Representações de Grupos Localmente Compactos e o Teorema da Imprimitividade.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Henrique Teixeira Tyrrell Tavares

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática
pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Orientador: Antônio Roberto da Silva

Conteúdo

Introdução

O propósito deste trabalho é apresentar a teoria das representações de grupos localmente compactos e o teorema da imprimitividade.

Na primeira parte do primeiro capítulo tratamos das definições e resultados básicos utilizando um aparato da topologia e da teoria de funções em grupos topológicos. Por fim, estudamos a álgebra L^1 associada a um grupo. Na segunda parte do capítulo introduzimos algumas técnicas de medidas sobre os espaços homogêneos G/H. Em particular a noção de medida quasi-invariante que será imprescindível para o desenvolvimento do processo de indução.

No segundo capítulo introduzimos o conceito de representação unitária de grupos compactos. Subsequentemente serão desenvolvidas as técnicas necessárias para a demonstração de duas formas do Teorema de Peter-Weyl. Tiramos algumas consequências deste teorema, em especial com relação ao grupo compacto $SU(2)$.

No terceiro capítulo apresentamos a construção principal deste trabalho, a saber, a construção de Mackey da representação induzida. Esta construção é simples para o caso de grupos finitos, mas sua generalização ao caso localmente compacto requer uma análise mais profunda. Apresentamos três construções desta representação induzida e provamos que as três construções resultam em representações equivalentes. Feito isso, obtemos as propriedades básicas do processo de indução, a saber, que ele preserva somas diretas, o produto tensorial, dentre outras. Concluímos o capítulo com a construção da chamada série principal para o grupo $SL_2(\mathbb{R})$ das matrizes de determinante um agindo no plano.

No capítulo final tratamos de uma classe de representações da álgebra $L^1(G)$ associada a uma representação do grupo. Definimos o que é um sistema de imprimitividade e estendemos o processo de indução a este novo objeto. Após essa extensão, provamos o teorema da imprimitividade de Mackey que afirma que dado um sistema de imprimitividade existe uma única classe de representação de um subgrupo H cujo sistema de imprimitividade induzido é equivalente ao original respondendo assim a pergunta de quando uma representação é induzida de algum subgrupo.

Capítulo 1: Espaços de Funções em Grupos.

Neste capítulo inicial apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares dos quais faremos uso nos capítulos subsequentes.

Dados G um grupo topológico localmente compacto e um subgrupo fechado H de G, para se desenvolver a teoria de representações induzidas de G precisamos de alguns resultados específicos sobre medidas tanto nestes grupo quanto no espaço homogêneo quociente G/H. As noções de rô-função, soma sobre um subgrupo, medida quasi-invariante são introduzidas e com elas serão derivados os resultados necessários para realizar a construção principal no capítulo 3.

Se nada for dito, suporemos *a priori* que G é um grupo localmente compacto que satisfaz a condição de Hausdorff e H é um subgrupo fechado de G e que dx é uma medida de Haar invariante à esquerda fixada em G

1.1 Noções Básicas

Considere o seguinte caso:

Seja G um grupo localmente compacto e H um subgrupo fechado. Seja μ uma medida de Haar invariante à esquerda em G com integral associada $\int_G f(x)dx$.

Chamaremos G/H ao espaço de classes de equivalência à esquerda pelo subgrupo H do grupo G, *i.e.* $G/H = \{xH; y \in xH \iff yx^{-1} \in H\}$ e muniremos este conjunto com a topologia quociente, ou seja, a topologia fazendo com que a aplicação $q : G \to G/H$, dada por $q(x) = xH$ satisfaça

$$U \subset G \text{ é aberto } \iff q(U) \text{ é aberto em } G/H.$$

É um fato conhecido da teoria de grupos topológicos que o espaço G/H é também um espaço localmente compacto e completamente regular (ver [8]) *i.e.* vale o lema de Urysohn:

Teorema 1.1. *Dados $K \subset G/H$ um conjunto compacto, e U uma vizinhança aberta de K existe uma função $f : G/H \to \mathbb{R}$ tal que*

i) $f(x) = 1$ para todo $x \in K$

ii) $f(x) = 0$ para todo $x \notin U$

iii) $f(G) \subset [0, 1]$

Em particular, tomando $H = \{e\}$ obtemos que o mesmo resultado vale para G no lugar de G/H.

Introduzimos agora as definições básicas da teoria de representações de grupos em geral.

Definição 1.2. *i) Seja G um grupo arbitrário e V um espaço vetorial arbitrário sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma representação de G em V é um homomorfismo $\pi : G \to GL(V)$, onde $GL(V)$ denota o grupo de operadores em V invertíveis relativo a operação de composição.*

ii) Seja G um grupo e π uma representação de G no espaço V. A dimensão de π é definida como a dimensão de V, i.e. , $\dim \pi = \dim V$.

Observação 1.3. *O conceito de representação é essencialmente equivalente ao conceito de ação linear. Para tornar esta afirmação precisa, definimos uma ação linear de um grupo G em um espaço vetorial V como sendo uma ação $\rho : G \times V \to V$ tal que para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$, $v, w \in V$, temos $\rho(x, \alpha v + \beta w) = \alpha\rho(x, v) + \beta\rho(x, w)$. É fácil ver que para cada ação linear de um grupo em V existe uma única representação associada tal que $\rho(x, v) = \pi(x)v$ e* *analogamente, dada uma representação $\pi : G \to GL(V)$ de G existe uma única ação linear ρ de G em V satisfazendo também $\rho(x, v) = \pi(x)v$.*

Esta observação nos permite usar livremente os termos ação linear ou representação de um grupo G em um espaço vetorial V.

Definição 1.4. *i) Um operador de entrelaçamento entre duas representações (π, V), (ν, W) de um grupo G é um operador linear $L \in L(V, W)$ tal que $\forall x \in G$, $\forall v \in V$ tenhamos*

$$L \circ \pi(x)v = \nu(x) \circ Lv.$$

Ou seja, um operador linear que faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\pi(x)"'] & W \arrow[d, "\nu(x)"] \\ V \arrow[r, "L"'] & W \end{tikzcd}$$

ii) Dadas representações (π, V), (ν, W), denotamos $hom_G(V, W)$ o espaço dos operadores de entrelaçamento entre π e ν. No caso em que $V = W$, podemos mostrar que este conjunto é uma subálgebra da álgebra de operadores $T : V \to V$.

iii) Dizemos que duas representações (π, V), (η, W) são equivalentes quando existe um operador de entrelaçamento invertível entre elas. Em outras palavras, se existe uma bijeção em $hom_G(V, W)$

Para simplificar a notação omitiremos a ação ou a representação quando não houver possibilidade de confusão, escrevendo, para $x \in G$ e $v \in V$, xv

ao invés de $\pi(x)v$. Se este for o caso, T pertence a $hom_G(V, W)$, i.e. T é um operador de entrelaçamento se e só se $Tx = xT$ para todo $x \in G$.

iv) Dada (π, V) uma representação de G, dizemos que um subespaço W é invariante por G, ou G-estável, se para todo $x \in G$ vale que $\pi(x)W \subset W$.

v) Uma representação (π, V) é dita irredutível se V não possui subespaço G-estável não trivial, i.e., diferente de V e $\{0\}$.

vi) Dada (π, V) uma representação de G e W um subespaço G-estável, podemos definir $\pi|_W$ como sendo um homomorfismo de G em $hom(W)$ dado por $\pi_W(x)w = \pi(x)|_W w$ para $w \in W$. Pode-se mostrar que (π, W) é uma representação de G, chamada restrição de (π, V)

vii) (π, V) uma representação de G, podemos definir uma representação π^*, denominada dual (ou adjunta) de π de G em V^*, o dual algébrico de V. Se v pertence a V e $u \in V^*$ defininimos $[\pi^*(x)u](v) = u(\pi(x^{-1})v)$ para todo $x \in G$.

Como exemplos temos:

Exemplo 1.5. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e G um grupo arbitrário. O $\mathbb{K}$-espaço vetorial livre é o espaço vetorial $\mathbb{K}[G]$ que tem como base o conjunto G, i.e., seus elementos são da forma*

$$\sum_{x \in G} \lambda_x \cdot x \text{ ou ainda } \sum_{x \in G} \lambda_x \cdot e_x,$$

onde todo λ_x é nulo exceto para um número finito de x em G. Munimos este conjunto com a soma pontual e a multiplicação por escalar pontual. Podemos estender por linearidade o produto de G a um produto em $\mathbb{K}[G]$ tornando-o uma álgebra, denominada $\mathbb{K}$-álgebra do grupo G.

Defina $(\pi, \mathbb{K}[G])$, como sendo dado por

$$\pi(x)v = \pi(x)\Big(\sum_{g\in G}\lambda_g e_g\Big) = \sum_{g\in G}\lambda_g e_{xg}.$$

Lembrando que a aplicação $g \mapsto xg$ é uma permutação de G para todo $x \in G$, vemos que esta representação age em $\mathbb{K}[G]$ permutando as dimensões.

Lembramos que uma medida de Haar em um grupo localmente compacto é uma medida regular de Borel em G tal que para todo $x \in G$, $\mu(E) = \mu(x \cdot E)$ para todo boreliano E ou equivalentemente $\mu_x = \mu$ para todo $x \in G$ onde definimos $\mu_x(E) = \mu(x^{-1}E)$ para E boreliano. Similarmente definimos medidas de Haar invariantes à direita.

Sabemos também que todo grupo localmente compacto possui uma medida de Haar invariante à esquerda (e uma à direita) e toda outra medida invariante à esquerda (à direita) em G é um múltiplo constante desta medida. Esta afirmação é um resultado clássico da teoria de grupos localmente compactos e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [6].

Exemplo 1.6. *i) A medida de Lebesgue usual na reta é uma medida de Haar invariante à esquerda nos espaços vetoriais $(\mathbb{R}^n, +)$ sobre $\mathbb{R}$. Note que como este grupo é abeliano, esta medida é invariante à direita também.*

i) A medida de Haar invariante à esquerda em $\mathbb{R}^*$, o grupo multiplicativo de reais não nulos é dada por

$$\int_{\mathbb{R}^*} f(a)\frac{da}{|a|}.$$

iii) Mais geralmente, em $GL(n, \mathbb{R})$, o grupo de operadores invertíveis em $\mathbb{R}^n$, uma medida de Haar invariante à esquerda é dada por:

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} f(A)\frac{dA}{|detA|^n},$$

onde dA é o elemento de volume usual em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1.2 Alguns Resultados Sobre Espaços de Funções em Grupos

No que se segue, trabalharemos com espaços de funções em grupos, ou espaços quocientes de grupos, como por exemplo $C(G, \mathbb{C})$ o espaço de funções contínuas definidas em um grupo topológico G com valores em $\mathbb{C}$, ou $C_c(G, \mathbb{C})$ o subespaço de funções complexas em G com suport compacto. Quando não explicitarmos um contra-domínio, ou seja, quando escrevermos $C(G)$ ou $C_c(G)$ será assumido tacitamente que as funções destes espaços assumem valores complexos.

Definição 1.7. *Seja $f \in C_c(G, \mathbb{C})$, e tome $f_x : H \to \mathbb{C}$ dada por $f_x(h) = f(xh)$. Então f_x é uma função integrável com relação a medida de Haar dh de H (veja [8]) e podemos definir, uma função $f^H : G/H \to \mathbb{C}$ chamada de sua soma sobre H por*

$$f^H : G/H \to \mathbb{C},\ f^H(xH) = \int_H f(xh)dh.$$

A aplicação assim obtida $C_c(G) \mapsto C(G/H)$, $f \mapsto f^H$ é linear:

$$(\alpha f + \beta g)^H(xH) = \int_H (\alpha f + \beta g)(xh)dh = \int_H \alpha f(xh)dh + \beta \int_H g(xh)dh = \alpha f^H(xH) + \beta g^H(xH).$$

Obtemos a imagem desta aplicação com o

Teorema 1.8. *: Seja $\phi \in C_c(G/H)$. Então existe $f \in C_c(G)$ tal que $f^H = \phi$. Além disso, se $\phi(xH) \geq 0$ para todo $xH \in G/H$ podemos escolher f de modo que $f(x) \geq 0\ \forall x \in G$*

Prova : Por definição de $C_c(G/H)$ podemos tomar um compacto $K \subset G$ de tal maneira que $supp(\phi) \subset q(K)$. Deste modo existe $p \in C_c(G)$ tal que $p(x) > 0$ $\forall x$ tal que $xH \in supp(\phi)$. Afirmamos que $p^H(xH) > 0$ $\forall xH \in supp(\phi)$.

De fato, $p^H(xH) = \int_H p(xh)dh$, mas $xH \in supp(\phi)$ significa que existe um elemento $h \in H$ tal que $p(xh) > 0$, o que significa que $p(y) > 0$ para y em uma vizinhança de xh em H e como $p \geq 0$, temos que $\int_H p(xh)dh > 0$.

Definimos agora $\psi : G/H \to \mathbb{C}$ por

$$\psi(xH) = \begin{cases} \phi(xH)/p^H(xH) & \text{se } x \in \text{supp } \phi \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela continuidade de ϕ e p^H, e o fato de que $supp(\psi) \subset supp(\phi)$, temos que $\psi \in C_c(G/H)$. Agora definimos uma função $f : G/H \to \mathbb{C}$ por $f(xh) = \psi(xH)p(x)$. Novamente, pela continuidade das funções envolvidas, observamos que f é contínua e portanto $f \in C_c(G)$. Se $\phi \in C_c(G/H)^+$ então $f \in C_c(G)^+$. Por fim computamos $f^H(xH)$ para $xH \in G/H$.

$$f^H(xH) = \int_H f(xh)dh =$$

$$\int_H \psi(xH)p(xh)dh = \psi(xH)\int_H p(xh)dh =$$

$$\psi(xH)p^H(xH) = \phi(xH) \text{ para } xH \in q(supp(\phi)).$$

Obviamente, se $xH \notin q(supp(\phi))$, temos que $f^H(xH)$ e $\phi(xH)$ são ambas iguais a 0 e o resultado está provado.

Sejam $K \subset G$ um subconjunto compacto de G e $C_K(G)$ o espaço das funções em G com suporte contido em K.

Proposição 1.9. *Seja K um subconjunto compacto de G. Então existe um $c_K > 0$ tal que para toda $f \in C_K(G)$ temos $\|f^H\|_\infty \leq c_K \|f\|_\infty$.*

Prova : Como $supp(f) \subset K$ se $x \notin KH$, então $xh \notin K$ para todo $h \in H$ e teremos $\int_H f(xh)dh = f^H(xH) = 0$. Afim de estimar $|f^H(xH)|$ precisamos, então, apenas considerar o caso $x \in K$.

Isto significa que se $xh \in suppf$ então $h \in x^{-1} \cdot suppf \subset x^{-1} \cdot K \subset K^{-1}K$, e deste modo $h \in K^{-1}K \cap H$. Como a multiplicação e o produto são contínuos, o conjunto $K^{-1}K \cap H$ é compacto em H. Seja $c_K = \mu(K^{-1}K \cap H)$. Notando que

$$|f^H(xH)| \leq \int_H |f(xh)|dh \leq c_K \|f\|_\infty.$$

obtemos o resultado.

1.3 Medidas Quasi-Invariantes

Assumiremos o resultado abaixo relativo a medidas de Haar invariantes à esquerda em grupos localmente compactos, cuja prova pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.10 (e definição)**.** *Existe uma função em G, chamada função modular de G e denotada Δ_G tal que para todo $x \in G$. Então vale:*

$$\int_G f(yx)dy = \Delta_G(x^{-1}) \int_G f(y)dy. \text{ ou ainda } \int_G f(x)dx = \Delta_G(y) \int_G f(xy)dx,$$

e

$$\int_G f(x)dx = \int_G f(x^{-1})\Delta_G(x^{-1})dx.$$

Além disso, a função $\Delta_G : G \to \mathbb{R}^+$ é um homomorfismo contínuo de G em $\mathbb{R}^+$, o grupo multiplicativo dos reais positivos, com a topologia induzida da reta.

Observação 1.11. *Se Δ_G é constante igual a 1, vemos que dx será também invariante à esquerda. Neste caso, chamamos o grupo G de unimodular. Por exemplo, se G é compacto (ou discreto), temos que sua imagem em $\mathbb{R}^+$ por Δ_G será também compacta (ou discreta) e portanto igual a subgrupo trivial $1 \subset \mathbb{R}^+$. Se G é abeliano Δ_G será constante igual a 1, pois uma medida invariante à esquerda também é invariante à direita. Em outras palavras, grupos abelianos, discretos ou compactos são todos unimodulares.*

Em posse da função modular podemos definir uma importante classe de funções chamadas rô-funções que relacionam a integral da medida de Haar de G à integral da medida de Haar em H. Vamos construir essa relação através de medidas quasi-invariantes no espaço G/H. Estas medidas também serão usadas na construção do espaço de representação de $ind_H^G \pi$.

Definição 1.12. *Sejam G e H tais que G é um grupo localmente compacto com uma medida de Haar invariante à esquerda dx fixada, e H é um subgrupo fechado de G. Uma rô-função para o par (G, H), ou uma H-rô função é uma função não negativa contínua $\rho : G \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$$\rho(xh) = \tfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(x) = \tfrac{\Delta_G(h^{-1})}{\Delta_H(h^{-1})}\rho(x) \ \forall x \in G, \ h \in H$$

Quando não houver chance de confusão, podemos omitir os subescritos e chamar $\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} = \delta^2(h)$. Uma rô-função satisfaz $\rho(xh) = \delta^2(h)\rho(x)$. A razão para o expoente 2 aparecerá no capítulo 3.

Sobre a existência de tais funções temos o seguinte resultado:

Teorema 1.13. *i) Para $f \in C_c^+(G)$, ρ_f definida por*

$$\rho_f(x) = \int_H \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} f(xh)dh$$

é uma H-rô função (não necessariamente estritamente positiva).

Prova : Fixe um $y \in H$. Através de uma mudança de variáveis e da invariância à esquerda da medida de Haar, temos:

$$\rho_f(xy) = \int_H \Delta_G(h)\Delta_H(h)^{-1} f(xyh)dh =$$
$$\int_H \Delta_G(y^{-1}h)\Delta_H(y^{-1}h)^{-1} f(xh)dh =$$
$$\tfrac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\rho_f(x)$$

Para mostrar que ρ_f é contínua lembramos que f tem suporte compacto em G e portanto dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U de e em G tal que se $xy^{-1} \in U$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Além disso, notamos que $\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} f(xh)$ tem suporte compacto K em H. Se x, y são tais que $xy^{-1} \in U$

Estimamos então a distância, para $xy^{-1} \in U$:

$$|\rho_f(x) - \rho_f(y)| \leq \left| \int_H \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} (f(xh) - f(yh))dh \right| \leq$$
$$\int_K \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} |f(xh) - f(yh)|dh < k\epsilon\mu(K),$$

onde $k = \max\{\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}; k \in K\}$ e $\mu(K)$ é a medida de Haar de K e assim provamos o resultado.

Lema 1.14. *Para cada ρ H-rô função em G existe uma medida regular de Borel μ_ρ em G/H. Esta medida é dita associada a ρ e sua integral correspondente é dada por*

$$\int_G f(x)\rho(x)dx = \int_{G/H} f^H(xH)d\mu_\rho(xH) = \int_{G/H}\int_H f(xh)dhd\mu_\rho(xH)$$

Para provar este resultado, defina

$$\lambda : C_c(G/H) \to \mathbb{C}, \text{ por } \lambda(f^H) = \int_G f(x)\rho(x)dx.$$

e sobre este funcional linear podemos provar o seguinte:

Lema 1.15. *Seja ρ uma H-rô função e $f \in C_c(G)$ tal que $f^H = 0$ em G/H. Então*

$$\int_G f(x)\rho(x)dx = 0$$

Além disso, o funcional $\lambda : C_c(G) \to \mathbb{C}$, dado por $f \mapsto \int_G f(x)\rho(x)dx$ é positivo.

Prova : Tome uma função $g : G/H \to \mathbb{R}$ tal que $g(xH) = 1$ para todo $xH \in q(\mathrm{supp} f)$. A existência dessa função é garantida pelo teorema (1.1). Pelo teorema (1.8) existe uma função $p : G \to \mathbb{R}$, tal que $p^H(xH) = g(xH) = 1$

Portanto, pelo teorema de Fubini (veja [6]) para integração com relação a medida de Haar em grupos localmente compactos

$$0 = \int_G \rho(x)g(x)dx \int_H \Delta_H(h^{-1})f(xh^{-1})dh$$

$$= \int_G \rho(x)g(x)\Big(\int_H f(xh^{-1})\Delta_H(h^{-1})dh\Big)dx$$

$$= \int_H\int_G f(xh^{-1})\rho(x)g(x)\Delta_H(h^{-1})dxdh$$

Fazendo a substituição $x \mapsto xh$

$$
\begin{aligned}
&= \int_H \int_G \Delta_G(h)\Delta_H(h^{-1})\rho(xh)f(x)g(xh)dxdh \\
&= \int_G f(x)\rho(x)(\int_H g(xh)dh)dx \\
&= \int_G f(x)\rho(x)g^H(x)dx \\
&= \int_G f(x)\rho(x)dx \ .
\end{aligned}
$$

Aqui usamos o fato de que ρ é uma H-rô função e as propriedades da função modular.

Deste modo, se $f^H = f_0^H$, temos que $(f - f_0)^H = 0$ e pelo lema acima $\int_G (f - f_0)(x)\rho(x)dx = 0$ de modo que $\lambda(f) = \lambda(f_0)$ e provamos que o funcional está bem definido.

Provaremos agora sua positividade, usando o fato de que f é uma função positiva, então $\lambda(f) \geq 0$. Seja então $g \in C_c^+(G/H)$. Pelo teorema (1.8) existe uma $f \in C_c^+(G)$ tal que $f^H = g$. Sendo ρ e f positivas, temos

$$
\lambda(g) = \int_G f(x)\rho(x)dx \geq 0
$$

Tendo em vista que λ é um funcional positivo, pelo teorema de representação de Riesz (veja [6]), obtemos a medida $d\mu_\rho$ como na tese e o teorema estará provado.

Apresentamos agora algumas propriedades desta medida μ associada a uma H-rô função que serão utilizadas posteriormente na análise de representações induzidas:

Proposição 1.16. *Seja ρ uma H-rô função e μ sua medida regular de Borel associada no espaço G/H. Então*

i) Se A é um subconjunto fechado de G/H onde para todo x em G tal que $xH \notin A$ tenhamos $\rho(x) = 0$. Então $supp(\mu_\rho) \subset A$.

ii) Para $x \in G$, $L_x\rho$ *é também uma* H*-rô função e vale* $(\mu_\rho)_{x^{-1}} = \mu_{L_{x^{-1}}\rho}$.

iii) Se $f \in C_c^+(G)$ *e* $\rho = \rho_f$, *i.e., consideramos a* H*-rô função associada pelo lema* (1.13) *a* f, *então para toda* $\alpha \in C_c(G/H)$, *temos*

$$\int_{G/H} \alpha(yH)d\mu_\rho(yH) = \int_G \alpha(xH)f(x)dx$$

Prova : *i)* Seja A como no lema e xH um ponto de G/H com $xH \notin A$. Então existe uma vizinhança V de xH tal que $V \cap A = \emptyset$. Seja χ_V a função característica de V. Podemos tomar $\tilde{\chi}_V$ uma função satisfazendo:

a) $0 \leq \tilde{\chi}_V \leq 1$ e $\tilde{\chi}_V(yH) = 1$ para todo $yH \in V$.

b) $\tilde{\chi}_V \in C_c^+(G/H)$.

c) $supp(\tilde{\chi}_V) \subset A^c$, onde A^c denota o complemento de A.

