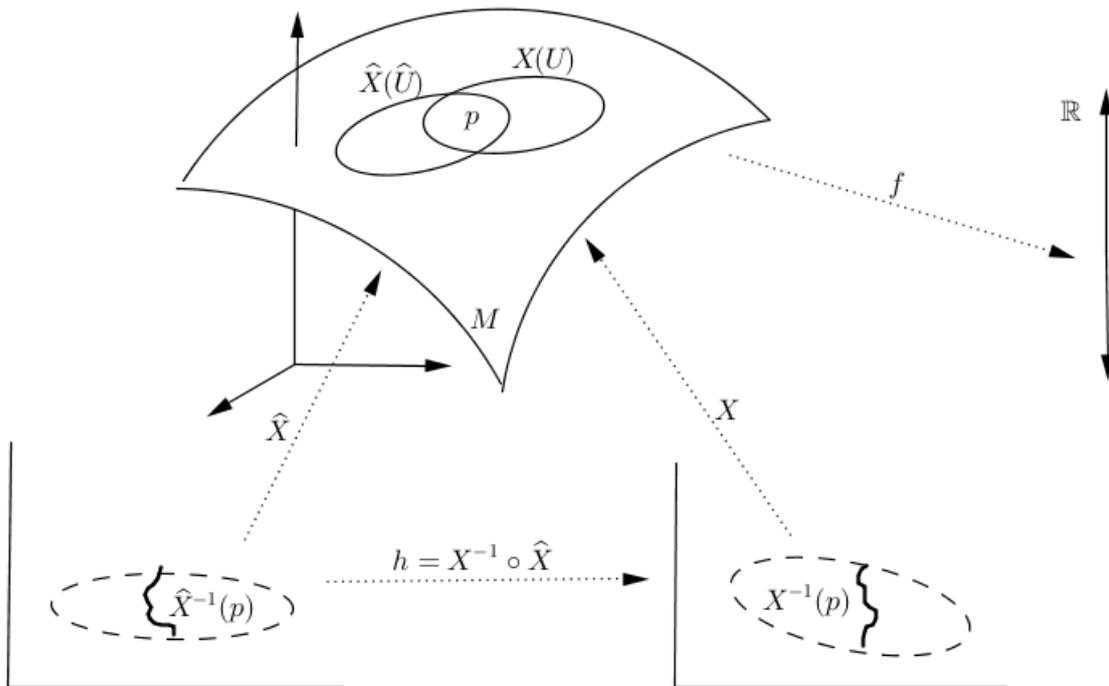


Figura 1.5: A aplicação diferenciável  $f$  não depende da parametrização de  $M$ .

A definição de diferenciabilidade pode ser facilmente estendida a aplicações entre superfícies.

**Definição 1.2.9** (Funções diferenciáveis entre superfícies). Considere  $\varphi : V_1 \subset M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação contínua, com  $M_1$  e  $M_2$  superfícies regulares, e  $V_1$  um conjunto aberto de  $M_1$ . Dizemos que  $\varphi$  é **diferenciável** em  $p \in V_1$  se, dadas as parametrizações

$$\begin{aligned} X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M_1, \\ X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M_2, \end{aligned}$$

com  $X_1(U_1) \subset V_1$  e  $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ , temos que a aplicação  $\widehat{\varphi} := X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$  é diferenciável em  $X_1^{-1}(p) \in U_1$ .

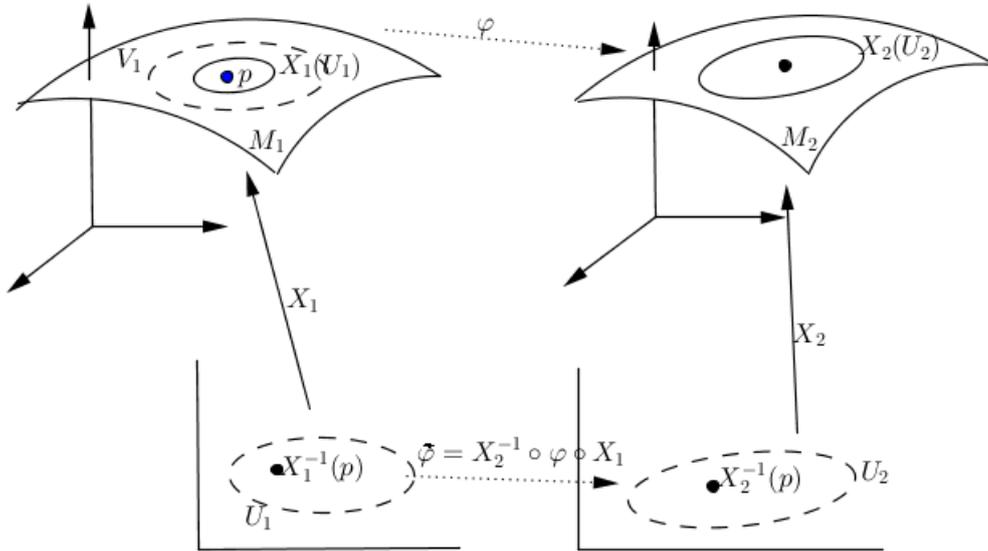


Figura 1.6: A aplicação  $\varphi$  é diferenciável em  $p$  se  $\widehat{\varphi}$  é diferenciável em  $X_1^{-1}(p)$ .

**Observação 1.2.10.** Na Definição 1.2.9, também pode-se dizer que  $\varphi$  é diferenciável se, quando expressada em coordenadas locais por  $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ , as funções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

A definição de diferenciabilidade entre superfícies regulares não depende da escolha de uma parametrização.

Vamos agora dar uma definição da diferencial de uma aplicação entre superfícies. Seja  $f : M \rightarrow \widehat{M}$  um mapa suave entre duas superfícies e  $w \in T_p M$  um vetor tangente a  $M$  em  $p$ .

Seja  $w$  um vetor tangente em  $p$  e considere uma curva diferenciável  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , passando por  $p$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $w = \gamma'(0)$ . Então  $\widehat{\gamma} = f \circ \gamma$  é uma curva diferenciável em  $\widehat{M}$  passando por  $f(p)$  quando  $t = 0$  e, portanto,  $\widehat{w} = \widehat{\gamma}'(0) \in T_{f(p)} \widehat{M}$ .

**Definição 1.2.11.** Com a notação acima, a diferencial  $df_p$  de  $f$  no ponto  $p \in M$  é o mapa  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \widehat{M}$  tal que  $df_p(w) = \widehat{w}$ , para qualquer vetor  $w \in T_p M$ . Mais precisamente, se  $w \in T_p M$  é tal que  $w = \gamma'(0)$  onde  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  é uma curva definida em  $M$ , então  $\widehat{w} = \widehat{\gamma}'(0) = (f \circ \gamma)'(0)$  onde  $\widehat{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \widehat{M}$  é uma curva em  $\widehat{M}$ . Daí, temos que a diferencial  $df_p$  no ponto  $p$ , leva  $w$  em  $\widehat{w}$ , da forma  $df_p(w) := \widehat{\gamma}'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \widehat{w}$ .

É possível mostrar que a Definição 1.2.11 não depende da curva e uma prova deste fato pode ser encontrada em ..?

**Proposição 1.2.12.** A Definição 1.2.11 faz sentido, isto é,  $df_p(w)$  depende apenas de  $f, p$  e  $w$  e não da curva  $\gamma$  escolhida.

Também temos a seguinte proposição:

**Proposição 1.2.13.** *Se  $f : M \rightarrow \widehat{M}$  é um mapa suave entre duas superfícies e  $p \in M$ , a diferencial  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \widehat{M}$  é uma transformação linear.*

De agora em diante,  $M \subset \mathbb{R}^3$  denotará uma superfície regular orientável, onde foi escolhida uma orientação (isto é, uma campo diferenciável de vetores normais unitários  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ); diremos que  $M$  é uma superfície com uma orientação  $N$  pode ser dado por

$$N(p) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|}, \quad (1.6)$$

onde  $X : U \rightarrow X(U) \subset M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, é uma parametrização em uma vizinhança coordenada de  $p = X(u, v) \in M$  (trocando  $u$  por  $v$  se necessário) que é compatível com a orientação de  $M$ , ou seja, se juntando  $X$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda a mesma orientação de  $M$ .

Podemos ver o vetor no lado direito de 1.6 como um vetor com ponto inicial em  $0 \in \mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.2.14.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A **aplicação de Gauss** é a aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  expressa no sistema de coordenadas (locais)  $X : U \rightarrow X(U) \subset M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, em uma vizinhança coordenada de  $p = X(u, v) \in M$ , por*

$$N(p) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|},$$

onde  $\mathbb{S}^2$  é a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ .

Geometricamente, a aplicação de Gauss leva os vetores normais unitários  $N(p)$ , com  $p \in M$ , à origem  $0 \in \mathbb{R}^3$ , conforme mostra a Figura 1.7.

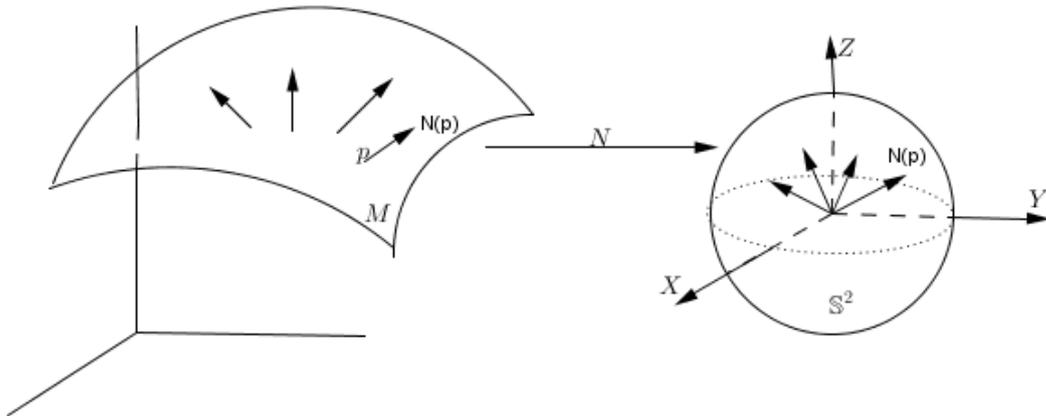


Figura 1.7: A aplicação de Gauss.

**Observação 1.2.15.** *É claro que a aplicação de Gauss é diferenciável. Logo, a diferencial  $dN_p : T_p M \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  de  $N$  em  $p \in M$  é uma aplicação linear de  $T_p M$  pela  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$  pela Proposição 1.6. Porém, pela álgebra linear, para  $v \in \mathbb{S}^2$  tem-se que*

$$T_v \mathbb{S}^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle w, v \rangle = 0\} = v^\perp,$$

que é o complemento ortogonal de  $v$ . Por outro lado, se  $v = N(p)$  é o vetor normal de  $M$  em  $p \in M$ , então  $v^\perp = (N(p))^\perp = T_p M$ . Logo, podemos identificar  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p M$  como os mesmos espaços vetoriais, isto é,  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p M$ . Daí, segue que a diferencial  $dN_p; T_p M \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2$  pode ser considerada como um endomorfismo linear do espaço  $T_p M$  que age sobre a superfície da seguinte forma:

Seja  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , com  $\gamma(0) = p$  é considerada a curva parametrizada  $N(t) = N \circ \gamma(t)$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Isso equivale a restringir o campo diferenciável de vetores normais unitários  $N$  à curva  $\gamma(t)$ . O vetor tangente a  $N(t)$  em  $N(p)$  é dado por

$$N'(0) = dN_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dN_p(\gamma'(0)),$$

que mede a taxa de variação do vetor normal  $N$ , restrito à curva  $\gamma(t)$ , em  $t = 0$ . Daí,  $dN_p$  mede quando  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p \in M$ .

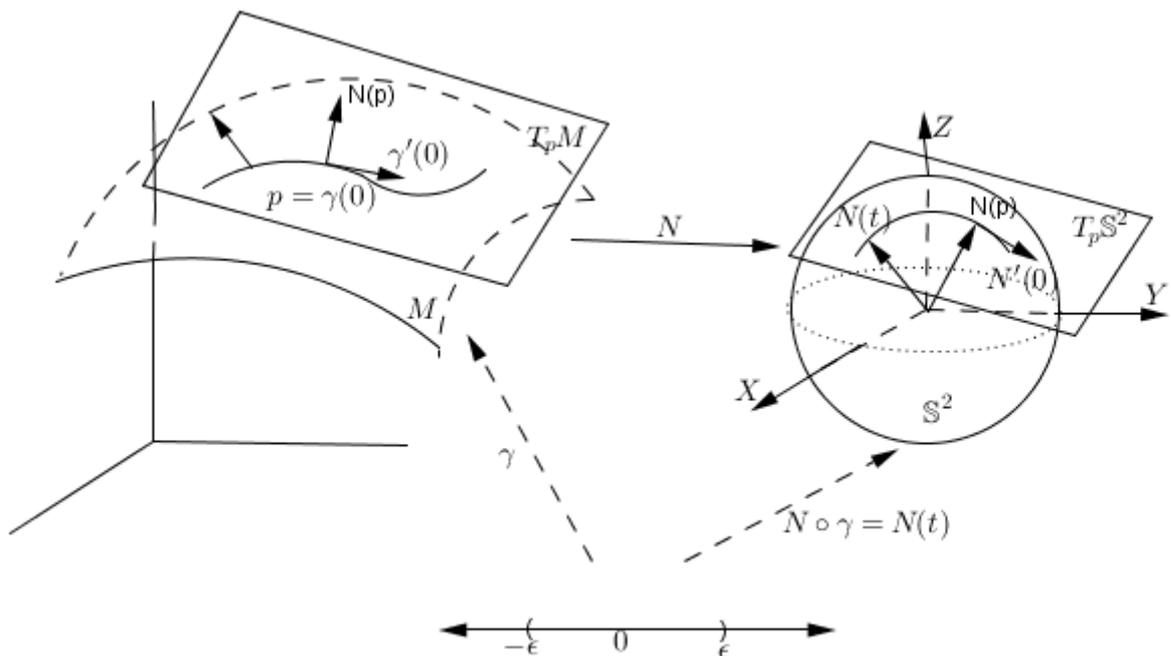


Figura 1.8: A aplicação  $dN_p$  mede a taxa de variação de  $N$  em uma vizinhança de  $p \in M$ .

**Exemplo 1.2.16.** Consideremos a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  e seja  $\rho(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva parametrizada em  $\mathbb{S}$ , então  $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$ . Logo, derivando em relação a  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , com  $\epsilon > 0$ , obtemos:

$$2x(t)x'(t), 2y(t)y'(t), 2z(t)z'(t) = 0.$$

Daí, o vetor  $\rho'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  é tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{S}^2$ . Assim, o vetor  $(x(t), y(t), z(t))$  é normal à esfera no ponto  $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{S}^2$ . Então, fixando uma orientação para  $\mathbb{S}^2$ , dada por  $N = (-x, -y, -z)$  como um campo normal de vetores unitários e mais ainda  $N$  aponta para o centro da esfera.

Logo,  $N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$  é o vetor normal restrito à curva  $\gamma(t)$ . Segue que

$$dN_{\rho(t)}(\rho'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)).$$

Ou seja, se  $v \in T_p \mathbb{S}^2$  é tal que  $v = \rho'(0)$ , com  $p \in \mathbb{S}^2$ , então  $dN_p(v) = -v$ .

A próxima proposição nos ajudará a definir uma outra forma quadrática, denominada *segunda forma fundamental*. Antes, porém, observemos o seguinte.

Sejam  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$  e  $w \in T_pM$  e considere a parametrização  $X : U \rightarrow M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, em uma vizinhança coordenada de  $p$ . Assim,  $\{X_u, X_v\}$  é combinação linear dos vetores da base, isto é  $w = \lambda X_u + \mu X_v$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e, portanto,

$$dN_p(w) = \lambda dN_p(X_u) + \mu dN_p(X_v) =: \lambda X_u + \mu X_v, \quad (1.7)$$

já que  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  é uma aplicação linear.

**Proposição 1.2.17.** *A diferencial  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear autoadjunta.*

*Demonstração.* Sabemos que  $dN_p$  é linear, para cada  $p \in M$ . Basta verificar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_1) \rangle,$$

para uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_pM$ . Então, considere a parametrização  $X : U \rightarrow M$  em uma vizinhança coordenada de  $p \in M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $\{X_u, X_v\}$  a base associada de  $T_pM$ . Se  $w \in T_pM$ , então existe uma curva diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X(U) \subset M$ , dada por  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Segue-se que

$$dN_p(w) = dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N \circ \alpha(t).$$

Daí, obtemos

$$dN_p(w) = u'(0)N_u + v'(0)N_v.$$

Portanto, é suficiente mostrar que

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle.$$

De fato,  $\langle N, X_u \rangle = 0$  e  $\langle N, X_v \rangle = 0$ , então derivamos essas equações em relação a  $v$  e  $u$  respectivamente, e obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

Assim, como  $X_{uv} = X_{vu}$ , temos  $\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$  ■

**Definição 1.2.18.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação de Weierstrass de  $M$  em  $p \in M$  é a aplicação  $W_{p,M} : T_pM \rightarrow T_pM$  dada por  $W_{p,M}(v) = -dN_p(v)$ , para cada  $v \in T_pM$ .*

## 1.2.2 Segunda forma fundamental

Uma vez demonstrada a Proposição 1.2.17, na qual a diferencial  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  é autoadjunta, podemos associar a ela uma forma bilinear, simétrica em  $T_pM$ :  $B : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $B(u, v) = \langle W_{p,M}(v), u \rangle$ . Com isso, temos a seguinte definição:

**Definição 1.2.19.** *A forma quadrática  $\mathcal{II}_p$ , definida em  $T_pM$  por  $\mathcal{II}_p(v) = B(v, v) = \langle W_{p,M}(v), v \rangle$ , chamada a **segunda forma fundamental** de  $M$  em  $p$ .*

**Definição 1.2.20.** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma curva regular em  $M$  passando por  $p \in M$  e  $K$  a curvatura de  $\mathcal{C}$  em  $p$ . O número  $K_n = k\langle n, N \rangle$  é chamado **curvatura normal** de  $\mathcal{C}$  em  $p$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $\mathcal{C}$  e  $N$  é o vetor normal a  $M$  em  $p$ .*

Em outras palavras,  $K_n$  é o comprimento da projeção do vetor  $Kn$  sobre a normal à superfície em  $p$ , com um sinal dado pela orientação  $N$  de  $M$  em  $p$ .

**Observação 1.2.21.** *A curvatura normal de  $\mathcal{C}$  não depende da orientação de  $\mathcal{C}$ , mas troca de sinal com uma mudança de orientação da superfície.*

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental  $\mathcal{II}_p$ , vamos mostrar que ela, ao ser aplicada em um vetor unitário  $v \in T_pM$ , é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por  $p \in M$  e tangente a  $v$ . Com efeito, considere uma curva regular  $\mathcal{C} \subset M$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , onde  $s$  é o comprimento de arco de  $\mathcal{C}$  com  $\alpha(0) = p$ . Diremos  $N(s)$  a restrição de vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(s)$ , assim  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Logo, derivando com respeito a  $s$ , obtemos

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{IIP}(v) &= \langle -dN_p(\alpha'(0), \alpha'(0)) \rangle = \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N(p), Kn(s) \rangle = K_n(p). \end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.22** (Meusnier). *Todas as curvas regulares de uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  que têm, em um ponto  $p \in M$ , a mesma reta tangente, têm neste ponto a mesma curvatura normal.*

Pela álgebra linear, sabe-se que se  $dN_p$  é uma aplicação linear auto-adjunta, para cada  $p \in M$ , então existe uma base ortogonal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_pM$  tal que

$$dN_p(e_1) = -K_1e_1, \quad dN_p(e_2) = -K_2e_2. \quad (1.8)$$

Além disso, se  $K_1 \geq K_2$  então temos que são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental  $\mathcal{II}_p$  restrita ao círculo unitário de  $T_pM$ ; isto é, são os vetores extremos da curvatura normal em  $p$ .

