UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Quociente simplético e o teorema de Kempf e Ness

Alex Youn Aro Huanacuni

Orientador: Andrew Clarke

Rio de Janeiro

Março de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Quociente simplético e o teorema de Kempf e Ness

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemáticas da Universidade de Federal Rio de Janeiro, para a obtenção de Título de Mestre em Ciências, na Área de Matemática.

Orientador: Andrew Clarke

Rio de Janeiro
2016

Aluno, Alex Youn Aro Huanacuni.

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro. Departamento de Matemáticas.

1. Aplicação de momento
2. Poliestável
3. Convexidade

I. Universidade Federal de Rio de Janeiro. Instituto de Matemáticas. Departamento de Matemáticas.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Alejandro Cabrera
UFRJ

Prof. Dr. Hans Christian Herbig
UFRJ

Prof. Dr. Ethan Cotterill
UFF

Prof. Dr. Andrew Clarke
UFRJ (orientador)

“Não importa saber se a gente acredita em Deus: o importante é saber se Deus acredita na gente...”

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela força e coragem.

À meu orientador, Andrew Clarke, pela seu orientação, paciência, confiança e ensinamentos durante todo o mestrado.

Aos meus pais, Agustin e Robela, meu infinito agradecimento. Sempre acreditaram em meu capacidade e me acharam o melhor de todos, mesmo não sendo. Isso só me fortaleceu e me fez tentar, não ser o melhor, mas a fazer o melhor de mim. Obrigado pelo amor incondicional!.

Aos meus irmãos, Yhon, Agustin Jhon, Yessica, e Veronica que indiretamente me incentivaram, encorajando-me a prosseguir e dando-me forças para vencer cada etapa.

Aos meus familiares, amigos e colegas, que perto ou longe compartilharam da minha trajetória, fazendo-se presente.

Agradeço aos professores do programa de pos-graduação UFRJ pelos momentos de conversas, trocas de ideias e aprendizado durante esses dois anos de mestrado. Com toda certeza aprendi e cresci muito profissionalmente pelos ensinamentos.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante os anos de curso.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos um resultado fundamental na interseção da geometria algébrica com a geometria simplética, isto é, o teorema de Kempf e Ness. O resultado mostra que o quociente simplético construido pela redução simplética por um grupo compacto K e o quociente definido na teoria geométrica de invariantes para uma variedade projetiva complexa M pelo grupo complexificado $K_{\mathbb{C}}$ do grupo K são homeomorfos. Nós consideramos o caso em que $M \subseteq \mathbb{P}^n$ é uma subvariedade algébrica e $K \subseteq U(n+1)$, e $K_{\mathbb{C}}$ agem linearmente sobre M. Estudamos os pontos semiestáveis, poliestáveis e estáveis na variedade projetiva e algumas propriedades da função de Kempf-Ness para caracterizar os zeros da aplicação de momento e os pontos poliestáveis. Finalmente, o resultado do trabalho depende da convexidade da função de Kempf-Ness.

Palavras-chave: Aplicação de momento, poliestável, convexidade.

Abstract

In this dissertation, we present a key result at the intersection of algebraic geometry with symplectic geometry, ie, Kempf and Ness theorem. The result shows that the symplectic quotient built by reduced symplectic by a compact group K and the set quotient in the geometric theory of invariants for a projective complex manifold M by complexified group $K_{\mathbb{C}}$ group K are homeomorphic. We consider the case where $M \subseteq \mathbb{P}^n$ is an algebraic submanifold and $K \subseteq U(n+1)$, and $K_{\mathbb{C}}$ acts linearly on M. We studied the semiestáveis, poliestáveis and stable points in projective variety and some properties of the Kempf-Ness function to characterize the moment of application of zeros and poliestáveis points. Finally, the result of the work depends on the convexity of Kempf-Ness function.

Keywords: Application moment, poliestavel, convexity.

Sumário

Introdução

O teorema de Kempf e Ness descreve a equivalência entre a noção de quociente na teoria geométrica de invariantes introduzida por Mumford em 1960 e a noção de quociente simplético introduzido por Marsden, Weinstein e Meyer nos anos 1970. O objetivo desta dissertação será estudar esta relação e demonstrar que existe um homeomorfismo entre o quociente simplético, $\mu^{-1}(0)/K$ e o quociente algébrico $M /\!\!/ G$.

Neste trabalho consta de cinco capítulos. O primeiro capítulo é dedicado a conceitos básicos e contém o teorema de variedade quociente, que dá condições suficientes para que espaço de órbitas tenha uma estrutura de variedade suave. Para uma ação livre e própria de um grupo de Lie G sobre variedade suave M, o espaço de órbitas M/G admite uma única estrutura de variedade suave com a propriedade de que a projeção $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão suave.

No segundo capítulo, estudamos o conceito de ação Hamiltoniana, que consiste em existência de uma aplicação equivariante $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que $d\mu^\xi = i_{\xi^M}\omega$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Para isso, primeiramente introduzimos os conceitos básicos de geometria simplética, como ação simplética de um grupo de Lie G que age por simplectomorfismo na variedade simplética (M, ω). Também mostrarmos que o quociente topológico $\mu^{-1}(0)/G$ de zero local $\mu^{-1}(0)$ em M de μ admite canonicamente uma forma simplética, este fato é conhecido o teorema de Marsden, Weinstein e Meyer [18], que serve como ferramenta principal para construir uma aplicação de momento $\mu : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathfrak{u}(n+1)^*$ para a ação linear de $U(n+1)$.

No terceiro capítulo, veremos alguns exemplos de variedades simpléticas tóricas e o resultado fundamental de Delzant. Este teorema de Delzant mostra que a partir de um certos dados combinatórios podemos construi-se uma variedade simplética tórica.

No quarto capítulo, apresentarmos a teoria geométrica de invariantes desenvolvida por Mumford [19], para isso, é necessário introduzir o linguagem de geometria algébrica para uma ação de grupo algébrico linear redutivo G sobre uma variedade algébrica M. Um dos objetivos deste capitulo é definir um quociente algébrico $M /\!\!/ G$ com boas propriedade geométricas. Neste capítulo também definimos as varias noções de estabilidade e tentamos obter um quociente algébrica projetiva $\varphi : M^{ss} \longrightarrow M /\!\!/ G$. Terminamos com um critério de Hilbert-Mumford sobre os subgrupos de um parâmetro.

Finalmente, no quinto capítulo, apresentaremos a demonstração do resultado principal desta dissertação, o teorema de Kempf e Ness. No inicio do capítulo definiremos a complexificação de um grupo de Lie e algum resultado sobre geodésicas em $K\backslash G$ que é seguida de alguns exemplos que justificam o teorema kempf e Ness.

Capítulo 1

Noções básicas

No presente capítulo, o objetivo é apresentar algumas definições básicas de grupos de Lie, álgebras de Lie, ações adjunta e coadjunta, e finalizando com o resultado do teorema de variedade quociente que serão usados mais adiante.

1.1 Algumas Definições

Seja $P : M \longrightarrow N$ uma submersão. Então qualquer complemento ortogonal de $(P_{*m})^{-1}(0)$ em T_mM é isomorfo a $T_{P(m)}N$, mas não existe a escolha canônica para tal complemento. Se M é equipado com uma métrica Riemanniana podemos escolher o complemento ortogonal de $(P_{*m})^{-1}(0)$ em T_mM, e denotando por H_m e chamarmos espaço horizontal de T_mM.

Definição 1.1. Uma aplicação P de (M, g) para (N, h) é uma submersão Riemanniana se

i) P é uma submersão suave,

ii) para todo $m \in M$, a aplicação linear P_{*m} é uma isometria entre H_m e $T_{P(m)}N$.

Consideremos o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ dos campos vetoriais suaves em uma variedade suave M como um módulo sobre o anel $\mathcal{C}^\infty(M)$ das funções suaves definidas em M.

Definição 1.2. Seja M uma variedade suave. Uma conexão ∇ sobre M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, $\mathbb{R}-$bilinear tal que para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfaz as seguintes propriedades

i) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$,

ii) $\nabla_X(fY) = (X.f)Y + f\nabla_X Y$.

Definição 1.3. Uma conexão sobre TM é simétrica se, para qualquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \, .$$

Teorema 1.1. Para toda variedade Riemanniana (M, g), existe uma única conexão simétrica compatível com a métrica. Isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}\,(M)$, satisfaz

$$X.g\,(Y, Z) = g\,(\nabla_X Y, Z) + g\,(Y, \nabla_X Z) \, .$$

Demonstração. Ver [24].

1.2 Grupos e álgebras de Lie

Definição 1.4. Um grupo de Lie G é um grupo e uma variedade suave tais que a multiplicação $G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \longmapsto g.h$, e a inversa $G \longrightarrow G$, $g \longmapsto g^{-1}$ são suaves.

Uma ação à esquerda de um grupo G num conjunto M é uma aplicação $G \times M \longrightarrow M$, $(g, p) \longmapsto g.p$ que satisfaz as propriedades:

i) $1.p = p$, para todo $p \in M$, onde 1 é a identidade de G.

ii) $(gh).p = g.(h.p)$, para todo $g, h \in G$, e $p \in M$.

Se G é um grupo de Lie, e g qualquer elemento de G defina aplicações $L_g, R_g : G \longrightarrow G$ chamadas translação à esquerda e translação à direita respetivamente por

$$L_g\,(h) = gh, \;\; R_g\,(h) = hg.$$

Claramente, L_g e R_g são difeomorfismos.

Seja G um grupo de Lie agindo sobre a variedade M. Então para cada p em M definimos a órbita

$$G.p = \{g.p : g \in G\},$$

e estabilizador

$$G_p = \{g \in G : g.p = p\}.$$

Definição 1.5. Suponha que o grupo de Lie G age na variedade M.

i) A ação é dita efetiva se qualquer elemento do grupo $g \neq 1$, move ao menos um ponto. É dizer, $\bigcap_{p \in M} G_p = \{1\}$.

ii) A ação de um grupo de Lie G em uma variedade M é livre se $g.p = p$, para algum $p \in M$ implica que $g = 1$. E localmente livre se todos os estabilizadores são discreto.

iii) A ação é dita transitiva se M é uma órbita de G, isto é, para todo par de elementos p e q em M, existe $g \in G$ tal que $gp = q$.

Definição 1.6. Sejam M e N espaços topológicos. Dizemos que a aplicação $F : M \longrightarrow N$ é própria se para qualquer conjunto compacto $K \subset N$, a imagem inversa $F^{-1}(K)$ é compacto em M.

Proposição 1.1. Suponha que $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação própria e continua entre variedades topológicas. Então F é fechado.

Demonstração. Ver, [16].

Definição 1.7. Uma ação de G sobre M é chamada própria, quando a aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \times M \\ (g, p) & \longmapsto & (g.p, p) \end{array}$$

é uma aplicação própria. Isto quer dizer, que a imagem inversa de conjuntos compactos são compactos.

Teorema 1.2. Se $\psi : G \times M \longrightarrow M$ é uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M, e p é um ponto de M então $\bar{\psi}_p : G/G_p \longrightarrow M$ é uma imersão injetiva e $\bar{\psi}_p(G/G_p) = G.p$.

Demonstração. Ver, [2].

Definição 1.8. Uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) com uma aplicação $[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow V$, $\mathbb{R}(\mathbb{C})$-bilinear antisimetrica que satisfaz a identidade de Jacobi

$$[Y, [Z, X]] + [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

para todo $X, Y, Z \in V$.

Definição 1.9. Um campo vetorial X sobre grupo de Lie é chamado invariante pela esquerda se $(L_g)_{*h}(X_h) = X_{gh}$, para todo $g, h \in G$.

A álgebra de Lie de todos os campos vetoriais suaves invariantes pela esquerda sobre um grupo de Lie G, é chamado um álgebra de Lie de G e é denotado por $Lie\,(G) = \mathfrak{g}$.

As métricas Riemannianas que relacionam a geometria de G e com estrutura de grupo, são métricas tem a propriedade de que as translações à esquerda são isometrias elas são chamadas métricas invariantes à esquerda.

Definição 1.10. Uma métrica Riemanniana sobre um grupo de Lie G diz-se invariante à esquerda se $\langle v, w\rangle_x = \langle d(L_g)_x v, d(L_g)_x w\rangle_{L_g(x)}$ para todo $g, x \in G$ e $v, w \in T_xG$. De maneira análoga, uma métrica Riemanniana é invariante à direita se cada translação R_g é uma isometria.

Proposição 1.2. Seja G um grupo de Lie. A aplicação linear $\varepsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow T_1G$, com $\varepsilon\,(X) = X_1$ é um isomorfismo.

Demonstração. Ver, [2] e [16].

Proposição 1.3. Se G e H são grupos de Lie com H simplesmente conexo, então para qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\phi : H \longrightarrow G$ tal que $d\phi = \varphi$.

Demonstração. Ver [16].

Definição 1.11. Um homomorfismo $\phi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$ é chamado um subgrupo de parâmetro. Ou equivalentemente, $\phi\,(t) \in G$ para todo t com $\phi\,(t+s) = \phi\,(t)\,\phi\,(s)$, para quaisquer t, s em $\mathbb{R}$.
Pela proposição anterior, para cada $X \in T_1G$, existe um único subgrupo de um parâmetro ϕ_X com $d\phi_X\,(t) = tX$, ou seja, $\phi'_X\,(0) = X$. Assim, definimos a aplicação exponencial exp em termos de subgrupo de parâmetro.

Definição 1.12. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, é definida por:

$$\exp\,(X) = \phi_X\,(1)\,,$$

onde ϕ_X é o subgrupo de um parâmetro com vetor tangente X na identidade 1.

Proposição 1.4. A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ satisfaz as seguintes propriedade:

i) Para $\xi \in \mathfrak{g}$, $\phi\,(t) = \exp\,(t\xi)$ é um subgrupo de um parâmetro com $\phi'\,(0) = \xi$.

ii) A curva integral γ, de campo vetorial invariante à esquerda $\xi \in \mathfrak{g}$ com $\gamma\,(0) = g$ é $\gamma\,(t) = g\exp\,(t\xi)$.

iii) Para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, $(\exp \xi)^{-1} = \exp(-\xi)$.

iv) Se $\phi : H \longrightarrow G$ é um homomorfismos de grupos de Lie, então

$$\phi\left(\exp_H(\xi)\right) = \exp_G\left(\phi_*(\xi)\right).$$

Demonstração. Ver, [16], [2], e [5].

Definição 1.13. Sejam M e N variedades suaves e seja G um grupo de Lie agindo sobre M por $\psi_g : M \longrightarrow M$ e sobre N por $\phi_g : N \longrightarrow N$. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ suave é chamada equivariante com respeito a estas ações se, para todo $g \in G$, satisfaz

$$f \circ \psi_g = \phi_g \circ f.$$

Isto quer dizer, que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\phi_g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

1.3 Geradores infinitesimais

Vamos associar a qualquer ação $\psi : G \times M \longrightarrow M$, e qualquer $\xi \in \mathfrak{g}$ um campo vetorial sobre M. Estes campos vetoriais terão importantes propriedades para o trabalho. Seja $\psi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M e ξ um elemento de $\mathfrak{g}$. Define a aplicação

$$\begin{aligned} \psi^\xi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t,p) &\longmapsto \psi(exp(t\xi), p), \end{aligned} \tag{1.1}$$

o qual ψ^ξ é uma ação de $\mathbb{R}$ sobre M.

Definição 1.14. O campo vetorial ξ^M sobre $\mathfrak{X}(M)$ cujo fluxo é dado por ψ^ξ, é chamado gerador infinitesimal da ação corresponde ξ, isto é,

$$\xi^M(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(exp(t\xi), p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).p.$$

Note que:

$$\xi^M(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi^p(exp(t\xi)) = (\psi^p)_{*1}(\xi), \tag{1.2}$$

onde $\psi^p : G \longrightarrow M$.

Use para obter o resultado que vem.

Proposição 1.5. O espaço tangente a uma órbita $G.p$ em p está dado por:

$$T_p(G.p) = \{\xi^M(p) : \ \xi \in \mathfrak{g}\}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Do Teorema 1.2 se deduz que $\left(\bar{\psi}_p\right)_{*[g]} : T_{[g]}G/G_p \longrightarrow T_{\psi_g(p)}G.p$ é um isomorfismo para todo $g \in G$.

Tome $g = 1$ e usando (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} T_p(G.p) &= (\bar{\psi}_p)_{*[1]}(T_{[1]}G/G_p), \\ &= \{(\psi^p)_{*1}(\xi) : \xi \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{\xi^M(p) : \xi \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

□

1.4 Ações adjuntas e coadjuntas

Nesta seção vamos estudar duas ações especificas e importantes.

Definição 1.15. Seja G um grupo de Lie e g um elemento de G. A ação conjugação associado a g é definida por:

$$\begin{aligned} C_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow C_g(h) = ghg^{-1} \end{aligned}$$

onde C_g é um homomorfismo de grupos de Lie, e $C_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$ é um difeomorfismo. Assim, a definição seguinte faz sentido porque C_g preserva a identidade e a derivada naquele ponto é $C_{*1} : T_1G \longrightarrow T_1G$.

Definição 1.16. Seja G um grupo de Lie, a ação adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$ é definida por

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad_g(\xi) = \left(C_g\right)_{*1}(\xi). \end{aligned}$$

Lema 1.1. Seja $\psi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M e p um ponto de M. Se $\xi \in \mathfrak{g}$, então

$$(Ad_g\xi)^M(p) = (\psi_g)_{*\psi_{g^{-1}}(p)}(\xi^M(\psi_{g^{-1}}(p)))$$

Demonstração. Denote por $\psi^{Ad_g\xi} : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ o subgrupo de um parâmetro associado a $(Ad_g\xi)^M$. Assim, para cada $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi^{Ad_g\xi}(t,p) &= \psi^p\big(exp(tAd_g(\xi))\big),\\ &= \psi^p\big(g.exp(t\xi).g^{-1}\big),\\ &= \psi^{g^{-1}.p}\big(g.exp(t\xi)\big),\\ &= \big(\psi_g \circ \psi^{\xi(g^{-1}.p)}\big)(t).\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\Big(Ad_g\xi\Big)^M(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi^{Ad_g\xi}(t,p) \qquad\qquad = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\psi_g \circ \psi^{\xi(g^{-1}.p)}\Big)(t),\\ &= \Big(\psi_g\Big)_{*\psi_{g^{-1}}(p)}\Big(\xi^M\left(\psi_{g^{-1}}(p)\right)\Big).\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6. Seja ψ uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M. A aplicação $\xi \in \mathfrak{g} \overset{\rho}{\longmapsto} \xi^M \in \mathfrak{X}(M)$, é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie, isto é,

$$[\xi,\eta]^M = -[\xi^M,\eta^M],\ \forall \xi,\eta \in \mathfrak{g}.$$

Demonstração. Tome $g = exp(t\eta)$ no lema anterior, obtém-se

$$\left(Ad_{exp(t\eta)}\xi\right)^M(p) = \left(\psi_{exp(t\eta)}\right)_{*\exp(-t\eta).p}\left(\xi^M\left(\psi_{exp(-t\eta)}(p)\right)\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}-\left[\eta^M,\xi^M\right](p) &= \left[-\eta^M,\xi^M\right](p),\\ &= \lim_{t\longmapsto 0}\frac{\left(\psi_{exp(t\eta)}\right)_{*\exp(-t\eta).p}\left(\xi^M\left(\psi_{exp(-t\eta)}(p)\right)\right) - \xi^M(p)}{t},\\ &= \lim_{t\longmapsto 0}\frac{\left(Ad_{exp(t\eta)}\xi\right)^M(p) - \xi^M(p)}{t}\\ &= \lim_{t\longmapsto 0}\left(\frac{Ad_{exp(t\eta)}\xi - \xi}{t}\right)^M(p),\\ &= [\eta,\xi]^M(p).\end{aligned}$$

□

Definição 1.17. Seja G um grupo de Lie e $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ uma ação adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$. A ação coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$, é definida por:

$$\begin{aligned}Ad^* : G &\longrightarrow GL\left(\mathfrak{g}^*\right)\\ g &\longmapsto Ad^*_g = \left(Ad_{g^{-1}}\right)^*,\end{aligned}$$

onde $\langle Ad_g^* \xi, \eta \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} \eta \rangle$, para $\eta \in \mathfrak{g}$ e $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Existe também uma representação adjunta para o álgebra de Lie. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, e para cada $\xi \in \mathfrak{g}$. Se define uma aplicação $ad_\xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dada por:

$$ad_\xi\,(\eta) = [\xi, \eta]\,.$$

1.5 Variedade quociente por ações de grupos

Considere G um grupo de Lie age sobre uma variedade pela esquerda. Defina uma relação de equivalência em M definindo $p \sim q$ se existe $g \in G$ tais que $g.p = q$. Esta relação define classes de equivalência que são exatamente as órbitas de G em M. O conjunto de órbitas é denotado por M/G e equipado com topologia quociente é chamado o espaço de órbita da ação. Nesta seção determinaremos sob que condições um espaço órbita é uma variedade suave. Este resultado será usado mais adiante; as referências principais deste seção são [16] e [10].

Teorema 1.3. Suponha que M e N são variedades suaves e $\pi : M \longrightarrow N$ uma submersão suave sobrejetora. Para qualquer variedade suave P, a aplicação $F : N \longrightarrow P$ é suave se, e somente se, $F \circ \pi$ é suave.

Demonstração. Ver, [16].

Proposição 1.7. Suponha que $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação continua própria entre variedade topológicas. Então F é fechada.

Demonstração. Ver, [16].

Teorema 1.4. Sejam M e N variedades suaves e $F : M \longrightarrow N$ uma imersão suave injetiva. Se F é própria então F é um mergulho suave.

Demonstração. Ver [16].

Teorema 1.5. Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação suave de posto constante. Se F é injetiva então F é uma imersão.

Demonstração. Ver, [16].

A continuação dois proposições alternativas para caracterizar ações próprias que são frequentemente útil. Dada uma ação de G sobre M, para qualquer $g \in G$ e qualquer subconjunto $K \subset M$ usaremos a notação $g.K$ para denotar o conjunto $\{g.x : x \in K\}$.

Proposição 1.8. Suponha um grupo de Lie G agindo continuamente sobre uma variedade M. A ação é própria se, e somente se, para qualquer subconjunto compacto

$K \subset M$, o conjunto $G_K = \{g \in G : (g.K) \cap K \neq \emptyset\}$ é compacto.

Demonstração. Seja $\Psi : G \times M \longrightarrow M \times M$ denota a aplicação $\Psi(g,p) = (g.p,p)$. Suponha primeiro que Ψ é própria. Então para qualquer conjunto compacto $K \subset M$, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} G_K &= \{g \in G : \text{existem}\, p \in K \text{ tais que}\, g.p \in K\} \\ &= \{g \in G : \text{existem}\, p \in M \text{ tais que}\, \Psi(g,p) \in K \times K\} \\ &= \pi_G\left(\Psi^{-1}(K \times K)\right), \end{aligned}$$

onde $\pi_G : G \times M \longrightarrow G$ é a projeção. Assim, G_K é compacto. Reciprocamente, suponha G_K é compacto para qualquer conjunto compacto $K \subset M$. Se $L \subset M \times M$ é compacto e seja $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L) \subset M$, onde $\pi_1, \pi_2 : M \times M \longrightarrow M$ são as projeções sobre o primeiro e segundo fatores respetivamente. Então

$$\Psi^{-1}(L) \subset \Psi^{-1}(K \times K) \subset \{(g,p) : g.p \in K,\, p \in K\} \subset G_K \times K.$$

Como $\Psi^{-1}(L)$ é fechado por continuidade segue-se $\Psi^{-1}(L)$ é um subconjunto fechado do conjunto compacto $G_K \times K$ e portanto se conclui que é compacto.

□

Proposição 1.9. Seja M uma variedade e seja G um grupo de Lie agindo continuamente sobre M. A ação é própria se, e somente se, a seguinte condição é satisfeito:

$(*)$ Se $\{p_i\}$ é uma sequencia convergente em M e $\{g_i\}$ é uma sequencia em G tal que $\{g_i.p_i\}$ converge, então uma subsequencia de $\{g_i\}$ converge.

Demonstração. Seja $\Psi(g,p) = (g.p,p)$ como na demonstração anterior. Se Ψ é própria e $\{p_i\}$, $\{g_i\}$ são sequencias que satisfazem a hipóteses de $(*)$, sejam U e V vizinhanças pre-compacto dos pontos $p = \lim_{i\to\infty} p_i$ e $q = \lim_{i\to\infty}(g_i.q_i)$, respetivamente. A suposição significa que todos os pontos $\Psi(g_i,p_i)$ pertencem no conjunto compacto $\overline{U} \times \overline{V}$ quando i é suficientemente grande, portanto uma subsequencia de $\{(g_i,p_i)\}$ converge. Em particular, isto significa que uma subsequencia de $\{g_i\}$ converge em G.

Reciprocamente, suponha $(*)$ se cumpre e seja $L \subset M \times M$ um conjunto compacto. Se $\{(g_i,p_i)\}$ é sequencia arbitrária em $\Psi^{-1}(L)$ então $\Psi(g_i,p_i) = (g_i.p_i,p_i)$ pertence em L, assim passando para um subsequencia obtemos sequencias $\{p_i\}$ e $\{g_i\}$ satisfazendo a hipótese de $(*)$. A correspondente subsequencia de $\{(g_i,p_i)\}$ converge em $G \times M$ e como $\Psi^{-1}(L)$ é fechado em $G \times M$ por continuidade então o limite pertence em $\Psi^{-1}(L)$.

□

Corolário 1.1. Qualquer ação continua por um grupo de Lie compacto sobre uma variedade é própria.

Demonstração. Se $\{p_i\}$ e $\{g_i\}$ são sequencias que satisfazem a hipóteses de $(*)$, então uma subsequencia de $\{g_i\}$ converge pelo fácil razão que qualquer sequencia em G tem uma subsequencia convergente.

$\square$

Lema 1.2. Para qualquer ação continua de grupo de Lie G, sobre uma variedade M. A aplicação quociente $\pi : M \longrightarrow M/G$ é aberta.

Demonstração. Para qualquer aberto U de M, tem-se $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{g\in G}\psi_g(U)$. Como ψ_g é homeomorfismo, então $\psi_g(U)$ são abertos para cada g. De aqui, $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em M. Como π é aplicação quociente obtém-se $\pi(U)$ é aberto em M/G. Portanto, π é uma aplicação aberta.

$\square$

Teorema 1.6. Suponha um grupo de Lie G age suavemente, livremente, e propriamente sobre uma variedade suave M. Então o espaço de órbitas M/G é uma variedade topológica de dimensão igual a $dimM - dimG$ e tem uma única estrutura suave com a propriedade que a aplicação quociente $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão suave.

Demonstração. Primeiro mostremos a unicidade da estrutura suave. Suponha M/G têm duas estruturas suaves diferentes tal que $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão suave. Sejam $(M/G)_1$ e $(M/G)_2$ denotam a M/G, com estruturas suaves no primeiro e segundo respetivamente. Pelo Teorema 1.3, a aplicação identidade de $(M/G)_1$ para $(M/G)_2$ é suave:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ (M/G)_1 \arrow[r, "I"'] & (M/G)_2 \end{tikzcd}$$

O mesmo argumento mostra que em direção oposta também é suave. Assim, as duas estruturas suaves são iguais.

Em seguida mostraremos que M/G é uma variedade topológica:

Suponhamos que G age pela esquerda em M, e seja $\psi : G \times M \longrightarrow M$ denota a ação e $\Psi : G \times M \longrightarrow M \times M$ a aplicação própria definida por $\Psi(g, p) = (g.p, p)$.

i) M/G satisfaz segundo axioma de numerabilidade:

Se $\{U_i\}$ é uma base numerável para a topológica de M então $\{\pi(U_i)\}$ é uma coleção numerável de subconjuntos abertos de M/G (pois π é uma aplicação aberta.) E é imediato verificar que é uma base para a topológica de M/G. Assim, M/G satisfaz segundo axioma de numerabilidade.

ii) M/G é Hausdorff:
Defina a relação órbita $\mathcal{O} \subset M \times M$ por

$$\mathcal{O} = \Psi\left(G \times M\right) = \{(g.p, p) \in M \times M : p \in M,\ g \in G\}.$$

(É chamado a relação de órbita porque, $(q, p) \in \mathcal{O}$ se, e somente se, p e q pertencem na mesma órbita.) Como as aplicações próprias e continuas são aplicações fechados (pela Proposição 1.7), então $\mathcal{O}$ é um subconjunto fechado de $M \times M$. Se $\pi\left(p\right)$ e $\pi\left(q\right)$ são dois pontos de M/G tal que $\pi\left(p\right) \neq \pi\left(q\right)$ então p e q pertencem em órbitas diferentes, assim $(q, p) \notin \mathcal{O}$. Se $U \times V$ é uma vizinhança produto de (q, p) em $M \times M$ disjunto de $\mathcal{O}$, então $\pi\left(U\right)$ e $\pi\left(V\right)$ são subconjuntos abertos disjuntos de M/G contendo $\pi\left(p\right)$ e $\pi\left(q\right)$ respetivamente. Então M/G é Hausdorff.
Antes de provar que M/G é localmente euclidiano, demonstrarmos que a G-órbita são subvariedades mergulhadas de M difeomorfas a G. Para qualquer $p \in M$, defina a aplicação órbita $\psi^{(p)} : G \longrightarrow M$ por

$$\psi^{(p)}\left(g\right) = g.p.$$

Isto é uma aplicação suave cuja imagem é exatamente a G-órbita de p. Mostraremos que $\psi^{(p)}$ é um mergulho suave:

1) $\psi^{(p)}$ é injetiva.
De fato, se $\psi^{(p)}\left(g'\right) = \psi^{(p)}\left(g\right)$ então $\left(g^{-1}g'\right).p = p$. Como G age livremente sobre M, isto pode acontecer somente quando $g^{-1}g' = e$ $(e = 1)$, ou seja, $g = g'$; assim, $\psi^{(p)}$ é injetiva.

2) $\psi^{(p)}$ tem posto constante.
Com efeito, observe que

$$\psi^{(p)}\left(g'g\right) = g'.\psi^{(p)}\left(g\right),$$

assim, $\psi^{(p)}$ é equivariante com respeito à ação translação esquerda sobre G e a dada ação sobre M. Como G age transitivamente sobre se mesmo, então pelo teorema de posto equivariante implica que, $\psi^{(p)}$ tem posto constante.
Como $\psi^{(p)}$ satisfaz 1) e 2) segue-se que $\psi^{(p)}$ é uma imersão suave pelo Teorema 1.5.

3) $\psi^{(p)}$ é uma aplicação própria.
Se $K \subset M$ é um conjunto compacto, então pela continuidade $\left(\psi^{(p)}\right)^{-1}(K)$ é fechado em G e como está contido no conjunto compacto $G_{K\cup\{p\}} = \{g \in G : g\left(K \cup \{p\}\right) \cap \left(K \cup \{p\}\right) \neq \emptyset\}$, resulta que $\left(\psi^{(p)}\right)^{-1}(K)$ é compacto. Portanto, $\psi^{(p)}$ é uma aplicação própria. Como $\psi^{(p)}$ é imersão injetiva e própria, usando Teorema 1.4 obtém-se, $\psi^{(p)}$ é mergulho.

Seja $dimG = k$ e $dimM - dimG = n$.

Definição 1.18. Seja M uma variedade de $n+k$ dimensional e G um grupo de dimensão k. Se diz que uma carta coordenada $(\mathcal{U}, \varphi)$ em M, com funções coordenadas $(x, y) = \left(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^n\right)$ é uma carta adaptada para ação de G se

i) $\varphi(\mathcal{U})$ é um conjunto aberto produto $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$;

ii) Se cada órbita tem interseção não vazia com $\mathcal{U}$, então tal interseção tem forma de uma única fatia $\{y^1 = c^1, ..., y^n = c^n\}$, para alguns constantes $c^1, ..., c^n$.

Teorema 1.7. Se $\psi : G \times M \longrightarrow M$ é ação livre e própria então para todo p em M, existe uma carta adaptada centrada em p.

Demonstração. Seja $p \in M$ um ponto dado. Escolha qualquer carta fatia (W, φ_0) centrado em p para a órbita $G.p$ em M e escrevendo as funciones coordenadas de φ_0 como $\left(u^1, ..., u^k, v^1, ..., v^n\right)$. Como $G.p$ é uma subvariedade mergulhada de M, então satisfaz a condição local de k fatia, isto é,

$$\varphi_0\left(G.p \cap W\right) = \{\left(u^1, ..., u^k, v^1, ..., v^n\right) : v^1 = ... = v^n = 0\}.$$

Seja S uma subvariedade de W definido por $\{\left(u^1, ..., u^k, v^1, ..., v^n\right) : u^1 = ... = u^k = 0\}$ (isto, é a fatia perpendicular à órbita nestas coordenadas). Assim, T_pM se descompõe como soma direta:

$$T_pM = T_p\left(G.p\right) \oplus T_pS,$$

onde $T_p\left(G.p\right)$ é o espaço gerado por $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$ e T_pS é o espaço gerado por $\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)$.
Seja $\phi : G \times S \longrightarrow M$ a restrição da ação ψ ao $G \times S \subset G \times M$. Usaremos o teorema da função inversa para mostrar que ϕ é um difeomorfismo numa vizinhança de $(e, p) \in G \times S$. Seja $i_p : G \longrightarrow G \times S$ o mergulho suave dado por $i_p(g) = (g, p)$. A aplicação órbita $\psi^{(p)} : G \longrightarrow M$ é igual à composição

$$G \xrightarrow{i_p} G \times S \xrightarrow{\phi} M.$$

Como $\psi^{(p)}$ é um mergulho suave e cuja imagem é a órbita $G.p$, resulta que $\psi_*^{(p)}\left(T_eG\right)$ é igual ao subespaço $T_p\left(G.p\right) \subset T_pM$, e assim a imagem $\phi_* : T_{(e,p)}\left(G \times S\right) \longrightarrow T_pM$

contém a $T_p(G.p)$. Similarmente, se $j_e : S \longrightarrow G \times S$ é o mergulho suave dado por $j_e(q) = (e, q)$, então a inclusão $i : S \hookrightarrow M$ é igual à composição

$$S \overset{j_e}{\hookrightarrow} G \times S \overset{\phi}{\longrightarrow} M.$$

Portanto, a imagem de ϕ_* também inclui $T_pS \subset T_pM$. Como $T_p(G.p)$ e T_pS geram juntos a T_pM, resulta que $\phi_* : T_{(e,p)}(G \times S) \longrightarrow T_pM$ é sobrejetora e por ter as mesmas dimensões de domínio e codominio, ϕ_* é bijetiva. Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança produto $X \times Y$ de (e, p) em $G \times S$ e uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M tal que $\phi : X \times Y \longrightarrow \mathcal{U}$ é um difeomorfismo. Diminui X e Y se é necessário, vamos assumir que X e Y são conjuntos pre-compactos que são difeomorfos às bolas euclidianas em $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^n$ respetivamente.

Precisamos mostrar que $Y \subset S$ pode ser escolhido suficientemente pequeno de tal maneira que cada G-órbita intersecta a Y, ao máximo num só ponto. Por contradição, suponhamos caso contrário, então se $\{Y_i\}$ é uma base numerável para Y em p (isto é, uma sequencia de bolas coordenadas cujos diâmetros tende para zero), para cada i existem pontos diferentes p_i, p_i' em Y_i, que estão na mesma órbita, o qual quer dizer,

$$g_i.p_i = p_i', \text{ para algum } g_i \in G.$$

Como $\{Y_i\}$ é uma base, e temos ambas sequencias $\{p_i\}$ e $\{p_i' = g_ip_i\}$ convergente a p. Pela Proposição 1.9, podemos passar para subsequencias (e como G age propriamente sobre M) se assumi g_j converge para algum $g \in G$. Por continuidade, tem-se que

$$g.p = \lim_{i\to\infty} g_i.p_i = \lim_{i\to\infty} p_i' = p.$$

Como G age livremente, isto implica que $g = e$. Quando i é suficientemente grande temos $g_i \in X$. Mas isto contradiz o feito de que $\phi = \psi\big|_{X\times Y}$ é injetiva em $X \times Y$, porque

$$\psi_{g_i}(p_i) = p_i' = \psi_e(p_i'),$$

e se assumiu $p_i \neq p_i'$.

Escolha difeomorfismos $\alpha : B^k \longrightarrow X$ e $\beta : B^n \longrightarrow Y$ (onde B^k e B^n são bolas unitárias em $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^n$ respetivamente), e defina $\gamma : B^k \times B^n \longrightarrow \mathcal{U}$ por $\gamma(x, y) = \psi_{\alpha(x)}(\beta(y))$. Como γ é igual à composição de difeomorfismos

$$B^k \times B^n \overset{\alpha\times\beta}{\longrightarrow} X \times Y \overset{\phi}{\longrightarrow} \mathcal{U},$$

segue-se que γ é um difeomorfismo.

A aplicação $\varphi = \gamma^{-1}$, é portanto uma aplicação coordenada suave sobre $\mathcal{U}$.

Finalmente, mostraremos que $(\varphi,\mathcal{U})$ é uma carta adaptada para ação. De fato, a condição $i)$ é óbvio por construção.
Observe que cada conjunto fatia da forma $\{(x,y) : y = c\}$, onde c é constante está contido numa única órbita, já que

$$\psi\left(X \times \{p_0\}\right) \subset \psi\left(G \times \{p_0\}\right) = G.p_0,$$

onde $p_0 \in Y$ é o ponto cuja coordenada y é constante. Assim, se uma órbita arbitraria interceta a $\mathcal{U}$, fá-lo de uma união de fatias y= constantes. No entanto, como uma órbita arbitraria intersecta a Y no máximo uma vez e cada conjunto $\{(x,y) : y = c\}$ tem um ponto em Y, segue-se que cada órbita interceta a $\mathcal{U}$ em exatamente numa fatia da forma $\{y^1 = c^1, ..., y^n = c^n\}$, para certos constantes $c^1, ..., c^n$. Isto completa a prova que $(\varphi,\mathcal{U})$ é uma carta adaptada.

□

iii) M/G localmente euclidiano:
Seja $q = \pi(p)$ um ponto arbitrário de M/G. Pelo teorema de carta adaptado, existe uma carta $(\mathcal{U},\varphi)$ adaptada para M centrada em p, com $\varphi(\mathcal{U}) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Seja $V = \pi(\mathcal{U})$ que é um subconjunto aberto de M/G porque π é uma aplicação aberta. Com as funções coordenadas de φ podem ser escrito $\left(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^n\right)$, como antes, seja $Y \subset \mathcal{U}$ a fatia da forma $\{(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^n) : x^1 = ... = x^k = 0\}$. Note que $\pi : Y \longrightarrow V$ é bijetiva pela definição de uma carta adaptada. Além disso, se W é um subconjunto aberto de Y, então

$$\pi(W) = \pi\left(\{(x,y) : (0,y) \in W\}\right),$$

é aberto em M/G, e assim $\pi|_Y$ é um homeomorfismo. Seja $\sigma = (\pi|_Y)^{-1} : V \longrightarrow Y \subset \mathcal{U}$ que é uma seção local de π.
Defina uma aplicação $\eta : V \longrightarrow Y \subset U_2$ que envia a classe equivalência do ponto (x,y) para y, o qual está bem definido pela definição da carta adaptada.
Formalmente, $\eta = \pi_2 \circ \varphi \circ \sigma$, onde $\pi_2 : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$ é a projeção sobre o segundo fator

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[d, "\eta"] \\
U_1 \times U_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & U_2
\end{tikzcd}$$

Como σ é um homeomorfismo de V para Y e $\pi_2 \circ \varphi$ também é um homeomorfismo de Y para U_2, segue-se que η é um homeomorfismo. Isto completa a prova que M/G é uma

variedade topológica de n dimensional.
Finalmente, precisamos mostrar que: M/G tem estrutura suave tal que π é uma submersão.
Usaremos o atlas fornecido de todos as cartas (V,η) como foi construido acima. Com respeito a qualquer carta para M/G e a carta adaptado correspondente para M, π tem a representação coordenada $\pi(x,y)=y$, o qual é claramente uma submersão.
Assim, somente precisamos verificar: qualquer duas tais cartas para M/G são suavemente compatíveis.
Sejam $(\mathcal{U},\varphi)$ e $(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\varphi})$ duas cartas adaptadas para M e sejam (V,η) e $(\tilde{V},\tilde{\eta})$ as correspondentes cartas para M/G.
Primeiro considere o caso em que as dois cartas adaptadas estão centradas no mesmo ponto $p\in M$. Escrevemos as coordenadas adaptadas como (x,y) e $(\tilde{x},\tilde{y})$. O fato que as coordenadas são adaptadas para G-ação, significa que qualquer dois pontos com mesmo coordenada y estão na mesma órbita, e portanto também tem o mesma coordenada $\tilde{y}$. Isto significa que a aplicação transição entre estes coordenadas podem ser escrito, $(\tilde{x},\tilde{y})=(A(x,y),B(y))$, onde A e B são aplicações suaves definidas em algum vizinhança do origem. A aplicação de transição $\tilde{\eta}\circ\eta^{-1}$ é somente $\tilde{y}=B(y)$, que é claramente suave.
No caso geral, suponha que $(\mathcal{U},\varphi)$ e $\left(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\varphi}\right)$ são cartas adaptadas para M, $p\in\mathcal{U}$ e $\tilde{p}\in\tilde{\mathcal{U}}$ são pontos tais que $\pi(p)=\pi(\tilde{p})=q$. Ao modificar ambas cartas por acrescentar vetores constantes, pode obter assim, ditos cartas adaptadas centradas em p e $\tilde{p}$ respetivamente. Como p e $\tilde{p}$ estão na mesma órbita, existe um elemento de grupo g tal que $g.p=\tilde{p}$. Como ψ_g é um difeomorfismo que leva órbitas em órbitas, resulta que $\tilde{\varphi}'=\tilde{\varphi}\circ\psi_g$ é outra carta adaptada centrada em p. Além disso, $\tilde{\sigma}'=\psi_{g^{-1}}\circ\tilde{\sigma}$ é a seção local correspondente a $\tilde{\varphi}'$ e portanto,

$$\tilde{\eta}'=\pi_2\circ\tilde{\varphi}'\circ\tilde{\sigma}'=\pi_2\circ\tilde{\varphi}\circ\psi_g\circ\psi_{g^{-1}}\circ\tilde{\sigma}=\pi_2\circ\tilde{\psi}\circ\tilde{\sigma}=\tilde{\eta}.$$

Desta maneira, estamos na situação precedente então as duas cartas suaves são suavemente compatíveis.