Pelo teorema (1.8) existe uma $g \in C_c^+(G)$ tal que $g^H = \tilde{\chi}_V$. Então temos:

$$\mu_\rho(V) = \int_{G/H} \tilde{\chi}_V(yH)d\mu_\rho(yH) = \int_G g(y)\rho(y)dy = 0,$$

onde a última igualdade vale pois sendo $g(y) \neq 0$, temos $yH \in V$ o que por sua vez quer dizer que $yH \notin A$ e portanto $\rho(y) = 0$.

ii) Notemos que $L_x\rho$ satisfaz a propriedade de covariância. Além disso, $L_x\rho$ pode ser obtida pela composta das aplicações $y \mapsto x^{-1}y \mapsto \rho(x^{-1}y)$ e portanto é contínuidade e obtemos que $L_x\rho$ é uma H-rô função. Para verificar a igualdade calculamos para um boreliano B em G/H e χ_B sua função característica:

$$\mu_{L_{x^{-1}}\rho}(B) = \int_{G/H} \mathbf{1}_B(yH)d\mu_{L_{x^{-1}}\rho}(yH)$$

$$= \int_G g(z)L_{x^{-1}}\rho(z)dz = \int_G L_x g(z)\rho(z)dx^{-1}z$$

$$= \int_G L_x g(z)\rho(z)dz = \int_{G/H} (L_x g)^H (yH) d\mu_\rho(yH)$$

$$= \int_{G/H} \mathbf{1}_B(x^{-1}yH)d\mu_\rho(yH) = x \cdot \mu(B)$$

iii) Se $\alpha \in C_c(G/H)$, existe, pela proposição (1.8), uma $\beta \in C_c(G)$ tal que $\beta^H = \alpha$. Então teremos, pelas propriedades da função modular e a definição de ρ_f que

$$\int_{G/H} \alpha(yH)d\mu_\rho(yH) = \int_G \beta(x)\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}f(xh)dhdx$$

$$= \int_G \int_H \beta(xh^{-1})\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}f(x)dhdxh^{-1}$$

$$= \int_G f(x)\int_H \beta(xh^{-1})\frac{1}{\Delta_H(h)}dhdx$$

$$= \int_G f(x)\int_H \beta(xh)dhdx$$

$$= \int_G f(x)\alpha(xH)dx$$

Considere o caso especial em que $\Delta_H = \Delta_G$ para o grupo H contido em G. Neste caso, a função constante igual a 1 é uma H-rô função e a medida μ_1 obtida neste caso é invariante, *i.e.* para todo B na σ-álgebra dos borelianos de G/H temos $\mu(B) = \mu(xB)$ onde $xB = \{x\omega; \omega \in B\}$.

Se definirmos a medida μ_x em G/H por $\mu_x(B) = \mu(x^{-1}B)$, como a translação de μ por x teremos $\mu_x = \mu$ para todo $x \in G$. Uma medida de Haar, se vista como medida em $G/\{e\}$ é, por exemplo, invariante neste sentido. Este não é o caso em geral. Na verdade o que temos é uma generalização deste conceito, o de quasi-invariância da medida.

Definição 1.17. *Sejam G um grupo localmente compacto e H um subgrupo fechado. Uma medida μ em G/H é dita quasi-invariante quando $\mu(B) = 0$ se e somente se $\mu(xB) = 0$ para todo $x \in G$, onde B pertence à σ-álgebra dos borelianos de G/H. Em outras palavras, uma medida é quasi-invariante quando ela tem exatamente os mesmo conjuntos nulos que todas as suas translações, ou ainda, se μ é equivalente a suas translações.*

Proposição 1.18. *Seja μ uma medida quasi-invariante não nula em G/H. Então*

$i)$ $supp(\mu) = G/H$

$ii)$ Se ν é uma medida regular de Borel é equivalente a μ, ν é também quasi-invariante.

Na verdade podemos mostrar a recíproca da afirmação $ii)$ vale: quaisquer duas medidas regulares de Borel quasi-invariantes em G/H são equivalentes (Veja [9]).

Prova : $i)$ Suponha $supp(\mu) \neq G/H$. Então existe uma vizinhança U de e aberta em G/H tal que $\mu(U) = 0$. Como μ é quasi-invariante, $\mu(xU) = 0$ para todo $x \in G$. Se K é um conjunto compacto em G/H, a união $\cup_{x \in K} xU$ cobre K e assim, possui subcobertura finita de translados $\{x_i U\}_1^n$. Portanto temos

$$\mu(K) \leq \textstyle\sum_1^n \mu(x_i U) = 0 \implies \mu(K) = 0$$

para todo compacto K. Sabendo que μ é regular $\mu(V) = \sup\{\mu(K); K$ é compacto e $K \subset V\}$ obtemos que $\mu(V) = 0$ para todo aberto V contido em G/H. Concluímos que $\mu = 0$.

$ii)$ Suponha $\nu \equiv \mu$. Temos

$$\nu_x(B) = 0 \iff \mu_x(B) = 0 \iff \mu(B) = 0 \iff \nu(B) = 0$$

o que significa que ν é quasi-invariante.

Vamos provar agora a existência de tais medidas para G localmente compacto e H fechado.

Lema 1.19. *Seja U uma vizinhança aberta e simétrica de e tal que $\overline{U}$ é compacto. Então existe A contido em G satisfazendo*

i) $\forall x \in G$, $\exists y \in A$ tal que $xH \cap Uy \neq \emptyset$.

ii) Se K é compacto então o conjunto $\{y \in A; KH \cap Uy \neq \emptyset\}$ é finito.

Prova : O caso em que G é compacto é trivial. Suponha então que G é não-compacto. Defina $\mathcal{B}$ como a família de todos os conjuntos B contidos em G que satisfazem:

$$\text{para todos } y \neq z \text{ em } B, \text{ temos } z \notin UyH.$$

Notemos primeiramente que $\mathcal{B}$ é não vazio por vacuidade: se tomarmos $A = \{e\}$ então $A \in \mathcal{B}$, pois não há $y \neq z$ em A que não satisfazem a propriedade $z \in UyH$.

Em segundo lugar, munimos $\mathcal{B}$ com a ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos e consideramos uma cadeia $(A_i)_{i \in I}$ em $\mathcal{B}$ e $A = \cup_i A_i$. Se $y \neq z$ está em A então existem A_1, A_2 tais que $y \in A_1$, $z \in A_2$. Sem perda de generalidade podemos supor que $A_1 \subset A_2$ podemos então considerar y, $z \in A_2$. Pelo fato de que $A_1 \in \mathcal{B}$, temos $z \in UyH$ e concluímos $A \in \mathcal{B}$.

Deste modo, mostramos que o conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{B}$ satisfaz as condições do lema de Zorn de modo que existe um A maximal em $\mathcal{B}$. Se houvesse um $x \in G \backslash A$ tal que $xH \cap Uy = \emptyset$ para todo $y \in A$ poderíamos fazer $A' = A \cup \{x\}$. Este conjunto contém A propriamente e pertence a $\mathcal{B}$, contrariando a maximalidade de A. Segue-se então que $i)$ vale para A.

Para mostrar $ii)$, considere K um conjunto compacto em G e seja $A_K = \{y \in A; KH \cap Uy \neq \emptyset\}$. Para cada $y \in A_K$ temos também que $UK \cap yH \neq \emptyset$. Para cada $y \in A_K$ escolha $x_y \in UK \cap yH$. Se A_K fosse infinito o conjunto $\{x_y; y \in A_K\}$ teria algum ponto de acumulação x pertencente ao compacto $\overline{U}K$.

Seja V uma vizinhança de e em G tal que $VV^{-1} \subset U$. Como o conjunto $\{x_y; y \in A_K\}$ se acumula em x existem y e z distintos em A_K tais que x_y, x_z pertencem a Vx. Isto nos dá que $x_y x_z^{-1} \in VV^{-1} \subset U$, mas $x_y \in H$ e $x_z \in zH$, de modo que $x_y \in Ux_z \subset UzH$. Assim temos que $y \in UzH$ e obtemos uma contradição com $A \in \mathcal{B}$. Logo $ii)$ vale.

Lema 1.20. *Seja G localmente compacto e H um subgrupo fechado em G. Então existe uma H-rô função ρ estritamente positiva e contínua em G.*

Prova : Podemos escolher $f \in C_c^+(G)$ tal que $f(x) = f(x^{-1})$ e $f(e) > 0$. Tome $U = f^{-1}(]0, \infty[)$. O conjunto U tem fecho compacto, pois $f \in C_c^+(G)$ e portanto existe A satisfazendo as condições $i)$ e $ii)$ do lema anterior. Para $y \in A$ temos:

$$\rho_{R_y(f)}(x) = \int_H \Delta_G(h)\Delta_G(h^{-1})f(xhy^{-1})dh.$$

O que significa que $x \notin UyH$ e então $xh \notin Uy$ para todo $h \in H$ e assim obtemos $f(xhy^{-1}) = 0$ para todo h. Com base nestas observações defina $\rho = \sum_{y \in A} \rho_{r_y(f)}$.

Afirmamos que, para cada x, existe apenas uma quantidade finita de $y \in A$ tais que $\rho_{r_y(f)}(x) \neq 0$. Isto mostrará que ρ é finita e portanto está bem definida. Note também que sendo uma soma de H-rô funções contínuas, ρ é contínua.

Sabemos que $supp(f)$ é compacto então na propriedade $ii)$ do lema (1.19) tome $K = supp(f)$. O Lema nos mostra então que o conjunto $\{y \in A; KH \cap Uy \neq \emptyset\}$ é finito e provamos nossa afirmação. Agora, pela propriedade $i)$, existe ao menos um y para um dado x tal que $\rho_{r_y(f)}(x) > 0$ donde ρ é estritamente positiva.

Suponha que G é conexo. Seja μ uma medida quasi-invariante em G/H. Neste caso, μ é σ-finita, e pelo teorema de Radon-Nikodym (veja [6]) que existe, para todo $x \in G$, uma função $\frac{d\mu_x}{d\mu}(yH)$ em G/H. Assim, obtemos uma função mensurável $\sigma : G \times G/H \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\sigma(x, yH) = \tfrac{d\mu_x}{d\mu}(yH)$$

que chamamos de derivada de Radon-Nikodym de μ_x com relação a μ satisfazendo:

$$\int_B d\mu = \mu(B) = \int_{G/H} \sigma(x, yH) \ \ d\mu(yH) = \int_{G/H} \frac{d\mu_x}{d\mu}(yH) \ \ d\mu(yH).$$

Teorema 1.21. *Sejam G localmente compacto e H um subgrupo fechado. Então existe ao menos uma medida quasi-invariante regular de Borel μ, associada à H-rô função ρ estritamente positiva e contínua, no espaço G/H.*

Além disso, a função $\sigma : G \times G/H \to \mathbb{C}$ definida acima, é dada por $\sigma(x, yH) = \frac{d\mu_x}{d\mu}(yH) = \frac{\rho(xy)}{\rho(y)}$ e satisfaz para z, x, $y \in G$.

$$\frac{d\mu_{zx}}{d\mu}(yH) = \frac{d\mu_z}{d\mu}(yH)\frac{d\mu_x}{d\mu}(zyH)$$

ou em outras palavras

$$\sigma(zx, yH) = \sigma(z, yH)\sigma(x, zyH).$$

Prova : Pelo lema 1.20 fixamos uma H-rô função estritamente positiva e contínua. Seja $\mu = \mu_\rho$ a medida de Borel regular associada a esta função. Uma aplicação da definição nos dá que $x\mu = \mu_{L_{x^{-1}}\rho}$.

Verificamos que a função $y \mapsto \rho(xy)/\rho(y)$ está bem definida uma vez que ρ é estritamente positiva e se $h \in H$ temos

$$\tfrac{\rho(xyh)}{\rho(yh)} = \tfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \tfrac{\rho(xy)}{\rho(yh)} = \tfrac{\Delta_H(h^{-1})}{\Delta_G(h^{-1})} \tfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \tfrac{\rho(xy)}{\rho(y)} = \tfrac{\rho(xy)}{\rho(y)},$$

i.e., é constante em cada classe de equivalência de H e é claramente contínua. Deste modo, faz sentido ver $y \mapsto \frac{\rho(xy)}{\rho(y)}$ como função em G/H também. Agora para $f \in C_c(G)$ e $x \in G$, vale

$$\int_{G/H} f^H(yH) d(x \cdot \mu_\rho)(yH) = \int_G f(y) L_{x^{-1}}\rho(y) dy$$

$$= \int_G f(y)\rho(xy)\rho(y)^{-1}\rho(y) dy$$

$$= \int_{G/H} f^H(yH) \frac{\rho(xy)}{\rho(y)} d\mu_\rho(yH),$$

o que prova que $\sigma(x, yH) = \frac{\rho(xy)}{\rho(y)}$ é a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mu_x}{d\mu}$, de $x \cdot \mu_\rho$ com relação a μ_ρ. Note que na última identidade usamos a soma sobre H $\int_H f(yh)\rho(xyh)\rho(yh)^{-1}dh = f^H(yH)\rho(xh)\rho(y)^{-1}$ pois o quociente entre as H-rô funções é constante em cada classe de equivalência. Para mostrar que μ é quasi-invariante, supomos que para um boreliano B em G/H tenha-se $x \cdot \mu_\rho(B) = 0$, então

$$0 = x \cdot \mu_\rho(B) = \int_{G/H} \mathbf{1}_B(yH) dx \cdot \mu_\rho$$

$$= \int_{G/H} \mathbf{1}_B(yH) \frac{\rho(xy)}{\rho(y)} d\mu_\rho,$$

mas como $\frac{\rho(xy)}{\rho(y)} > 0$ para todos x, y temos que

$$\int_{G/H} \mathbf{1}_B(yH) d\mu_\rho(yH) = 0 = \mu(B)$$

Para verificar a equação, calculamos:

$$\sigma(zx, yH) = \tfrac{\rho(zxy)}{\rho(y)} = \tfrac{\rho(zy)}{\rho(y)} \tfrac{\rho(zxy)}{\rho(zy)} = \sigma(z, yH)\sigma(x, zyH)$$

Para finalizar este capítulo mencionamos o resultado de Mackey em [10] (e também [9]) que mostra que todas as medidas quasi-invariantes num espaço de classes de equivalência G/H tratados aqui são equivalentes, *i.e.* se μ e ν são medidas quasi-invariantes, então $\mu \equiv \nu$ (para detalhes, veja [9]). Em particular, se H é um subgrupo normal fechado em G, G/H será um grupo localmente compacto e tal medida quasi-invariant será equivalente è medida de Haar invariante à esquerda.

Como exemplo da discussão acima vamos citar um exemplo de uma medida quasi-invariante em $\mathbb{R}^n$ que não é invariante à esquerda, como é a medida de Lebesgue, chamada medida de Gauss.

Tome $G = \mathbb{R}^n$ com a adição e $H = 0$ e denote por dx a medida de Lebesgue. Defina, para um boreliano B em $\mathbb{R}^n$ $\mu(B)$ dada por

$$\mu(B) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_B \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2) dx.$$

Esta medida faz de $\mathbb{R}^n$ um espaço de probabilidade, é regular interna, porém não regular, cuja derivada de Radon-Nikodym de suas translações é dada por:

$$\frac{d\mu_h}{d\mu}(x) = \exp(\langle h, x\rangle - \tfrac{1}{2}\|h\|^2)$$

Por outro lado em [5] os autores mostram que não há medida quasi-invariante não nula num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão infinita visto como grupo com a adição. Em particular, não há medida de Haar neste espaço.

Capítulo 2: Grupos Compactos e o Teorema de Peter-Weyl

Neste capítulo desenvolveremos uma parte da teoria de representações unitárias de grupos compactos. Estes grupos possuem uma teoria de representações apreciavelmente mais simples do que a de grupos localmente compactos em geral.

Na primeira parte deste capítulo desenvolvemos as técnicas de operadores na álgebra de convolução L^1 do grupo compacto e dela deduzimos duas formas do teorema de Peter-Weyl. Depois exploramos algumas consequências deste resultado, por exemplo, provaremos que um grupo compacto é isomorfo a um subgrupo fechado de um produto de grupos ortogonais e unitários.

Por último, exploramos os resultados provados previamente, juntamente com a classificação de representações irredutíveis do grupo $SU(2)$ para decompor sua representação regular em soma de representações de dimensão finita irredutíveis.

2.1 Representações Unitárias de Grupos Compactos

Usaremos diferentes topologias no conjunto de operadores agindo em um espaço de Hilbert. Daremos agora a caracterização dessas topologias na linguagem de redes.

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $B(\mathcal{H})$ seu conjunto de operadores lineares contínuos definidos em $\mathcal{H}$. Definimos duas topologias em $B(\mathcal{H})$.*

-A Topologia Fraca

Dizemos que uma rede de operadores $(T_i)_{i\in I}$ converge para T na topologia forte quando para todos x, $y \in \mathcal{H}$ temos que $\langle T_i x, y\rangle$ converge a $\langle Tx, y\rangle$ em $\mathcal{H}$.

-A Topologia Forte

Dizemos que uma rede de operadores $(T_i)_{i\in I}$ converge para T na topologia fraca quando para todos $x \in \mathcal{H}$ temos que $T_i x$ converge a Tx em $\mathcal{H}$.

Definição 2.2. *i) Seja G um grupo localmente compacto. Uma representação unitária de G é um par $(\pi, \mathcal{H})$ onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ é um homomorfismo contínuo de grupos, onde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ é o grupo unitário de $\mathcal{H}$. Suporemos tacitamente, se não for dito o contrário, que estamos usando em $B(\mathcal{H})$ a topologia forte de operadores . Quando não houver chance de confusão, faremos menção à representação π, ao invés de $(\pi, \mathcal{H})$. Se estivermos trabalhando com mais de uma representação, denotaremos o espaço de uma representação π por $\mathcal{H}(\pi)$.*

ii) Denotaremos por $\mathcal{N}_X(x)$ o conjunto das vizinhanças de um ponto x em um espaço topológico X.

Sabe-se que em geral, que se uma aplicação $\pi : X \to B(\mathcal{H})$, onde X é um espaço topológico , é contínua na topologia forte de operadores, então ela será também contínua na topologia fraca de operadores. A recíproca não vale em geral. Entretanto, como mostra o próximo resultado, a recíproca vale para o caso de π ser uma representação unitária de G um grupo localmente compacto e onde $\pi(x) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ para todo $x \in G$.

Teorema 2.3. *Seja G um grupo localmente compacto e π uma representação de G em $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e tal que para todo $x \in G$, o operador $\pi(x)$*

é unitário. Então a representação π é unitária se e só se é contínua na topologia fraca de operadores.

Prova: Pode-se achar essa demonstração em [4].

Observação 2.4. *Suponha que G é compacto. Como vimos no capítulo 1, a função modular Δ_G é constante igual a 1, e portanto uma medida de Haar invariante à esquerda é também invariante à direita. Além disso, sendo compacto, o grupo possui medida de Haar finita e denotamos por dx a medida que faz com que o grupo tenha medida 1. A esta chamaremos a medida de Haar de G. Além disso supomos também π seja uma representação unitária π de G em $\mathcal{H}$.*

Um exemplo natural de representação de unitária de grupos compactos é dada, para $n \in \mathbb{N}$, pelos grupos unitário e orgotonal, *i.e.*, o grupo das matrizes complexas ou reais T tais que $T^* = T$ agindo em $\mathbb{C}^n$ e em $\mathbb{R}^n$ respectivamente, de maneira usual e onde T^* denota a adjunta da matriz T. Mais geralmente, dado um subgrupo destes grupos ou um subgrupo de um produto arbitrário de cópias deles, teremos, por restrição, uma nova classe de exemplos de representações unitárias de grupos compactos. Lembre que, pelo teorema de Tichonoff, um produto de conjuntos compactos é compacto na topologia produto. No final do capítulo mostraremos que na verdade, esta classe de exemplos é, em um certo sentido, a mais geral possível.

Se T é um operador linear em $\mathcal{H}$, denote o espectro de T por:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ T - \lambda I \text{ não é invertível } \}.$$

Para provar o teorema de Peter-Weyl, usaremos o teorema espectral sob a forma:

Teorema 2.5. *(Teorema Espectral) Seja $T \in B(\mathcal{H})$ um operador compacto auto-adjunto agindo num espaço de Hilbert. Então o espectro $\sigma(T)$ é enumerável, e tem 0 como único ponto de acumulação. Além disso, existe uma base ortonormal de auto-vetores v_λ, com λ variando em $\sigma(T)$, e as seguintes decomposições de $\mathcal{H}$ e T respectivamente.*

i) $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} (\ker T - \lambda I)$

ii) $T = \Sigma_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda E_\lambda$

onde para cada λ, E_λ é a projeção de $\mathcal{H}$ em $V_\lambda = \ker T - \lambda I$. De i) podemos ver que se $x \in \mathcal{H}$, podemos escrever $x = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} x_\lambda$, onde $x_\lambda = E_\lambda x$. Finalmente, também temos que cada espaço V_λ tem dimensão finita.

Prova: *Veja, por exemplo, [1]*

O resultado a seguir é uma caracterização útil da continuidade de funções em G (automaticamente uniforme).

Lema 2.6. *Seja $f \in C(G)$. Para que f seja contínua é necessário que para todo $\epsilon > 0$ exista uma vizinhança V de e em G tal que para todo $k \in V$ temos* $\sup_{k \in V} |f(gk) - f(g)| < \epsilon$

Prova : Suponha a conclusão falsa. Então existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $V \in \mathcal{N}_G(e)$ existem $k_V \in V$ e $g_V \in G$ tais que $|f(g_V k_V) - f(g_V)| \geq \epsilon_0$.

Obtemos então duas redes $\{k_V; V \in \mathcal{N}_G(e)\}$ e $\{g_V; V \in \mathcal{N}_G(e)\}$, onde por definição, k_V converge a e e g_V possui uma subrede convergente $g_{V'} \to g$, donde obtemos que $g_{V'} k_{V'}$ converge a g.

Sendo f contínua, existe uma vizinhança V_1 de e em G tal que $V \subset V_1 \implies |f(g_{V'} k_{V'}) - f(g)| < \epsilon_0/2$ e outra vizinhaça $V_2 \in \mathcal{N}_G(e)$ tornando $|f(g_{V_2}) - f(g)| < \epsilon_0/2$.

Assim, se $V \subset V_1 \cap V_2$ teremos

$$|f(g_{V'}k_{V'})) - f(g_V)| \leq |f(g_{V'}k_{V'})) - f(g)| + |f(g) - f(g_V)| < \epsilon_0$$

O que contradiz a hipótese.

O seguinte resultado é conhecido como truque de Weyl.

Lema 2.7. *Suponha que G seja compacto e $(\pi, \mathcal{H})$ é uma representação de dimensão finita de G, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Então $\mathcal{H}$ admite um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que π se torna uma representação unitária, i.e. $\langle x\eta, x\xi \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$ $\forall x \in G$, $\forall \eta, \xi \in \mathcal{H}$.*

Prova : Seja β o produto interno original de $\mathcal{H}$. Defina

$$\langle v, w \rangle = \int_G \beta(xv, xw)dx$$

Para mostrar a invariância com respeito a representação de G fixamos $g \in G$. Então

$$\langle gv, gw \rangle = \int_G \beta(xgv, xgw)dx = \int_G \beta(xv, xw)dx = \langle v, w \rangle,$$

onde na segunda igualdade usamos a invariância à direita da medida de Haar (G é compacto).

Para provar que de fato, esta função é um produto interno usamos o fato de que a integral de Haar é linear e β é um produto interno, e portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é sesquilinear e que $\langle \eta, \xi \rangle = \overline{\langle \xi, \eta \rangle}$. Além disso, essas operações preservam positividade, de modo que $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$.