**Definição 1.2.23.** *O valor máximo da curvatura normal  $K_1$  e o valor mínimo da curvatura normal  $K_2$ , são chamados **curvaturas principais** em  $p$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas **direções principais** em  $p$ .*

**Observação 1.2.24.** *É possível mostrar que no plano todas as direções em todo os pontos são principais. O mesmo acontece com uma esfera, já que em os casos, isto vem do fato de que a segunda forma fundamental, em todos os pontos, restrita a vetores unitário é constante. Assim, todas as direções são extremos para a curvatura normal.*

Também de 1.8, obtemos que a matriz associada à aplicação linear  $dN_p$ ,  $p \in M$  com respeito à base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  é

$$dN_p = \begin{pmatrix} -K_1 & 0 \\ 0 & -K_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o determinante e o traço de  $dN_p$  são o produto  $K_1K_2$  e  $-(K_1+K_2)$  o negativo da soma das curvaturas principais, respectivamente. Se mudarmos a orientação da superfície, o determinante não muda (aqui é fundamental o fato da dimensão ser par); porém, o traço muda de sinal. Mediante a essas considerações feitas, podemos apresentar a seguinte definição:

**Definição 1.2.25.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ ,  $p \in M$  e  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  a diferencial da aplicação de Gauss. A **curvatura de Gauss**  $K$  e a **curvatura média**  $H$  de  $M$  em  $p$  são definidas, respectivamente, por*

$$K(p) = \det(dN_p) \text{ e } H(p) = -\frac{1}{2}\text{tr}(dN_p).$$

Em termos das curvaturas principais  $K_1$  e  $K_2$ , podemos escrever:

$$K = K_1K_2, \quad H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2).$$

Se em  $p \in M$ ,  $K_1 = K_2$ , então  $p$  é chamado um *ponto umbílico* de  $M$ .

Obteremos a seguir as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss em um sistema de coordenadas locais.

Consideremos, agora, que todas as parametrizações  $X : U \rightarrow M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, em uma vizinhança coordenada de  $p = X(u, v) \in M$ , são compatíveis com a orientação  $N$  de  $M$ , isto é,

$$N(p) = \frac{X_u(u, v) \times X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \times X_v(u, v)\|}.$$

Sejam  $X(u, v)$  uma parametrização em uma vizinhança coordenada de  $p \in M$  e  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada na vizinhança de  $p$  contida em  $M$ , com  $\gamma(0) = p$ . Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam sem valores no ponto  $p$ .

O vetor tangente a  $\gamma(t)$  em  $p$  é  $\gamma'(0) = X_u u'(0) + X_v v'(0)$  e o vetor tangente a  $N(t) = N \circ \gamma(t)$  em  $N(p)$  é dado por

$$dN(\gamma') = N'(u(t), v(t)) = u'N_u + v'N_v \quad (1.9)$$

onde  $N(t) = N(\gamma(t)) = N(u(t), v(t))$ . Como  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  temos que  $N_u = dN(X_u)$  e  $N_v = dN(X_v)$  pertence a  $T_pM$ , logo podemos escrever

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \quad (1.10)$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

Portanto,

$$\begin{aligned} dN(\gamma') &= u'(a_{11}X_u + a_{21}X_v) + v'(a_{12}X_u + a_{22}X_v) \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v, \end{aligned}$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Isto mostra que, na base  $\{X_u, X_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $W = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , chamada de matriz de Weingarten.

Note que esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{X_u, X_v\}$  seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{II}_p(\gamma') &= \langle \mathcal{W}_{p,M}(\gamma'), \gamma' \rangle = -\langle dN(\gamma'), \gamma' \rangle \\ &= \langle u'N_u + v'N_v, u'X_u + v'X_v \rangle. \end{aligned}$$

Logo  $\mathcal{II}_p(\gamma') = -(u'^2)\langle N_u, X_u \rangle u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'u' \langle N_v, X_u \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle$ . por, em pela proposição 1.7, temos que  $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ . Assim,

$$\mathcal{II}_p(\gamma') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

onde  $e = -\langle N_u, X_u \rangle$ ,  $f = -\langle N_v, X_u \rangle$ ,  $g = \langle N_v, X_v \rangle$  Mais do que isso, como  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

que chamaremos de coeficientes da segunda forma fundamental.

Vamos obter agora os valores  $a_{ij}$  da matriz de Weingarten em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental. Da equação 1.10, tem-se

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_u \rangle \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{21}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_u \rangle \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{21}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes da primeira forma fundamental nas expressões acima obtemos:

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= a_{11}F + a_{21}G = a_{21}E + a_{22}F \\ -g &= a_{21}F + a_{22}G \end{aligned}$$

As relações acima podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

Daí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.11)$$

No entanto, sabemos que  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ , Segue que, os coeficientes da matriz de  $dN$  isto é matriz de Weingarten  $W = (a_{ij})$ , da base  $\{X_u, X_v\}$  são:  $a_{11} = \frac{fF-eG}{EG-F^2}$ ,  $a_{12} = \frac{gF-fG}{EG-F^2}$ ,  $a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2}$ ,  $a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}$ .  
Mais ainda, as equações em (1.10), junto com os valores obtidos acima, são conhecidos como as *equações de Weingarten*.

A partir da equação (1.11) e da Definição 1.16, obtém-se que a curvatura Gaussiana  $K$  e a curvatura média  $H$  de  $M$  em  $p$  são expresas por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Onde  $M \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície com uma orientação  $N$ .

**Observação 1.2.26.** Note que se mudamos a orientação  $N$  (isto é, um campo diferenciável de vetores normais unitários  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) da superfície regular  $M$ . A aplicação de Weingarten  $\mathcal{W}_{p,M}(v) = -dN_p(v)$ , para cada  $v \in T_pM$ , também muda de sinal.

Entretanto, o determinante desta aplicação se mantém inalterado, já que  $\mathcal{W} = (a_{ij})$  é uma matriz  $2 \times 2$  e, portanto,  $\det(-\mathcal{W}) = \det(\mathcal{W}) = K$ . Isto implica que a curvatura Gaussiana  $K$  está definida para qualquer superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$ , orientável ou não. Além disso, para definir  $K$  em um ponto  $p \in M$ , escolhe-se uma parametrização  $X : U \rightarrow M$  em uma vizinhança coordenada de  $p \in M$  e a definição de  $K$  não depende da escolha de  $X$ .

Por outro lado, sobre uma superfície que não é necessariamente orientável,  $H$  está bem definida a menos de um sinal.

**Exemplo 1.2.27.** Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos de uma superfície de revolução coberto pela parametrização (cf. Exemplo 1.1.23) dada por

$$X(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sen v, \psi(u))$$

onde  $(u, v) \in U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < v < 2\pi, a < u < b\}$  e  $\varphi(u) > 0$ . Também vamos supor que a curva geratriz  $u \mapsto (\varphi(u), 0, \psi(u))$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, que  $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ . Então,  $X_u = (\varphi'(u) \cos v, \varphi'(u) \sen v, \psi'(u))$ ,  $X_v = (-\varphi(u) \sen v, \varphi(u) \cos v, 0)$   $E = \varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = \varphi^2$ .

Logo, o campo diferenciável de vetores normais unitários é dado por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi' \cos v & \varphi' \sen v & \psi' \\ -\varphi \sen v & \varphi \cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varphi} (-\psi' \varphi \cos v, -\psi' \varphi \sen v, \varphi' \varphi),$$

ou seja,  $N = (-\psi' \cos v, -\psi' \sen v, \varphi')$  E também:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (\varphi''(u) \cos v, \varphi''(u) \sen v, \psi'') \\ X_{uv} &= (\varphi'(u) \sen v, \varphi'(u) \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (\varphi(u) \cos v, -\varphi(u) \sen v, 0) \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \psi' \varphi'' + \psi'' \varphi' \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \psi' \varphi \end{aligned}$$

Segue, portanto, que a curvatura Gaussiana é

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\psi\varphi(-\psi'\varphi'' + \psi''\varphi')}{\varphi^2} = \frac{-\psi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi}$$

Como  $(\psi')^2 + (\varphi')^2 = 1$ , podemos diferenciar ambos os membros desta equação em relação a  $u$  e obtemos

$$\frac{d}{du}((\psi')^2 + (\varphi')^2) = 0 \Leftrightarrow \psi'\psi'' = -\varphi'\varphi''$$

com isso, podemos exibir uma outra expressão para a curvatura Gaussiana, a saber:

$$K = \frac{\psi'(-\psi'\varphi'' + \psi''\varphi')}{\varphi} = \frac{-(\psi')^2\varphi'' - (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = \frac{-\varphi''}{\varphi}.$$

Por outro lado, a curvatura média possui a expressão

$$H = \frac{\varphi^2(-\psi'\varphi'' + \psi''\varphi')}{2\varphi^2} = \frac{-\psi - \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{2\varphi}.$$

**Observação 1.2.28.** *Em nossa definição de superfície de revolução (cf. Exemplo 1.1.23) se  $C \subset \mathbb{R}^2$  é uma curva regular fechada e plana, que é simétrica em relação a um eixo  $\ell$  de  $\mathbb{R}^3$  que não intercepta a curva, então, girando  $C$  em torno de  $\ell$ , obtemos uma superfície que chamamos também de superfície de revolução.*

## Capítulo 2

# Teorema de Frobenius e Parâmetros Isotérmicos

### 2.1 Variedades diferenciáveis e superfícies de Riemann

Faremos uma exposição rápida dos conceitos e resultados, a respeito das variedades diferenciáveis, que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

**Definição 2.1.1.** Um **atlas diferenciável**, de classe  $C^k$  e dimensão  $n$ , sobre um espaço topológico  $M$ , é uma coleção  $\mathcal{U}$  de homeomorfismos  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , do aberto  $U$  de  $M$  no aberto  $x(U)$  do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , de modo que:

- os domínios  $U$  cobrem  $M$ ;
- se  $x, y \in \mathcal{U}$  e  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $U \cap V \neq \emptyset$ , então a aplicação

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$$

do aberto  $x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  no aberto  $y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  é diferenciável, de classe  $C^k$ .

Os elementos de  $\mathcal{U}$  são chamados *sistema de coordenadas locais*, os domínios  $U$  *vizinhanças coordenadas*. Dado um ponto  $p \in M$  e um sistema  $x \in \mathcal{U}$ , definido numa vizinhança de  $p$ , se  $x(p) = (x^1, \dots, x^n)$ , os números  $x^1, \dots, x^n$  são as coordenadas do ponto  $p$  no sistema  $x$ .

Um atlas diferenciável  $\mathcal{U}$ , sobre  $M$ , é dito *máximo* se, além das condições acima, satisfizer também:

- se  $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo de um aberto  $W$  de  $M$  no aberto  $z(W)$  do  $\mathbb{R}^n$  de modo que, para todo sistema de coordenadas  $x \in \mathcal{U}$ ,  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U \cap W \neq \emptyset$ , se tenha:

$$z \circ x^{-1} : x(U \cap W) \rightarrow z(U \cap W)$$

diferenciável de classe  $C^k$ , então também  $z \in \mathcal{U}$ .

**Definição 2.1.2.** Uma **variedade diferenciável**  $M = M^n$ , de classe  $C^k$  e dimensão  $n$ , é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, munido de um atlas  $\mathcal{U}$  diferenciável de classe  $C^k$  e dimensão  $n$ . Por conveniência, suporemos que  $\mathcal{U}$  é máximo.

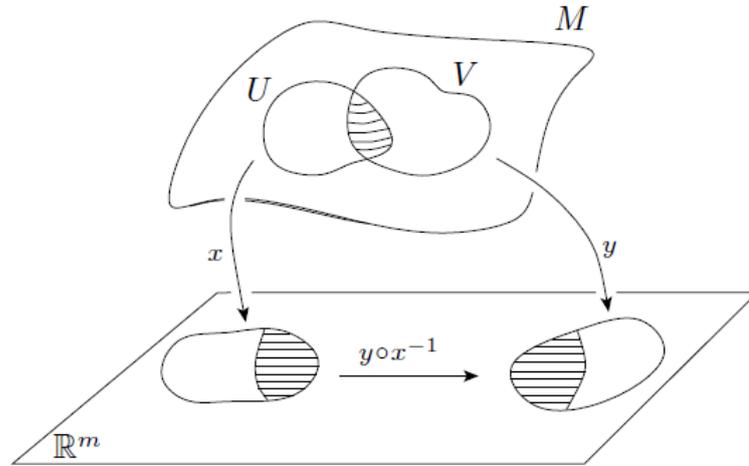


Figura 2.1:

Dado um ponto  $p \in M$ , chamemos de  $\chi_p$  o conjunto de todos os sistemas de coordenadas  $x \in \mathcal{U}$  definido em alguma vizinhança de  $p$ :

$$\chi_p = \{x \in \mathcal{U}; x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ e } p \in U\}.$$

Um *vetor tangente* à variedade  $M$ , no ponto  $p \in M$ , é uma função

$$v : \chi_p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada sistema de coordenadas  $x \in \chi_p$  associa uma  $n$ -upla  $v(x) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n$ , de tal modo que, se  $y \in \chi_p$  e  $v(y) = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ , então

$$\beta^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \alpha^i,$$

onde, por  $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)\right)$  deve-se entender a matriz jacobiana da mudança de coordenadas  $y \circ x^{-1}$ , calculada no ponto  $x(p)$ . Os números  $\alpha^1, \dots, \alpha^n$  são as *coordenadas do vetor*  $v$  relativamente ao sistema  $x$ .

Sobre o conjunto  $T_p M$ , de todos os vetores tangentes a  $M$  no ponto  $p$ , pode-se definir uma estrutura de espaço vetorial de modo natural, isto é, se  $v, w \in T_p M$  e  $\alpha$  é um número real qualquer, definimos  $v + w$  e  $\alpha v$  como:

$$\begin{aligned} (v + w)(x) &= v(x) + w(x) \\ (\alpha v)(x) &= \alpha v(x) \end{aligned}$$

para qualquer  $x \in \chi_p$ . O vetor nulo  $0 \in T_p M$  é a função

$$0 : \chi_p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que  $0(x) = (0, \dots, 0)$  para todo  $x \in \chi_p$ .

É fácil verificar que  $v + w$  e  $\alpha v$  são ainda vetores tangentes de  $T_p M$  e, quanto à dimensão, vale a

**Proposição 2.1.3.**  $T_pM$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ .

*Demonstração.* Basta construir uma base de  $T_pM$  com  $n$  elementos. Realidade, a cada sistema de coordenadas  $x \in \chi_p$  (válido numa vizinhança de  $p$ ) faremos corresponder uma base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right\}$$

do espaço  $T_pM$ . Dado  $x$ , definiremos:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right] = \left( \frac{\partial y^1}{\partial x^i}(p), \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(p) \right),$$

para  $i = 1, \dots, n$ , qualquer que seja  $y \in \chi_p$ . Isto é,  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$  é o vetor de  $T_pM$  cujas coordenadas no sistema  $y$  são os números

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^i}(p), \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(p).$$

A regra de derivação das funções compostas mostra que, de fato, os  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$  assim definido são vetores tangentes. Além disso, dado um vetor  $v \in T_pM$  qualquer, tem-se

$$v(x) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n).$$

Então não é difícil verificar que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p),$$

e portanto os vetores  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$  geram  $T_pM$ . Finalmente, esses vetores são linearmente independente, pois se  $w \equiv \sum \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = 0$  então, em particular,  $w(x) = (0, 0, \dots, 0)$ . Mas

$$w(x) = \sum \lambda^i \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \right] (x)$$

e  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \right] (x) = e_i = i$ -ésimo vetor da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Assim, temos

$$0 = w(x) = \sum \lambda^i e_i \in \mathbb{R}^n.$$

Segue-se que  $\lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$ , o que conclui a demonstração. ■

**Observação 2.1.4.** Decorre da demonstração que, se  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um sistema de coordenadas em  $M^n$ , cujo domínio é o aberto  $U \subset M^n$ , então a cada ponto  $q \in U$  corresponde a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right\} \subset T_qM.$$

Quando, num dado argumento, não houver perigo de confusão sobre o ponto  $q$ , escrevemos simplesmente

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}.$$

**Exemplo 2.1.5.** Os espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$  são variedades de classe  $C^k$ , para qualquer  $k \geq 0$ . Bastando para isso, considerar o atlas máximo diferenciável  $\mathcal{U}_k$ , de classe  $C^k$ , que contém o sistema de coordenadas

$$x = \text{identidade} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Verifica-se que o espaço  $\mathbb{R}_p^n$  dos vetores tangentes a esta variedade, em um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ , canonicamente isomorfo ao  $\mathbb{R}^n$ . Este isomorfismo canônico decorre da existência de uma base privilegiada de  $\mathbb{R}_p^n$ , aquela associada ao sistema de coordenadas dado pela identidade sobre o  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.1.6.** Todo subconjunto aberto  $A$  de uma variedade diferenciável  $M^n$  possui uma estrutura de variedade diferenciável herdada da estrutura de  $M^n$ , de mesma classe e dimensão que  $M^n$ . um atlas sobre  $A$  será dado pelos sistemas de coordenadas, de  $M^n$  cujo domínios estejam contidos em  $A$ .

Verifica-se que, em cada ponto  $p \in A$ , o espaço  $T_p M$  dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$ , é canonicamente isomorfo ao espaço  $T_p A$  dos vetores tangentes a  $A$  em  $p$ .

**Exemplo 2.1.7.** Definimos **variedade produto** de duas variedades  $M = M^m$  e  $N = N^n$  como sendo o produto  $M \times N$  dos espaços topológicos dotado da seguinte estrutura de variedade diferenciável: se  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{B}$  são os atlas sobre  $M$  e  $N$ , respectivamente, construímos, a partir destes, o atlas  $\mathcal{U} \times \mathcal{B}$ , sobre  $M \times N$ , cujos elementos serão homeomorfismos

$$x \times y : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n},$$

com  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  percorrendo  $\mathcal{U}$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  percorrendo  $\mathcal{B}$  e  $(x \times y)(p, q) = (x(p), y(q))$ . O espaço  $T_{(p,q)}(M \times N)$  tangente à variedade produto, no ponto  $(p, q)$ , é isomorfo, canonicamente, à soma direta dos espaços tangentes  $T_p M$  e  $T_q N$ . Com efeito, dados os sistemas de coordenadas  $x$  em  $M$  e  $y$  em  $N$ , em torno dos pontos  $p$  e  $q$ , respectivamente, sejam  $\alpha^1, \dots, \alpha^m, \beta^1, \dots, \beta^n$  as coordenadas do vetor  $v \in T_{(p,q)}(M \times N)$  no sistema  $x \times y$ .

Observe que as primeiras  $m$  coordenadas  $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ , de  $y$ , dependem somente do sistema  $x$  e as últimas coordenadas  $\beta^1, \dots, \beta^n$  dependem somente de  $y$ . Seja  $v' \in T_p M$  o vetor cujas coordenadas no sistema  $x$  são  $\alpha^1, \dots, \alpha^m$  e  $v'' \in T_q N$  o vetor cujas coordenadas no sistema  $y$  são  $\beta^1, \dots, \beta^n$ . A correspondência  $v \mapsto v' \oplus v''$  estabelece o isomorfismo

$$T_{(p,q)}(M \times N) \approx T_p M \oplus T_q N.$$

**Exemplo 2.1.8.** Um outro exemplo de variedade diferenciável é fornecido pelas superfícies regulares do espaço euclidiano, onde se consideram os inversos das parametrizações como sistema de coordenadas.

No caso particular em que  $M$  é uma variedade de dimensão 2 (ou uma 2-variedade), considere o atlas  $\mathcal{U}$  formado pela coleção de homeomorfismos  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ , onde  $U_i$  é aberto de  $M$  e  $V_i$  é aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Então, pela Definição 2.1.2, para todo  $i, j$ , com  $U_i \cap U_j = W \neq \emptyset$ , temos que

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \tag{2.1}$$

é de classe  $C^\infty$  em  $W$ . Essa observação nos permite definir o conceito de superfície de Riemann.

**Definição 2.1.9.** Uma **superfície de Riemann**  $M$  é uma 2-variedade de classe  $C^\infty$ , onde  $M$  é conexo e as composições como em (2.1) são todas holomorfas<sup>1</sup>, com a identificação  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .

---

<sup>1</sup>Uma função complexa  $f(z)$  é diferenciável em um ponto  $z_0$  se  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$  existe. Assim,  $f$  é holomorfa em uma região se é diferenciável em todos os pontos desta região.

### 2.1.1 Imersões e mergulhos

O objetivo principal desta seção é introduzir o conceito de subvariedade. Intuitivamente, uma subvariedade  $M^m \subset N^n$  esta situada em  $N$  de modo análogo a uma superfície  $M^m \subset \mathbb{R}^n$ , situada em  $\mathbb{R}^n$ . É feita, também, uma discussão elementar das relações que existem entre as noções de imersão e de mergulho.

Sejam  $M^m$ ,  $N^n$  variedades de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável.

**Definição 2.1.10.** Um ponto  $p \in M$  diz-se um **ponto regular** de  $f$  quando a derivada

$$f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

é injetiva. Caso contrário,  $p$  diz-se um **ponto singular** ou **crítico** de  $f$ .

Tomando coordenadas locais  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$ , com  $f(U) \subset V$ , a derivada  $f'(p)$ ,  $p \in U$ , transforma-se na derivada  $f'_{xy}(x(p)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ . Em outras palavras, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{f'(p)} & T_{f(p)} N \\ x'(p) \downarrow & & \downarrow y'(f(p)) \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f'_{xy}(x(p))} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Um ponto  $p \in u \subset M$  é regular para  $f$  se, e somente se,  $f'_{xy}(x(p))$  é injetiva.

O conjunto dos pontos regulares  $p \in M$  de uma aplicação de classe  $C^k$ ,  $f : M \rightarrow N$ , ( $k \geq 1$ ) pode ser vazio. Por exemplo, isto ocorre sempre que  $\dim M > \dim N$ .

**Proposição 2.1.11** (Forma local das imersões em variedades). *Seja  $p \in M$  um ponto regular para a aplicação  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Então existe um sistema de coordenadas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $p \in U$ , e um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ , ( $V \subset N$  aberto) tais que  $f(U) \subset V$  e  $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow x(U) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  é a aplicação de inclusão, isto é,  $f_{xy}(w) = (w, 0)$ . Em particular, o conjunto dos pontos regulares  $p \in M$  de  $f$  é aberto em  $M$ .*

A demonstração da Proposição 2.1.11 foge ao objetivo principal deste trabalho, mas pode ser vista em [14].

**Observação 2.1.12.** O difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $y : V \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ , será um sistema de coordenadas em  $N$  se a classe de  $N$  for exatamente igual a  $k$ .

**Definição 2.1.13.** Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  diz-se uma **imersão** se todo ponto  $p \in M$  é um ponto regular para  $f$ , isto é, a derivada  $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é injetiva para cada  $p \in M$ .

**Proposição 2.1.14.** *Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma imersão de classe  $C^k$ . Uma aplicação  $g : P^r \rightarrow M^m$  é de classe  $C^k$  se, e somente se,  $g$  é contínua e  $f \circ g : P^r \rightarrow N^n$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ).*

*Demonstração.* Suponhamos que  $g$  seja contínua e que  $f \circ g \in C^k$ . Pela Proposição 2.1.11, para cada  $p \in P$  existem um sistema de coordenadas  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $g(p) \in U$ , e um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ , ( $V \subset N$  aberto) tais que  $f(U) \subset V$  e  $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  é da forma  $f_{xy}(w) = (w, 0)$ . Como  $g$  é contínua,

podemos encontrar um sistema de coordenadas  $z : Z \rightarrow \mathbb{R}^r$  em  $P$ , com  $p \in Z$ , tal que  $g(Z) \subset U$ . Portanto,  $(f \circ g)_{zy} = y \circ f \circ g \circ z^{-1} : z(Z) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  está bem definida e é da forma  $(f \circ g)_{zy} = (g_{zx}, 0)$ . Como  $f \circ g \in C^k$ , segue que  $(f \circ g)_{zy} \in C^k$ , logo  $g_{zx} \in C^k$ . Conclusão:  $g \in C^k$ .

A recíproca é imediata. ■

**Corolário 2.1.15.** *Sejam  $N$  uma variedade de classe  $C^k$ , pelo menos,  $M$  um espaço topológico e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação contínua. Então existe no máximo uma estrutura de variedade  $C^k$  em  $M$  que torna  $f$  uma imersão de classe  $C^k$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que existam dois atlas máximos de classe  $C^k$  em  $M$ ,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{B}$ , tais que  $f : (M, \mathcal{U}) \rightarrow N$  e  $f : (M, \mathcal{B}) \rightarrow N$  são imersões de classe  $C^k$ . A aplicação identidade  $g : (M, \mathcal{U}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$  é contínua e  $f \circ g = f : (M, \mathcal{U}) \rightarrow N$ . Pela Proposição 2.1.14, resulta que  $g \in C^k$ . Isto significa que, para cada  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $\mathcal{U}$  e  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $\mathcal{B}$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ , a mudança de coordenadas  $y \circ x^{-1}$  é de classe  $C^k$ . Analogamente, a aplicação identidade  $(M, \mathcal{B}) \rightarrow (M, \mathcal{U})$  é de classe  $C^k$ . Logo, todas as mudanças de coordenadas  $x \circ y^{-1}$ ,  $x \in \mathcal{U}$  e  $y \in \mathcal{B}$ , também são de classe  $C^k$ . Como  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{B}$  são atlas máximos de classe  $C^k$ , conclui-se que  $\mathcal{B} = \mathcal{U}$ . ■

**Definição 2.1.16.** *Sejam  $M^m, N^n$  variedades de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Diz-se que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **mergulho** se*

(i)  $f$  é uma imersão.

(ii)  $f$  é um homeomorfismo de  $M$  sobre o subespaço  $f(M) \subset N$ .

**Observação 2.1.17.** *Quando  $f : M \rightarrow N$  é um mergulho de classe  $C^k$ , a Proposição 2.1.14 fica simplificada, pois não será preciso supor  $g$  é contínua. De fato, se  $f \circ g \in C^k$ , então  $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$  é contínua.*

## 2.1.2 Subvariedades

**Definição 2.1.18.** *Uma **subvariedade**  $M^m$  de classe  $C^k$  de uma variedade  $N^n$  de classe  $C^r$  ( $r \geq k$ ) é um subconjunto  $M \subset N$ , com a topologia induzida pela de  $N$ , e dotado de uma estrutura de variedade  $C^k$  tal que a aplicação de inclusão  $i : M \rightarrow N$  é um mergulho de classe  $C^k$ .*

Segue do Corolário 2.1.15 que existe, no máximo, uma estrutura de variedade  $C^k$  que faz de  $M$  uma subvariedade  $C^k$  de  $N$ .

Devido à importância do conceito, explicitamos as condições que devem ser verificadas a fim de que  $M$  seja uma subvariedade de classe  $C^k$  de  $N$ .

(i)  $M$  é uma variedade de classe  $C^k$ .

(ii)  $M \subset N$  e a topologia de  $M$  é induzida pela de  $N$ .

(iii) Para cada  $p \in M$ , existem sistema de coordenadas  $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $N$  e  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  tais que  $p \in U \subset V$  e  $y \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma imersão de classe  $C^k$ . Então  $y \circ x^{-1}$  é necessariamente um mergulho, pois a topologia de  $U$  é induzida pela de  $V$ .

Intuitivamente,  $M$  está situada em  $N$  assim como uma superfície de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^n$  (veja a Figura 2.2).

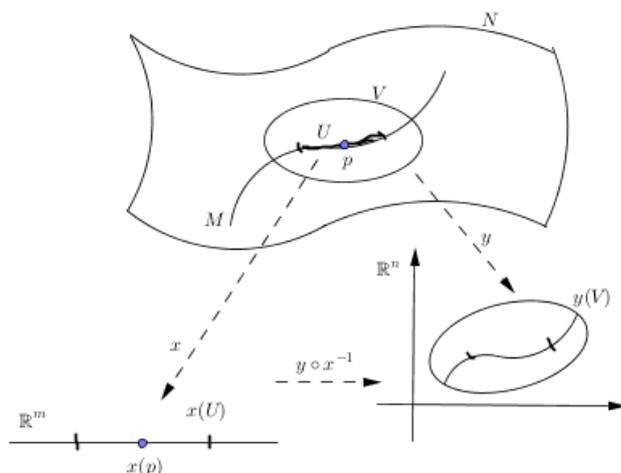


Figura 2.2:

**Exemplo 2.1.19.** As subvariedades de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$  são, precisamente, as superfícies  $M \subset \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$ .

**Exemplo 2.1.20.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades de classe  $C^k$  e  $f : M \rightarrow N$  um mergulho de classe  $C^k$ . Então,  $f(M)$  é uma subvariedade de classe  $C^k$  de  $N$ .

**Observação 2.1.21 (Espaço tangente a uma subvariedade).** Seja  $M^m \subset N^n$  uma subvariedade de classe  $C^k$ . Em cada ponto  $p \in M$  identificamos o espaço tangente  $T_p M$  como um subespaço de  $T_p N$ , por meio da aplicação linear injetiva  $i'(p) : T_p M \rightarrow T_p N$ , onde  $i : M \rightarrow N$  é a inclusão.

Como casos especiais deste procedimento, tem-se as identificações  $T_p U = T_p N$  para um subconjunto aberto e  $T_p M \subset \mathbb{R}^n$  quando  $M^m \subset \mathbb{R}^n$  é uma superfície.

## 2.2 Teorema de Frobenius

### 2.2.1 Campos $f$ -relacionados

Dada uma variedade diferenciável  $M$ , identificaremos cada ponto  $p \in M$ , à fibra  $\{p\} \times T_p M$  do fibrado tangente  $TM$  de  $M$  com o próprio espaço tangente  $T_p M$ , através da bijeção natural

$$v \in T_p M \mapsto (p, v) \in \{p\} \times T_p M. \quad (2.2)$$

Assim, se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável, a diferencial  $df : TM \rightarrow TN$  de  $f$  será dada por

$$df(v) = df(p) \cdot v, \quad (2.3)$$

para todo  $v \in T_p M$ . Com a identificação (2.2), é usual expressar o valor  $df(v)$ , dado em (2.3), pondo

$$df(v) = df(\pi_M(v)) \cdot v,$$

onde  $\pi_M : TM \rightarrow M$  é a projeção canônica. Preferimos, no entanto, escrever o valor  $df(v)$  como dado em (2.3).

**Definição 2.2.1.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que dois campos vetoriais  $X \in \mathcal{X}(M)$  e  $Y \in \mathcal{X}(N)$  são  **$f$ -relacionados** se o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ X \downarrow & & \downarrow Y \\ TM & \xrightarrow{df} & TN \end{array}$$

comuta, isto é,  $df \circ X = Y \circ f$ . Isso significa que  $df(p) \cdot X(p) = Y(f(p))$ , para todo  $p \in M$ .

Com a identificação entre campos vetoriais e derivações, temos o seguinte resultado:

**Lema 2.2.2.** *Dois campos  $X \in \mathcal{X}(M)$  e  $Y \in \mathcal{X}(N)$  são  $f$ -relacionados se, e somente se,  $X(g \circ f) = Y(g) \circ f$ , para toda  $g \in C^\infty(N)$ .*

*Demonstração.* Dados  $p \in M$  e  $g \in C^\infty(N)$ , temos:

$$X(g \circ f)(p) = X(p)(g \circ f) = df(p) \cdot X(p)(g)$$

e

$$(Y(g) \circ f)(p) = Y(g)(f(p)) = Y(f(p))(g).$$

Assim,  $X(g \circ f)(p) = (Y(g) \circ f)(p)$  para quaisquer  $p \in M$  e  $g \in C^\infty(N)$  se, e somente se,  $df(p) \cdot X(p)(g) = Y(f(p))(g)$ . Ou seja,  $X(g \circ f) = Y(g) \circ f$ , para toda  $g \in C^\infty(N)$  se, e somente se,  $X$  e  $Y$  são  $f$ -relacionados. ■

Dada uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ , nem sempre um campo vetorial  $Y \in \mathcal{X}(N)$  é  $f$ -relacionado com algum campo  $X \in \mathcal{X}(M)$ . A proposição seguinte, cuja demonstração foge ao nosso objetivo principal e por isso não a faremos aqui, nos dá uma condição para que isso ocorra.

**Proposição 2.2.3.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma imersão diferenciável. Dado um campo vetorial  $Y \in \mathcal{X}(N)$ , com*

$$Y(f(p)) \in df(p)(T_p M),$$

para todo  $p \in M$ , existe um único campo  $X \in \mathcal{X}(M)$  tal que  $X$  e  $Y$  são  $f$ -relacionados.

No caso em que  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo, para cada campo  $Y \in \mathcal{X}(N)$ , existe um único campo  $X \in \mathcal{X}(M)$  que é  $f$ -relacionado com  $Y$ , a saber

$$X = df^{-1} \circ Y \circ f. \quad (2.4)$$

O campo em (2.4) é usualmente denotado por  $f^*Y$ , e é chamado **pull-back de  $Y$  por  $f$** . Analogamente, dado um campo  $X \in \mathcal{X}(M)$ , existe um único campo  $Y \in \mathcal{X}(N)$  que é  $f$ -relacionado com  $X$ , a saber

$$Y = df \circ X \circ f^{-1}. \quad (2.5)$$

O campo em (2.5) é usualmente denotado por  $f_*X$ , e é chamado o **push-forward de  $X$  por  $f$** .

No espaço das funções, o *pull-back* é definido pondo  $f^*g = g \circ f$ , para toda  $g \in C^\infty(N)$ . O *push-forward* é definido pondo  $f_*h = (f^{-1})^*h = h \circ f^{-1}$ , para toda  $h \in C^\infty(M)$ .

A proposição seguinte é uma das principais propriedades dos campos  $f$ -relacionados.

**Proposição 2.2.4.** *Sejam  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável e campos  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$  e  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$ . Se  $X_i$  e  $Y_i$  são  $f$ -relacionados, para  $i = 1, 2$ , então  $[X_1, X_2]$  e  $[Y_1, Y_2]$  são  $f$ -relacionados.*

*Demonstração.* Como  $X_i$  e  $Y_i$  são  $f$ -relacionados, para  $i = 1, 2$ , segue do Lema 2.2.2 que

$$X_i(g \circ f) = Y_i(g) \circ f,$$

para toda  $g \in C^\infty(N)$  e  $i = 1, 2$ . Assim,

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2](g) \circ f &= Y_1(Y_2(g)) \circ f - Y_2(Y_1(g)) \circ f \\ &= X_1(Y_2(g) \circ f) - X_2(Y_1(g) \circ f) \\ &= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= [X_1, X_2](g \circ f). \end{aligned}$$

Como  $g \in C^\infty(N)$  é arbitrária, segue do Lema 2.2.2 que  $[X_1, X_2]$  e  $[Y_1, Y_2]$  são  $f$ -relacionados. ■

**Corolário 2.2.5.** *Se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo, então*

$$[f_*X_1, f_*X_2] = f_*[X_1, X_2],$$

para quaisquer  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ .

**Definição 2.2.6.** *Dizemos que dois campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  são **linearmente independentes** se  $X(p)$  e  $Y(p)$  são vetores linearmente independentes em  $T_pM$ , para todo  $p \in M$ .*

**Teorema 2.2.7.** *Sejam  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$  campos linearmente independentes. Se  $[X_i, X_j] = 0$ , para quaisquer  $1 \leq i, j \leq k$  então, para todo  $p \in M$ , existe uma carta local  $(U, \varphi)$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que*

$$X_i(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para quaisquer  $q \in U$  e  $1 \leq i, j \leq k$ .

A demonstração do Teorema 2.2.7 pode ser encontrada em [13].

## 2.2.2 Distribuições

A teoria das distribuições pode ser vista como uma formulação geométrica da teoria clássica de certos sistemas de equações diferenciais parciais. As soluções são subvariedades da variedade em questão, chamadas de subvariedades integrais. O teorema de Frobenius nos dá condições necessárias e suficientes para a existência de tais subvariedades integrais. Veremos nos seguintes capítulos uma aplicação deste teorema, que consiste em mostrar a existência e unicidade de uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  de uma superfície  $M$ , com estrutura conformal dada, que produz um determinado mapa de Gauss e para a qual a segunda forma fundamental é uma métrica conformal sobre  $M$ .

**Definição 2.2.8.** Uma *distribuição de posto  $k$  em uma variedade diferenciável*  $M$  é uma correspondência  $D$  que associa a cada ponto  $p \in M$  um subespaço vetorial  $D(p) \subset T_p M$  de dimensão  $k$ .

Decorre da Definição 2.2.8 que para qualquer ponto  $p \in M$  existe um aberto  $U \subset M$  contendo  $p$  e  $k$  campos vetoriais  $X_1, \dots, X_k$ , possivelmente definidos em  $U$ , tais que

$$D(q) = \text{span} \{X_1(q), \dots, X_k(q)\}, \quad (2.6)$$

para todo  $q \in U$ . Diremos que uma distribuição  $D$  é *diferenciável* se é possível escolher campos vetoriais  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(U)$  com a propriedade (2.6), em uma vizinhança  $U$  de cada ponto  $p \in M$ .

**Exemplo 2.2.9.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável que admite um campo vetorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  não-nulo em todo ponto. Assim, o campo  $X$  gera uma distribuição diferenciável  $D$  de posto 1, dada por

$$D(p) = \text{span} \{X(p)\},$$

para todo  $p \in M$ .

**Exemplo 2.2.10.** No espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , os campos vetoriais  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , geram uma distribuição diferenciável de posto  $k$ .

**Exemplo 2.2.11.** Em  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , definimos uma distribuição  $D$  pondo, para cada  $p \in M$ ,  $D(p)$  como sendo o subespaço de  $T_p M = \mathbb{R}^n$  ortogonal ao vetor posição  $v_p = \vec{p}$ . Estendendo o vetor  $v_p$  a um campo vetorial  $X_1 \in \mathcal{X}(U)$ , onde  $U \subset M$  é um aberto contendo  $p$ , e aplicando o algoritmo de Gram-Schmidt, obtemos  $n$  campos vetoriais  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(U)$  tais que, para cada  $q \in U$ , os vetores  $X_1(q), \dots, X_n(q)$  formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Disso decorre que  $D$  é localmente gerada pelos campos  $X_2, \dots, X_n \in \mathcal{X}(U)$ . Portanto,  $D$  é uma distribuição diferenciável em  $M$  de posto  $n - 1$ .

**Exemplo 2.2.12.** No espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , considere a distribuição  $D$  definida do seguinte modo: para cada ponto  $p = (a, b, c)$ , defina  $D(p)$  como o plano gerado pelos vetores

$$\frac{\partial}{\partial x}(p) + b \frac{\partial}{\partial z}(p) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}(p).$$

Assim,

$$D(p) = \{(r, s, br)_p; r, s \in \mathbb{R}\},$$

e a equação deste plano é dada por

$$z - c = b(x - a),$$

para cada ponto  $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

**Observação 2.2.13.** Dada uma carta local  $(U, \varphi)$  em  $M^m$ , temos os campos coordenados

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$$

associados a  $\varphi$ , ou seja, para cada  $p \in U$ , os vetores

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$$

formam uma base para  $T_pM$ . Assim, dados  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , podemos representá-los, localmente, como

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad Y|_U = \sum_{i=1}^m Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Obtemos, então, a fórmula local para o colchete de  $X$  e  $Y$  no aberto  $U$ :

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^m \left( X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.7)$$

**Definição 2.2.14.** Uma distribuição  $D$  de posto  $k$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita **involutiva** se para quaisquer campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , com  $X(p), Y(p) \in D(p)$ , para todo  $p \in M$ , tem-se que  $[X, Y](p) \in D(p)$ , para todo  $p \in M$ .

**Exemplo 2.2.15.** No espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{m+n}$ , considere a distribuição  $D$  gerada pelos campos coordenados  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Dados campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{m+n})$ , com  $X(p), Y(p) \in D(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ , podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad Y = \sum_{i=1}^m Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, da fórmula (2.7), obtemos que  $[X, Y](p) \in D(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^{m+n}$ , isto é,  $D$  é involutiva.