□

Capítulo 2

Redução simplética

Neste presente capítulo, introduziremos os conceitos da geometria simplética e ações Hamiltonianas, em seguida apresentaremos o teorema de Marsden, Weinstein e Meyer. O teorema nos permite construir um quociente com uma estrutura simplética considerando certas hipóteses e nós vamos ter principal interesse no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ equipado com a forma de Fubini-Study ω_{FS} construido pela ação de S^1 em $\mathbb{C}^{n+1}$. Também obtemos uma aplicação de momento para a ação de $U(n+1)$ sobre $\mathbb{P}^n$.

2.1 Geometria simplética

2.1.1 Espaços vetoriais simpléticas

Apresentamos aqui alguns aspectos da álgebra linear simplética em espaço vetoriais.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão m e seja $\Omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear. A aplicação Ω é anti-simétrica se $\Omega\,(u, v) = -\Omega\,(v, u)$ para todo $u, v \in V$.

Definição 2.1. Uma aplicação bilinear anti-simétrica Ω é dito simplética se, é não degenerado (é dizer, para todo $u \in V$, $\Omega\,(v, u) = 0$, implica que $v = 0$). Ou equivalentemente, a aplicação linear $\tilde{\Omega} : V \longrightarrow V^*$, $v \mapsto \tilde{\Omega}\,(v)\,(u) = \Omega\,(v, u)$ é um isomorfismo.

Definição 2.2. Seja W um subespaço de um espaço vetorial simplético (V, Ω), se define o ortogonal simplético de W por

$$W^{\Omega} = \{v \in V : \Omega\,(v, w) = 0,\ \forall w \in W\}.$$

Teorema 2.1. Seja Ω uma aplicação bilinear anti-simétrica sobre V. Então existe uma base $\{u_1, ..., u_k, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ em V, tal que

$$\Omega(u_i, v) = 0,\ \forall i, \forall v \in V,$$
$$\Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j),\ \forall i, j,$$
$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij},\ \forall i, j.$$

Demonstração. A prova consiste em uma versão anti-simétrica de processo do Gram-Schmidt.
Seja $U = \{u \in V : \Omega(u, v) = 0,\ \forall v \in V\}$. Escolha uma base $\{u_1, ..., u_k\}$ de U, e um espaço complementar W de U, em V

$$V = U \oplus W.$$

Tome $e_1 \in W$, com $e_1 \neq 0$. Então existe $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$. Normalizando, suponha $\Omega(e_1, f_1) = 1$.
Sejam

$$W_1 = span\{e_1, f_1\}$$
$$W_1^{\Omega} = \{w \in W : \Omega(w, v) = 0, \forall v \in W_1\}.$$

Afirmação: $W_1 \cap W_1^{\Omega} = \{0\}$.
De fato, suponha $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^{\Omega}$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \Omega(v, e_1) &= a\Omega(e_1, e_1) + b\Omega(f_1, e_1) = -b, \\ 0 = \Omega(v, f_1) &= a\Omega(e_1, f_1) + b\Omega(f_1, f_1) = a. \end{aligned}$$

Então $v = 0$.
Afirmação: $W = W_1 \oplus W_1^{\Omega}$.
Com efeito, suponha que $v \in W$ e têm $\Omega(v, e_1) = c$ e $\Omega(v, f_1) = d$. Então

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1) \in W_1 \oplus {W_1}^{\Omega},$$

pois $-cf_1 + de_1 \in W_1$ e $\Omega(v + cf_1 - de_1, v) = c(-d) - d(-c) = 0$.
Seja $e_2 \in W_1^{\Omega}$ com $e_2 \neq 0$. Então existe $f_2 \in W_1^{\Omega}$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$. E suponha que $\Omega(e_2, f_2) = 1$, e repetindo o mesmo argumento acima tem-se $W_1^{\Omega} = W_2 \oplus W_2^{\Omega}$, assim podemos repetir sucessivamente esse argumento até que o processo pare (pois, V é dimensão finita). Obtemos,

$$V = U \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_n,$$

onde todos os termos da soma são ortogonais com respeito a Ω, e W_i tem base $\{e_i, f_i\}$ com, $\Omega(e_i, f_i) = 1$.

□

Para aplicação bilinear simplética Ω têm as seguintes propriedades:

i) Pelo Teorema 2.1, se deve ter $dimU = k = 0$, assim se pode concluir que todo espaço vetorial simplético tem dimensão par.

ii) Novamente pelo Teorema 2.1, o espaço vetorial simplético (V, ω) tem uma base $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ satisfazendo

$$\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij},\ \Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j)\,,\ i, j = 1, ..., n,$$

tal, base é chamado uma base simplética de (V, Ω).

Com respeito a uma base simplética tem-se

$$\Omega(u, v) = \begin{bmatrix} - & u & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

com u e v em coordenadas da base.

Definição 2.3. Um simplectomorfismo linear φ entre espaços vetoriais simpléticos (V, Ω) e (V', Ω'), é um isomorfismo linear $\varphi : V \xrightarrow{\simeq} V'$ tal que $\varphi^*\Omega' = \Omega$.

Na forma explicita $\varphi^*(\Omega')$ se define: para cada $u, v \in V$,

$$\left(\varphi^*\Omega'\right)(u, v) = \Omega'(\varphi(u), \varphi(v))\,.$$

Se existe um simplectomorfismo entre (V, Ω) e (V', Ω'), então dizemos que são simplectomorfos.

O prototipo do espaço simplético de dimensão 2n é $\left(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0\right)$, com Ω_0 definida com a base simplética:

$$\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n}\},$$

onde e_i denota vetor padrão.

Pelo Teorema 2.1, todo espaço vetorial simplético (V, Ω) de dimensão $2n$ é simplectomorfo ao prototipo $\left(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0\right)$, por um isomorfismo que leva a base simplética de (V, Ω)

para à base padrão de $\left(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0\right)$.

Definição 2.4. Seja W um subespaço de um espaço vetorial simplético (V, Ω).

Dizemos que W é

i) simplético se $\Omega|_W$ é não degenerado, ou equivalente $W \cap W^\Omega = \{0\}$.

ii) isotrópico se $\Omega|_W = 0$, isto é, $W \subseteq W^\Omega$.

iii) coisotropic se $W^\Omega \subseteq W$.

iv) lagrangiano se $W^\Omega = W$.

Vejamos alguns das propriedades para estes subespaços.

Lema 2.1. Seja W subespaço vetorial do espaço vetorial simplético (V, Ω). As seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $dimW + dimW^\Omega = dimV$;

ii) $\left(W^\Omega\right)^\Omega = W$;

iii) W é lagrangiano se, e somente se, $dimW = \frac{1}{2}dimV$ e $i^*\Omega = 0$, onde $i : W \hookrightarrow V$ é uma aplicação inclusão.

Demonstração: i) Define a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow W^* \\ v &\mapsto \Omega\left(v, .\right)|_W \end{aligned}$$

Suponha que φ é um elemento arbitrário de W^*, e seja a extensão $\tilde{\varphi} \in V^*$ de φ para um funcional linear definido em todo V. Como a aplicação $\tilde{\Omega} : V \longrightarrow V^*$, definido por $\tilde{\Omega}\left(v\right)\left(w\right) = \Omega\left(v, w\right)$, é um isomorfismo, então existe $v \in V$ tal que $\Omega\left(v, .\right) = \tilde{\varphi}$. Segue-se $\Phi\left(v\right) = \varphi$, portanto Φ é sobrejetora. Por outro lado, por definição de W^Ω tem-se $W^\Omega = Ker\Phi$, e concluímos pela relação posto e Ker:

$$dimW + dimW^\Omega = dimV.$$

ii) Seja $w \in W$. Por definição de W^Ω, para todo $v \in W^\Omega$ tem-se $\Omega\left(w, v\right) = 0$. Portanto, $w \in \left(W^\Omega\right)^\Omega$. Assim, $W \subseteq \left(W^\Omega\right)^\Omega$. Usando o resultado i), obtemos

$$\begin{aligned} dimW^\Omega + dim\left(W^\Omega\right)^\Omega &= dimV; \\ dimW + dimW^\Omega &= dimV. \end{aligned}$$

De aí, $dim\left(W^{\Omega}\right)^{\Omega} = dimW$. Por ter as mesmas dimensões se conclui $\left(W^{\Omega}\right)^{\Omega} = W$.
iii) por i), $dimW = \frac{1}{2}dimV$, e $i^{*}\Omega = 0$.

□

2.1.2 Variedades simpléticas

Sempre assumirmos M uma variedade suave. Nesta seção veremos o conceito de variedade simplética. É claro que nem toda variedade suave M (m-dimensional) admite uma estrutura simplética pois a existência de uma tal estrutura impõe sobre a variedade M certas condições.

Definição 2.5. Uma variedade simplética é um par (M, ω), onde M é uma variedade real e ω 2-forma em M satisfazendo

i) $d\omega = 0$, ou seja, fechado;

ii) Para todo $p \in M$, ω_p é não-degenerada como forma bilinear no espaço tangente T_pM.

Se observa para uma variedade simplética em cada ponto p de M se define a função $v \longmapsto \omega(v, \,.\,)$, o qual é isomorfismo de T_pM ao T_p^*M. Pelo Teorema 2.1 segue-se $dimT_pM$ tem dimensão par, então se conclui que toda variedade simplética necessariamente tem dimensão par.

Exemplo 2.1. Seja $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ com forma definido $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$. Considere uma base $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)|_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)|_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)|_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)|_p\}$. Seja $u = \alpha^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta^j \frac{\partial}{\partial y_j}$ um arbitrário em $T_p\mathbb{R}^{2n}$ e $v \in T_p\mathbb{R}^{2n}$ obtém-se

$$\omega\left(u, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\beta^j = 0,$$
$$\omega\left(u, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \alpha^i = 0.$$

De aqui, $u = 0$. Já sabemos que ω é não degenerada e como $d\left(dx_i\right) = 0$, $d\left(dy_i\right) = 0$, temos que $d\omega = 0$. Logo, $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ é uma variedade simplética.

Exemplo 2.2. Seja $M = S^2$, considerada como o conjunto de vetores unitários em $\mathbb{R}^3$. Os vetores tangentes a S^2 em p é identificado como vetores ortogonais a p. A forma simplética padrão sobre S^2 é induzido pelo produto interior e produto vetorial

$$\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v \rangle.$$

Está forma é fechada, já que $d\omega \in \Omega^3(M) = \{0\}$; e é não degenerada pois existe $v = u \times p \in T_pS^2$ tal que

$$\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v\rangle = \langle p \times u, u \times p\rangle = -|u \times p| \neq 0$$

quando $u \neq 0$.

Exemplo 2.3. Considere coordenadas cilíndricas (θ, h) sobre S^2 com $0 \leq \theta < 2\pi$ e $-1 < h < 1$. Nestas coordenadas a forma simpléctica padrão em S^2 é a forma área dada por:

$$\omega_{st} = d\theta \wedge dh.$$

Com efeito, seja $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ e seja $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$. A 2-forma $\omega = i_X\left(dx \wedge dy \wedge dz\right) = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$ restrito a coordenadas

$$x = \sqrt{1-h^2}\cos\theta,\ y = \sqrt{1-h^2}\text{sen}\theta,\ z = h,$$

obtém-se

$$\omega_{st} = d\theta \wedge dh.$$

Exemplo 2.4. Considere um espaço vetorial complexa V com produto interno Hermitiano $\langle\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$. Uma estrutura de espaço vetorial V dotada com parte imagina de produto interno Hermitiano, com sinal menos tem uma estrutura simplética.
Em particular, se $V = \mathbb{C}^n$ então o produto interno padrão sobre $\mathbb{C}^n$ é dado por:

$$\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k},$$

tem a parte imaginaria

$$Im\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left(Re\left(w_k\right) Im\left(z_k\right) - Re\left(z_k\right) Im\left(w_k\right)\right).$$

Então $\omega_0\left(z, w\right) = -Im\langle z, w\rangle$ tem estrutura simplética. Seja $(z_1, ..., z_n)$ um sistema de coordenadas de $\mathbb{C}^n$ e onde $z_k = x_k + iy_k$, para cada $k = 1, ..., n$; e identificando $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$. Temos com respeito ao base dual de $\mathbb{R}^{2n}$,

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

Exemplo 2.5. [Fibrado cotangente] Seja M uma variedade real de dimensão n. Para cada $p \in M$, denotaremos por $T_p^*M := (T_pM)^*$ o espaço dual de T_pM.

Chamaremos de fibrado cotangente ao conjunto

$$T^*M = \{(p, \xi) : p \in M, \xi \in T_p^*M\}.$$

Como M é uma variedade, podemos descrever em uma carta de coordenada $(\mathcal{U}, x_1, ..., x_n)$, com $x_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, então em qualquer $p \in \mathcal{U}$, as diferenciais $\{(dx_1)_p, ..., (dx_n)_p\}$ formam uma base de T_p^*M. Sabemos que se $\xi \in T_p^*M$ então $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_p$, onde ξ_i são coeficientes reais. Isto induz uma aplicação

$$\begin{aligned} T^*\mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \xi) &\longmapsto (x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) \end{aligned}$$

A carta $(T^*\mathcal{U}, x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ é uma carta de coordenada para T^*M; as coordenadas $x_1, ..., x_n$, $\xi_1, ..., \xi_n$ são as coordenadas cotangentes associadas a coordenadas $x_1, ..., x_n$, sobre $\mathcal{U}$. As funções de transição em interseção de duas cartas suaves: dadas duas cartas $(\mathcal{U}, x_1, ..., x_n)$, $(\mathcal{U}', x_1', ..., x_n')$ e $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, se $\xi \in T_p^*M$ então

$$\begin{aligned} \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_p &= \sum_{i,j}^n \xi_i \Big(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\Big)(dx_j')_p \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j' (dx_j')_p, \end{aligned}$$

onde $\xi_j' = \sum_{i=1}^n \xi_i \big(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\big)$ é suave. Portanto, T^*M é uma variedade suave de dimensão 2n.

Agora veremos que todo fibrado cotangente possui uma estrutura simplética canônica. Seja $(\mathcal{U}, x_1, ..., x_n)$ um carta de coordenada para p em M, então define uma carta de coordenada $(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ para o ponto (p, φ) em T^*M. Logo, existe τ 1-forma sobre T^*M chamado 1-forma tautológico, onde $\tau_{(p,\varphi)} : T_{(p,\varphi)}(T^*M) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a composição

$$\begin{aligned} \tau_{(p,\varphi)} := \varphi \circ d\pi_{(p,\varphi)} : T_{(p,\varphi)}(T^*M) &\longrightarrow T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \varphi(d\pi_{(p,\varphi)}(v)) \end{aligned}$$

onde $d\pi_{(p,\varphi)} : T_{(p,\varphi)}(T^*M) \longrightarrow T_pM$ é a derivada da projeção $\pi : T^*M \longrightarrow M$ em $p \in M$. Com respeito a coordenada local de acima, temos

$$\tau = \sum_{k=1}^n \xi_k dx_k.$$

Definimos 2-forma $\omega = -d\tau$ em T^*M por

$$\omega = -\sum_{k=1}^n d\xi_k \wedge dx_k = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge d\xi_k.$$

A forma ω é fechado e não degenerado pelo exemplo 2.1 e por isso, define uma forma simplética sobre T^*M.

Proposição 2.1. As seguintes afirmações são operações naturais sobre variedades simpléticas:

a) (Somas) Sejam (M_1, ω_1), e (M_2, ω_2) variedades simpléticas. Então a união disjunta $(M_1 \sqcup M_2, \omega_1 \sqcup \omega_2)$ é uma variedade simplética.

b) (Produto) Sejam (M_j, ω_j) variedades simpléticas,$j = 1, 2$. Então o produto $M_1 \times M_2$, equipado com a 2- forma $\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$ é uma variedade simplética, onde $\pi_j : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_j$, $j = 1, 2$ é a aplicação de projeção sobre M_j.

c) (*Dual*) Seja (M, ω) uma variedade simplética. Então o dual $(M, -\omega)$ (ou mais geralmente $(M, \lambda\omega)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$), é uma variedade simplética.

Demonstração: a) Defina

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 & \text{se } p \in M_1, \\ \omega_2 & \text{se } p \in M_2. \end{cases}$$

é claro que é fechado e não degenerado.
b) Seja $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$, 2-forma em $M_1 \times M_2$. Então ω é fechado, já que

$$d\omega = \pi_1^* (d\omega_1) + \pi_2^* (d\omega_2) = 0.$$

Enquanto, como $\pi_1^*TM_1 \times \pi_2^*TM_2 \simeq T(M_1 \times M_2)$, numa carta de coordenada de $M_1 \times M_2$, qualquer vetor V em $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ é escrito como $v_1 + v_2 \in T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$, com $d\pi_1(V) = v_1$ e $d\pi_2(V) = v_2$. Como ω_1 e ω_2 são não degenerados, existem u_1 e u_2 tais que $\omega_1(v_1, u_1) > 0$, $\omega_2(v_2, u_2) > 0$, para todo $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Assim,

$$\omega(V, U) = \omega_1(v_1, u_1) + \omega_2(v_2, u_2) > 0,$$

para algum $U = (u_1, u_2)$ em $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$. E portanto, segue o desejado.
c) É imediato verificar que $(M, \lambda\omega)$ é uma variedade simplética, pois (M, ω) o é.

$\square$

Definição 2.6. Seja (M, ω) uma variedade simplética. Um campo vetorial X tal que

$$d(i_X\omega) = 0$$

diz-se o campo vetorial simplético.

Note que o fluxo de um campo vetorial simplético X preserva a forma simpléctica:

$$\mathcal{L}_X \omega = d\left(i_X \omega\right) + i_X\left(d\omega\right) = 0.$$

Definição 2.7. Um campo vetorial X_H tal que

$$dH = i_{X_H}\omega$$

diz-se o campo vetorial Hamiltoniano com função Hamiltoniana H.

Por não ser degenerado ω, qualquer função $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é um função Hamiltoniana para algum campo vetorial Hamiltoniano porque a equação $i_X\omega = dH$ pode ser resolvida para um campo suave X. Se X_H é campo Hamiltoniano em M (compacto) então

$$\mathcal{L}_{X_H} H = i_{X_H} dH = i_{X_H} i_{X_H}\omega = 0,$$

é dizer, campos vetoriais Hamiltonianos preservam as suas funções Hamiltonianas e cada curva integral $\{\rho_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ de X_H está contido no conjunto de nível de H, isto é,

$$H(x) = \left(\rho_t^* H\right)(x) = H\left(\rho_t(x)\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.6. Na variedade simplética $\left(S^2, d\theta \wedge dh\right)$, o campo $X = \frac{\partial}{\partial\theta}$ é Hamiltoniano com função Hamiltoniana dada pela função altura:

$$i_X\left(d\theta \wedge dh\right) = dh.$$

A noção gerado por este campo vetorial é rotação sobre eixo vertical, que naturalmente preserva área e altura.
Entanto, se $X = \frac{\partial}{\partial h}$ então não é Hamiltoniano, e cujo fluxo é translação por h.

Exemplo 2.7. Na variedade simplética $\left(\mathbb{T}^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2\right)$, os campos vetoriais $X_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1}$ e $X_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_2}$ são simpléticas mais não Hamiltonianos, e seu fluxos são rotacionais com velocidades constantes.
X é um campo vetorial simplético se, e somente se, $i_X\omega$ é fechada, por isso, $i_X\omega$ define uma classe de cohomologia de Rham em $H^1_{dR}(M)$. X é Hamiltoniano se, e somente se, $i_X\omega$ é exata, ou seja, $[i_X\omega] = 0$ em $H^1_{dR}(M)$.

Exemplo 2.8. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ e com a forma simplética $\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp^j$. Vamos determinar X_H.
Dado o sistema referido, X_H terá que ser uma combinação linear do tipo $X_H = \sum_{i=1}^n (a^i \frac{\partial}{\partial q_i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i})$ com $a_i,\ b_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
Assim, para um vetor qualquer $v \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
i_{X_H}\omega(v) &= \sum_{j=1}^{n} dq^j \wedge dp^j (\sum_{i=1}^{n} (a^i \frac{\partial}{\partial q_i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i}), v) \\
&= \sum_{j,i}^{n} dq^j \wedge dp^j \Big((a^i \frac{\partial}{\partial q_i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i}), v \Big) \\
&= \sum_{j} \big(a_j dp^j(v) - b_j dq^j(v) \big) \\
&= \sum_{j} (a_j dp^j - b_j dq^j)(v).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$dH(v) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p^i} dp^i \Big)(v)$$

Como os dq^j's e dp^j's são linearmente independente e $dH(v) = i_{X_H}\omega(v)$, obtemos

$$a_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}\ , \ \ b_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

ou seja,

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \Big).$$

Definição 2.8. Para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se define bracket de Poisson como uma função,

$$\{f, g\} = \omega\left(X_f, X_g\right).$$

Proposição 2.2. Para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, temos

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_g} f = -\mathcal{L}_{X_f} g.$$

Demonstração. Por definição de X_g, tem-se

$$i_{X_g}\omega = dg$$

logo, para X_f temos

$$\omega\left(X_g, X_f\right) = dg\left(X_f\right) = \mathcal{L}_{X_f} g = -\mathcal{L}_{X_g} f.$$

□

Corolário 2.1. Para $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $g \longmapsto \{f_0, g\}$ é uma derivação.

Demonstração. Para $g, h \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, temos

$$\begin{aligned}\{f_0, gh\} &= -d(gh)(X_{f_0}) \\ &= -gdh(X_{f_0}) - hdg(X_{f_0}) \\ &= \{f_0, h\}g + \{f_0, g\}h.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. A função bilinear

$$\{\ ,\ \} : \mathcal{C}^{\infty}(M) \times \mathcal{C}^{\infty}(M) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

satisfaz

i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (Anti-simétrica).

ii) $\{h, \{f, g\}\} + \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (Identidade de Jacobi)

Demonstração: i). $\{f, g\} = -\omega(X_g, X_f) = -\{g, f\}$.
ii) Usando $d\omega = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) \\ &= X_f\omega(X_g, X_h) - X_g\omega(X_f, X_h) + X_h\omega(X_f, X_g) - \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega([X_f, X_h], X_g) \\ &- \omega([X_g, X_h], X_f),\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$X_f\omega(X_g, X_h) = \{\{g, h\}, f\}, -X_g\omega(X_f, X_h) = -\{\{f, h\}, g\}, X_h\omega(X_f, X_g) = \{\{f, g\}, h\} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}-\omega([X_f, X_g], X_h) &= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\}, \\ \omega([X_f, X_h], X_g) &= \{\{g, f\}, h\} - \{\{g, h\}, f\}, \\ -\omega([X_g, X_h], X_f) &= \{\{f, h\}, g\} - \{\{f, g\}, h\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Substituindo as equações 2.2 e 2.3 em 2.1, obtém-se

$$\{h, \{f, g\}\} + \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

□

Portanto, se (M, ω) é uma variedade simplética então $(\mathcal{C}^{\infty}(M), \{.,.\})$ é uma álgebra de Poisson, isso quer dizer que tem uma estrutura de álgebra de Lie com um produto associada para qual se cumpre a regra de Leibniz. Além disso, temos um anti-homomorfismo de álgebras de Lie $\mathcal{C}^{\infty}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, $H \longmapsto X_H$.

2.2 Aplicação de momento

Na presente seção, definiremos o conceito de ação Hamiltoniana para uma ação simplética e mostraremos alguns exemplos.

Definição 2.9. Uma ação de um grupo de Lie G sobre variedade uma M é um homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow Diff\,(M) \\ g &\longmapsto \psi_g, \end{aligned}$$

onde $Diff\,(M)$ é o grupo de difeomorfismos de M. A aplicação de avaliação associada com uma ação $\psi : G \longrightarrow Diff\,(M)$ é

$$\begin{aligned} ev_\psi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g,p) &\longmapsto \psi_g\,(p)\,. \end{aligned}$$

Dizemos que a ação ψ é suave se, ev_ψ é uma aplicação suave. Sempre suporemos que a ação é suave.

Definição 2.10. Uma aplicação suave $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ de variedades simpléticas (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) é *chamada simplética* se $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.

Definição 2.11. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas. Dizemos que (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) são *simplectomorfos* se existe um difeomorfismo $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.

Definição 2.12. Dada uma ação $\psi : G \longrightarrow Diff\,(M)$ e (M, ω) variedade simplética. Se define

$$Simp\,(M, \omega) = \{\psi_g : \psi_g^*\omega = \omega\}.$$

Donde, $Simp\,(M, \omega)$ tem uma estrutura de grupo.

Definição 2.13. Seja (M, ω) uma variedade simplética e G um grupo de Lie com uma ação $\psi : G \longrightarrow Diff(M)$. A ação é *simplética* se, é por simplectomorfismos, isto é,

$$\psi : G \longrightarrow Simp(M, \omega) \subset Diff(M).$$

Um campo vetorial simplético completo determina uma ação simplética de $\mathbb{R}$ sobre M. Reciprocamente, qualquer ação simplética suave de $\mathbb{R}$ sobre M define um campo vetorial completo, isto é,

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Campo vetorial completo simplético em } M\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ação simplética suave de } \mathbb{R} \text{ sobre } M\} \\ X & \longmapsto & \exp\,(tX) \\ X_p = \left.\dfrac{d\psi_t\,(p)}{dt}\right|_{t=0} & \longleftarrow & \psi \end{array}$$

Exemplo 2.9. Sobre a esfera $\left(S^2, d\theta \wedge dh\right)$, o grupo de um parâmetro de difeomorfismos dado por rotação ao redor do eixo vertical $\psi_t\left(\theta, h\right) = (\theta + t, h)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, é uma ação simplética do grupo S^1, pois preserva a forma de área $d\theta \wedge dh$. Como o campo vetorial definido por ψ é Hamiltoniano com função Hamiltoniana h, isto é um exemplo de ação Hamiltoniana de S^1.

Exemplo 2.10. No toro $\left(\mathbb{T}^2, d\theta_1 \wedge d\theta_2\right)$ simplético, o subgrupo de um parâmetro de difeomorfismos dado por rotação ao redor de cada círculo $\psi_{1,t}\left(\theta_1, \theta_2\right) = \left(\theta_1 + t, \theta_2\right)$ e $\psi_{2,t}\left(\theta_1, \theta_2\right) = \left(\theta_1, \theta_2 + t\right)$ são ações simpléticas.

Ações Hamiltonianas

Definiremos uma aplicação muito importante que será útil para a construção de quociente simplético.

Definição 2.14. Seja (M, ω) uma variedade simplética, G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $\psi : G \longrightarrow Simp(M, \omega)$ uma ação simplética. A ação ψ é uma *ação Hamiltoniana* se existe uma aplicação

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

que satisfaz:

i) Para qualquer $\xi \in \mathfrak{g}$, sejam

- $\mu^\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu^\xi(p) := \langle \mu(p), \xi \rangle$, é a componente de μ ao longo de ξ.
- ξ^M é o campo vetorial sobre M gerado pelo subgrupo de um parâmetro $\{\exp(t\xi) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq G$.
  Então $i_{\xi^M}\omega = d\mu^\xi$, ou seja, μ^ξ é uma função Hamiltoniana para o campo vetorial ξ^M.

ii) μ é equivariante com respeito às ações dada por ψ de G sobre M e Ad^* ação coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$, isto é,

$$\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu.$$

A aplicação μ é chamada *aplicação de momento* para a ação Hamiltoniana.

Equivalentemente, a ação é Hamiltoniana se existe um levantamento $m : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, G-equivariante da aplicação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, onde G age sobre $\mathfrak{g}$ pela ação adjunta. No diagrama abaixo, Ham refere ao construção Hamiltoniano:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}^\infty(M) \arrow[d, "Ham"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "\rho"'] & \mathfrak{X}(M) \end{tikzcd}$$

Para qualquer campo vetorial Hamiltoniano X o possível levantamento ao $\mathcal{C}^\infty(M)$ todos diferem por adição de constantes. A equivariança requere uma escolha consistente de tal levantamento.

A coleção (M, ω, G, μ) é chamada *G-espaço Hamiltoniano*. E alguns vezes denotamos o campo vetorial gerado pelo subgrupo de um parâmetro por $\xi^{\#}$.

A continuação vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.11. Suponhamos que a forma simplética ω é exata (e portanto, M não é compacta). Escolhemos λ 1-forma tal que $\omega = -d\lambda$. A ação simplética de um grupo de Lie G em M é chamado exata se $\psi_g^*\lambda = \lambda$, para todo $g \in G$. Provaremos qualquer ação simplética exata é Hamiltoniana com função Hamiltoniana $\mu^\xi = i_{\xi^M}\lambda$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. De fato, como $\psi_g^*\lambda = \lambda$ implica que $\mathcal{L}_{\xi^M}\lambda = 0$. Logo, pela formula de Cartan temos

$$0 = \mathcal{L}_{\xi^M}\lambda = i_{\xi^M}d\lambda + d(i_{\xi^M}\lambda).$$

Isto é,

$$i_{\xi^M}\omega = d(i_{\xi^M}\lambda)$$

e portanto, $\mu^\xi = i_{\xi^M}\lambda$ para $\xi \in \mathfrak{g}$.
Seja $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ a aplicação de momento. Para mostrar que μ é equivariante, basta mostrar que:

$$\mu^\xi(g.p) = \mu^{Ad_{g^{-1}}\xi}(p),\ \forall g \in G,\ p \in M, \text{ e } \xi \in \mathfrak{g}.$$

Da definição μ^ξ obtida acima, isto equivale a

$$\left(i_{\xi^M}\lambda\right)(g.p) = \left(i_{(Ad_{g^{-1}}\xi)^M}\lambda\right)(p),$$

ou seja,

$$\lambda_{gp}\left(\xi^M(g.p)\right) = \lambda_p\left(\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^M(p)\right).$$

Pelo Lema 1.4, tem-se

$$\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^M(p) = \left(\psi_{g^{-1}}\right)_{*gp}\left(\xi^M(g.p)\right)$$

e como λ é G-invariante ($\psi_g^*\lambda = \lambda$), isto é, para todo $Y_p \in T_pM$,

$$\lambda_{gp}\left(\left(\psi_g\right)_{*p}(Y_p)\right) \quad = \quad \lambda_p(Y_p) \tag{2.4}$$

resulta que

$$\left(\psi_g\right)_{*p}(Y_p) = \left(\psi_g\right)_{*p}\left(\left(\psi_{g^{-1}}\right)_{*g.p}\right)\left(\xi^M(g.p)\right) = \xi^M(g.p)\,,$$

para $Y_p = \left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^M(p)$. De (2.4),

$$\lambda_{g.p}\left(\xi^M(g.p)\right) = \lambda_p(\left(Ad_{g^{-1}}\xi\right)^M(p)).$$

Portanto, μ é equivariante.

Exemplo 2.12. Seja $Q = T^*M$ o fibrado cotangente. Considere uma ação de G sobre M, $\psi : G \times M \longrightarrow M$, $(g,p) \longmapsto g.p$. Esta ação induz uma ação sobre Q, da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi}: & G \times Q & \longrightarrow & Q \\ & (g,(q,\alpha_q)) & \longmapsto & \tilde{\psi}_g(q,\alpha_q) = \psi^*_{g^{-1}}\alpha_q, \end{array}$$

onde, o ponto $m \in T^*M$ é escrito como o par $m = (q, \alpha_q)$, com $q \in M$ e $\alpha_q \in T_q^*M$. Para $m = (q, \alpha_q) \in T^*M$ e $\xi \in \mathfrak{g}$ com gerador infinitesimal ξ^M sobre M:

$$\xi^M(q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).q$$

A ação acima age de maneira Hamiltoniana com aplicação de momento μ determinado por

$$\mu^\xi(q,\alpha_q) = \alpha_q\left(\left(\xi^M\right)(q)\right).$$

De fato, como a ação de G sobre M é estendida para uma ação de G sobre T^*M temos que a projeção $\pi : T^*M \longrightarrow M$ é G-equivariante, isto é,

$$\psi_g \circ \pi = \pi \circ \tilde{\psi}_g.$$

Como π é G-equivariante e supondo $g = \exp(t\xi)$ então diferenciando com respeito a t em $t = 0$, obtemos

$$\xi^M \circ \pi \quad = \quad \pi_* \circ \xi^Q \tag{2.5}$$

A definição de 1-forma τ canónica sobre T^*M, com $\pi_* : T_m(T^*M) \longrightarrow T_qM$ para $m = (q, \alpha_q)$ e $X_m \in T_m(T^*M)$ obtemos a igualdade

$$\tau_{(q,\alpha_q)}\left(X_{(q,\alpha_q)}\right) = \alpha_q\left(\pi_{*(q,\alpha_q)}X_{(q,\alpha_q)}\right).$$

Empregando isto e a equação (2.5), tem-se

$$\begin{aligned}\left(i_{\xi^Q}\tau\right)(q,\alpha_q) &= \tau_{(q,\alpha_q)}\left(\xi^Q(q,\alpha_q)\right)\\ &= \alpha_q\left(\pi_{*(q,\alpha_q)}\left(\xi^Q(q,\alpha_q)\right)\right)\\ &= \alpha_q\left(\xi^M(q)\right).\end{aligned}$$

Além disso, para $\beta \in T^*M$ e $v \in T_\beta(T^*M)$

$$\begin{aligned}(\tilde{\psi}_g^*\tau)_\beta(v) &= \tau_{\tilde{\psi}_g(\beta)}(\tilde{\psi}_{g*}v)\\ &= \psi_{g^{-1}}^*(\beta)((\pi\circ\tilde{\psi}_g)_*(v))\\ &= \beta(\psi_{g^{-1}*}(\pi\circ\tilde{\psi}_g)_*(v))\\ &= \beta(\pi_*(v))\\ &= \tau_\beta(v).\end{aligned}$$

Então satisfaz a condição do Exemplo 2.11, logo concluímos que esta ação é Hamiltoniana e $\mu^\xi(q,\alpha_q) = \alpha_q(\xi^M(q))$.

Exemplo 2.13. [Aplicação de momento] considere a ação diagonal de $G = SO(3)$ sobre $M = \mathbb{R}^6$ (com a estrutura simpléctica padrão) por

$$\psi_\Phi(x,y) = (\Phi x, \Phi y)$$

para $\Phi \in SO(3)$. Um simples cálculo mostra que a ação é exata e portanto, a ação é Hamiltoniana, pelo Exemplo 2.11.

Seja $A \in \mathfrak{so}(3)$. Para obter μ^A tal que $\mu^A(q) = i_{A^M}\lambda$, calculemos o campo vetorial A^M gerado por subgrupo de um parâmetro de seguinte maneira

$$\begin{aligned}A^M &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(exp(tA)x, exp(tA)y),\\ A^M &= (Ax, Ay),\\ A^M &= \sum_{i,j}^{3} A_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k,l}^{3} A_{kl}y_l\frac{\partial}{\partial y^l}.\end{aligned}$$

Assim,

$$i_{A^M}\lambda = (\sum_{m=1}^{3} y_m dx_m)(\sum_{ij}^{3} A_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{k,l}^{3} A_{kl}y_l\frac{\partial}{\partial y^l}),$$
$$i_{A^M}\lambda = \sum_{i,j}^{3} y_j A_{ij} x_j,$$
$$i_{A^M}\lambda = \langle y, Ax\rangle.$$

Temos $\mu^A(x,y) = \langle y, Ax\rangle$, para $A = -A^T$. Por outro lado, podemos fazer a seguinte identificação $(\mathbb{R}^3, \times) \longrightarrow (\mathfrak{so}(3), [.,.])$ por

$$\xi = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \longmapsto A_\xi = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $A_\xi x = (a,b,c) \times x$, para $\xi, x \in \mathbb{R}^3$ e

$$[A_\xi, A_\eta] = A_{\xi\times\eta},\ Tr\left(A_\xi^T A_\eta\right) = 2\langle \xi, \eta\rangle.$$

A última identidade implica que o produto interno padrão em $\mathbb{R}^3$ induz um produto interior invariante sobre $\mathfrak{so}\,(3)$ e o dual $\mathfrak{so}\,(3)^*$ pode ser identificado com $\mathfrak{so}\,(3)$ via este produto interno. Com esta notação a função Hamiltoniana μ^{A_ξ} pode ser escrita na forma $\mu^{A_\xi}(x,y) = \langle y, (a,b,c) \times x\rangle = \langle (a,b,c), x \times y\rangle$. Portanto, a aplicação $\mu(x,y) = x \times y$ é aplicação de momento de $\mathbb{R}^6$ para $(\mathbb{R}^3)^*$. Se pensarmos x como sendo a posição e y como coordenada de momento então $x \times y$ é chamado o momento angular.

Exemplo 2.14. Seja $(\mathbb{C}, \omega_0 = \frac{i}{2}dz \wedge d\bar{z})$ uma variedade simplética. Considere a ação S^1 agindo sobre $\mathbb{C}$ por rotações

$$\psi_{e^{i\theta}}\,(z) = e^{ik\theta}.z,\ \ e^{i\theta} \in S^1,$$

onde k é fixo. A ação $\psi : S^1 \longrightarrow Diff\,(\mathbb{C})$, é Hamiltoniana com aplicação de momento $\mu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = Lie\left(S^1\right)$ definida por

$$\mu(z) = -\frac{k}{2}\,|z|^2\,.$$

Com efeito, verificaremos em coordenadas polares: para isso em coordenadas tem-se, $\omega_0 = rdr \wedge dt$ para $z = re^{it}$ e devemos verificar que $\mu\left(re^{it}\right) = -\frac{k}{2}r^2$. Logo, para $p = (r,t)$

$$\xi^{\#} = \frac{d}{d\theta}\bigg|_{\theta=0}(r, t+\theta k) = k\frac{\partial}{\partial t}$$

obtemos

$$i_{\xi^{\#}}\omega_0 = -krdr = d\langle -\frac{k}{2}r^2, 1\rangle, \text{para}\, \xi = 1.$$

Exemplo 2.15. Suponha que $\mathbb{T}^n$ age sobre espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$ da forma

$$\left(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}\right).(z_1, ..., z_n) = \left(e^{i\theta_1}z_1, ..., e^{i\theta_n}z_n\right),$$

com forma simplética $\omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k$. Então é Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\mu(z_1, ..., z_n) = -\frac{1}{2}\left(|z_1|^2, ..., |z_n|^2\right)$$

De fato, reescrevendo a ação em termos de coordenadas polares tem-se:

$$(\theta_1, ..., \theta_2).(r_1, t_1, ..., r_n, t_n) = (r_1, \theta_1 + t_1, ..., r_n, \theta_n + t_n),$$

onde $z_k = r_k e^{it_k}$.

Seja $V = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ um elemento de $Lie\,(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{R}^n$ e $p = (r_1, t_1, ..., r_n, t_n)$. Então

$$\begin{aligned} V^{\#}(p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(r_1, t_1 + t\theta_1, ..., r_n, t_n + t\theta_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\theta_k\frac{\partial}{\partial t_k} \end{aligned}$$

$$i_{V^{\#}}\omega_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k dr_k \wedge dt_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\frac{\partial}{\partial t_k}\right) = d\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k^2}{2}\theta_k\right),$$

ou seja, $\mu(p) = -\frac{1}{2}\left(r_1^2, ..., r_n^2\right)$. A equivariança vem da invariante de μ porque $\mathbb{T}^n$ é grupo abeliano.

Seja $\omega_0 = -Im\langle,\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$, denota nosso produto interno simplético em $V = \mathbb{C}^{n+1}$, então

$$\omega_0\,(v, w) = \frac{i}{2}\left(\langle v, w\rangle - \overline{\langle v, w\rangle}\right).$$

Lema 2.2. Seja $U(n+1)$ espaço de matrizes unitários define uma ação natural sobre $V = \mathbb{C}^{n+1}$. Então existe um aplicação de momento $\mu : V \longrightarrow \mathfrak{u}(n+1)^*$ dada por

$$\langle\mu\,(v)\,,\xi\rangle = \frac{1}{2}\omega_0\,(\xi v, v) = \frac{i}{2}\langle\xi v, v\rangle, \tag{2.6}$$

para $v \in V$ e $\xi \in \mathfrak{u}(n+1)$.

Demonstração. Mostraremos que a equação (2.6) é aplicação de momento:

$$\begin{aligned}
\langle d\mu(v)(\vec{x}), \xi\rangle &= d(\langle \mu(v), \xi\rangle)(\vec{x}) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Im\langle \xi(v+t\vec{x}), (v+t\vec{x})\rangle \\
&= -Im\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\langle \xi(v+t\vec{x}), v+t\vec{x}\rangle\} \\
&= -\frac{1}{2}Im\{\langle \xi.\vec{x}, v\rangle + \langle \xi.v, \vec{x}\rangle\} \\
&= -\frac{1}{2}Im\{2iIm\langle \xi.v, \vec{x}\rangle\} \\
&= -Im\langle \xi.v, \vec{x}\rangle \\
&= \omega_0\left(\xi^V, \vec{x}\right).
\end{aligned}$$

A aplicação μ é $U(n+1)$-equivariante segue de

$$\langle \mu(kv), \xi\rangle = \frac{1}{2}\omega_0(\xi kv, kv) = \frac{1}{2}\omega_0\left(k^{-1}\xi kv, v\right) = \langle \mu(v), Ad_{k^{-1}}\xi\rangle = \langle Ad_k^*(\mu(v)), \xi\rangle,$$

onde $\xi \in \mathfrak{u}(n+1)$, $v \in V$ e $k \in U(n+1)$.