Para mostrar que $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ se $\xi \neq 0$ provamos a seguinte estimativa: $M^{-2}\beta(v, v) \leq \langle v, v \rangle \leq M^2\beta(v, v)$ onde $M = \sup\{\sqrt{\beta(xv, xv)}; x \in G\}$. Note inicialmente que M é finito, pois G é compacto e a função $x \mapsto \sqrt{\beta(xv, xv)}$ é contínua.

Vemos que $\beta(xv, xv) = \beta(xv\frac{\|v\|}{\|v\|}, xv\frac{\|v\|}{\|v\|}) \leq \beta(v, v)M^2$ e então calculamos:

$$\langle v, v\rangle = \int_G \beta(xv, xv)dx \leq M^2\beta(v, v),$$

o que mostra a segunda igualdade. Para a primeira notamos que $\beta(v, v) = \beta(x^{-1}xv, x^{-1}xv) \leq M^2\beta(xv, xv)$ o que implica

$$\int_G M^{-2}\beta(v, v)dg \leq \int_G \beta(xv, xv)dx = \langle v, v\rangle.$$

Proposição 2.8. *Se (π, V) é uma representação de dimensão finita de G um grupo compacto, então V é totalmente redutível, i.e., V pode ser decomposto em*

$$V = \bigoplus_1^n V_i$$

onde cada V_i é irredutível.

Prova : Provamos o resultado por indução na dimensão de V. Em primeiro lugar, pelo lema truque de Weyl, existe um produto interno em V fazendo de π uma representação unitária. Agora, se $n = 1$ então $V \simeq \mathbb{C}$ é obviamente irredutível. Suponha então que a conclusão é válida para $\dim \pi \leq n$ e seja $(\pi, \mathcal{H})$ uma representação com $\dim \pi = n + 1$.

Se π é irredutível, já obtemos a decomposição necessária. Se não, há um subespaço não trivial W invariante por π de V. Vemos que $\dim W \leq n$ e portanto

$$W = \bigoplus_{i \in I} W_i$$

onde I é um conjunto finito e cada W_i é irredutível.

Afirmamos que $W^{\perp}$, o ortogonal de W, é também invariante por π. Ao provarmos esta afirmação, obteremos de forma similar a W, que $W^{\perp}$ é uma subrepresentação e portanto soma direta de subespaços invariantes.

Sejam $\eta \in W^{\perp}$, $\xi \in W$. Temos

$$\langle g\eta, \xi \rangle = \langle \eta, g^{-1}\xi \rangle = 0 \qquad \text{pois } g^{-1}\xi \in W.$$

Observação 2.9. *A hipótese de compacidade não pode ser removida, como mostra o simples contra-exemplo: Seja* $(\mathbb{R}, +)$ *o grupo aditivo dos reais,* $V = \mathbb{R}^2$ *o plano, e* $\phi : \mathbb{R} \to GL(V)$*, definido por* $\phi(a)(x, y) = (x + ay, y)$*, i.e., escolhendo a base canônica de* V*, teremos* $\phi(a)$ *correspondendo à matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O subespaço $(x, 0), x \in \mathbb{R}$ *é invariante, pois* $\phi(a)(x, 0) = (x, 0)$*. Se considerarmos qualquer outro subespaço de* V*, ele será da forma* $W = \{(\lambda y, y), y \in \mathbb{R}\}$*, com* $\lambda \in (0, \pi)$*. Mas este subespaço não é invariante como se vê:* $\phi(a)(\lambda y, y) = ((\lambda + a)y, y)$ *que não pertence a* W*.*

2.2 Álgebras de Grupos Compactos

Desenvolveremos agora as técnicas necessárias para a demonstração do teorema de Peter-Weyl. Para isto, estudaremos alguns operadores compactos nos espaços de funções no grupo compacto G, a saber $C(G)$, $L^1(G)$, e o espaço de Hilbert $L^2(G)$. Mas antes definimos um importante subespaço de $C(G)$.

Definição 2.10. *Seja G um grupo compacto. Uma função representante é uma função $f : G \to \mathbb{C}$, tal que existe uma representação π de G em um espaço de dimensão finita $\mathcal{H}$ e um par (v, u) onde $v \in \mathcal{H}$ e $u \in \mathcal{H}'$ e f é da forma $f(x) = u(\pi(x)v)$. Por conveniência, se f é uma função representante com par associado (v, u), chamaremos f de f_u^v, i.e. $f_u^v(x) = u(\pi(x)v)$. Esta definição implica, em particular, a continuidade de f. Chamamos ao subespaço de $C(G)$ gerado por tais funções de $Rep(G)$.*

Lema 2.11. *Se f é uma função representante com representação correspondente $(\pi, \mathcal{H})$ então f^* dada por $f^*(g) = f(g^{-1})$ será uma função representante com representação correspondente $(\pi*, V')$.*

Prova : Um cálculo simples mostra que $f^*(g) = f(g^{-1}) = u(g^{-1}v)$ para algum $u \in V'$ e $v \in V$ e por definição da representação dual em 1.4, $vii)$, esta expressão é igual a $v^*(\pi^*(g)u)$, onde v^* é a *avaliação* em v, um funcional no bidual de V associado a v.

O resultado acima induz naturalmente uma involução em $Rep(G)$.

Lema 2.12. *Se $f \in L^1(G) \cap L^2(G) \cap L^\infty(G)$, denotamos por $\|f\|_p$ sua p-norma, e $\|f\|_\infty = sup_{g\in G}\|f(g)\|$ a norma do supremo, valem então as seguintes desigualdades:*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \ .$$

Prova : Chamando de $\mathbf{1}$ a função constante igual a 1 no grupo G, teremos então:

$$\|f(x)\|_1 = \int_G \|f(x)\|dx = \int_G \|f(x)\|\mathbf{1}(x)dx = \langle \|f\|(x), \mathbf{1}(x)\rangle_2 \leq$$
$$\|f\|_2\|\mathbf{1}(x)\|_2 = \|f\|_2 = \sqrt{\int_G \|f(x)\|^2 dx} \leq \sqrt{\int_G \|f\|_\infty^2 dx} = \|f\|_\infty$$

Nas desigualdades usamos, respectivamente, a desigualdade de Cauchy-Schwartz e o fato de que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para todo $x \in G$.

Definimos agora a convolução de funções num grupo.

Definição 2.13. *Sejam F, F' funções em $L^1(G)$. Definimos sua convolução por*

$$F * F'(x) = \int_G F(xy^{-1})F'(y)dy$$

É um fato da teoria de integração de Haar em grupos, que esta operação define em $L^1(G)$ uma estrutura de álgebra associativa (veja, por exemplo [9]). Assim, dada $\varphi \in L^1(G)$ existe um operador associado L_φ de multiplicação à esquerda por φ. Em outras palavras, definimos $L_\varphi(\psi) = \varphi * \psi$. Veremos agora, que quando φ é suficientemente regular, este operador será auto-adjunto e compacto no espaço $L^2(G)$ e portanto podemos usar o teorema espectral para operadores satisfazendo estas hipóteses num espaço de Hilbert para obter uma decomposição neste espaço.

Proposição 2.14. *Seja L_φ o operador definido acima para uma dada função $\varphi \in L^1(G)$. Então $L_\varphi \in B(L^1(G), L^\infty(G))$. Além disso, temos a seguinte estimativa para a norma:*

$$\|L_\varphi(f)\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1.$$

Em particular $\|L_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Prova : Calculamos diretamente

$$\|L_\varphi(f)\|_\infty = sup_{x\in G}|\textstyle\int_G \varphi(xy^{-1})f(y)dy| \ \leq \|\varphi\|_\infty \textstyle\int_G |f(y)|dy = \|\varphi\|_\infty \|f\|_1.$$

O que mostra todas as afirmativas.

Observação 2.15. *Observe que, com o lema (2.10), o operador L_φ é contínuo se considerarmos sua imagem vista em $L^1(G)$, $L^2(G)$ ou $C(G)$.*

Proposição 2.16 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja X um espaço Hausdorff compacto. Seja F um subconjunto fechado de $C(X)$ na topologia induzida pela norma. Então F é relativamente compacto se e só se é equicontínuo e pontualmente limitado.*

Prova : Ver [2]

Proposição 2.17. *As seguintes afirmações a respeito de L_φ são verdadeiras:*

i) Se $\varphi \in C(G)$, então L_φ é um operador compacto em $L^2(G)$.

ii) Se $\varphi(x) = \overline{\varphi(x^{-1})}$ então L_φ é auto-adjunto.

Prova : *i)* Seja (f_n) uma sequência em $\overline{B_{L^2}(0,1)} = B$. Mostraremos que $(L_\varphi(f_n))$ possui uma subsequência convergente. Mostraremos isso usando o teorema de Arzelá-Ascoli (2.16). Para aplicá-lo, devemos mostrar que se $\varphi \in C(G)$, então $L_\varphi(B)$ é equicontínuo, uma vez que já provamos que é pontualmente limitado. Isto nos dará que L_φ é compacto.

Sendo φ contínua em um grupo compacto, pelo lema 2.6, para um dado $\epsilon > 0$ existe uma $N \in \mathcal{N}_G(e)$ tal que $|\phi(x) - \phi(kx)| < \epsilon/2$ $\forall k \in N$, ou, em outras palavras, se $xy^{-1} \in N$ teremos $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon/2$.

Se $f \in B$, $\|f\|_2 \leq 1$, então $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq 1$ por 2.12 e portanto

$$|L_\varphi(f)(kx) - L_\varphi(f)](x)| \leq \int_G |\varphi(kxy^{-1}) - \varphi(xy^{-1})||f(y)|dy \leq \epsilon/2\|f\|_1 < \epsilon$$

Concluímos assim que $(T_\phi(f_n))$ é equicontínuo e por conseguinte L_φ é compacto.

$ii)$ Suponha $\varphi(x) = \overline{\varphi(x^{-1})}$ e que f_1, f_2 são funções de quadrado integrável em G. Então

$$\langle L_\varphi(f_1), f_2\rangle = \int_G \left(\int_G \varphi(xy^{-1}) f_1(y) dy \right) \overline{f_2(x)} dx$$

$$= \int_G \int_G \overline{\varphi(yx^{-1})} f_1(y) \overline{f_2(x)} dy dx = \int_G f_1(y) \overline{\Big(\int_G \varphi(yx^{-1}) f_2(x) dy \Big)} dx$$

$$= \langle f_1, L_\varphi(f_2)\rangle$$

e a proposição está provada.

Definição 2.18. *De maneira geral, se G é um grupo localmente compacto e $\mathcal{F}(G)$ é um espaço de funções em G, existe uma representação chamada representação regular à esquerda de G, dada por $(\pi, \mathcal{F})$, onde $[\pi(x)f](y) = f(x^{-1}y)$. Denotaremos $[\pi(x)f]$ por f_x. No que se segue, tomaremos como padrão o caso em que $\mathcal{F}(G) = L^2(G)$ ou algum subespaço, por exemplo $C(G) \subset L^2(G)$ no caso compacto.*

Proposição 2.19. *Seja $f \in C(G)$ arbitrária. As seguintes condições são equivalentes.*

$i)$ A família de funções $\{f^x; x \in G\}$ gera linearmente um espaço vetorial de dimensão finita.

$ii)$ A família de funções $\{f_x; x \in G\}$ gera linearmente um espaço vetorial de dimensão finita.

$iii)$ A função f é uma função representante.

Prova : Esta demonstração pode ser encontrada encontrada em [7].

Lema 2.20. *Seja $\varphi \in C(G)$, e considere o operador convolução por φ, L_φ associado. Suponha que existe λ um autovalor de L_φ com autoespaço correspondente $V(\lambda) = \ker(L_\varphi - \lambda I)$ onde I denota o operador identidade em $C(G)$.*

Então $V(\lambda)$ é invariante pela representação regular à esquerda e à direita.

Prova : Seja $f \in V(\lambda)$ e $x \in G$. Assim $L_\varphi(f) = \lambda f$ e calculamos

$$[L_\varphi(f_x)](y) = \int_G \varphi(h) f(h^{-1}yx)dh = \left(\int_G \varphi(h) f(h^{-1}y)dh \right)_x = [L_\varphi(f)]_x(y)$$

Mas $L_\varphi(f) = \lambda f$ então a expressão se torna

$$[\lambda f]_x(y) = \lambda f_x(y)$$

Um argumento similar mostra que $V(\lambda)$ também é invariante à direita o que prova nossa afirmação e conclui a demonstração.

Para resumir, provamos que dada uma função $\varphi \in C(G)$ tal que $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x^{-1})}$ então L_φ, o operador associado é compacto, auto-adjunto e portanto, pelo teorema espectral, L_φ possui uma base de auto-vetores cujos auto-espaços correspondentes $V(\lambda)$ são invariante pela representação regular à esquerda (e à direita).

Proposição 2.21. *Para $i = 1, 2$ sejam (π_i, V_i) representações de um grupo compacto G, $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ produtos internos nestes espaços. Fixe elementos $v_i \in V_i$. Então a aplicação $T : V_1 \to V_2$ dada por:*

$$T(w) = \int_G \langle \pi_1(x)w, v_1 \rangle \pi_2(x^{-1}) v_2 dx$$

é um operador de entrelaçamento para as representações π_1 e π_2, i.e., $T \in \hom(\pi_1, \pi_2)$.

Prova : Um cálculo direto mostra que, para $y \in G$,

$$T \circ \pi_1(y)(w) = \int_G \langle \pi_1(xy)w, v_1 \rangle \pi_2(x^{-1}) v_2 \, dx =$$
$$\int_G \langle \pi_1(x)w, v_1 \rangle \pi_2(yx^{-1}) v_2 \, dx = \pi_2(y) \circ T \ (w),$$

onde na segunda igualdade usamos a mudança de variáveis $x \mapsto xy^{-1}$.

Com este último resultado estamos prontos para provar a primeira versão do teorema de Peter-Weyl.

2.3 Peter-Weyl e suas Consequências.

Teorema 2.22. *(Peter-Weyl 1)*

Seja G um grupo compacto e considere o espaço $Rep(G)$ de funções representantes de G. Para todo $\epsilon > 0$ e toda função $f \in L^2(G)$ existe uma $f' \in Rep(G)$ tal que $\|f - f'\|_\infty < \epsilon$. Em outras palavras, o espaço $Rep(G)$ é denso em $L^2(G)$ na topologia dada pela norma do supremo.

Prova : Sendo $C(G)$ denso em $L^2(G)$ na norma, basta provar a densidade de $Rep(G)$ em $C(G)$, e assim procederemos.

Seja então $f \in L^2(G)$. Pelo lema 2.6 existe uma vizinhança de fecho compacto $N \in \mathcal{N}_G(e)$ tal que para todo $k \in N$ temos $\sup_{g \in G} |f(gk) - f(g)| < \epsilon/2$ e pelo teorema 1.1 existe uma função $\varphi \in C(G)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ com $supp(\varphi) \subset \bar{N}$. Multiplicando esta função por uma constante apropriada, podemos ainda supor que $\int_G \varphi(x) dx = 1$.

Como mencionamos antes, L_φ é compacto e auto-adjunto em $L^2(G)$.

Afirmamos, então, que $\|L_\varphi(f) - f\|_\infty < \epsilon/2$. Um cálculo direto mostra que

$$\|L_\varphi(f)(h) - f(h)\| = \left\| \int_G \varphi(x) f(hx^{-1})dx - \int_G \varphi(x) f(h) dx \right\|$$

$$\leq \left\| \int_N \varphi(x)[f(hx^{-1}) - f(h)]dx \right\| \leq \int_N \varphi(x) \left\| f(hx^{-1}) - f(h) \right\| dx < \epsilon/2$$

Pelo teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos em espaços de Hilbert, os espaços $V(\lambda_n)$ geram $L^2(G)$ e são todos de dimensão finita com exceção de $V(0) = \ker L_\varphi$. Pelo lema 2.20 eles também são invariantes pela representação regular à esquerda.

Seja f_{λ_n} a projeção de f em $V(\lambda_n)$, de modo que temos

$$f(x) = \sum_{\lambda_n} f_{\lambda_n}(x) \qquad\qquad \|f\|_2^2 = \sum_{\lambda_n} \|f_{\lambda_n}\|_2^2$$

Como λ_n converge a 0, podemos escolher um $q > 0$ de modo a fazer com que

$$\left\| \sum_{0<|\lambda_n|<q} f_{\lambda_n} \right\|_1 \leq \left\| \sum_{0<|\lambda_n|<q} f_{\lambda_n} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{0<|\lambda_n|<q} \|f_{\lambda_n}\|_2} < \frac{\epsilon}{2\|\varphi\|_\infty}$$

Defina $f'' = \sum_{|\lambda_n|>q} f_{\lambda_n}$ e $f' = L_\varphi(f'')$.

Observe que a soma definindo f'' é na realidade finita, de modo que o espaço $V = \oplus_{|\lambda_n|>q} V(\lambda_n)$ é uma soma finita de espaços de dimensão finita, e portanto, é de dimensão finita. Obviamente, $f'' \in V$ e sendo este espaço invariante, teremos $f' \in V$ também. Pela proposição 2.19 f' é uma função representante de G.

Para terminar simplesmente estimamos

$$\|f - f'\| = \|f - L_\varphi(f) + L_\varphi(f) - L_\varphi(f'')\|$$

$$\leq \|f - L_\varphi(f)\| + \|L_\varphi(f - f'')\| < \epsilon/2 + \|L_\varphi\| \|f - f''\| \leq \epsilon$$

Mencionamos aqui sem demonstração uma segunda forma do teorema de Peter-Weyl equivalente a primeira.

Teorema 2.23. *(Peter-Weyl 2) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, G um grupo compacto e $(\pi, \mathcal{H})$ uma representação unitária contínua de G em $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}$ pode ser decomposto em uma soma de Hilbert de representações irredutíveis de dimensão finita. Em outras palavras, toda representação unitária contínua de um grupo compacto num espaço de Hilbert é completamente redutível.*

Prova : Na verdade, esta segunda forma do teorema de Peter-Weyl é equivalente à primeira. A prova desta afirmação pode ser encontrada em [7].

Como uma aplicação do teorema de Peter-Weyl (em sua primeira versão) provaremos um resultado sobre grupos compactos gerais. Temos primeiramente a seguinte definição

Definição 2.24. *Dizemos que uma família de representações $\{(\pi_i, \mathcal{H}_i); i \in I\}$ separa pontos de G se $\forall x \neq e$ existe uma π_i tal que $\pi_i(x) \neq I_i$ onde $I_i \in B(\mathcal{H}_i)$ é o operador identidade.*

É fácil ver que a representação regular à esquerda de G é fiel, *i.e.*, um homomorfismo injetivo.

Corolário 2.25. *Seja G um grupo compacto. Então para todo ponto $x \in G$ existe uma representação unitária irredutível $\pi : G \to GL(V)$ tal que $\pi(x) \neq I$, onde I denota o operador identidade. Em outras palavras, as representações irredutíveis separam os pontos de G.*

Prova : Tome a representação regular à esquerda (fiel) em $L^2(G)$. Pela segunda parte do teorema de Peter-Weyl, $L^2(G)$ pode ser decomposto em uma soma de Hilbert de subespaços invariantes de dimensão finita $L^2(G) = \bigoplus_{i \in I} V_i$.

Sendo a representação fiel, para $g \neq e$ em G, existe $v \in L^2(G)$ tal que $gv \neq v$. Decompomos v na soma $v = \sum_{i \in I} v_i$ e chegamos a conclusão de que existe $i \in I$ tal que $gv_i \neq v_i$. Além disso, podemos restringir o produto interno de $L^2(G)$ a V_i e obter, pelo truque de Weyl (lema 2.7.), uma representação unitária irredutível $\tilde{\pi}$ de modo que $\tilde{\pi}(g) \neq I$.

Como uma representação unitária de um grupo compacto num espaço de dimensão finita V leva o grupo G no subgrupo $U(V)$ ou em $O(V)$, podemos dizer então que para todo $x \neq e$ em G existe uma representação π_x de G em V_x tal que $\pi_x(G)$ é um subgrupo de $U(V_x)$ (Ou $O(v_x)$).

Podemos, desta maneira enunciar então:

Corolário 2.26. *Seja G um grupo compacto. Então G é isomorfo a um subgrupo do um produto $\Pi_{i \in I} O(V_i)$ de grupos ortogonais e um produto $\Pi_{j \in J} U(V_j)$ de grupos unitários.*

Para esclarecer esta afirmação, consideramos por exemplo o grupo

$$G = \prod_{i \ ímpar} O(i) \ \times \ \prod_{j \ par} U(j)$$

que também pode ser descrito da seguinte maneira:

$$G = O(1) \times U(2) \times O(3) \times U(4) \times ...$$

Prova : Pelo corolário 2.25 existe, para cada $x \neq e$ em G uma representação unitária de dimensão finita π_x tal que $\pi_x(x) \neq I_{V_x}$ e $\pi_x(G) \subset O(V_x)$ ou $U(V_x)$. Tome, então,

$$\pi = \bigoplus_{e \neq x \in G} \pi_x. \qquad\qquad V = \bigoplus_{e \neq x \in G} V_x$$

Claramente para $e \neq x \in G$ temos $\pi(x) \neq I_V$ pois $\pi_x(x) \neq I_{V_x}$ e deste modo, π é um isomorfismo entre G e $\pi(G)$. Além disso, denominando $G_c = \{x \in G;\ V_x \text{ é complexo}\}$ e $G_r\{x \in G/\ V_x \text{ é real}\}$

$$\pi(G) \subset \prod_{x \in G_c} U(V_x) \times \prod_{x \in G_r} O(V_x).$$

2.4 Decomposição da Representação Regular de SU(2)

Estudaremos aqui as representações irredutíveis do grupo compacto $SU(2)$ das matrizes 2×2 unitárias de determinante 1 em $\mathbb{C}$. Este grupo de matrizes é um grupo de Lie compacto cujas matrizes têm a forma:

$$g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

onde $|a|^2 + |b|^2 = 1$, e ao qual chamaremos, por conveniência, de $[a, b]$. Desejamos decompor a representação regular (em $L^2(SU(2))$ deste grupo compacto em representações irredutíveis de dimensão finita de acordo com o teorema de Peter-Weyl. Para fazer isto vamos utilizar o resultado (detalhes podem ser achados em [13]) que classifica as representações unitárias irredutíveis de $SU(2)$.

Temos a representação unidimensional claramente irredutível, $\pi_0 : SU(2) \to \mathbb{C}^*$, $\pi_0(g) = 1$ para todo $g \in SU(2)$. Para obter as outras representações considere V_n como sendo o conjunto dos polinômios complexos em duas variáveis homogêneos de grau n, *i.e.*,

$$V_n = \{P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]; \partial P = n; \text{ P não tem monômios de grau menor que } n\ \}.$$

Este conjunto possui a estrutura de espaço vetorial induzida do espaço dos polinômios em duas variáveis e tem como base o conjunto

$$\{f_k(z,w) = z^k w^{n-k}; k = 0, ..., n\} = \{z^0 w^n, z^1 w^{n-1}, ..., z^n w^0\}.$$

Note que $\dim V_n = n+1$. Fazemos então $SU(2)$ agir linearmente em V_n colocando $g \cdot f(z,w) = f(g^{-1}(z,w))$, onde $g^{-1}(z,w)$ denota o valor do operador g no vetor (z,w) de $\mathbb{C}^2$. Calculamos seu valor nos polinômios da base:

$$\pi_n([a,b])f_k(z,w) = f_k([\bar{a}, -b] \cdot (z,w))$$

$$= f_k(\bar{a}z + \bar{b}w, -bz + aw) = (\bar{a}z + \bar{b}w)^k(-bz + aw)^{n-k}$$

Teorema 2.27. *As representações unitárias* $(\pi_0, \mathbb{C})$ *e* (π_n, V_n) *de* $SU(2)$ *são todas irredutíveis e são as únicas representações irredutíveis deste grupo a menos de isomorfismo.*

Mostraremos agora que todas as representações unitárias irredutíveis de um grupo compacto são subrepresentações da representação regular e calcularemos sua multiplicidade e obteremos assim a decomposição desejada.