**Exemplo 2.2.16.** A distribuição  $D$  em  $\mathbb{R}^3$ , gerada pelos vetores

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad e \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

não é involutiva, pois

$$[X, Y] = e^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

que não é uma combinação linear de  $X$  e  $Y$ .

**Definição 2.2.17.** Seja  $D$  uma distribuição de posto  $k$  em uma variedade diferenciável  $M$ . Uma subvariedade  $N^k \subset M$  é chamada uma **subvariedade integral** para a distribuição  $D$  se

$$D(i(x)) = \text{di}(x)(T_x N),$$

para todo  $x \in N$ , onde  $i : N \rightarrow M$  é a aplicação inclusão. A distribuição  $D$  é chamada **integrável** se cada ponto de  $M$  está contido em uma subvariedade integral da distribuição.

**Exemplo 2.2.18.** No Exemplo 2.2.9, a imagem de qualquer curva integral de  $X$  é uma subvariedade integral de  $D$ . No Exemplo 2.2.11, por cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , a esfera de raio  $\|p\|$ , centrada na origem, é uma subvariedade integral da distribuição  $D$ .

**Proposição 2.2.19.** Toda distribuição integrável é involutiva.

*Demonstração.* Seja  $D$  uma distribuição integrável de posto  $k$  em uma variedade diferenciável  $M$ . Considere dois campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  tais que  $X(p), Y(p) \in D(p)$ , para todo  $p \in M$ . Como  $D$  é integrável segue que, para cada  $p \in M$ , existe uma subvariedade  $N^k \subset M$ , contendo  $p$ , tal que

$$D(i(x)) = di(x)(T_x N),$$

para todo  $x \in N$ . Assim, como a inclusão  $i : N \rightarrow M$  é em particular uma imersão, segue da Proposição 2.2.3 que existem campos  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(N)$  tais que  $\tilde{X}$  é  $i$ -relacionado com  $X$ , e  $\tilde{Y}$  é  $i$ -relacionado com  $Y$ . Pela Proposição 2.2.4, obtemos que  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$  e  $[X, Y]$  são  $i$ -relacionados, isto é,

$$[X, Y] \circ i = di \circ [\tilde{X}, \tilde{Y}].$$

Portanto,

$$[X, Y](q) = [X, Y](i(x)) = di(x) \cdot [\tilde{X}, \tilde{Y}](x) \in D(q).$$

Como  $p \in M$  foi escolhido arbitrariamente, a proposição está provada. ■

O lema seguinte afirma que toda distribuição involutiva é diferenciável.

**Lema 2.2.20.** Seja  $D$  uma distribuição involutiva de posto  $k$  em uma variedade diferenciável  $M^m$ . Então, para cada ponto  $p \in M$ , existem um aberto  $V \subset M$  contendo  $p$  e campos vetoriais  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(V)$  tais que  $X_1(q), \dots, X_k(q)$  geram  $D(q)$ , para todo  $q \in V$ , e  $[X_i, X_j] = 0$ , para quaisquer  $1 \leq i, j \leq k$ .

*Demonstração.* Dado um ponto  $p \in M$ , seja  $(U, \varphi)$  uma carta local em  $M$ , com  $p \in U$  e  $\varphi(p) = 0$ . Seja  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{m-k}$  uma decomposição em soma direta tal que  $d\varphi(p)(D(p)) = \mathbb{R}^k$ . Se  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  denota a projeção sobre o primeiro fator, temos que  $(\pi \circ \varphi)(p) = 0$  e  $d(\pi \circ \varphi)(p)$  transforma  $D(p)$  isomorficamente sobre  $\mathbb{R}^k$ . Segue então, por continuidade, que  $d(\pi \circ \varphi)(q)$  transforma  $D(q)$  isomorficamente sobre  $\mathbb{R}^k$  para todo  $q$  pertencente a uma vizinhança  $V \subset U$  de  $p$ . Assim, para cada  $q \in V$ , existe um único vetor  $X_i(q) \in T_q M$  tal que

$$d(\pi \circ \varphi)(q) \cdot X_i(q) = e_i \in \mathbb{R}^k, \quad (2.8)$$

para cada  $1 \leq i \leq k$ ; basta escolher  $X_i(q) = d(\pi \circ \varphi)^{-1}(q) \cdot e_i$ . Disso decorre que  $X_i \in \mathcal{X}(V)$ . Como  $d(\pi \circ \varphi)(q)$  é isomorfismo, segue que

$$D(q) = \text{span} \{X_1(q), \dots, X_k(q)\},$$

para todo  $q \in V$ . Além disso, segue de (2.8) que  $X_i$  é  $(\pi \circ \varphi)$ -relacionado com  $e_i$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . Assim, pela Proposição 2.2.4,  $[X_i, X_j]$  é  $(\pi \circ \varphi)$ -relacionado com  $[e_i, e_j] = 0$ . Logo,

$$d(\pi \circ \varphi)(q) \cdot [X_i, X_j](q) = 0,$$

para todo  $q \in V$ . Como  $D$  é involutiva, temos que  $[X_i, X_j](q) \in D(q)$ , para todo  $q \in V$ . Portanto,  $[X_i, X_j](q) = 0$  para todo  $q \in V$ , pois  $d(\pi \circ \varphi)(q)$  é isomorfismo. ■

### 2.2.3 O teorema de Frobenius

Estamos agora em condições de provar a recíproca da Proposição 2.2.19, mais conhecida como o Teorema de Frobenius.

**Teorema 2.2.21** (Frobenius). *Toda distribuição involutiva  $D$  de posto  $k$  em uma variedade diferenciável  $M$  é integrável. Mais precisamente, para cada ponto  $p \in M$ , existe uma carta local  $(U, \varphi)$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que para cada  $b \in \mathbb{R}^{m-k}$ , os subconjuntos*

$$S^b = (\pi \circ \varphi)^{-1}(b) \cap U = \{q \in U; \varphi_i(q) = b_i, k+1 \leq i \leq m\}$$

*são subvariedades de  $D$ , onde  $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  é a projeção canônica e  $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ . Além disso, se  $N^k$  é uma subvariedade integral de  $D$ , com  $N$  conexa, então  $N \subset S^b$ , para algum  $b \in \mathbb{R}^{m-k}$ .*

*Demonstração.* Dado  $p \in M$ , segue do Lema 2.2.20 que existem um aberto  $V \subset M$  contendo  $p$  e campos  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(V)$  tais que

$$D(q) = \text{span} \{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$$

e  $[X_i, X_j](q) = 0$ , para todo  $q \in V$ . Como os campos  $X_1, \dots, X_k$  são linearmente independentes em  $V$ , segue do Teorema 2.2.7 que existe uma carta  $(U, \varphi)$  em  $M$ , com  $p \in U \subset V$ , tal que

$$X_i(q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para quaisquer  $q \in U$  e  $1 \leq i \leq k$ . Assim,

$$D(q) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}(q) \right\},$$

para todo  $q \in U$ . Dado  $b \in \mathbb{R}^{m-k}$ , defina  $S^b = (\pi \circ \varphi)^{-1}(b) \cap U$ , como no enunciado. Como  $b$  é valor regular de  $\pi \circ \varphi$ , segue que  $(\pi \circ \varphi)^{-1}(b)$  é subvariedade de  $M$ . Logo,  $S^b$  é subvariedade de  $M$ . Além disso, temos

$$T_q S^b = \ker d(\pi \circ \varphi)(q), \quad (2.9)$$

para todo  $q \in S^b$ . Mostremos que  $T_q S^b = D(q)$ . Como  $\ker d(\pi \circ \varphi)(q)$  tem dimensão  $k$ , basta provar que  $D(q) \subset \ker d(\pi \circ \varphi)(q)$ . Temos:

$$d(\pi \circ \varphi)(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \pi \left( d\varphi(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q) \right) = \pi(e_i) = 0,$$

para todo  $1 \leq i \leq k$ . Isso mostra que  $D(q) \subset \ker d(\pi \circ \varphi)(q)$ , para todo  $q \in S^b$ . Segue então de (2.9) que  $D(q) = T_q S^b$ , para todo  $q \in S^b$ . Portanto, provamos que, para cada  $p \in M$ , existe um aberto  $S^b \subset M$  contendo  $p$  e uma imersão  $i : S^b \rightarrow S^b$  tal que

$$di(q)(T_q S^b) = T_q S^b = D(q),$$

para todo  $q \in S^b$ , ou seja,  $D$  é uma distribuição integrável. Finalmente, seja  $N^k$  uma subvariedade integral de  $D$ , com  $N$  conexa. Então, como

$$di(q)(T_x N) = D(i(x)),$$

para todo  $x \in N$ , temos:

$$\begin{aligned} d(\pi \circ \varphi \circ i)(x)(T_x N) &= \pi(d\varphi(i(x)) \cdot di(x)(T_x N)) \\ &= \pi(d\varphi(i(x))(D(i(x)))) \\ &= d(\pi \circ \varphi)(i(x))(D(i(x))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $x \in N$ . Como  $N$  é conexa, segue que  $(\pi \circ \varphi \circ i)(x) = b \in \mathbb{R}^{m-k}$ , para todo  $x \in N$  e para algum  $b \in \mathbb{R}^{m-k}$ . Logo,  $N \subset S^b$ . ■

Como consequência imediata do Teorema de Frobenius, temos o seguinte resultado:

**Lema 2.2.22.** *Considere  $\Omega$  um aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$ . Sejam  $f_i, g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $i = 1, 2, 3$ , funções complexas tais que*

$$\frac{\partial f_i}{\partial z} = g_i(z).$$

Então, a condição de integrabilidade desse sistema, dada pelo Teorema de Frobenius, é:  $\left(\frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial g_3}{\partial \bar{z}}\right) \in \mathbb{R}^3$ .

## 2.3 Parâmetros isotérmicos

Adotaremos as seguintes notações ao longo deste texto:

- $M$ : Superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ ;
- $TM$ : O fibrado tangente de  $M$ ;
- $\mathcal{X}(M)$ : O espaço vetorial de todos os campos de vetores diferenciáveis em  $M$ , ou seja, o conjunto das aplicações diferenciáveis  $X : M \rightarrow TM$ , com  $X(p) \in T_p M$ ;
- $C^\infty(M)$ : O conjunto das funções reais diferenciáveis definidas em  $M$ ;
- $[\cdot, \cdot]$ : O colchete de Lie de campos em  $M$ .

### 2.3.1 Pares fundamentais

**Definição 2.3.1.** *Uma **métrica riemanniana**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para  $M$  é uma aplicação que associa cada ponto  $p \in M$  a um produto interno<sup>2</sup>  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p M$ , que é diferenciável no seguinte sentido: para quaisquer campos diferenciáveis  $X$  e  $Y$  em  $M$ , a aplicação  $p \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$  de  $M$  em  $\mathbb{R}$  é diferenciável.*

**Exemplo 2.3.2.** *A primeira forma fundamental dada por  $\mathcal{I}_p(v) = \langle v, v \rangle_p$ , para todo  $v \in T_p M$ , isto é,  $\mathcal{I} \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma métrica riemanniana sobre  $M$ . Lembrando que a aplicação dada por*

$$B(v, w) = \langle W_{p,M}(v), w \rangle, \quad \forall v, w \in T_p M$$

*é uma forma bilinear simétrica em  $M$ , porém não é positiva definida.*

<sup>2</sup>Ou, equivalentemente, uma forma bilinear simétrica positiva definida.

Denotaremos por  $\mathcal{Q}(M)$  o conjunto das formas bilineares simétricas em  $M$  e por  $\mathcal{R}(M)$  o conjunto de todas as métricas riemannianas em  $M$ . Recordemos também que a cada forma bilinear simétrica  $B : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , correspondente a uma forma quadrática  $Q$  em  $T_p M$ , com  $p \in M$ , dada por

$$Q(v) = B(v, v), \quad v \in T_p M,$$

determina  $B$  completamente, pois

$$B(u, v) = \frac{1}{2} [Q(u + v) - Q(u) - Q(v)].$$

**Definição 2.3.3.** Denominamos *par fundamental* sobre  $M$  ao par

$$(\mathcal{I}, \mathcal{II}) \in \mathcal{R}(M) \times \mathcal{Q}(M) \equiv \mathcal{P}(M).$$

O conjunto  $\mathcal{P}(M)$  é chamado o *conjunto de pares fundamentais*.

Sejam  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $X : U \rightarrow M$  um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança coordenada  $X(U)$  de  $p = X(x, y)$ . De acordo com o que vimos no capítulo anterior, qualquer vetor tangente  $w$  a  $M$  em  $p \in X(U)$  pode ser expresso unicamente como combinação linear de  $X_x$  e  $X_y$ . Logo, se  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{II}$  são a primeira e a segunda forma fundamental, respectivamente e  $(\mathcal{I}, \mathcal{II}) \in \mathcal{P}(M)$ , temos que

$$\mathcal{I} = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{II} = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2, \quad (2.11)$$

onde  $dx : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $dy : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  são aplicações lineares (1-formas) dadas por:

$$dx(w) = \lambda, \quad dy(w) = \mu, \quad \text{se } w = \lambda X_x + \mu X_y \in T_p M.$$

Além disso,

$$K = K(\mathcal{I}, \mathcal{II}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (2.12)$$

$$H = H(\mathcal{I}, \mathcal{II}) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}, \quad (2.13)$$

são, respectivamente, a curvatura gaussiana e a curvatura média do par  $(\mathcal{I}, \mathcal{II})$ , as quais não dependem das coordenadas escolhidas. A partir destas curvaturas, definimos as **curvaturas principais** do par  $(\mathcal{I}, \mathcal{II})$ , a saber:

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.14)$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.15)$$

Observe que  $\kappa_1 \geq \kappa_2$ .

### 2.3.2 Complexificação de uma forma quadrática

Ao longo deste trabalho, frequentemente utilizaremos ferramentas da análise complexa. Por esta razão, recordaremos a seguir como introduzir uma variável complexa em uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

Chamaremos de *fibrado tangente complexificado* de  $TM$  ao fibrado

$$T^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in \mathcal{X}(M)\}.$$

É possível demonstrar que se  $\{X, Y\}$  é uma base de  $TM$ , então  $\{X, iX, Y, iY\}$  é base de  $T^{\mathbb{C}}M$ , como fibrado real, e  $\{X + iY, X - iY\}$  é base de  $T^{\mathbb{C}}M$ , como fibrado complexo. Em particular, dadas as coordenadas locais  $(X, Y)$  de uma vizinhança coordenada de  $M$ , se considerarmos o parâmetro complexo  $z = X + iY$ , podemos definir os campos locais

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

de modo que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$  seja uma base local de  $T^{\mathbb{C}}M$ . Também podemos definir as 1-formas complexas locais

$$dz = dx + idy$$

e

$$d\bar{z} = dx - idy,$$

que são a base dual de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ . Assim, trabalharemos indistintamente com as coordenadas locais  $(X, Y)$  ou o parâmetro complexo  $z = X + iY$ . Por esta razão, podemos reescrever as expressões (2.10) e (2.11) da seguinte forma:

$$\mathcal{I} = Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{P}d\bar{z}^2, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{II} = Qdz^2 + 2\rho|dz|^2 + \bar{Q}d\bar{z}^2, \quad (2.17)$$

respectivamente, onde

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF), \\ \lambda &= \frac{1}{4}(E + G), \\ Q &= \frac{1}{4}(e - g - 2if), \\ \rho &= \frac{1}{4}(e + g). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Fazendo um simples cálculo em (2.12) e (2.13), podemos comprovar que

$$K = K(\mathcal{I}, \mathcal{II}) = \frac{|Q|^2 - \rho^2}{|P| - \lambda^2}, \quad (2.19)$$

$$H = H(\mathcal{I}, \mathcal{II}) = \frac{P\bar{Q} - 2\lambda\rho + \bar{P}Q}{2(|P| - \lambda^2)}, \quad (2.20)$$

são respectivamente válidas.

### 2.3.3 Parâmetros isotérmicos

Até agora trabalhamos em uma vizinhança coordenada qualquer de uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$ . No entanto, sobre uma superfície dada, podemos obter vários sistemas de coordenadas locais especiais, onde eventualmente pode ser mais fácil trabalhar. Entre os mais comuns, estão os sistemas de coordenadas por parâmetros isotérmicos, os duplamente ortogonais e as redes de Tchebychev. Neste texto, porém, consideraremos apenas os sistemas de coordenadas por parâmetros isotérmicos.

**Definição 2.3.4** (Parâmetros isotérmicos). *Um sistema de coordenadas locais  $X : U \rightarrow M$  em uma vizinhança coordenada de  $p = X(u, v) \in M$ , com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^2$  e com a orientação induzida de  $M$ , diz-se **isotérmico** se, para uma métrica riemanniana dada por  $\mathcal{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ , se verifica:*

$$E = G > 0 \quad e \quad F = 0;$$

ou, em termos do parâmetro complexo  $z = u + iv$ , chamado **parâmetro conformal**, se para uma métrica riemanniana  $\mathcal{I}$  dada pela igualdade (2.16), se verifica:

$$P = 0.$$

**Observação 2.3.5.** *É bem conhecido o fato de que tais parâmetros sempre existem localmente para qualquer métrica riemanniana e que podemos recobrir a superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  para esses tipos de vizinhanças coordenadas. A prova de que existem sistemas isotérmicos de coordenadas para qualquer superfície regular é delicada e não será apresentada neste trabalho. Além disso, se a superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  for vista como uma variedade, a mudança de cartas entre vizinhanças isotérmicas positivamente orientadas é holomorfa. Neste caso, podemos considerar  $M$  como uma superfície de Riemann.*

De agora em diante, ao trabalharmos com parâmetros isotérmicos, sempre o faremos do ponto de vista do parâmetro complexo  $z$ . Assim, enunciaremos a seguinte proposição:

**Proposição 2.3.6.** *Seja  $(\mathcal{I}, \mathcal{II}) \in \mathcal{P}(M)$  e considere um parâmetro  $z$  conformal para  $\mathcal{I}$ , dado pela equação (2.16). Então*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= 2\lambda|dz|^2, \\ \mathcal{II} &= Qdz^2 + 2H\lambda|dz|^2 + \bar{Q}d\bar{z}^2, \\ K &= H^2 - \frac{|Q|^2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

onde  $K$  e  $H$  são, respectivamente, a curvatura gaussiana e a curvatura média do par  $(\mathcal{I}, \mathcal{II})$  e  $Q$  é dada pela igualdade (2.18).

*Demonstração.* Como  $z$  é um parâmetro conformal para  $\mathcal{I}$ , temos da definição 2.3.4, que  $P = 0$ . Logo, da equação (2.16), obtemos:

$$\mathcal{I} = 2\lambda|dz|^2.$$

Por outro lado, da equação (2.20), vem  $H = \frac{\rho}{\lambda}$ . Daí,

$$2\rho = 2H\lambda \quad \text{e} \quad H^2 = \frac{\rho^2}{\lambda^2}. \quad (2.21)$$

Assim, substituindo (2.21) em (2.17) e (2.19), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\mathcal{I} &= Qdz^2 + 2H\lambda|dz|^2 + \bar{Q}d\bar{z}^2 \quad \text{e} \\ K &= H^2 - \frac{|Q|^2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Observação 2.3.7.** *Conforme comentamos anteriormente, sempre é possível conseguir o parâmetro conformal quando temos uma métrica Riemanniana sobre uma superfície. Assim, se  $(\mathcal{I}, \mathcal{I}\mathcal{I}) \in P(M)$ , onde  $\mathcal{I}\mathcal{I}$  é uma métrica Riemanniana, também podemos considerar um parâmetro conforme  $z$  para  $\mathcal{I}\mathcal{I}$ . Neste caso, teríamos  $Q = 0$  em (2.17). Note ainda que, devido à  $\mathcal{I}\mathcal{I}$  ser Riemanniana, temos  $K(\mathcal{I}, \mathcal{I}\mathcal{I}) > 0$ . Assim, se  $z$  é um parâmetro conformal para  $\mathcal{I}\mathcal{I}$ , então isso significa que*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{P}d\bar{z}^2, \\ \mathcal{I}\mathcal{I} &= 2\rho|dz|^2. \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Superfícies em $\mathbb{R}^3$ com estrutura conformal

Apresentaremos a seguir as principais propriedades da aplicação de Gauss de uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$ , particularmente daquelas relacionadas com a geometria da imersão e da estrutura conformal (ou métrica) determinada por sua segunda forma fundamental.