□

Proposição 2.3. Seja (M, ω, G, μ) G-espaço Hamiltoniano. Suponha que $N \subset M$ é uma subvariedade simplética e defina $i : N \hookrightarrow M$ a inclusão com forma simpléctica $i^*\omega$. Se N é invariante pela ação de G, então a ação sobre N é Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\mu \circ i : N \hookrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Demonstração. Seja $\xi \in \mathfrak{g}$. Então

$$(\mu \circ i)^\xi(n) = \langle \mu(i(n)), \xi\rangle = \left(\mu^\xi \circ i\right)(n), \text{para todo } n \in N$$

donde,

$$\begin{aligned}
d(\mu \circ i)^\xi =& d\mu^\xi \circ i_* \\
=& i_{\xi^M}\omega \circ i_* \\
=& i_{\xi^N}(i^*\omega).
\end{aligned}$$

A equivariança é imediato.

□

Proposição 2.4. Suponha que o grupo de Lie G age sobre (M, ω), de modo Hamiltoniana com aplicação de momento $\mu_G : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ e seja $\varphi : H \longrightarrow G$ um homomorfismo de grupos de Lie. A ação de H sobre M é Hamiltoniana com aplicação de momento $\mu_H = \varphi^* \circ \mu_G : M \longrightarrow \mathfrak{h}^*$.

Demonstração. Para qualquer $\xi \in \mathfrak{h}$ temos:

$$\begin{aligned} \mu_H^\xi (p) &= \langle \mu_H (p), \xi \rangle \\ &= \langle \mu_G (p), \varphi_* (\xi) \rangle \\ &= \mu_G^{\varphi_*(\xi)} (p), \end{aligned}$$

como $\exp(t\xi).p = \varphi(\exp(t\xi)).p$, daí resulta $\xi^M = (\varphi_* \xi)^M$. Logo, tem-se

$$d\mu_H^\xi = d\mu_G^{\varphi_*(\xi)} = i_{(\varphi_*\xi)^M}\omega = i_{\xi^M}\omega.$$

Para $h \in H$ e $p \in M$ a equivariança tem-se:

$$\begin{aligned} \mu_H (h.p) &= (\varphi^* \circ \mu_G) (\varphi (h).p) \\ &= \varphi^* \left(Ad^*_{\varphi(h)} \mu_G (p) \right) \\ &= Ad^*_h ((\varphi^* \circ \mu_G)(p)) \\ &= Ad^*_h (\mu_H (p)). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2. Seja $H \subset G$ um subgrupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Suponha que (M, ω, G, μ) é G-espaço Hamiltoniano com aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Então a ação restrição a H sobre M também é Hamiltoniana, com aplicação de momento $i^* \circ \mu : M \longrightarrow \mathfrak{h}^*$, onde $i : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ é a inclusão.

Demonstração. Como o campo vetorial gerado por ξ em $i_*\xi$ coincidem, então

$$\begin{aligned} (i^* \circ \mu)^\xi (p) &= \langle \mu (p), i_*\xi \rangle \\ &= \mu^{i_*(\xi)} (p) \\ d (i^* \circ \mu)^\xi &= d\mu^{i_*(\xi)} \\ &= i_{\xi^M}\omega. \end{aligned}$$

A equivariança se prova de forma análoga que o teorema anterior.

□

Proposição 2.5. Sejam G_1, G_2 e G são grupos de Lie.

a) Seja $(M_j, \omega_j, G_j, \mu_j)$, G_j-espaço Hamiltoniano para $j = 1, 2$. Então o produto $M_1 \times M_2$ é um $G_1 \times G_2$-espaço Hamiltoniano equipado com aplicação de momento

$\pi_1^*\mu_1 \times \pi_2^*\mu_2$, onde $\pi_j : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_j$, para cada $j = 1, 2$ é a projeção sobre M_j.

b) Seja (M, ω, G, μ) um G-espaço Hamiltoniano. Então o dual $(M, -\omega, G, -\mu)$ é um G-espaço Hamiltoniano.

c) Seja $(M_j, \omega_j, G, \mu_j)$, G-espaço Hamiltoniano para cada $j = 1, 2$. Então o produto $M_1 \times M_2$ é um G-espaço Hamiltoniano equipado com aplicação de momento $\pi_1^*\mu_1 + \pi_2^*\mu_2$.

Demonstração: a) Defina $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$ a forma simpléctica em $M_1 \times M_2$.
Sejam $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ e $M = M_1 \times M_2$ então

$$\begin{aligned}
\xi^M (p_1, p_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp (t\xi_1), \exp (t\xi_2)) . (p_1, p_2) \\
&= \left(\xi_1^{M_1} (p_1), \xi_2^{M_2} (p_2)\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
i_{\xi^M}\omega (\vec{x}) &= i_{\xi^M}\pi_1^*\omega_1 (\vec{x}) + i_{\xi^M}\pi_2^*\omega_2 (\vec{x}) \\
&= \omega_1 \left(\xi_1^{M_1} (p_1), \pi_{1*} (\vec{x})\right) + \omega_2 \left(\xi_2^{M_2} (p_2), \pi_{2*} (\vec{x})\right) \\
&= d\langle(\mu_1 \circ \pi_1), \xi_1\rangle_{(p_1,p_2)} (\vec{x}) + d\langle(\mu_2 \circ \pi_2), \xi_2\rangle_{(p_1,p_2)} (\vec{x}) \\
&= d\langle(\mu_1 \circ \pi_1, \mu_2 \circ \pi_2), (\xi_1, \xi_2)\rangle_{(p_1,p_2)} (\vec{x}),
\end{aligned}$$

então $\mu = \pi_1^*\mu_1 \times \pi_2^*\mu_2$. Para provar a equivariança use $C_{(g_1,g_2)} (h_1, h_2) = (C_{g_1} (h_1), C_{g_2} (h_2))$, disso temos

$$\begin{aligned}
\langle Ad_g^*\mu (p), \xi\rangle &= \langle\mu (p), Ad_{g^{-1}}\xi\rangle \\
&= \langle(\mu_1 (p_1), \mu_2 (p_2)), \left(Ad_{g_1^{-1}}\xi_1, Ad_{g_2^{-1}}\xi_2\right)\rangle \\
&= \langle\mu_1 (p_1), Ad_{g_1^{-1}}\xi_1\rangle + \langle\mu_2 (p_2), Ad_{g_2^{-1}}\xi_2\rangle \\
&= \langle\mu (g.p), (\xi_1, \xi_2)\rangle.
\end{aligned}$$

b) É imediato.

c) Pela parte a), tem-se aplicação momento $\mu_{G\times G} : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ dada por:

$$\mu_{G\times G} (p_1, p_2) = (\mu_1 (p_1), \mu_2 (p_2))$$

Logo, considere $\varphi : G \hookrightarrow G{\times}G$, mergulho diagonal então pela Proposição 2.4, $\mu_G = \varphi^* \circ \mu_{G\times G}$ é aplicação de momento em M, isto é, para cada $\xi \in \mathfrak{g}^*$

$$\begin{aligned}\langle \mu_G\left(p_1,p_2\right),\xi\rangle &= \langle \mu_{G\times G}\left(p_1,p_2\right),\varphi_*\xi\rangle\\ &= \langle \left(\mu_1\left(p_1\right),\mu_2\left(p_2\right)\right),\left(\xi,\xi\right)\rangle\\ &= \left(\mu_1\left(p_1\right)+\mu_2\left(p_2\right)\right)\left(\xi\right).\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.16. Seja $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ variedade simplética com ação dada por:

$$e^{i\theta}.(z_1,...,z_n) = \left(e^{i\theta}z_1,...,e^{i\theta}z_n\right)$$

é Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\mu(z_1,...,z_n) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 + c.$$

Exemplo 2.17. Considere a ação de S^1 sobre $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$e^{i\theta}.\left(z_1,...,z_{n+1}\right) = \left(e^{i\theta m_1}z_1,...,e^{i\theta m_{n+1}}z_{n+1}\right)$$

com forma simplética $\omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n+1} dz_k \wedge d\overline{z}_k$. Tem aplicação de momento

$$\mu\left(z_1,...,z_{n+1}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} m_j\left|z_j\right|^2.$$

Exemplo 2.18. Considere a ação de $\mathbb{T}^n$ sobre $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$:

$$\left(e^{im_1\theta_1},...,e^{im_n\theta_n}\right).\left(z_1,...,z_n\right) = \left(e^{im_1\theta_1}z_1,...,e^{im_n\theta_n}z_n\right),$$

com $\omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k$. Então é Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\mu\left(z_1,...,z_n\right) = -\frac{1}{2}\left(m_1\left|z_1\right|^2,...,m_n\left|z_n\right|^2\right).$$

Com efeito, considere $\left(\mathbb{C}, \omega_k = \frac{i}{2}dz_k \wedge d\overline{z}_k\right)$ e a projeção $\pi_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, k-enésima. Pelo exemplo 2.14 e o Teorema 2.5 a), obtemos

$$\mu\left(z_1,...,z_n\right) = \left(\pi_1^*\mu_1 \times ... \times \pi_n^*\mu_n\right)\left(z_1,...,z_n\right) = \left(\mu_1\left(z_1\right),...,\mu_n\left(z_n\right)\right),$$

onde $\mu_k\left(z_k\right) = -\frac{m_k}{2}\left|z_k\right|^2$.

Proposição 2.6. Seja G um grupo de Lie. A órbita coadjunta $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ tem uma forma simplética natural ω definido por:

$$\omega_\eta(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) = \langle \eta, [\xi, \xi'] \rangle,$$

para $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ e $\eta \in \mathcal{O}$. Além disso, a ação de G sobre $(\mathcal{O}, \omega)$ é Hamiltoniana com aplicação de momento a inclusão $i : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Demonstração. Primeiro mostramos que ω é bem definida, como

$$\langle \eta, [\xi, \xi'] \rangle = \langle \eta, ad_\xi \xi' \rangle = \langle ad^*_\xi \eta, \xi' \rangle = -\langle \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi' \rangle = \langle \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi \rangle$$

donde, se $\xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = \xi_2^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ e $\xi_1'^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = \xi_2'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ então

$$\begin{aligned} \omega_\eta(\xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi_1'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) &= -\langle \xi_1^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi_1' \rangle \\ &= -\langle \xi_2^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi_1' \rangle \\ &= \omega_\eta(\xi_2^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi_2'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) \end{aligned}$$

portanto, ω está bem definida. Para mostrar que a forma ω é não degenerado devemos verificar que: $\omega_\eta(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) = 0$, para todo $\xi' \in \mathfrak{g}$ implica que $\xi^{\mathfrak{g}^*}(n) = 0$. Com efeito,

$$0 = \omega_\eta(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) = \langle ad^*_\xi \eta, \xi' \rangle,$$

para todo $\xi' \in \mathfrak{g}$, o qual implica $\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta) = 0$. Portanto, ω é não degenerado.
Ora, mostramos que $Ad^*_g \omega = \omega$, para todo $g \in G$. Por definição,

$$(Ad^*_g \omega)_\eta(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) = \omega_{Ad^*_g \eta}(dAd^*_g(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)), dAd^*_g(\xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)))$$

e

$$\begin{aligned} dAd^*_g(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_g(Ad^*_{\exp(t\xi)}(\eta)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_{g\exp(t\xi)} \eta \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_{\exp(tAd_g \xi)}(Ad^*_g \eta) \\ &= (Ad_g \xi)^{\mathfrak{g}^*}(Ad^*_g \eta) \end{aligned}$$

Logo,

$$(Ad^*_g \omega)_\eta(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) = \langle Ad^*_g \eta, [Ad_g \xi, Ad_g \xi'] \rangle = \langle Ad^*_g \eta, Ad_g([\xi, \xi']) \rangle = \langle \eta, [\xi, \xi'] \rangle.$$

Como ω é $G-$invariante, temos para quaisquer três vetores X, Y e Z:

$$X\omega(Y,Z) = \omega([X,Y],Z) + \omega(Y,[X,Z])$$

$$Y\omega(X,Z) = \omega([Y,X],Z) + \omega(X,[Y,Z])$$

$$Z\omega(X,Y) = \omega([Z,X],Y) + \omega(X,[Z,Y])$$

Por outro, lado

$$d\omega(X,Y,Z) = X\omega(Y,Z) - Y\omega(X,Z) + Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X)$$

disso, segue-se

$$d\omega(X,Y,Z) = \omega([X,Y],Z) + \omega([Z,X],Y) + \omega([Y,Z],X)$$

para três campos de vetores em $\mathcal{O}$, $X = \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ $Y = \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ e $Z = \beta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)$ respetivamente gerada por ξ, γ e β de $\mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned} d\omega_\eta(X,Y,Z) &= \omega_\eta(\left[\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right], \beta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) + \omega_\eta(\left[\beta^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right], \gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) + \\ &\quad \omega_\eta(\left[\gamma^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \beta^{\mathfrak{g}^*}(\eta)\right], \xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) \\ &= -\langle \eta, [[\xi,\gamma],\beta] + [[\beta,\xi],\gamma] + [[\gamma,\beta],\xi] \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

portanto, ω é fechado.
A equivariança de $\mu = i$ é trivial, só falta verificar μ satisfaz a equação de momento: para $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ e $\eta \in \mathcal{O}$

$$d\mu^\xi(\eta)(\xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)) = \langle \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi \rangle = -\langle \eta, ad_{\xi'}\xi \rangle = \omega(\xi^{\mathfrak{g}^*}(\eta), \xi'^{\mathfrak{g}^*}(\eta)).$$

□

Propriedades de aplicação de momento

Se a ação é Hamiltoniana, então existe uma aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ para uma dada ação e tem alguns propriedades naturais da ação que são codificadas pela aplicação de momento.

Proposição 2.7. Se μ_1 e μ_2 são duas aplicações de momento para a mesma ação simplética $\psi : G \longrightarrow Diff(M)$, com M conexa. Então, existe uma η em $\mathfrak{g}^*$ tal que $\mu_1 - \mu_2 = \eta$.

Demonstração. Se $\xi \in \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ então

$$d\mu_1^\xi = i_{\xi^M}\omega = d\mu_2^\xi,$$

de aqui, $d(\mu_1^\xi - \mu_2^\xi) = 0$. Por hipótese M é conexo o qual implica que $\mu_1^\xi - \mu_2^\xi = C(\xi)$, onde $C(\xi)$ constante. Assim, um 1-forma η procurado está definido por:

$$\begin{aligned} \eta : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto C(\xi). \end{aligned}$$

□

Lema 2.3. Suponha que temos uma ação Hamiltoniana de um grupo de Lie G sobre uma variedade simplética (M, ω) com aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Então:

i) $Kerd\mu_p = (T_p(G.p))^{\omega_p} := \{\zeta \in T_pM : \omega_p(\eta, \zeta) = 0, \ \forall \eta \in T_p(G.p)\}$.

ii) $Imd\mu_p = \mathfrak{g}_p^\perp := \{\eta \in \mathfrak{g}^* : \langle \eta, \xi \rangle = 0, \ \forall \xi \in \mathfrak{g}_p\}$.

Demonstração:

i) Pela Proposição 1.5, o espaço tangente a $G.p$ no ponto p está determinado por:

$$T_p(G.p) = \{\xi^M(p) : \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Um vetor tangente $\zeta \in T_pM$ está em $Ker(d\mu_p)$ se, e somente se, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$0 = \langle d\mu_p(\zeta), \xi \rangle = \omega_p(\xi^M(p), \zeta),$$

isto é, equivalente $\zeta \in T_p(G.p)^{\omega_p} := \{\zeta \in T_pM : \omega_p(\zeta, \xi^M(p)) = 0, \ \forall \xi^M(p) \in T_p(G.p)\}$.

ii) Por definição, um elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ pertence a $\mathfrak{g}_p$ se, somente se, a ação infinitesimal de ξ no ponto p é trivial, isto é, $\xi^M(p) = 0 \in T_pM$.
Agora, mostramos a inclusão $Imd\mu_p \subseteq \mathfrak{g}_p^\perp$. Seja $v \in Imd\mu_p$. Então existe $w \in T_pM$ tal que $v = d\mu_p(w)$, logo para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$\langle v, \xi \rangle = \langle d\mu_p(w), \xi \rangle = \omega_p\left(\xi^M(p), w\right).$$

Em particular, se $\xi \in \mathfrak{g}_p$ então $\xi^M(p) = 0$ e assim, obtém-se $v \in \mathfrak{g}_p^\perp$.
Suponhamos que $Kerd\mu_p$ tem dimensão n e T_pM tem dimensão d, então a dimensão

da imagem é $d - n$. Pelo resultado $i)$ o $kerd\mu_p$ é igual a $T_p(G.p)^{\omega_p}$ e portanto seu complemento ortogonal simplético é igual a $T_p(G.p)$ e tem dimensão $d-n$. Pelo Teorema 1.2 temos

$$dim\mathfrak{g} = dim\mathfrak{g}_p + dimT_p(G.p) \tag{2.7}$$

A inclusão $\mathfrak{g}_p^{\perp} \subseteq \mathfrak{g}^*$ induz uma sequencia exata curta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_p^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_p^* \longrightarrow 0$$

e assim,

$$dim\mathfrak{g}_p^{\perp} = dim\mathfrak{g} - dim\mathfrak{g}_p. \tag{2.8}$$

Das equações (2.7) e (2.8) tem-se $dim\mathfrak{g}_p^{\perp} = dimT_p\,(G.p) = d - n$. Como a inclusão $Imd\mu_p \subseteq \mathfrak{g}_p^{\perp}$ tem as mesmas dimensões portanto são iguais.

□

2.3 O teorema de Marsden, Weinstein e Meyer

O teorema central nesta seção é um resultado inventado por Marsden, Weinstein e Meyer sobre redução simplética. Suponha (M, ω, G, μ) um G-espaço Hamiltoniano. Se nós fossemos definir o quociente M/G como variedade simplética, vamos ter dois problemas, primeiro precisamos que o quociente seja uma variedade mesmo sendo uma variedade não haveria razão para que seja de dimensão par, nem muito menos admitir uma estrutura simplética.

Considere 0 um valor regular da aplicação de momento μ, então sempre está fixado pela ação coadjunta, a saber que 0 pertence a $\mathfrak{g}^*$. Podemos considerar a redução simplética

$$M_0^{red} := \mu^{-1}(0)/G,$$

sem reduzir o grupo G.
Agora mostraremos a existência do quociente simplético considerando com certos hipóteses.

Teorema 2.3. **[Marsden-Weinstein-Meyer]** Seja (M, ω) uma variedade simplética e G um grupo de Lie agindo de maneira Hamiltoniana sobre M, com aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Suponha que $0 \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular de μ, e que o grupo G age livremente e propriamente sobre $\mu^{-1}(0)$. Então

i) A redução simplética $M_0^{red} = \mu^{-1}(0)/G$ é uma variedade suave de dimensão $dimM - 2dimG$ tal que a aplicação quociente $\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow \mu^{-1}(0)/G$ é submersão.

ii) Existe uma única forma simplética ω^{red} sobre M_0^{red} com a propriedade $\pi^*\omega^{red} = i^*\omega$, onde $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ denota a inclusão.

Antes mostramos algumas lemas úteis para mostrar o teorema.

Lema 2.4. Supondo as mesmas hipóteses do teorema acima, temos para todo $p \in \mu^{-1}(0)$, o subespaço $T_p(G.p)$ de T_pM é um subespaço isotrópico.

Demonstração. Diz-se $T_p(G.p)$ é um subespaço isotrópico de espaço simplético (T_pM, ω_p), se $\omega|_{T_p(G.p)} = 0$ ou, equivale, $T_p(G.p) \subset T_p(G.p)^{\omega_p}$. Pelo Lema 2.3 *i*), os subespaços $Kerd\mu_p = T_p\mu^{-1}(0)$ e $T_p(G.p)$ de T_pM são complementos simpléticos ortogonais com respeito ω_p, para todo $p \in \mu^{-1}(0)$. Como 0 é fixado pela ação coadjunta isto, implica $\mu^{-1}(0)$ é G-invariante, isto quer dizer, $G.p \subset \mu^{-1}(0)$. Portanto

$$T_p(G.p) \subset T_p\mu^{-1}(0) = T_p(G.p)^{\omega_p}.$$

Isto completa a prova, que $T_p(G.p)$ é um subespaço isotrópico de (T_pM, ω_p).

□

Lema 2.5. Seja I um subespaço isotrópico de um espaço vetorial simplética (V, ω). Então ω induz uma única forma simplética ω' sobre o quociente I^ω/I.

Demonstração. Defina $\omega'([u],[v]) = \omega(u, v)$, verifiquemos que está bem definida:

$$\begin{aligned}
\omega'([u+i],[v+j]) &= \omega(u+i, v+j), \;\; i, j \in I \\
&= \omega(u,v) + \omega(i,v) + \omega(u,j) + \omega(i,j), \\
&= \omega(u,v), \text{pois } \; I \subset I^\omega.
\end{aligned}$$

Além disso, ω' é não-degenerado isso segue-se de ω:
Se $[u] \in I^\omega/I$ e $\omega'([u],[v]) = 0$, para todo $[v] \in I^\omega/I$ então $\omega(u,v) = 0$, para todo $v \in I^\omega$. Assim, $u \in (I^\omega)^\omega = I$, ou seja, $[u] = 0$.

□

Demonstração do teorema Marsden-Weinstein-Meyer:

i) Pelo teorema de valor regular para variedades, o conjunto de nível $\mu^{-1}(0)$ é uma subvariedade fechada suave de M de dimensão $dim(M) - dim(G)$. Mais como G age livremente e propriamente, segue-se de Teorema 1.6 o quociente $M_0^{red} = \mu^{-1}(0)/G$ é uma variedade suave de dimensão $dim(M) - 2dimG$.

ii) Vamos construir um 2-forma ω^{red} não-degenerada sobre M_0^{red} tal que $\pi^*\omega^{red} = i^*\omega$, construindo a forma simplética ω_q^{red} sobre $T_qM_0^{red}$ para cada ponto $q \in M_0^{red}$.
Seja $q = \pi(p)$, onde $\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M_0^{red}$. Então temos uma sequencia exata curta de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow T_p(G.p) \xrightarrow{i_*} T_p\mu^{-1}(0) \xrightarrow{\pi_*} T_qM_0^{red} \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema 2.4, o subespaço $T_p(G.p)$ é isotrópico e cujo complemento ortogonal simplético é $T_p(\mu^{-1}(0))$. Então pelo Lema 2.5, existe uma única forma simplética canónica ω_q^{red} sobre $T_p(G.p)^{\omega}/T_p(G.p) = T_p\mu^{-1}(0)/T_p(G.p) \simeq T_qM_0^{red}$.

Por construção a 2-forma ω^{red} é não degenerada tal que $\pi^*\omega^{red} = i^*\omega$.

Logo, ω^{red} está bem definida em M_0^{red} pelo Lema 2.5. Além disso, como π e π_* são sobrejetoras a dita forma simplética é definida unicamente satisfazendo $\pi^*\omega^{red} = i^*\omega$. Também é fechado: como derivada exterior d comuta com o pullback tem-se

$$\pi^*\left(d\omega^{red}\right) = d\left(\pi^*\omega^{red}\right) = d\left(i^*\omega\right) = i^*\left(d\omega\right) = 0,$$

e a aplicação pullback de 3-formas

$$\pi^* : \Omega^3(M_0^{red}) \longrightarrow \Omega^3(\mu^{-1}(0))$$

é injetiva. Portanto, $d\omega^{red} = 0$.

□

Exemplo 2.19. Define a ação de S^1 sobre a variedade simplética $\left(\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0\right)$:

$$e^{i\theta}.\left(z_0, ..., z_n\right) = \left(e^{i\theta}z_0, ..., e^{i\theta}z_n\right),$$

onde aplicação de momento é dada por:

$$\mu\left(z_0, ..., z_n\right) = -\frac{1}{2}\left|z\right|^2 + \frac{1}{2}.$$

Assim, obtemos $\mu^{-1}\left(0\right) = S^{2n+1}$. Portanto,

$$\mu^{-1}\left(0\right)/S^1 = S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{P}^n, \text{com } \pi^*\omega^{red} = i^*\omega_0.$$

Exemplo 2.20. Sejam $r_1, ..., r_n$ números reais positivos e $M = S^2_{r_1} \times ... \times S^2_{r_n}$, onde $S^2_{r_k}$ denota a esfera de raio r_k em $\mathbb{R}^3$. O grupo $SO(3)$ age em $S^2_{r_k}$ de maneira Hamiltoniana com aplicação de momento $i : S^2_{r_k} \hookrightarrow (\mathbb{R}^3)^* \cong \mathbb{R}^3$, (pois pela Proposição 2.6) já que a ação coadjunta se reduz a produto baixo a identificação $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$. Consideremos $SO(3)$ agindo diagonalmente sobre M então usando a Proposição 2.5 c), tem aplicação de momento dada por:

$$\mu : M \longrightarrow (\mathfrak{so}(3))^* \cong \mathbb{R}^3,\ (p_1, ..., p_n) \longmapsto p_1 + ... + p_n;$$

o quociente de redução simplético é,

$$M/SO(3) = \{(p_1, ..., p_n) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^n : \|p_k\| = r_k,\ p_1 + ... + p_n = 0\}/SO(3).$$

Existe uma versão geral do teorema de Marsden, Weinstein e Meyer que nos permite pegar reduções em pontos que não sejam fixados pela ação coadjunta:

Proposição 2.8. Dada uma ação Hamiltoniana de um grupo de Lie G sobre um variedade simplética (M, ω) com aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ e uma orbita $\mathcal{O}$ para ação coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$. Se a orbita consiste de valores regulares de μ e a ação de G sobre $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ é livre e própria, então a redução simplética $M^{red}_{\mathcal{O}} = \mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ é uma variedade simplética de dimensão $dimM + dim\mathcal{O} - 2dimG$.

Demonstração. A suposição que todos os pontos da orbita $\mathcal{O}$ são valores regulares de μ, significa que a imagem inversa de $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ é uma subvariedade fechada de M de dimensão $dimM + dim\mathcal{O} - dimG$. Considere a ação de G sobre a variedade $M' = M \times \mathcal{O}$ com estrutura simplética $\omega' = \omega \times (-\omega_{\mathcal{O}})$, onde $\omega_{\mathcal{O}}$ é a forma simplética sobre $\mathcal{O}$ definida na Proposição 2.6. Esta ação é Hamiltoniana pela Proposição 2.5 c), com aplicação de momento

$$\mu'(p, \eta) = \mu(p) - \eta.$$

Logo, usando o teorema de Marsden, Weinstein, e Meyer para valor regular 0 de μ' e obtém-se $(\mu')^{-1}(0)/G$ a variedade simplética com forma ω^{red}_0 satisfazendo $\pi^*_0\omega^{red}_0 = j^*(\omega')$, onde $\pi_0 : (\mu')^{-1}(0) \longrightarrow (\mu')^{-1}(0)/G$ é o quociente e $j : (\mu')^{-1}(0) \longrightarrow M \times \mathcal{O}$ a inclusão. Logo, defina $\sigma : \mu^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow (\mu')^{-1}(0)$ por $\sigma(p) = (p, \mu(p))$ o qual define um difeomorfismo. Assim, $\mu^{-1}(\mathcal{O}) \simeq (\mu')^{-1}(0)$. Portanto, $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ tem estrutura simplética de dimensão $dimM + dim\mathcal{O} - 2dimG$.

$\square$

Se η é uma valor regular de μ, não necessariamente é fixado pela ação coadjunta então consideremos a seguinte redução:

$$M_\eta^{red} = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$$

onde $G_\eta = \{g \in G : Ad_g^*\eta = \eta\}$ é o grupo estabilizador de η pela ação coadjunta.

Teorema 2.4. Seja (M, ω) uma variedade simplética e um grupo de Lie G agindo de maneira Hamiltoniana sobre M, com aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Suponha que $\eta \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular de μ, e que o grupo isotrópico G_η age livremente e propriamente sobre $\mu^{-1}(\eta)$. Então

i) A redução simplética $M_\eta^{red} = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ é uma variedade suave tal que o quociente natural $\pi_\eta : \mu^{-1}(\eta) \longrightarrow M_\eta^{red}$ é uma submersão.

ii) Existe uma única forma simplética ω_η sobre M_η^{red} com a propriedade $\pi_\eta^*\omega_\eta = i_\eta^*\omega$, onde $i_\eta : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ denota a inclusão.

Demonstração: i) Segue-se pelo teorema de variedade quociente.
Mostraremos um resultado para provar a parte ii):

Lema 2.6. Seja (M, ω, G, μ) G-espaço Hamiltoniano. Se $\eta \in \mathfrak{g}^*$ é valor regular de μ então

i) $T_p(G_\eta.p) = T_p(G.p) \cap T_p(\mu^{-1}(\eta))$

ii) $T_p(\mu^{-1}(\eta)) = (T_p(G.p))^{\omega_p}$

Demonstração:

i) Primeiro suponha $v \in T_p(G.p) \cap T_p(\mu^{-1}(\eta))$. Então $v = \xi^M(p)$, para algum $\xi \in \mathfrak{g}$ e $d\mu_p(v) = 0$. Mais, $d\mu_p(\xi^M(p)) = ad_\xi^*\mu(p)$ isto significa $\xi \in \mathfrak{g}_\eta$. Se $v = \xi^M(p)$, para $\xi \in \mathfrak{g}_\eta$ então $v \in T_p(G_\eta.p)$.
Para a inclusão contraria, como $G_\eta.p$ está contido em $G.p$ e $\mu^{-1}(\eta)$ resulta

$$T_p(G_\eta.p) \subseteq T_p(G.p) \cap T_p\mu^{-1}(\eta).$$

ii) A condição $v \in T_p(G.p)^{\omega_p}$ significa que $\omega_p(\xi^M(p), v) = 0$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Isto é, equivalente a $\langle d\mu_p(v), \xi\rangle = 0$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Assim, $v \in T_p(G.p)^{\omega_p}$ se, e somente se, $v \in Ker\mu_p = T_p\mu^{-1}(\eta)$.

$\square$

Agora mostraremos a parte ii) do teorema:

ii) Observe que π_η é uma submersão sobrejetora então qualquer vetor tangente de $M_\eta^{red} = \mu^{-1}(\eta)/G_\eta$ pode ser escrito na forma $\pi_{\eta*}(X)$ para algum $X \in T\mu^{-1}(\eta)$. Assim, podemos definir ω_η por:

$$(\omega_\eta)_{\pi_\eta(p)}(\pi_{\eta*}(X), \pi_{\eta*}(Y)) \quad = \quad \omega_p(X, Y), \tag{2.9}$$

onde $p \in \mu^{-1}(\eta)$ e $X, Y \in T_p\mu^{-1}(\eta)$.
Para mostrar que ω_η é bem definida devemos verificar que o lado direita não depende da escolha de p, e X, Y. De fato, seja $\tilde{p} \in \mu^{-1}(\eta)$ e $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_{\tilde{p}}\mu^{-1}(\eta)$ tais que

$$\pi_\eta(\tilde{p}) = \pi_\eta(p),\ (\pi_\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{X}) = \pi_{\eta*p}(X),\ \text{e}\ (\pi_\eta)_{*\tilde{p}}(\tilde{Y}) = (\pi_\eta)_{*p}(Y).$$

Então existem $g \in G_\eta$ tais que

$$p = \psi_g(\tilde{p}),\ (\psi_g)_*(\tilde{X}) - X \in T_p(G_\eta.p),\ (\psi_g)_*(\tilde{Y}) - Y \in T_p(G_\eta.p).$$

Pela G-invariança de ω temos:

$$\begin{aligned}
\omega_{\tilde{p}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \left((\psi_{g^{-1}})^*\omega\right)_p \left((\psi_g)_*(\tilde{X}), (\psi_g)_*(\tilde{Y})\right) \\
&= \omega_p \left((\psi_g)_*(\tilde{X}), (\psi_g)_*(\tilde{Y})\right) \\
&= \omega_p \left(X + \left((\psi_g)_*(\tilde{X}) - X\right), Y + \left((\psi_g)_*(\tilde{Y}) - Y\right)\right) \\
&= \omega_p(X, Y),\ \text{por Lema 2.6 ii)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a definição na equação (2.9) faz sentido.
Por construção, a 2-forma ω_η é definida pontualmente satisfazendo $\pi_\eta^*\omega_\eta = i_\eta^*\omega$. Como π_η é uma submersão sobrejetora implica que ω_η está unicamente determinada e suave.
Como $d\omega = 0$ e

$$\pi_\eta^* d\omega_\eta = d\pi_\eta^*\omega_\eta = di_\eta^*\omega = i_\eta^* d\omega = 0,$$

implica que $d\omega_\eta = 0$, pois π_η é submersão sobrejetora.
Para mostrar que ω_η é não-degenerada suponha que seja $p \in \mu^{-1}(\eta)$ e $X \in T_p\mu^{-1}(\eta)$ tais que

$$(\omega_\eta)_{\pi_\eta(p)}(\pi_{\eta*}(X), \pi_{\eta*}(Y)) = 0,\ \text{para todo}\ Y \in T_p\mu^{-1}(\eta).$$

Temos mostrar que isso implica $\pi_{\eta*}(X) = 0$. Pela definição de ω_η na equação (2.9) implica $\omega_p(X, Y) = 0$, para todo $Y \in T_p\mu^{-1}(\eta)$, ou seja, $X \in \left(T_p\mu^{-1}(\eta)\right)^{\omega_p}$. Agora por Lema 2.6 i) e ii),

$$X \in \left(T_p\mu^{-1}(\eta)\right)^{\omega_p} \cap T_p\mu^{-1}(\eta) = T_p(G_\eta.p).$$

Assim, $\pi_{\eta *}(X) = 0$. Concluímos que ω_η é não degenerado.

$\square$

Também se verifica que os quocientes definidos acima são simplectomorfismo:

$$\frac{\mu^{-1}(\eta)}{G_\eta} \simeq \frac{\mu^{-1}(\mathcal{O})}{G}.$$

Com efeito, denote $j_\eta : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow \mu^{-1}(\mathcal{O})$ a aplicação inclusão natural. Além, disso desce para uma bijeção

$$\phi : \frac{\mu^{-1}(\eta)}{G_\eta} \longrightarrow \frac{\mu^{-1}(\mathcal{O})}{G}.$$

Defina $\sigma' = j \circ \sigma : \mu^{-1}(\mathcal{O}) \longrightarrow M \times \mathcal{O}$, por $\sigma' = i_{\mathcal{O}} \times \mu$ onde $j : \mu'^{-1}(0) \hookrightarrow M \times \mathcal{O}$ e $i_{\mathcal{O}} : \mu^{-1}(\mathcal{O}) \hookrightarrow M$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mu^{-1}(\eta) \arrow[r, "j_\eta"] \arrow[d, "\pi_\eta"'] & \mu^{-1}(\mathcal{O}) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{O}}"'] & \mu'^{-1}(0) \arrow[d, "\pi_0"'] \\
\frac{\mu^{-1}(\eta)}{G_\eta} \arrow[r, "\phi"'] & \frac{\mu^{-1}(\mathcal{O})}{G} \arrow[r, "{[\sigma]}"'] & \frac{\mu'^{-1}(0)}{G}
\end{tikzcd}$$

Como π_η é uma submersão então é suficiente mostrar que $\left(\pi_\eta^* \circ \phi^*\right)(\omega_{\mathcal{O}}^{red}) = \pi_\eta^*(\omega_\eta)$. Temos por diagrama, $\phi \circ \pi_\eta = \pi_{\mathcal{O}} \circ j_\eta$ e,

$$\left(\pi_\eta^* \circ \phi^*\right)(\omega_{\mathcal{O}}^{red}) = (\pi_{\mathcal{O}} \circ j_\eta)^* (\omega_{\mathcal{O}}^{red}) = (i_{\mathcal{O}} \circ j_\eta)^* \omega - (\mu \circ j_\eta)^* \omega_{\mathcal{O}}.$$

Usando $i_\eta = i_{\mathcal{O}} \circ j_\eta$ e $i_\eta^* \omega = \pi_\eta^* \omega_\eta$, o termo primeiro é igual $i_\eta^* \omega = \pi_\eta^* \omega_\eta$ o segundo termo é zero pois $(\mu \circ j_\eta)$ é constante. Isto mostra que $\phi^* \omega_{\mathcal{O}}^{red} = \omega_\eta$ e ϕ é um difeomorfismo.

Teorema 2.5. Seja (M, ω) uma variedade simplética, K um grupo Lie (com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$) age de maneira Hamiltoniana sobre M e tendo uma aplicação de momento $\mu_K : M \longrightarrow \mathfrak{k}^*$. Seja G outro grupo (com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$) agindo sobre M com uma aplicação de momento equivariante $\mu_G : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Suponha que as ações G e K sobre M comutam. Então

i) Se μ_K é G-invariante com K conexo então μ_G é K-invariante.

ii) Suponha a hipótese de i). A aplicação $\mu_{G \times K} := \mu_G \times \mu_K : M \longrightarrow (\mathfrak{g} \times \mathfrak{k})^* = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{k}^*$ é uma aplicação de momento para a ação de $G \times K$ sobre M.

iii) Seja $\nu \in \mathfrak{k}^*$ o valor regular de μ_K e considere a hipótese da parte i). Se a ação de K_ν sobre $\mu_K^{-1}(\nu)$ é livre e própria então G induz uma ação simplética sobre

$M_\nu = \mu_K^{-1}(\nu)/K_\nu$ e a aplicação natural $\mu_\nu : M_\nu \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ induzido por μ_G é uma aplicação de momento equivariante para esta ação.

Demonstração:

i) Antes note que μ_K G-invariante implica que $d\langle \mu_K, \zeta\rangle \left(\xi^M\right) = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\zeta \in \mathfrak{k}$. No entanto,

$$\begin{aligned} d\langle \mu_G, \xi\rangle \left(\zeta^M\right) &= d\langle \mu_G, \xi\rangle \left(X_{\langle \mu_K, \zeta\rangle}\right) \\ &= \{\langle \mu_G, \xi\rangle, \langle \mu_K, \zeta\rangle\} \\ &= -d\langle \mu_K, \zeta\rangle \left(X_{\langle \mu_G, \xi\rangle}\right) \\ &= -d\langle \mu_K, \zeta\rangle \left(\xi^M\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

desse modo concluímos que μ_G é K-invariante.

ii) Existe uma ação bem definida de $G\times K$ sobre M dada por $(g,k).p = g.(k.p) = k.(g.p)$. Para $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\zeta \in \mathfrak{k}$ temos

$$(\xi,\zeta)^M(p) = \xi^M(p) + \zeta^M(p),$$

pois $\exp(t(\xi,\zeta)) = (\exp(t\xi), \exp(t\zeta))$. Note que

$$\mu_{G\times K}^{(\xi,\zeta)} = \mu_G^{\xi} + \mu_K^{\zeta}.$$

Portanto,

$$\mathrm{i}_{(\xi,\zeta)^M}\omega = \mathrm{i}_{\xi^M}\omega + \mathrm{i}_{\zeta^M}\omega = d\mu_G^{\xi} + d\mu_K^{\zeta} = d\mu_{G\times K}^{(\xi,\zeta)}.$$

Para mostrar a equivariança usaremos a equivariança de μ_G e μ_K, as ações comutam e as invarianças de μ_G e μ_K: para todo $p \in M$ e $(g,k) \in G\times K$, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\mu_G \times \mu_K\right)\left((g,k).p\right) &= \left(\mu_G\left(g.k.p\right), \mu_K\left(g.k.p\right)\right) \\ &= \left(Ad_g^*\mu_G\left(p\right), Ad_k^*\mu_K\left(p\right)\right) \\ &= Ad_{(g,k)}^*\left(\mu_G \times \mu_K\right)(p). \end{aligned} \tag{2.10}$$

iii) Seja $\psi_g : M \longrightarrow M$ denota a ação para cada $g \in G$ sobre M. Como este aplicação comuta com a ação de K e deixa a aplicação momento μ_K G-invariante, por hipótese então existem aplicações induzidas $\psi_g^\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \longrightarrow \mu_K^{-1}(\nu)$, e $\psi_{g,\nu} : M_\nu \longrightarrow M_\nu$ bem definidas, e portanto ditas aplicações definem ações de G sobre $\mu_K^{-1}(\nu)$ e sobre M_ν.