Definição 2.28. *Seja* G *um grupo compacto. Fixemos uma representação unitária de dimensão finita* (π, E)*, tomemos* $Rep_E(G)$ *o subespaço das funções representantes de* G *correspondentes à representação* E*, i.e., funções, o espaço gerado por funções da forma* $f_u^v(x) = u(\pi(x)v)$ *onde* $v \in E$*,* $u \in E'$*.*

Defina, para $v \in E$ o funcional $ev_v \in E''$ por: $ev_v(u) = u(v)$ para todo $u \in E'$. Para um espaço de dimensão finita, a aplicação $v \mapsto ev_v$ é um isomorfismo entre E e E''.

Definição 2.29. *Denote por* $\bar{E}$ *o espaço conjugado de* E*. Dada uma representação* (π, E) *de* G*, munimos os seguintes espaços com ações lineares de* G*:*

-$\bar{E}$ *cuja ação é dada por* $\bar{\pi}(g)v = \pi_E(g)^{-1}v$

-E' *cuja ação é dada por* $[\pi^*(g)u](v) = u(g^{-1}v) = [\pi_{E''}(g)ev_v](u)$

-$E' \otimes E$ *cuja ação é dada por* $\pi_{E'\otimes E}(g)(u \otimes v) = u \otimes \pi_E(g)v$.

-$Rep_E(G)$ *cuja ação é dada por* $g(f_u^v) = f_u^{\pi_E(g)v}$.

O seguinte lema relaciona essas representações. Sua demonstração segue de um cálculo direto e indicaremos, assim, apenas os operadores de entrelaçamento invertíveis que realizam a equivalência. Seja $n = \dim E$.

Lema 2.30. $i)$ *As representações* $\pi_E^n := \oplus_1^n \pi_E$*, e* $\pi_{E'\otimes E}$ *são equivalentes.*

$ii)$ *As representações* $\bar{\pi}$ *e* π^* *são equivalentes.*

Prova : Tome uma base $\{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ de E e faça $\{u_i, 1 \leq i \leq n\}$ sua base dual .

O operador de $T_1 : E^{dim_E} \to E' \otimes E$ dado por $T_1(v_1, ..., v_n) = \sum_1^n u_i \otimes v_i$ é uma equivalência entre as representações.

O operador $T_2 : E' \to \bar{E}$ dado por $T_2(u_i) = v_i$ é uma equivalência.

Definição 2.31. *Um pareamento dual entre dois espaços vetoriais* V*,* W *é uma aplicação sesquilinear* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times W \to \mathbb{C}$*. Por exemplo, se* V *é um espaço com produto interno, a aplicação* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ *é um pareamento dual* V*. Um pareamento é chamado não-degenerado quando para todo* $0 \neq v \in V$ *existe um* $w \in W$ *tal que* $\langle v, w \rangle \neq 0$ *e vice-versa.*

Lema 2.32. *Se* V *e* W *são espaços de dimensão finita e* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um pareamento dual não degenerado entre* V *e* W*, então* V *é isomorfo a* W'*.*

Consequentemente V' será isomorfo a W. Em particular $\dim V = \dim W$.

Prova : Sejam e bases de V e W respectivamente, onde I e J são finitos.

Suponha $\dim W > \dim V$, *i.e.* e seja $\{w_j;\ j \in J\}$ uma base de W. Considere $w_1 \in W$. Como o pareamento é não-degenerado, temos que existe um $v_1 \in V$ tal que $\langle v_1, w_1\rangle \neq 0$. Podemos completar v_1 numa base $\{v_i;\ i \in I\}$ de V. Afirmamos que se $i \neq 1$ $\langle v_i, w_1\rangle = 0$.

Caso não fosse, teríamos um $v_i \neq v_1$ e um $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\langle v_1, w_1\rangle = \lambda\langle v_i, w_1\rangle$ e portanto $0 = \langle v_i - \lambda v_1, w_1\rangle$ contrariando o fato de que $\langle , \rangle$ é não degenerado. Similarmente, para cada $j \in J$ temos que existe um $v_j \in V$ tal que $\langle v_j, w_j\rangle \neq 0$ e que qualquer outro vetor v de V satisfazendo $\langle v, w_j\rangle \neq 0$ será um múltiplo de v_j. Obtemos assim uma base $\{v_j; j\ J\}$ de V e considerando sua base dual $\{u_j\}$ de V' temos que a aplicação que leva w_j em u_j é um isomorfismo.

Proposição 2.33. *Seja (π, H) uma representação unitária de um grupo compacto G. Se V e W são subespaços invariantes de H tais que as subrepresentações associadas não são equivalentes, então $V \perp W$, i.e. $\langle v, w\rangle = 0\ \ \forall v \in V$, $w \in W$.*

Prova : Podemos supor, sem perda de generalidade, que V é irredutível. Seja U o subespaço de V definido por $U = \{v \in V; \langle v, w\rangle = 0\ \forall w \in W\}$. Se $g \in G$, $v \in V$ e $w \in W$ temos $0 = \langle v, g^{-1}w\rangle = \langle gv, w\rangle$ de modo que U é invariante. Se $U \neq V$ teremos $U = \{0\}$. Defina então

$$T : \bar{V} \to W', \text{ dado por } Tv(w) = \langle w, v\rangle,$$

onde $\bar{V}$ denota o espaço conjugado de V. Como $U = \{0\}$, o operador define um pareamento dual entre $\bar{V}$ e W, e portanto, um isomorfismo linear entre $\bar{V}$ e W'. Calculando $T\pi_V(g)v(w)\langle w, \pi_V(g)v\rangle = \langle \pi_W(g^{-1})w, v\rangle = \pi_{W'}(g)Tv(w)$, onde π_V e π_W são as restrições de π aos respectivos espaços concluimos que é um operador de entrelaçamento bijetivo, e portanto $V \equiv \bar{V}' \equiv W$.

Teorema 2.34. *Seja G um grupo compacto e $L : G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ sua representação regular à esquerda dada por $L(g)f(x) = f(g^{-1}x)$. Então*

$$L^2(G) = \bigoplus_E E^{dimE} \text{ e}$$

$$L = \bigoplus_E \pi_E^{dimE}$$

onde E varia nas classes de equivalência unitária de representações irredutíveis (de dimensão finita) de G e a soma direta é tomada no sentido de soma de Hilbert.

Prova : Seja (π_E, E) uma representação irredutível de G, e N_E sua dimensão. Dividiremos a prova em duas partes. Na primeira, provaremos que a representação $(\pi_E, Rep_E(G))$ é equivalente à representação $((\pi_E)^{N_e}, E^{N_E})$. Na segunda provaremos que $Rep(G) = \bigoplus_E Rep_E(G)$ e o resultado geral seguirá pelo teorema de Peter-Weyl.

Primeiro, temos o operador linear $\Phi : E' \otimes E \to Rep_E(G)$ dado por $\Phi(u \otimes v)(x) = u(\pi_E(x)v)$ é sobrejetivo por definição de $Rep_E(G)$. Para provar que é injetivo supomos $\Phi(u \otimes v)(x) = u(\pi_E(x)v) = 0 \quad \forall x \in G$. Suponha $v \neq 0$. Sendo E irredutível temos que o conjunto $\pi(G)v$ gera E e deste modo, obtemos que para qualquer $w \in E$, $u(w) = 0$ e $u = 0$ e portanto $u \otimes v = 0$. Para provar que é um operador de entrelaçamento calculamos:

$$\pi_{Rep_E(G)}(g)\Phi(u \otimes v)(x) = u(\pi_E(x)\pi_E(g)v) =$$

$$\Phi(u \otimes \pi_E(g)v)(x) = \Phi(\pi_{E' \otimes E}(g)(u \otimes v))(x)$$

Mas como já mostramos $(2.30, i))$ $\pi_{E' \otimes E}$ é equivalente a $\pi_E^{N_E}$.

Para a segunda parte vemos que dada uma $f \in Rep(G)$ existem V de dimensão finita, $v \in V$, $u \in V'$ tais que $f(x) = u(\pi(x)v)$. Mas por 2.8 temos a decomposição $V = \oplus_1^n E_i$ onde cada E_i é irredutível. Então podemos decompor $v = \sum_1^n v_i$ e analogamente $u = \sum_1^n u_i$. Lembrando que $u_j(xv_i) = 0$ para $i \neq j$ conseguimos uma decomposição $f = \sum f_i$, onde $f_i(x) = u_i(\pi(x)v_i)$. Claramente $f_i \in E_i$ e portanto temos a decomposição $Rep(G) = \sum_E Rep_E(G)$. Mas por 2.33, $Rep_E(G) \perp Rep_F(G)$ se $E \ncong F$. Assim concluímos que $Rep(G) = \oplus_E Rep_E(G)$ e pelo teorema de Peter-Weyl, temos que o completamento desta soma é $L^2(G)$ o que conclui a demonstração do teorema.

Desta maneira provamos o:

Teorema 2.35. *A representação regular L de $SU(2)$ é decomposta em*

$$L = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n^n.$$

Capítulo 3: Grupos Localmente Compactos

Neste capítulo construiremos a representação induzida de um grupo localmente compacto G a partir de um subgrupo fechado H e estudaremos um exemplo de tal construção com o grupo $SL_2(\mathbb{C})$.

Na primeira seção, realizaremos a construção do espaço de representação a partir de espaços de funções no grupo usando o aparato desenvolvido no primeiro capítulo e terminamos definindo a ação linear do grupo neste espaço com forma semelhante à representação regular à esquerda.

Na segunda seção daremos construções que são equivalentes à obtida na sessão anterior, porém melhor adaptadas aos cálculos concretos. Estas realizações serão usadas no cálculo do exemplo do grupo $SL_2(\mathbb{C})$. Terminamos a seção com algumas propriedades do processo de indução de representações.

A terceira e última seção será dedicada à construção da série principal de $SL_2(\mathbb{C})$, obtida através da indução de representações do grupo das matrizes unitárias triangulares superiores.

3.1 Construção da Representação Induzida

Lembrando que chamamos a um *homomorfismo* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ uma representação unitária de G se π é um homomorfismo contínuo de G em $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ na topologia forte de operadores. Lembramos que pelo teorema 2.3, um homomorfismo entre um grupo localmente compacto e o grupo de operadores unitários de um espaço de Hilbert é uma representação se e só se é contínuo na topologia fraca de operadores.

De suma importância na construção do espaço de representação da representação induzida é o espaço homogêneo G/H. Fixemos então a notação $q : G \to G/H$ para a projeção natural, $q(x) = xH$. Associada às funções modulares de G e H, denote por $\delta_H^G(h)$ a função dada por $\delta_H^G(h) = \sqrt{\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}}$ $\forall h \in H$, que, quando não houver possibilidade de confusão, será denotada simplesmente por $\delta(h)$. Observe que δ é um homomorfismo positivo contínuo, pois ambas funções modulares Δ_G e Δ_H o são.

Voltamos agora à configuração inicial tratada no primeiro capítulo deste trabalho ou seja, seja G um grupo localmente compacto e H um subgrupo fechado de G e fixemos uma medida de Haar $\mu_G = dx$ invariante à esquerda em G e $\mu_H = dh$ em H. Suporemos dada ainda uma representação unitária $(\pi, \mathcal{H}(\pi))$ de H no espaço de Hilbert $\mathcal{H}(\pi)$. Fixe também uma rô-função estritamente positiva para o par (G, H) e uma seção mensurável $\gamma : G/H \to G$, *i.e.* uma aplicação mensurável γ tal que $q \circ \gamma(xH) = xH$. A construção de tal função pode ser achada em [10], onde ela é denominada *seção de Borel*.

Afim de construir uma representação de G a partir de π precisaremos de um espaço de Hilbert e de um homomorfismo adequados. Comecemos pelo espaço de Hilbert.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{F}$ o espaço vetorial de funções $\xi : G \to \mathcal{H}(\pi)$ com operações pontuais que satisfazem*

i) ξ é contínua quando munimos $\mathcal{H}(\pi)$ com a topologia da norma.

ii) $\xi(xh) = \delta(h)\pi(h^{-1})\xi(x)$ $\forall x \in G$, $\forall h \in H$

iii) A imagem $q(supp\ \xi)$ é compacta em G/H

Observação 3.2. *A segunda propriedade será chamada de covariância e com relação à última diremos que ξ tem suporte compacto módulo H.*

Sobre este espaço temos:

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{F}$ o espaço vetorial definido acima. Então seus elementos são da forma ξ_f, onde $f \in C_c(G)$ e*

$$\xi_f(x) = \int_H \delta(h^{-1})\pi(h)f(xh)dh.$$

Prova : Precisamos então provar que ξ_f está em $\mathcal{F}$, $\forall f \in C_c(G)$ e que todo elemento de $\mathcal{F}$ é desta forma.

Afirmamos que $q(supp(\xi_f)) \subset q(supp(f))$ para todo $f \in C_c(G)$. Se $xH \notin q(supp(f))$, então para todo $h \in H$, $xh \notin supp(f)$ donde $f(xh) = 0$ $\forall h \in H$, e portanto $\int_H \delta(h)\pi(h)f(xh)dh = 0$. Como $supp(f)$ é compacto, temos que $q(supp(f))$ é compacto em G/H, o que mostra que ξ_f tem suporte compacto módulo H

A propriedade de covariância segue através de uma verificação direta

$$\xi_f(xh) = \int_H \delta(k^{-1})\pi(k)f(xhk)dk$$
$$= \delta(h)\int_H \delta(k)\pi(h^{-1}k)f(xk)dk = \delta(h)\pi(h^{-1})\xi_f(x).$$

Afim de mostrar a continuidade de ξ_f fixamos $\epsilon > 0$ e uma vizinhança compacta V de e em G. Para este ϵ existe uma $U \in \mathcal{N}_G(e)$ compacta tal que $U^{-1} = U$, e se $ab^{-1} \in U$ temos $|f(a) - f(b)| < \epsilon$.

Defina $M = V supp(f)$, e $K = (M^{-1}M) \cap H$. Sendo o produto de conjuntos compactos , M é compacto em G e portanto K também o será, tanto em H quanto em G. Isto significa que a função contínua Δ_H atinge um máximo em K^{-1}, e por isso podemos definir $d = max\{\Delta_H(x); x^{-1} \in K\}$.

Subsequentemente consideramos dois casos para $x \in G$ arbitrário: $x \notin MH$, ou $x \in MH$. No primeiro caso, para todo $k \in H$, $xk \notin V supp(f)$

o que significa que $xk \notin supp(f)$ e $f(xk) = 0$ para todo $k \in H$. Se $y \in Ux$ afirmamos que $yk \notin supp(f)$. De fato, se $yk \in supp(f)$ teríamos $y \in supp(f)k^{-1} \cap Ux$ o que nos dá que y é da forma $y = ak^{-1} = ux$, onde $a \in supp(f)$ e $u \in U$. Mas então $x = u^{-1}ak^{-1} \in V supp(f)H = MH$ o que é uma contradição. Assim obtemos $f(xk) = f(yk) = 0$ para todo $k \in H$ donde $\xi_f(x) = \xi_f(y) = 0$.

Para o segundo caso, suponha $y \in Ux$. Como $x \in MH$, existe $h \in H$ tal que $xh \in M$. Seja $k \notin K$. Afirmamos então que ambos yhk e xhk não pertencem a $supp(f)$.

Se $yhk \in supp(f)$, então $xy^{-1}yhk \in V supp(f) = M$, deste modo $k \in h^{-1}x^{-1}M \subset M^{-1}M$ e portanto $k \in K$. Se $xhk \in supp(f)$ então $yhk = yx^{-1}xhk \in V supp(f)$ e um argumento similar mostra que $k \in K$. Mostramos então que se $k \notin K$, então $f(xhk) = f(yhk) = 0$. Assim podemos estimar

$$|\xi_f(x) - \xi_f(y)| = \left| \int_H \delta(h^{-1})\pi(h)[f(xh) - f(yh)]dh \right| \leq$$

$$\int_H \Delta_H(k^{-1})|f(xk) - f(yk)| \, dk \leq$$

$$\int_K \Delta_H(k^{-1})\Delta_H(h^{-1})|f(xhk) - f(yhk)| \, dk <$$

$$\Delta_H(h^{-1}) \cdot d \cdot \mu(K) \cdot \epsilon,$$

onde $\mu_H(K)$ é a medida de Haar de K em H e isto mostra que ξ_f é contínua.

Devemos agora mostrar que um elemento geral ξ de $\mathcal{F}$ é da forma ξ_f para alguma $f \in C_c(G)$. Seja então $\xi \in \mathcal{F}$. Temos por hipótese que $q(supp(\xi))$ é compacto, então tomamos uma função $\phi \in C_c(G/H)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$

e $\phi(xH) = 1$ para todo $xH \in q(supp(\xi))$ de acordo com a Teorema 1.1. Pela proposição 1.8 existe $\psi : G \to \mathbb{C}$ contínua tal que $\psi^H = \phi$. Defina $g = \psi\xi \in C_c(G, \mathcal{H}(\pi))$ e com esta função calculamos

$$\xi_g(x) = \int_H \Delta_H(h^{-1})\pi(h)\psi(xh)\xi(xh)\ dh = \int_H \psi(xh)\xi(x)\ dh = \xi(x)$$

Aqui usamos a propriedade *ii*) de ξ e $\int_H \psi(xh)dh = 1$ para todo $x \in supp(\xi)$.

Agora precisamos de um produto interno neste espaço $\mathcal{F}$.

Lema 3.4. *Seja $\xi \in \mathcal{F}$. Então $x \mapsto \|\xi(x)\|^2$ é uma H-rô função.*

Prova : Note que a continuidade desta função segue da continuidade de ξ. Além disso, seu suporte coincide com o de ξ, como podemos ver pela expressão. Calculamos $\|\xi(xh)\|^2 = \|\delta(h)\pi(h^{-1})\xi(x)\|^2 = \delta(x)^2\|\xi(x)\|^2$, o que mostra o lema.

Em vista do lema 1.14, existe uma medida regular de Borel μ_ξ em G/H associada a esta rô-função. Em outras palavras, existe um funcional linear positivo λ_ξ in $C_c(G/H)$ tal que

$$\lambda_\xi(\phi^H) = \int_G \phi(x)\|\xi(x)\|^2\ dx = \int_G \phi^H(xH)\ d\mu_\xi(xH)$$

Sobre esta medida podemos mostrar que

Lema 3.5. *μ_ξ é uma medida finita, isto é $\mu_\xi(G/H) < \infty$.*

Prova : Provaremos que $supp(\mu_\xi) = q(supp(\xi))$, o que mostrará a tese.

Suponha que $\phi \in C_c^+(G/H)$ é tal que $\phi(xH) = 0$ para todo $xH \notin q(supp(\xi))$. Então existe $\psi \in C_c^+(G)$ tal que $\psi^H = \phi$. Se $x \in supp(\xi)$, então $\psi(x) \neq 0 \implies \psi(x) > 0 \implies \psi(y) > 0$ para todo y em uma vizinhança V de x. Portanto $\phi(xH) > 0$, o que é uma contradição com $xH \in q(supp(\xi))$. Concluímos que para $x \in supp(\xi)$, $\psi(x) = 0$. Então, por definição de $d\mu_\xi$, temos que:

$$\int_{G/H} \phi(xH)\ d\mu_\xi(xH) = \int_G \psi(x)\|\xi(x)\|^2\ dx = 0.$$

Como $d\mu_\xi$ é regular, temos que $\mu_\xi(G/H) = \mu_\xi(q(supp(\xi)) < \infty$ uma vez que $q(supp(\xi))$ é compacto.

De posse de μ_ξ definiremos agora uma nova medida em G. Para ξ, η em $\mathcal{F}$ definimos $\mu_{\xi,\eta} = \frac{1}{4}(\mu_{\xi+\eta} - \mu_{\xi-\eta} + i\mu_{\xi+i\eta} - i\mu_{\xi-i\eta})$. Note a semelhança desta expressão com a identidade da polarização para um produto interno e sua norma associada.

Da definição segue, através identidade da polarização convencional que, para $\phi \in C_c(G)$, $x \in G$,

$$\int_G \phi(x)\langle\xi(x), \eta(x)\rangle\ dx = \int_{G/H} \phi^H(w)\ d\mu_{\xi,\eta}(w),$$

Lema 3.6. *A aplicação $(\xi, \eta) \mapsto \mu_{\xi,\eta}(G/H)$ é um produto interno em $\mathcal{F}$.*

Prova : A aplicação $(\xi, \eta) \mapsto \mu_{\xi,\eta}(G/H)$ é sesquilinear pois a integral de Haar é linear e o produto interno em $\mathcal{H}$ é sesquilinear. A positividade segue do fato de $\mu_{\xi,\xi} = \mu_\xi$, e que esta medida é positiva e finita.

Para provar que esta aplicação é não-degenerada suponha que $\xi(x) \neq 0$, para algum $x \in G$. Então, por continuidade a aplicação $y \mapsto \|\xi(y)\|$ é positivo em alguma vizinhança $Ux \in \mathcal{N}_G(x)$. Portanto $q(supp(\xi))$ tem medida positiva e concluimos que $\langle\xi, \xi\rangle = \mu_\xi(G/H) > 0$.

Temos como corolário a seguinte caracterização deste produto interno:

Corolário 3.7. *Sejam ξ, η elementos de $\mathcal{F}$, e $\psi \in C_c(G)$ tais que $\psi^H(yH) = 1$ para todo $yH \in q(supp(\xi)) \bigcup q(supp(\eta))$. Então seu produto interno é dado por:*

$$\int_G \psi(x)\langle \xi(x), \eta(x) \rangle \; dx \, = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Considere a seguinte construção

Lema 3.8. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial e $\langle , \rangle$ uma forma sesquilinear conjugada-simétrica em $\mathcal{H}$ (não necessariamente não-degenerada). Então existe um espaço de Hilbert associado, também denotado por $\mathcal{H}$.*

Prova: De fato, seja $\mathcal{N}$ o espaço nulo de $\mathcal{H}$, ou seja, $\mathcal{N} = \{\xi \in \mathcal{H};\ \langle \xi, \eta \rangle = 0$ para todo $\eta \in \mathcal{H}\}$. Podemos mostrar, com a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que este espaço nulo $\mathcal{N}$ coincide com o espaço dos ξ tais que $\|\xi\| = 0$ onde $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Este subespaço é fechado e podemos tomar o espaço vetorial topológico quociente $\mathcal{H}/\mathcal{N}$.

A forma sesquilinear $\langle , \rangle$ induz neste quociente um produto interno também denominado $\langle , \rangle$. Tomamos a seguir o completamento deste espaço com relação à norma induzida e estendemos o produto interno para o completamento, obtendo finalmente um espaço de Hilbert. Este espaço de Hilbert associado será denominado completamento de Hilbert do espaço $\mathcal{H}$.

O espaço $\mathcal{F}$ pode não ser, e geralmente não é, completo. Para sanar esta dificuldade tomamos então o completamento de Hilbert deste espaço e o denotaremos a partir de agora, por $\mathcal{H}_H^G$ ou até, depois de construirmos a representação induzida, $\mathcal{H}(ind_H^G \pi)$.

Para definir uma ação no espaço $\mathcal{H}_H^G$, utilizamos a ação da representação regular de G em $\mathcal{F}$.