### 3.1 Superfícies com curvatura de Gauss positiva

Sejam  $M$  uma superfície suave e  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão com curvatura de Gauss positiva. Então, para qualquer ponto  $p$  de  $M$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$  tal que todos os pontos de  $V$  estão do mesmo “lado” do plano tangente  $T_pM$ . Um campo suave de vetores normais unitários  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  é obtido atribuindo, a cada ponto  $p$  de  $M$ , um vetor normal unitário do mesmo “lado” de  $V$  em relação a  $T_pM$ . Tal situação é ilustrada na figura a seguir.

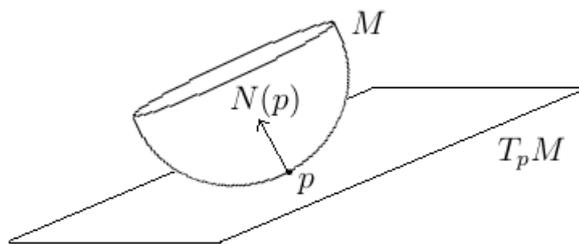


Figura 3.1:  $N(p)$  é o vetor normal unitário no mesmo lado da vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ .

O campo  $N$  orienta  $M$  e faz com que a forma quadrática  $\sigma$ , associada à segunda forma fundamental, definida por

$$\sigma_p(v, w) = \langle -dN_p(v), w \rangle, \quad p \in M, \quad v, w \in T_pM,$$

seja uma métrica (riemanniana) positiva definida. Aqui,  $\langle, \rangle$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ .

A partir de agora,  $M$  será considerada uma superfície de Riemann com estrutura conformal (métrica conformal) induzida por  $\sigma$  e  $\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}$  denotarão os coeficientes de sua segunda forma fundamental.

Dado  $z = u + iv$  um parâmetro conformal para a métrica riemanniana induzida por  $\sigma$ , a primeira e segunda formas fundamentais da imersão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &:= \langle dX, dX \rangle = Pdz^2 + 2\lambda|dz|^2 + \bar{P}\bar{d}z^2, \\ \mathcal{II} &:= \langle -dN, dX \rangle = 2\rho|dz|^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF), \\ \lambda &= \frac{1}{4}(E + G), \\ \rho &= \frac{1}{4}(\hat{e} + \hat{g}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mais do que isso, a estrutura conformal (métrica conformal) de  $M$  é  $\mathcal{II}$ ,  $\lambda$  é uma função real,  $\rho$  é uma função positiva e  $\bar{z}$  denota a conjugada de  $z$ . Também de (2.19) obtemos que a curvatura de Gauss é dado por

$$K = -\frac{\rho^2}{D}, \text{ onde } D = |P|^2 - \lambda^2 < 0. \quad (3.3)$$

Observe que

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, & \hat{e} &= \sigma(X_u, X_u), \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, & 0 &= \sigma(X_u, X_v), \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle, & \hat{g} &= \sigma(X_v, X_v), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $\hat{e} > 0$ ,  $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$  e  $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ . Assim, das equações de Weingarten, obtém-se que

$$N_u = \frac{\hat{e}}{EG - F^2}(-GX_u + FX_v), \quad N_v = \frac{\hat{e}}{EG - F^2}(FX_u + EX_v). \quad (3.5)$$

Por outro lado, observamos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{N} & \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{array}$$

onde  $N$  é o mapa de Gauss (campo suave de vetores normais unitários) em  $M$  dado por

$$N(p) = (N_1(p), N_2(p), N_3(p))$$

e  $\pi$  é a projeção estereográfica usual, que exclui o polo norte e é dada por

$$\pi(x, y, z) = \frac{1}{1 - z}(x, y, z).$$

Agora, denote por  $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  a composição da projeção estereográfica  $\pi$  com  $N$ , isto é

$$g = \frac{1}{1 - N_3}(N_1 + iN_2), \quad (3.6)$$

com  $N = (N_1, N_2, N_3)$ . Chamaremos  $g$  de **mapa de Gauss da imersão**  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

### 3.2 Resultados sobre imersões de superfícies

A fim de elucidar o Teorema principal deste trabalho, vejamos a seguir propriedades da aplicação de Gauss de uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura de Gauss positiva. Utilizando as notações e os resultados vistos na seção anterior, provaremos o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão, com curvatura de Gauss positiva  $K$  e com mapa de Gauss  $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Seja  $z = u + iv$  um parâmetro conformal. Então*

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial z} &= \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial z} &= -i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_3}{\partial z} &= 2 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2},\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde  $X = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$  e por barra denotaremos a conjugação complexa.

*Demonstração.* De (3.6) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} (1 - N_3) - (N_1 + iN_2) \frac{\partial(1 - N_3)}{\partial z}}{(1 - N_3)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left[ \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} - N_3 \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} + \frac{\partial N_3}{\partial z} (N_1 + iN_2) \right],\end{aligned}\tag{3.8}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \frac{\frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} (1 - N_3) - (N_1 + iN_2) \frac{\partial(1 - N_3)}{\partial \bar{z}}}{(1 - N_3)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left[ \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} - N_3 \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial N_3}{\partial \bar{z}} (N_1 + iN_2) \right].\end{aligned}\tag{3.9}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

temos

$$2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} = 2 \overline{\frac{\partial}{\partial z}},$$

isto é,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial}{\partial z}}$ . Também,

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right),$$

então

$$\overline{\frac{\partial X}{\partial z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial u} + i \frac{\partial X}{\partial v} \right) = \frac{\partial X}{\partial \bar{z}},$$

isto é,  $\overline{\frac{\partial X}{\partial z}} = \frac{\partial X}{\partial \bar{z}}$  ou equivalentemente denotamos  $\overline{X_z} = X_{\bar{z}}$ .

Analogamente, obtemos  $\overline{N_z} = N_{\bar{z}}$ . Agora, como

$$K = \frac{\hat{e}^2}{EG - F^2} > 0, \quad \hat{e} > 0 \quad \text{e} \quad EG - F^2 = \|X_u \wedge X_v\|^2 > 0,$$

obtemos de (3.5) as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} (-GX_u + FX_v), \\ N_v &= \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} (FX_u + EX_v). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Porém,

$$2 \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v},$$

$$2 \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial X}{\partial u} + i \frac{\partial X}{\partial v},$$

implicam

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = i \frac{\partial X}{\partial z} - i \frac{\partial X}{\partial \bar{z}},$$

ou equivalentemente denotamos

$$\begin{aligned} X_u &= X_z + X_{\bar{z}}, \\ X_v &= iX_z - iX_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo, de (3.10) e (3.11) temos

$$\begin{aligned} N_z &= \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} (-GX_u + FX_v - iFX_u + iEX_v) \\ &= \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} (-2iFX_{\bar{z}} - GX_u + iEX_v) \\ &= \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} [-2iFX_{\bar{z}} - G(X_z + X_{\bar{z}}) + iE(iX_z - iX_{\bar{z}})]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} N_z &= \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} (-G - E) X_z + \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} (-G + E - 2iF) X_{\bar{z}} \\ &= \frac{-2\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \frac{G + E}{4} \right) X_z + \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \frac{-G + E - 2iF}{4} \right) X_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo, de (3.2) e (3.11) obtém-se

$$N_z = \frac{-2\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} \lambda X_z + \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} P X_{\bar{z}},$$

ou seja,

$$N_z = \frac{-2\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} (\lambda X_z - P X_{\bar{z}}), \quad (3.13)$$

onde  $\lambda = \frac{1}{4}(E + G)$  e  $P = \frac{1}{4}(E - G - 2iF)$ .

Por outro lado, de (3.3) temos

$$D = |P|^2 - \lambda^2 = \frac{(E - G)^2 + 4F^2}{16} - \frac{(E + G)^2}{16} = \frac{-4EG + 4F^2}{16} = \frac{-EG + F^2}{4},$$

logo,  $-4D = EG - F^2 > 0$ .

Daí,

$$\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\frac{\rho}{\sqrt{-D}}}{\sqrt{-4D}} = \frac{\rho}{\sqrt{-D}\sqrt{-4D}} = \frac{\rho}{2\sqrt{-D}\sqrt{-D}} = \frac{\rho}{-2D}.$$

Portanto,

$$\frac{\rho}{D} = \frac{-2\sqrt{K}}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3.14)$$

Assim, de (3.13) e (3.14) obtemos

$$N_z = \frac{\rho}{D} (\lambda X_z - P X_{\bar{z}}). \quad (3.15)$$

Analogamente, obtém-se um resultado para  $N_{\bar{z}}$  dado por

$$N_{\bar{z}} = \frac{\rho}{D} (\lambda X_{\bar{z}} - \bar{P} X_z). \quad (3.16)$$

Seguem de (3.2) e(3.4) que as seguintes igualdades são verdadeiras

$$\begin{aligned} \langle X_z, X_z \rangle &= \frac{1}{4} \langle X_u - iX_v, X_u - iX_v \rangle = \frac{1}{4} (E - 2iF - G) = P, \\ \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle &= \frac{1}{4} \langle X_u - iX_v, X_u + iX_v \rangle = \frac{1}{4} (E + G) = \lambda \end{aligned} \quad (3.17)$$

e ainda

$$\begin{aligned} \langle X_z, -N_z \rangle &= \frac{1}{4} \langle X_u - iX_v, -N_u + iN_v \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\langle X_u, -N_u \rangle + i\langle X_u, N_v \rangle + i\langle X_v, N_u \rangle - \langle X_v, -N_v \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\hat{e} - i\hat{f} - i\hat{f} - \hat{g}). \end{aligned}$$

Como  $z$  é um parâmetro conformal para a segunda forma fundamental  $\mathcal{II}$  (métrica riemanniana), isto é,  $\hat{e} = \hat{g} > 0$  e  $\hat{f} = 0$ . Segue que

$$\langle X_z, -N_z \rangle = \frac{1}{4} (\hat{e} - i\hat{f} - i\hat{f} - \hat{g}) = 0. \quad (3.18)$$

Além disso, como  $N$  é ortogonal a  $X_u$  e  $X_v$  tem-se

$$\langle X_z, N \rangle = \frac{1}{2} \langle X_u - iX_v, N \rangle = \frac{1}{2} (\langle X_u, N \rangle - i \langle X_v, N \rangle) = 0. \quad (3.19)$$

Logo, de (3.18) e (3.19) temos que,  $X_z$  é simultaneamente ortogonal a  $N$  e  $N_z$ . Assim,

$$X_z = \alpha N \wedge N_z, \quad (3.20)$$

para alguma função complexa  $\alpha$ . Considerando o produto interno de  $X_z$  com  $N_z$ , seguem de (3.3), (3.15), (3.16) e (3.17) as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \langle X_z, N_z \rangle &= \langle X_z, \frac{\rho}{D} (\lambda X_z - \bar{P} X_z) \rangle \\ &= \frac{\rho}{D} \lambda \langle X_z, X_z \rangle - \frac{\rho}{D} \bar{P} \langle X_z, X_z \rangle \\ &= \frac{\rho}{D} \lambda^2 - \frac{\rho}{D} P \bar{P} \\ &= \frac{\rho}{D} \underbrace{(\lambda^2 - |P|^2)}_{=-D} \\ &= -\rho. \end{aligned} \quad (3.21)$$

e também

$$\begin{aligned} N_z \wedge N_z &= \frac{\rho}{D} (\lambda X_z - P X_z) \wedge \frac{\rho}{D} (\lambda X_z - \bar{P} X_z) \\ &= \frac{\rho^2}{D^2} \left[ \lambda^2 (X_z \wedge X_z) - \lambda \bar{P} \underbrace{(X_z \wedge X_z)}_{=0} - P \lambda \underbrace{(X_z \wedge X_z)}_{=0} + P \bar{P} (X_z \wedge X_z) \right] \\ &= -\frac{\rho^2}{D^2} (X_z \wedge X_z) \underbrace{(P \bar{P} - \lambda^2)}_{=D} \\ &= K (X_z \wedge X_z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por outro lado, de (3.11) obtém-se

$$X_u \wedge X_v = (X_z + X_z) \wedge (iX_z - iX_z) = -2iX_z \wedge X_z,$$

ou seja,

$$X_z \wedge X_z = \frac{i}{2} (X_u \wedge X_v) \quad (3.23)$$

e também sabemos por definição que  $\langle a \wedge b, c \rangle = \det(a, b, c)$ , para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ . Lembremos que isso é meramente o determinante de uma matriz  $3 \times 3$  cujas colunas (ou linhas) são as componentes dos vetores  $a, b, c$  na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ . Daí,

$$\langle a \wedge b, c \rangle = \langle a, b \wedge c \rangle \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R}^3,$$

então

$$\langle N \wedge N_z, N_z \rangle = \langle N, N_z \wedge N_z \rangle. \quad (3.24)$$

Portanto, de (3.20) até (3.24) obtém-se

$$-\rho = \langle X_z, N_z \rangle = \alpha \langle N \wedge N_z, N_z \rangle = \alpha \langle N, N_z \wedge N_z \rangle = \alpha K \langle N, X_z \wedge X_z \rangle = \frac{i \alpha K}{2} \langle N, X_u \wedge X_v \rangle. \quad (3.25)$$

Considerando  $N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$ , com  $\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{-4D} > 0$ , pois  $N(p)$  é o vetor normal unitário, no mesmo lado da vizinhança  $V$  de  $p \in M$  em relação a  $T_p M$  (ver figura (4.1)). Assim, substituindo em (3.25) tem-se,

$$\begin{aligned}
-\rho &= \frac{i \alpha K}{2} \langle N, X_u \wedge X_v \rangle \\
&= \frac{i \alpha K}{2} \left\langle \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}, X_u \wedge X_v \right\rangle \\
&= \frac{i \alpha K}{2} \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_u \wedge X_v \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{i \alpha K}{2} \|X_u \wedge X_v\| \\
&= i \alpha K \sqrt{-D},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{i}{K} \underbrace{\left( \frac{\rho}{\sqrt{-D}} \right)}_{=\sqrt{K}} = \frac{i}{K} \sqrt{K} = \frac{i}{\sqrt{K}}, \quad (3.26)$$

já que  $K = -\frac{\rho^2}{D} > 0$ . Logo, de (3.20) e (3.26) temos que

$$X_z = \frac{i}{\sqrt{K}} N \wedge N_z. \quad (3.27)$$

Agora, vamos expressar o segundo e terceiro termos dentro dos colchetes em (3.8) usando a expressão (3.27), que acabamos de mostrar acima. Assim, como  $X = (X_1, X_2, X_3)$  segue de (3.27) que

$$\frac{\partial}{\partial z} X_1 = \frac{i}{\sqrt{K}} (N_2 N_{3z} - N_3 N_{2z}),$$

$$i \frac{\partial}{\partial z} X_1 = \frac{i^2}{\sqrt{K}} (N_3 N_{1z} - N_1 N_{3z}),$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} (X_1 + iX_2) &= \frac{i}{\sqrt{K}} N_2 N_{3z} - \frac{i}{\sqrt{K}} N_3 N_{2z} - \frac{1}{\sqrt{K}} N_3 N_{1z} + \frac{1}{\sqrt{K}} N_1 N_{3z} \\
&= \frac{N_{3z}}{\sqrt{K}} (N_1 + iN_2) - \frac{N_3}{\sqrt{K}} (N_{1z} + iN_{2z}).
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\sqrt{K} \frac{\partial}{\partial z} (X_1 + iX_2) = \frac{\partial N_3}{\partial z} (N_1 + iN_2) - N_3 \frac{\partial}{\partial z} (N_1 + iN_2). \quad (3.28)$$

De maneira análoga, temos que

$$\begin{aligned}
X_{\bar{z}} &= \frac{-i}{\sqrt{K}} N \wedge N_{\bar{z}} \quad \text{e} \\
\sqrt{K} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (X_1 + iX_2) &= -\frac{\partial N_3}{\partial \bar{z}} (N_1 + iN_2) + N_3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (N_1 + iN_2). \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (3.28) e (3.29) em (3.8) e (3.9) respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left[ \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial z} + \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial z} (X_1 + iX_2) \right], \\ \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{(1 - N_3)^2} \left[ \frac{\partial(N_1 + iN_2)}{\partial \bar{z}} - \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (X_1 + iX_2) \right].\end{aligned}\quad (3.30)$$

Como  $\langle N, N \rangle = 1$ , podemos reobter  $N$  a partir de  $g$ , ou seja, de (3.6) obtemos

$$N = (N_1, N_2, N_3) = \frac{1}{1 + g\bar{g}} (g + \bar{g}, -i(g - \bar{g}), -1 + g\bar{g}). \quad (3.31)$$

Note que,  $1 - N_3 = 1 + \frac{1 - g\bar{g}}{1 + g\bar{g}} = \frac{2}{1 + g\bar{g}}$ . Dessa forma,  $(1 - N_3)^2 = \frac{4}{(1 + g\bar{g})^2}$ .

Também,  $N_1 + iN_2 = \frac{g + \bar{g}}{1 + g\bar{g}} + \frac{g - \bar{g}}{1 + g\bar{g}}$ . Daí,

$$(N_1 + iN_2)_z = \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_z \quad \text{e} \quad (N_1 + iN_2)_{\bar{z}} = \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_{\bar{z}}.$$

Então, (3.30) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\frac{4g_z}{(1 + g\bar{g})^2} &= \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_z + \sqrt{K} (X_1 + iX_2)_z, \\ \frac{4g_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2} &= \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_{\bar{z}} - \sqrt{K} (X_1 + iX_2)_{\bar{z}}.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Observe que

$$\begin{aligned}\left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_z &= \frac{2g_z(1 + g\bar{g}) - 2g(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)}{(1 + g\bar{g})^2} = \frac{2g_z - 2g^2\bar{g}_z}{(1 + g\bar{g})^2}, \\ \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_{\bar{z}} &= \frac{2g_{\bar{z}}(1 + g\bar{g}) - 2g(g_{\bar{z}}\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}})}{(1 + g\bar{g})^2} = \frac{2g_{\bar{z}} - 2g^2\bar{g}_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{4g_z}{(1 + g\bar{g})^2} - \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_z &= \frac{4g_z}{(1 + g\bar{g})^2} - \frac{2g_z - 2g^2\bar{g}_z}{(1 + g\bar{g})^2} = 2\frac{g_z + g^2\bar{g}_z}{(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{4g_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2} - \left( \frac{2g}{1 + g\bar{g}} \right)_{\bar{z}} &= \frac{4g_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2} - \frac{2g_{\bar{z}} - 2g^2\bar{g}_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2} = 2\frac{g_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Assim, de (3.32) e (3.33) obtém-se

$$2\frac{g_z + g^2\bar{g}_z}{(1 + g\bar{g})^2} = \sqrt{K} (X_1 + iX_2)_z, \quad (3.34)$$

$$2\frac{g_{\bar{z}} + g^2\bar{g}_{\bar{z}}}{(1 + g\bar{g})^2} = -\sqrt{K} (X_1 + iX_2)_{\bar{z}}. \quad (3.35)$$

Finalmente, as duas primeiras equações de (3.7) são obtidas de (3.34) e da equação conjugada de (3.35) dada por

$$2\frac{\bar{g}_z + \bar{g}^2 g_z}{(1 + g\bar{g})^2} = -\sqrt{K} (X_1 - iX_2)_z, \quad (3.36)$$

isto é, substraíndo (3.36) de (3.34) obtemos

$$2\frac{(1 - \bar{g}^2)g_z + (g^2 - 1)\bar{g}_z}{(1 + g\bar{g})^2} = 2\sqrt{K} X_{1z},$$

ou seja,

$$\frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}. \quad (3.37)$$

Também, se somamos (3.34) e (3.36) obtemos

$$2\frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (g^2 + 1)\bar{g}_z}{(1 + g\bar{g})^2} = 2i\sqrt{K} X_{2z},$$

ou seja,

$$\frac{\partial X_2}{\partial z} = -i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}. \quad (3.38)$$