Seja $\pi_\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \longrightarrow M_\nu$ denota a projeção natural e $i_\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \longrightarrow M$ a inclusão. Temos por construção, $\psi_{g,\nu} \circ \pi_\nu = \pi_\nu \circ \psi_g^\nu$ e $\psi_g \circ i_\nu = i_\nu \circ \psi_g^\nu$.

$$
\begin{tikzcd}
\mu_K^{-1}(\nu) \arrow[r, "\psi_g^\nu"] \arrow[d, "\pi_\nu"] & \mu_K^{-1}(\nu) \arrow[d, "\pi_\nu"] \\
M_\nu \arrow[r, "\psi_{g,\nu}"] & M_\nu
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mu_K^{-1}(\nu) \arrow[r, "i_\nu"] \arrow[d, "\psi_g^\nu"] & M \arrow[d, "\psi_g"] \\
\mu_K^{-1}(\nu) \arrow[r, "i_\nu"] & M
\end{tikzcd}
$$

Lembre o Teorema 2.4 que a forma simplética ω_ν sobre o espaço reduzido M_ν está caracterizado por $i_\nu^*\omega = \pi_\nu^*\omega_\nu$. Portanto,

$$\pi_\nu^*\psi_{g,\nu}^*\omega_\nu = \left(\psi_g^\nu\right)^* \pi_\nu^*\omega_\nu = \left(\psi_g^\nu\right)^* i_\nu^*\omega = i_\nu^*\psi_g^*\omega = i_\nu^*\omega = \pi_\nu^*\omega_\nu.$$

Como π_ν é uma submersão sobrejetora, podemos concluir que

$$\psi_{g,\nu}^*\omega_\nu = \omega_\nu.$$

Assim, temos uma ação simplética de G sobre M_ν. Como μ_G é invariante por K e portanto também o é em K_ν, então existe uma aplicação induzida $\mu_\nu : M_\nu \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ satisfazendo $\mu_\nu \circ \pi_\nu = \mu_G \circ i_\nu$.

$$
\begin{tikzcd}
\mu_K^{-1}(\nu) \arrow[r, "i_\nu"] \arrow[d, "\pi_\nu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "\mu_G"] \\
M_\nu \arrow[r, "\mu_\nu"'] & \mathfrak{g}^*
\end{tikzcd}
$$

Agora, verificamos que este é uma aplicação de momento para a ação de G sobre M_ν. Para fazer isto, primeiro note que para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, os campos vetoriais ξ^M e ξ^{M_ν} são π_ν-relacionados. Logo, temos

$$\pi_\nu^*\left(\mathrm{i}_{\xi^{M_\nu}}\omega_\nu\right) = \mathrm{i}_{\xi^M} i_\nu^*\omega = i_\nu^*\left(\mathrm{i}_{\xi^M}\omega\right) = i_\nu^*\left(d\langle\mu_G,\xi\rangle\right) = \pi_\nu^*\left(d\langle\mu_\nu,\xi\rangle\right).$$

Novamente, como π_ν é uma submersão sobrejetora, podemos concluir que

$$\mathrm{i}_{\xi^{M_\nu}}\omega_\nu = d\langle\mu_\nu,\xi\rangle$$

A equivariânça de μ_ν segue-se de μ_G, e pelo diagrama argumentado acima (a relação $\mu_\nu \circ \pi_\nu = \mu_G \circ i_\nu$), e as relações entre as ações de G sobre M, $\mu_K^{-1}(\nu)$ e sobre M_ν obtemos

$$Ad_g^*\left(\mu_\nu\left(K_\nu p\right)\right) = Ad_g^*\left(\mu_G\left(i_\nu\left(p\right)\right)\right) = \mu_G\left(i_\nu\left(g.p\right)\right) = \mu_\nu\left(\pi_\nu\left(gp\right)\right) = \mu_\nu\left(g.K_\nu p\right),$$

para $K_\nu p \in M_\nu$ e $g \in G$. Portanto, μ_ν é aplicação de momento para ação de G sobre M_ν.

□

Suponha que a ação $G \times K$ sobre M é livre e própria. Seja $(\eta, \nu) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{k}^*$. Como temos um produto simples o grupo isotrópico é $(G \times K)_{(\eta,\nu)} = G_\eta \times K_\nu$. Nosso objetivo a mostrar será que o espaço reduzido

$$M_{(\eta,\nu)} = (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta, \nu)/(G_\eta \times K_\nu)$$

é simplectomorfismo ao espaço reduzido $(M_\nu)_\eta = \mu_\nu^{-1}(\eta)/G_\eta$. Note que as ações de K e G sobre M são livres e próprias.

Teorema 2.6. [Teorema de redução comutando]
Sejam (M, ω, K, μ_K) e (M, ω, G, μ_G), K e G espaços Hamiltonianas. Suponha que as ações de G e K sobre M comutam, μ_G é K-invariante com K conexo e a ação de $G \times K$ sobre M é livre e própria. Então $M_{(\eta,\nu)}$ e $(M_\nu)_\eta$ são simplectomorfismos.
Demonstração. Antes mostramos que a ação de G sobre M_ν é livre e própria. Note primeiro que a ação de G sobre $\mu_K^{-1}(\nu)$ é livre e própria. Para $p \in \mu_K^{-1}(\nu)$ denote seu classe $[p]_\nu := \pi_\nu(p)$. A G-ação em esta notação é simplesmente $g\,[p]_\nu = [gp]_\nu$. Para verificar que é livre, suponha que $[gp]_\nu = [p]_\nu$. Assim, existe um $k \in K_\nu$ tal que $kgp = p$. Mas, $kgp = (g, k).p$ e portanto a hipótese, $G \times K$ age livre sobre M implica que $g = 1$ e $k = 1$. Assim, a ação de G sobre M_ν é livre.
Para provar que é próprio, seja $[p_n]_\nu \longrightarrow [p]_\nu$ e $[g_n p_n]_\nu \longrightarrow [p']_\nu$. Como a ação de K_ν sobre $\mu_K^{-1}(\nu)$ é livre e própria então pela definição da topologia quociente e fato de ser ação própria tem uma fatia, ou seja, existem $k_n, k'_n \in K_\nu$ tais que $k_n p_n \longrightarrow p$ e $k'_n g_n p_n = g_n k'_n p_n \longrightarrow p'$ (pois ações comutam). Por ser própria a ação original isto implica que uma subsequencia de g_n converge.

A aplicação de momento $\mu_G \times \mu_K : M \longrightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{k}^*$ é $G \times K$-equivariante feito na equação 2.10. Compondo a aplicação de inclusão

$$j : (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta, \nu) \longrightarrow \mu_K^{-1}(\nu)$$

com a aplicação $\pi_\nu : \mu_K^{-1}(\nu) \longrightarrow \mu_K^{-1}(\nu)/K_\nu$ dá a aplicação

$$\pi_\nu \circ j : (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta, \nu) \longrightarrow M_\nu.$$

Esta aplicação toma valores em $\mu_\nu^{-1}(\eta)$ porque para cada $p \in (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta,\nu)$ tem-se

$$(\mu_\nu \circ \pi_\nu \circ j)(p) = (\mu_G \circ i_\nu \circ j)(p) = \mu_G(p) = \eta.$$

Assim, obtemos uma aplicação:

$$k_\nu : (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta,\nu) \longrightarrow \mu_\nu^{-1}(\eta).$$

tal que $(i_\nu)_\eta \circ k_\nu = \pi_\nu \circ j$, onde usamos a notação $(i_\nu)_\eta$ para a inclusão $\mu_\nu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M_\nu$. A aplicação k_ν é equivariante com respeito aos ações de $G_\eta \times K_\nu$ sobre o dominio e G_η sobre o codominio. Assim, induz uma aplicação

$$[k_\nu] : M_{(\eta,\nu)} \longrightarrow (M_\nu)_\eta.$$

Para mostrar que este aplicação é simplética, é suficiente mostrar que

$$\pi^*_{(\eta,\nu)}([k_\nu]^*(\omega_\nu)_\eta) = \pi^*_{(\eta,\nu)}\omega_{(\eta,\nu)}, \qquad (*)$$

usamos a notação: $\omega_{(\eta,\nu)}$ é a forma simplética sobre $M_{(\eta,\nu)}$, $\pi_{(\eta,\nu)} : (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta,\nu) \longrightarrow M_{(\eta,\nu)}$ é a projeção, $(\pi_\nu)_\eta : \mu_\nu^{-1}(\eta) \longrightarrow (M_\nu)_\eta$ é a projeção e $(\omega_\nu)_\eta$ é a forma reduzida simplética sobre $(M_\nu)_\eta$. É suficiente estabilizar a equação $(*)$ como $\pi_{(\eta,\nu)}$ é uma submersão sobrejetora. O lado direito de $(*)$ está dada por:

$$i^*_{(\eta,\nu)}\omega$$

pela caracterização única da forma simplética reduzida $\omega_{(\eta,\nu)}$. O lado esquerda é igual

$$\pi^*_{(\eta,\nu)}([k_\nu]^*(\omega_\nu)_\eta) = k^*_\nu(\pi_\nu)^*_\eta(\omega_\nu)_\eta = k^*_\nu(i_\nu)^*_\eta\omega_\nu$$

pois da relação $[k_\nu] \circ \pi_{(\eta,\nu)} = (\pi_\nu)_\eta \circ k_\nu$ e a caracterização única da forma simplética reduzida $(\omega_\nu)_\eta$. Entretanto, como $(i_\nu)_\eta \circ k_\nu = \pi_\nu \circ j$ obtemos

$$k^*_v(i_\nu)^*_\eta\omega_\nu = j^*\pi^*_\nu\omega_\nu = j^* i^*_\nu\omega,$$

pela caracterização única da forma simplética reduzida ω_ν. Como $i_\nu \circ j = i_{(\eta,\nu)}$ obtém-se a igualdade desejada. Assim, $[k_v] : M_{(\eta,\nu)} \longrightarrow (M_\nu)_\eta$ é uma aplicação simplética.
Para mostrar que $[k_v]$ é um difeomorfismo construiremos a inversa. Começamos definindo a aplicação

$$\phi : \mu_\nu^{-1}(\eta) \longrightarrow M_{(\eta,\nu)}$$

definindo como segue. Escolha uma classe de equivalência $[p]_\nu \in \mu_\nu^{-1}(\eta) \subset M_\nu$ para $p \in \mu_K^{-1}(\nu)$. A relação de equivalência está associada com aplicação π_ν, isto é, com a ação de K_ν. Para cada tal ponto temos $p \in (\mu_G \times \mu_K)^{-1}(\eta, \nu)$ pois por construção $p \in \mu_K^{-1}(\nu)$ e também

$$\mu_G(p) = (\mu_G \circ i_\nu)(p) = \mu_\nu([p]_\nu) = \eta.$$

Portanto, faz sentido a considerar a classe $[p]_{(\eta,\nu)} \in M_{(\eta,\nu)}$. O resultado é independente do representante, já que qualquer outra representante do mesmo classe tem a forma $k.p$, onde $k \in K_\nu$. Isto, define a mesma classe em $M_{(\eta,\nu)}$, pois este último espaço quociente é por $G_\eta \times K_\nu$. A aplicação ϕ é portanto bem definida.
Esta aplicação ϕ é G_η-invariante, e por isso define uma aplicação quociente

$$[\phi] : (M_\nu)_\eta \longrightarrow M_{(\eta,\nu)}.$$

Olhando as definições mostradas para a aplicação $[\phi]$, este é a inversa da aplicação $[k_\nu]$ construido acima. Assim, ambos são bijeções. Como $[k_\nu]$ é suave e simplética então é uma imersão. Uma contagem de dimensões de $(M_\nu)_\eta$ e $M_{(\eta,\nu)}$ mostra que têm mesmas dimensões. Assim, $[k_v]$ é um difeomorfismo local bijetiva portanto, $[k_\nu]$ é um difeomorfismo.

$\square$

Exemplo 2.21. A ação natural de $\mathbb{T}^{n+1}$ sobre $\mathbb{P}^n$ é Hamiltoniana. Com efeito, consideramos as ações naturais de S^1 e $\mathbb{T}^{n+1}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ os quais são Hamiltonianas que foram mostradas acima. Além disso, satisfaz as hipótese do Teorema 2.5, então tem-se:

$$\mu_{\mathbb{P}^n} \circ \pi_0 = \mu_{\mathbb{T}^{n+1}} \circ i_0,$$

onde $i_0 : \mu_{S^1}^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ a inclusão e $\pi_0 : \mu_{S^1}^{-1}(0) \longrightarrow \frac{\mu_{S^1}^{-1}(0)}{S^1}$ o quociente. Logo, para todo $[z] \in \mathbb{P}^n$ temos

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{P}^n}([z]) &= \mu_{\mathbb{T}^{n+1}}\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_0|^2}{\sum_{k=0}^n |z_k|^2}, \ldots, \frac{|z_n|^2}{\sum_{k=0}^n |z_k|^2}\right).\end{aligned}$$

Exemplo 2.22. Suponha que $G = S^1$ age sobre $\mathbb{C}^{n+1}$, com pesos $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbb{Z}$ como no exemplo 2.17 e $K = S^1$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ a mesma ação do Exemplo 2.16. A ação induzida de G sobre $\mathbb{P}^n$ é Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\mu_{\mathbb{P}^n}([z]) = \frac{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} m_k |z_k|^2}{\sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2}.$$

Com efeito, considere a ação Hamiltoniana de $K = S^1$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ (exemplo 2.16) com $\mu_{S^1}(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}|z_k|^2 + \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 2.5 tem-se

$$\mu_{\mathbb{P}^n} \circ \pi_0 = \mu_G \circ i_0,$$

onde $i_0 : \mu_{S^1}^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ a inclusão, $\pi_0 : \mu_{S^1}^{-1}(0) \longrightarrow \frac{\mu_{S^1}^{-1}(0)}{S^1}$ o quociente e $\mu_G(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} m_k |z_k|^2$ a aplicação de momento com pesos.

Corolário 2.3. Seja v um vetor não nulo em $V = \mathbb{C}^{n+1}$ e é um representante de $[v]$ em $\mathbb{P}(V)$. Então a aplicação $\mu : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathfrak{u}(n+1)^*$ definida por

$$\langle \mu_{\mathbb{P}}([v]), \xi\rangle = \frac{1}{2\|v\|^2} Im\langle v, \xi v\rangle, \tag{2.11}$$

para $\xi \in \mathfrak{u}(n+1)$, é uma aplicação de momento para a ação de $U(n+1)$ sobre $\mathbb{P}(V)$.

Demonstração. Considere as ações Hamiltonianas de $U(1)$ e $U(n+1)$ sobre $V = \mathbb{C}^{n+1}$. Como $\mathfrak{u}(1)$ é igual a $i\mathbb{R}$ então, para $1^* \in \mathfrak{u}(1)^*$ defina $\langle 1^*, i\rangle = -\frac{1}{2}$. Logo, para cada $\xi \in \mathfrak{u}(1)$ temos uma aplicação de momento $\mu_{U(1)}$ (a mesma que a equação (2.6)) $\langle \mu_{U(1)}(v), \xi\rangle = \frac{i}{2}\langle \xi v, v\rangle$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\mu_{U(1)}^{-1}(1^*) &= \{v \in V : \mu_{U(1)}(v) = 1^*\} \\
&= \{v \in V : \mu_{U(1)}^{i}(v) = -\frac{1}{2}\} \\
&= \{v \in V : \langle v, v\rangle = 1\} \\
&= S^{2n+1}(V).
\end{aligned}$$

Como as ações comutam e satisfazem as hipóteses do Teorema 2.5, então a aplicação momento $\mu_{U(n+1)}$ obtido na equação de (2.6) do Lema 2.2, induz uma aplicação de momento sobre $\mathbb{P}(V) = S^{2n+1}/S^1$, é dizer, para cada $\xi \in \mathfrak{u}(n+1)$ e para todo $w \in S^{2n+1}$ tem-se

$$\langle \mu_{\mathbb{P}(V)}([w]), \xi\rangle = \frac{1}{2}\langle \mu_{U(n+1)}(w), \xi\rangle.$$

Seja $v \in V - \{0\}$. Tome $w = \frac{v}{\|v\|}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle \mu_{\mathbb{P}(V)}([v]), \xi\rangle &= \frac{1}{2} Im\langle \frac{v}{\|v\|}, \xi . \frac{v}{\|v\|}\rangle \\
&= \frac{1}{2\|v\|^2} Im\langle v, \xi v\rangle.
\end{aligned}$$

para cada $v \in V - \{0\}$, $\xi \in \mathfrak{u}(n+1)$.

$\square$

Métrica de Fubini Study no espaço projetiva complexa

Definição 2.15. Uma aplicação $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ é holomorfa se cada componente $f_1, ..., f_m : U \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função holomorfa.

Definição 2.16. Seja M um espaço topológico. Uma carta (U, φ) de M é um subconjunto aberto e um homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V := \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^n$.

Definição 2.17. Um atlas holomorfa em um espaço topológico M é uma coleção $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$, de cartas holomorfas, onde

a) Cada U_i é um aberto em M, e $M = \bigcup_i U_i$.

b) Sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a transição

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

é uma aplicação biholomorfa.

Definição 2.18. Uma variedade complexa é um espaço topológico M, Hausdorff e com base enumerável, equipado com um atlas holomorfo máximal.

Exemplo 2.23. Define $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$, onde $z \sim w$ se, somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $z = \lambda w$. Seja

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (z_0, ..., z_n) & \longmapsto & [z_0 : ... : z_n] \end{array}$$

a aplicação de quociente. O espaço $\mathbb{P}^n$ tem a topologia quociente, ou seja, $U \subseteq \mathbb{P}^n$ é aberto se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$.
Sejam os conjuntos abertos $U_i = \{[z_0 : ... : z_n] : z_i \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^n$.
Defina as cartas $\varphi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^n$ por

$$\varphi_j([z_0 : ... : z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, ..., \frac{z_n}{z_j}\right),$$

para cada $j = 0, 1, ..., n$. A coleção $\{U_i, \varphi_i\}_i$ é um atlas holomorfo de $\mathbb{P}^n$. Com efeito, é claro que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$; a função de transição está dada por

$$\begin{array}{rcl} \left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)(w_1, ..., w_n) & = & \varphi_j([w_1 : ... : w_i : 1 : w_{i+1} : ... : w_n]) \\ & = & \left(\frac{w_1}{w_j}, ..., \frac{w_i}{w_j}, \frac{1}{w_j}, \frac{w_{i+1}}{w_j}, ..., \frac{w_{j-1}}{w_j}, \frac{w_{j+1}}{w_j}, ..., \frac{w_n}{w_j}\right), \end{array}$$

o qual é uma aplicação holomorfa em $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. De forma análoga se verifica que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é holomorfa em $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. Portanto, a função de transição é biholomorfa.
Note que $\mathbb{P}^n$ é compacto: seja $S^{2n+1} = \{u \in \mathbb{C}^{n+1} : \|u\| = 1\}$. Como S^{2n+1} é compacta

e a aplicação $\pi|_{S^{2n+1}}$ é sobrejetora, já que se $p = \pi(u) \in \mathbb{P}^n$ então existe $t \in \mathbb{C}^*$ tal que $\|tu\| = 1$, ou seja, $tu \in S^{2n+1}$ e $\pi(tu) = \pi(u) = p$. Logo, pela continuidade se conclui $\pi\left(S^{2n+1}\right) = \mathbb{P}^n$ é compacto.
A continuação definimos o conceito de variedade de Kälher.

Definição 2.19. Uma estrutura complexa sobre espaço vetorial V de dimensão real $2n$, é uma aplicação linear $J : V \longrightarrow V$, com $J^2 = -Id_V$.

Definição 2.20. Um espaço vetorial simplética (V, ω) é chamado Kähler, se ω é compatível com estrutura complexa J ($\omega(J., J.) = \omega(.\,,\,.)$), que satisfaz $\omega(v, Jv) > 0$, para todo $v \in V - \{0\}$.

Definição 2.21. Uma variedade complexa M com estrutura simplética ω é chamado variedade de Kähler se para todo ponto de p de M, o espaço vetorial (T_pM, ω_p, J_p) é Kähler ($J_p : T_pM \longrightarrow T_pM$).

Devemos mencionar uma outra definição equivalente frequentemente encontrado de variedade de Kähler:

Definição 2.22. Seja M uma variedade complexa fornecida com uma métrica Hermitiana h. Se diz M, é uma variedade Kähler se $\omega(.\,,\,.) = h(J.,\,.)$ é uma forma diferencial fechada em M.

Observações:

1. Uma métrica Riemanniana h em M (variedade complexa) é uma métrica hermitiana se J_p é uma isometria, para todo $p \in M$, isto é

$$h_p(J_pu, J_pv) = h_p(u, v)\,,\ u, v \in T_pM.$$

   Note que h_p é a parte real de um produto escalar hermitiana sobre o espaço vetorial complexa T_pM, ou seja,

$$\langle .\,,.\,\rangle_h = h_p(.,.) + ih_p(J.,.)\,.$$

2. Uma métrica hermitiana h que satisfaz a condição da definição 2.22 ($\omega(.,.) = h(J.,.)$ fechado) é chamado métrica de Kähler.

Considere a ação $\psi : G \longrightarrow Diff(M)$ e suponha que ψ_g preserva estrutura complexa e a métrica hermitiana. Então ψ_g induz uma aplicação

$$(\psi_g)_{*p} : T_pM \longrightarrow T_pM,$$

para cada $g \in G_p = \{g \in G : \psi_g(p) = p\}$. Assim, temos uma representação homomorfismo

$$\rho_p : G_p \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(T_pM), \; g \longmapsto \rho_p(g) = (\psi_g)_{*p}$$

de G_p. Baixo estas considerações temos:

Teorema 2.7 (Critério de Mumford)**.** Se $J_p \in \rho_p(G_p)$, para todo $p \in M$ então $d\omega = 0$.
Demonstração. Como ψ_g preserva estrutura complexa J e a métrica h portanto, ω e $d\omega$ também são preservada, ou seja,

$$d\omega_p\left(\rho_p(g)(u), \rho_p(g)(v), \rho_p(g)(w)\right) = d\omega_p(u, v, w),$$

para todo $g \in G_p$ e $u, v, w \in T_pM$.
Escolha $\rho_p(g) = J_p$ e aplique a formula de acima, obtém-se

$$\begin{aligned} d\omega_p(u,v,w) &= d\omega_p(J_pu, J_pv, J_pw) \\ &= d\omega_p\left(J_p^2u, J_p^2v, J_p^2w\right) \\ &= -d\omega_p(u,v,w). \end{aligned}$$

Isto implica que $d\omega_p = 0$.

□

Um dos exemplos clássicos de uma variedade simplética é o espaço projetiva complexa. Ora, vamos construir uma métrica hermitiana em $\mathbb{P}^n$ e mostraremos que o espaço projetivo tem estrutura complexa de Kähler: considere a projeção $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, que envia $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ sobre a linha determinado por z. Então a aplicação

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \longrightarrow \mathbb{P}^n \supset U_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{C}^n, \\ z & \longmapsto [z] & \longmapsto & x, \end{array}$$

com $x_i = \frac{z_i}{z_0}$, para todo i=1,...,n, e $U_0 = \{[z] : z_0 \neq 0\}$. O qual induz a aplicação de espaços tangentes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^{n+1} = T_z\mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{\pi_*} & T_{[z]}\mathbb{P}^n \xrightarrow{(\varphi_0)_*} & T_x\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n, \\ v & \longmapsto & \pi_*(v) \longmapsto & (\varphi_0 \circ \pi)_*(v) = u \end{array}$$

Para o vetor v diferente de zero pode ser interpretado como vetor tangente à curva

$$t \longmapsto \gamma(t) = z + tv \text{ em } \mathbb{C}^{n+1}$$

e defina a curva $t \longmapsto \gamma_0(t) = (\varphi_0 \circ \pi \circ \gamma)(t)$ em $\mathbb{C}^n$.

Então

$$\gamma_0'(0) = (u_1, ..., u_n),$$

onde $u_i = \frac{v_i}{z_0} - v_0 \frac{x_i}{z_0}$, para todo $i = 1, ..., n$.
Para dois vetores tangentes u e u' em $T_x\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n$ queremos definir o produto hermitiano $\langle\langle\, , \,\rangle\rangle$. Mais, em $\mathbb{C}^{n+1}$ o produto hermitiano padrão é dado por:

$$\langle v, v' \rangle = \sum_{i=0}^{n} v_i \overline{v_i'}.$$

Denote por W o complemento ortogonal em $T_z\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, da linha determinada por $l = [z]$. Então

$$(l)^{\perp} =: W \simeq \mathbb{C}^n,$$

e W pode ser identificado com $T_x\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n$, desde que $\pi_*\left(\mathbb{C}^{n+1}\right) = \pi_*(W)$. Portanto, tem-se $v = cz + \eta$, definida para uma única $c = \frac{\langle v,z \rangle}{\langle z,z \rangle} \in \mathbb{C}$ e $\eta \in W$ com

$$(\varphi_0 \circ \pi)_*(v) = (\varphi_0 \circ \pi)_*(\eta) = u.$$

Claramente,

$$\eta = \frac{\langle z, z \rangle v - \langle v, z \rangle z}{\langle z, z \rangle}$$

segue-se

$$\langle \eta, \eta' \rangle = \frac{\langle v, v' \rangle \langle z, z \rangle - \langle v, z \rangle \langle z, v' \rangle}{\langle z, z \rangle}.$$

Agora como produto escalar hermitiano em $T_{\pi(z)}\mathbb{P}^n$ para dois vetores coordenadas u e u' respetivamente, tomamos

$$\langle\langle u, u' \rangle\rangle = \frac{\langle \eta, \eta' \rangle}{\langle z, z \rangle}.$$

Aqui podemos substituir v e v' respetivamente, assim como z é um $(n+1)$-tuplo com $(\varphi_0 \circ \pi)_*(v) = u$ e além $(\varphi_0 \circ \pi)(z) = x$ (isto é, $v_i = u_i z_0, v_0 = 0$), então

$$\langle\langle u, u' \rangle\rangle = \frac{\langle u, u' \rangle}{1 + \|x\|^2} - \frac{\langle u, x \rangle \langle x, u' \rangle}{(1 + \|x\|^2)^2}$$

Agora, $h(\, , \,) = Re\langle\langle , \rangle\rangle$ é uma métrica Riemanniana em $\mathbb{P}^n$. Isto então diz que a métrica Riemanniana h é J isometria em $\mathbb{P}^n$, é dizer, para a estrutura complexa J o qual $J_{\pi(z)}$ define sobre $T_{[z]}\mathbb{P}^n$ por multiplicação por $i = \sqrt{-1}$ sobre W, temos

$$h_p(J_p v, J_p w) = h_p(v, w), \text{ para } p = \pi(z).$$

Para mostrar a 2-forma ω associada a h é fechado usemos o critério de Mumford: escolhemos $G = SU(n+1)$ o grupo define os difeomorfismos ψ_g de $\mathbb{P}^n$ que preserva a estrutura complexa e a métrica h. Por outro, lado temos o isomorfismo clássico

$\mathbb{P}^n \simeq SU\left(n+1\right)/S(U\left(1\right)\times U\left(n\right))$, em seguida se observa que o subgrupo isotrópico $SU\left(n+1\right)_{\pi(z)} \simeq U\left(W\right)$, onde $U\left(W\right)$ é grupo unitário.
A representação esta dada por $\rho_{\pi(z)} : SU\left(n+1\right)_{\pi(z)} \longrightarrow U\left(W\right)$, então claramente tem-se $J\Big|_{\pi(z)} \in U\left(W\right)$ e pelo critério de Mumford $\omega\left(\,.,.\,\right) = h\left(J.,.\right)$ é fechado. Assim, $\mathbb{P}^n$ é Kähler.

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção canónica e $\{(U_j, \varphi_j)\}$ atlas holomorfa em $\mathbb{P}^n$. Considere as funções $u : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $u(w) = \log(1 + |w|^2)$ e $v(z) = \log|z|^2$. Para qualquer $j \in \{0, ..., n\}$ definimos $f_j = \varphi_j \circ \pi$. A aplicação f_j é claramente holomorfa e satisfaz

$$(u \circ f_j)(z) = v(z) - \log|z_j|^2\,.$$

Como $\partial\overline{\partial}\log|z_j|^2 = 0$, isto mostra que $(f_j)^*(\partial\overline{\partial}u) = \partial\overline{\partial}v$ para todo j. Definimos 2-forma ω sobre $\mathbb{P}^n$ por

$$\omega|_{U_j} = \frac{i}{2}(\varphi_j)^*(\partial\overline{\partial}u),$$

que satisfaz

$$\pi^*(\omega) = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}v.$$

A 2-forma sobre $\mathbb{P}^n$ definida é chamada a forma de Fubini-Study e usualmente denotamos por ω_{FS}.

Proposição 2.9. Seja um grupo K agindo sobre V preservando a estrutura Hermitiana. Qualquer subvariedade suave $M \subset \mathbb{P}\left(V\right)$, K-invariante herda a estrutura de uma variedade K-espaço Hamiltoniana da $\mathbb{P}\left(V\right)$, com forma Fubini-Study restrita a M.

Demonstração. Vamos mostrar que a restrição de ω_{FS} em M é não degenerada: para $0 \neq v \in T_pM$ existe $Jv \in T_pM$ tais que

$$\omega_{FS\,p}\left(v, Jv\right) = h_p\left(Jv, Jv\right) = h_p\left(v, v\right) > 0$$

Como $(M, \omega_{FS}|_M)$ é variedade simplética e por hipótese M é invariante por K então, pela Proposição 2.3 M é K-espaço Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\mu|_M = \mu_K \circ i : M \longrightarrow \mathfrak{k}^*,$$

onde $\mu_K : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ aplicação de momento (obtido no Corolário 2.3) e $i : M \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ a inclusão.

□

Aplicação de momento associada à forma de Fubini-Study é chamado o momento de Fubini-Study.

Capítulo 3

Variedade simplética tórica e o teorema de Delzant

No presente capítulo, introduziremos o conceito de variedade simplética tórica e daremos alguns exemplos e mostraremos o teorema de Delzant. Esse resultado é uma consequência importante do teorema de quociente simplético.

3.1 Variedades simplécticas tóricas

Nos grupos de Lie abelianos dois elementos quaisquer do grupo sempre comutam disso implica que a ação adjunta Ad_g para todo $g \in G$, é a identidade e a coadjunta Ad_g^* é também trivial. O circulo unitário no plano complexo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é um grupo abeliano sob multiplicação. O espaço tangente a S^1 na identidade é o eixo imaginaria e fazendo uma identificação de $\mathbb{R}$ com T_1S^1 por $t \longmapsto it$, com essa identificação a aplicação exponencial $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ é dado por $\exp(t) = e^{it}$. Note que $\exp^{-1}(1) = 2\pi\mathbb{Z}$.
O toro $\mathbb{T}^m = S^1 \times ... \times S^1$(m vezes) é um grupo abeliano também. A aplicação exponencial $\exp : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{T}^m$ está dada por

$$\exp(t_1, ..., t_m) = (e^{it_1}, ..., e^{it_m})$$

Como $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ obtém-se $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$, onde a projeção $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{T}^m$ é dada pela exponencial.
Portanto, a segunda condição para ser Hamiltoniana se reduz a uma constante sobre orbitas.

Definição 3.1. Um politope em $\mathbb{R}^n$ é o envolvente convexo de um número finito de pontos em $\mathbb{R}^n$. Um poliedro convexo é a interseção de um número finito de semi-espaços afins em $\mathbb{R}^n$.

Portanto, o politope coincide com poliedro convexo delimitado.

Seguidamente, o teorema de convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg afirma que quando G é um toro $\mathbb{T}^m$ e M uma variedade simplética compacta implica que $\mu(M)$ é um politope convexo.

Teorema 3.1 (Atiyah, Guillemin-Sternberg)**.** Seja (M, ω) uma variedade simplética conexa e compacta, e seja $\mathbb{T}^m$, m-toro. Suponha que $\psi : \mathbb{T}^m \longrightarrow Simp(M, \omega)$ é uma ação Hamiltoniana com aplicação de momento $\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Então:

a) os conjuntos de niveles de μ são conexos;

b) a imagem de μ é convexo;

c) a imagem de μ é o envolvente convexo da imagem de pontos fixados pela ação.

Demonstração. A prova está feita em [23].

A imagem $\mu(M)$ da aplicação de momento é chamado o politope de momento.

Corolário 3.1. Sobre a mesma hipótese do teorema de convexidade, se a $\mathbb{T}^m$-ação é efetiva então deve haver pelo menos $m+1$ pontos fixos.

Demonstração. Num ponto p contido numa orbita m-dimensional, a aplicação de momento μ é uma submersão. Isto é, $\{(d\mu_1)_p, ..., (d\mu_m)_p\}$ são linearmente independente. Portanto, $\mu(p)$ é um ponto interior de $\mu(M)$ e $\mu(M)$ é um politope convexo não degenerado. Qualquer politope convexa não degenerado em $\mathbb{R}^m$ deve ter ao menos $m+1$ vértices. Os vértices de $\mu(M)$ são imagens dos pontos fixos.

$\square$

Teorema 3.2. Seja $(M, \omega, \mathbb{T}^m, \mu)$, um $\mathbb{T}^m$-espaço Hamiltoniano. Se a $\mathbb{T}^m$-ação é efetiva, então $dimM \geq 2m$.

Demonstração. Como a aplicação de momento μ é constante sobre uma orbita $\mathcal{O}$ e para $p \in \mathcal{O}$ a derivada exterior $d\mu_p : T_pM \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, mapeia $T_p\mathcal{O}$ a 0. Assim,

$$T_p\mathcal{O} \subseteq Kerd\mu_p = (T_p\mathcal{O})^{\omega},$$

onde $(T_p\mathcal{O})^{\omega}$ é o ortogonal simplética de $T_p\mathcal{O}$. Isto mostra que as orbitas $\mathcal{O}$ de uma ação toro Hamiltoniano são sempre subvariedades isotropicos em M. Em particular, por álgebra linear simplética temos que $dim\mathcal{O} \leq \frac{1}{2}dimM$. Como a ação efetiva tem uma órbita de dimensão m então fica mostrado.

□

Definição 3.2. Um variedade simplética tórica é uma variedade simplética (M, ω) conexa e compacta de dimensão $2m$ equipada com uma ação Hamiltoniana efectiva de um toro $\mathbb{T}^m$, e com uma escolha de uma aplicação de momento μ correspondente.

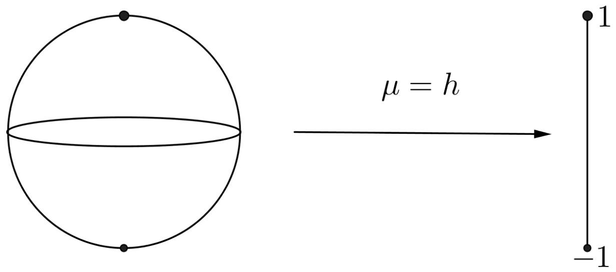
Definição 3.3. Duas variedades simpléticas tóricas $(M_i, \omega_i, \mathbb{T}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, são equivalentes se existe um isomorfismo $\lambda : \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2$ e um simplectomorfismo $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$, λ-equivariante tal que $\mu_1 = \mu_2 \circ \varphi$.

Exemplo 3.1. Alguns exemplos de variedade tóricas simpléticas:

1. O circulo $S^1 = U(1)$ age sobre a esfera de dimensão 2 $\left(S^2, \omega_{st} = d\theta \wedge dh\right)$, por rotações:

$$e^{it}.(\theta, h) = (\theta + t, h),$$

com aplicação de momento $\mu = h$ igual à função de altura e o politope de momento é $[-1, 1]$.



Equivalentemente, a ação de S^1 sobre $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\sim$, dado por

$$e^{it}.[z_0 : z_1] = \left[z_0 : e^{it}z_1\right],$$

com forma Fubini-Study $\omega_{FS} = \dfrac{i}{2}\dfrac{dz \wedge d\bar{z}}{\left(|z|^2 + 1\right)^2}$. Este ação é Hamiltoniana com aplicação de momento $\mu([z_0 : z_1]) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}$.

De fato, considere $n = 1$ no Exemplo 2.22, para $m_1 = 0$ e $m_2 = 1$ obtemos uma aplicação de momento definida por $\mu([z_0 : z_1]) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|}$ e cujo politope de momento é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

2. Seja $(\mathbb{P}^2, \omega_{FS})$ o espaço projetivo complexo de dimensão 2 equipado com a forma de Fubini-Study. A $\mathbb{T}^2$-ação sobre $\mathbb{P}^2$ dado por:

$$\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) . [z_0 : z_1 : z_2] = \left[z_0 : e^{i\theta_1} z_1 : e^{i\theta_2} z_2\right],$$

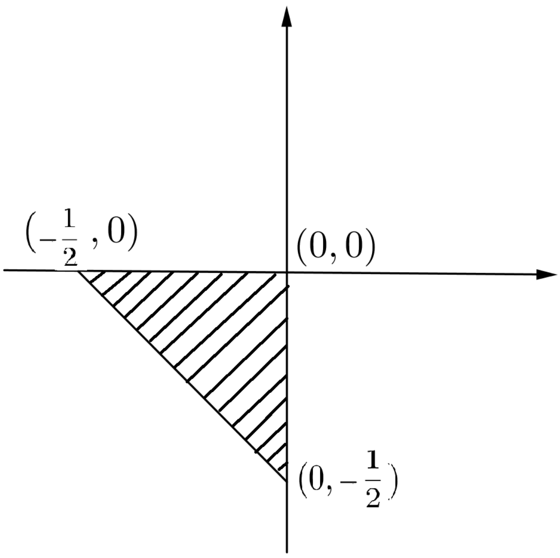
tem aplicação de momento

$$\mu\left([z_0 : z_1 : z_2]\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2}\right),$$

pelo Exemplo 2.21. Por outro, lado a ação têm pontos fixos, $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, e $[0 : 0 : 1]$ e mapeia por μ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} [1:0:0] & \longmapsto & (0,0) \\ [0:1:0] & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \\ [0:0:1] & \longmapsto & \left(0, -\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

Logo, o politope de momento é $\mu\left(\mathbb{P}^2\right) = \{(x_1, x_2) : -\frac{1}{2} \leq x_1 + x_2 \leq 0,\, x_1, x_2 \leq 0\}$.



3. Seja $\mathbb{T}^3$-ação sobre $\mathbb{P}^3$,

$$\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}\right) . [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = \left[z_0 : e^{i\theta_1} z_1 : e^{i\theta_2} z_2 : e^{i\theta_3} z_3\right]$$

com forma Fubini-Study ω_{FS}. Para obter o aplicação de momento

$$\mu\left([z_0 : z_1 : z_2 : z_3]\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2}, \frac{|z_3|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2}\right).$$

segue-se de exemplo 2.21. Então os pontos fixos mediante μ mapeiam da forma:

$$\begin{array}{ccc}
[1:0:0:0] & \longmapsto & (0,0,0) \\
[0:1:0:0] & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2},0,0\right) \\
[0:0:1:0] & \longmapsto & \left(0,-\frac{1}{2},0\right) \\
[0:0:0:1] & \longmapsto & \left(0,0,-\frac{1}{2}\right)
\end{array}$$

Concluímos que o politope de momento de μ é

$$\mu\left(\mathbb{P}^3\right)=\{(x_1,x_2,x_3):-\frac{1}{2}\leq x_1+x_2+x_3\leq 0, x_1,x_2,x_3\leq 0\}.$$

4. Seja ação de $\mathbb{T}^2$ sobre $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, dado como

$$\left(e^{i\theta},e^{i\eta}\right).\left([z_0,z_1],[w_0,w_1]\right)=\left(\left[z_0:e^{i\theta}z_1\right],\left[w_0,e^{i\eta}w_1\right]\right).$$

Pela Proposição 2.5 a), tem-se aplicação de momento

$$\mu\left([z_0:z_1],[w_0,w_1]\right)=\left(-\frac{1}{2}\frac{|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2},-\frac{1}{2}\frac{|w_1|^2}{|w_0|^2+|w_1|^2}\right).$$

Os pontos fixos são:
$p_0=\left([1:0],[1:0]\right), p_1=\left([1:0],[0:1]\right), p_2=\left([0:1],[1:0]\right), p_3=\left([0:1],[0:1]\right)$

e mapeia

$$\begin{array}{ccc}
p_0 & \longmapsto & (0,0) \\
p_1 & \longmapsto & \left(0,-\frac{1}{2}\right) \\
p_2 & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2},0\right) \\
p_3 & \longmapsto & \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)
\end{array}$$

e cujo momento de politope é o conjunto

$$\mu\left(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\right)=\{(x_1,x_2):-\frac{1}{2}\leq x_1\leq 0,-\frac{1}{2}\leq x_2\leq 0\}$$

.

3.2 Teorema de Delzant

Agora definimos a classe politope que surge na classificação de variedades simplécticas tóricas.

Definição 3.4. Um politope Delzant Δ em $\mathbb{R}^n$ é um politope que satisfaz:

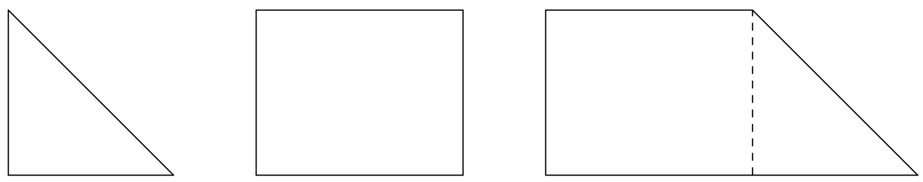
i) simplicidade, isto é, existem n arestas reunidas (encontrando-se) em cada vértice;

ii) racionalidade, é dizer, as arestas reunidas em cada vértice p são racional no sentido que cada aresta é da forma $p + tu_i$, $0 \leq t < \infty$, onde $u_i \in \mathbb{Z}^n$;

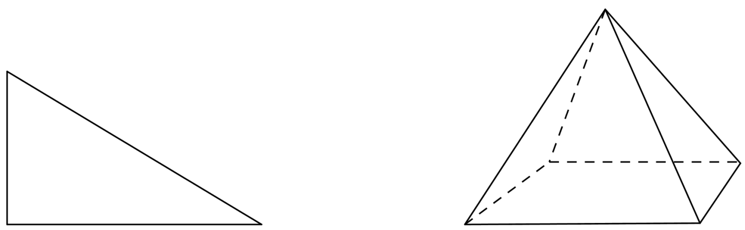
iii) suavidade, isto é, para cada vértice p, o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ forma um $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$.