Proposição 3.9. *Existe uma representação unitária* $ind_H^G\pi$ *de* G *em* $\mathcal{H}_H^G$ *dada em* $\mathcal{F}$ *por* $[ind_H^G\pi(y)\xi](x) = \xi(y^{-1}x)$.

Prova : Primeiro, fixemos $\xi \in \mathcal{F}$. Defina, para $y \in G$ o operador L_y dado por $L_y(\xi)(x) = \xi(y^{-1}x)$. Para mostrar que $L_y(\xi) \in \mathcal{F}$ calculamos

$$L_y\xi(xh) = \xi(y^{-1}xh) = \delta(h)\pi(h^{-1})\xi(y^{-1}x) = \delta(h)\pi(h^{-1})L_y\xi(x),$$

o que mostra a propriedade $ii)$. Notamos também que $supp(L_y(\xi)) = y \cdot supp(\xi)$, e concluímos que $q(supp(L_y(\xi)))$ é compacto. Além disso, sendo a função ξ contínua, temos que $L_y\xi = \xi \circ m_{y^{-1}}$ é contínua, onde denominamos $m_{y^{-1}}$ a multiplicação a esquerda por y^{-1}.

Para $\xi \in \mathcal{F}$, seja $\psi \in C_c(G)$ tal que $0 \leq \psi^H \leq 1$ e ψ^H assume o valor 1 em uma vizinha de $q(supp(\xi))$

$$\|L_y\xi\|^2 = \int_G L_y(\psi^H)(x)\|L_y\xi(x)\|^2 dx =$$

$$\int_G \psi(y^{-1}x)\|\xi(y^{-1}x)\|^2 dx$$

$$= \int_G \psi(x)\|\xi(x)\|^2 \, dx = \|\xi\|^2$$

Segue dai que para todo $y \in G$ o operador L_y é uma isometria e portanto estendível ao completamento de Hilbert $\mathcal{H}_H^G$. Denotamos essa extensão também por L_y.

Sejam L_y, L_x dois operadores em $\mathcal{H}_H^G$ estendidos como discutimos anteriormente. Sabemos que, para toda $\xi \in \mathcal{F}$, valem as seguintes igualdades:

$i)L_xL_y\xi = L_{xy}\xi$, ou seja $L_xL_y = L_{xy}$.

$ii)L_e\xi = \xi$, ou seja, $L_e = I$, onde I denota o operador identidade $\mathcal{F}$,

$iii)$ $L_x^*\xi = L_{x^{-1}}\xi = L_x^{-1}\xi$, ou seja, $L_x^* = L_{x^{-1}} = L_x^{-1}$.

Sendo cada operador L_y uniformemente contínuo, temos que as mesmas igualdades valem em $\mathcal{H}_H^G$. Isto é, $L : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_H^G)$ é um homomorfismo de grupos. A terceira propriedade vale pela invariância à esquerda da medida de Haar. O próximo lema mostra que esta aplicação é contínua na topologia fraca de operadores, de modo a obtermos uma representação unitária de G.

Lema 3.10. *O homomorfismo L é fracamente contínuo.*

Prova : Sejam ξ, $\eta \in \mathcal{F}$, e $\tau_\eta^\xi : G \to \mathbb{C}$ dada por $\tau_\eta^\xi(x) = \langle L_y\xi, \eta\rangle$. Basta mostrar que τ é contínua em G para quaisquer ξ, $\eta \in \mathcal{H}(ind\pi_H^G)$, mas para isto, basta mostrar que τ é contínua em $e \in G$ para quaisquer ξ, $\eta \in \mathcal{H}(ind\pi_H^G)$. De fato, se $x \in G$ e $(x_j)_{j\in J}$ é uma rede tendendo a $x \in G$ temos que $(x_j x^{-1})$ converge a e. Pela propriedade de operadores unitários

$$\tau_\eta^\xi(x) = \langle \xi, L_{x^{-1}}\eta\rangle = \tau_{L_x\eta}^\xi(x_j x^{-1}).$$

Uma vez que mostraremos a convergência de $\tau_\eta^\xi(x_i)$ com ξ e η arbitrários em $\mathcal{F}$, substituindo η por $L_x\eta$, obtemos que $\tau_\eta^\xi(x_j)$ tende a $\tau_\eta^\xi(x)$ se e só se $\tau_\eta^\xi(x x_j^{-1})$ tende a $\tau_\eta^\xi(e)$.

Sejam então ξ, η, $\in \mathcal{F}$. Em vista de mostrar então a continuidade de τ_ξ^η em e sejam $\epsilon > 0$, e $V \in \mathcal{N}_G(e)$ uma vizinhança com fecho compacto, e ψ^H uma função contínua que tem valor 1 em $q(\bar{V} \cdot (supp(\xi) \bigcup supp(\eta)))$. Pelo corolário (3.7), se $x \in V$,

$$\langle L_x\xi, \eta\rangle = \int_G \psi(y)\ \langle \xi(x^{-1}y), \eta(y)\rangle\ dy$$

Defina agora $K = supp(\psi)$, e $M = sup\{|\psi(y)| \|\eta(y)\|;\ y \in K\}$. Para o $\epsilon > 0$ dado, tome $U \in \mathcal{N}_G(e)$ tal que $U \subset V$ e $x \in U \implies \|\xi(x^{-1}y) - \xi(y)\| < \epsilon\ \forall y \in K$. Calculamos então para $x \in U$

$$
\begin{aligned}
|\langle L_x\xi, \eta\rangle - \langle \xi, \eta\rangle| &= |\int_G \psi(y)\ \langle \xi(x^{-1}y) - \xi(y), \eta(y)\rangle\ dy| \\
&\leq \int_K |\psi(y)| \|\eta(y)\| \|\xi(x^{-1}y) - \xi(y)\|\ dy \\
&< \epsilon M \mu(K).
\end{aligned}
$$

Se fizermos $\epsilon \to 0$ obtemos o resultado desejado. Como $\mathcal{F}$ é denso no seu completamento de Hilbert, temos então que τ_ξ^η é contínua para todos ξ, η.

Observação 3.11. *(e definição)*

i) A ação linear $ind_H^G\pi$ *de* G *em* $\mathcal{H}_H^G$ *é dada pela translação à esquerda por* x^{-1} *apenas quando* $\xi \in \mathcal{F}$. *Este não é necessariamente o caso quando* $\xi \in \mathcal{H}_H^G$ *é arbitrário.*

ii) Chamaremos a esta representação unitária L *de* G, $ind_H^G\pi$, *e diremos que* $ind_H^G\pi$ *foi obtida a partir de* π *pelo processo de indução de representações.*

3.2 Construções Equivalentes

Nosso trabalho de construir a representação está essencialmente concluído. Entretanto a construção da primeira seção tem um caráter mais teórico e não satisfaz a necessidade de computações práticas. Por este motivo realizaremos agora, com menor atenção a detalhes, duas construções de representações induzidas de π equivalentes à $ind_H^G\pi$ construída anteriormente, ambas denominadas U^π.

Lembremos que no primeiro capítulo construímos uma rô-função contínua estritamente positiva para o par (G, H), *i.e.* uma função $\rho : G \to \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in G$, $h \in H$ satisfazendo:

$$\rho(xh) = \tfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(x) = \delta(h)^2\rho(x),\ \forall x \in G,\ \forall h \in H.$$

e a esta função corresponde uma medida μ em G/H tal que para toda $\phi \in C_c(G)$

$$\int_{G/H} \phi^H(xH)\ d\mu(xH) = \int_G \phi(x)\rho(x)\ dx.$$

Considere agora o espaço $\mathcal{F}^H = \{\eta : G \to \mathcal{H}$ cujos elementos satisfazem $i)$ e $iii)$ como as de $\mathcal{F}$, porém com a propriedade $ii)$ substituída por

$ii')$ $\eta(xh) = \pi(h^{-1})\eta(x)$

Com o objetivo de se obter uma representação equivalente à primeira, transferimos o produto interno de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^H$ através de um isomorfismo.

Lema 3.12. *A aplicação $M_\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^H$, onde $M_\rho(\eta) = \sqrt{\rho}\ \eta$ é um isomorfismo.*

Prova : Para ver que $M_\rho(\eta)$ está de fato em $\mathcal{F}^H$, seja $\eta \in \mathcal{F}$. Precisamos apenas verificar $ii')$. Assim, usando o fato de que ρ é uma rô-função:

$$M_\rho\eta(xh) = \sqrt{\rho}\ \eta(xh) =$$

$$\sqrt{\rho}(xh)\eta(xh) =$$

$$\delta(h^{-1})\delta(h)\pi(h^{-1})\sqrt{\rho(x)}\eta(x) = \pi(h^{-1})M_\rho\eta(xh)$$

A linearidade da aplicação é evidente da expressão, e sua inversa é dada por $N_\rho : \mathcal{F}^H \to \mathcal{F}$, $N_\rho(\eta) = \sqrt{\rho}^{-1} \cdot \eta$. Esta definição é válida, pois ρ é estritamente positiva.

Se η, ξ estão em $\mathcal{F}^H$ observamos que

$$\langle \xi(xh), \eta(xh) \rangle = \langle \pi(h^{-1})\xi(x), \pi(h^{-1})\eta(x) \rangle = \langle \xi(x), \eta(x) \rangle,$$

o que nos diz que $\langle \xi(x), \eta(x) \rangle$ é constante em cada classe de equivalência, $xH \in G/H$. Por isso podemos definir para η, $\xi \in \mathcal{F}^H$ o produto interno pela expressão

$$\langle \xi, \eta \rangle_\mu = \int_{G/H} \langle \xi(x), \eta(x) \rangle d\mu(xH)$$

Lembre-se que ambos ξ e η têm suporte compacto módulo H, *i.e.* $q(supp(\eta))$ e $q(supp(\xi))$ são compactos em G/H, de modo que a integral em questão é finita.

Proposição 3.13. $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ *é um produto interno em* $\mathcal{F}^H$

Prova : De acordo com a definição, basta mostrar que esta aplicação é não-degenerada:

Seja $\eta \in \mathcal{F}^H$. Se $\eta(xH) \neq 0$, para algum $xH \in G/H$ obtemos então, por continuidade, que η é diferente de 0 em uma vizinhança xH, de modo que $\|\eta(xH)\|^2 > 0$ nesta vizinhança. Assim concluímos que

$$\langle \eta, \eta \rangle_\mu = \int_{G/H} \|\eta(x)\|^2 d\mu(xH) > 0.$$

Calculamos então, para $\psi^H \in C_c(G/H)$ tal que $0 \leq \psi^H \leq 1$ e $\psi^H(xH) = 1$ para $xH \in q(supp(\eta))$,

$$\|M_\rho \eta\|^2 = \|\sqrt{\rho}\eta\|^2 = \int_G \psi(x) \|\sqrt{\rho}(x)\eta(x)\|^2 dx =$$

$$\int_G \psi(x) \|\eta(x)\|^2 \rho(x) dx = \int_{G/H} \psi^H(xH) \|\eta(x)\|^2 d\mu(xH) = \|\eta\|^2$$

Podemos mostrar que vale a última igualdade ao definirmos $\phi(x) = \psi(x)\|\eta(x)\|^2$. Assim obtemos que

$$\phi^H(x) = \int_H \psi(xh)\|\eta(xh)\|^2 dh =$$

$$\int_H \psi(xh)\|\pi(h^{-1})\eta(x)\|^2 dh = \psi^H(xH)\|\eta(x)\|^2$$

Notamos então que os espaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^H$ são isomorfos e portanto têm completamentos de Hilbert isomorfos e assim removemos o subescrito μ deste produto interno. Denotamos o completamento de Hilbert de $\mathcal{F}^H$ por $\mathcal{H}$ ou ainda $\mathcal{H}(U^\pi)$, e estendemos M_ρ a um operador unitário de $\mathcal{H}(ind_H^G\pi)$ em $\mathcal{H}_\mu$. Isto é possível pois construímos uma norma em $\mathcal{F}^H$ de modo a fazer de M_ρ uma isometria.

Podemos mostrar (para detalhes veja [9]) que o completamento de Hilbert de $\mathcal{F}^H$ construído acima pode ser visto como o espaço

$$\{f : G \to \mathcal{H}(\pi);\ f \text{ satisfaz } a),\ b) \text{ e } c)\ \}, \text{ onde}$$

$a)$ $f(xh) = \pi(h^{-1})\delta(h)f(x)$ para todo $h \in H$ e quase todo $x \in G$.
$b)$ $\int_{G/H} |f(x)|^2 d\mu(xH) < \infty$
$c)$ Para qualquer $\xi \in \mathcal{F}^H$, $\|\xi - f\|^2 = \int_{G/H} \|\xi(x) - f(x)\|^2 d\mu(xH)$

Agora precisamos de uma representação de G neste espaço. De maneira análoga à construção do espaço de representação, transferimos a representação de G a $\mathcal{H}$ através da isometria M_ρ. Definimos assim $U_\mu^\pi(x) = M_\rho^{-1} ind_H^G\pi(x) M_\rho$ que é um operador em $\mathcal{H}_\mu$. Vemos, pela expressão, que U^π é um homomorfismo contínuo de G e também que $U^\pi(x)$ é um operador unitário, e portanto contínuo, para todo $x \in G$. Temos então uma outra representação equivalente a $ind_H^G\pi$ de G.

Para obter uma expressão para a ação U^π no subespaço denso $\mathcal{F}^H$. Calculamos para $\eta \in \mathcal{F}^H$, x, $y \in G$:

$$[U^{\pi}_{\mu}(x)\eta](y) = [M_{\rho}^{-1} ind_H^G(x)\xi](y) = \frac{1}{\sqrt{\rho(y)}}\xi(x^{-1}y) = \left(\frac{\rho(x^{-1}y)}{\rho(y)}\right)^{1/2}\eta(x^{-1}y).$$

onde denotamos $M_{\rho}(x)(\eta)$ por ξ .

Suponha que tenhamos escolhido alguma outra rô-função ν para o par (G, H) também contínua e estritamente positiva. Realizamos novamente a construção precedente com esta nova função ν, obtendo assim M_{ν} e uma nova representação U^{ν} equivalente a $ind_H^G\pi$. Desta maneira U^{ν} será equivalente a U^{π} e como corolário vemos que a escolha de rô-função não altera a representação obtida. Isto justifica a opção de remover o subescrito μ da notação. Enunciamos assim:

Corolário 3.14. *Para quaisquer rô-funções estritamente positivas contínuas ρ, ν, temos que $U^{\pi}_{\mu_{\rho}}$ e $U^{\pi}_{\mu_{\nu}}$ são unitariamente equivalentes.*

Esta segunda representação induzida será usada para construir uma representação induzida do grupo afim real $\mathbb{R}_{aff}$ a ser definido posteriormente. Seguimos adiante realizando uma terceira construção que usaremos para estudar representações irredutíveis do grupo de $SL(2;\mathbb{R})$. Desta vez, entretanto, daremos apenas indicações das provas mais extensas. Utilizamos também o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [10]:

Lema 3.15. *Podemos escolher uma seção mensurável $\gamma : G/H \to G$, ou seja, uma aplicação mensurável γ tal que $\gamma(xH) \in xH$.*

Observe que, dada uma sessão $\gamma : G/H \to G$, temos que $\gamma(xH)H = xH$ de modo que $x^{-1} \cdot \gamma(xH) \in H$ para todo $x \in G$.

Dado o lema acima fixe uma sessão mensurável $\gamma : G/H \to G$, ρ uma rô-função estritamente positiva e contínua para o par (G, H), μ sua medida quasi-invariante àssociada, π uma representação unitária de H em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Considere o espaço

$L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu) = \{f : G/H \to \mathcal{H}(\pi); f$ é mensurável e de quadrado integrável $\}$. Esta condição de integrabilidade é definida por

$$\int_{G/H} \|f(xH)\|^2 d\mu(xH) < \infty.$$

Geralmente este espaço não é Hausdorff, porém há nele uma forma sesquilinear dada por

$$\langle f, f' \rangle = \int_{G/H} \langle f(xH), f'(xH) \rangle d\mu(xH),$$

para $f, f' \in L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu)$.

Tome novamente o quociente deste espaço sobre o espaço nulo $\mathcal{N} = \{f \in L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu), \langle f, f \rangle = 0\}$ e em seguida o completamento de Hilbert deste novo espaço. Por conveniência chamaremos este espaço de Hilbert também de $L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu)$. Munimos $L^2((G/H), \mathcal{H}(\pi), \mu)$ com o produto interno :

$$\int_{G/H} \langle f(xH), g(xH) \rangle d\mu(xH).$$

De maneira análoga ao caso $L^2(\mathbb{R})$, este espaço pode ser visto como o espaço das classes de equivalência de funções $f : G \to \mathcal{H}(\pi)$ de quadrado integrável.

Observação 3.16. *Defina o operador* $W : \mathcal{H}(U_\mu^\pi) \to L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu)$, *dado por* $W\eta(xH) = \eta(\gamma(xH))$ *para toda* $\eta \in \mathcal{H}(U_\mu^\pi)$. *Então* W *é invertível e seu inverso é dado por* $W^{-1}f(x) = \pi(x^{-1}\gamma(xH))f(xH)$, *para todo* $f \in L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu)$, $x \in G$. *Além disso,* W *é unitário.*

Definição 3.17. *Defina a ação linear de G em $L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu)$ dada por $U^\pi(y)f(x) = WU^\pi_\mu(y)W^{-1}f(x)$. Sobre esta ação temos*

Proposição 3.18. *A ação acima descrita, transferida para $L^2(G/H, \mathcal{H}(\pi), \mu)$ através de W é dada por: $[U^\pi(y)f](x) = \left(\frac{d\mu_{y^{-1}}}{d\mu}(xH)\right)^{1/2} \pi(\gamma(xH)^{-1}y\gamma(y^{-1}xH))F(y^{-1}xH)$*

Prova : Simplesmente calculamos:

$$\begin{gathered} WU^\pi_\mu(y)W^{-1}\ F(xH) = U^\pi_\mu(y)W^{-1}\ (F(\gamma(xH))) = \\ \left(\tfrac{\rho(y^{-1}\gamma(xH))}{\rho(\gamma(xH))}\right)^{1/2}\ W^{-1}F(x^{-1}\gamma(xH)) = \\ \left(\tfrac{d\mu_{y^{-1}}}{d\mu}(xH)\right)^{1/2} W^{-1}F(\gamma(y^{-1}xH)\gamma(y^{-1}xH)^{-1}y^{-1}\gamma(xH)) = \\ \left(\tfrac{d\mu_{y^{-1}}}{d\mu}(xH)\right)^{1/2} \pi(\gamma(xH)^{-1}y\gamma(y^{-1}xH))F(y^{-1}xH) \end{gathered}$$

Esta fórmula, apesar de mais carregada, é mais prática para cálculos concretos de representações induzidas. Pela construção é fácil ver que novamente obtemos uma representação equivalente a $ind_H^G\pi$ com equivalência dada pelo operador W. Observe a característica comum a todas as construções de translação à esquerda do argumento das funções correspondentes.

Por fim vamos fixar um sistema ortonormal maximal para os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_H^G$ e $\mathcal{H}(\pi)$.

Definição 3.19. *Seja $v \in \mathcal{H}$ e π uma representação unitária de H e $f \in C_c(G)$. Defina $\eta(f,v) : G \to \mathcal{H}(\pi)$ por*

$$\eta(f,v)(x) = \int_H f(xh)\delta(h)^{-1}\pi(h)vdh..$$

O seguinte resultado segue facilmente das definições

Proposição 3.20. *Para toda $f \in C_c(G)$, $v \in \mathcal{H}$ temos $\eta(f,v) \in \mathcal{F}$.*

Este conjunto de aplicações é um sistema ortonormal para o espaço de representação.

Proposição 3.21. *Seja $x \in G$ arbitrário, f um elemento de $C_c(G)$ e $D \subset \mathcal{H}(\pi)$ um conjunto total. Se chamarmos de $\eta(C_c(G), D)$ o conjunto $\{\eta(f,v), f \in C_c(G), v \in D\}$ e de $\eta(C_c(G), D)(x)$ o conjunto $\{\eta(f,v)(x), f \in C_c(G), v \in D\}$, as seguintes afirmações a respeito destes conjuntos são verdadeiras:*

i) $\eta(C_c(G), D)$ *é total em* $\mathcal{H}(ind_H^G \pi)$.

ii) $\eta(C_c(G), D)(x)$ *é total em* $\mathcal{H}(\pi)$

Prova : *i*) Sejam f, v como na hipótese e $\xi \in \mathcal{F}$. Considere uma função $\psi \in C_c(G/H)$ com valor 1 em uma vizinhança de $q(supp\xi) \cup q(supp\eta)$ tal que $0 \leq \psi^h \leq 1$. Podemos calcular :

$$\langle \eta(f,v), \xi \rangle = \int_G \psi(x) \langle \eta(f,v)(x), \xi(x) \rangle dx =$$
$$\int_G \int_H \psi(x) \delta(h) f(xh) \langle \pi(h)v, \xi(x) \rangle dh dx$$
$$\int_H \int_G \psi(xh^{-1}) f(x) [\Delta_G(h)\Delta_H(h)]^{-1/2} \langle \pi(h)v, \xi(xh^{-1}) \rangle dh dx =$$
$$\int_H \int_G \psi(xh^{-1}) f(x) \Delta_H(h)^{-1} \langle v, \xi(x) \rangle dh dx$$
$$= \int_G \psi^H(xH) f(x) \langle v, \xi(x) \rangle dx = \int_G f(x) \langle v, \xi(x) \rangle dx,$$

e concluímos que se ξ é ortogonal a toda $\eta(f,v)$ então

$$\int_G f(x) \langle v, \xi(x) \rangle dx = 0.$$

Sendo ξ contínua, podemos escolher uma f apropriada de modo a obtermos $\langle v, \xi(x)\rangle = 0 \ \forall v \in D$. Como D é total em $\mathcal{H}(\pi)$, $\xi(x) = 0$ para todo $x \in G$ o que mostra que o conjunto $\eta(C_c(G), \mathcal{H})$ é total no espaço $\mathcal{H}_H^G$

ii) Como $\eta(f, v)(x) = \eta(L_{x^{-1}}f, v)(e)$, é suficiente provar que $\forall f \in C_c(G)$, $v \in \mathcal{H}$, $\eta(f, v)(e)$ é denso em $\mathcal{H}$. Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de $\eta(f, v)(e)$ temos

$$\int_H f(xh)\delta(h)^{-1}\pi(h)v \ dh = \int_H L_{x^{-1}}f(h)\delta(h)^{-1}\pi(h)v \ dh.$$

Sabendo que D gera um subespaço linear denso em $\mathcal{H}(\pi)$ existem v_1,..., v_n em D e $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que $\| \sum_1^n \lambda_j v_j - v\| < \epsilon/2$. Além disso, existem vizinhanças da identidade U, $V_j \in \mathcal{N}_H(e)$, $j = 1, ..., n$ em H satisfazendo

$$\|\pi(h)v - v\| < \epsilon/2 \text{ para todo } h \in U.$$

$$\|\pi(h)v_j - v_j\| < \tfrac{\epsilon}{2}\Big(\sum_1^n |\lambda_j|\Big)^{-1} \text{ para todo } h \in V_j.$$

Mas existe uma vizinhança compacta U_0 da identidade em H contida na interseção de U e das V_j, $j = 1$, ..., n. Seja g uma função, $g \in C_c^+(H)$ com $\text{supp}(g) \subset V$ e satisfazendo $\int_H g(h)\delta(h)^{-1} \ dh = 1$.