Por outro lado, vamos obter a terceira equação de (3.7). Assim, sabemos que

$$\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0 \Leftrightarrow X_{1u}N_1 + X_{2u}N_2 + X_{3u}N_3 = X_{1v}N_1 + X_{2v}N_2 + X_{3v}N_3 = 0$$

(pois  $N$  é o mapa de Gauss em  $M$ ). Logo,

$$X_{3u} = -\frac{N_1 X_{1u} + N_2 X_{2u}}{N_3}, \quad X_{3v} = -\frac{N_1 X_{1v} + N_2 X_{2v}}{N_3}, \quad (3.39)$$

segue de (3.31) e (3.39) que

$$\begin{aligned} X_{3z} &= \frac{1}{2} (X_{3u} - iX_{3v}) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{N_1 X_{1u} + N_2 X_{2u}}{N_3} + i \frac{N_1 X_{1v} + N_2 X_{2v}}{N_3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-N_1 (X_{1u} - iX_{1v}) - N_2 (X_{2u} - iX_{2v})}{N_3} \right) \\ &= -\frac{N_1}{N_3} \underbrace{\left[ \frac{1}{2} (X_{1u} - iX_{1v}) \right]}_{=X_{1z}} - \frac{N_2}{N_3} \underbrace{\left[ \frac{1}{2} (X_{2u} - iX_{2v}) \right]}_{=X_{2z}} \\ &= -\frac{N_1}{N_3} X_{1z} - \frac{N_2}{N_3} X_{2z} \\ &= -\frac{g + \bar{g}}{-1 + g\bar{g}} X_{1z} + i \frac{g - \bar{g}}{-1 + g\bar{g}} X_{2z} \\ &= \frac{g + \bar{g}}{1 - g\bar{g}} X_{1z} - i \frac{g - \bar{g}}{1 - g\bar{g}} X_{2z}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dessa maneira, substituindo (3.37) e (3.38) em (3.40) obtém-se

$$\begin{aligned}
X_{3z} &= \frac{g + \bar{g}}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2(1 - g\bar{g})} [(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z] \\
&\quad + \frac{i(\bar{g} - g)(-i)}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2(1 - g\bar{g})} [(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \left[ \frac{(g - g\bar{g}^2 + \bar{g} - \bar{g}^3)g_z - (g - g^3 + \bar{g} - \bar{g}g^2)\bar{g}_z}{(1 - g\bar{g})} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \left[ \frac{(\bar{g} + \bar{g}^3 - g - g\bar{g}^2)g_z + (\bar{g} + \bar{g}g^2 - g - g^3)\bar{g}_z}{(1 - g\bar{g})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \left[ \frac{(2\bar{g} - 2g\bar{g}^2)g_z + (2\bar{g}g^2 - 2g)\bar{g}_z}{(1 - g\bar{g})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \left[ \frac{2\bar{g}g_z(1 - g\bar{g}) + 2g\bar{g}_z(1 - g\bar{g})}{(1 - g\bar{g})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \left[ \frac{(1 - g\bar{g})(2\bar{g}g_z - 2g\bar{g}_z)}{(1 - g\bar{g})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} (2\bar{g}g_z - 2g\bar{g}_z),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial X_3}{\partial z} = 2 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \quad (3.41)$$

Portanto, de (3.37), (3.38) e (3.41) obtemos a expressão (3.7). Isto completa a prova do Teorema (3.2.1).  $\blacksquare$

O corolário a seguir apresenta uma outra forma de expressar a primeira e segunda forma fundamental da imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $M$  é uma superfície com estrutura conformal proveniente de sua segunda forma fundamental.

**Corolário 3.2.2.** *Com a notação acima, a primeira e segunda formas fundamentais da imersão são dados, respectivamente, por*

$$\mathcal{I} = \frac{4}{K(1 + g\bar{g})^2} [-g_z\bar{g}_z dz^2 + (g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_z) |dz|^2 - g_z\bar{g}_z d\bar{z}^2], \quad (3.42)$$

$$\mathcal{II} = 4 \frac{|g_z|^2 - |g_z|^2}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} |dz|^2 \quad (3.43)$$

*Demonstração.* Segue de (3.17) que  $\langle X_z, X_z \rangle = P$ , pois  $z$  é parâmetro conformal. Além disso, como  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , segue do Teorema 3.2.1 que

$$\begin{aligned}
X_{1z}X_{1z} &= \frac{1}{K(1 + g\bar{g})^4} [(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z]^2, \\
X_{2z}X_{2z} &= \frac{(-i)^2}{K(1 + g\bar{g})^4} [(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z]^2, \\
X_{3z}X_{3z} &= \frac{4}{K(1 + g\bar{g})^4} [\bar{g}g_z - g\bar{g}_z]^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P &= X_{1z}X_{1z} + X_{2z}X_{2z} + X_{3z}X_{3z} \\
&= \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} \left\{ [(1-\bar{g}^2)^2 - (1+\bar{g}^2)^2] g_z^2 + [(1-g^2)^2 - (1+g^2)^2] \bar{g}_z^2 \right\} + \\
&\quad - \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} \left\{ 2g_z\bar{g}_z(1-g^2-\bar{g}^2+\bar{g}^2g^2) + 2g_z\bar{g}_z(1+g^2+\bar{g}^2+\bar{g}^2g^2) \right\} + \\
&\quad + X_{3z}X_{3z}.
\end{aligned}$$

Como  $(1-\bar{g}^2)^2 - (1+\bar{g}^2)^2 = -4\bar{g}^2$  e  $(1-g^2)^2 - (1+g^2)^2 = -4g^2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} (-4\bar{g}^2g_z^2 - 4g\bar{g}_z^2 - 4g_z\bar{g}_z - 4g_z\bar{g}_z\bar{g}^2g^2) + \\
&\quad + \frac{4}{K(1+g\bar{g})^4} (\bar{g}^2g_z^2 + g^2\bar{g}_z^2 - 2\bar{g}g_zg\bar{g}_z) \\
&= \frac{-4}{K(1+g\bar{g})^4} (g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_z\bar{g}^2g^2 + 2\bar{g}g_zg\bar{g}_z) \\
&= \frac{-4}{K(1+g\bar{g})^4} (g_z\bar{g}_z \underbrace{(1+\bar{g}^2g^2+2\bar{g}g)}_{=(1+g\bar{g})^2}) \\
&= \frac{-4}{K(1+g\bar{g})^2} \left[ \frac{g_z\bar{g}_z(1+g\bar{g})^2}{(1+g\bar{g})^2} \right] \\
&= \frac{-4}{K(1+g\bar{g})^2} g_z\bar{g}_z.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que  $X_{\bar{z}} = (X_{1\bar{z}}, X_{2\bar{z}}, X_{3\bar{z}})$ . Calculando  $X_{1\bar{z}}$ ,  $X_{2\bar{z}}$  e  $X_{3\bar{z}}$  a partir de  $X_{1z}$ ,  $X_{2z}$  e  $X_{3z}$ , respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
X_{1\bar{z}} &= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} [(1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z], \\
X_{2\bar{z}} &= \frac{i}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} [(1+g^2)\bar{g}_z + (1+\bar{g}^2)g_z], \\
X_{3\bar{z}} &= \frac{2}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} [g\bar{g}_z - \bar{g}g_z].
\end{aligned}$$

Dessa forma, para calcular  $\lambda = \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle$ , temos:

$$\begin{aligned}
X_{1z}X_{1\bar{z}} &= \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} [(1-\bar{g}^2)g_z(1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)^2g_zg_z] + \\
&\quad + \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} [-(1-g^2)^2\bar{g}_z\bar{g}_z + (1-g^2)(1-\bar{g}^2)\bar{g}_zg_z], \\
X_{2z}X_{2\bar{z}} &= \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} [(1+\bar{g}^2)g_z(1+g^2)\bar{g}_z + (1+\bar{g}^2)g_zg_z] + \\
&\quad + \frac{1}{K(1+g\bar{g})^4} [(1+g^2)\bar{g}_z\bar{g}_z + (1+g^2)(1+\bar{g}^2)\bar{g}_zg_z], \\
X_{3z}X_{3\bar{z}} &= \frac{4}{K(1+g\bar{g})^4} [\bar{g}g_z\bar{g}_z - \bar{g}^2g_zg_z - g^2\bar{g}_z\bar{g}_z + \bar{g}g\bar{g}_zg_z].
\end{aligned}$$

Como

$$(1 - \bar{g}^2)(1 - g^2) = 1 - g^2 - \bar{g}^2 + \bar{g}^2 g^2 \quad (3.44)$$

e

$$(1 + \bar{g}^2)(1 + g^2) = 1 + g^2 + \bar{g}^2 + \bar{g}^2 g^2, \quad (3.45)$$

somando (3.44) e (3.45), obtemos

$$(1 - \bar{g}^2)(1 - g^2) + (1 + \bar{g}^2)(1 + g^2) = 2(1 + \bar{g}^2 g^2). \quad (3.46)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda &= X_{1z}X_{1\bar{z}} + X_{2z}X_{2\bar{z}} + X_{3z}X_{3\bar{z}} \\ &= \frac{1}{K(1 + g\bar{g})^4} [2(1 + \bar{g}^2 g^2)g_z \bar{g}_{\bar{z}} + 4\bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} + 4g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} + 2(1 + \bar{g}^2 g^2)\bar{g}_z g_{\bar{z}}] \\ &\quad + \frac{4}{K(1 + g\bar{g})^4} [\bar{g}g g_z \bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} - g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g \bar{g}_z g_{\bar{z}}] \\ &= \frac{1}{K(1 + g\bar{g})^4} \left[ 2g_z \bar{g}_{\bar{z}} \underbrace{(1 + \bar{g}^2 g^2 + 2\bar{g}g)}_{(1+g\bar{g})^2} + 4\bar{g}^2(1 - g_z g_{\bar{z}}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{K(1 + g\bar{g})^4} [4g^2(1 - \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}}) + 2\bar{g}_z g_{\bar{z}}(1 + \bar{g}^2 g^2 + 2g\bar{g})] \\ &= \frac{2}{K(1 + g\bar{g})^2(1 + g\bar{g})^2} [(\bar{g}_z g_{\bar{z}} + g_z \bar{g}_{\bar{z}})(1 + g\bar{g})^2] \\ &= \frac{2}{K(1 + g\bar{g})^2} [\bar{g}_z g_{\bar{z}} + g_z \bar{g}_{\bar{z}}] \\ &= \frac{2}{K(1 + g\bar{g})^2} (|g_{\bar{z}}|^2 + |g_z|^2). \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que  $-\rho = \langle X_z, N_{\bar{z}} \rangle$  e que

$$\begin{aligned} X_{1z}N_{1\bar{z}} &= \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^4} [(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z] [(1 - \bar{g}^2)g_{\bar{z}} + (1 - g^2)\bar{g}_{\bar{z}}], \\ X_{2z}N_{2\bar{z}} &= \frac{(-i)(-i)}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^4} [(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z] [(1 + \bar{g}^2)g_{\bar{z}} - (1 + g^2)\bar{g}_{\bar{z}}], \\ X_{3z}N_{3\bar{z}} &= \frac{4}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^4} [\bar{g}g_z - g\bar{g}_z] [g_{\bar{z}}\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}}]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle X_z, N_{\bar{z}} \rangle &= X_{1z}N_{1\bar{z}} + X_{2z}N_{2\bar{z}} + X_{3z}N_{3\bar{z}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ (1-\bar{g}^2)^2 g_z g_{\bar{z}} + (1-\bar{g}^2)(1-g^2) g_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ -(1-g^2)(1-\bar{g}^2) \bar{g}_z g_{\bar{z}} - (1-g^2)^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] + \\
&- \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ (1+\bar{g}^2)^2 g_z g_{\bar{z}} - (1+\bar{g}^2)(1+g^2) g_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ (1+g^2)(1+\bar{g}^2) \bar{g}_z g_{\bar{z}} - (1+g^2)^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] + \\
&+ \frac{4}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ \bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} + \bar{g} g g_z \bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g} g \bar{g}_z g_{\bar{z}} - g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ (-4\bar{g}^2) g_z g_{\bar{z}} + 2(1+\bar{g}^2 g^2) g_z \bar{g}_{\bar{z}} - 2(1+\bar{g}^2 g^2) \bar{g}_z g_{\bar{z}} + (4g^2) \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] + \\
&+ \frac{4}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ \bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} + \bar{g} g g_z \bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g} g \bar{g}_z g_{\bar{z}} - g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ 2g_z \bar{g}_{\bar{z}} \underbrace{(1+\bar{g}^2 g^2 + 2\bar{g}g)}_{(1+g\bar{g})^2} - 2\bar{g}_z g_{\bar{z}} (1+\bar{g}^2 g^2 + 2\bar{g}g) \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 (1+g\bar{g})^2} \left[ (1+g\bar{g})^2 (g_z \bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}_z g_{\bar{z}}) \right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} (|g_z|^2 - |g_{\bar{z}}|^2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} (|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2),$$

como queríamos. ■

**Teorema 3.2.3.** *Se  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão com curvatura de Gauss positiva  $K$ , então o mapa de Gauss  $g$  satisfaz*

$$4K \left( g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1+g\bar{g}} \right) = K_z g_{\bar{z}} + K_{\bar{z}} g_z. \quad (3.47)$$

*Além disso, a curvatura de Gauss é determinada pelo mapa de Gauss, a menos de multiplicação por constantes positivas.*

*Demonstração.* Como

$$(X_{iz})_{\bar{z}} = (X_{i\bar{z}})_z, \quad i = 1, 2, 3,$$

é equivalente a

$$(X_{iz})_{\bar{z}} - (X_{i\bar{z}})_z = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3,$$

consideremos inicialmente o caso  $i = 1$ , isto é

$$(X_{1z})_{\bar{z}} - (X_{1\bar{z}})_z = 0.$$

Segue do Teorema 3.2.1 que

$$(X_{1z})_{\bar{z}} = \left[ \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} \left( (1-\bar{g}^2)g_z - (1-g^2)\bar{g}_z \right) \right]_{\bar{z}}$$

e

$$(X_{1\bar{z}})_z = \left[ \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2} \left( (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right) \right]_z.$$

Dessa forma, abrindo as expressões de  $(X_{1z})_{\bar{z}}$  e  $(X_{1\bar{z}})_z$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (X_{1z})_{\bar{z}} &= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ (1-\bar{g}^2)g_z - (1-g^2)\bar{g}_z \right]_{\bar{z}} \sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 - \\ &\quad \left( (1-\bar{g}^2)g_z - (1-g^2)\bar{g}_z \right) \left[ \sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 \right]_{\bar{z}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ -2g\bar{g}_z g_z + (1-\bar{g}^2)g_{z\bar{z}} + 2g\bar{g}_z \bar{g}_z - (1-g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} \right] \sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 - \\ &\quad \left( (1-\bar{g}^2)g_z - (1-g^2)\bar{g}_z \right) \left[ \frac{K_{\bar{z}}}{2\sqrt{K}}(1+g\bar{g})^2 + 2\sqrt{K}(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)(1+g\bar{g}) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{aligned} (X_{1\bar{z}})_z &= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right]_z \sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 - \\ &\quad \left( (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right) \left[ \sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 \right]_z \\ &= \frac{1}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} \left[ -2g\bar{g}_z \bar{g}_z + (1-g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} + 2g\bar{g}_z g_z - (1-\bar{g}^2)g_{z\bar{z}} \right] \sqrt{K}(1+g\bar{g})^2 - \\ &\quad \left( (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right) \left[ \frac{K_z}{2\sqrt{K}}(1+g\bar{g})^2 + 2\sqrt{K}(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)(1+g\bar{g}) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Subtraindo (3.49) de (3.48), obtemos uma expressão equivalente a  $(X_{1z})_{\bar{z}} - (X_{1\bar{z}})_z = 0$ , a saber:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2K\sqrt{K}(1+g\bar{g})^4} 2K(1+g\bar{g})^2 (g_z\bar{g}_z(-2\bar{g}+2g) - 2(1-g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} + \\ &+ g_z\bar{g}_z(2g-2\bar{g}) + 2(1-\bar{g}^2)g_{z\bar{z}})(1+g\bar{g})^2 (K_{\bar{z}} [(1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z] + \\ &\quad + K_z [(1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z]) + 4K(1+g\bar{g})(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z) \\ &\quad \left( (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right) + (g_z\bar{g} + g\bar{g}_z) \left( (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (3.50) por  $2K\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} &2K \left[ 2(1-\bar{g}^2)g_{z\bar{z}} - 2(1-g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} + (2g-2\bar{g})(g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_z) \right] + \\ &K_z \left[ (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right] + K_{\bar{z}} \left[ (1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z \right] + \\ &\frac{4K}{1+g\bar{g}} (g_z\bar{g}_z(1-g^2) - g_z\bar{g}(1-\bar{g}^2)g_z + g\bar{g}_z(1-g^2)\bar{g}_z - g\bar{g}_z(1-\bar{g}^2)g_z + \\ &g_z\bar{g}\bar{g}_z(1-g^2) - g_z\bar{g}(1-\bar{g}^2)g_z + g\bar{g}_z(1-g^2)\bar{g}_z - g\bar{g}_z(1-\bar{g}^2)g_z) = 0, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
& 4K [(1 - \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} - (1 - g^2)\bar{g}_{z\bar{z}}] + 4K(g - \bar{g}) [g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_{\bar{z}}] + \\
& K_z [(1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z] + K_{\bar{z}} [(1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z] + \\
& \frac{4K}{1 + g\bar{g}} [\bar{g}(1 - g^2)(g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_{\bar{z}}) - g(1 - \bar{g}^2)(\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}})] + \\
& \frac{4K}{1 + g\bar{g}} [-2\bar{g}(1 - \bar{g}^2)g_z g_{\bar{z}} + 2g(1 - g^2)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}}] = 0. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
& \bar{g}(1 - g^2)(g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_{\bar{z}}) - g(1 - \bar{g}^2)(\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}}) = \\
& (\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}})(\bar{g} - \bar{g}g^2 - g + g\bar{g}^2) = \\
& (\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}}) [\bar{g}(1 + g\bar{g}) - g(1 + g\bar{g})] = \\
& (\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}}) [-(1 + g\bar{g})(g - \bar{g})].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{g}(1 - g^2)(g_z\bar{g}_z + g_z\bar{g}_{\bar{z}}) - g(1 - \bar{g}^2)(\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}}) = -(1 + g\bar{g})(g - \bar{g})(\bar{g}_z g_z + \bar{g}_z g_{\bar{z}}). \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.51), obtemos

$$\begin{aligned}
& 4K [(1 - \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} - (1 - g^2)\bar{g}_{z\bar{z}}] + K_z [(1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z] + \\
& K_{\bar{z}} [(1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z] + \frac{8K}{1 + g\bar{g}} [-\bar{g}(1 - \bar{g}^2)g_z g_{\bar{z}} + g(1 - g^2)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}}] = 0,
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \frac{8K}{1 + g\bar{g}} ((-\bar{g} - \bar{g}^3)g_z g_{\bar{z}} + (g - g^3)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}}) + K_z ((1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z) + \\
& K_{\bar{z}} ((1 - g^2)\bar{g}_z - (1 - \bar{g}^2)g_z) + 4K ((1 - \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} - (1 - g^2)\bar{g}_{z\bar{z}}) = 0. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Para os casos  $i = 2$  e  $i = 3$  obtemos, de maneira análoga à anterior e mediante às adaptações necessárias, as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
& \frac{8K}{1 + g\bar{g}} ((\bar{g} + \bar{g}^3)g_z g_{\bar{z}} + (g + g^3)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}}) + K_z ((1 + g^2)\bar{g}_z + (1 + \bar{g}^2)g_z) + \\
& K_{\bar{z}} ((1 + g^2)\bar{g}_z + (1 + \bar{g}^2)g_z) - 4K ((1 + \bar{g}^2)g_{z\bar{z}} + (1 + g^2)\bar{g}_{z\bar{z}}) = 0 \quad (3.54)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{8K}{1 + g\bar{g}} (-\bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} + g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}}) + K_z (g\bar{g}_z - \bar{g}g_{\bar{z}}) + \\
& K_{\bar{z}} (g\bar{g}_z - \bar{g}g_{\bar{z}}) + 4K (\bar{g}g_{z\bar{z}} - g\bar{g}_{z\bar{z}}) = 0, \quad (3.55)
\end{aligned}$$

respectivamente.