Vejamos alguns exemplos de politope de Delzant:

Exemplo 3.2. A linha vertical pontilhado no exemplo trapezoidal indica que existe um figura de um retângulo mais um triângulo isósceles. Para triângulos mais altos a propriedade de suavidade poderia ser violada. Mas triângulos mais amplo (com inclinação integral) ainda pode ser Delzant.



Exemplo 3.3. Politopes que não são Delzant:

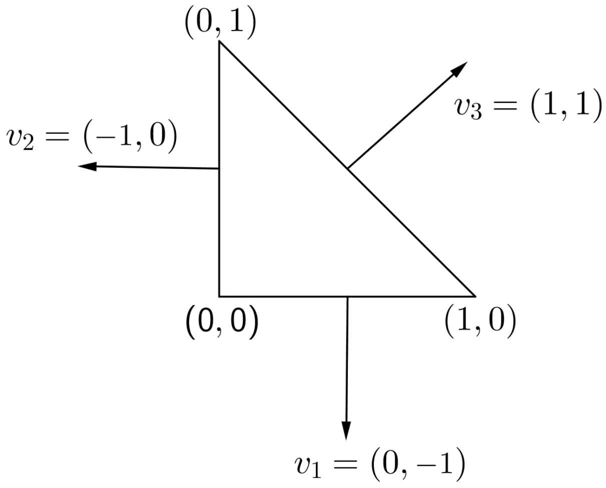


A figura de lado esquerdo falha a condição de suavidade, pois não é isósceles. Enquanto o lado direito não satisfaz a condição de simplicidade.

Para a figura abaixo, temos

$$\begin{aligned}\Delta &= \{x \in \left(\mathbb{R}^2\right)^* : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\} \\ &= \{x \in \left(\mathbb{R}^2\right)^* : \langle x, (-1,0)\rangle \leq 0, \langle x, (0,-1)\rangle \leq 0, \langle x, (1,1)\rangle \leq 1\}.\end{aligned}$$

Vamos identificar $\mathbb{R}^n$ com seu espaço dual via produto interno, para ver mais claro a construção Delzant Δ em $(\mathbb{R}^n)^*$.



Definição 3.5. Um faceta de um politope Δ é conjunto da forma $F = \Delta \cap \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, satisfaz $f(x) \geq c$, para todo $x \in \Delta$. Uma faceta de um politope n-dimensional é uma faceta de $(n-1)$-dimensional.

Definição 3.6. Um vetor $v \in \mathbb{Z}^n$ no retículo $\mathbb{Z}^n$ é primitivo se não pode escrever como $v = ku$ com $u \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ e $|k| > 1$.

Exemplo 3.4. Os vetores $(1,1), (3,4), (1,0), (0,1)$ são primitivos, mas os vetores como $(2,2), (4,6), (3,9)$ não o são.

Teorema 3.3. [Delzant] Variedades tóricas são classificados pelos politopos de Delzant. Mais especificamente, existe uma correspondência bijetiva entre estes conjuntos dados:

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{variedades tóricas}\} & \xrightarrow{1-1} & \{\textit{Politope de Delzant}\} \\ \left(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu\right) & \longmapsto & \mu(M). \end{array}$$

Mostraremos somente a existência no teorema de Delzant. Usando a redução simplética associado a politope Delzant $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$, vamos construir uma variedade tórica simplética $(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta)$.

Seja Δ um politope Delzant com d facetas. Sejam $v_i \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, ..., d$, são os vetores primitivos normais apontando para fora aos facetas. Para algum $\lambda_i \in \mathbb{R}$, podemos escrever Δ:

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i,\ i = 1, ..., d\},$$

para algum $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Para a base padrão $\{e_1 = (1, ..., 0), ..., e_d = (0, ..., 1)\}$ de $\mathbb{R}^d$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e_i &\longrightarrow v_i. \end{aligned}$$

Lema 3.1. A aplicação π é sobrejetora e mapeia $\mathbb{Z}^d$ sobre $\mathbb{Z}^n$.

Demonstração. Dada $\{e_1, ..., e_d\}$ a base de $\mathbb{Z}^d$. Em um vértice p, os vetores arestas $u_1, ..., u_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ forma uma base para $(\mathbb{Z}^n)^*$, a qual por uma mudança de base, se é necessário podemos supor que eles são base padrão. Então os vetores normais primitivas correspondentes aos facetas conhecidos em p são simétricos (no sentido de multiplicação por -1) aos u_i. Portanto, $\{v_1, ..., v_d\}$ geram $\mathbb{Z}^n$.

□

Considere a aplicação π e o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^d \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}^d / \left(2\pi\mathbb{Z}^d\right) \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^n / \left(2\pi\mathbb{Z}^n\right) \end{tikzcd}$$

o qual induz uma aplicação sobrejetora $\pi : \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \left(2\pi\mathbb{Z}^d\right) \longrightarrow \mathbb{R}^n / \left(2\pi\mathbb{Z}^n\right) = \mathbb{T}^n$ entre toros. O $N = Ker(\pi)$ é um subgrupo fechado de Lie de $\mathbb{T}^d$ de dimensão $(d - n)$ com aplicação inclusão $i : N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$. Seja $\mathfrak{n}$ o álgebra de Lie de N. Obtemos uma sequencia exata curta de toros:

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \longrightarrow 1. \tag{3.1}$$

O qual induz uma sequencia exata de álgebras de Lie:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0, \tag{3.2}$$

com sequencia exata dual

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} \left(\mathbb{R}^d\right)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

Agora consideremos $\mathbb{C}^d$ com forma simpléctica $\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^d dz_k \wedge d\bar{z}_k$ e a ação Hamiltoniana de $\mathbb{T}^d$ sobre $\mathbb{C}^d$ dada por:

$$\left(e^{it_1}, ..., e^{it_d}\right) . (z_1, ..., z_d) = \left(e^{it_1} z_1, ..., e^{it_d} z_d\right) .$$

Como no resultado obtido no exemplo 2.15, a aplicação de momento $\mu : \mathbb{C}^d \longrightarrow \left(\mathbb{R}^d\right)^*$ é dada por:

$$\mu\left(z_1, ..., z_d\right) = -\frac{1}{2}\left(\left|z_1\right|^2, ..., \left|z_d\right|^2\right) + \text{constante},$$

onde a constante é escolhido como $(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Observamos que μ é uma aplicação própria e pelo Corolário 2.2, o subtoro N age sobre $\mathbb{C}^d$ de modo Hamiltoniana com aplicação de momento

$$i^* \circ \mu : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathfrak{n}^*.$$

Seja $Z = \left(i^* \circ \mu\right)^{-1}(0)$ o conjunto de nível zero.

Afirmação 1. O conjunto Z é compacto e N age livremente sobre Z.
De fato, o conjunto Z é claramente fechado e para provar que Z é compacto é suficiente mostrar que é limitado.
Seja $\hat{\Delta} \subseteq (\mathbb{R}^d)^*$ a imagem de $\Delta \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$ por π^*. Primeiro mostraremos que $\mu(Z) = \hat{\Delta}$.

Lema 3.2. Seja $y \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$. Então y pertence a $\hat{\Delta}$ se, somente se, y está na imagem de Z por μ.
Demonstração. O valor de y está na imagem de Z por μ se, e somente se, satisfazem as seguintes dois condições:

i) y está na imagem de μ;

ii) $i^* y = 0$.

Usando a expressão de μ e i) temos

$$\begin{aligned}\langle y, e_i\rangle =&\langle \mu(z), e_i\rangle \\ =&-\frac{1}{2}\left|z_i\right|^2 + \lambda_i \leq \lambda_i\end{aligned}$$

Por outro lado, pela sequencia (3.3) e ii), existe $x \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$ tal que $\pi^*(x) = y$. Consequentemente, i) e ii) implica a

i′) $\langle y, e_i\rangle \leq \lambda_i$, para $i = 1, ..., d$;

ii′) $y = \pi^*(x)$ para algum $x \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Além, recíproco é imediato e podemos concluir que i), ii) e i′), ii′) são equivalentes.

Suponhamos que é valido i′ e ii′). Então

$$\begin{aligned}
\langle y, e_i \rangle \leq \lambda_i,\ \forall i = 1, ..., d \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle \pi^* (x), e_i \rangle \leq \lambda_i,\ \forall i = 1, ..., d \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x, \pi (e_i) \rangle \leq \lambda_i,\ \forall i = 1, ..., d. \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i,\ \forall i = 1, ..., d. \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \Delta.
\end{aligned}$$

Assim, y pertence a $\mu(Z)$ se, somente se, y está em $\hat{\Delta} = \pi^*(\Delta)$.

□

Como $\hat{\Delta}$ é compacto e μ é uma aplicação própria tal que $\mu(Z) = \hat{\Delta}$ (obtido pelo lema anterior), então Z é limitado e pelo teorema de Heine-Borel concluímos Z é compacto.

Para mostrar que N age livremente sobre Z, escolhemos uma vértice p de Δ, e seja $I = \{i_1, ..., i_n\}$ o conjunto de índices para n facetas reunidas em p. Tome $z \in Z$ tal que $\mu(z) = \pi^*(p)$. Então p está caracterizado por n equações da forma $\langle p, v_i \rangle = \lambda_i$, onde i percorre em I, ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle p, v_i \rangle = \lambda_i,\ \forall i \in I \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle p, \pi (e_i) \rangle = \lambda_i,\ \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle \pi^* (p), e_i \rangle = \lambda_i, \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle \mu (z), e_i \rangle = \lambda_i,\ \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{i-enésima coordenada de } \mu(z) \text{ é igual } a\ \lambda_i \\
&\Longleftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2} |z_i|^2 + \lambda_i = \lambda_i \\
&\Longleftrightarrow \quad z_i = 0\ , \forall i \in I.
\end{aligned}$$

Portanto, aqueles z são pontos cujos coordenadas são identicamente zeros para os índices de I, mais as outras coordenadas são diferente de zero. Sem perda de generalidade podemos supor que $I = \{1, ..., n\}$. O estabilizador de $z = (0, ..., 0, z_{n+1}, ..., z_d)$ em $\mathbb{T}^d$ é

$$\left(\mathbb{T}^d\right)_z = \{(t_1, ..., t_n, 1, ..., 1) \in \mathbb{T}^d\}.$$

Como a restrição $\pi\Big|_{(\mathbb{R}^d)_z} : \left(\mathbb{R}^d\right)_z \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mapeia os vetores $e_1, ..., e_n$ para um $\mathbb{Z}$-base $v_1, ..., v_n$ de $\mathbb{Z}^n$ respetivamente, no nível de grupos a aplicação $\pi : \left(\mathbb{T}^d\right)_z \longrightarrow \mathbb{T}^n$ é bijetiva. Como $N = Ker(\pi)$ o que implica que $N \cap \left(\mathbb{T}^d\right)_z = \{e\}$. Isto é,

$$(t_1, ..., t_n, 1, ..., 1) \in N \Rightarrow t_1 = ... = t_n = 1.$$

Por conseguinte, $N_z = \{e\}$. Portanto, todos estabilizadores de N no ponto z mapeando para vértice são triviais. Mas este caso era o pior dos casos; mais para outro pontos o estabilizador $N_{z'}$ $(z' \in Z)$ está contido nos estabilizadores de z, que mapeiam para um vértice. Portanto, N age livremente para Z e isto conclui prova da afirmação 1.

Como i^* é sobrejetora, então $0 \in \mathfrak{n}^*$ é um valor regular de $i^* \circ \mu$. Consequentemente, Z é uma subvariedade compacta de $\mathbb{C}^d$ de dimensão real $2d - (d - n) = d + n$. O espaço de orbitas $M_\Delta = Z/N$ é uma variedade compacta de dimensão real $dimZ - dimN = (d + n) - (d - n) = 2n$. A aplicação quociente $p : Z \longrightarrow M_\Delta$ é um N-fibrado principal sobre M_Δ. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^d \\ M_\Delta & \end{tikzcd}$$

onde $j : Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ é a inclusão. O teorema de Marsden, Weinstein e Meyer garante a existência de uma forma simpléctica ω_Δ sobre M_Δ satisfazendo

$$p^*\omega_\Delta = j^*\omega_0.$$

Como Z é conexo, daí a variedade simpléctica $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ é também conexo.

Afirmação 2. A variedade simplética $(M_\Delta, \omega_\Delta)$ é um $\mathbb{T}^n$-espaço Hamiltoniano com aplicação de momento μ_Δ tal que $\mu_\Delta (M_\Delta) = \Delta$.

Com efeito, seja z tal que $\mu(z) = \pi^*(p)$, onde p é um vértice de Δ como na prova da afirmação 1. Seja $\sigma : \mathbb{T}^n \longrightarrow \left(\mathbb{T}^d\right)_z$ é a inversa da bijeção $\pi\Big|_{\left(\mathbb{T}^d\right)_z} : \left(\mathbb{T}^d\right)_z \longrightarrow \mathbb{T}^n$. Como temos obtido uma seção, isto é, uma inversa à direita para π, observe na sequencia exata:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & \mathbb{T}^d \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{T}^n \arrow[l, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 1, \end{tikzcd}$$

a sequencia exata se divide, isto é, torna-se como uma sequência de um produto obtém-se um isomorfismo

$$(i, \sigma) : N \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^d.$$

Com efeito, o homomorfismo é imediato: para todo $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in N \times \mathbb{T}^n$ temos

$$\begin{aligned} (i, \sigma)((g_1, h_1) . (g_2, h_2)) &= (i(g_1) .\sigma(h_1)) . (i(g_2) .\sigma(h_2)) \\ &= (i, \sigma)(g_1, h_1) . (i, \sigma)(g_2, h_2) . \end{aligned}$$

Injetiva: seja $(g, h) \in N \times \mathbb{T}^n$ tal que $(i, \sigma)(g, h) = 1$. Então $i(g) = \sigma\left(h^{-1}\right) \in N$, ou seja, $g = 1$ e $h = 1$.

Sobrejetora: dado $a \in \mathbb{T}^d$, tome $h = \pi(a) \in \mathbb{T}^n$. Assim, $\pi\left(a.\sigma\left(h^{-1}\right)\right) = \pi(a) .\pi\left(\sigma\left(h^{-1}\right)\right) = 1$ implica que $a.\sigma\left(h^{-1}\right) = i(g)$, para algum $g \in N$. Portanto, existe $(g, h) \in N \times \mathbb{T}^n$ tal que $a = i(g) .\sigma(h)$.

O homomorfismo $\sigma : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^d$ induz uma ação $\psi_t^0 : Z \longrightarrow Z$ em Z, para todo $t \in \mathbb{T}^n$ definido da seguinte forma:

$$t.z = \sigma\left(t\right).z,\; t \in \mathbb{T}^n,$$

além disso, está bem definida já que $\left(i^* \circ \mu\right)\left(t.z\right) = 0$. Dita ação desce para quociente M_Δ definindo $\psi_{t,0} : Z/N \longrightarrow Z/N$ deste modo:

$$t.\left(zN\right) = \sigma\left(t\right).zN,$$

o qual está bem definido também.

Falta mostrar que $\mathbb{T}^n$-ação sobre M_Δ é Hamiltoniana com aplicação de momento apropriado.

Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C}^d \arrow[r, "\mu"] & \left(\mathbb{R}^d\right)^* \cong \mathfrak{n}^* \oplus \left(\mathbb{R}^n\right)^* \arrow[r, "\sigma^*"] & \left(\mathbb{R}^n\right)^* \\ M_\Delta \arrow[urrr, "\mu_\Delta"'] & & & \end{tikzcd}$$

onde a última aplicação horizontal é projeção sobre segundo fator. Como $\left(\sigma^* \circ \mu \circ j\right)\left(zN\right) = \sigma^*\left(\mu\left(z\right)\right) =$ constante, então a composição horizontal desce para uma aplicação

$$\mu_\Delta : M_\Delta \longrightarrow \left(\mathbb{R}^n\right)^*,$$

que satisfaz $\mu_\Delta \circ p = \sigma^* \circ \mu \circ j$.

Como N é compacto, então define uma ação própria sobre Z e pela afirmação 1 esse ação é livre; usando o Teorema 2.5 para ações comutando, μ_Δ é uma aplicação de momento para a ação de $\mathbb{T}^n$ sobre $\left(M_\Delta, \omega_\Delta\right)$. Finalmente, a imagem de μ_Δ é:

$$\mu_\Delta\left(M_\Delta\right) = \left(\mu_\Delta \circ p\right)\left(Z\right) = \left(\sigma^* \circ \mu \circ j\right)\left(Z\right) = \left(\sigma^* \circ \pi^*\right)\left(\Delta\right) = \Delta,$$

pois $\mu\left(Z\right) = \pi^*\left(\Delta\right)$ e $\sigma^* \circ \pi^* = \left(\pi \circ \sigma\right)^* = Id$.

Concluímos que $\left(M_\Delta, \omega_\Delta, \mathbb{T}^n, \mu_\Delta\right)$ é a variedade tórica que procuramos para o politope de Delzant Δ.

$\square$

Exemplo 3.5. Seguindo a construção de Delzant para o caso $\Delta = [0, a] \subset \mathbb{R}^*$. Seja $v\left(=1\right)$ base vetorial padrão em $\mathbb{R}$. Então Δ está descrito por:

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^* : \langle x, v_1\rangle \leq 0, \langle x, v_2\rangle \leq a\},$$

onde $v_1 = -v$, $v_2 = v$, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = a$.
A projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e_1 &\longmapsto -v \\ e_2 &\longmapsto v. \end{aligned}$$

tem núcleo gerado por $(e_1 + e_2)$, por isso que N é um subgrupo diagonal de $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. As sequencias exatas são:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\pi} & S^1 & \longrightarrow 1 \\ & & t & \longmapsto & (t,t) & & & \\ & & & & (t_1,t_2) & \longmapsto & t_1^{-1}t_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R} & \longrightarrow 0 \\ & & x & \longmapsto & (x,x) & & & \\ & & & & (x_1,x_2) & \longmapsto & x_2 - x_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \xrightarrow{\pi^*} & \left(\mathbb{R}^2\right)^* & \xrightarrow{i^*} & \mathfrak{n}^* & \longrightarrow 0 \\ & & x & \longmapsto & (-x,x) & & & \\ & & & & (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 & \end{array}$$

A ação de subgrupo diagonal $N = \{\left(e^{it}, e^{it}\right) \in S^1 \times S^1\}$ sobre $\mathbb{C}^2$,

$$\left(e^{it}, e^{it}\right) . (z_1, z_2) = \left(e^{it}z_1, e^{it}z_2\right)$$

tem aplicação de momento

$$(i^* \circ \mu)(z_1, z_2) = -\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) + a,$$

com conjunto de nível

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2a\}.$$

Portanto, o espaço reduzido é um espaço projetivo:

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0)/N = \mathbb{P}^1.$$

Exemplo 3.6. Seja Δ o n-simplex em $\mathbb{R}^n$ gerado pelo origem e a base padrão de vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 1)$. Verifiquemos que a correspondente variedade simpletica tórica é espaço projetivo, $M_\Delta = \mathbb{P}^n$. De fato, Δ em $(\mathbb{R}^n)^*$ está descrito por:

$$\langle (x_1, ..., x_n), v_i \rangle \leq \lambda_i \;\forall i = 1, ..., n. \text{ e } \langle (x_1, ..., x_n), v_{n+1} \rangle \leq \lambda_{n+1},$$

onde $v_i = -e_i$ para todo $i = 1, ..., n$, $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} e_i$, e $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$ e $\lambda_{n+1} = 1$.

A projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ e_i &\longmapsto -e_i \\ e_{n+1} &\longmapsto e_1 + ... + e_n. \end{aligned}$$

tem $Ker\pi = span\{e_1 + ... + e_{n+1}\}$, então N é um subgrupo diagonal de $\mathbb{T}^{n+1}$.

As sequencias exatas são:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & \mathbb{T}^{n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^n & \longrightarrow 1 \\ & & t & \longmapsto & (t, ..., t) & & & \\ & & & & (t_1, ..., t_{n+1}) & \longmapsto & \left(t_1^{-1}t_{n+1}, ..., t_n^{-1}t_{n+1}\right) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n & \longrightarrow 0 \\ & & x & \longmapsto & (x, ..., x) & & & \\ & & & & (x_1, ..., x_{n+1}) & \longmapsto & (x_{n+1} - x_1, ..., x_{n+1} - x_n) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* & \xrightarrow{\pi^*} & \left(\mathbb{R}^{n+1}\right)^* & \xrightarrow{i^*} & \mathfrak{n}^* & \longrightarrow 0 \\ & & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (-x_1, ..., -x_n, x_1 + ... + x_n) & & & \\ & & & & (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & y_1 + ... + y_{n+1} & \end{array}$$

A ação

$$\left(e^{it}, ..., e^{it}\right) . (z_1, ..., z_{n+1}) = \left(e^{it}z_1, ..., e^{it}z_{n+1}\right),$$

tem aplicação de momento

$$(i^* \circ \mu)(z_1, ..., z_{n+1}) = -\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + ... + |z_{n+1}|^2\right) + 1$$

com conjunto de nível

$$(i^* \circ \mu)^{-1}(0) = \{(z_1, ..., z_{n+1}) : \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2 = 2\}.$$

Portanto, o espaço reduzido é $(i^* \circ \mu)^{-1}(0)/N = \mathbb{P}^n$.

Capítulo 4

Construção do quociente GIT afim e projetiva

No resto desta dissertação sempre assumiremos que todos os grupos algébricos lineares são redutivos, ao menos que dito o contrário. Em GIT existem vários tipos de quocientes, seguindo Lakshmibai [25] e Newstead [20] temos três tipos de quocientes: o quociente categórico, bom quociente, e quociente geométrico. Nós também descreveremos as relações entre essas noções de quocientes. Construiremos estes quocientes através de Spec ou Proj do anel de invariantes. Nas próximas seções vamos descrever precisamente como Spec e Proj estão relacionados com os quocientes categóricos, bons, e geométricos.

Geometria algébrica afim e projetiva

4.0.1 Conjunto algébrico afim

Em todo o trabalho consideramos um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado. Começamos com algumas definições elementares.

Definição 4.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um n-espaço afim $\mathbb{A}^n$ é o conjunto das n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{A}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{K}, \text{para } 1 \leq i \leq n\}.$$

Denotamos o anel de polinômios por:

$$\mathbb{K}[x_1, ..., x_n] = \{\text{polinômios nas variáveis } x_1, ..., x_n \text{ sobre } \mathbb{K}\}$$

Teorema 4.1 (base de Hilbert)**.** Se R é um anel Noetheriano então $R[x]$ é Noetheriano. Também se mostra por indução finita sobre variáveis indeterminadas que: se R é um anel Noetheriano então $R[x_1, ..., x_n]$ também o é.

Definição 4.2. Seja I um ideal em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Defina

$$\mathbb{V}(I) = \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0, \forall f \in I\}.$$

Os subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ que são da forma $\mathbb{V}(S)$, para algum subconjunto S em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ são chamados conjuntos algébricos.

Lema 4.1. Sejam I_1 e I_2 ideais em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Então

i) Se $I_1 \subseteq I_2$ então $\mathbb{V}(I_2) \subseteq \mathbb{V}(I_1)$.

ii) Seja $\{I_i\}_i$ uma coleção de ideais em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Então

$$\bigcap_i \mathbb{V}(I_i) = \mathbb{V}\left(\bigcup_i I_i\right).$$

iii)

$$\mathbb{V}(I_1) \cup \mathbb{V}(I_2) = \mathbb{V}(I_1 I_2).$$

Demonstração:

i) É óbvio.

ii)

$$\bigcap_i \mathbb{V}(I_i) = \{x \in \mathbb{K}^n : \forall i, f \in I_i : f(x) = 0\} = \mathbb{V}\left(\sum_i I_i\right) = \mathbb{V}\left(\bigcup_i I_i\right).$$

iii) Como $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 \subseteq I_1,\ I_2$ temos $\mathbb{V}(I_1) \cup \mathbb{V}(I_2) \subseteq \mathbb{V}(I_1 \cap I_2) \subseteq \mathbb{V}(I_1 I_2)$. A reciproca, se $x \in \mathbb{V}(I_1 I_2)$ e $x \notin \mathbb{V}(I_1)$ então existe um $f \in I_1$ com $f(x) \neq 0$ e para cada $g \in I_2$ temos $fg \in I_1 I_2$ e portanto, $f(x) g(x) = (fg)(x) = 0$. Consequentemente, $g(x) = 0$ e portanto, $x \in \mathbb{V}(I_2)$.

□

Definição 4.3. Definimos a topologia de Zariski em $\mathbb{A}^n$ a ser a topologia cujo conjuntos fechados são os conjuntos algébricos.
Lema anterior nos diz claramente que dá uma topologia.

Definição 4.4. Uma variedade afim M é redutível se existem subconjuntos próprios fechados $X_1, X_2 \subset M$ tais que $M = X_1 \cup X_2$. Caso contrário, se diz M é irredutível.

Definição 4.5. Uma variedade afim é um subconjunto fechado irredutível do espaço afim $\mathbb{A}^n$.

Definição 4.6. O radical de um ideal I do anel R se define como:

$$\sqrt{I} = \{f \in R : f^n \in I, \text{para algum } n\}.$$

Proposição 4.1.

$$\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}\left(\sqrt{I}\right).$$

Demonstração. Como $I \subseteq \sqrt{I}$ implica que $\mathbb{V}\left(\sqrt{I}\right) \subseteq \mathbb{V}(I)$. Seja $x \in \mathbb{V}(I)$. Desejamos mostrar que para todo $f \in \sqrt{I}$, implica $f(x) = 0$. Mais para algum $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in I$ disto, $f^n(x) = 0$, ou seja, $f(x) = 0$. Portanto, $x \in \mathbb{V}\left(\sqrt{I}\right)$.

□

Agora estabelecemos uma conexão entre conjuntos algébricos em $\mathbb{A}^n$ e ideias em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$. Nós já tínhamos introduzido a operação $\mathbb{V}(\,.\,)$ que pega um ideal para um conjunto algébrico. Aqui definimos uma operação oposta ao $\mathbb{V}(\,.\,)$.

Definição 4.7. Para um subconjunto $M \subset \mathbb{A}^n$, se define

$$\mathbb{I}(M) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in M\},$$

o ideal de M.

É fácil ver que $\mathbb{V}(\mathbb{I}(M)) = M$, para M conjunto algébrico afim.

Teorema 4.2 (Zeros de Hilbert)**.** Se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado e $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ é um ideal, então $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Ver [3].
Portanto, existe uma correspondência bijetiva entre variedades algébricas afins em $\mathbb{A}^n$ e ideais radicais no anel de polinômios quando $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Geometria} & \underset{\mathbb{V}(\,)}{\overset{\mathbb{I}(\,)}{\rightleftarrows}} & \text{Algébrico} \\
\mathbb{A}^n & \longleftrightarrow & (0) \\
M & \longleftrightarrow & \mathbb{I}\,(M) \\
\mathbb{V}\,(I) & \longleftarrow & I \\
x=(a_1,...,a_n) & \longleftrightarrow & (x_1-a_1,...,x_n-a_n)
\end{array}$$

Para uma variedade algébrica afim M, definimos o anel de coordenada afim de M como

$$A\,(M)=\mathbb{K}\,[x_1,...,x_n]\,/\mathbb{I}\,(M)\,,$$

e os elementos de $A\,(M)$ pode ser visto como funções $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$. Como a soma de funções e produtos por elementos escalares de $\mathbb{K}$ estão definidos então $A\,(M)$ define um $\mathbb{K}$-álgebra. Além disso, $A\,(M)$ é finitamente gerado pois as funções x_i fornecem um conjunto finito de geradores.

4.0.2 Conjunto algébrico projetivo

Similar ao caso afim, um subconjunto projetivo de $\mathbb{P}^n$ sobre $\mathbb{K}$ é chamado um conjunto algébrico projetivo se pode ser escrito como zero local de um conjunto finito de polinômios homogêneos.

Definição 4.8. Se define o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ sobre $\mathbb{K}$, o conjunto de sub-espaços vetoriais de dimensão uma em $\mathbb{K}^{n+1}$.

Em palavras, $\mathbb{P}^n=\mathbb{K}^{n+1}-\{0\}/\mathbb{K}^*$ é o conjunto de classes de equivalência em $\mathbb{K}^{n+1}-\{0\}$ com respeito à relação de equivalência

$$(x_0,...,x_n)\sim(y_0,...,y_n)\,\text{se, e somente se,}\,(x_0,...,x_n)=\lambda(y_0,...,y_n),\text{ para algum }\ \lambda\in\mathbb{K}^*.$$

Se $x\in\mathbb{P}^n$ é um ponto representante da classe equivalência de $(x_0,...,x_n)$, as x_i são chamados coordenadas homogêneas para o ponto x.

Definição 4.9. Seja R um anel comutativo. Um polinômio $f\in R\,[x_0,...,x_n]$ é chamado homogêneo de grau $d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, se f é a soma de monomios de grau d.
Se $R=\mathbb{K}$, um polinômio $f\in\mathbb{K}\,[x_0,...,x_n]$ é homogêneo de grau d se, e somente se, $f\,(\lambda x_0,...,\lambda x_n)=\lambda^d f\,(x_0,...,x_n)$, para todo $x_0,...,x_n$ e $\lambda\in\mathbb{K}^*$.

Definição 4.10. Um anel graduado é um anel R com subgrupos abelianos $R_d\subseteq R$, para todo $d\in\mathbb{N}$ tais que $R=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}R_d$ e para todo $d,l\in\mathbb{N}$, $R_dR_l\subseteq R_{d+l}$.
R é um $\mathbb{K}-$álgebra graduado se R é anel graduado e sua vez é $\mathbb{K}$-álgebra satisfazendo $\lambda f\in R_d$, para todo $\lambda\in\mathbb{K}$, $d\in\mathbb{N}$ e $f\in R_d$.

Definição 4.11. Um ideal $I \subseteq R$ é chamado homogêneo se é gerado por elementos homogêneos.

Análoga ao conjuntos algébricos afins queremos definir o conjunto algébrico projetivo como subconjunto de $\mathbb{P}^n$, que é descrita por zero local de algumas polinômiais nas coordenadas homogêneas.

Definição 4.12. Um conjunto algébrico projetivo é um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ definido por zeros de polinômios homogêneos, ou seja, um subconjunto da forma

$$\mathbb{V}_p(I) = \{x \in \mathbb{P}^n : f(x) = 0, \forall f \in I\},$$

onde I é um ideal homogêneo de $\mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$.

Nós dizemos a $\mathbb{V}_p(I)$, o conjunto algébrico projetivo definido por I. Para distinguir entre zero local afim $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ e zero local projetivo $\mathbb{V}(I)$ do mesmo ideal homogêneo, denotarmos por $\mathbb{V}_a(I)$ e $\mathbb{V}_p(I)$ respetivamente.

Exemplo 4.1.

a) $\mathbb{V}_p((0)) = \mathbb{P}^n$.

b) Seja $R_+ = (x_0, ..., x_n)$ o ideal de polinômios com termo constante igual a zero. Temos $\mathbb{V}_p(R_+) = \emptyset$. R_+ é chamado ideal irrelevante.

c) Os pontos são conjuntos algébricos projetivos: considere $p = [z_0 : ... : z_n] \in \mathbb{P}^n$. Um delas coordenadas é diferente de zero, então podemos supor $z_0 = 1$. Temos

$$\{p\} = \mathbb{V}(x_1 - z_1x_0, ..., x_n - z_nx_0).$$

Proposição 4.2.

i) Se $I_1 \subseteq I_2$ são ideais homogêneos em $\mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ então $\mathbb{V}_p(I_2) \subseteq \mathbb{V}_p(I_1)$.

ii) Se $\{I_i\}$ é uma família de ideais homogêneos em $\mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$, então

$$\bigcap_{i \in J} \mathbb{V}_p(I_i) = \mathbb{V}_p\left(\bigcup_{i \in J} I_i\right) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

iii) Se $I_1, I_2 \subset \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ são ideias homogêneos então $\mathbb{V}_p(I_1) \cup \mathbb{V}_p(I_2) = \mathbb{V}_p(I_1I_2)$.

Em particular, interseções arbitrarias e união finita de conjuntos algébricos são novamente conjunto algébrico.

Demonstração. A prova é mesmo como o caso afim.

Definição 4.13. Um conjunto algébrico afim $M \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ é chamado um cone se é não vazio e se para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_0, ..., x_n) \in M$ implica que $\lambda (x_0, ..., x_n) \in M$.

Se $M \subseteq \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico projetivo então

$$\tilde{M} = \{(x_0, ..., x_n) : [x_0 : ... : x_n] \in M\} \cup \{0\}$$

é chamado o cone sobre M.
Em outras palavras, o cone $\tilde{M}$ de $M \subseteq \mathbb{P}^n$ é a imagem inversa da aplicação quociente $\pi : \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$, mais o origem de $\mathbb{K}^{n+1}$. Se I é um ideal homogêneo diferente de $\mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ e $M = \mathbb{V}_p(I)$ então $\tilde{M} = \mathbb{V}_a(I) \subset \mathbb{K}^{n+1}$. Se $I = \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ então $\tilde{M} = \mathbb{V}_a(R_+) = \{0\}$. Em certos casos, esse tipo de argumento alguns vezes nos permite a reduzir um problema projetiva para um problema afim.

Definição 4.14. A topologia de Zariski em $\mathbb{P}^n$ é definido por conjuntos algébricos projetivos que são conjuntos fechados. A topologia Zariski sobre um conjunto algébrico é a topologia induzida da topologia de Zariski de $\mathbb{P}^n$.

Definição 4.15. Seja $M \subseteq \mathbb{P}^n$. Se define o ideal de M, gerado por

$$\mathbb{I}(M) = \{f \in \mathbb{K}[x_0, ..., x_n] \,\text{homogêneo} : f(x) = 0, \text{para todo}\, x \in M\}.$$

Se observa que:

a) $\mathbb{I}(M)$ é um ideal radical homogêneo.

b) A operação $\mathbb{I}$ é decrescente.

c) Se M é um conjunto algébrico projetivo então $\mathbb{V}_p(\mathbb{I}(M)) = M$. Se I é um ideal então $I \subset \mathbb{I}(\mathbb{V}_p(I))$.

d) Temos $\mathbb{I}(\mathbb{P}^n) = (0)$ e $\mathbb{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$.

Existe uma versão projetiva de Teorema de zeros. O principal diferença é a existência do ideal irrelevante $R_+ = (x_0, ..., x_n)$.

Teorema 4.3 (Zeros de Hilbert)**.** Suponha que $\mathbb{K}$ é algebricamente fechada. Seja $I \subset \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ ideal homogêneo e considere $M = \mathbb{V}_p(I)$.

i) $\mathbb{V}_p(I) = \emptyset$ se, e somente se, existe N tal que $(x_0, ..., x_n)^N \subset I$.

ii) Se $\mathbb{V}_p(I) \neq \emptyset$ então $\mathbb{I}(\mathbb{V}_p(I)) = \sqrt{I}$.

Demonstração. Suponha que $I \subset \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$. Por hipótese $\mathbb{V}_p(I) = M$ é vazio o que significa que o cone afim $\tilde{M} = \mathbb{V}_a(I)$ contém somente o origem ou é vazio e portanto, $I = (1)$ ou $R_+ = \sqrt{I}$, para qualquer dos casos $x_i^{r_i} \in I$ para algum r_i o que mostra i). Para ii) como $M = \mathbb{V}_p(I)$ é não vazio e $\mathbb{I}(M) = \mathbb{I}(\tilde{M})$ então

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}_p(I)) = \mathbb{I}(M) = \mathbb{I}(\tilde{M}) = \mathbb{I}(\mathbb{V}_a(I)) = \sqrt{I}.$$

A última igualdade segue-se de teorema de zero.

□

Definição 4.16. Uma variedade projetiva é um conjunto algébrico irredutível $M \subseteq \mathbb{P}^n$.

Definição 4.17. Seja U um subconjunto aberto de uma variedade projetiva M. Uma função regular sobre U é uma aplicação $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{K}$ com a seguinte propriedade: para qualquer $p \in U$, existem polinômios homogêneos f e g de mesmo grau com $f(x) \neq 0$ e $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, para todo x num subconjunto aberto U_p, com $p \in U_p \subset U$.
Denote por $\mathcal{O}_M(U)$ o $\mathbb{K}$-álgebra de funções regulares em U.

Definição 4.18. Uma aplicação $\phi : M \longrightarrow N$ é um morfismo de variedades se

i) ϕ é continua, ou seja, para qualquer aberto $U \subseteq N$, temos que $\phi^{-1}(U)$ é aberto em M e,

ii) para qualquer subconjunto aberto $U \subseteq N$ e para qualquer função regular $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$, temos $f \circ \phi : \phi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{K}$ é regular.

Teorema 4.4. Para qualquer duas variedades afins M e N existe uma correspondência bijetiva

$$\begin{array}{ccc} \{\text{morfismo } M \longrightarrow N\} & \longleftrightarrow & \{\text{homomorfismo de } \mathbb{K} - \text{álgebra } A(N) \longrightarrow A(M)\} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^* \end{array}$$

Demonstração. Ver [3].

Definição 4.19. Seja $M \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. O anel

$$R(M) = \mathbb{K}[x_0, ..., x_n] / \mathbb{I}(M)$$

é chamado o anel de coordenado homogêneo de M.

Seja R uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerada. Então R é gerado por $y_0, ..., y_n$ para alguns y_i. Considere o homomorfismo sobrejetiva de $\mathbb{K}$-álgebras

$$\phi : \mathbb{K}[x_0, ..., x_n] \longrightarrow R, x_i \longmapsto y_i.$$

Temos um isomorfismo $R \simeq \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]/I$, onde I é o ideal $Ker\phi$. Se R é um dominio de integral então I é primo. Esta álgebra corresponde à variedade afim $M = \{x \in \mathbb{A}^{n+1} : f(x) = 0, \text{ para todo } f \in I\}$. Denotamos $Spec(R) = M$ a variedade afim correspondente $\mathbb{K}$-álgebra R.
Note que a definição exata de $Spec(R)$, de anel R é diferente, formalmente é o conjunto de todos os ideais primos de R e também se define uma topologia de Zariski.
Para construir o quociente projetiva, precisamos ter análoga à operação $Spec$ para o caso projetiva por isso podemos recuperar uma variedade projetiva do anel de coordenadas. Se $R \simeq \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]/I$ para algum ideal primo homogêneo I então definimos $Proj(R)$ a variedade projetiva corresponde ao R, é dizer, $Proj(R) = \mathbb{V}(I)$.

Teorema 4.5. Seja M uma variedade projetiva sobre $\mathbb{K}$. Então

i) O anel $\mathcal{O}_M(M)$ de funções regulares sobre M é isomorfo a $\mathbb{K}$.

ii) Existe uma correspondência bijetiva entre os pontos x em M e ideias homogêneas maximais $\mathfrak{m}_x$ em R que não contém R_+, onde $\mathfrak{m}_x$ é o ideal de polinômios homogêneos que são zeros em x.

iii) Para o polinômio homogêneo $f \in R_+$, definimos $M_f = \{x \in M : f(x) \neq 0\} = M - \mathbb{V}(f)$ e seja $(R_f)_0$ denota a peça de grau zero do $\mathbb{K}$-álgebra graduado localizada R_f. Então

$$M_f \simeq Spec(R_f)_0 \text{ e } \mathcal{O}_M(M_f) \simeq (R_f)_0.$$

Demonstração. Ver [22] e [3].

Existem três tipos de morfismo que são muita importância para nosso estudo:

Definição 4.20. Sejam M e N variedades. Um morfismo $\phi : M \longrightarrow N$ é

i) afim se qualquer subconjunto aberto afim U de N, $\phi^{-1}(U)$ é afim;

ii) finito se para qualquer subconjunto aberto afim U de N, $\phi^{-1}(U)$ é afim e $A(\phi^{-1}(U))$ é integral sobre $\phi^*(A(U))$;

iii) própria se para toda variedade Z, o morfismo

$$\phi \times I_Z : M \times Z \longrightarrow N \times Z$$

é fechada.

Principais propriedades:

a) Se M é um subconjunto fechado de N então a inclusão $M \hookrightarrow N$ é um morfismo finito.

b) A composta de dois morfismos afim (finito, própria) é afim (finito, própria).

c) Se $\theta \circ \delta$ é própria, então δ é própria.

d) Se $\theta \circ \delta$ é própria e δ é sobrejetiva então θ é própria.

e) Um morfismo finito é própria.

Definição 4.21. Uma variedade M é completa se para qualquer variedade Y, o morfismo projeção $\pi_Y : M \times Y \longrightarrow Y$ é fechada.

Proposição 4.3 (Propriedades de variedades completas)**.**

i) Imagem de uma variedade completa é completa.

ii) Uma subvariedade completa é fechado.

iii) Uma variedade afim completa e conexa é um ponto.

iv) Imagem inversa de um variedade completa baixo um morfismo própria é completa.

Demonstração. Olhe, [7].

Grupos algébricos

Seja G um grupo. Denote por $m : G \times G \longrightarrow G, (g, h) \longmapsto gh$ a multiplicação e $i : G \longrightarrow G,\ g \longrightarrow g^{-1}$ a inversa.

Definição 4.22. Um grupo algébrico é um grupo G com uma estrutura de variedade afim sobre G tais que as aplicações m e i são morfismos de variedade afim.

Note que os grupos que são variedades afins não necessariamente são irredutíveis.

Exemplo 4.2.

1 O grupo aditivo $\mathbb{G}_a = \mathbb{K}$ e grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = \mathbb{K} - \{0\}$ são grupos algébricos.

2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, $GL(n, \mathbb{K})$ é um grupo algébrico.