Sendo H fechado em G podemos usar o teorema de extensão de Tietze e obtemos $f \in C_C^+(G)$ estendendo g. Daí

$$\left\| v - \sum_1^n \lambda_j \ \eta(f, v)(e) \right\| = \left\| v - \sum_1^n \lambda_j \ \int_H g(h)\delta(h)^{-1} v_j \ dh \right\| \leq$$

$$\left\| v - \sum_1^n \lambda_j v_j \right\| + \Big(\sum_1^n |\lambda_j| \Big) \left\| \int_H g(h)\delta(h)^{-1}[\pi(h)v_j - v_j]\ dh \right\| \leq$$
$$\epsilon/2 + (\sum_1^n |\lambda_j|) \ \cdot \ sup_{h\in V} \|\pi(h)v_j - v_j\| < \epsilon.$$

Gostaríamos agora de exemplificar algumas representações induzidas fundamentais com o propósito de fixar ideias. Podemos pensar no seguinte resultado como uma forma de consistência do processo de indução.

Proposição 3.22. *Seja $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}(\pi))$ uma representação unitária contínua de G. Então $ind_G^G \pi \simeq \pi$.*

Observação 3.23. *Note que esta afirmação também responde afirmativamente a pergunta: Dada uma representação unitária contínua π de G existe uma representação σ de algum subgrupo $H \subset G$ tal que $ind_H^G \sigma \simeq \pi$? O teorema da imprimitividade de Mackey, a ser provado posteriormente, dá condições suficientes para que a resposta à pergunta seja positiva mesmo se supusermos $H \neq G$.*

Prova : Como o espaço $G/G = eG$ tem apenas um elemento, usamos a medida de Haar bilateralmente invariante $\mu(G/H) = 1 = card(G/H)$. Defina $U : \mathcal{F} \to \mathcal{H}(\pi)$, por $U\theta = \theta(e)$, para toda $\theta \in \mathcal{F}$.

Temos, então: $|U\theta|^2 = |\theta(e)|^2 = \int_{G/G} |\theta(xG)|^2 d\mu(xG) = |\theta|^2$, pois $\int_{G/G} d\mu(xG) = 1$ e só há um elemento em G/G.

Concluímos que U é uma isometria. Como $U(\mathcal{F})$ é denso em $\mathcal{H}(\pi)$ temos que U se estende a uma isometria (e consequentemente é um operador unitário) também denotada U de $\mathcal{H}(ind_G^G(\pi))$ sobre $\mathcal{H}(\pi)$. Para mostrar que U é um operador de entrelaçamento, calculamos (mantendo em mente que $\theta(a) = \pi(a^{-1})\theta(e)$ pois $\theta \in \mathcal{F}$ e $\delta_G^G(x) = 1$ para todo x):

$$Uind_G^G(\pi)(a)\theta = U(\theta^a) = \theta^a(e) = \theta(a^{-1}) = \pi(a)\theta(e) = \pi(a)U\theta.$$

Voltamos agora nossa atenção ao caso oposto onde $H = \{e\}$. Lembremos da representação regular à esquerda dada por:

$$[y \cdot f](x) = f(y^{-1}x)$$

para $x, y \in G$ e $f \in L^2(G)$. Ela é unitária pois

$$\langle y \cdot f, y \cdot f' \rangle = \int_G f(y^{-1}x)\overline{f'(y^{-1}x)}dx = \int_G f(x)\overline{f'(x)}dx = \langle f, f' \rangle,$$

pela invariância à esquerda da medida de Haar.

Note também que sendo H trivial, para qualquer espaço vetorial, existe exatamente uma classe de equivalência de representações, a representação trivial $\mathbf{1}(e) = I$, onde I denota o operador identidade. Em particular, só existe uma classe de equivalência de representações irredutíveis.

Proposição 3.24. *A representação induzida $ind_H^G\mathbf{1}$ é equivalente à representação regular à esquerda de G, em $L^2(G)$.*

Prova : O espaço da representação trivial tem uma dimensão e é portanto isomorfo a $\mathbb{C}$. O grupo quociente $G/\{e\}$ é naturalmente isomorfo a G e podemos tomar a medida de Haar original de G como medida quasi-invariante, fazendo com que a derivada de Radon-Nikodym seja constante igual a 1. Ela é associada à rô-função contínua positiva $\rho(x) = 1\ \forall x \in G$, pois $\int_G f(x)\rho(x)dx = \int_{G/\{e\}} f(x)d\mu(x)$. Desta maneira o espaço $L^2(G/\{e\}, \mathcal{H}(\tau), \mu)$ é naturalmente isomorfo, como espaço de Hilbert a $L^2(G)$. Utilizando o valor obtido na proposição 3.15 para a derivada de Radon-Nikodym e a sessão mensurável $\gamma(x\{e\}) = x$ temos, pela nossa terceira construção da representação induzida:

$$[ind_{\{e\}}^{G}\tau(y)f](x) = \Big(\tfrac{d\mu_{y^{-1}}}{d\mu}(xH)\Big)^{1/2}\pi(\gamma(xH)^{-1}y\gamma(y^{-1}xH))F(y^{-1}xH) =$$
$$1 \cdot \pi(xyy^{-1}x^{-1})f(y^{-1}x) = f(y^{-1}x) = L_y f\ (x)$$

Observação 3.25. *Podemos deduzir daqui que a representação regular de G em $L^2(G)$ é contínua.*

Para finalizar esta sessão mencionaremos algumas propriedades do processo de indução. A maioria dos resultados têm uma demonstração longa, além de muitas serem repetições de argumentos antigos com leves adaptações e por isso as omitiremos. Suas provas podem ser achadas em [10] ou mais detalhadamente em [9].

Proposição 3.26. *Seja H subgrupo fechado de um grupo localmente compacto G e $(\pi, \mathcal{H}(\pi))$ uma representação unitária contínua de H. Então temos a seguinte descrição do núcleo de $ind_H^G\pi$:*

$$\ker\ ind_H^G(\pi) = \bigcap_{a\in G} a^{-1}\Big(\ker\pi \cap \ker\tfrac{\delta}{\Delta}\Big)a$$

Corolário 3.27. *Sejam G um grupo localmente compacto e H um subgrupo fechado e ainda π uma representação unitária de H em $\mathcal{H}$. Se π é fiel, ou seja, um homomorfismo injetivo, então $ind_H^G\pi$ também será fiel.*

O processo de indução respeita operações com representações. Mais precisamente seja $(\pi_i)_{i\in I}$ uma família de representações unitárias de H.

Podemos construir uma família de representações de G, $ind_H^G\pi_i$ onde i varia em I e em seguida somar esta família obtendo assim uma nova representação de G,

$$\bigoplus_{i\in I} ind_H^G\pi_i.$$

Além disso podemos construir a induzida da soma da família, *i.e.*, $ind_H^G \bigoplus \pi_i$ obtendo mais uma representação de G.

Proposição 3.28. *As duas representações de G acima descritas são equivalentes, ou mais precisamente*

$$ind_H^G(\bigoplus_{i\in I} \pi_i) \equiv \bigoplus_{i\in I}(ind_H^G \pi_i)$$

Em outras palavras, a soma das representações induzidas é equivalente à induzida da soma das representações.

Proposição 3.29. *Dada uma representação unitária σ de H, associamos a ela uma representação $\bar{\sigma}$ no espaço conjugado $\bar{\mathcal{H}}$. Assim novamente temos duas representações de G: $ind_H^G \bar{\sigma}$ e $\overline{ind_H^G \sigma}$. Neste caso temos*

$$ind_H^G \bar{\sigma} \equiv \overline{ind_H^G \sigma}.$$

Proposição 3.30. *O processo de indução também respeita quocientes de grupos. Para tornar esta afirmação precisa, seja N um subgrupo fechado normal de G contido em H. Dada uma representação unitária contínua π de H/N definamos $\sigma \circ q|_H$ uma representação de H. Então*

$$ind_H^G \sigma \circ q|_H \equiv (ind_{G/N}^{G/N} \sigma) \circ q$$

Os resultados que mencionaremos agora podem ser achados em [10] e em [12]. Eles são generalizações de resultados conhecidos para grupos finitos ao caso de grupos localmente compactos e têm demonstração bastante sofisticadas.

Lembremos a definição de produto tensorial de representações de grupos distintos: de maneira geral, se π_1 e π_2 são representações unitárias de grupo

G_i, $i = 1, 2$ em espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, podemos definir $\pi_1 \otimes \pi_2 : G_1 \times G_2 \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ tal que para todo $x_1 \in G_1$ e $x_2 \in G_2$ tenhamos

$$\pi_1 \otimes \pi_2(x_1, x_2) = \pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2),$$

onde naturalmente $\pi_1(x_1) \otimes \pi_2(x_2)(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n \pi_1(x_1)v_i \otimes \pi_2(x_2)w_i$.

Teorema 3.31 (Teorema do Produto Tensorial de Mackey)**.** *Sejam G_1 e G_2 grupos localmente compactos com subgrupos fechados H_1 e H_2 e suponha dadas representações unitárias π_i de H_i, $i = 1, 2$. Então temos:*

$$ind_{H_1}^{G_1} \pi_1 \otimes ind_{H_2}^{G_2} \pi_2 \equiv ind_{H_1 \times H_2}^{G_1 \times G_2} (\pi_1 \otimes \pi_2).$$

Seja $K \subset H \subset G$ subgrupos fechados de G e suponha dada uma representação unitária π de K. Temos pelo menos dois modos de se obter uma representação de G:

- Induzimos π a H de modo a obter uma representação de H $ind_K^H \pi$ e depois induzimos esta nova representação obtendo uma representação $ind_H^G(ind_K^G \pi)$.

-Por outro lado podemos induzir diretamente de K para G obtendo $ind_K^G \pi$.

Teorema 3.32 (Teorema da Indução em Estágios de Mackey)**.** *As representações de G $ind_H^G ind_K^H \pi$ e $ind_K^G \pi$ são equivalentes.*

Este próximo resultado estabelece uma versão enfraquecida do teorema da reciprocidade de Frobenius para o caso de grupos localmente compactos.

Teorema 3.33 (Teorema da Reciprocidade de Frobenius para Grupos Localmente Compactos)**.** *Sejam G um grupo localmente compacto e H um subgrupo fechado de G e suponha dada uma representação unitária π de H em*

$\mathcal{H}(\pi)$. Suponha ainda que G/H tem uma medida regular de Borel finita e invariante. Seja σ uma representação de G em $\mathcal{H}(\sigma)$. Então os espaços vetoriais dos operadores de entrelaçamento $hom_G(ind_H^G\pi, \sigma)$ e $hom_H(\pi, \sigma_H)$ são isométricos como espaços de Banach, ou mais precisamente:

$$hom_G(ind_H^G\pi, \sigma) \cong hom_H(\pi, \sigma_H),$$

onde a isometria é dada por

$$\begin{gathered}\psi : hom_H(\pi, \sigma|_H) \to hom_G(ind_H^G\pi, \sigma)\\ \psi(B)f(x) = \int_{G/H} \sigma(x^{-1})Bf(x)d\mu(xH).\end{gathered}$$

Observação 3.34. *Podemos mostrar (Veja [9]) que a existência de tal medida como na hipótese do teorema é equivalente à condição de que $\Delta_G = \Delta_H$ em H. Em particular, se G é compacto (ou ainda finito), discreto ou abeliano, ambos serão unimodulares e o resultado acima vale para G e H. No caso finito recuperamos o teorema de Frobenius.*

3.3 Série Principal do Grupo $SL_2(\mathbb{R})$

Estudaremos agora para exemplos concretos com o objetivo de construir a série principal de representações de $SL_2(\mathbb{R})$, o grupo das matrizes de determinante 1 em $\mathbb{R}^2$. Para realizar este objetivo desenvolveremos primeiro alguns exemplos.

Começamos com o caso de subgrupos fechados complementares:

Definição 3.35. *Seja G um grupo localmente compacto e H um subgrupo fechado de G. Dizemos que um subgrupo K de G é complementar à esquerda de H se valem as seguintes condições:*

i) $KH = G$ *e* $K \cap H = \emptyset$

ii) A aplicação $(k, h) \mapsto kh$ *é um homeomorfismo entre* $K \times H$ *e* G*.*

Sejam G e H tais que H possui um subgrupo complementar à esquerda K, e que H é normal em G. Deste modo podemos identificar como grupos topológicos G/H e K usando o isomorfismo de grupos topológicos $yH \mapsto k$ onde $y = kh$ é dado de maneira única.

Proposição 3.36. *Sejam* G *um grupo localmente compacto e* H *um subgrupo fechado normal com um subgrupo complementar à esquerda* K*.*

i) Definindo $\rho(kh) = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} = \delta^2(h)$*, obtemos uma rô-função contínua estritamente positiva para o par* (G, H)*.*

ii) K *é fechado em* G *e por conseguinte é localmente compacto. Seja* ν *uma medida de Haar invariante à esquerda. Então esta medida é também quasi-invariante e, pela observação que segue a proposição* 1.18*, é equivalente a* μ_ρ*. Podemos assim identificar* G/H *com* K*. Além disso, temos a seguinte relação:*

$$\int_G f(x)\rho(x)dx = \int_{G/H} f^H(xH)d\mu(xH) = \int_K f^H(k)dk$$

Estritamente falando, f^H não é uma função em K, mas corresponde a uma única função f_0^H (a qual denotaremos f^H também) em K através do homeomorfismo entre G/H e K.

Prova : *i)* Vemos facilmente que $\rho(khh_0) = \frac{\Delta_G(hh_0)}{\Delta_H(hh_0)} = \delta^2(h_0)\delta^2(h) = \delta^2(h_0)\rho(kh)$ para todo $k \in K$, $h, h_0 \in H$, pois δ é um homomorfismo e sua positividade segue da positividade das funções modulares em G e H.

ii) Notamos que $\rho(kh) = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} = \rho(h)$, *i.e.*, ρ é K-invariante à esquerda e lembramos que $(L_k f)^H = L_k(f^H)$. Seja $y \in K$ e yH sua classe de equivalência em G/H então:

$$\int_K f^H(yxH)d\mu(xH) = \int_{G/H} L_{y^{-1}} f^H(xH)d\mu(xH) =$$
$$\int_{G/H} (L_{y^{-1}} f)^H(xH)d\mu(xH) = \int_G L_{y^{-1}} f(x)\rho(x)dx =$$

$$\int_G f(x)\rho(y^{-1}x)dy^{-1}x = \int_K f^H(x)dx$$

por causa da K-invariância à esquerda de ρ e da invariância à esquerda da medida de Haar dx e isto prova a tese.

Usando a terceira construção da representação induzida da seção 3.2 considere a inclusão $\iota : K \to G$ como a sessão mensurável.

Dados $x \in G$ e $l \in K$, temos que $x = lk^{-1}h$ para algum $k \in K,\ h \in H$, de modo que $x^{-1}l = kh^{-1}$. Portanto $\gamma(x^{-1}l) = k$ e $\gamma(l)^{-1} = l^{-1}$. Observamos que

$$\gamma(l)^{-1}x\gamma(x^{-1}l) = h,\ \tfrac{d\mu_{x^{-1}}}{d\mu}(l) = \tfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$$

e concluímos que o operador $U^\pi(x)$ age linearmente em $L^2(K, \mathcal{H}(\pi), \mu)$ da seguinte maneira:

$$U^\pi(x)f\ (l) = \left(\tfrac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\right)^{1/2} \pi(h)f(x^{-1}l)$$

Usaremos um caso específico do exemplo acima.

Definição 3.37. *Sejam G, H grupos topológicos arbitrários. Seja τ um homomorfismo $\tau : H \to Aut(G)$, onde $Aut(G)$ é o grupo de automorfismos de G e onde denotaremos τ_h a imagem de h por τ, i.e. $\tau_h \in Aut(G)$, para todo $h \in H$.*

O produto semi-direto de G e H é definido como sendo a tripla $(G\times H, \cdot, \tau)$ onde τ é um homomorfismo como acima e munimos $G\times H$ com uma estrutura de grupo dada por $(g,h)(g_0,h_0) = (g\cdot\tau_h(g_0), hh_0)$. Denotaremos este produto semi-direto por $G\rtimes_\tau H$ ou ainda $G\rtimes H$, quando não houver risco de confusão. Pode-se mostrar que a topologia produto torna $G\rtimes_\tau H$ um grupo topológico (veja [8]).

Usaremos em certo ponto da análise de $SL_2(\mathbb{R})$ a seguinte definição a respeito do grupo de caracteres de um grupo:

Defina $(\Xi_G, \cdot)$ como o grupo dos caracteres, *i.e.*,

$$\Xi_G = \{\chi : G \to S^1, \chi \text{ é um homomorfismo}\}$$

onde S^1 denota o grupo multiplicativo dos complexos de módulo 1.

Sendo o grupo S^1 comutativo, qualquer homomorfismo $\chi : G \to S^1$ se fatora pelo subgrupo dos comutadores $[G,G]$ de G. Além disso todo caractere $\chi : G/[G,G] \to S^1$ corresponde a um único caractere $\tilde{\chi}$ de G e obtemos assim um isomorfismo entre os grupos Ξ_G e $\Xi_{G/[G,G]}$.

Definição 3.38. *Defina $\mathbb{R}_{aff}$, chamado de grupo das transformações afins na reta, como sendo o produto semi-direto $\mathbb{R}\rtimes_\sigma \mathbb{R}^+$, onde:*

-$\mathbb{R}$ é o grupo aditivo da reta.

-$\sigma : \mathbb{R}^+ \to Aut(\mathbb{R})$ é dado por $\sigma_r(x) = rx$.

-$\mathbb{R}^+$ é o grupo multiplicativo dos reais positivos.

-a multiplicação é dada por $(b_1,a_1)(b_2,a_2) = (b_1 + a_1b_2, a_1a_2)$.

Voltemos então à análise de $SL_2(\mathbb{R})$. Usando o grupo $\mathbb{R}_{aff}$ de transformações afins na reta que introduzimos acima, temos.

Proposição 3.39. *A integral de Haar em $\mathbb{R}_{aff}$ é dada por*

$$\int_{\mathbb{R}_{aff}} f(z)dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f(b,a)a^{-2}dadb$$

e a função modular por:

$$\Delta_{\mathbb{R}_{aff}}(b,a) = a^{-1}.$$

Prova : Veja, por exemplo [9]

Seja H o subgrupo $\{(0,a);\ a \in \mathbb{R}^*\}$ de $\mathbb{R}_{aff}$ e τ a representação trivial de H em $\mathbb{C}$. Para mostrar que o subgrupo $K = \{(b,1);\ b \in \mathbb{R}\}$ é complementar à esquerda de H, escolhemos um $(b,a) \in H \cap K$ arbitrário, o que significa $a = 1$ e $b = 0$. Então, $(b,a) = (0,1)$ que é o elemento neutro de $\mathbb{R}_{aff}$. Para mostrar que $HK = \mathbb{R}_{aff}$ sejam $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$, temos $(b,a) = (b,1)(0,a) = (b + 0a, 1a)$.

Usaremos aqui a segunda construção da representação induzida $ind_H^G \tau$, onde $L^2(\mathbb{R} \rtimes_\tau \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^*)$ é evidentemente isomorfo a $L^2(\mathbb{R})$. Desta maneira calculamos, para $x = (b,a)$, $l = (0,1)$:

$$x^{-1}l = (-a^{-1}b, a^{-1})(c,1) = (-a^{-1}(c-b), a^{-1}) = \left(\tfrac{c-b}{a}, 1\right)(0,a)^{-1}.$$

Com esta expressão, temos para $(b,a) \in \mathbb{R}_{aff}$ e $(c,1) \in K = \mathbb{R}_{aff}/H$, usando a segunda fórmula para a representação induzida para U^τ:

$$U^\tau(b,a)f(c,1) = |a|^{-1/2} f\left(\tfrac{c-b}{a}\right).$$

A respeito desta representação podemos mostrar:

Teorema 3.40. *A representação U^τ definida acima é irredutível.*

Prova : Para detalhes, veja [9]

De posse desta representação unitária irredutível de $\mathbb{R}_{aff}$ podemos finalmente estudar o grupo unimodular $SL_2(\mathbb{R})$. Temos

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Este será nosso grupo G da construção da representação induzida. Seja P o subgrupo de G de matrizes triangulares superiores, ou seja:

$$P = \left\{ m_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Observe que, tomando $a \to \infty$ temos que ambos os grupos não são compactos.

Lema 3.41. *: O subgrupo dos comutadores de P é o subgrupo $m_{1,c},\ c \in \mathbb{R}$.*

Prova :: Calculamos $m_{a,b} m_{x,y} m_{a,b}^{-1} m_{x,y}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & -y \\ 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ax & ay + bx^{-1} \\ 0 & a^{-1}x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1}x^{-1} & -a^{-1}y - bx \\ 0 & ax \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & ax[y(a - a^{-1}) + b(x^{-1} - x)] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $c \in \mathbb{R}$ e se escolhermos $b = 0$, $a = 2$, $x = 1$, $y = c/3$, é facil ver que teremos $m_{a,b}m_{x,y}m_{a,b}^{-1}m_{x,y}^{-1} = m_{1,c}$.

Portanto, pela observação que precede a definição 3.39, e chamando por conviência $SL_2(\mathbb{R}) = SL_2$ o grupo de caracteres Ξ_P é isomorfo ao grupo $\Xi_{\frac{P}{[P,P]}}$. Então temos que calcular agora o quociente $\frac{P}{[P,P]}$:

Lema 3.42. *O quociente $\frac{P}{[P,P]}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^*$*

Prova :

Defina $\phi : P/[P,P] \to \mathbb{R}^*$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}[P,P] \mapsto a$$

Para mostrar que esta aplicação está bem definida, tome $m_{a,b}$, $m_{c,d} \in P$. Se há $r \in \mathbb{R}$ tal que $m_{a,b}m_{1,r} = m_{c,d}$, ou seja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Então $a = c$.

Esta aplicação é obviamente uma bijeção e para provar que é um homomorfismo calculamos

$$ax = \phi(m_{a,b}[P,P])\phi(m_{x,y}[P,P]).$$

Mas também

$$ax = \phi(m_{ax,ay+bx^{-1}})[P,P]) = \phi(m_{a,b}m_{x,y})[P,P]$$

Sabemos que os caracteres em $\mathbb{R}^*$ são dados por χ_t^+ ou χ_t^+, com $t \in \mathbb{R}$, onde $\chi_t^+(s) = |s|^{it}$ e $\chi_t^-(s) = sgn(s)|s|^{it}$ (veja [9]), Concluímos do lema anterior que os caracteres $\chi \in \Xi_P$, são da forma $\chi_t^+(m_{a,b}) = |a|^{it}$ ou $\chi_t^-(m_{a,b}) = sgn(a)|a|^{it}$, com $t \in \mathbb{R}$.

Estamos aptos a definir a série principal de $SL(2,\mathbb{R})$:

Definição 3.43. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ defina $\pi_t^+ = ind_P^G\chi_t^+$ e $\pi_t^- = ind_P^G\chi_t^-$, onde π_t^+ e π_t^- são ambos homomorfismos de $SL(2,\mathbb{R})$ em $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{C}))$.*

Usamos agora a terceira construção da representação induzida lembrando a fórmula para U com os seguintes dados:

-$G = SL(2,\mathbb{R})$

-$H = P =$ grupo das matrizes triangulares superiores em $SL(2,\mathbb{R})$

$$[ind_P^G\chi_t^+(x)f](yP) = \left[\frac{d\mu_{x^{-1}}}{d\mu}(yP)\right]^{1/2} \chi_t^+\Big[(\gamma(yP)^{-1}x\gamma(x^{-1}yP))\Big]\ f(x^{-1}yH))$$

$$[ind_P^G\chi_t^+(x)f](yP) = \left[\frac{d\mu_{x^{-1}}}{d\mu}(yP)\right]^{1/2} \chi_t^-\Big[(\gamma(yP)^{-1}x\gamma(x^{-1}yP))\Big]\ f(x^{-1}yH))$$

para quase todo $yP \in G/P$.