Se de (3.53) subtrairmos (3.54), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{8K}{1+g\bar{g}} \left( (-2\bar{g})g_z g_{\bar{z}} + (-2g^3)\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right) + K_z \left( (-2g^2)\bar{g}_{\bar{z}} - 2g_{\bar{z}} \right) + \\ K_{\bar{z}} \left( (-2g^2)\bar{g}_z - 2g_z \right) + 4K \left( 2g_{z\bar{z}} + (2g^2)\bar{g}_{z\bar{z}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por outro lado, multiplicando (3.55) por  $2g$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{16Kg}{1+g\bar{g}} \left( -\bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} + g^2 \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \right) + 2gK_z (g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_{\bar{z}}) + \\ 2gK_{\bar{z}} (g\bar{g}_z - \bar{g}g_z) + 8Kg(\bar{g}g_{z\bar{z}} - g\bar{g}_{z\bar{z}}) = 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Somando (3.56) e (3.57), vem

$$\begin{aligned} -\frac{16Kg}{1+g\bar{g}} \bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} - 2K_z g_{\bar{z}} - 2K_{\bar{z}} g_z + 8Kg_{z\bar{z}} + \\ -\frac{16Kg}{1+g\bar{g}} g\bar{g}^2 g_z g_{\bar{z}} - 2K_z g\bar{g}g_{\bar{z}} - 2K_{\bar{z}} g\bar{g}g_z + 8Kg\bar{g}g_{z\bar{z}} = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Logo,

$$-\frac{16K}{1+g\bar{g}} g_z g_{\bar{z}} \bar{g}(1+g\bar{g}) + 8Kg_{z\bar{z}}(1+g\bar{g}) = 2K_z(g_{\bar{z}} + g\bar{g}g_{\bar{z}}) + 2K_{\bar{z}}(g_z + g\bar{g}g_z).$$

Daí,

$$2(1+g\bar{g}) \left( 4Kg_{z\bar{z}} - \frac{8K}{1+g\bar{g}} g_z g_{\bar{z}} \bar{g} \right) = 2K_z g_{\bar{z}}(1+g\bar{g}) + 2K_{\bar{z}} g_z(1+g\bar{g}),$$

cuja simplificação nos fornece

$$4K \left( g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1+g\bar{g}} \right) = K_z g_{\bar{z}} + K_{\bar{z}} g_z,$$

que é a expressão em (3.47).

Observe que a equação conjugada de (3.47) é dada por

$$4 \left( \bar{g}_{z\bar{z}} - 2\bar{g}_{\bar{z}} \bar{g}_z \frac{g}{1+g\bar{g}} \right) = \frac{K_{\bar{z}}}{K} \bar{g}_z + \frac{K_z}{K} \bar{g}_{\bar{z}}. \quad (3.59)$$

Reescrevendo (3.47) e (3.59), obtemos, respectivamente:

$$(\log K)_z g_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} g_z = 4 \left( g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1+g\bar{g}} \right) \quad (3.60)$$

$$(\log K)_z \bar{g}_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} \bar{g}_z = 4 \left( \bar{g}_{z\bar{z}} - 2\bar{g}_{\bar{z}} \bar{g}_z \frac{g}{1+g\bar{g}} \right) \quad (3.61)$$

Como  $\rho = \frac{2(|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2)}{\sqrt{K}(1+g\bar{g})^2}$  é positivo, segue que  $|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0$ .

Multiplicando (3.60) por  $\bar{g}_z$  e (3.61) por  $g_z$ , vem

$$(\log K)_z \bar{g}_z g_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} \bar{g}_z g_z = 4 \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - 2\bar{g}_z g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1+g\bar{g}} \right), \quad (3.62)$$

$$(\log K)_z g_z \bar{g}_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} g_z \bar{g}_z = 4 \left( g_z \bar{g}_{z\bar{z}} - 2g_z \bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \frac{g}{1+g\bar{g}} \right). \quad (3.63)$$

Subtraindo (3.63) de (3.62), obtemos

$$(\log K)_z (\bar{g}_z g_{\bar{z}} - g_z \bar{g}_{\bar{z}}) = 4 \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{\bar{g}_z g - g_z \bar{g}}{1+g\bar{g}} \right). \quad (3.64)$$

Como  $\bar{g}_z g_{\bar{z}} = |g_{\bar{z}}|^2$  e  $g_z \bar{g}_{\bar{z}} = |g_z|^2$ , substituindo essas igualdades em (3.64), obtemos

$$(\log K)_z = \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{\bar{g}_z g - g_z \bar{g}}{1+g\bar{g}} \right). \quad (3.65)$$

Portanto,  $K$  é determinado pela expressão (3.65), o que significa dizer que  $g$  determina  $K$ , a menos de multiplicação por constantes positivas. ■

**Observação 3.2.4.** A equação (3.65) é equivalente a (3.47). Mais do que isso, (3.47) é satisfeita se, e somente se, (3.53), (3.54) e (3.55) são satisfeitas.

**Observação 3.2.5.** No teorema 3.2.3 temos que (3.47) é a condição de integrabilidade do sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial z} &= \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial z} &= -i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_3}{\partial z} &= 2 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \end{aligned}$$

onde  $X = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$ , dado pelo teorema 3.2.1. Pois, denotando  $X_z = (X_{1z}, X_{2z}, X_{3z})$  por  $\partial_z$ , temos que (3.47) é satisfeita se, e somente se, (3.53), (3.54) e (3.55) são satisfeitas, que é equivalente a

$$(X_{iz})_{\bar{z}} - (X_{i\bar{z}})_z = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3,$$

ou seja,

$$(X_z)_{\bar{z}} - (X_{\bar{z}})_z = 0,$$

Daí,

$$[\partial_z, \partial_{\bar{z}}] = 0 \quad (3.66)$$

isto é, o colchete de Lie dos campos vetoriais  $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$  é zero.

Assim, temos  $D : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma distribuição de posto 2 na superfície (variedade)  $M$ , dada por  $D(p) = \text{span} \{ \partial_z, \partial_{\bar{z}} \}$ , onde  $D(p) \subset T_p M$  é um subespaço vetorial de dimensão 2 e  $z$  é um parâmetro conformal para a segunda forma fundamental  $\mathcal{II}$ .

Portanto, de (3.66) temos que  $[\partial_z, \partial_{\bar{z}}](p) = 0 \in D(p)$ , para todo  $p \in M$ . Dessa forma, a distribuição  $D$  de posto 2 na superfície  $M$  é involutiva.

# Capítulo 4

## Sobre Existência e Unicidade

Começaremos este capítulo definindo conceitos que costumam ser apresentados nos cursos de Análise em  $\mathbb{R}^n$  e de Topologia (cf. [12], [17]). Também faremos uma breve introdução aos mapas harmônicos (cf.[19]).

### 4.1 Abertos simplesmente conexos

O leitor que já teve a oportunidade de trabalhar com números reais (ou complexos) certamente já está familiarizado com algumas propriedades sobre conjuntos abertos e conexos. Convém definir, assim, o importante conceito de conjuntos abertos simplesmente conexos.

**Definição 4.1.1.** Diz-se que um conjunto aberto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é **simplesmente conexo** se é conexo e qualquer linha fechada  $\Gamma \subset S$  pode ser transformada continuamente num ponto  $P \in S$ , ou seja, se existe uma função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua, com as seguintes propriedades:

1.  $H(0, t) = P; t \in [0, 1]$
2.  $H(1, t) = \gamma(t); t \in [0, 1]$
3.  $H(s, 0) = H(s, 1); s \in [0, 1]$ ,

em que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho que descreve a linha  $\Gamma$ . Nessas condições, diz-se que a linha  $\Gamma$  é **homotópica** a um ponto.

**Exemplo 4.1.2.** Qualquer conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  convexo é simplesmente conexo.  $S$  é convexo se, dados dois pontos  $P \in S$  e  $Q \in S$ , então o segmento de reta  $[P, Q]$  está contido em  $S$ . Consideremos a função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por

$$H(s, t) = p + s(\alpha(t) - P).$$

Esta função estabelece a homotopia (deformação contínua) entre uma linha qualquer fechada  $\Gamma \subset S$ , descrita pelo caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e um ponto qualquer  $P$  fixo em  $S$ , tal como se ilustra na Figura 4.1.

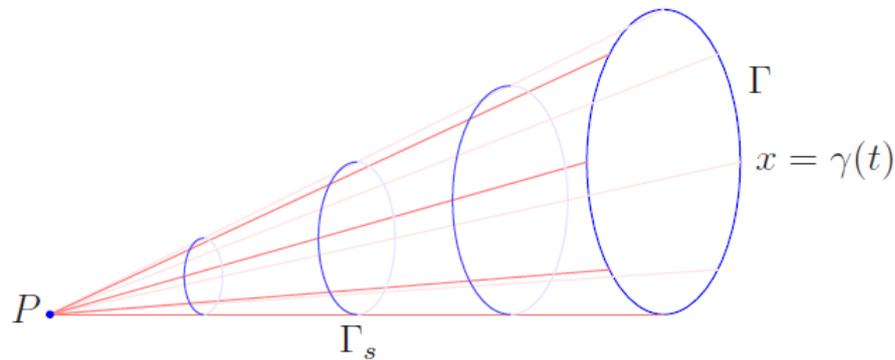


Figura 4.1: Homotopia ou deformação de uma linha fechada em um ponto.

**Exemplo 4.1.3.** Qualquer conjunto estrelado<sup>1</sup> é simplesmente conexo: basta definir a homotopia do mesmo modo que no exemplo anterior. Note que qualquer conjunto convexo é uma estrela. Em particular, uma bola é uma estrela.

**Exemplo 4.1.4.** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  não é estrelado mas é simplesmente conexo. Com efeito, qualquer linha fechada contida neste conjunto pode ser continuamente deformada num ponto qualquer distinto da origem.

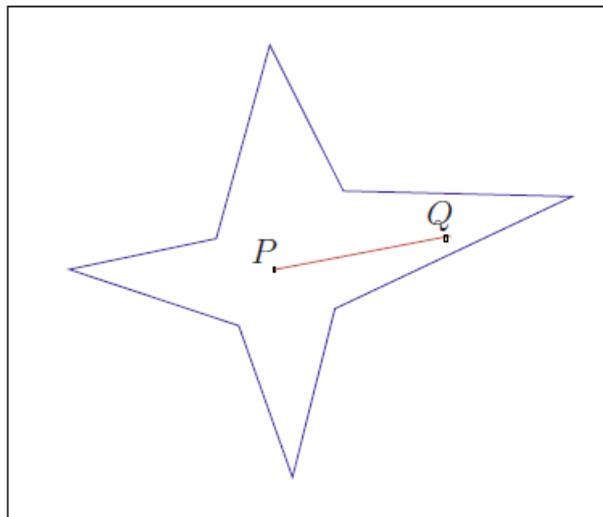


Figura 4.2: Conjunto estrelado.

**Exemplo 4.1.5.** O conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  não é simplesmente conexo, pois dada uma linha fechada em torno da origem não é possível deformá-la continuamente em um ponto. No entanto, qualquer linha  $\Gamma$  fechada em torno da origem é homotópica à circunferência

<sup>1</sup>Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  diz-se *estrelado*, ou que é uma *estrela*, se existir um ponto  $P \in S$  tal que o segmento de reta  $[P, Q]$  se encontra em  $S$  para qualquer ponto  $Q \in S$ .

centrada na origem e de raio igual a um. De fato, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o caminho que descreve a linha  $\Gamma$ . Então, a função  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\alpha(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|},$$

é um caminho que descreve a circunferência centrada na origem e de raio igual a um. Assim, a função

$$H(s, t) = \alpha(t) + s(\gamma(t) - \alpha(t))$$

estabelece a referida homotopia.

## 4.2 Mapas harmônicos

Nesta seção, daremos uma atenção especial às aplicações harmônicas. Veremos que as aplicações harmônicas são os pontos críticos de um funcional, os quais serão importantes ferramentas para as próximas seções.

Sejam  $M^n$ ,  $N^k$  duas variedades Riemannianas com métricas Riemannianas dada por

$$ds_M^2 = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad ds_M^2 = \sum_{i,j} h(f(x))_{ij} du^i du^j$$

respectivamente. Seja  $f : M^n \rightarrow N^k$  uma aplicação diferenciável.

Queremos encontrar uma forma quadrática em  $M$  que seja puxada da métrica de  $N$ . Essa forma quadrática é denominada de pull-back e é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} f^*(ds_N^2) : (T_p M)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ V &\mapsto f^*(ds_N^2)(V) = ds_N^2(df(V)) \end{aligned}$$

Em coordenadas locais, o pull-back é dado por

$$f^*(ds_N^2) = \sum_{\alpha,\beta} \left( \sum_{i,j} h_{ij}(f(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} \right) du^\alpha du^\beta.$$

O pull-back é uma forma bilinear simétrica globalmente definida, que denotaremos por  $q(p)$ ;  $p \in M$ . Ou seja, fixado um ponto  $p \in M$ , temos que

$$\begin{aligned} q(p) : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto q(p)(v, w) = \langle Av, w \rangle, \end{aligned}$$

e  $A : T_p M \rightarrow T_p M$  é um operador auto-adjunto. Sendo assim existe uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$  formada por autovetores de  $A$ . Sejam  $\lambda_i$  os autovalores associados a  $e_i$  e  $\{w_1, \dots, w_n\}$  a base dual, então temos que dado um vetor  $v \in T_p M$ , segue que

$$q(p)(v, v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (w_i(v))^2.$$

A energia da aplicação  $f$ , denotada por  $|df|^2$ , é definida como o traço da forma quadrática  $q(p)$ , ou seja,

$$|df|^2 = q(p) = \sum_i \lambda_i.$$

Observe que na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ , temos que  $A \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma}$ , onde  $\alpha, \gamma = 1, \dots, n$  e  $a_{\alpha\gamma} \in \mathbb{R}$ .

A matriz  $(a_{\alpha\gamma})$  representa  $A$  na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ . Vamos então calcular o  $\text{tr} A = \sum_\gamma a_{\gamma\gamma}$ . Note que, por um lado

$$q(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} g_{\gamma\alpha}. \quad (4.1)$$

$$q(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) = \sum_{i,j} h_{ij}(f(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}. \quad (4.2)$$

Usando as equações (4.1) e (4.2), temos que

$$\sum_\gamma a_{\alpha\gamma} g_{\gamma\alpha} = \sum_{i,j} h_{ij}(f(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}.$$

Multiplicando por  $g^{\gamma\beta}$  e somando em  $\beta$ , obtemos:

$$\sum_\beta \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma\beta} = \sum_\beta \sum_{i,j} h_{ij}(f(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} g^{\gamma\beta}.$$

Daí,

$$\sum_\gamma a_{\alpha\gamma} = \sum_{\gamma,\beta,i,j} h_{ij}(f(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} g^{\gamma\beta}.$$

Logo,

$$|df|^2 = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} = \sum_{\gamma,\beta,i,j} h_{ij}(f(x)) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} g^{\gamma\beta}, \quad (4.3)$$

é a representação local da energia de uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ .

**Definição 4.2.1.** *O funcional energia, denotado por  $E(f)$ , é definido por*

$$E(f) = \int_M |df|^2 dM.$$

*Os pontos críticos do funcional  $E$  no espaço das aplicações são chamados de **aplicações harmônicas**.*

Sejam  $M$  e  $N$  duas superfícies orientadas compactas sem bordo e  $u : M \rightarrow N$ , onde as coordenadas de  $M$  são  $z = x + iy$  e as coordenadas de  $N$  são  $u = u_1 + iu_2$ . As métricas de  $M$  e  $N$  são dadas por  $ds_M^2 = \lambda(z) |dz|^2$  e  $ds_N^2 = \rho(u(z)) |du|^2$ , respectivamente. Suponha que  $u$  se anula fora da vizinhança coordenada de  $M$  e suponha que sua imagem esteja contida dentro da vizinhança coordenada de  $N$ .

Usando a equação (4.3), segue que a energia dessa aplicação  $u$  é dada por:

$$|du|^2 = 2 \frac{\rho(u(z))}{\lambda(z)} (|u_z|^2 + |u_{\bar{z}}|^2). \quad (4.4)$$

Seja  $v = u + t\eta$ , em que  $\eta$  é uma função complexa  $C^\infty$  com suporte compacto. Então,

$$E(v) = \int_M 2 \frac{\rho(v(z))}{\lambda(z)} (|v_z|^2 + |v_{\bar{z}}|^2) dM.$$

Suponhamos que  $u$  seja uma aplicação hamônica, ou seja, um ponto crítico do funcional energia. Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E(v))_{t=0} &= 2 \int_M [\rho_u \eta + \rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_z|^2 + \rho (\eta_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_z \bar{\eta}_{\bar{z}})] dx dy + \\ &+ 2 \int_M [\rho_u \eta + \rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_{\bar{z}}|^2 + \rho (\eta_{\bar{z}} \bar{u}_z + u_{\bar{z}} \bar{\eta}_z)] dx dy \\ &= 4 \int_M \operatorname{Re} [\rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_z|^2 + \rho u_z \bar{\eta}_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_{\bar{z}}|^2 + \rho u_{\bar{z}} \bar{\eta}_z] dx dy. \end{aligned}$$

Observe que

$$(\rho u_z \bar{\eta})_{\bar{z}} = (\rho_u u_z \bar{\eta} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z \bar{\eta}) u_z + \rho u_{z\bar{z}} \bar{\eta} + \rho u_z \bar{\eta}_{\bar{z}},$$

e

$$(\rho u_{\bar{z}} \bar{\eta})_z = (\rho_u u_{\bar{z}} \bar{\eta} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{\eta}) u_{\bar{z}} + \rho u_{z\bar{z}} \bar{\eta} + \rho u_{\bar{z}} \bar{\eta}_z.$$

Usando o teorema de Stokes, temos que

$$\int_M (\rho u_z \bar{\eta})_{\bar{z}} dx dy = \int_M (\rho u_{\bar{z}} \bar{\eta})_z dx dy = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E(v))_{t=0} &= 4 \int_M \operatorname{Re} [\rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_z|^2 + \rho u_z \bar{\eta}_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{\eta} |u_{\bar{z}}|^2 + \rho u_{\bar{z}} \bar{\eta}_z] dx dy \\ &= 4 \int_M \operatorname{Re} [(\rho u_z \bar{\eta})_{\bar{z}} + (\rho u_{\bar{z}} \bar{\eta})_z - 2\rho_u u_z u_{\bar{z}} \bar{\eta} - 2\rho u_{z\bar{z}} \bar{\eta}] dx dy \\ &= 8 \int_M \operatorname{Re} [(-\rho_u u_z u_{\bar{z}} - \rho u_{z\bar{z}}) \bar{\eta}] dx dy \\ &= 0, \quad \forall \eta. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que  $u$  é uma aplicação hamônica se, e somente se,

$$u_{z\bar{z}} + (\log \rho)_u u_z u_{\bar{z}} = 0, \quad (4.5)$$

ou

$$\bar{u}_{\bar{z}z} + (\log \rho)_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{u}_z = 0. \quad (4.6)$$

Observe que chegamos à fórmula usando coordenadas locais. No entanto, se trocamos a carta em torno do ponto em  $M$ , através de cálculos simples, mostra-se que a equação não muda, isto é, a equação da aplicação hamônica independe da escolha da carta local e, portanto, trata-se de uma fórmula global.

No caso particular em que a superfície  $N$  seja  $\mathbb{S}^2$ , temos que

$$ds_{\mathbb{S}^2}^2 = \underbrace{\frac{4}{(1+|u|^2)^2}}_{=\rho(u(z))} |du|^2.$$

Logo,

$$(\log K)_u = \frac{\rho_u}{\rho} = \frac{(1 + |u|^2)^2}{4} \left( \frac{4}{(1 + |u|^2)^2} \right)_u = \frac{(1 + |u|^2)^2}{4} \left[ \frac{-8(1 + |u|^2)\bar{u}}{(1 + |u|^2)^4} \right],$$

Daí,

$$(\log K)_u = \frac{-2\bar{u}}{1 + |u|^2} = \frac{-2\bar{u}}{1 + u\bar{u}}. \quad (4.7)$$

Dessa maneira, temos de (4.5) e (4.7) que  $u$  é uma aplicação hamônica se, e somente se,

$$u_{z\bar{z}} - 2u_z u_{\bar{z}} \frac{\bar{u}}{1 + u\bar{u}} = 0. \quad (4.8)$$

### 4.3 O teorema de existência e unicidade

Veamos agora o resultado principal desta dissertação. Mas antes, apresentaremos uma interessante consequência que segue do Teorema 3.2.3.