Definição 4.23. Uma ação de um grupo algébrico G sobre uma variedade algébrica M é um morfismo

$$\begin{array}{rcl} \sigma : G \times M & \longrightarrow & M \\ (g,x) & \longmapsto & \sigma(g,x) \end{array}$$

tais que, para todo $g, h \in G$ e $x \in M$ satisfazem

$$\begin{array}{rcl} \sigma(g, \sigma(h,x)) & = & \sigma(gh, x), \\ \sigma(1,x) & = & x, \end{array}$$

onde 1 denota a identidade de G. Por conveniência, denotamos $\sigma(g,x)$ por $g.x$. Para um ponto x de M o estabilizador G_x de x é o subgrupo fechado

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

de G e a órbita $G.x$ de x é o subconjunto

$$G.x = \{gx : g \in G\}$$

de M; note que $G.x$ é a imagem do morfismo

$$\sigma_x : G \longrightarrow M, \ \sigma_x(g) = gx.$$

Se todas as órbitas são subconjuntos fechados de M então dizemos que a ação de G é fechada.
Um ponto x (subconjunto W) de M é dita ser invariante baixo G se $gx = x$ (gW=W) para todo $g \in G$.

Definição 4.24. Um grupo algébrico linear G sobre $\mathbb{K}$ é um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{K})$, para algum n.

Definição 4.25. Um subgrupo Borel de um grupo algébrico é um subgrupo solúvel conexo maximal.

Denotaremos por $R(G)$ o radical de um grupo algébrico G, que é a componente conexa através da identidade 1 da interseção de todos subconjuntos de Borel, isto é,

$$R(G) = \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \right)^{\circ},$$

onde $\mathcal{B}$ sendo o conjunto de todos os subgrupos de Borel em G. É evidente um subgrupo normal solúvel conexo de G. Seu parte unipotente $R(G)_u$ é chamado o radical unipotente de G.

Definição 4.26. G é redutivo se $R(G)_u = \{1\}$.
Isto é equivalente a dizer: $R(G)$ é um toro, ou seja, produto direto de copias de $\mathbb{K}^*$.

Definição 4.27. Um grupo algébrico linear G é

i) redutivo se tem radical unipotente trivial.

ii) linearmente redutivo se para qualquer representação linear de dimensão finita $\rho : G \longrightarrow GL(n+1, \mathbb{K})$ se descompõe como soma direta de irredutíveis.

iii) geometricamente redutivo se para qualquer representação $\rho : G \longrightarrow GL(n+1, \mathbb{K})$ e qualquer ponto $v \in \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$, G-invariante, existe um polinômio $f \in \mathbb{K}[x_0, ..., x_n]$ homogêneo G-invariante não constante tal que $f(v) \neq 0$.

As três noções da definição acima coincidem em corpo de característica zero.

Exemplo 4.3. Qualquer toro $(\mathbb{G}_m)^r$ e grupos finitos são redutivos. Também os grupos $GL(n, \mathbb{K})$, $SL(n, \mathbb{K})$ e $PGL(n, \mathbb{K})$ são todos redutivos. O grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ de $\mathbb{K}$ baixo adição não é redutivo. Em característica positiva, os grupos algébricos $GL(n, \mathbb{K})$, $SL(n, \mathbb{K})$, $PGL(n, \mathbb{K})$ não são linearmente redutivo para $n > 1$.

Um vantagem para usar o grupo linear redutivo é seus representações são completamente redutível. Esta propriedade foi muito importante para Mumford para desenvolver a GIT.

Definição 4.28. Uma ação de um grupo redutivo G sobre uma variedade afim $M \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$, é chamado ação linear se G age via representação $G \longrightarrow GL(n+1, \mathbb{K})$.

Definição 4.29. Um G-módulo é uma $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita com um morfismo de grupos algébricos $\rho : G \longrightarrow GL(V)$.

Esta representação $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ é chamada racional e determina um morfismo $G \times V \longrightarrow V$, $(g, v) \longmapsto \rho(g)(v)$. Em outras palavras determina uma ação linear sobre V.

Seja G um grupo algébrico agindo sobre uma variedade algébrica M. Seja $Y := M/G$ o espaço de órbitas de M baixo a ação de G; um ponto em Y é uma G-órbita, é dizer, $G.x$, para algum $x \in M$. Em geral, Y não necessariamente tem uma estrutura de variedade; se Y tem uma estrutura de variedade, então ele força a cada órbitas a ser fechado, o que pode não acontecer em geral.
Vejamos exemplos:

Exemplo 4.4. Considere

M={matrizes triangulares superiores em $M_2(\mathbb{K})$},
G={matrizes triangulares superiores invertíveis em $M_2(\mathbb{K})$}.

Seja G agindo sobre M por conjugação. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ e $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$. Então

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} A \frac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $a/d \in \mathbb{K}^*$. Assim, $G.A = \{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{K}^*\}$. Agora, $\overline{G.A} = G.A \cup \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ portanto, $G.A$ não é fechado.

Exemplo 4.5. Suponha que $\mathbb{K}^*$ age em $\mathbb{K}^2$ com ação

$$t.(x,y) = \left(tx, t^{-1}y\right).$$

Há três tipos de órbitas:

i) $\{(x,y) : xy = t\}$ para $t \neq 0$. Estas são órbitas fechadas de dimensão 1.

ii) $\{(0,0)\}$. Isto, é uma órbita fechada 0 dimensional.

iii) $\{(0,y) :\ y \neq 0\}$, ou $\{(x,0) : x \neq 0\}$. Estas são duas órbitas de dimensão 1 cujos fechos contém o origem.

O espaço de órbitas não é Hausdorff porque o fecho das órbitas de tipo iii) contém a órbita ii). No entanto, se descartamos as órbitas não-fechado iii), então o restante das órbitas são parametrizados por $\mathbb{K}$.

Definição 4.30. Seja G um grupo algébrico e R um $\mathbb{K}$-álgebra. Uma ação racional de G sobre R é uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times R & \longrightarrow & R \\ (g,f) & \longmapsto & g.f \end{array}$$

com as seguintes propriedades:

i) $(gg').f = g.(g'.f)$ e $1.f = f$, para todo $f \in R$, $g, g' \in G$;

ii) a aplicação $f \longmapsto g.f$ é um automorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras de R para todo $g \in G$;

iii) qualquer elemento de R está contido num sub-espaço de dimensão finita que é invariante por G e sobre qual G age pela representação racional.

Dada uma ação racional de G sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra R finitamente gerado, temos um questão interesse a saber se o sub-álgebra

$$R^G = \{f \in R : g.f = f, \text{ para todo } g \in G\}$$

é finitamente gerado.

Temos o seguinte teorema fundamental que foi provado por Nagata:

Teorema 4.6. **[Nagata]** Seja G um grupo geometricamente redutivo e age racionalmente sobre um $\mathbb{K}$-álgebra R finitamente gerado. Então R^G é finitamente gerado.

Demonstração. Ver [20].

Seja $M = SpecR$, onde R é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerado. Cada $f \in R$ corresponde a uma aplicação $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$. Uma ação de grupo G sobre M (pela esquerda) induz uma ação de G sobre R, definido por $(g.f)(x) = f\left(g^{-1}.x\right)$, para $g \in G$, $f \in R$, e $x \in M$. Seja

$$R^G = \{f \in R : g.f = f, \forall g \in G\}.$$

Se R^G é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerado, então podemos usar a variedade $SpecR^G$ para definir um quociente.

Definição 4.31. O quociente afim GIT é o morfismo $\varphi : M \longrightarrow M /\!\!/ G = SpecA\,(M)^G$ de variedades associado à inclusão $\varphi^* : A\,(M)^G \hookrightarrow A\,(M)$.

4.1 Quociente afim

Começamos com um resultado fundamental concernente para grupo geometricamente redutivo.

Proposição 4.4. Seja G um grupo algébrico geometricamente redutivo agindo sobre uma variedade afim $M = SpecR$. Dados dois subconjuntos disjuntos fechados G-invariantes $W_1, W_2 \subset M$ então existe $F \in R^G$ tais que $F\,(W_1) = 0$ e $F\,(W_2) = 1$.

Demonstração. Ver [25] e [20].

Teorema 4.7. Seja G um grupo redutivo agindo sobre uma variedade afim $M = SpecR$, onde $R = A(M)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerado. Seja $Y = SpecR^G$ e seja $\varphi : M \longrightarrow Y$ o morfismo induzido pela inclusão $R^G \hookrightarrow R$. Então

1) φ é sobrejetora.

2) φ é G-invariante, isto é, φ é constante sobre órbitas:

$$\varphi\,(g.x) = \varphi\,(x)\,,\ g \in G,\ x \in M.$$

3) φ é um morfismo afim, isto é, a imagem inversa de um conjunto aberto afim é um conjunto aberto afim.

4) Se $W \subset M$ é G-invariante e fechado, então $\varphi\,(W)$ é fechado.

5) Se W_1,W_2 são dois subconjuntos fechados disjuntos G-invariante de M, então $\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = \emptyset$.

6) Para dado aberto $U \subset Y$, a aplicação

$$\varphi^* : A(U) \longrightarrow A\left(\varphi^{-1}(U)\right)^G,$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [20] e [25].

Como consequência importante, obtemos que φ tem a propriedade de aplicação universal:

Proposição 4.5. [Propriedade de aplicação universal] Com M, Y e φ como no teorema acima, dada uma variedade algébrica Z e um morfismo $f : M \longrightarrow Z$, G-invariante então existe um único morfismo $h : Y \longrightarrow Z$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "h"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

é comutativa.

Demonstração. Ver [25].

Seja $M = SpecR$ uma variedade afim agido por G. Seja $Y := SpecR^G$ (note que R^G é um $\mathbb{K}$-álgebra finitamente gerado). Seja $\varphi : M \longrightarrow Y$ o morfismo induzido pela inclusão $R^G \hookrightarrow R$.

Considere as seguintes duas propriedade de φ:

i) φ é G-invariante, isto é, φ é constante sobre G-órbita.

ii) φ tem a propriedade de aplicação universal.

Fazemos uma abstração de i) e ii), e definimos o quociente categórico:

Definição 4.32. Seja M uma variedade algébrica com uma ação por um grupo algébrico G. Um *quociente categórico* de M por G é um par (Y, φ) satisfazendo as condições:

i) Y é uma variedade algébrica.

ii) φ é o morfismo de variedades de M a Y.

iii) φ é G-invariante, isto é, φ é constante sobre órbitas.

iv) φ tem a propriedade de aplicação universal.

Vamos denotar o quociente categórico por $M /\!\!/ G$.
Imediatamente da definição: se M é afim com G redutivo, então $M/\!\!/G = Spec\left(\mathbb{K}\left[M\right]^{G}\right)$.

Exemplo 4.6. Seja $G = \mathbb{C}^*$ o grupo multiplicativo agindo sobre $M = \mathbb{C}^3$ como segue-se

$$t.(z_1, z_2, z_3) = (t^{-2}z_1, tz_2, t^3z_3).$$

O anel invariante $A(M)^{\mathbb{C}^*}$ é gerado por $z_1z_2^2z_1^2z_2z_3$ e $z_1^3z_3^2$. Então

$$A(M)^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}\left[z_1z_2^2, z_1^2z_2z_3, z_1^3z_3^2\right] \simeq \mathbb{C}\left[y_1, y_2, y_3\right]/(y_2^2 - y_1y_3).$$

O quociente afim

$$\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 /\!\!/ \mathbb{C}^* \simeq \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3 : y_2^2 - y_1y_3 = 0\}.$$

Agora fazemos uma abstração do Teorema 4.7 para definir um bom quociente.

Definição 4.33. Dada uma variedade algébrica M e um grupo algébrico G agindo sobre M. Um par (Y, φ) é chamado *bom quociente* de M por G se satisfaz as seguintes condições:

i) $\varphi : M \longrightarrow Y$ é um morfismo sobrejetiva.

ii) φ é G-invariante, isto é, φ é constante sobre órbita:

$$\varphi\left(g.x\right) = \varphi\left(x\right),\ g \in G,\ x \in M.$$

iii) φ é um morfismo afim, isto é, a imagem inversa de um conjunto aberto afim é novamente um conjunto aberto afim.

iv) Se $W \subset M$ é G-invariante e fechado, então $\varphi\left(W\right)$ é fechado.

v) Se W_1, W_2 são dois subconjuntos fechados disjuntos G-invariante de M, então $\varphi\left(W_1\right) \cap \varphi\left(W_2\right) = \emptyset$.

vi) Dado um arbitrário aberto $U \subset Y$, aplicação

$$\varphi^* : A\left(U\right) \longrightarrow A\left(\varphi^{-1}\left(U\right)\right)^{G}$$

é um isomorfismo.

Exemplo 4.7. Considere a ação de $G = \mathbb{K}^*$ sobre $M = \mathbb{K}^2$ por

$$t.(x, y) = (tx, t^{-1}y).$$

O anel de polinômios $\mathbb{K}^*$-invariantes de $A(M) = \mathbb{K}[x, y]$ é $A(M)^G = \mathbb{K}[xy] \simeq \mathbb{K}[t]$, e portanto a inclusão $A(M)^G \hookrightarrow A(M)$ induz o bom quociente $\varphi : M \longrightarrow Y = Spec(A(M)^G) = \mathbb{K}$ dado por $\varphi(x, y) = xy$.

Definição 4.34. Um bom quociente (Y, φ) de M pela ação de G é dita ser *quociente geométrica* se todas as órbitas em M pela ação de G são fechadas.

Os seguintes fatos são imediatamente da definição:

1) Um bom quociente é um quociente categórico.
2) Para $M = SpecR$, $M /\!\!/ G = Spec\left(R^G\right)$ é um bom quociente.
3) Considere qualquer subgrupo fechado $H \subset G$, (G grupo algébrico). Então o espaço de classes G/H é um quociente geométrica para a ação de H sobre G pela multiplicação à direita.
4) $\mathbb{P}^n$ pode ser visto como quociente geométrica de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ pela ação de $\mathbb{C}^*$.

Alguns propriedades de bom quociente e quociente geométrica:

Proposição 4.6.

1) Se (Y, φ) é um bom quociente (respetivamente geométrica) de M por G, então para todo aberto $U \subset Y$, $res\,(\varphi) : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$ é um bom quociente (respetivamente geométrica) de $\varphi^{-1}(U)$ por G (aqui, res(φ) denota a restrição).
2) Se $\varphi : M \longrightarrow Y$ é um morfismo e $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta afim de Y, tais que $res\,(\varphi) : \varphi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ é um bom quociente (respetivamente geométrica) de $\varphi^{-1}(U_i)$ por G para todo i. Então (Y, φ) é um bom quociente (respetivamente geométrica) de M por G.
3) Seja (Y, φ) um bom quociente (respetivamente geométrica) de M por G. Para $x_1, x_2 \in M$:
$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Leftrightarrow \overline{G.x_1} \cap \overline{G.x_2} \neq \emptyset.$$
4) Seja (Y, φ) um bom quociente. Cada fibra contém uma única órbita fechada.

Demonstração:

1) e 2) segue-se da definição de bom quociente (respetivamente geométrica).

3) Como φ é continua e constante sobre o fecho da órbita, o qual mostra que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ quando $\overline{G.x_1} \cap \overline{G.x_2} \neq \emptyset$. Da Definição 4.33 de bom quociente o item v), obtém-se o reciproco.

Para mostrar 4), precisamos o enunciado do lema de órbita fechada:

Lema 4.2 (Órbita fechada)**.** Seja um grupo algébrico G agindo sobre uma variedade algébrica M. Então para cada $x \in M$, a órbita $G.x$ é uma variedade suave que é aberto em seu fecho $\overline{G.x}$ em M. Seu borde $\overline{G.x} - G.x$ é uma união de órbitas de dimensão estritamente pequeno. Em particular, as órbitas de dimensão minimal são fechadas.

Observe a demonstração em Borel [7].

4) Se $\varphi^{-1}(y)$ contém órbitas fechadas disjuntas $G.x_1$ e $G.x_2$ então

$$y \in \varphi(G.x_1) \cap \varphi(G.x_2) = \emptyset$$

é uma contradição ao Teorema 4.7 5). Portanto, $\varphi^{-1}(y)$ contém pelo menos uma órbita fechada. Agora mostramos a existência da órbita fechada: como cada fibra $\varphi^{-1}(y)$ é G-invariante então é união de órbitas de seus pontos logo pela lema de órbita fechada $\varphi^{-1}(y)$ contem uma órbita fechada Γ e como $\varphi^{-1}(y)$ é fechado em M, concluímos que Γ é fechado em M.

□

Alguns resultados sobre bom quociente

Neste parte provarmos alguns resultados que serão usado para nosso discussão nos seguintes seções.

Lembre o teorema semicontinuidade superior:

Teorema 4.8. Seja $f : M \longrightarrow Y$ um morfismo de tipo finito de variedades algébricas M e Y. Então para qualquer inteiro n, o conjunto

$$\{x \in M : dim\left(f^{-1}(f(x))\right) \geq n\}$$

é um subconjunto fechado de M.

Uma formulação equivalente: para qualquer inteiro m, o conjunto

$$\{x \in M : dim\left(f^{-1}(f(x))\right) \leq m\}$$

é um subconjunto aberto de M.

Seja M uma variedade algébrica com uma ação por um grupo algébrico G. Como uma primeira aplicação de teorema de semicontinuidade temos:

Lema 4.3.

1. Para qualquer inteiro n, o conjunto $\{x \in M : dimG_x \geq n\}$ é um subconjunto fechado de M.

2. Para qualquer inteiro m, o conjunto $\{x \in M : dim\, G.x \geq m\}$ é um subconjunto aberto de M.

Demonstração: 1) Considere o morfismo

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G \times M & \longrightarrow & M \times M \\ & (g,x) & \longmapsto & (g.x, x)\,. \end{array}$$

Observe que a fibra de ϕ através de (x,x) pode ser identificado com o subgrupo isotrópico de G em x. Isto é,

$$\phi^{-1}(\phi(1,x)) = \{(g,x) : g \in G_x\} = G_x \times \{x\} \simeq G_x.$$

Aplicando o Teorema 4.8 (reformulação) ao ϕ, obtemos que o conjunto $\{(g,x) : dimG_x < n\}$ é aberto em $G \times M$. Agora usemos a projeção canónica $G \times M \longrightarrow M$, $(g,x) \longmapsto x$ que é aberto. E portanto, $\{x \in M : dimG_x < n\}$ é aberto em M.

2) Pelo teorema estabilizador órbita tem-se $dimG = dimG_x + dimG.x$, logo

$$\begin{array}{rcl} \{x \in M : dimG.x \geq m\} & = & \{x \in M : dimG - dimG_x \geq m\} \\ & = & \{x \in M : dimG_x \leq dimG - m\} \text{ aberto pelo item 1).} \end{array}$$

□

Lema 4.4. Seja d a máxima dimensão das órbitas.

Seja $M_{\max} = \{x \in M : dim\,(G.x) = d\}$. Então $M_{\max}$ é um subconjunto aberto G-invariante de M.

Demonstração. A G-invariança de $M_{\max}$ é claro. A afirmação que $M_{\max}$ é aberto segue-se de Lema 4.3, (2). Note pela maximalidade de d, temos

$$M_{\max} = \{x \in M : dim\,(G.x) \geq d\}.$$

□

Lema 4.5. Seja (Y,φ) um bom quociente de M por G. Seja $x \in M$ tal que $G.x$ é uma órbita fechada de dimensão d. Seja $q : M_{\max} \longrightarrow Y$ a restrição de φ ao $M_{\max}$. Então $G.x$ é a fibra de q no ponto $q(x)$.

Demonstração. Seja $x' \in M_{\max}$ tais que $q(x') = q(x)$. Desejamos mostrar que x' pertence em $G.x$. Suponha que $G.x \neq G.x'$. Temos que $\varphi(x') = \varphi(x)$ (já que $q(x') = q(x)$), e portanto $\overline{G.x} \cap \overline{G.x'} \neq \emptyset$ (por definição de bom quociente v)). Mas por hipótese, $\overline{G.x} = G.x$. Portanto, obtemos $G.x \subseteq \overline{G.x'}$ isto com a suposição $G.x \neq G.x'$ e a Lema de órbita fechada implica que $dimG.x < d$ (pois $dimG.x' = d$), o qual é absurdo. Assim, $G.x = G.x'$ e portanto, $x' \in G.x$.

□

Lema 4.6. Seja (Y,φ) um bom quociente de M por G. Seja $M_1 = \{x \in M_{\max} : dim\, q^{-1}(q(x)) = d\}$, onde q é a restrição de φ ao $M_{\max}$ e d é a máxima dimensão da órbita. Então M_1 é um subconjunto aberto G-invariante de M.

Demonstração. A G-invariança de M_1 é claro. Agora as G-órbitas em M mapeiam aos pontos em Y, por isso que acontece também para o caso $q : M_{\max} \longrightarrow Y$. Assim, temos que as fibras de q são de dimensão maior ou igual a d. Aplicando o Teorema 4.8 para q (tomando $m = d$), obtemos que M_1 é um subconjunto aberto de $M_{\max}$ e portanto de M (pois $M_{\max}$ é um subconjunto aberto de M).

□

Lema 4.7. Seja (Y,φ) um bom quociente de M sobre G. Seja $M'_{\max} = \{x \in M_{\max} : G.x$ é fechado$\}$. Então $M'_{\max}$ é um subconjunto aberto G-invariante de M.

Demonstração. Primeiro pelo Lema 4.5, temos $M'_{\max} \subseteq M_1$. A G-invariança de $M'_{\max}$ é óbvio. Agora, como $M - M_{\max}$ é um subconjunto fechado G-invariante de M temos $\varphi(M - M_{\max})$ um subconjunto fechado em Y. Portanto, $Y' = Y - \varphi(M - M_{\max})$ é um subconjunto aberto de Y.

Afirmação: $M'_{\max} = \varphi^{-1}(Y')$.

Com efeito, a inclusão $\subseteq$:

Seja $x \in M'_{\max} \subseteq M_{\max}$. Então $\varphi(x) \notin \varphi(M - M_{\max}) = Y - Y'$. Portanto, $\varphi(x) \in Y'$.

A inclusão $\supseteq$:

Seja $x \in M$ tais que $\varphi(x) \in Y'$. Precisamos mostrar que $x \in M'_{\max}$. Suponha que $x \notin M'_{\max}$. Então ou $x \in M - M_{\max}$, ou $x \in M_{\max}$ mas $G.x$ não é fechado.

No primeiro caso, $\varphi(x) \in \varphi(M - M_{\max}) = Y - Y'$. Portanto, $\varphi(x) \notin Y'$ o qual contradiz à hipótese ($\varphi(x) \in Y'$).

No último caso, escolha $x_1 \in \overline{G.x} - G.x$. Então pela Lema da órbita fechada, $dimG.x_1 < dimG.x = d$ e portanto $x_1 \notin M_{\max}$. Isto, implica que $\varphi(x_1) \in \varphi(M - M_{\max}) = Y - Y'$. Portanto, $\varphi(x_1) \notin Y'$. Isto implica $\varphi(x) \notin Y'$ (pois $x_1 \in \overline{G.x}$), o qual é uma contradição

à hipótese.
Assim em ambas casos chegamos a uma contradição. Portanto, a suposição não é verdadeira.

$\square$

O seguinte proposição relaciona órbitas fechadas e morfismos próprios.

Proposição 4.7. Seja M uma variedade algébrica com uma ação por um grupo algébrica G(afim). Seja $x \in M$. Seja $\sigma_x : G \longrightarrow M$, o morfismo definido por $g \longmapsto g.x$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $G.x$ é fechada e $dim\, G.x = dim\, G$;

ii) σ_x é um morfismo próprio.

Demonstração. A implicação $\Longrightarrow$: seja σ'_x o morfismo $G \longrightarrow G.x$, $g \longmapsto g.x$. A hipótese $dimG.x = dimG$ implica que as fibras de σ'_x são finitos.
Afirmação: σ'_x é um morfismo finito (lembre um morfismo $f : V \longrightarrow W$ é finito se, para cada aberto afim U de W a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é afim e $\mathbb{K}\left[f^{-1}(U)\right]$ é integral sobre $\mathbb{K}[U]$).
Para mostrar a afirmação é suficiente encontrar um conjunto aberto U não vazio em $G.x$ tal que $\sigma'_x : \sigma'^{-1}_x(U) \longrightarrow U$ é finito; podemos usar a ação de G para cobrir $G.x$ com tais conjuntos abertos. Mas agora a existência de tal U segue-se de:
Sublema: Seja $f : V \longrightarrow W$ um morfismo com fibras finita. Então existe um conjunto aberto não vazio U em W tal que $f : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ é um morfismo finito.
Para uma prova do sublema, observe [20], [19] e [15].
A afirmação acima implica que σ'_x é própria (pois um morfismo finito é próprio). Mais a inclusão $i : G.x \longrightarrow M$ é uma imersão fechado (porque $G.x$ é fechado) e portanto, i é própria. Agora, $\sigma_x = i \circ \sigma'_x$ é próprio já que é composição de morfismos próprios.
A implicação $\Longleftarrow$: a hipótese σ_x é própria implica que $\sigma_x(G) = G.x$ é fechado em M; mais, $\sigma_x^{-1}(x) = G_x$ é completa (pela Proposição 4.3, iv)). Assim G_x é completo e afim (note que G_x sendo um subgrupo fechado de G é afim), portanto G_x é finito (pela Proposição 4.3, iii). Isto implica que $dimG.x = dimG$.

$\square$

Pontos estáveis e semiestáveis

Os quocientes projetivos não são tão fáceis como os quocientes afins. Para motivar nossa definição, note que no caso de uma ação por um grupo redutivo G sobre a variedade afim $M = Spec\,(R) \subset \mathbb{K}^{n+1}$, o quociente categórico de M por G existe e está definido em todo M. Enquanto, se M é uma variedade projetiva, então em geral nem sempre existe um tipo de quociente definido em todo M. O melhor que podemos fazer em geral é procurar um quociente sobre alguma subvariedade aberta de M, como descreremos abaixo.

Considere uma variedade projetiva $M = Proj(R)$, junto com uma ação por um grupo algébrico redutivo G. Suponha que M tenha um cobrimento aberto afim $M = \cup_{\alpha\in I} SpecR_{\alpha}$, $\alpha \in I$ com $SpecR_{\alpha}$ G-invariante. Então pode ser colada por $SpecR_{\alpha}$ para definir um quociente. Mas em geral tal cobertura afim não existe para um dada variedade projetiva M. No entanto, adiante vamos obter um bom quociente em um subconjunto aberto G-invariante de M.

Os pontos estável, semiestável, e poliestável

Este conceitos são definidos para uma ação linear de G sobre M, onde M variedade algébrica (ou afim ou projetiva).

No caso afim. Seja $M \subset \mathbb{K}^{n+1} \left(= \mathbb{A}^{n+1}\right)$ um subconjunto fechado e seja G um grupo agindo linearmente sobre M.

Definição 4.35. Um ponto $x \in M$ é *semiestável* se $0 \notin \overline{G.x}$.

$$M^{ss}=\{x \in M \colon x \text{ é semiestável}\}.$$

Definição 4.36. Um ponto $x \in M$ é *poliestável* se $G.x$ é uma órbita fechada.

$$M^{ps} =\{x \in M \colon x \text{ é poliestável}\}.$$

Definição 4.37. Um ponto $x \in M$ é *estável* se,

i) $G.x$ é uma órbita fechada.

ii) $dimG.x = dimG$.

$$M^{s}=\{x \in M \colon x \text{ é estável}\}.$$

Proposição 4.8. Seja $M \subset \mathbb{K}^{n+1} \left(= \mathbb{A}^{n+1}\right)$ um subconjunto fechado e seja um grupo redutivo G agindo linearmente sobre M. Seja $x \in M$. Então

i) $x \in M^{ss}$ se, somente se, existe um polinômio homogêneo f G-invariante de grau maior do que zero tal que $f\,(x) \neq 0$.

ii) $x \in M^s$ se, e somente se, $\sigma_x : G \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $g \longmapsto g.x$ é própria.

Demonstração: i) Seja $x \in M^{ss}$. Então $\{0\}$ e $\overline{G.x}$ são subconjuntos fechados G-invariantes em $\mathbb{K}^{n+1}$. Pela Proposição 4.4, existe um polinômio f, G-invariante tais que $f(0) = 0$ e $f\left(\overline{G.x}\right) = 1$. Agora, $f(0) = 0$ implica que o termo constante de f é zero. Portanto, existe algum parte homogênea de f não é zero em x (note que qualquer parte homogênea de f é novamente G-invariante, pois se G age sobre $\mathbb{K}$-álgebra graduado R, então R^G é graduado também).
Reciprocamente, dado um polinômio homogêneo f, G-invariante de grau maior do que zero em $\mathbb{K}^{n+1}$ tal que $f(x) \neq 0$, claramente $0 \notin \overline{G.x}$ (como f é homogêneo de grau maior do que zero, temos $f(0) = 0$).
ii) Segue-se da definição de estável e a Proposição 4.7.

A continuação definimos a noções de semiestável, poliestável, e estável para ações sobre uma variedade projetiva M.
Para seguintes definições suponha

$$M = Proj\,(R) \hookrightarrow \mathbb{P}(V),$$

V um G-módulo, G um grupo redutivo, e a G-ação sobre M é induzido da ação definida sobre $\mathbb{P}(V)$.

Definição 4.38. Uma linearização de uma ação de grupo algébrico G sobre uma variedade projetiva $M \subset \mathbb{P}(V)$, é uma ação linear de G sobre $V = \mathbb{K}^{n+1}$ que induz a ação dada sobre M. Uma ação linear de G sobre M é uma ação de G junto com uma linearização desta ação.

Claramente, uma ação linear G sobre M determina uma ação sobre $\mathbb{K}[z_0, ..., z_n]$. Para resto desta dissertação sempre vamos supor que temos uma ação linear sobre M por um grupo redutivo G.
Denotemos por $\tilde{M}$ ($\hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{K}^{n+1} = V$), o cone $SpecR$ sobre M.

Definição 4.39. Um ponto $x \in M$ é *semiestável* se existem representantes $\tilde{x}$ sobre x tais que $0 \notin \overline{G.\tilde{x}} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$.

$$M^{ss} \quad = \quad \{x \in M : \ x \text{ é semiestável}\}.$$

Definição 4.40. Um ponto $x \in M$ é *poliestável* se existem representantes $\tilde{x}$ sobre x tais que $G.\tilde{x}$ é fechado em $\mathbb{K}^{n+1}$.

$$M^{ps} = \{x \in M : x \text{ é poliestável}\}.$$

Definição 4.41. Um ponto $x \in M$ é *estável* se existem representantes $\tilde{x}$ sobre x tais que

i) $G.\tilde{x}$ é fechado em $\mathbb{K}^{n+1}$ e,

ii) $dimG.\tilde{x} = dimG$.

$$M^{s} = \{x \in M : x \text{ é estável}\}.$$

Note que $M^s \subseteq M^{ps} \subseteq M^{ss}$.

Outras caracterizações de estabilidade, e semiestabilidade

Agora descrevemos outras caraterizações de estabilidade e semiestabilidade. Começando com o seguinte lema:

Lema 4.8. Seja M uma variedade algébrica (afim $M \subseteq V$ ou projetiva $M \subseteq \mathbb{P}(V)$) com uma ação linear por um grupo redutivo G e seja f um polinômio G-invariante em V de grau maior do zero. Então M_f é G-invariante.

Demonstração. Seja $x \in M_f$. Seja $\tilde{x} \in V$ representante de x, no caso M é projetivo. Denote $y = x$ ou $y = \tilde{x}$ conforme seja M afim ou projetiva. Então $f(y) \neq 0$. Para $g \in G$, temos

$$f(g.y) = \left(g^{-1}f\right)(y) = f(y) \neq 0$$

(a segunda igualdade é válida, tendo em conta da G-invariância de f). Isto, implica $g.x \in M_f$, e a G-invariança de M_f.

□

Similar ao proposição 4.8, i) temos o seguinte:

Proposição 4.9. Seja $M = Proj(R) \subset \mathbb{P}(V)$, $V = \mathbb{K}^{n+1}$ um subconjunto fechado e seja um grupo redutivo G agindo linearmente sobre M. Seja $x \in M$. Então $x \in M^{ss}$ se, somente se, existe um polinômio homogêneo f, G-invariante de grau maior a zero em V

tal que $f(x) \neq 0$.

Demonstração. O resultado segue-se imediatamente da Proposição 4.8, i) e a definição de pontos semiestável em M.

A seguir, descrevemos três outras caracterizações de pontos estáveis sobre variedades projetivas (para ações lineares de grupos redutivo).

Proposição 4.10. [Primeira caraterização de estabilidade]
Seja $M = Proj\,(R) \subset \mathbb{P}(V)$, $V = \mathbb{K}^{n+1}$ um subgrupo fechado e seja um grupo redutivo G agindo linearmente sobre M. Seja $x \in M^s$ se, somente se, $\sigma_{\tilde{x}} : G \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $g \longmapsto g.\tilde{x}$ é própria, onde $\tilde{x}$ é representante de x.

Demonstração. O resultado é imediato da Proposição 4.8, ii).

Antes de descrever as outras duas caracterizações para pontos estáveis em $M = Proj\,(R)$, consideremos o seguinte lema:

Lema 4.9. Seja M uma variedade projetiva com uma ação linear por um grupo redutivo G. Considere $x \in M$ e seja f um polinômio homogêneo G-invariante em V de grau maior do que zero tal que $f(x) \neq 0$. Seja $\tilde{x}$ um ponto representante em V de x. Sejam $\sigma_{\tilde{x}}$ e $(\sigma_x)_f$ os morfismos,

$$\sigma_{\tilde{x}} : G \longrightarrow V,\ g \longmapsto g.\tilde{x},\ \ (\sigma_x)_f : G \longrightarrow \mathbb{P}(V)_f\,, g \longmapsto g.x.$$

Então $(\sigma_x)_f$ é própria se, somente se, $\sigma_{\tilde{x}}$ o é.

Demonstração. Seja $f(\tilde{x}) = \alpha \neq 0$, considere $Z_\alpha = \{y \in V : f(y) = \alpha\}$ e seja i_α a inclusão $Z_\alpha \hookrightarrow V$, note que i_α é uma imersão fechada. Seja $(\sigma_{\tilde{x}})_f$ o morfismo

$$(\sigma_{\tilde{x}})_f : G \longrightarrow Z_\alpha,\ g \longmapsto g.\tilde{x}.$$

Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "(\sigma_{\tilde{x}})_f"'] \arrow[dr, "\sigma_{\tilde{x}}"] & \\ Z_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"'] & V \end{tikzcd}$$

isto implica que

$$\sigma_{\tilde{x}} = i_\alpha \circ (\sigma_{\tilde{x}})_f \qquad (*)$$

Seja π_f o morfismo

$$\pi_f : Z_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}(V)_f\,,\ z \longmapsto [z]\,.$$

Temos π_f um morfismo finito (observe que as fibras de π_f são raízes da d-enésima da unidade, onde d sendo o grau de f).
Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "(\sigma_{\tilde{x}})_f"'] \arrow[dr, "(\sigma_x)_f"] & \\ Z_\alpha \arrow[r, "\pi_f"'] & \mathbb{P}(V)_f \end{tikzcd}$$

isto implica

$$(\sigma_x)_f = \pi_f \circ (\sigma_{\tilde{x}})_f \qquad (**).$$

Considere os seguintes fatos:

- Composição de dois morfismos próprios é próprio.
- Seja F um morfismo próprio de variedade algébricas. Mais, seja $F = \theta \circ \delta$ com θ um morfismo separado. Então δ é um morfismo próprio; em particular, se θ é própria então δ é um morfismo próprio.
- Uma imersão fechada é própria. (Em particular, i_α é própria)
- Um morfismo finito é própria. (Em particular, π_f é própria).

Estes fatos com $*$) e $**$) implica o resultado desejado.

□

Lema 4.10. [Segunda caraterização de estabilidade] Sejam M e G como no Lema 4.9. Seja $x \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $x \in M^s$.

ii) a) existe um polinômio homogêneo f, G invariante sobre V de grau > 0 tal que $f(x) \neq 0$.

b) $G.x$ é fechado em M_f.

c) $dim\,(G.x) = dim\,G$.

Note: A condição ii), é equivalente à condição $x \in M_f^s$, para algum polinômio homogêneo f, G-invariante em V de grau > 0. Portanto, temos:
Reformulação: $x \in M^s$ se, e somente se, existe um polinômio homogêneo f, G-invariante em V de grau > 0, tal que $x \in M_f^s$.

Demonstração. Suponha que existe um polinômio f, G-invariante sobre V de grau > 0 tal que $x \in M_f$. Sabemos que M_f é G-invariante (pelo Lema 4.8). Seja $i_f : M_f \hookrightarrow \mathbb{P}(V)_f$ a imersão fechado e seja $(\phi_x)_f$ a aplicação

$$(\phi_x)_f : G \longrightarrow M_f,\ g \longmapsto g.x.$$

Então $(\sigma_x)_f : G \longrightarrow \mathbb{P}(V)_f$, $g \longmapsto g.x$ factora como

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "(\phi_x)_f"'] \arrow[dr, "(\sigma_x)_f"] & \\ M_f \arrow[r, "i_f"'] & \mathbb{P}(V)_f \end{tikzcd}$$

Assim, obtemos

$$(\sigma_x)_f = i_f \circ (\phi_x)_f\,.$$

Portanto, como na prova do Lema 4.9, temos

$$(\sigma_x)_f \text{ é própria se, somente se, } (\phi_x)_f \text{ o é.} \qquad (*)$$

i)$\Longrightarrow$ ii): A hipótese $x \in M^s$ em particular implica que $x \in M^{ss}$ e a afirmação ii) a) segue-se da Proposição 4.9. Seja $\tilde{x}$ um ponto representante em V de x. Então a hipótese que $x \in M^s$ implica que $\tilde{x}$ é estável, e portanto $\sigma_{\tilde{x}} : G \longrightarrow V$, $g \longmapsto g.\tilde{x}$ é própria (pela Proposição 4.8). Isto implica que $(\sigma_x)_f$ é própria (pelo Lema 4.9). Portanto, $(\phi_x)_f$ é própria pelo $*$). Mais isto junto com a proposição 4.7 (aplicado a M_f) implica as afirmações ii) b) e c).
ii)$\Longrightarrow$i): A hipótese ii) b) e c) implica que $(\phi_x)_f : G \longrightarrow M_f$ é própria (pela Proposição 4.7 aplicado a M_f), e portanto $(\sigma_x)_f$ é própria por $*$). Isto implica que $\sigma_{\tilde{x}} : G \longrightarrow V$ é própria pelo Lema 4.9. Segue-se pela Proposição 4.8 que $\tilde{x}$ é estável e portanto, x é estável.

$\square$

Lema 4.11. [Terceira caraterização de estabilidade] Sejam M e G como no Lema 4.9. Seja $x \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $x \in M^s$.

ii) a) Existe um polinômio homogêneo F, G-invariante sobre V de grau $d > 0$ tal que $F(x) \neq 0$.

b) A G-ação sobre M_F é fechado.

c) $dim\,(G.x) = dimG$.

Demonstração. Ver, [26].

Combinando a Proposição 4.10, Lemas 4.10 e 4.11 obtemos:

Proposição 4.11. Seja M uma variedade projetiva com uma ação linear por um grupo redutivo G e seja $x \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $x \in M^s$.

ii) $\sigma_{\tilde{x}} : G \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $g \longmapsto g.\tilde{x}$ é própria, onde $\tilde{x}$ sendo o representante de x.

iii) $dim\,(G.x) = dimG$, e existe um polinômio homogêneo f, G-invariante em V de grau > 0 tais que $x \in M_f$ e $G.x$ é fechado em M_f.

iv) $dim\,(G.x) = dimG$, e existe um polinômio homogêneo F, G-invariante em V de grau > 0 tais que $x \in M_F$ e a G-ação sobre M_F é fechado.

Demonstração. Segue-se das Proposição 4.10, Lemas 4.10 e 4.11.

Exemplo 4.8. Suponha que $G = \mathbb{C}^*$ age sobre $M = \mathbb{P}^2$ por

$$t.\left[z_0 : z_1 : z_2\right] = \left[t^{-1}z_0 : z_1 : tz_2\right].$$

Como os polinômios G-invariantes em R^G satisfazem $(t.P)\,(z) = P\,(z)$, para todo $t \in G$. Então para um dado $P\,(z) = z_0^{d_0} z_1^{d_1} z_2^{d_2}$ temos:

$$P\,(t.z) = P\,(z) \Longleftrightarrow t^{d_0 - d_2} z_0^{d_0} z_1^{d_1} z_2^{d_2} = z_0^{d_0} z_1^{d_1} z_2^{d_2} \Longleftrightarrow d_0 = d_2$$

Ou seja, o polinômio G-invariante é da forma $P\,(z) = (z_0 z_2)^{d_0}\, z_1^{d_1}$.
Se observa que $[0 : 0 : 1]$ e $[1 : 0 : 0]$ são pontos inestáveis. Então, $M^{ss} = M - \{[0 : 0 : 1]\,, [1 : 0 : 0]\}$.
Os pontos poliestáveis:
O ponto $x = [0 : 1 : 0]$ é poliestável, pois a órbita $G.\,(0, 1, 0) = \{(0, 1, 0)\}$ é fechado.
Para o ponto $x = [z_0 : z_1 : z_2] \in U_0 \cap U_2$, o limite de $\left(t^{-1}z_0, z_1, tz_2\right)$ não existe quando t tende para zero ou infinito. Portanto, x é poliestável.
Para $x = [z_0 : z_1 : 0] \in U_0 \cap U_1$ então $\lim\limits_{t \to \infty} \left(t^{-1}z_0, z_1, 0\right) = (0, z_1, 0) \notin G.\tilde{x}$. Ou seja, x não poliestável. De forma análoga se mostra que resto de pontos não é poliestável.
Então $M^{ps} = \{[0 : 1 : 0]\} \cup \{[z_0 : z_1 : z_2] : z_0 z_2 \neq 0\}$.