Precisamos achar uma medida-quasi invariante em G/P e uma seção mensurável γ que usamos na formulação acima. Para tanto usamos a decomposição de matrizes em GL_2 em um produto de uma matriz triangular inferior e uma superior, ou seja:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \text{ se } a \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/b & -d \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ se } a = 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Assim podemos parametrizar o espaço homogêneo G/P de acordo com esta decomposição. Mais precisamente fazemos corresponder,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{c}{a}, \text{ se } a \neq 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \omega_0, \text{ se } a = 0,\, b \neq 0.$$

deste modo, G/P é descrito como conjunto por $\mathbb{R} \cup \{\omega_0\}$. Observe que $0 \in \mathbb{R}$ corresponde ao caso $c = 0$, $a \neq 0$.

Declaramos então a seção mensurável

$$\gamma(\omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \text{ para } \omega \neq \omega_0$$

Calculamos agora $x^{-1} \cdot \omega = q(x^{-1}\gamma(\omega))$ para um $x \in SL(2, \mathbb{R})$ arbitrário e $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\omega_0\}$. Supomos primeiro que $d/b \neq \omega \in \mathbb{R}$.

Se $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $x^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, e $\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$.

e assim $x^{-1} \cdot \gamma(\omega)$ se torna $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - b\omega & -b \\ -c + a\omega & a \end{pmatrix}$

e portanto $x^{-1} \cdot \omega = \frac{a\omega - c}{-b\omega + d} \in \mathbb{R}$. No segundo caso $\omega = d/b$ temos:

$x^{-1} \cdot d/b = q(x^{-1}\gamma(d/b))$. Mas

$$x^{-1}\gamma(d/b) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d/b & 1 \end{pmatrix} =$$

$$b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -cb+ad & a/b \end{pmatrix} = -b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a/b \end{pmatrix},$$

e concluímos assim que $x^{-1}\cdot d/b = q(x^{-1}\gamma(d/b)) = \omega_0$. É fácil mostrar, a partir dos cálculos anteriores que $x^{-1}\cdot\omega_0 = -a/b$. Definimos μ de modo natural como a medida que coincide com a de Lebesgue na parte correspondente a $\mathbb{R}$ e $\mu(\{\omega_0\}) = 0$. A respeito desta medida, pode-se mostrar que

Proposição 3.44. *Definindo μ como acima, ela será quasi-invariante em G/P e se $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e $\omega \in \mathbb{R}$ a derivada de Radon-Nikodym de μ_x com relação a μ toma a forma, para todo $x \in SL(2,\mathbb{R})$:*

$$\left[\frac{d\mu_{x^{-1}}}{d\mu}(\omega)\right] = \frac{1}{(-b\omega+d)^2}$$

Prova : Para detalhes, veja [9]

Computamos agora $\gamma(\omega)^{-1}x\gamma(x\cdot\omega) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a\omega-c}{-b\omega+d} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -\omega a+c & -\omega b+d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a\omega-c}{-b\omega+d} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-b\omega+d} & b \\ 0 & -b\omega+d \end{pmatrix}$$

para $\omega \neq d/b$ e finalmente obtemos, com a ajuda da terceira construção:

$$\left[U_\mu^\chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}f\right](\omega) = |-b\omega+d|^{-1}\chi((-b\omega+d)^{-1})f(\tfrac{a\omega-c}{-b\omega+d})$$

Usamos agora nossa definição da série principal para χ_t^+ e χ_t^- de modo a obtermos:

$$\pi_t^+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(\omega) = |-b\omega + d|^{-1-it}\ f\left(\tfrac{a\omega - c}{-b\omega + d}\right)$$

$$\pi_t^-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(\omega) = sgn(-b\omega + d)\ |-b\omega + d|^{-1-it}\ f\left(\tfrac{a\omega - c}{-b\omega + d}\right)$$

para qualquer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $f \in L^2(G)$, e $d/b \neq \omega \in \mathbb{R}$.

Observação 3.45. *É possível mostrar que (veja [9]) que para todo $t \in \mathbb{R}$, os termos π_t^+ da série principal de $SL_2(\mathbb{R})$ são irredutíveis. Para $t \neq 0$, π_t^- é irredutível.*

Capítulo 4: O Teorema da Imprimitividade.

Neste capítulo encontraremos o resultado principal do presente trabalho. Desenvolvemos na primeira sessão as noções básicas de representações de álgebras e sua aplicação às álgebras de grupo.

Na segunda sessão definimos o conceito de sistema de imprimitividade e generalizamos o processo de indução para esse conceito, de modo a obtermos sistemas de imprimitividade induzidos.

A última sessão contém o enunciado e a demonstração do teorema baseada em diversos lemas auxiliares.

4.1 Álgebras de Grupo

Neste capítulo usaremos as ferramentas desenvolvidas no capítulo 3 para demonstrar o teorema da imprimitivade de Mackey. A última ferramenta que nos falta para demonstrar este resultado é a de representações de álgebras associativas, em particular álgebras associadas aos grupos com os quais trabalhamos até então.

A teoria de representações de álgebras segue as mesmas linhas gerais que as representações de grupos, por exemplo, temos as mesmas noções de espaços invariantes, irreducibilidade, equivalência, etc. Algumas diferenças surgem das diferenças entre as estruturas algébricas, por exemplo, pelo fato de que nem todo elemento de uma álgebra A possuir inverso, a noção de representação unitária não possui análoga natural para representações de álgebra.

Seja então G um grupo localmente compacto. A convolução de funções que definimos em 2.12 pode ser estendida ao caso localmente compacto e o espaço de funções $L^1(G)$ que, quando munido desta operação, se torna uma álgebra de Banach, isto é, uma álgebra associativa normada e completa cujo produto obedece a propriedade $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todos $a, b \in A$. Ademais, podemos ainda munir esta álgebra com uma involução tornando-a uma *-álgebra. Para tornar estes objetos mais precisos temos a:

Definição 4.1. *Uma involução numa álgebra associativa A é uma aplicação conjugada-linear $a \mapsto a^*$ satisfazendo para todo a, $b \in A$:*

i) $(a^*)^* = a$

ii) $(ab)^* = b^*a^*$

Definição 4.2. *Para f, $g \in L^1(G)$ definimos as operações:*

$$f * g(x) = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy$$

$$f^*(x) = f(x^{-1})\Delta_G(x).$$

A função f^* é dita adjunta de f.

Sobre estas definições podemos mostrar, como dissemos na introdução do capítulo:

Proposição 4.3. *A convolução é um produto fazendo de $L^1(G)$ uma álgebra de Banach.*

A aplicação $f \mapsto f^*$ é uma involução que faz $(L^1(G), *,^*)$ uma $*$-álgebra, ou seja, uma álgebra de Banach com involução isométrica.

Prova : Veja, por exemplo, [9]

Definição 4.4. *Os seguintes espaços associados a um grupo também são* **-álgebras de Banach*

-$C_c(G)$ *e* $C_0(G)$ *com a multiplicação pontual, norma do supremo e involução definida por* $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$

Mais geralmente, se Ω *é um espaço localmente compacto*

-$C_c(\Omega)$ *e* $C_0(\Omega)$ *com a multiplicação pontual e a involução* $f^*(\omega) = \overline{f(\omega)}$.

Sobre as diferenças mencionadas na introdução do capítulo, temos as seguintes definições:

Definição 4.5. *Seja* $(\sigma, \mathcal{H}(\sigma))$ *uma representação contínua de uma álgebra associativa* A*, i.e. um* **-homomorfismo contínuo de álgebras* $\sigma : A \to B(H(\sigma))$.

i) Dizemos que σ *é não-degenerada se para todo* $0 \neq \xi \in \mathcal{H}(\sigma)$ *existe um* $a \in A$ *tal que* $\sigma(a)\xi \neq 0$.

ii) Dizemos que um vetor $\xi \in \mathcal{H}(\sigma)$ *é um vetor cíclico se* $\sigma(A)\xi \subset \mathcal{H}(\sigma)$ *é um subespaço denso. Uma representação é dita cíclica se há algum vetor cíclico no espaço de Hilbert correspondente.*

Teorema 4.6. *Seja* G *um grupo localmente compacto e* $L^1(G)$ *sua álgebra de grupo. Dada* $(\pi, \mathcal{H})$ *uma representação unitária contínua de* G*. Então existe uma única representação não-degenerada* $(\tilde{\pi}, \mathcal{H}(\tilde{\pi}))$ *de* $L^1(G)$*, de tal maneira que* $\forall \xi,\ \eta \in \mathcal{H}(\pi)$ *e* $f \in L^1(G)$*, tenhamos:*

$$\langle \tilde{\pi}(f)\xi, \eta \rangle = \int_G f(x) \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle dx.$$

Além disso, se σ *é uma representação contínua de* $L^1(G)$ *e* π_1*,* π_2 *representações unitárias de* G*, então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) Existe uma única representação π de G tal que $\tilde{\pi} \equiv \sigma$.

ii) Os espaços vetoriais $\hom_G(\pi_1, \pi_2)$ e $\hom_{L^1(G)}(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi_2})$ são isomorfos.

iii) As representações π_1 e π_2 do grupo são equivalentes se e só se, $\tilde{\pi}_1$ e $\tilde{\pi}_2$ são equivalentes.

iv) π é irredutível se e só se $\tilde{\pi}$ o é.

v) π é cíclica se e só se $\tilde{\pi}$ o é.

Prova :

Esta demonstração pode ser encontrada em [9].

4.2 Sistemas de Imprimitividade

Definiremos nesta sessão o conceito principal do teorema central deste trabalho, a noção de sistema de imprimitividade.

Definição 4.7. *Seja G um grupo localmente compacto e suponha que G age num espaço localmente compacto Ω. Um sistema de imprimitividade para G sobre Ω é um par (π, P) onde π é uma representação unitária de G em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}(\pi)$ e P é uma representação $P : C_0(\Omega) \to B(\mathcal{H}(\pi))$ satisfazendo:*

i) O subespaço $P[C_0(\Omega)]\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$, onde $P(C_0(\Omega))\mathcal{H}(\pi)$ é o espaço gerado pelos vetores da forma $P(f)v$, com $f \in C_0(\Omega)$ e $v \in \mathcal{H}(\pi)$.

ii) $\pi(x)P(\phi)\pi(x^{-1}) = P(L_x\phi)$ para toda $\phi \in C_0(\Omega)$, e todo $x \in G$.

Exemplo 4.8. *Seja $\mathbb{C}^*$ o grupo multiplicativo dos complexos não nulos. Escolhemos $(\sigma, \mathbb{H}) = (1, \mathbb{C})$, i.e. $1(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$. Além disso, para todo*

$\phi \in C_0(\mathbb{C})$, seja $P(\phi) = 1 \in \mathbb{C}$. Estes morfismos satisfazem trivialmente as condições de um sistema de imprimitividade.

Lema 4.9. *Suponha que G age em Ω, onde G e Ω são ambos finitos, e seja (π, P) um sistema de imprimitividade de G sobre Ω. Para cada $\omega \in \Omega$ denote δ_ω a função cujo valor é 1 em ω e 0 nos outros elementos de Ω e defina ainda $P_\omega = P(\delta_\omega)$. Então as seguintes afirmações a respeito do sistema valem:*

$i) P(\phi) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \phi(\omega) P_\omega$, para todo $\phi \in C(\Omega)$.

$ii) P_\omega$ é uma projeção de $\mathcal{H}$, para todo $\omega \in \Omega$.

$iii) P_\omega P_{\omega'} = 0$ se $\omega \neq \omega'$.

$iv) \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = P(1_G) = I$, é o operador identidade em $\mathcal{H}$

Prova : Temos que $i)$ segue do fato de que, como função em G, $\phi = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \phi(\omega)\delta_\omega$ e P é um *-morfismo.

Para obter $ii)$ usamos que também no contexto de funções $\delta_\omega = \delta_\omega\delta_\omega$ e portanto $P_\omega P_\omega = P(\delta_\omega)P(\delta_\omega) = P(\delta_\omega\delta_\omega) = P_\omega$. Substituindo-se o segundo ω por ω' obtemos $\delta_\omega\delta_\omega = 0$ e portanto $P_\omega P_{\omega'} = 0$, o que nos dá $iii)$.

Para deduzirmos $iv)$ temos que como função $1_G = \sum_{\omega\in\Omega} \delta_\omega$ e portanto vale a primeira igualdade. Mas $P(1_G) = I$, pois P é um *-morfismo não degenerado e 1_G é a identidade em $C_0(G)$.

Precisamos agora da noção de sistema de imprimitividade induzido. De acordo com os objetos desenvolvidos até agora vamos usar como espaço Ω o espaço homogêneo G/H.

Seja então H um subgrupo fechado e suponha dada uma representação unitária π de H em $\mathcal{H}(\pi)$, por simplicidade, denotamos $\mathcal{H}(ind_H^G\pi)$ por $\mathcal{H}$. Para obter o sistema definimos o operador $P^\pi : C_c(G/H) \to B(\mathcal{H})$ por

$$[P^\pi(\phi)\xi](y) = \phi(yH)\xi(y).$$

Temos:

Lema 4.10. *A aplicação P^π definida desta maneira é uma representação de $C_c(G/H)$ em $B(\mathcal{H})$.*

Prova : Com efeito, se $\xi \in \mathcal{H}$, temos $P^\pi(\phi)\xi \in \mathcal{H}$ pois $\phi(yhH)\xi(yh) = \delta(h)\pi(h^{-1})\phi(yH)\xi(y)$ para todo $h \in H$, além de $y \mapsto \phi(yH)\xi(y)$ ser obviamente uma aplicação contínua. Para verificar a última propriedade temos que $supp(P^\pi(\phi)\xi) \subset supp(\xi)$ pela expressão de $P^\pi(\phi)\xi$.

Para provar a multiplicatividade calculamos, para ϕ e $\lambda \in C_c(G/H)$, $\xi \in \mathcal{H}(ind_H^G\pi)$ e $y \in G$.

$$[P^\pi(\phi\lambda)\xi](y) = \phi(yH)\lambda(yH)\xi(y)$$

$$[P^\pi(\phi)\lambda(yH)\xi](y) = [P^\pi(\phi)P^\pi(\lambda)\xi](y)$$

E para a involutividade temos:

$$[P^\pi(\phi^*)\xi](y) = \overline{\phi(yH)}\xi(y) = \overline{\phi(yH)\overline{\xi(y)}} = [P^\pi(\phi)^*\xi](y)$$

Para mostrar a continuidade calculamos para $\phi \in C_c(G/H)$ e $\xi \in \mathcal{F}$ e ψ uma função real contínua não negativa com valor 1 em uma vizinhança de $supp(\xi)$:

$$\|P^\pi(\phi)\xi\|^2 = \int_G \psi(y)\phi(yH)\|\xi(y)\|^2 dy \leq$$

$$\int_G \psi(y)\|\phi\|_\infty\|\xi(y)\|^2 dy = \|\phi\|_\infty\|\xi\|^2$$

Deduzimos dai que $\|P^\pi\| \leq 1$.

Proposição 4.11 (Definição de Sistema de Imprimitividade Induzido)**.** *Seja π uma representação unitária de H, subgrupo de G. De acordo com as construções acima, (U^π, P^π) é um sistema de imprimitividade para G sobre G/H, chamado sistema de imprimitividade induzido por π.*

Prova :

Como já provamos que P^π é um $*$-morfismo e U^π é uma representação de G, precisamos apenas verificar as propriedades $i)$ e $ii)$. Ou seja, temos que provar que:

$i)$ $P^\pi[C_0(\Omega)]\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$

$ii)$ $U^\pi(x)P(\phi)U^\pi(x^{-1}) = P(L_x\phi)$ para toda $\phi \in C_0(\Omega),\ x \in G$.

$i)$ Como mostramos no lema 4.19, temos que $P^\pi(\phi)\xi \in \mathcal{H}(\pi)$ para toda $\xi \in \mathcal{H}(\pi)$ e $P^\pi(\phi)$ é um operador com $\|P^\pi(\phi)\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty$.

Sejam então $\xi \in \mathcal{H}(\pi)$ e $\epsilon > 0$. Seja $\eta \in \mathcal{F}$ tal que $\|\xi - \eta\| < \epsilon$. Faça $C = q(supp\eta)$ e seja $f \in C_c(G)$ tal que $f^H(xH) = 1$ para todo $xH \in C$ e $0 \leq f \leq 1$. Então $P^\pi(f^H)(\eta) = \eta$ donde $\mathcal{F} \subset P^\pi(C_c(G/H))\mathcal{F}$ e portanto $P^\pi(C_c(G/H))\mathcal{H}(\pi)$ é denso de $\mathcal{H}(\pi)$.

$ii)$ Calculamos, utilizando as definições envolvidas:

$$[U^\pi(x)P^\pi(\phi)U^\pi(x^{-1})]\xi(y) =$$
$$[P^\pi(\phi)U^\pi(x^{-1})]\xi(x^{-1}y) = \phi(x^{-1}yH)[U^\pi(x^{-1})\xi](x^{-1}y) =$$
$$L_x\phi(yH)[U^\pi(x^{-1})\xi](x^{-1}y) = L_x\phi(yH)\xi(y) = P^\pi(L_x\phi)\xi(y)$$

Suponha que G age em Ω_1 e Ω_2 e $\phi : \Omega_2 \to \Omega_1$ seja uma aplicação arbitrária. Definimos $\phi_* : C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$ por $\phi_*(f) = f \circ \phi$.

Definição 4.12. *Sejam* (π_1, P_1) *e* (π_2, P_2) *sistemas de imprimitividade de* G *sobre os* G*-espaços* Ω_1 *e* Ω_2 *respectivamente. Dizemos que* (π_1, P_1) *é equivalente a* (π_2, P_2) *quando existem um operador unitárior* $U : \mathcal{H}(\pi_1) \to \mathcal{H}(\pi_2)$ *e um homeomorfismo* $\phi : \Omega_2 \to \Omega_1$ *que satisfazem:*

i) $U\pi_1(x) = \pi_2(x)U$*, para todo* $x \in G$

ii) $\phi(\pi_2(x)\omega) = \pi_1(x)\phi(\omega)$*, para todo* $\omega \in \Omega_2$ *e para todo* $x \in G$*.*

iii) $UP_1(f) = P_2(\phi_*(f))U$ *para toda* $f \in C_0(\Omega_1)$*.*

Além disso, se $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$*, dizemos que* (π_1, P_1) *e* (π_2, P_2) *são equivalentes sobre* Ω*.*

Notemos que de *i)* acima, segue que se (π_1, P_1) e (π_2, P_2) são equivalentes sobre Ω, as representações π_1 e π_2 são equivalentes.

4.3 O Teorema da Imprimitividade.

Teorema 4.13. *O Teorema de Imprimitividade*
Seja G *um grupo localmente compcato,* H *um subgrupo fechado de* G *e* (σ, P) *um sistema de imprimititivade para* G *sobre o espaço localmente compacto* G/H*. Então existe uma única (a menos de equivalência) representação* π *de* H *tal que* (σ, P) *é equivalente a* $(ind_H^G \pi, P^\pi)$ *sobre* G/H*.*

A prova será deduzida de uma série de lemas.

Defina $\mathcal{D}_0$ como sendo o espaço gerado pelo conjunto $\{\sigma(f)v;\ f \in C_c(G),$ $v \in \mathcal{H}(\sigma)\}$

Lema 4.14. *O conjunto* $\mathcal{D}$ *é total em* $\mathcal{H}(\sigma)$ *e tanto* σ *quanto* $\tilde{\sigma}$*-invariante.*

Prova : Seja $x \in G$ e $\tilde{\sigma}(f)v \in \mathcal{D}$. Por 4.6 temos que $\sigma(x)\tilde{\sigma}(f) = \tilde{\sigma}(L_x f)$, e então $\sigma(x)\tilde{\sigma}(f)v = \tilde{\sigma}(L_x f)v \in \mathcal{D}$. Sendo $\tilde{\sigma}$ uma representação $\tilde{\sigma}(f)\tilde{\sigma}(g)v = \tilde{\sigma}(f * g)v$, o que mostra a invariância de $\mathcal{D}$.

Para mostrar que $\mathcal{D}$ é total, seja $\epsilon > 0$, e $w \in \mathcal{H}(\sigma)$. Como σ contínua na topologia forte, $V \in \mathcal{N}_G(e)$ tal que $\|\sigma(x)w - w\| < \epsilon$, para todo $x \in V$. Seja $g \in C_c^+(G)$ uma função com suporte contido em V e cuja integral vale 1. Se $v \in \mathcal{H}$ tem norma 1 calculamos

$$|\langle \tilde{\sigma}(g)w - w, v\rangle| = \Big| \int_G g(y)(\langle \sigma(y)w, v\rangle - \langle w, v\rangle)dy \Big|$$

$$\leq \int_G g(y)|\langle \sigma(y)w, v\rangle - \langle w, v\rangle|dy \leq \epsilon \int_V g(x)dx = \epsilon$$

Supondo $\tilde{\sigma}(g)w - w \neq 0$, e como v é arbitrário podemos escolher $v = \frac{\tilde{\sigma}(g)w - w}{|\tilde{\sigma}(g)w - w|}$ e obtemos $|\tilde{\sigma}(g)w - w| < \epsilon$.

Compomos agora as aplicações lineares $f \mapsto f^H$ e $P : C_c(G/H) \to B(\mathcal{H}(\sigma))$, obtendo uma aplicação linear, digamos $\Gamma : C_c(G) \to B(\mathcal{H}(\sigma))$.

Para provar os próximos resultados vamos usar duas medidas em G e uma $G \times G$.

Proposição 4.15. *Escolha dois elementos de $\mathcal{H}(\sigma)$, digamos ξ, η. Defina $\nu_{\xi,\eta}(f) = \langle P(f^H)\xi, \eta\rangle$. Então $\nu_{\xi,\eta}$ é um funcional linear contínuo na topologia de limite indutivo. Portanto temos uma medida regular de Borel em G, que satisfaz a seguinte expressão:*

$$\langle P(f^H)\xi, \eta\rangle = \int_G f(x)d\nu_{\xi,\eta}.$$

Prova : Seja $f \in C_c(G)$. Seja $supp(f) = K \subset G$ compacto. Por 1.9 existe $c_K > 0$ tal que $\|f^H\|_\infty \leq c_K \|f\|_\infty$. Obtemos assim

$$|\nu_{\xi,\eta}(f)| = |\langle P(f^H)\xi, \eta\rangle| \leq$$

$$\|P(f^H)\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \leq \|f^H\|_\infty \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \leq$$

$$c_K\|f\|_\infty t\|\xi\|\|\eta\|$$

De modo que $\nu_{\xi,\eta}$ é contínuo na topologia de limite indutivo em $C_c(G)$ pois é contínua em $C_K(G)$ para cada subconjunto K compacto arbitrário de G. O restante do resultado segue diretamente.

Tendo em mente que precisamos de um espaço de Hilbert precisamos de um candidato a um produto interno e para tal temos o seguinte resultado:

Proposição 4.16. *Sejam ξ, η dados $\mathcal{H}(\sigma)$. Então existe uma medida regular de Borel $\lambda_{\xi,\eta}$ em $G \times G$ cujo funcional linear contínuo associado satisfaz:*

$$\int_{G\times G} f(x)g(y)d\lambda_{\xi,\eta}(x,y) = \langle P(f^H)\tilde{\sigma}(g)\xi, \eta\rangle$$

Note que não há referência à representação σ na primeira medida e na última compomos os operadores $P(f^H)\tilde{\sigma}(g)$.