**Corolário 4.3.1.** *Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão em  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura de Gauss positiva  $K$  e mapa de Gauss  $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Então,  $K$  é uma constante positiva se, e somente se,  $g$  é um mapa harmônico para a estrutura conformal induzida pela segunda forma fundamental.*

*Demonstração.* Tendo em conta que

$$(\log K)_z = \frac{K_z}{K} \quad (4.9)$$

e a expressão (3.65) na demonstração do Teorema 3.2.3, dado por

$$(\log K)_z = \frac{4}{|g_z|^2 - |\bar{g}_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{\bar{g}_z g - g_z \bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right).$$

Segue que,  $K$  é constante se, e somente se,  $\bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{\bar{g}_z g - g_z \bar{g}}{1 + g\bar{g}} = 0$ .

Assim, considerando esta equação e sua conjugada nas incógnitas  $g_{z\bar{z}}$  e  $\bar{g}_{z\bar{z}}$ ,  $K$  é constante é equivalente a

$$\left( g_{z\bar{z}} - 2g_z \bar{g}_z \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right) = 0.$$

Assim, de (4.8) segue que  $g$  é um mapa harmônico. ■

Abordaremos agora o problema de obter condições sob as quais dadas uma superfície  $M$ ,  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , um mapa diferenciável e  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva, exista  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão em  $\mathbb{R}^3$  tais que  $N$  e  $K$  sejam o seu mapa de Gauss e sua curvatura de Gauss, respectivamente, de  $M$  com estrutura conformal proveniente de sua segunda forma fundamental.

Condições necessárias para a existência da imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  resultam imediatamente dos teoremas 3.2.1 e 3.2.3.

Agora, obteremos condições necessárias e suficientes para a existência de uma imersão com curvatura de Gauss positiva em  $\mathbb{R}^3$ , em termos de seu mapa de Gauss e da estrutura conformal da segunda forma fundamental.

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann simplesmente conexa e  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  um mapa diferenciável. Então existe uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  com mapa de Gauss  $N$  e tal que a estrutura conformal de  $M$  é a induzida pela segunda forma fundamental se, e somente se,*

$$|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0, \quad (4.10)$$

$$Im \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) \right) \right\} = 0, \quad (4.11)$$

onde  $g$  é como em (3.6). Além disso, a imersão é única a menos de uma transformação de similaridade<sup>2</sup> em  $\mathbb{R}^3$  e pode ser recuperada usando as equações

$$\begin{aligned} X_1 &= \int Re \left\{ 2 \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} dz \right\} + C_1, \\ X_2 &= \int Re \left\{ -2i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} dz \right\} + C_2, \\ X_3 &= \int Re \left\{ 4 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} dz \right\} + C_3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde

$$\log K = \int Re \left\{ \frac{8}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) dz \right\} + \lambda,$$

$C_1, C_2, C_3, \lambda$  são constantes reais e as integrais são tomadas ao longo de um caminho de um ponto fixado a um ponto que varia.

*Demonstração.* Se  $M$  é uma superfície de Riemann com estrutura conformal dada pela segunda forma fundamental de uma imersão  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , então  $K > 0$ , pois de (3.3) temos que,

$$K = -\frac{\rho^2}{D},$$

onde  $\rho$  é uma função positiva e  $D$  é um número real negativo. Portanto,

$$\log K \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2(\log K)}{\partial \bar{z} \partial z},$$

devem ser reais. Assim, de (3.65) obtemos

$$Im \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) \right) \right\} = 0.$$

Mais do que isso, na demonstração do Corolário 3.2.2, obtivemos a seguinte expressão

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} (|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2).$$

Daí,

$$|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0.$$

<sup>2</sup>As transformações de similaridade consistem de translações, rotações e mudança de escala

Por outro lado, do Teorema 3.2.1 temos que  $X_z = (X_{1z}, X_{2z}, X_{3z})$  tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial z} &= \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial z} &= -i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_3}{\partial z} &= 2 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$X_{1z}, X_{2z}, X_{3z} \in \mathbb{C},$$

já que, de (3.30)  $g_z \in \mathbb{C}$ . Daí,

$$\overline{X_{1z}}, \overline{X_{2z}}, \overline{X_{3z}} \in \mathbb{C}.$$

Além disso, da análise complexa temos que para  $j = 1, 2, 3$ , se verifica

$$X_{jz} + \overline{X_{jz}} = 2Re\{X_{jz}\}, \quad (4.13)$$

onde,  $Re\{\cdot\}$  denota a parte real de um número complexo.

Porém,  $\overline{X_{jz}} = X_{j\bar{z}}$ , pois  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . Assim, para  $j = 1, 2, 3$ , obtemos

$$X_{jz} + \overline{X_{jz}} = X_{jz} + X_{j\bar{z}} = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) X_j = \frac{\partial}{\partial u} X_j. \quad (4.14)$$

Logo, segue de (4.13) e de (4.14), que

$$\frac{\partial}{\partial u} X_j = Re\{2X_{jz}\}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.15)$$

Portanto, como  $X_j$  e  $X_{jz}$  são contínuas na superfície de Riemann  $M$ , com  $j = 1, 2, 3$ , integramos ambos os membros da expressão (4.15). Assim, para  $j = 1, 2, 3$ , obtemos

$$\begin{aligned}X_j &= \int Re\{2X_{jz}\} du + C_j \\ &= \int Re\{2X_{jz}dz\} + C_j, \quad (\text{pois } dz = du + idv),\end{aligned} \quad (4.16)$$

onde,  $C_1, C_2, C_3$ , são constantes reais. Dessa forma, de (4.16) obtemos a expressão (4.12).

Também, de maneira análoga, obtemos de (3.65) que

$$\log K = \int Re \left\{ \frac{8}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right) dz \right\} + \lambda,$$

onde,  $\lambda$  é uma contante real.

Reciprocamente, seja  $g = \frac{1}{1 - N_3} (N_1 + iN_2)$  com  $N = (N_1, N_2, N_3)$ . Como  $M$  é uma superfície de Riemann simplesmente conexa, então pelo Lema 2.2.22 a equação dada por

$$(\log K)_z = \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_z}{1 + g\bar{g}} \right), \quad (4.17)$$

tem solução quando

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_{\bar{z}}}{1 + g\bar{g}} \right) \right) \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

Porém, (4.18) é equivalente a (4.11), isto é,

$$\text{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{4}{|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2} \left( \bar{g}_z g_{z\bar{z}} - g_z \bar{g}_{z\bar{z}} + 2g_z \bar{g}_z \frac{g\bar{g}_{\bar{z}} - \bar{g}g_{\bar{z}}}{1 + g\bar{g}} \right) \right) \right\} = 0.$$

Dessa forma, existe  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $K = e^\varphi$ , satisfazendo (4.17).

Por outro lado, assumamos primeiramente a existência de uma imersão  $X = (X_1, X_2, X_3)$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial z} &= \frac{(1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial z} &= -i \frac{(1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}, \\ \frac{\partial X_3}{\partial z} &= 2 \frac{\bar{g}g_z - g\bar{g}_z}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $z = u + iv$ , é um parâmetro conformal para a segunda forma fundamental de  $M$ . De fato, como  $\langle N, N \rangle = 1$ , de (3.6) obtemos  $N$  a partir de  $g$ , isto é,

$$N = (N_1, N_2, N_3) = \frac{1}{1 + g\bar{g}} (g + \bar{g}, -i(g - \bar{g}), -1 + g\bar{g}). \quad (4.19)$$

Logo,  $N_z = (N_{1z}, N_{2z}, N_{3z})$  onde

$$N_{1z} = \frac{1}{(1 + g\bar{g})^2} [(1 - \bar{g}^2)g_z + (1 - g^2)\bar{g}_z], \quad (4.20)$$

$$N_{2z} = \frac{-i}{(1 + g\bar{g})^2} [(1 + \bar{g}^2)g_z - (1 + g^2)\bar{g}_z], \quad (4.21)$$

$$N_{3z} = \frac{2}{(1 + g\bar{g})^2} (g_z \bar{g} + g\bar{g}_z). \quad (4.22)$$

Dessa maneira,

$$N \wedge N_z = (N_2 N_{3z} - N_3 N_{2z}, N_3 N_{1z} - N_1 N_{3z}, N_1 N_{2z} - N_2 N_{1z}), \quad (4.23)$$

porém, de (4.19), (4.21) e (4.22) temos que

$$N_2 N_{3z} = \frac{-2i}{(1 + g\bar{g})^3} (g g_z \bar{g} + g^2 \bar{g}_z - g_z \bar{g}^2 - \bar{g} g \bar{g}_z) \quad e$$

$$-N_3 N_{2z} = \frac{i}{(1 + g\bar{g})^3} [(1 + g^2)\bar{g}_z - (1 + \bar{g}^2)g_z + g\bar{g}g_z(1 + \bar{g}^2) - \bar{g}g\bar{g}_z(1 + g^2)].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
N_2 N_{3z} - N_3 N_{2z} &= \frac{i}{(1+g\bar{g})^3} [(1+g^2)\bar{g}_z - (1+\bar{g}^2)g_z - 2g^2\bar{g}_z + 2g_z\bar{g}^2] + \\
&\quad \frac{i}{(1+g\bar{g})^3} [-g\bar{g}g_z + \bar{g}g\bar{g}_z + g\bar{g}g_z\bar{g}^2 - \bar{g}g\bar{g}_zg^2] \\
&= \frac{i}{(1+g\bar{g})^3} [\bar{g}_z - g_z + g_z\bar{g}^2 - g^2\bar{g}_z] + \\
&\quad \frac{i}{(1+g\bar{g})^3} [\bar{g}g\bar{g}_z - g\bar{g}g_z + g\bar{g}(g_z\bar{g}^2 - \bar{g}_zg^2)] \\
&= \frac{i}{(1+g\bar{g})^3} [(1+g\bar{g})\bar{g}_z - (1+g\bar{g})g_z + (1+g\bar{g})(g_z\bar{g}^2 - \bar{g}_zg^2)] \\
&= \frac{i}{(1+g\bar{g})^3} [(1+g\bar{g})(\bar{g}_z - g_z + g_z\bar{g}^2 - \bar{g}_zg^2)] \\
&= \frac{i}{(1+g\bar{g})^2} [(1-g^2)\bar{g}_z - (1-\bar{g}^2)g_z].
\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
N_3 N_{1z} - N_1 N_{3z} &= -\frac{1}{(1+g\bar{g})^2} [(1+\bar{g}^2)g_z + (1+g^2)\bar{g}_z] \quad e \\
N_1 N_{2z} - N_2 N_{1z} &= \frac{2i}{(1+g\bar{g})^2} [g\bar{g}_z - \bar{g}g_z].
\end{aligned}$$

Portanto, de (4.23) segue que

$$X_z = (X_{1z}, X_{2z}, X_{3z}) = \frac{i}{\sqrt{K}} N \wedge N_z. \quad (4.24)$$

Daí,

$$\langle X_z, N \rangle = \frac{i}{\sqrt{K}} \langle N \wedge N_z, N \rangle = 0,$$

ou seja,  $N$  é ortogonal a  $X_z$ . Logo,  $N$  é o mapa de Gauss.

Também, de (4.24) obtemos

$$\langle X_z, -N_z \rangle = \frac{i}{\sqrt{K}} \langle N \wedge N_z, -N_z \rangle = 0, \quad (4.25)$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\langle X_z, -N_z \rangle &= \frac{1}{4} \langle X_u - iX_v, -N_u + iN_v \rangle \\
&= \frac{1}{4} (\langle X_u, -N_u \rangle + i\langle X_u, N_v \rangle + i\langle X_v, N_u \rangle - \langle X_v, -N_v \rangle) \\
&= \frac{1}{4} (\hat{e} - i\hat{f} - i\hat{f} - \hat{g}) \\
&= \frac{1}{4} Q \quad (\text{pois segue da expressão (2.18)}).
\end{aligned} \quad (4.26)$$

Dessa forma, temos de (4.25) e (4.26) que

$$Q = 0,$$

Observe que, da expressão obtida na demonstração do Corolário 3.2.2, isto é,

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{K_{Gauss}}(1 + g\bar{g})^2} (|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2),$$

onde,  $K_{Gauss} > 0$  é a curvatura de Gauss de  $M$ . Conclui-se,

$$\rho > 0, \quad (\text{pois segue de (4.10) que } |g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0).$$

Portanto,  $z$  é um parâmetro conformal, ou seja, a estrutura conformal de  $M$  é a segunda forma fundamental.

Por outro lado, temos de (3.3) que

$$K_{Gauss} = -\frac{\rho^2}{D}, \quad \text{onde } D = |P|^2 - \lambda^2 < 0.$$

Também, de (3.27) segue que

$$X_z = \frac{i}{\sqrt{K_{Gauss}}} N \wedge N_z. \quad (4.27)$$

Assim, de (4.24) e (4.27) obtém-se

$$\left( \frac{i}{\sqrt{K}} - \frac{i}{\sqrt{K_{Gauss}}} \right) N \wedge N_z, \quad (4.28)$$

mas,  $N \wedge N_z \neq 0$ , pois  $X_z \neq 0$ . Logo,

$$K = K_{Gauss},$$

ou seja,  $K$  é a curvatura de Gauss de  $M$ .

Finalmente, queremos mostrar a existência da solução da EDP de primeira ordem, dada por

$$X_z = \frac{1}{\sqrt{K}(1 + g\bar{g})^2} \left( (1 - \bar{g}^2)g_z - (1 - g^2)\bar{g}_z, -i \left( (1 + \bar{g}^2)g_z + (1 + g^2)\bar{g}_z \right), 2(\bar{g}g_z - g\bar{g}_z) \right), \quad (4.29)$$

na superfície simplesmente conexa  $M$ . Para fazer isso, usaremos o Teorema de Frobenius, ou seja, precisamos provar que

$$[X_z, X_{\bar{z}}] = 0.$$

Porém, da Observação 3.2.5 essa condição é equivalente a que (3.47) é a condição de integrabilidade da EDP (4.29). Agora, da observação 3.2.4, é fácil verificar que (4.17) (ou equivalentemente, (3.47)) é a condição de integrabilidade da EDP (4.29). Mas, como (4.11) é equivalente a (4.18) o qual garante a existência da solução da equação (4.17). Daí, segue que existe a solução da EDP (4.29).

Além disso, se  $X^1, X^2 : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  são duas imersões como acima com curvatura de Gauss  $K_1$  e  $K_2$  respectivamente, então  $(\log K_1)_z = (\log K_2)_z$  e  $K_1 = rK_2$  para alguma constante positiva  $r$ . Assim,  $X_z^2 = \sqrt{r} X_z^1$  e  $X^2 = \sqrt{r} X^1 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}^3$ . ■

Como uma consequência do Teorema 4.3.2, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 4.3.3.** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então,  $M$  pode ser imersa em  $\mathbb{R}^3$  com mapa de Gauss  $N$  e curvatura de Gauss constante tal que a estrutura conformal de  $M$  é dada por sua segunda forma fundamental se, e somente se, existe um difeomorfismo local harmônico de  $M$  em  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demonstração.* Se  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão com curvatura de Gauss  $K$ , onde  $M$  é uma superfície de Riemann com estrutura conformal dada por sua segunda forma fundamental. Então,  $K$  deve ser positiva.

Consequentemente,  $N$  é um difeomorfismo local, pois  $K = \det(dN)$ . Mais do que isso, do Corolário 4.3.1 segue que  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  deve ser harmônico.

Reciprocamente, se  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^2$  é um difeomorfismo local harmônico. Então, fazendo  $N = (N_1, N_2, N_3)$  obtemos  $g = \frac{1}{1 - N_3} (N_1 + iN_2)$ . Assim,  $\left( g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right) = 0$  e o sistema de equações lineares nas incógnitas  $(\log K)_z$  e  $(\log K)_{\bar{z}}$ , dado por

$$\begin{aligned} (\log K)_z g_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} g_z &= 4 \left( g_{z\bar{z}} - 2g_z g_{\bar{z}} \frac{\bar{g}}{1 + g\bar{g}} \right), \\ (\log K)_z \bar{g}_{\bar{z}} + (\log K)_{\bar{z}} \bar{g}_z &= 4 \left( \bar{g}_{z\bar{z}} - 2\bar{g}_z \bar{g}_{\bar{z}} \frac{g}{1 + g\bar{g}} \right), \end{aligned}$$

tem solução única se, e somente se, a discriminante do sistema  $g_{\bar{z}} \bar{g}_z - g_z \bar{g}_{\bar{z}}$  é diferente de zero, isto é, (usando  $-N$  em vez de  $N$ , se necessário),  $|g_{\bar{z}}|^2 - |g_z|^2 > 0$ .

Por outro lado, como  $M$  é simplesmente conexo, então existe  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $K = e^\varphi$ , satisfazendo (3.65) se, e somente se, (4.11) é satisfeita. Portanto, do teorema 4.3.2 segue que a imersão pode ser calculada usando (4.12) e do sistema dado acima obtemos que  $(\log K)_z = 0$ . Dessa forma, a curvatura de Gauss  $K$  deve ser uma constante positiva. ■

# Bibliografia

- [1] Abe, K.; Erbacher, J., Isometric immersions with the same Gauss map, *Math. Ann.*, **215** (1975), 197-201.
- [2] Do Carmo, M., *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Coleção textos universitários, SBM, 5ª edição (2012).
- [3] Do Carmo, M., *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição (2005).
- [4] Folha, A.; Peñafiel, C., The Gauss map and second fundamental form of surfaces in a Lie group, Pre-print (2016).
- [5] Gálvez, J. A.; Hauswirth, L.; Mira, P., Surfaces of constant curvature in  $\mathbb{R}^3$  with isolated singularities, *Adv. Math.*, **241** (2013), 103-126.
- [6] Gálvez, J. A.; Martínez, A., The Gauss map and second fundamental form of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , *Geometriae Dedicata*, **81** (2000), 181-192.
- [7] Hoffman, D. A.; Osserman, R., The Gauss maps of surfaces in  $\mathbb{R}^n$ , *J. Differential Geometry*, **18** (1983), 733-754.
- [8] Hoffman, D. A.; Osserman, R., The Gauss maps of surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}^4$ , *Proc. London Math. Soc.*, (3) **50** (1985), 27-56.
- [9] Kenmotsu, K., Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, *Math. Ann.*, **245** (1979), 89-99.
- [10] Lang, S., *Complex analysis*, Graduate texts in Mathematics **103**, 4ª edição (1999).
- [11] Lima, E., *Análise no espaço  $\mathbb{R}^n$* , Coleção Matemática Universitária, IMPA (2004).
- [12] Lima, E., *Curso de análise*, Projeto Euclides, IMPA, vol. 2, 11ª edição (2014).
- [13] Lima, E., *Cálculo tensorial*, Publicações matemáticas, IMPA, 2ª edição (2011).
- [14] Lima, E., *Variedades diferenciáveis*, Publicações matemáticas, IMPA (2008).
- [15] Milnor, J. W., *Topology from the differentiable viewpoint*, Charlottesville, The University Press of Virginia (1965).
- [16] Milnor, T. K., Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space, *Trans Amer. Math. Soc.*, **280** (1983), 161-185.
- [17] Munkres, J., *Topology*, Prentice Hall, 2ª edição (2000).

- [18] Pressley, A., *Elementary differential geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2ª edição (2010).
- [19] Schoen, R.; Yau, R. T., *Lectures on harmonic maps*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, II. International Press, Cambridge, MA (1997).
- [20] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Inc., vol. 1, 3ª edição, Houston, Texas (1999).
- [21] Weinstein, T., *An introduction to Lorentz surfaces*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1996).