A estável: Para $x = [0 : 1 : 0] \in M^{ps}$, o estabilizador é $G_x = G$ segue-se que x não é estável.
Para $x = [z_0 : z_1 : z_2] \in M^{ps}$ com $z_0 z_2 \neq 0$, o estabilizador é $G_x = \{-1, +1\}$ tem $dimG_x = 0$, e assim x é estável. Portanto, $M^s = \{[z_0 : z_1 : z_2] : z_0 z_2 \neq 0\}$.

Como uma consequência das Proposições 4.8 e 4.9, temos o seguinte:

Proposição 4.12. Seja M uma variedade algébrica (afim ou projetiva) com uma ação linear por um grupo redutivo G. Então M^{ss} é um subconjunto aberto G-invariante de M.

Demonstração. Pelas proposições 4.8 e 4.9, temos

$$M^{ss} = \bigcup_F M_F,$$

onde a união é tomada sobre todos os polinômios homogêneos G-invariantes de grau > 0 em V. Como M_F é aberto para todo F, então M^{ss} também o é. A G-invariança de M^{ss} segue-se do M_F (pelo Lema 4.8).

□

Proposição 4.13. Seja M uma variedade algébrica (afim ou projetiva) com uma ação de um grupo redutivo G. Então M^s é um subconjunto aberto G-invariante de M.

Demonstração. Suponha que M^s é diferente de vazio.

Caso afim: como M^s é não vazio, temos $dimG = d$ e $M'_{\max} = M^s$. Pelo Lema 4.7, concluímos $M'_{\max}$ é um subconjunto aberto G-invariante de M.

Caso projetivo: seja $M = Proj\,(R) \subseteq \mathbb{P}\,(V)$, e V um G-modulo (e um subconjunto fechado M de $\mathbb{P}\,(V)$). Seja

$$Z = \bigcup_f M_f,$$

onde a união é tomada sobre os polinômios homogêneos G-invariante em V de grau > 0 tais que a ação de G sobre M_f é fechada. Então Z é um subconjunto aberto G-invariante. Mais, pelo Lema 4.11 tem-se $M^s \subseteq Z$; portanto, o máximo dimensão das órbitas em Z é igual a $dimG$. De fato, tem-se $M^s = Z_{\max}$; pois, se $x \in Z_{\max}$ então $dimG.x = dimG$ e $x \in M_f$ para algum polinômio homogêneo f, G-invariante, e a G-ação sobre M_f é fechada; portanto, $x \in M^s$ (pela Proposição 4.11). Assim, $M^s = Z_{\max}$ é um subconjunto aberto e G-invariante em Z (pelo Lema 4.4), e portanto, M^s é aberto em M.

□

4.2 Quociente projetiva

Nas seções anteriores descrevemos vários tipos de quocientes. A classe de quocientes categóricas inclui a classe de bons quocientes , e por sua vez inclui a classe de quocientes geométricas.

Seja $M = Proj\,(R) \subset \mathbb{P}\,(V)$, onde M é fechado em $\mathbb{P}(V)$, e $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Queremos definir um bom quociente para algum subconjunto de M. O subconjunto

$$M^{ss} = \{\text{todos os pontos semiestáveis de } M\},$$

G-invariante admite um bom quociente.

Proposição 4.14. Seja G um grupo redutivo agindo a $M = Proj\,(R)$ com uma linearização em $M \subset \mathbb{P}\,(V)$. O conjunto de pontos semiestáveis M^{ss} define um bom quociente

$$\varphi : M^{ss} \longrightarrow M /\!\!/ G = Y = Proj\left(R^G\right). \tag{4.1}$$

Demonstração. Como a ação linear de G sobre M induz uma ação sobre $R = A(\tilde{M})$ então preserva o grau de qualquer elemento homogêneo. Portanto, R^G é uma subálgebra homogênea de $A(\tilde{M})$ e também é gerado finitamente pelo teorema de Nagata. Para cada elemento homogêneo f de R^G de grau maior do que zero, tem-se um subconjunto aberto afim M_f e $M^{ss} = \bigcup_f M_f$. Pelo Teorema 4.5,

$$A(Y_f) \simeq \left(\left(R^G\right)_f\right)_0 = \left((R_f)_0\right)^G = A(M_f)^G.$$

Logo,

a) $Y = \bigcup_f Y_f$, f cada elemento homogêneo de R^G de grau maior do que zero e $A(Y_f)$ é isomorfo ao álgebra

$$((R^G)_f)_0 = \{\frac{h}{f^r} : r \geq 0,\ h \in R^G \text{homogêneo de grau } r.\text{grau}(f)\}.$$

b) $\varphi^{-1}(Y_f) = M_f$ e $res(\varphi) : M_f \longrightarrow Y_f$ é um morfismo correspondente à inclusão de $((R^G)_f)_0$ em $A(M_f) = (A(\tilde{M})_f)_0$.

Segue-se que $(Y_f, res(\varphi))$ é um bom quociente de $\varphi^{-1}(Y_f) = M_f$ para qualquer elemento homogêneo f de R^G de grau maior do que zero. Portanto, pela Proposição 4.6 2), (Y, φ) é um bom quociente de M^{ss}.

□

Exemplo 4.9. Considere a ação de $\mathbb{C}^*$ sobre $M = \mathbb{P}^n$ por

$$t.\left[z_0 : ... : z_n\right] = \left[t^{-1}z_0 : tz_1 : ... : tz_n\right].$$

Neste caso, $R = \mathbb{C}[z_0, ..., z_n]$. As funções G-invariantes são $z_0z_1, ..., z_0z_n$ e geram o subálgebra G-invariante R^G, é dizer, $R^G = \mathbb{C}[z_0z_1, ..., z_0z_n] \simeq \mathbb{C}[y_0, ..., y_{n-1}]$ o qual corresponde a variedade projetiva $M /\!\!/ G = \mathbb{P}^{n-1}$. Então $M^{ss} = \bigcup_{i=1}^{n} M_{z_0z_i} = \{[z_0 : ... : z_n] : z_0 \neq 0, (z_1, ..., z_n) \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n - \{0\}$. Portanto, $\varphi : M^{ss} = \mathbb{A}^n - \{0\} \longrightarrow M /\!\!/ G = \mathbb{P}^{n-1}$ é um bom quociente e como a imagem inversa de cada ponto de $M /\!\!/ G$ é uma só órbita fechada então também é quociente geométrica.

Proposição 4.15. Para a ação linear de um grupo redutivo G sobre M. Tem-se

$$\overline{G.x_0} \cap \overline{G.x_1} \cap M^{ss} \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } \varphi(x_0) = \varphi(x_1),$$

para $x_0, x_1 \in M^{ss}$.
Demonstração. Segue-se da Proposição 4.6 3).

Proposição 4.16. Seja G um grupo redutivo agindo em M, com uma linearização em $M \subset \mathbb{P}(V)$. O conjunto de pontos estáveis M^s tem um quociente geométrica.
Demonstração. Sejam $Y = ProjR^G$ e $\varphi : M^{ss} \longrightarrow Y$ a aplicação quociente. Seja $W = \bigcup_f Y_f$ a união sobre o conjunto de todos os polinômios homogêneos f, G-invariantes de grau > 0 tais que a ação G sobre M_f seja fechada. Seja $Z = \varphi^{-1}(W) = \bigcup M_f$, onde f percorre o mesmo conjunto de polinómios como acima. Como na prova da Proposição 4.13 tem-se

$$M^s = Z_{\max}.$$

Em particular, a dimensão de órbita máxima sobre Z é igual a $dimG$. Denotando $Z'_{\max} = \{x \in Z_{\max} : G.x \text{ é fechado}\}$, obtemos a inclusão $Z'_{\max} \subseteq Z_{\max}$ do fato é uma igualdade já que, se $x \in Z_{\max} = M^s$ então pela definição de Z, $G.x$ é fechada em M_f; portanto, $G.x$ é fechada em Z tendo em conta a observação seguinte: suponhamos $Z = \bigcup_\alpha U_\alpha$ é coberta por abertos e T é um subconjunto de Z tais que $U_\alpha \cap T$ é fechado em U_α, para todo α. Então T é fechado em Z.
Assim, temos $Z'_{\max} = Z_{\max} = M^s$ e também pela afirmação da prova do Lema 4.7 temos

$$M^s = \varphi^{-1}(W - \varphi(Z - Z_{\max})) = \varphi^{-1}(Y^s), \qquad (*)$$

onde $Y^s = W - \varphi(Z - Z_{\max})$. Como Y^s é aberto em W e $\varphi : Z \longrightarrow W$ é quociente geométrica segue-se que

$$\varphi : M^s \longrightarrow Y^s$$

é quociente geométrica pela Proposição 4.6 1).

□

Lema 4.12. Sejam M e G como no Lema 4.9. Seja $x \in M^{ss}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $x \in M^s$.

ii) $G.x$ é fechado em M^{ss} e $dimG.x = dimG$.

Demonstração. Ver [26].

Teorema 4.9. Se $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ é representante de $x \in M$ tal que $G.\tilde{x}$ é fechado em $V = \mathbb{K}^{n+1}$ então $G.x$ é fechado em M^{ss}.

Demonstração. Por definição de semiestável tem-se $x \in M^{ss}$. Se $y \in \overline{G.x} \cap M^{ss}$ com representante $\tilde{y} \in \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ então existe um polinômio homogêneo f G-invariante não constante tal que $f(\tilde{y}) \neq 0$, ou seja, $y \in M_f$ em consequência, $x \in M_f$ (pois M_f é aberto e G-invariante). Portanto, sem perda de generalidade podemos supor que $f(\tilde{x}) = f(\tilde{y}) = 1$.

Considere o morfismo finito $\pi_f : Z_1 \longrightarrow \mathbb{P}(V)_f$, onde $Z_1 = \{z : f(z) = 1\}$. Como $y \in \overline{G.x}$ então multiplicando a $\tilde{y}$ por um adequado raiz da unidade podemos assumir que $\tilde{y} \in \overline{G.\tilde{x}}$. Por outro, lado por hipótese $G.\tilde{x}$ é fechado em $\mathbb{K}^{n+1}$. Assim, $\tilde{y} \in G.\tilde{x}$ e portanto, $y \in G.x$.

□

Podemos dizer que um ponto x semiestável em M é dita poliestável se a órbita $G.x$ é fechada em M^{ss}.

Definição 4.42. Dizemos que os pontos semiestáveis x_1 e x_2 são S-equivalentes se

$$\overline{G.x_1} \cap \overline{G.x_2} \cap M^{ss} \neq \emptyset.$$

A equivalência $\sim_S$ define uma relação de equivalência em M^{ss}.

Transitividade desta relação segue de:

Proposição 4.17. O fecho $\overline{G.x}$ de qualquer ponto x semiestável contém uma única órbita poliestável. Portanto, duas órbitas $G.x_1$ e $G.x_2$ são S-equivalentes se, somente se, seus fechos contém a mesma órbita poliestável.

Demonstração. Segue-se de Proposição 4.6 4).

□

4.3 Critério de Hilbert-Mumford

Nesta parte enunciaremos o teorema do critério de Hilbert-Mumford. Na prática é um problema difícil procurar os pontos semiestáveis M^{ss} e estáveis M^s para uma variedade algébrica geral M e um grupo algébrico G. O critério de Hilbert-Mumford dá um critério numérico para determinação de M^{ss} e M^s em termos do subgrupo de um parâmetro de G, dado por morfismo de grupos $\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow G$. Abreviamos ao subgrupo de um parâmetro por 1-PS. Além disso, um subgrupo de um parâmetro pode sempre ser diagonalizável, e isto torna possível fazer alguns cálculos explícitos.

Definição 4.43. Um subgrupo de um parâmetro (1-PS) de G é um homomorfismo não trivial

$$\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow G,$$

de grupos.

Como G age linearmente numa variedade M, então $\Psi \circ \lambda$ define uma representação de $\mathbb{K}^*$ em $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{G} = \mathbb{K}^* \longrightarrow \quad & GL(n+1,\mathbb{K}) \\ t \longmapsto \quad & (\Psi \circ \lambda)(t) : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ & \qquad\qquad v \longmapsto (\Psi \circ \lambda)(t).v, \end{aligned}$$

onde $\Psi : G \longrightarrow GL(n+1,\mathbb{K})$. Para simplificar a notação vamos considerar $\lambda(t)$ como um elemento de $GL(n+1,\mathbb{K})$.

Seja $M = ProjR \subseteq \mathbb{P}(V)$ e $\tilde{M} \subseteq V = \mathbb{K}^{n+1}$ o cone afim sobre M, as ações de G sobre V e $\mathbb{P}(V)$ induzem ações lineares sobre $\tilde{M}$ e M respetivamente. Fixe $x \in M$. Para um dado 1-PS $\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow G$, defina $\varphi_\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$, por $t \overset{\varphi_\lambda}{\longmapsto} \lambda(t).\tilde{x}$. O morfismo φ_λ se estende para todo $\mathbb{P}^1$ e a extensão é única. Sejam $\varphi_0 = \varphi_\lambda(0)$ e $\varphi_\infty = \varphi_\lambda(\infty)$; denote $\varphi_0 = \lim_{t\to 0}\varphi_\lambda(t)$ e $\varphi_\infty = \lim_{t\to\infty}\varphi_\lambda(t)$ respetivamente.

Proposição 4.18. A representação $\lambda(t)$ é diagonalizável, isto é, existe uma base $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tal que $\lambda(t).e_i = t^{r_i}e_i$, onde $r_i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $\mathbb{K}^*$ o grupo comutativo. Então $\{\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{K}^*}$ é uma família comutativa de automorfismos de $\mathbb{K}^{n+1}$. Seja $t_0 \in \mathbb{K}^*$ tal que $t_0^m = 1$, para algum $m \in \mathbb{Z}_+$. Então $\lambda(t_0)^m = I$, ou seja, $\lambda(t_0)$ é diagonalizável.

Seja $\mathbb{K}^{n+1} = Ker(\lambda(t_0) - a_1 I) \oplus ... \oplus Ker(\lambda(t_0) - a_{n+1}I)$ a descomposição em subespaços próprios lineares invariantes que define a diagonalização de $\lambda(t_0)$.

Seja j um inteiro positivo menor que $n+1$, e seja $v \in Ker(\lambda(t_0) - a_j I)$ então

$$(\lambda(t_0) - a_j I)Av = A\lambda(t_0)v - a_j Av = 0,$$

para todo $A \in \{\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{K}^*}$. Portanto, o subgrupo de unidimensional $Ker\left(\lambda(t_0) - a_j I\right)$ é invariante por A, assim A é diagonalizável com a mesma base do $\lambda(t_0)$. Seja $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ uma base que diagonaliza todos os endomorfismos. Então $\lambda(t).e_i = t^{r_i} e_i$, onde $r_i \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Como G age linearmente sobre M então, para cada $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ tem-se

$$\lambda(t).\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i t^{r_i} e_i,\ r_i \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Definição 4.44. Seja $x \in M$ e λ um subgrupo de parâmetro, definimos a função

$$\nu(x,\lambda) := -\min_i \{r_i : a_i \neq 0\}. \tag{4.3}$$

Proposição 4.19. ν tem os seguintes propriedades:

i) $\nu(x,\lambda)$ é o único inteiro ν tais que $\lim_{t\to 0} t^{\nu}\lambda(t).\tilde{x}$ existe e é não zero.

ii) $\nu(x,\lambda^m) = m\nu(x,\lambda)$, para algum $m \in \mathbb{Z}_+$.

iii) $\nu\left(g.x, g\lambda g^{-1}\right) = \nu(x,\lambda)$, para todo $g \in G$.

iv) $\nu(x,\lambda) = \nu(x_0,\lambda)$, onde $x_0 = \lim_{t\to 0}\lambda(t).x$.

Demonstração: i) Sejam ν_1 e ν_2 tais que $\lim_{t\to 0} t^{\nu_1}\lambda(t).\tilde{x}$ e $\lim_{t\to 0} t^{\nu_2}\lambda(t).\tilde{x}$ existem, e não são zeros; suponha $\nu_1 < \nu_2$ então $t^{\nu_2}\lambda(t).\tilde{x} = t^s t^{\nu_1}\lambda(t).\tilde{x}$, para algum $s > 0$ o qual implica que $\lim_{t\to 0} t^{\nu_2}\lambda(t).\tilde{x} = 0$. Portanto, $\nu_1 = \nu_2$.

ii) Seja $\lambda(t).\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} t^{r_i} a_i e_i$. Então

$$\lambda(t)^m.\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} t^{mr_i} a_i e_i.$$

Por definição de ν,

$$\nu(x,\lambda^m) = -\min\{mr_i : a_i \neq 0\} = -m\nu(x,\lambda).$$

iii) Seja $\{ge_i\}_i$. Donde

$$\left(g\lambda g^{-1}\right)(ge_i) = g\lambda(e_i) = t^{r_i} g e_i$$

de aqui, $\{ge_i\}$ é uma base que diagonaliza a $g\lambda g^{-1}$. Portanto, $\nu\left(gx, g\lambda g^{-1}\right) = \nu(x,\lambda)$.

iv) Seja $\tilde{x}$ em $\tilde{M}$. Para $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ obtemos $\lambda(t).\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i t^{r_i} e_i$, podemos assumir que $r_j = \min_i\{r_i : a_i \neq 0\}$. Logo para x_0 tem-se

$$x_0 = \lim_{t\to 0} \lambda(t).x \quad = \quad \lim_{t\to 0} \left[a_1 t^{r_1 - r_j} : ... : a_{n+1} t^{r_{n+1} - r_j}\right] = [a],$$

onde a é um vetor em $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, com a_j diferente de zero. Tome a representante de x_0. Então $\lambda(t).a$ tem o mesmo peso mínimo r_j. Concluímos que

$$\nu(x, \lambda) = \nu(x_0, \lambda).$$

$\square$

Teorema 4.10. [Critério de Hilbert-Mumford] Temos:

i) $x \in M^{ss}$ se, e somente se, $\nu(x, \lambda) \geq 0$, para todo subgrupo de um parâmetro λ de G.

ii) $x \in M^{s}$ se, e somente se, $\nu(x, \lambda) > 0$, para todo subgrupo de parâmetro λ de G.

Esboço da prova de critério de Hilbert-Mumford: primeiro note os seguintes equivalências:

i) $\nu(x, \lambda) > 0$ se, somente se, existe um termo t^{r_i} com $r_i < 0$ no lado direito de (4.2).

ii) $\nu(x, \lambda) = 0$ se, somente se, existem exponentes não negativos para t, no lado direito de (4.2), e existe um termo que não envolve t no lado direito de (4.2).

iii) $\nu(x, \lambda) < 0$ se, somente se, todos as exponentes para t no lado direito de (4.2) são > 0.

Podemos reformular isto em termos de $\lim_{t\to 0} \lambda(t).\tilde{x}$:

a) $\nu(x, \lambda) > 0$ se, somente se, $\lim_{t\to 0} \lambda(t).\tilde{x}$ não existe em $\mathbb{K}^{n+1}$.

b) $\nu(x, \lambda) \geq 0$ se, somente se, $\lim_{t\to 0} \lambda(t).\tilde{x}$ não existe em $\mathbb{K}^{n+1}$, ou o limite existe em $\mathbb{K}^{n+1}$ e não é zero.

Primeiro olhemos uma prova de Critério de Hilbert-Mumford para o caso $G = \mathbb{K}^*$:

Teorema 4.11. Seja $G = \mathbb{K}^*$. Então:

i) $x \in M^{ss}$ se, somente se, $\nu(x, \lambda) \geq 0$, para qualquer subgrupo de parâmetro λ de G.

ii) $x \in M^s$ se, somente se, $\nu(x,\lambda) > 0$, para qualquer subgrupo de parâmetro λ de G.

Demonstração. Primeiro mostramos ii): temos por definição, $x \in M^s$ se, somente se, $G.\tilde{x}$ é fechado e $dim G.\tilde{x} = dim G$. Temos $\varphi_{\tilde{x}} : \mathbb{K}^* \longrightarrow G.\tilde{x} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ definido por $\varphi_{\tilde{x}}(t) = t.\tilde{x}$. Como $dim \mathbb{K}^* = 1$, então $dim \varphi_{\tilde{x}}(\mathbb{K}^*)$ é igual ou 0, ou 1.
Se $dim \varphi_{\tilde{x}}(\mathbb{K}^*) = 0$, então o ponto $\tilde{x}$ é fixo. Por outro, lado se $dim \varphi_{\tilde{x}}(\mathbb{K}^*) = 1$, neste caso x é estável, se somente, se $G.\tilde{x}$ é fechado em $\mathbb{K}^{n+1}$.
Agora o fecho de $G.\tilde{x}$ em $\mathbb{P}(V)$ é o conjunto $G.\tilde{x} \cup \{\varphi_0, \varphi_\infty\}$. Portanto, para o fecho de $G.\tilde{x}$ em $\mathbb{K}^{n+1}$ tem-se quatro casos dependendo se um ou ambos φ_0 e φ_∞ pertence ou não a $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\overline{G.\tilde{x}} = \begin{cases} G.\tilde{x} & \text{se } \varphi_0, \varphi_\infty \notin \mathbb{K}^{n+1} \\ G.\tilde{x} \cup \{\varphi_0, \varphi_\infty\} & \text{se } \varphi_0, \varphi_\infty \in \mathbb{K}^{n+1} \\ G.\tilde{x} \cup \{\varphi_\epsilon\} & \text{se somente } \varphi_\epsilon \in \mathbb{K}^{n+1},\ ou\ \epsilon = 0,\ ou\ \infty \end{cases}$$

Agora, $G.\tilde{x}$ é fechado em $\mathbb{K}^{n+1}$ se, somente se, φ_0 e φ_∞ não pertencem em $\mathbb{K}^{n+1}$, o quer dizer que os limites $\lim\limits_{t\to 0} t.\tilde{x}$ e $\lim\limits_{t\to\infty} t.\tilde{x}$ não existem em $\mathbb{K}^{n+1}$. Isto se cumpre se, e somente se, existem exponentes negativo e positivo de t na formula (4.2).
Ora, se definimos $\lambda_1 : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}^*$ por $t \longmapsto t$, e $\lambda_2 : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}^*$ por $t \longmapsto t^{-1}$, então qualquer subgrupo de um parâmetro $\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}^*$ está dado por $t \longmapsto t^r$, para algum $r \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\lambda = \lambda_i^r$ para algum $i \in \{1,2\}$ e $r \geq 0$. Assim, a existência de exponentes negativo e positivo de t na formula (4.2) é equivalente a, $\nu(x,\lambda_1) > 0$ e $\nu(x,\lambda_2) > 0$, o qual acontece se, somente se, $\nu(x,\lambda) > 0$, para qualquer subgrupo de um parâmetro λ. Isto completa a prova de ii).
A prova de i) é similar. Temos que $x \in M^{ss}$ se, somente se, $0 \notin \overline{G.\tilde{x}}$, o qual acontece se, somente se, os limites $\lim\limits_{t\to 0} t.\tilde{x}$ e $\lim\limits_{t\to\infty} t.\tilde{x}$ não são zeros. Também isto, é equivalente a $\nu(x,\lambda_1) \geq 0$ e $\nu(x,\lambda_2) \geq 0$, e isto acontece se, somente se, $\nu(x,\lambda) \geq 0$ para qualquer subgrupo de um parâmetro λ. Isto completa a prova de i).

Exemplo 4.10. Seja $\mathbb{C}^*$ agindo sobre $\mathbb{P}^2$ por:

$$t.[z_0 : z_1 : z_2] = \left[tz_0 : z_1 : t^{-1}z_2\right].$$

Para cada ponto $x \in \mathbb{P}^2$ e o 1-PS $\lambda(t) = t$, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= [1:0:0] \Rightarrow \nu(x,\lambda) = -1, ; \nu\left(x,\lambda^{-1}\right) = 1, \\ x &= [0:0:1] \Rightarrow \nu(x,\lambda) = 1,\ \nu\left(x,\lambda^{-1}\right) = -1, \\ x &= [z_0 : z_1 : z_2] \in U_0 \cap U_2 \Rightarrow \nu(x,\lambda) > 0,\ \nu\left(x,\lambda^{-1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$M^{ss} = \mathbb{P}^2 - \{[1:0:0]\,.\,[0:0:1]\},\ M^s = \{[z_0:z_1:z_2]: z_0 \neq 0,\ z_2 \neq 0\}.$$

Prova de Critério Hilbert-Mumford: Seja G um grupo redutivo. Primeiro mostramos a implicação ($\Rightarrow$) para i) e ii).
Seja $\tilde{x}$ um ponto representante de x.

i) Seja $x \in M^{ss}$. Então $0 \notin \overline{G.\tilde{x}}$. Isto implica que $0 \notin \overline{\mathbb{K}^*.\tilde{x}}$, para qualquer subgrupo de parâmetro $\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow G$. Portanto, x é semiestável para $\mathbb{K}^*$-ação sobre M, isto implica que $\nu\,(x, \lambda) \geq 0$, para qualquer subgrupo de um parâmetro λ pelo Teorema 4.11, i).

ii) Sejam $x \in M^s$ e $\lambda : \mathbb{K}^* \longrightarrow G$ um subgrupo de parâmetro não trivial. Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^* \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi_{\tilde{x}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[d, "\sigma_{\tilde{x}}"] & \\ \mathbb{K}^*.\tilde{x} \arrow[r, hook, "i"] & G.\tilde{x} \arrow[r, hook] & \mathbb{K}^{n+1} \end{tikzcd}$$

A hipótese $x \in M^s$ implica que $dimG.x = dimG$, e portanto $G_{\tilde{x}}$ é finito. Isto implica,

$$dim\,(\mathbb{K}^*_{\tilde{x}}) = 0. \tag{4.4}$$

Ou seja, $\mathbb{K}^*_{\tilde{x}}$ é finito, mais $\lambda\,(\mathbb{K}^*)$ é fechado em G (como imagem de um homomorfismo de grupos algébricos é fechado), e portanto $\mathbb{K}^*.\tilde{x} = \sigma_{\tilde{x}}\,(\lambda\,(\mathbb{K}^*))$ é fechado em $\mathbb{K}^{n+1}$ (como $x \in M^s$, $\sigma_{\tilde{x}}$ é própria, em particular fechado). Isto junto com (4.4) implica que x é estável para a $\mathbb{K}^*$-ação, e o resultado requerido segue-se ii) do Teorema 4.2.

A implicação ($\Leftarrow$): devemos mostrar o seguinte:

i) se $x \notin M^s$ então existe um subgrupo de parâmetro λ tal que $\nu\,(x, \lambda) \leq 0$.

ii) se $x \notin M^{ss}$, então existe um 1-PS tal que $\nu\,(x, \lambda) < 0$.
Pelo resultado de Teorema 4.11, é suficiente mostrar que se x é não estável (não semiestável respetivamente), então existe um λ 1-PS tal que x é ainda não estável (respetivamente não semiestável) para a ação induzida por $\mathbb{K}^*$. Tão λ é construido usando o critério de valorativo para morfismos próprios e a decomposição de Iwahori. Ver com mais detalhe [13] e [19].

$\square$

Capítulo 5

O teorema de Kempf e Ness

Neste capítulo é dedicado ao principal resultado deste trabalho. O teorema foi introduzido por Kempf e Ness em 1979 para o caso afim [17].

A ideia principal do teorema de Kempf e Ness dá um homeomorfismo entre o quociente da GIT por grupo redutivo $G \subseteq GL(n+1.\mathbb{C})$ agindo sobre uma variedade projetiva complexa M e o quociente simplético $\mu^{-1}(0)/K$, onde K é um subgrupo compacto maximal de G.

5.1 Complexificação universal do grupo de Lie

Nesta seção, vamos definir a complexificação universal de um grupo de Lie real e algumas propriedades da complexifição de um grupo compacto.

Definição 5.1.

a) Um *grupo de Lie complexo* é um grupo de Lie real G cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G)$ é uma álgebra de Lie complexa, e $Ad(G) \subseteq Aut_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ (o grupo de automorfismos lineares complexos de $\mathfrak{g}$).

b) Um homomorfismo $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$ de grupos de Lie complexos é chamado *holomorfo* se, α_{*e_1} é linear complexa. Também, é dito *anti-holomorfa* se α_{*e_1} é anti-linear. Se $G_2 = GL(V)$ para um espaço vetorial V, então o homomorfismo holomorfo $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$ diz-se uma representação complexa de G_1 sobre V.

c) Um subgrupo H de um grupo de Lie complexa G é dito um *subgrupo de Lie complexo* se, H é fechado e sua álgebra de Lie $Lie(H)$ é um subespaço complexa de $Lie(G)$.

Definição 5.2. Seja G um grupo de Lie real. Um par $(\eta_G, G_{\mathbb{C}})$ de um grupo de Lie complexa $G_{\mathbb{C}}$ e um morfismo $\eta_G : G \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ de grupos de Lie real é chamado uma *complexificação universal* de G se, para qualquer homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow H$ sobre um grupo de Lie complexa H, existe um único homomorfismo holomorfo

$$\alpha_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \longrightarrow H \text{ com } \alpha_{\mathbb{C}} \circ \eta_G = \alpha.$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta_G"'] & H \\ G_{\mathbb{C}} \arrow[ur, "\alpha_{\mathbb{C}}"'] & \end{tikzcd}$$

Isto é chamado a propriedade universal de $G_{\mathbb{C}}$.

Exemplo 5.1. Para $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^*$ temos $\mathbb{T} \simeq i\mathbb{R}/2\pi i\mathbb{Z}$ e consequentemente $\mathbb{C}^* \simeq \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ é a complexificação pois $\eta_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, é uma complexificação universal. Similarmente, obtém-se $(\mathbb{T}^n)_{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$.

Proposição 5.1. Se K é um grupo de Lie compacto com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ então as seguintes afirmações se cumprem:

a) η_K é injetiva.

b) $\eta_K(K)$ é um subgrupo compacto máximal de $K_{\mathbb{C}}$.

c) $Lie(K_{\mathbb{C}}) \simeq \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e a aplicação polar

$$\begin{aligned} \phi : K \times \mathfrak{k} &\longrightarrow K_{\mathbb{C}} \\ (k, \xi) &\longrightarrow kexp(i\xi) \end{aligned} \tag{5.1}$$

é um difeomorfismo.

Demonstração. Ver [12],[14], e [21].

A Proposição 5.1, mostra que para qualquer grupo de Lie compacto K, a propriedade universal de $K_{\mathbb{C}}$ é interpretado da seguinte maneira: para qualquer representação $\alpha : K \longrightarrow GL(n+1, \mathbb{C})$ pode ser estendido para uma representação holomorfa

$$\alpha_{\mathbb{C}} : K_{\mathbb{C}} \longrightarrow GL(n+1, \mathbb{C}),$$

porque podemos identificar K com o subgrupo $\eta_K(K)$ de $K_{\mathbb{C}}$.
Vejamos um exemplo:

Exemplo 5.2. A decomposição polar implica que $U(n)$ é um subgrupo compacto maximal de $GL(n, \mathbb{C})$ e como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus i\mathfrak{u}(n) \simeq \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$ obtemos $U(n)_{\mathbb{C}} \simeq GL(n, \mathbb{C})$.

Considere qualquer subgrupo compacto $K \subseteq U(n+1)$. A decomposição polar de $K_{\mathbb{C}}$ implica que a extensão holomorfa $K_{\mathbb{C}} \longrightarrow GL(n+1,\mathbb{C})$ da inclusão $K \hookrightarrow U(n+1)$, mapeia $K_{\mathbb{C}}$ sobre o conjunto $K\exp(i\mathfrak{k})$ e pela Proposição 5.1,

$$K_{\mathbb{C}} \simeq K\exp(i\mathfrak{k}) \subseteq GL(n+1,\mathbb{C}),$$

e K é subgrupo compacto maximal de $K_{\mathbb{C}}$.

Definição 5.3. Seja K um grupo compacto em $U(n+1)$ com $Lie(K) = \mathfrak{k}$. Defina a imagem de $K \times \mathfrak{k}$ sob o difeomorfismo em (5.1) por:

$$K_{\mathbb{C}} = \{k \cdot \exp(i\xi) : k \in K,\ \xi \in \mathfrak{k}\}. \tag{5.2}$$

Queremos considerar para o lado algébrico, ações de um grupo algébrico numa variedade algébrica para isso o seguinte teorema garante que $K_{\mathbb{C}}$ é um grupo algébrico redutivo.

Teorema 5.1. Sobre qualquer subgrupo de Lie compacto K, existe uma única estrutura de grupo algébrico real e o grupo algébrico complexo $K_{\mathbb{C}}$ que é redutivo. Qualquer grupo algébrico complexo redutivo possui uma forma real compacta algébrica. Dois grupos de Lie compactos são isomorfos (como grupos de Lie ou como grupos algébricos sobre $\mathbb{R}$) se, e somente se, os correspondentes grupos algébricos redutivos sobre $\mathbb{C}$ são isomorfos.

Demonstração. Ver [21].

Alguns resultados

Uma maneira natural de definir uma métrica Riemanniana em um grupo de Lie é pela invariância à esquerda, direita, ou ambos. Mas em nosso trabalho só consideraremos uma ação sobre G pela direita por G e outra pela esquerda por K, onde K é compacto e G é a complexificação de K.

As métricas Riemannianas invariantes pela direita são fáceis de construir sobre qualquer grupo de Lie $G = K_{\mathbb{C}}$, considerando um produto interno em $\langle\, ,\, \rangle$ em $\mathfrak{g} = T_1G$, e usamos o pullback de translações à direita sobre $\langle\, ,\, \rangle$, para definir sobre os outros pontos de G:

$$\langle u, v\rangle_g = \langle \left(R_{g^{-1}}\right)_{*g}(u), \left(R_{g^{-1}}\right)_{*g}(v)\rangle_{\mathfrak{g}}$$

para $g \in G$, e $u, v \in T_gG$. Isto, define uma métrica Riemanniana suave. Equipamos a $T_1G = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$, com uma métrica dado por:

$$\langle \xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2\rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \xi_1, \xi_2\rangle_{\mathfrak{k}} + \langle \eta_1, \eta_2\rangle_{\mathfrak{k}}, \tag{5.3}$$

para todo $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{k}$.

Seja $K \subseteq U(n+1)$. A forma bilinear $\langle\,\rangle : \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \longmapsto -Tr(XY)$, é positiva definida, e Ad-invariante por K. Com efeito, seja $X \in \mathfrak{k}$. Então

$$\langle X, X\rangle = -Tr(X^2) = Tr(XX^*) = \sum_{ij} |x_{ij}|^2$$

é claramente positiva. E logo, tem-se

$$Tr(XY) = Tr(X^*Y^*) = Tr\left((YX)^*\right) = Tr\left(YX\right)$$

desse modo,

$$\langle Ad_k X, Ad_k Y\rangle = -Tr(Ad_k X.Ad_k Y) = -Tr\left(kXYk^{-1}\right) = \langle X, Y\rangle,$$

Ad é invariante por K. O que se desejava mostrar.

Consideremos $G = K_{\mathbb{C}}$ com $K \subseteq U(n+1)$ e denota por $K\backslash G$ o quociente pela ação esquerda por K.

Teorema 5.2. Seja $\pi : G \longrightarrow K\backslash G$ a aplicação quociente. Temos os seguintes resultados:

a) $T_1G = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.

b) Para todo g em G, existe uma descomposição

$$T_gG = V_g \oplus H_g,$$

onde $V_g = (R_g)_*(\mathfrak{k})$, e $H_g = (R_g)_*(i\mathfrak{k})$.

c) A métrica induzida em $M = K\backslash G$ por $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, é bem definida.

d) A aplicação quociente $\pi : G \longrightarrow K\backslash G$, é uma submersão Riemanniana.

Demonstração: a) Seja $\xi + i\eta \in \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$. Defina $\gamma(t) = \exp(t\xi)\exp(it\eta)$ em G, satisfaz $\gamma'(0) = \xi + i\eta$ e $\gamma(0) = 1$. Então $\xi + i\eta \in T_1G$. Como eles têm as mesmas dimensões segue-se, $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k} = T_1G$.

b) O vetor $X_g \in T_gG$ se, e somente se, é igual a $X_g = (R_g)_{*1}(\xi + i\eta)$, para algum $\xi, \eta \in \mathfrak{k}$, ou seja, $X_g = (R_g)_*(\xi) + (R_g)_*(i\eta)$, isto mostra que $V_g = (R_g)_*(\mathfrak{k})$ e $H_g = (R_g)_*(i\mathfrak{k})$.

c) Seja $Y_{[g]} \in T_{[g]}M$. Observe o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{k} \times K \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, dotted, "\pi\circ\phi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ & K\backslash G \end{tikzcd}$$

mostremos que $Ker\pi_{*g} = V_g$. De fato, seja $X_g^V \in V_g$ então $X_g^V = (R_g)_*(\xi)$, para algum $\xi \in \mathfrak{k}$ e

$$\pi_{*g}(X_g^V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi\left(\exp(t\xi)g\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Kg = 0.$$

O que implica que, X_g^V pertence a $Ker\pi_{*g}$; além disso, como $dimKer\pi_{*g} = dimV_g$ concluímos que $V_g = Ker\pi_{*g}$. Portanto, $\pi\Big|_{H_g} : H_g \longrightarrow T_{[g]}M$ é um isomorfismo e logo, para $Y_{[g]} \in T_{[g]}M$, existe um único vetor horizontal $X_g^H \in H_g$ tal que $\pi_{*g}(X_g^H) = Y_{[g]}$. Definimos

$$\|Y_{[g]}\|^2 = \|X_g^H\|^2 \tag{5.4}$$

para todo $Y_{[g]} \in T_{[g]}\,(K\backslash G)$. É claro, que a métrica está bem definida em $M = K\backslash G$.

d) A aplicação quociente é uma submersão, pelo teorema de variedade quociente. De b) e c) obtém-se $\pi_{*g}\Big|_{H_g}$ é uma isometria. Portanto, π define uma submersão Riemanniana.

□

Dado $(G, \langle\ \rangle)$ uma métrica Riemanniana. Pelo Teorema 1.1, existe uma única conexão ∇ simétrica compatível com a métrica. A conexão está determinada por:

$$\langle\nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle[X,Y],Z\rangle - \langle[X,Z],Y\rangle - \langle[Y,Z],X\rangle\}, \tag{5.5}$$

para todo X, Y, Z em $\mathfrak{g}$.
De fato, pelo Teorema 1.1 temos

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y\langle X,Z\rangle &= \langle\nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle, \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Logo, por simetria

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle\nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle \\ &\quad -\langle\nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle X, [Y,Z]\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle[X,Y],Z\rangle + 2\langle\nabla_Y X, Z\rangle \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

Teorema 5.3. As geodésicas em G com vetor velocidade horizontal, e passando por 1 são os subgrupos de um parâmetros associado a $i\mathfrak{k}$.

Demonstração. De fato, sejam $X_0, Y_0, Z_0 \in T_1G$. Considerando $X = (R_g)_*(X_0), Y = (R_g)_*(Y_0)$ e $Z = (R_g)_*(Z_0)$. Temos $\langle X, Y\rangle, \langle Y, Z\rangle, \langle Z, X\rangle$ são constantes, e logo se reduz a equação (5.5) em:

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{-\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle\},$$

para $X = Y$ tem-se

$$\langle \nabla_X X, Z\rangle = -\langle [X, Z], X\rangle = -\langle [X_0, Z_0], X_0\rangle.$$

Agora para os valores $X_0 = i\xi$ e $Z_0 = \xi_1 + i\xi_2$, obtemos

$$\langle \nabla_X X, Z\rangle = -\langle [i\xi, \xi_1 + i\xi_2], i\xi\rangle = -\langle i[\xi, \xi_1], i\xi\rangle = \langle [\xi_1, \xi], \xi\rangle \tag{5.6}$$

Como Ad é K-invariante, segue-se

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle Ad_{k(t)}(\xi), Ad_{k(t)}(\xi)\rangle = \langle [\xi_1, \xi], \xi\rangle,$$

para uma curva $k(t)$ em K, com vetor velocidade $k'(0) = \xi_1$. Então $\nabla_X X = 0$, para todo $X \in T_gG$, já que vale a equação (5.6).
Seja $\varphi(t)$ o fluxo de X com $\varphi(0) = 1$. Como $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$ resulta que $\nabla_{\varphi'(t)}\varphi'(t) = 0$, ou seja, $\varphi(t)$ é uma geodésica. Além disso, $\varphi'(0) = X_0$ e pela propriedade da Proposição 1.4, o subgrupo de parâmetro $\gamma(t) = \exp(it\xi)$ em G satisfaz $\gamma'(0) = i\xi$. Por unicidade, as geodésicas são os grupos de um parâmetro associado a $i\mathfrak{k}$.
Se observa que γ é sempre geodésica horizontal.

□

A continuação queremos descrever as geodésicas no espaço $K\backslash G$, para isso mostremos um resultado para submersão Riemanniana:

Teorema 5.4. Seja $P : (\tilde{M}, \tilde{g}) \longrightarrow (M, g)$ uma submersão Riemanniana. Então:

i) Seja $\tilde{\beta}$ uma geodésica de $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Se o vetor $\tilde{\beta}'(0)$ é horizontal então $\tilde{\beta}'(t)$ é horizontal para todo t, e a curva $P \circ \tilde{\beta}$ é uma geodésica em (M, g) de mesmo comprimento que do $\tilde{\beta}$.

ii) Reciprocamente, seja $\tilde{m} \in \tilde{M}$ e β uma geodésica de (M, g), com $\beta(0) = P(\tilde{m})$. Então existe um único levamento horizontal local $\tilde{\gamma}$ de β com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{m}$ e esse levantamento $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica em $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

iii) Se $(\tilde{M}, g)$ é completo, então (M, g) também o é.

Demonstração. Primeiro mostraremos que uma submersão Riemanniana diminui distancia, isto é, para quaisquer $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ tem-se

$$d\left(P\left(\tilde{x}\right), P\left(\tilde{y}\right)\right) \leq d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right).$$

De fato, seja $\tilde{m} \in \tilde{M}$ e seja $\tilde{\gamma}$ um curva em $\tilde{M}$. Se $v = v^V + v^H \in V_{\tilde{m}} \oplus H_{\tilde{m}} = T_{\tilde{m}}\tilde{M}$ então

$$|v|^2 = \left|v^V\right|^2 + \left|v^H\right|^2 \geq \left|v^H\right|^2 = |dP_{\tilde{m}}v|^2,$$

donde $\inf_{\tilde{\gamma}}\{l\left(\tilde{\gamma}\right)\} \geq \inf_{P\circ\tilde{\gamma}}\{l\left(P \circ \tilde{\gamma}\right)\}$.
Primeiro mostramos ii). Dada a geodésica β (imersão) em M, queremos construir $\tilde{\gamma}$ da seguinte maneira: para ϵ suficientemente pequeno o segmento geodésica $V = \beta\left(\langle t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon\rangle\right)$ é uma subvariedade de M de dimensão 1. Como P é submersão então pelo teorema da função implicita segue-se que, $\tilde{V} = P^{-1}\left(V\right)$ é uma subvariedade de $\tilde{M}$.
Defina um campo vetorial horizontal X sobre $\tilde{V}$, por:

$$X\left(\tilde{x}\right) = \left(P_{*\tilde{x}}\right)^{-1}\left(\beta'\left(t\right)\right),$$

onde $\beta\left(t\right) = P\left(\tilde{x}\right)$, para algum t e P_* é um isomorfismo de $H_{\tilde{x}}$ ao $T_{P(\tilde{x})}M$.
Para qualquer $\tilde{m} \in \tilde{V}$, existe uma única curva integral $\tilde{\gamma}$ de X em $\tilde{V}$ passando por $\tilde{m}$ tal que $\left(P \circ \tilde{\gamma}\right)\left(t\right) = \beta(t)$ (por unicidade). Começando em $\tilde{m}$ acima de $m = \beta\left(t_0\right)$, definimos $\tilde{\gamma}$ sobre uma vizinhança $I = [a, b]$ de t_0. Como

$$\|\beta'\left(t\right)\| = \|P_{*\tilde{\gamma}(t)}\left(\tilde{\gamma}'\left(t\right)\right)\| = \|\tilde{\gamma}'\left(t\right)\| = \text{constante},$$

e

$$l\left(\tilde{\gamma}\right)\Big|_{[a,b]} = l\left(\beta\right)\Big|_{[a,b]} = d\left(\beta\left(a\right), \beta\left(b\right)\right) \leq d\left(\tilde{\gamma}\left(a\right), \tilde{\gamma}\left(b\right)\right),$$

o que implica $l\left(\tilde{\gamma}\right)\Big|_{[a,b]} = d\left(\tilde{\gamma}\left(a\right), \tilde{\gamma}\left(b\right)\right)$ então pelo:
Corolário(olhe [24]): Uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, é uma geodésica se, somente se, para todo $t \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $d\left(\alpha\left(t\right), \alpha\left(t + \varepsilon\right)\right) = l(\alpha|_{[t,t+\varepsilon]})$. Disso obtém-se que $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica.
Finalmente, mostramos i). Sejam $v = P_{*\tilde{\beta}(0)}(\tilde{\beta}'\left(0\right))$ e β uma geodésica em (M, g) com condição inicial $\beta'\left(0\right) = v$, e pela parte ii), existe levantamento horizontal local $\tilde{\gamma}$ de β

tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\beta}(0)$ e além disso, $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica em $\tilde{M}$ definida em algum intervalo I_1. Mas, por construção tem-se $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\beta}'(0)$, onde suponha $\tilde{\beta}$ está definido em I_2. Portanto, as geodésicas $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ coincidem na interseção de intervalos $I_1 \cap I_2$. Defina $I_{\max} = \{t \in I_1 \cap I_2 : \tilde{\beta}(t) = \tilde{\gamma}(t), \tilde{\beta}'(t) = \tilde{\gamma}'(t)\} \subseteq I$. Como $0 \in I_{\max}$ então $I_{\max} \neq \emptyset$ e além é fechado. Por outro lado, pela unicidade da solução da equação de geodésica tem-se para todo $t_0 \in I_{\max}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq I_{\max}$. Ou seja, $I_{\max}$ é aberto. Concluímos que a conexidade de $I_1 \cap I_2$ implica $I_{\max} = I_1 \cap I_2$.
Para iii), segue-se de i).

□

O quociente $K\backslash G$ pela ação esquerda é um espaço simétrico homogêneo de tipo não compacto com curvatura não positiva.

Corolário 5.1. Para qualquer ponto $Kg \in K\backslash G$, as geodésicas através de ponto Kg são da forma $\gamma(t) = K\exp(it\xi)g$, para $\xi \in \mathfrak{k}$. Além disso, $K\backslash G$ é completo.

Demonstração. Considere $M = K\backslash G$ com a métrica induzida definida em (5.3). A aplicação quociente $G \longrightarrow K\backslash G$ define uma submersão Riemanniana, logo usando os Teoremas 5.3 e 5.4 i), as geodésicas são da forma $\gamma(t) = K\exp(it\xi)g$ com $\gamma(0) = Kg$ em M.
A completude de $K\backslash G$ segue-se também do Teorema 5.4 iii).

□

5.2 Alguns exemplos

Nesta parte vejamos alguns exemplos para tentar relacionar a geometria algébrica e a geometria simplética. Esta relação será formulada na próxima seção com um teorema devido a Kempf e Ness.

Exemplo 5.3. Considere a ação

$$t.[z_0, z_1] = [z_0, tz_1], \ t \in \mathbb{C}^*.$$

Os polinômios invariantes em $\mathbb{P}^1$:

$$P(z) = z_0^{d_0} z_1^{d_1}, \ d_0, d_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

$$\begin{aligned}(t.P)(z) = P(z) \quad &\Leftrightarrow \quad t^{-d_1} z_0^{d_0} z_1^{d_1} = z_0^{d_0} z_1^{d_1} \\ &\Leftrightarrow \quad d_1 = 0.\end{aligned}$$

Os polinômios invariante são:

$$z_0, z_0^1, z_0^2, ...$$

Seja $x \in \mathbb{P}^1$. Temos

$x = [1:0]$ é semiestável, pois existe polinômio $P(x)$, $\mathbb{C}^*$-invariante tal que $P(x) = z_0 \neq 0$;
$x = [0:1]$ e inestável, já que para todo polinômio $P(x)$, $\mathbb{C}^*$-invariante satisfaz $P(x) = 0$;
$x = [z_0 : z_1] \in U_0 \cap U_1$ é semiestável, por definição existe z_0 tal que $z_0 \neq 0$.

Então

$$M^{ss} = \mathbb{P}^1 - \{[0:1]\}.$$

$x = [1:0]$ é poliestável, já que a órbita $\mathbb{C}^*.(1,0) = (1,0)$;
$x = [z_0, z_1] \in U_0 \cap U_1$ não é poliestável, porque $\lim\limits_{t \to 0} (z_0, tz_1) = (z_0, 0) \notin \mathbb{C}^*.(z_0, z_1)$,

$$M^{ps} = \{[z_0 : 0] : z_0 \neq 0\}.$$

$x = [1:0]$ não é estável, já que $\mathbb{C}_x^* = \mathbb{C}^*$.
O lado simplético:
a ação Hamiltoniano,

$$e^{i\theta}.[z_0 : z_1] = \left[z_0 : e^{i\theta} z_1\right]$$

tem aplicação de momento

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \mu([z_0 : z_1]) = \quad -\frac{1}{2}\frac{|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2} \end{array}$$

pelo exemplo 2.22 para o caso $n = 1$. Os zero de μ é um só ponto, isto é,

$$\mu^{-1}(0) = \{[1:0]\}.$$

Tem-se

$$\mathbb{C}^*.\mu^{-1}(0) = M^{ps}.$$

Exemplo 5.4. Considere a ação

$$t.[z_0 : z_1] = \left[t^{-1}z_0, tz_1\right], \ t \in \mathbb{C}^*.$$

O polinômio da forma $P(z) = z_0^{d_0} z_1^{d_1}$ é $\mathbb{C}^*$-invariante, então

$$z_0^{d_0} z_1^{d_1} = t^{d_0 - d_1} z_0^{d_0} z_1^{d_1}, \forall t \Leftrightarrow d_0 = d_1.$$

Tem-se os polinômios invariantes:

$$z_0 z_1, z_0^2 z_1^2, z_0^3 z_1^3, ..., z_0^d z_1^d, ...$$

As três órbitas em $\mathbb{P}^1$ são:

$$\begin{aligned}
\{t.[z_0 : z_1] : t \in \mathbb{C}^*\} &= \{[1:0]\},\ [z_0 : 0] \in U_0; \\
\{t.[z_0 : z_1] : t \in \mathbb{C}^*\} &= \{[0:1]\},\ [0 : z_1] \in U_1; \\
\{t.[z_0 : z_1] : t \in \mathbb{C}^*\} &= \{\left[t^{-1} z_0 : t z_1\right] : t \in \mathbb{C}^*\},\ [z_0 : z_1] \in U_0 \cap U_1.
\end{aligned}$$

Usando a definição temos

$$M^{ss} = \mathbb{P}^1 - \{[1:0], [0:1]\}.$$

Para os pontos $v = [z_0 : z_1] \in U_0 \cap U_1$, a órbita em cone afim está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^*.v &= \{\left(t z_0, t^{-1} z_1\right) : t \in \mathbb{C}^*,\ z_0 z_1 \neq 0\} \\
&= \{(x, y) : xy = k\},\ x = t z_0,\ y = t^{-1} z_1, \text{e } z_0 z_1 = k.
\end{aligned}$$

É claro que $\mathbb{C}^*.v$ é fechado em $\mathbb{C}^2$. Portanto, v é um ponto poliestável.

Lado simplético: para ação Hamiltoniano de S^1 sobre $\mathbb{P}^1$,

$$e^{i\theta}.[z_0 : z_1] = \left[e^{-i\theta} z_0 : e^{i\theta} z_1\right],$$

tem aplicação de momento

$$\begin{array}{rcl}
\mu : \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
{[z_0 : z_1]} & \longmapsto & \mu([z_0 : z_1]) = -\frac{1}{2}\frac{|z_1|^2 - |z_0|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2},
\end{array}$$

pelo exemplo 2.22 para o caso $n = 1$, $m_0 = -1$ e $m_1 = 1$.
Os ponto zero de μ são:

$$\mu^{-1}(0) = \{[z_0 : z_1] : |z_0|^2 = |z_1|^2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^*.\mu^{-1}(0) &= \{\left[t z_0 : t^{-1} z_1\right] : t \in \mathbb{C}^*, [z_0 : z_1] \in \mu^{-1}(0)\} \\
&= \{[x : y] : xy \neq 0\},\ x = t z_0,\ y = t^{-1} z_1, \\
&= M^{ps}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.5. Considere $G = \mathbb{C}^*$ agindo a $M = \mathbb{P}^2$ da seguinte maneira:

$$t.\left[z_0 : z_1 : z_2\right] = \left[t^{-1}z_0 : z_1 : tz_2\right].$$

Lembre (no Exemplo 4.8) que $M^{ps} = \{[0:1:0]\} \cup \{[z_0 : z_1 : z_2] : z_0 z_2 \neq 0\}$. No lado simplético a ação de $K = S^1$ sobre $\mathbb{P}^2$ é Hamiltoniana com aplicação de momento

$$\begin{array}{cccl} \mu : \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ {[z]} & \longmapsto & \mu\left([z]\right) & = -\frac{1}{2}\frac{|z_2|^2 - |z_0|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2} \end{array}$$

Os zeros de μ são:

$$\mu^{-1}(0) = \{[z_0 : z_1 : z_2] : |z_2| = |z_0|\}$$

O teorema de Kempf-Ness nos diz-se:

- $\mu^{-1}(0) \subseteq M^{ps}$: isto é claro, como $[z_0 : z_1 : z_2] \in \mu^{-1}(0)$ implica que $|z_0| = |z_2|$. Se $z_0 \neq 0$ então $z_2 \neq 0$. Em outro caso, se $z_0 = 0$ e como $[z_0 : z_1 : z_2] \in \mu^{-1}(0) \subseteq \mathbb{P}^2$ então $z_0 = z_2 = 0$ e $z_1 \neq 0$.
- $M^{ps} \subseteq G.\mu^{-1}(0)$: se $[z_0 : z_1 : z_2] \in M^{ps}$ então $z_0 z_2 \neq 0$, ou $z_0 = z_2 = 0$ e $z_1 \neq 0$. O segundo inclusão é trivial. No primeiro caso, precisamos encontrar $t \in \mathbb{C}^*$ tal que $|tz_0| = \left|t^{-1}z_2\right|$, pois $[z_0 : z_1 : z_2] = t.\left[tz_0 : z_1 : t^{-1}z_2\right]$. A solução desta equação é $|t| = \sqrt{\frac{|z_2|}{|z_0|}}$.
- Qualquer G-órbita de um ponto poliestável contém um único K-órbita de $\mu^{-1}(0)$: a existência segue-se de item acima. Para provar a unicidade observe a solução de $|tz_0| = \left|t^{-1}z_2\right|$.
- Existe uma bijeção
$$\mu^{-1}(0)/K \longrightarrow M /\!\!/ G \simeq M^{ps}/G,$$
que é uma consequência imediata do último argumento.

5.3 A prova do teorema Kempf e Ness

Ao longo deste seção mostraremos o teorema de Kempf e Ness.

Teorema 5.5. [**Kempf-Ness**]
Suponha K um grupo compacto e G sua complexificação. Seja V um G-módulo equipado com uma estrutura Hermitiana K invariante. Seja $M \subset \mathbb{P}(V)$ variedade projetiva com ação linear por um grupo G e $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ a aplicação de momento de Fubini-Study. Então:

i) $\mu^{-1}(0) \subseteq M^{ps}$;

ii) A inclusão definida em i), induz um homeomorfismo

$$\mu^{-1}(0)/K \longrightarrow M /\!\!/ G \simeq M^{ps}/G.$$

A prova será feito usando propriedades da função de Kempf-Ness, definida como segue:

$$\begin{aligned} \psi_v : K\backslash G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [g] &\longmapsto \tfrac{1}{2}\log \|gv\|^2, \end{aligned}$$

para cada $v \in V - \{0\}$.

Antes de mostrarmos o teorema iremos mostrar alguns resultados que serão utilizados na demonstração.

Denotamos por $\partial_\xi \psi_v([g])$, a derivada de ψ_v ao longo da geodésica $[\exp(it\xi)\, g]$ determinado por ξ; note que este depende sobre uma escolha de representante g de $[g]$. A função de Kempf-Ness pode ser visto como a integral de aplicação de momento no seguinte sentido:

Lema 5.1. Para qualquer $v \in V - \{0\}$ e $\xi \in \mathfrak{k}$, tem-se

$$\partial_\xi \psi_v([g]) = 2\langle \mu([gv]), \xi\rangle$$

Demonstração. Consideremos uma geodésica $\gamma(t) = [exp(it\xi).g]$ em $K\backslash G$, com $\gamma(0) = [g]$ e $\gamma'(0) = \pi_{*g}(R_{g*}(i\xi))$. Então

$$\begin{aligned} \partial_\xi \psi_v([g]) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_v(\gamma(t)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log \|\exp(it\xi)\, gv\|^2 \\ &= \frac{1}{2\|gv\|^2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \exp(it\xi)\, gv, exp(it\xi)\, gv\rangle \\ &= \frac{1}{2\|gv\|^2}\{\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(it\xi)gv), gv\rangle + \langle gv, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(it\xi)gv)\rangle\} \\ &= \frac{i}{2\|gv\|^2}\{\langle \xi gv, gv\rangle - \langle gv, \xi gv\rangle\} \\ &= \frac{i}{2\|gv\|^2}(2iIm\langle \xi gv, gv\rangle) \\ &= \frac{1}{\|gv\|^2} Im\langle gv, \xi gv\rangle \\ &= 2\langle \mu([gv]), \xi\rangle. \end{aligned}$$

A última igualdade obtém-se da expressão explicita para aplicação de momento de Fubini-Study para $\xi \in \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{u}(n+1)$.

$\square$

Corolário 5.2. O gradiente de ψ é igual a μ, isto é,

$$grad\psi_v([g]) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[\exp(2it\mu(gx))g].$$

Demonstração. Pelo lema 5.1,

$$\langle grad\psi_v([g]), \xi\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_v([\exp(it\xi)g]) = 2\langle\mu(g[v]), \xi\rangle$$

$\square$

A propriedade básica da função Kempf-Ness é sua convexidade: sua restrição para qualquer geodésica em $K\backslash G$ é uma função convexa, ou equivalentemente, sua segunda derivada ao longo da geodésica é não negativa.

Corolário 5.3. Seja $v \in V - \{0\}$ e $x = [v] \in M \subseteq \mathbb{P}(V)$.

a) Para qualquer $v \in V - \{0\}$, a função ψ_v é uma função convexa com pontos críticos dados por $[g] \in K\backslash G$, tais que $\mu([gv]) = 0$.

b) A segunda derivada $\partial_\xi^2\psi_v([e])$, ao longo da geodésica determinada por $\xi \in \mathfrak{k}$, é positiva se, e somente se, ξ pertence em $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_x$.

c) Para $\xi \in \mathfrak{k}_x$, tem-se $\psi_v([exp(i\xi)]) = \psi_v([e]) + 2\langle\mu(x), \xi\rangle$.

Demonstração:

a) A afirmação de pontos críticos segue-se de Lema 5.1:

$$\begin{aligned} D_{[g]}\psi_v = 0 &\Leftrightarrow \partial_\xi\psi_v([g]) = 0,\ \forall\xi \in \mathfrak{k} \\ &\Leftrightarrow \langle\mu([gv]), \xi\rangle = 0,\ \forall\xi \in \mathfrak{k} \\ &\Leftrightarrow \mu([gv]) = 0. \end{aligned}$$

Para a convexidade, calculamos a segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_v([\exp(it\xi)g]) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\|\exp(it\xi)gv\|^2 \\ &= \frac{i}{2\|\exp(it\xi)gv\|^2}\{\langle\exp(it\xi)\xi gv, \exp(it\xi)gv\rangle - \langle\exp(it\xi)gv, \exp(it\xi)\xi gv\rangle\} \\ &= \frac{1}{\|\exp(it\xi)gv\|^2}Im\langle\exp(it\xi)gv, \xi\exp(it\xi)gv\rangle \\ &= 2\langle\mu([\exp(it\xi)gv]), \xi\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\partial_\xi)^2 \psi_v([g]) &= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \psi_v\left([\exp\left(it\xi\right) g]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} 2\langle \mu\left([\exp\left(it\xi\right) gv]\right), \xi\rangle \\
&= 2\langle d\mu_{[gv]}\left(J\xi^M\right), \xi\rangle \\
&= 2\omega_{[gv]}\left(\xi^M, J\xi^M\right) \\
&= 2h_{[gv]}\left(\xi^M, \xi^M\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

b) A segunda derivada $(\partial_\xi)^2\psi_v([e]) = 2h_x(\xi^M(x), \xi^M(x))$ é positiva se, somente se, $\xi^M(x) \neq 0$ e isto é, equivalente a $\xi \in \mathfrak{k} - \mathfrak{k}_x$. Isso mostra a equivalência no item b).

c) Se $\xi \in \mathfrak{k}_x$ então $\xi^M(x) = 0$. O que implica, a segunda derivada é zero:

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi_v\left([\exp\left(it\xi\right)]\right) = 0 \Longrightarrow \psi_v\left([\exp\left(it\xi\right)]\right) = At + B, \text{ A e B constantes.}$$

Avaliando em $t = 0$ e diferenciando em $t = 0$, obtemos

$$\psi_v\left([\exp\left(it\xi\right)]\right) = \psi_v\left([e]\right) + 2t\langle \mu\left([v]\right), \xi\rangle.$$

Em particular,

$$\psi_v\left([\exp\left(i\xi\right)]\right) = \psi_v\left([e]\right) + 2\langle \mu\left([v]\right), \xi\rangle.$$

□

Note que se ψ_v é estritamente convexa e tem um ponto critico então o ponto critico é o único ponto mínimo global. O seguinte lema caracteriza para que v existe um ponto mínimo de ψ_v:

Lema 5.2. Sejam $v \in V - \{0\}$ e $x = [v] \in \mathbb{P}(V)$.

a) ψ_v atinge um mínimo se, somente se, x é poliestável.

b) ψ_v é limitado por abaixo se, somente se, x é semiestável.

Demonstração:

a) Primeiro mostraremos a afirmação: $\| \|^2 : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é aplicação própria.
De fato, seja $\{z_k\}$ uma sequencia em $\mathbb{C}^{n+1}$, tal que $\|z_k\|^2$ é limitado. Então existe $s > 0$ tal que $\|z_k\| \leq s$ logo, existe uma subsequencia $\{z_{i_k}\}$ tal que converge. Portanto, $\|\|^2$ é

própria (aplicação fechada).

Isto é a definição: x é poliestável se, a órbita $G.v$ é fechada. Suponhamos que x é poliestável então $G.v$ é fechada; como x é semiestável então $0 \notin \overline{G.v}$. Logo, existe $R > 0$ tal que $B_R(0) \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \overline{G.v}$, donde $\psi_v([g]) > \frac{1}{2}\log R$, para todo $[g]$ em $K\backslash G$. Se $L = \inf_{[g]\in K\backslash G} \psi_v([g])$ então

$$L \in \overline{\frac{1}{2}\log \|G.v\|^2} = \frac{1}{2}\log \overline{\|G.v\|^2} = \frac{1}{2}\log \|G.v\|^2.$$

Assim, existe $[g] \in K\backslash G$ tal que $L = \frac{1}{2}\log \|gv\|^2$. Concluímos que o ponto $[g]$ é mínimo global de ψ_v, já que ψ_v é convexa ao longo das órbitas.

Reciprocamente, suponhamos que ψ_v atinge um mínimo em algum $Kg \in K\backslash G$. Como $\psi_v([g]) = \psi_{gv}([e])$, podemos supor que ψ_v atinge um mínimo em $[e]$.

Claramente ψ_v é invariante sobre estabilizador G_v de v.

Consideremos o biquociente de G por G_v à direita e por K à esquerda.

Afirmação: A aplicação

$$\psi_v/G_v : K\backslash G/G_v \longrightarrow \mathbb{R},$$

induzida por ψ_v é própria.

De fato, seja uma sequencia de pontos Kg_jG_v em $K\backslash G/G_v$ tais que $\psi_v/G_v\,(Kg_jG_v)$ é limitado em $\mathbb{R}$. Seja O a imagem de G_v sobre o quociente $\pi : G \longrightarrow K\backslash G$. Como π é própria então a órbita O de G_v é uma subvariedade fechada em $K\backslash G$. Com efeito, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} G_v \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_v"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ \frac{G_v}{K\cap G_v} \arrow[r, "\phi"'] & K\backslash G \end{tikzcd}$$

onde $\phi : \frac{G_v}{K\cap G_v} \longrightarrow K\backslash G$, $K \cap G_v g \longmapsto Kg$. Tem-se $\pi \circ i$ é própria já que é composição de próprias; como π_v é sobrejetora e $\phi \circ \pi_v$ é própria então ϕ é também própria.

É claro, que ϕ é injetora e além disso, é equivariante sobre as ações de G_v sobre $\frac{G_v}{K\cap G_v}$ e G_v sobre $K\backslash G$. Mais, a ação sobre o dominio é transitiva e portanto pelo teorema de posto equivariante, ϕ tem posto constante.

Por outro, lado ϕ é injetiva e própria com posto constante o que implica ϕ é mergulho, ou seja, $O = KG_v$ é uma subvariedade fechada em $K\backslash G$.

Ora, pela completude do espaço Riemanniana $K\backslash G$ existe um caminho de comprimento mínimo que liga Kg_jh_j para O. Pela discussão na seção anterior sobre geodésicas em $K\backslash G$ associadas a $i\mathfrak{k}$, qualquer caminho desse tipo é uma geodésica e tem a forma:

$$\gamma_j(t) = K\exp(it\xi_j)\,h_j,\; t \in [0,1]$$

para algum $\xi_j \in \mathfrak{k}$ e $h_j \in G_v$. Em seguida, o vetor $\gamma_j'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K\exp(it\xi_j)\, h_j$ é perpendicular ao espaço tangente $T_{Kh_j}O = \{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K\exp(t\eta)\, h_j,\ \eta \in \mathfrak{g}_v\}$ pois caso contrário pode-se encontrar um caminho mais curto. Assim,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K\exp(it\xi_j)h_j \perp \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} K\exp(t\eta)h_j, \text{ para todo } \eta \in \mathfrak{g}_v.$$

Como a métrica é invariante à direita por h_j então $i\xi_j$ é perpendicular ao projeção de $\mathfrak{g}_v$ sobre $i\mathfrak{k}$. Note que ψ_v é limitado por abaixo então $\langle \mu([v]), \xi\rangle = 0$, para todo ξ em $\mathfrak{k}_x$ pelo corolário 5.3 c). Portanto, $i\mathfrak{k}_x$ está contida em $\mathfrak{g}_v$ (pela proposição 3.2.10, [9], pag.12) assim, $i\xi_j$ é perpendicular ao $i\mathfrak{k}_x$ em outras palavras $\xi_j \in \mathfrak{k}_x^\perp$.
Suponha ψ_v atinge um mínimo em $[e]$. Então

$$\psi_v(K\exp(i\xi)) > C_0 + C_1\|\xi\|,\ \forall \xi \in \mathfrak{k}_x^\perp, \tag{5.7}$$

onde C_0 e C_1 constantes com $C_1 > 0$.
De fato, defina $f : \mathfrak{k}_x^\perp \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(\zeta) = \psi_v(K\exp(i\zeta))$. Fixe $\zeta \in \mathfrak{k}_x^\perp$ com $\zeta \neq 0$. Seja $h(t) = f(t\zeta)$, $t \in \mathbb{R}$. Como ψ_v é convexa ao longo de uma geodésica, então h satisfaz $h''(t) > 0$. Por hipótese ψ_v atinge um mínimo em $[e]$ então $h'(t) = 0$, somente em $t = 0$. Daí, implica $h'(t) > 0$, para $t > 0$. Observe que $h(t) = h(1) + \int_1^t h'(s)\, ds$. Pela convexidade estrita temos

$$h(t) > h(1) + h'(1)(t-1), \text{ para } t > 1.$$

Escrevendo em termos de f obtemos

$$f(t\zeta) \quad > \quad f(\zeta) + \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \psi_v(K\exp(it\zeta))\right)(t-1), \tag{5.8}$$

para todo $\zeta \neq 0$ e $t > 1$.
Como $\frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \psi_v(K\exp(it\zeta)) = h'(1) > 0$, para todo $\zeta \neq 0$, segue-se que $h'(1)$ tem mínimo na esfera unitária em $\mathfrak{k}_x^\perp$, é dizer,

$$C_1 = \min_{\|\zeta\|=1} \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \psi_v(K\exp(it\zeta)) > 0.$$

Seja m_0 o valor mínimo de f sobre a esfera em $\mathfrak{k}_x^\perp$. Então a desigualdade (5.8) implica

$$f(t\zeta) > m_0 + C_1(t-1),$$

para todo ζ na esfera unitária.

Para $\xi \in \mathfrak{k}_x^{\perp}$ com $\|\xi\| > 1$, temos

$$f(\xi) = f\left(\|\xi\| \frac{\xi}{\|\xi\|}\right) > m_0 + C_1 (\|\xi\| - 1) = C_0 + C_1 \|\xi\|,$$

onde $C_0 = m_0 - C_1$. Isso encerra nossa prova da afirmação.

Escolha $\xi = \xi_j$. Como suponhamos $\psi_v (K \exp(i\xi_j) h_j) = \psi_v (K \exp(i\xi_j))$ é limitado então pela equação (5.7) provada se segue que $\{\xi_j\}$ é limitado. Assim, $\{K \exp(i\xi_j) h_j G_v\} = \{K g_j G_v\}$ é limitado em $K \backslash G / G_v$. Portanto, ψ_v / G_v é própria.

□

Observe que

$$(\psi_v / G_v) \circ \pi : G/G_v \xrightarrow{\pi} K \backslash (G/G_v) \simeq (K \backslash G)/G_v \overset{\psi_v/G_v}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

define uma aplicação própria. Suponha que $\{g_j v\}$ é uma sequência em $G.v$ convergindo para algum v_∞. Então $\{g_j v\}$ é limitado e logo considere o conjunto compacto $\tilde{K} = \{\frac{1}{2} \log \|g_j v\|^2 : j \in \mathbb{N}\} \cup \{\text{pontos limites}\}$; como $\psi_v / G_v \circ \pi$ é própria então $(\psi_v / G_v \circ \pi)^{-1} (\tilde{K})$ é compacto em G/G_v, é dizer, $(\psi_v / G_v \circ \pi)^{-1} (\tilde{K})$ admite uma subsequência $\{g_{j_k} G_v\}$ de $\{g_j G_v\}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} g_{j_k} G_v = g_\infty G_v$. Por outro, lado a ação de G sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ é continua, ou seja, define uma aplicação continua $\rho_v : G \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $g \longmapsto gv$. O que induz uma aplicação $\rho_v : G/G_v \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ continua então para a sequencia $\{g_{j_k} G_v\}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} g_{j_k} G_v = g_\infty G_v$ implica que $\lim\limits_{k \to \infty} g_{j_k} .v = g_\infty .v \in g_\infty . \mathbb{C}^{n+1}$. Mais pela que suponhamos acima que $\lim\limits_{k \to \infty} g_{j_k} v = v_\infty$, conclui-se pela unicidade de limite $v_\infty = g_\infty .v \in G.v$. Portanto, a órbita $G.v$ é fechada e x é poliestável.

b) Se ψ_v é limitado por abaixo, então existe um $\inf_{[g]} \psi_v ([g])$, tal dito ínfimo pertence a $\overline{\psi_v (K \backslash G)}$, ou seja, existe uma sequencia $\{g_j v\}$ que minimize e convergente, suponha que converge a $v_\infty \in \overline{G.v}$. Considere ψ_{v_∞}, e mostraremos que $G.v_\infty$ é fechado. Para isso basta mostrar que ψ_{v_∞} atinge um mínimo em $[e]$:

$$\psi_{v_\infty} ([g]) = \frac{1}{2} \log \|g v_\infty\|^2 = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{2} \log \|g.g_j v\|^2 \geq \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{2} \log \|g_j v\|^2 = \frac{1}{2} \log \|v_\infty\|^2.$$

Então $[e]$ é um ponto mínimo então pela parte a), $[v_\infty]$ é poliestável. Pela Proposição 4.9, existe um polinómio $F \in \mathbb{C}[z_0, ..., z_n]^G_{>0}$ tal que $F(v_\infty) \neq 0$, e logo pela invarianza de F tem-se $F(g_j v) = F(v)$, resulta que $F(v) = \lim_{j\to\infty} F(g_j v) = F(v_\infty) \neq 0$, pela continuidade. Portanto, x é semiestável.

Reciprocamente, suponhamos que ψ_v não é limitado por abaixo, então $\inf_{[g]\in K\backslash G} \psi_v([g])$ é igual ao $-\infty$. Logo, usando definição de ínfimo existe uma sequencia $\{Kg_j\}$ em $K\backslash G$ tal que $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{2}\log \|g_j v\|^2 = -\infty$, e pela continuidade de $\|\ \|^2$, obtemos $\lim_{j\to\infty} \|g_j v\| = 0$, ou seja, $\lim_{j\to\infty} g_j v = 0$. Assim, existe $\{g_j v\}$ uma sequencia em $G.v$ tal que $\lim_{j\longmapsto\infty} g_j v = 0$. Logo, $0 \in \overline{G.v}$ e v não é semiestável o qual contradiz à hipótese. Portanto, ψ_v é limitado por abaixo.

$\square$

Corolário 5.4.

$$M^{ps} = G.\mu^{-1}(0).$$

Demonstração. Se $[v] \in M^{ps}$ (isto define a órbita $G.v$ é fechada), então ψ_v atinge um mínimo em algum $[g] \in K\backslash G$, pelo Lema 5.2 (a). Se $[g]$ é ponto crítico de ψ_v então pelo Corolário 5.3 a), $g.[v]$ é um zero da aplicação de momento μ, isto é, $\mu(g.[v]) = 0$. Então $[v] = g^{-1}[(gv)]$. Em outras, palavras $[v] \in G.\mu^{-1}(0)$, assim, $M^{ps} \subset G.\mu^{-1}(0)$.
Para a inclusão contrária, seja $[v] \in G.\mu^{-1}(0)$ então $g^{-1}[v] \in \mu^{-1}(0)$, para algum $g \in G$ o que implica $\mu([v]) = 0$. Sabemos que um zero de aplicação de momento determina um ponto crítico de ψ_v, em nosso caso na identidade. Logo, aplicando o Lema 5.2 a), $[v]$ é um ponto poliestável.

$\square$

Prova do Teorema de Kempf-Ness 5.5: pelo Corolário 5.4, obtém-se $\mu^{-1}(0) \subseteq M^{ps}$. Como $\mu^{-1}(0) \subseteq M^{ss}$, induz a aplicação inclusão $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M^{ss}$. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mu^{-1}(0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & M^{ss} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mu^{-1}(0)/K \arrow[r, dotted, "i/K"'] & M /\!\!/ G \end{tikzcd}$$

onde $\varphi : M^{ss} \longrightarrow M /\!\!/ G$ é o morfismo induzido pela inclusão $i : R^G \hookrightarrow R$. Claramente a aplicação i/K é bem definida: se $K.y = K.x$ então existe $k \in K$ tal que $y = k.x$. Logo, $i/K(K.y) = \varphi(y) = \varphi(k.x) = i/K(K.x)$.
Inicialmente mostraremos que i/K é injetiva: sejam $x_0, x_1 \in \mu^{-1}(0)$ tais que $Kx_0 \neq Kx_1$. Então $G.x_0$ e $G.x_1$ são órbitas fechadas em M^{ss}(pelo Teorema 4.9) e logo, para mostrar

que i/K é injetiva é suficiente mostrar que as órbitas sejam disjuntas. Suponha que não seja, então existe $g \in G$ tal que $x_0 = gx_1$. Então $\mu(x_1) = \mu(gx_1) = 0$ logo, pelo Corolário 5.3 a) $[g]$ e $[e]$ são mínimos de ψ_{v_1}, onde v_1 é representante de x_1. Usando (5.1) escrevemos $g = k\exp(i\xi)$, para algum $k \in K$ e $\xi \in \mathfrak{k}$. Logo, obtemos

$$\psi_{v_1}([g]) = \frac{1}{2}\log\|g.v_1\|^2 = \frac{1}{2}\log\|k\exp(i\xi).v_1\|^2 = \psi_{v_1}([\exp(i\xi)]).$$

Pelo Corolário 5.3 a), ψ_{v_1} define uma função convexa ao longo da geodésica $[\exp(it\xi)]$ em $K\backslash G$ então

$$\psi_{v_1}([\exp(it\xi)]) \leq \psi_{v_1}([\exp(i\xi)]), \text{ para todo } t \in [0,1]$$

Por outro lado, tem-se $\psi_{v_1}([g]) = \psi_{v_1}([e])$ (pois $[e]$ e $[g]$ são mínimos globais) o que implica $\psi_{v_1}([e]) = \psi_{v_1}([\exp(it\xi)])$, para todo $t \in [0,1]$, o qual significa que ψ_{v_1} é constante ao longo de $[\exp(it\xi)]$, isto é equivalente a

$$(\partial_\xi)^2\psi_{v_1}([e]) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\psi_{v_1}([\exp(it\xi)]) = 0 \Rightarrow h_{[v_1]}\left(\xi^M(x_1), \xi^M(x_1)\right) = 0 \Rightarrow \xi^M(x_1) = 0.$$

Disso concluímos que $\xi^M(x_1) = 0$. Como $\mathfrak{g}_{x_1}$ é álgebra de Lie complexa e $\mathfrak{k}_{x_1} \subseteq \mathfrak{g}_{x_1}$ então $i\mathfrak{k}_{x_1} \subseteq \mathfrak{g}_{x_1}$, disso segue-se $i\xi \in \mathfrak{g}_{x_1}$. Assim, x_0 e x_1 pertencem a mesmo K-órbita: $x_0 = g.x_1 = k.\exp(i\xi).x_1 = k.x_1$. Daí obtém-se $K.x_0 = K.x_1$ (O que contradiz a $K.x_0 \neq K.x_1$.)
Portanto, $G.x_0 \cap G.x_1 = \emptyset$. Como $G.x_0 \cap G.x_1 \cap M^{ss} = \emptyset$ conclui-se que $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ (pela Proposição 4.15).

Para sobrejetividade da aplicação i/K é necessário mostrarmos a seguinte afirmação:

Afirmação: $x \in M^{ss}$ se, e somente se, $\overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$.
De fato, se $x \in M^{ss}$ então $\overline{G.x}$ contém uma única órbita fechada $G.y$ em M^{ss} (pela Proposição 4.17). Por outro, lado $G.y \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$ (pelo Corolário 5.4) isto mostra que

$$\overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset.$$

Reciprocamente, suponha que $\overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$ então existe y tal que $y \in \overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0)$. Como $y \in \mu^{-1}(0)$ então $y \in M^{ss}$, ou seja, existe um polinômio homogêneo f G-invariante de grau maior do que zero tal que $f(y) \neq 0$. Logo, pela continuidade de f e por ser M^{ss} aberto conclui-se que $x \in M^{ss}$.

Para a sobrejetividade, seja $p \in M \mathbin{/\!/} G$. Como φ é um morfismo sobrejetivo (pela Proposição 4.14) então existe $x \in M^{ss}$ tal que $\varphi(x) = p$. Logo, pela afirmação anterior existe um $y \in \overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$ tal que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Escolha $K.y \in \mu^{-1}(0)/K$ então concluímos que

$$i/K(K.y) = (\varphi \circ i)(y) = p.$$

Assim, a inclusão $\mu^{-1}(0) \subseteq M^{ss}$ induz uma aplicação i/K continua bijetiva de um espaço compacto para um espaço Hausdorff e portanto, i/K é um homeomorfismo.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] **Abraham, R., Marsden.** *Foundations of Mechanic.* Printing, Addison-Wesley Publishing, 1985.

[2] **Alexander Kirillov, Jr.** *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.* Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2008.

[3] **Andreas Gathmann.** *Algebraic Geometry.* Lecture notes in mathematics, 2002, 2003.

[4] **A. Gathmann.** *Commutative Algebra, class notes TU Kaiserslautern (2014),* www.mathematik.uni-kl.de/ gathmann/commalg.php.

[5] **Anthony W. Knapp.** *Lie Group Beyond and Introduction* 2nd edn., vol 140 Boston, Besel, Berlin.

[6] **Atiyah, M.** *Convexity and commuting Hamiltonians,* Bull. London Math. Soc. 14, 1982.

[7] **A. Borel.** *Linear algebraic groups,* 2nd edn., vol. 126 of Graduate Texts inMathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] **Cannas da Silva, A.** *Lectures on Symplectic Geometry,* Springer Verlag, Berlin, 2001.

[9] **Chris Woodward.** *Moment maps and geometric invariant theory.* Actions hamiltoniennes, 2011.

[10] **Gerd Rudolph, Matthias Shmidt.** *Differential geometry and mathematical physics*, Part I, Springer, New york, 2013.

[11] **Guillemin, V. Sternberg, S.** *Convexity properties of the moment mapping,*Invent. Math. 67, 1982.

[12] **S. Helgason.** *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic Press, New York, 1078

[13] **Igor Dolgachev.** *Lectures on invariant theory,* volume 296 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[14] **Joachim Hilgert, Karl Hermann Neeb.** *Geometry of Lie groups.* Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[15] **James E. Humphreys**. *Linear Algebraic Groups.* Springer-Verlag, 1995.

[16] **John M. Lee.** *Introduction to Smooth Manifolds Second Edition.* Springer Science+Business Media New York 2003, 2013.

[17] **G. Kempf, Ness.** *The length of vetor in representation spaces,* volumen 732, Spring verlag, New York, 1978, 1979.

[18] **J. Marsden and A. Weinstein.** *Reduction of symplectic manifolds with symmetry,* Rep. Math. Phys. 5 (1974), 121–130.

[19] **D. Mumford, J. Forgarty, F. Kirwan.** *Geometric invariant theory*, volume 34 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Folge. Spring-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, third edition, 1994.

[20] **P. E. Newstead.** *Introduction to moduli problems and orbit spaces,* vol. 51 of Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[21] **A. L. Onishchik , E. B. Vinberg.** *Lie groups and a algebraic groups,* spring, Verlag, 1990.

[22] **Robin Hartshorne.** *Algebraic Geometry.* Graduate texts in mathematics 52. Spring, New York, 1997.

[23] **McDuff, D., Salomon, D.** *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford University Press, New York, 1995.

[24] **Syvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontain.** *Riemannian geometry,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[25] **Venkatramani Lakshmibai and Komaranapuram N. Raghavan.** *Standard monomial theory,* volume 137 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Invariant theoretic approach, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 8.

[26] **R. V. Gamkrelidze V.L. Popov.** *Invariant Theory and Algebraic Transformationgroups,* Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 131.