Prova : A toda F em $C_c(G \times G)$ podemos associar uma família de funções em G pelo seguinte procedimento: Seja $y \in G$ e tome $F_y(x) = F(x,y)$ onde x varia G. Como F tem suporte compacto, toda F_y também tem suporte compacto e portanto $F_y \in C_c(G)$ e subsequentemente $F_y^H \in C_c(G/H)$. Afirmamos agora que a aplicação de G em $B(\mathcal{H}(\sigma))$, dada por $y \mapsto P(F_y^H)$ é contínua e também tem suporte compacto.

Para mostrar a afirmação, chamamos $K = suppF$ e $K_2 = proj_2(K)$, sua projeção na segunda componente. Notamos que K_2 também é compacto. Se $y \notin K_2$, então $(x,y) \notin K$ para todo $x \in G$ o que nos diz que $F_y \equiv 0$. Para a continuidade precisamos apenas mostrar que $y \mapsto F_y^H$ é contínua, e a afirmação estará provada. Segue das hipóteses que F é uniformemente contínua. Então para todo ϵ existe uma V vizinhança de e em $G \times G$ tal que para todos $(x, y), (a, b)$, $(x, y)(a, b)^{-1} \in V$ teremos $|F(x, y) - F(a, b)| < \epsilon$, então se $z \in proj_2(V)y$, temos

$$\|F_z^H - F_y^H\| = \sup_{xH \in G/H}\{|F_z^H(xH) - F_y^H(xH)|\} =$$

$$\sup_{xH \in G/H}\{|\textstyle\int_H F_z(xh) - F_y(xh)dh|\} \leq$$
$$\sup_{xH \in G/H}\{\textstyle\int_H |F_z(xh) - F_y(xh)|dh\} < \epsilon.$$

Resta-nos apenas mostrar a continuidade da aplicação $y \mapsto \langle P(F_y^H)\sigma(y)v, w\rangle$ para toda F. Para isso calculamos:

$$|\langle P(F_y^H)\sigma(y)v, w\rangle - \langle P(F_z^H)\sigma(z)v, w\rangle| \leq$$
$$|\langle P(F_y^H)(\sigma(y) - \sigma(z))v, w\rangle| + |\langle P(F_y^H - F_z^H)\sigma(z)v, w\rangle| \leq$$

$$\|P(F_y^H)\| \cdot \|\sigma(y)v - \sigma(z)v\| \cdot \|w\| + \|P(F_y^H - F_z^H)\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

Para tornar esta última expressão $< \epsilon$ usamos a continuidade de $y \mapsto P(F_y^H)$, e obtemos uma vizinhança V de y em G que faz $\|P(F_y^H - F_z^H)\| \cdot \|v\| \cdot \|w\| < \epsilon/2$ se $z \in V$. Para o primeiro termo observamos que $\|P(F_y)^H\|$ é limitada em G, pois F tem suporte compacto e agora usando a continuidade forte da representação σ obtemos uma vizinhança W de y de modo que $z \in W \implies \|P(F_y^H)\| \cdot \|\sigma(y)v - \sigma(z)v\| \cdot \|w\| < \epsilon/2$. Finalmente obtemos que $y \mapsto \langle P(F_y^H)\sigma(y)v, w\rangle$ é fracamente contínua.

Definimos o funcional linear $\lambda_{v,w}$ en $C_c(G \times G)$ por

$$\lambda_{v,w}(F) = \int_G \langle P(F_y^H)\sigma(y)v, w\rangle dy$$

Como no caso de μ temos que demonstrar a continuidade na topologia de limite indutivo de $C_c(G\times G)$ dada pelos espaços $C_K(G\times G)$, onde $K \subset G\times G$ é um conjunto compacto com interior não vazio. Para tanto seja K um tal conjunto compacto e $F \in C_K(G \times G)$. Então existem K_1, K_2 compactos em G com interior não vazio tais que $K \subset K_1 \times K_2$. Assim temos que para todo $y \in G$, $F_y \in C_{K_1}(G)$ e F_y não é 0 apenas quando $y \in K_2$. Obtemos assim a estimativa:

$$|\lambda_{v,w}(F)| \leq \int_G |\langle P(F_y^H)\sigma(y)v, w\rangle| dy \leq$$

$$\int_{K_2} \|P(F_y^H)\| \cdot \|v\| \cdot \|w\| dy \leq c_{K_1} \cdot \mu(K_2)\|v\| \cdot \|w\| \cdot \|F\|_\infty,$$

onde $\mu(K_2)$ denota a medida de Haar de K_2. Novamente usamos o teorema da representação de Riesz e obtemos uma medida em $G \times G$ também denotada $\lambda_{v,w}$, ou ainda $d\lambda_{v,w}$.

Para provar a expressão para a medida, definimos $f \cdot g \in C_c(G \times G)$ por $f \cdot g(x,y) = f(x)g(y)$ e calculamos $(f \cdot g)_y^H(xH) = \int_G (f \cdot g)_y(xh)dh = \int_G f(xh)g(y)dh = f^H(xH)g(y)$.

$$\lambda_{v,w}(f \cdot g) = \int_G f(x)g(y)d\lambda_{v,w}(x,y) =$$

$$\int_G \langle P(g(y)f^H)\sigma(y)v, w\rangle dy = \int_G g(y)\langle \sigma(y)v, P(f^H)^* w\rangle dy =$$

$$\langle \tilde{\sigma}(g)v, P(f^H)^* w\rangle = \langle P(f^H)\tilde{\sigma}(g)v, w\rangle.$$

O produto interno do espaço de Hilbert usado para provar o teorema de imprimitividade será dado pela derivada de Radon-Nikodym da medida $\nu_{\xi,\eta}$ com relação à medida de Haar fixada em G.

Definição 4.17. *Defina, então, a classe de funções $R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}$; com $\tilde{\sigma}(g)v$, $\tilde{\sigma}(h)w \in \mathcal{D}$ em G por:*

$$R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(z) = \int_{G\times G} \overline{h(zx^{-1})} g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y)$$

Podemos estender o conjunto índice a todo o espaço gerado por $\{\tilde{\sigma}(g)v, g \in C_c(G), v \in \mathcal{H}(\sigma)\}$. Para isto seja $\xi = \sum_1^n \tilde{\sigma}(g_i)v_i$, e $\eta = \sum_1^m \tilde{\sigma}(h_j)w_j$. Para estes elementos temos:

$$R_{\xi,\eta}(z) = \sum_1^n \sum_1^m R_{\tilde{\sigma}(g_i)v_i,\tilde{\sigma}(h_j)w_j}(z)$$

Teorema 4.18. *Sejam $\xi = \sum_1^n \tilde{\sigma}(g_i)v_i$ e $\eta = \sum_1^m \tilde{\sigma}(h_j)w_j$ pertencentes ao espaço gerado por $\{\tilde{\sigma}(g)v; g \in C_c(G), v \in \mathcal{H}(\sigma)\}$. Então a função $R_{\xi,\eta}$ é contínua. Além disso, a medida $\nu_{\xi,\eta}$ é absolutamente contínua com relação a medida de Haar dx em G e sua derivada de Radon-Nikodym é dada por $R_{\xi,\eta}$.*

Prova :

Sendo uma soma, podemos reduzir a continuidade de $R_{\xi,\eta}$ ao caso em que $\xi = \tilde{\sigma}(g)v$, e $\eta = \tilde{\sigma}(h)w$. Se h e g forem contínuas em z, temos que o integrando $\overline{h(zx^{-1})}g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})$ também é contínuo. Logo, a aplicação $z \mapsto \overline{h(zx^{-1})}g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})$ será contínua e por conseguinte $z \mapsto R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(z) = \int_{G\times G} \overline{h(zx^{-1})}g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y)$ é contínua.

Para mostrar a fórmula da derivada de Radon-Nikodym temos:

$$R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(z) = \int_{G\times G} \overline{h(zx^{-1})}g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y)$$

$$\int_G f(z)d\nu_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(z) = \langle P(f^H)\tilde{\sigma}(g)v, \tilde{\sigma}(h)w\rangle = \int_G \overline{h(z)}\langle\sigma(z)P(f^H)\tilde{\sigma}(g)v, w\rangle dz$$

Mas como (σ, P) é um sistema de imprimitividade, esta expressão se torna

$$\int_G \overline{h(z)}\langle P(L_{z^{-1}}f^H)\sigma(z^{-1})\tilde{\sigma}(g)v, w\rangle dz = \int_G \overline{h(z)}\langle P((L_{z^{-1}}f)^H)\tilde{\sigma}(L_{z^{-1}}g)v, w\rangle dz =$$

$$\int_G \overline{h(z)} \int_{G\times G} f(zx)g(zy)d\lambda_{v,w}(x,y)dz$$

Fazendo a mudança de variável $z \mapsto zx^{-1}$ obtemos

$$\int_{G\times G}\int_G \overline{h(zx^{-1})}g(zx^{-1}y)f(z)\Delta_G(x^{-1})dzd\lambda_{v,w}(x,y) =$$
$$\int_G f(z)\left(\int_{G\times G} \overline{h(zx^{-1})}g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y)\right)dz = \int_G f(z)R_{v,w}(z)dz$$

Note que a igualdade $\int_G f(z)R_{v,w}(z)dz = \int_g f(z)d\nu_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(z)$ mostra que a definição de $R_{\xi,\eta}$ independe da representação σ particular que começamos.

Lema 4.19. *Para todos* $u,\ z \in G$ *e* $\xi,\ \eta \in \mathcal{H}(\sigma)$ *vale a seguinte equação :*

$$R_{\xi,\eta}(u^{-1}z) = R_{\sigma(u)\xi,\sigma(u)\eta}(z)$$

Prova : Reduzimos novamente ao caso em que $\xi = \tilde{\sigma}(g)v$, e $\eta = \tilde{\sigma}(h)w$. Para $h,\ g \in C_c(G)$:

$$R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(u^{-1}z) = \int_{G\times G} \overline{h(u^{-1}zx^{-1})}g(u^{-1}zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{mw}(x,y) =$$

$$\int_{G\times G} \overline{L_u h(zx^{-1})}L_u g(zx^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{vmw}(x,y) = R_{\tilde{\sigma}(L_u g)v,\tilde{\sigma}(L_u h)w}(z) =$$

$$R_{\sigma(u)\tilde{\sigma}(g)v,\sigma(u)\tilde{\sigma}(h)w}(z)$$

Podemos deduzir deste lema que para qualquer $u \in G$,

$$R_{\xi,\eta}(u^{-1}) = R_{\sigma(u)\xi,\sigma(u)\eta}(e).$$

Usamos esta observação para finalmente definir a forma sesquilinear em $\mathcal{D}$ e subsequentemente a ação linear.

Proposição 4.20. *Defina* $\langle \xi, \eta\rangle = R_{\xi,\eta}(e)$. *Se* $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $t \in H$ *e* $f \in C_c(G)$ *então o espaço* $(\mathcal{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *é pré-Hilbert e além disso* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *tem as seguintes propriedades:*

i)$\langle\sigma(t)\xi, \sigma(t)\eta\rangle = \Delta_G(t)\Delta_H(t^{-1})\langle\xi, \eta\rangle$.

ii)$\langle P(f^H)\xi, \eta\rangle = \int_G f(x)\langle\sigma(x^{-1})\xi, \sigma(x^{-1}\eta)\rangle dx$

Prova : Em primeiro lugar, temos $\langle\xi, \eta\rangle = R_{\xi,\eta}(e) =$

$$\sum_1^n \sum_1^m \int_G g_i(x^{-1}y)h_j(x^{-1}\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v_i,w_j}(x,y) =$$

$$\sum_1^n \sum_1^m \lambda_{v_i,w_j}(g_i \cdot h_j) = \sum_1^n \sum_1^m \langle P(g_i^H)\tilde{\sigma}(h_j)v_i, w_j\rangle.$$

Esta aplicação é obviamente sesquilinear nas variáveis v_i, w_j, g_i e h_j e portanto $\langle \xi, \eta\rangle$ é sesquilinear nas variáveis ξ e η.

Podemos agora mostrar que $\langle \xi, \xi\rangle \geq 0$. Se $f \in C_c^+(G)$, $P(f^H)$ é um operador positivo, pois P é um *-homomorfismo, e assim $\int_G f(z)R_{\xi,\xi}dz = \langle P(f^H)\xi, \xi\rangle \geq 0$ o que significa que $R_{\xi,\xi} \geq 0$ e em particular $R_{\xi,\xi}(e) \geq 0$ como devíamos provar. Assim $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ é um espaço pré-Hilbert.

Para mostrar a propriedade de covariância i). Usamos a sesquilinearidade da aplicação R nas variáveis ξ, η de modo que podemos supor $\xi = \tilde{\sigma}(g)v$, $\eta = \tilde{\sigma}(h)w$. Defina ${}^tF(x,y) = \overline{h(t^{-1}x^{-1})}g(t^{-1}x^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})$ Calculamos então:

$$\langle \sigma(t)\tilde{\sigma}(g)v, \sigma(t)\tilde{\sigma}(h)w\rangle = R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(t^{-1})$$

$$\int_{G\times G} \overline{h(t^{-1}x^{-1})}g(t^{-1}x^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y) = \int_{G\times G} {}^tF(x,y)d\lambda_{v,w}(x,y)$$

$$\int_{G\times G} \langle P({}^tF_y^H)\tilde{\sigma}(y)v, w\rangle dy$$

Calculamos agora a soma sobre H da função ${}^tF_y(x)$. Para $xH \in G/H$, $y \in G$ e $t \in H$.

$$({}^tF)_y^H(xH) = \int_H {}^tF(xs,y)ds =$$

$$\int_H \overline{h(t^{-1}s^{-1}x^{-1})}g(t^{-1}s^{-1}x^{-1}y)\Delta_G(s^{-1}x^{-1})ds =$$

$$\Delta_G(t)\Delta_H(t^{-1}) \int_H \overline{h(s^{-1}x^{-1})}g(s^{-1}x^{-1}y)\Delta_G(s^{-1}x^{-1})$$

$$\Delta_G(t)\Delta_H(t^{-1})({}^eF)^H_y(xH)$$

Com esta identidade, computamos

$$\langle\sigma(t)\tilde{\sigma}(g)v, \sigma(t)\tilde{\sigma}(h)w\rangle = \int_{G\times G} {}^tF(x,y)d\lambda_{v,w}(x,y)$$

$$\int_{G\times G} \langle(P(\Delta_G(t)\Delta(t^{-1})^eF^H_y)\sigma(y)v, w\rangle d\lambda_{v,w}(x,y) =$$

$$\Delta_G(t)\Delta(t^{-1})\langle\sigma(y)v, \sigma(y)w\rangle$$

Finalmente, $ii)$ é obtida com um cálculo direto. Denotando as aplicações sesquilineares dos espaços $\mathcal{D}$ e $\mathcal{H}(\sigma)$ por $\langle,\rangle_{\mathcal{D}}$ e $\langle,\rangle_{\mathcal{H}(\sigma)}$ respectivamente, reduzimos ao caso em que $\xi = \tilde{\sigma}(g)v$ e $\eta = \tilde{\sigma}(h)w$.

$$\langle P(f^H)\tilde{\sigma}(g)v, \tilde{\sigma}(h)w\rangle_{\mathcal{H}(\sigma)} = \int_G f(x)d\nu_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(x)$$

$$\int_G f(x)f(x)R_{\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(x)dx = \int_G f(x)f(x)R_{\sigma(x^{-1})\tilde{\sigma}(g)v,\sigma(x^{-1})\tilde{\sigma}(h)w}(e)dx =$$

$$\int_G f(x)\langle\sigma(x^{-1})\tilde{\sigma}(g)v, \sigma(x^{-1})\tilde{\sigma}(h)w\rangle_{\mathcal{D}}dx$$

O que termina a demonstração.

Tomamos então o completamento de Hilbert do espaço $\mathcal{D}$, como possibilitado pelo seguinte:

Corolário 4.21. *O espaço K é σ-invariante. Além disso, para ξ e $\eta \in \mathcal{D}$ vale $\langle[\sigma(t)\xi], [\sigma(t)\eta]\rangle = \Delta_G(t)\Delta_G(t^{-1})\langle[\xi], [\eta]\rangle$*

Prova : De fato, por 4.20, $i)$, temos que para $\xi \in K$ e $\eta \in \mathcal{D}$

$$\langle\sigma(t)\xi, \eta\rangle = \Delta_G(t)\Delta_H(t^{-1})\langle\xi, \sigma(t^{-1})\eta\rangle = 0.$$

Dai tiramos que a classe $[\sigma(t)\xi]$ independe do representante $\xi \in \mathcal{D}$. Com um cálculo similar deduzimos também que

$$\langle [\sigma(t)\xi], [\sigma(t)\eta] \rangle = \langle \sigma(t)\xi, \sigma(t)\eta \rangle =$$

$$\Delta_G(t)\Delta_G(t^{-1})\langle \xi, \eta \rangle = \Delta_G(t)\Delta_G(t^{-1})\langle [\xi], [\eta] \rangle.$$

Definição 4.22. *Defina $\pi : H \to B(\mathcal{H})$, dada por*

$$\pi(t)[\xi] = \sqrt{\tfrac{\Delta_G(t)}{\Delta_H(t)}}[\sigma(t)\xi] = \delta(t)[\sigma(t)\xi].$$

Lema 4.23. *A aplicação π definida acima é uma representação unitária de H.*

Prova : Dados $[\xi]$, $[\eta] \in \mathcal{H}$ calculamos:

$$\pi(ts)[\xi] = \delta(ts)[\sigma(ts)\xi] = \delta(t)\delta(s)[\sigma(t)\sigma(s)\xi] = \pi(t)\delta(s)[\sigma(s)\xi] = \pi(t)\pi(s)[\xi]$$

Para mostrar a continuidade, reduzimos ao caso $\xi = \tilde{\sigma}(g)v$, $\eta = \tilde{\sigma}(h)w$ com $v, w \in \mathcal{H}(\sigma)$, e computamos

$$\langle \pi(t)[\tilde{\sigma}(g)v], [\tilde{\sigma}(h)w] \rangle = \delta(t)\langle \sigma(t)\tilde{\sigma}(g)v, \tilde{\sigma}(h)w \rangle =$$

$$\delta(t)\ R_{\sigma(t)\tilde{\sigma}(g)v,\tilde{\sigma}(h)w}(e) = \delta(t)\int_{G\times G} \overline{h(x^{-1})}g(t^{-1}x^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y)$$

Como $\delta(t)$ é uma função contínua de t, resta mostrar a continuidade de $\int_{G\times G} \overline{h(x^{-1})}g(t^{-1}x^{-1}y)\Delta_G(x^{-1})d\lambda_{v,w}(x,y)$ na variável t. Observando a continuidade das funções h e g, temos que o integrando é uma função contínua de t. Como a integral é dada por um funcional linear contínuo, temos que π é fracamente contínua, e por 2.3 que π é uma representação de H.

Para mostrar que os operadores $\pi(t)$ são unitários notamos que, pelo corolário 4.21

$$\langle \pi(t)[\xi], \pi(t)[\eta]\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \delta(t)[\sigma(t)\xi], \delta(t)[\sigma(t)\eta]\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\langle \delta(t)[\sigma(t)\xi], \delta(t)[\sigma(t)\eta]\rangle_{\mathcal{H}} = \delta^2(t)\delta^{-2}(t)\langle [\xi], [\eta]\rangle_{\mathcal{H}}$$

A partir da representação unitária π de H podemos obter, através do processo de indução uma representação $ind_H^G\pi$, ou U^π, de G em $\mathcal{H}(ind_H^G(\pi))$. De acordo com 4.11 podemos construir o sistema de imprimitividade induzido $(P^\pi, ind_H^G\pi)$ de G sobre G/H. Mostraremos que este sistema de imprimitividade é equivalente ao sistema de imprimitividade inicial (P, σ).

Construiremos agora uma isometria $\Phi : \mathcal{H}(\sigma) \to \mathcal{H}(ind(\pi))$. Seja $\xi \in \mathcal{D}$, defina a aplicação $\Phi\xi : G \to \mathcal{H}(\pi)$ por $\Phi\xi(x) = [\sigma(x^{-1})\xi]$. Para mostrar que $\Phi\xi(x)$ é uma função contínua de x, podemos novamente reduzir ao caso $\xi = \tilde{\sigma}(g)v$ e calcular:

$$\|\Phi\xi(x) - \Phi\xi(y)\|^2 = \|[\sigma(x^{-1})\tilde{\sigma}(g)v] - [\sigma(y^{-1})\tilde{\sigma}(g)v]\|^2 =$$
$$\langle \tilde{\sigma}(L_{x^{-1}}g - L_{y^{-1}}g)\ v, \tilde{\sigma}(L_{x^{-1}}g - L_{y^{-1}}g)\ v\rangle =$$
$$\int_{G\times G} [\overline{g(xu^{-1}) - g(yu^{-1})}][g(xu^{-1}z) - g(yu^{-1}z)]\Delta_G(u^{-1})d\lambda_{v,v}(u,z)$$

Como g é uniformemente contínua e de suporte compacto, o integrando $[\overline{g(xu^{-1}) - g(yu^{-1})}][g(xu^{-1}z) - g(yu^{-1}z)]\Delta_G(u^{-1})$ vale 0 fora de algum compacto $K_1 \times K_2 \subset G \times G$. Logo, se x se aproxima de y em G, temos que ambos $|g(xu^{-1}) - g(yu^{-1})|$, $|g(xu^{-1}z) - g(yu^{-1}z)|$ tendem a 0. Além disso, a função $\Delta_G(u^{-1})$ assume um máximo d no compacto K_1. Logo para todo $\epsilon > 0$, podemos fazer a integral ter valor absoluto $< \epsilon$ se y está próximo o suficiente de x.

Proposição 4.24. *As seguintes afirmações a respeito de Φ são verdadeiras:*

i) Se $\xi \in \mathcal{D}$, então $\Phi\xi \in \mathcal{H}(ind(\pi))$ e $\|\Phi\xi\| \leq \|\xi\|$.

ii) Definimos $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{H}(ind(\pi))$, naturalmente, por $\Phi(\xi) = \Phi\xi$.

Então Φ é uma aplicação linear contínua entre esses espaços e portanto pode ser estendida a uma aplicação linear contínua, também denotada por $\Phi : \mathcal{H}(\sigma) \to \mathcal{H}(ind\pi)$.

Prova : Já provamos a continuidade de $\Phi\xi$, de modo que resta mostrar a propriedade de covariância e que $\Phi\xi$ é de quadrado integrável. Temos

$$\Phi\xi(xh) = [\sigma(h^{-1}x^{-1})\xi] = [\sigma(h^{-1})\sigma(x^{-1})\xi] =$$

$$\pi(h^{-1})\delta(h)[\sigma(x^{-1})\xi] = \pi(h^{-1})\delta(h)\Phi\xi(x)$$

Mostraremos que para qualquer $\phi \in C_c(G/H)$ $\int_{G/H} \phi(xH) d\mu_{\Phi\xi} < \infty$

Tome $\phi \in C_c(G/H)$ e seja $f \in C_c(G)$ tal que $f^H = \phi$. Temos então:

$$\mu_{\Phi\xi}(\phi) = \int_G f(x)\|\Phi\xi(x)\|^2 dx =$$

$$\int_G f(x)\langle[\sigma(x^{-1})\xi], [\sigma(x^{-1})\xi]\rangle dx = \int_G f(x)\langle\sigma(x^{-1})\xi, \sigma(x^{-1})\xi\rangle dx =$$

$$\langle P(\phi)\xi, \xi\rangle.$$

Em particular $\|\Phi\xi(x)\|^2 \leq \|P\|\|\phi\|_\infty\|\xi\|^2 < \infty$.

Lema 4.25. *Podemos estender esta Φ a uma isometria $\Phi : \mathcal{H}(\sigma) \to \mathcal{H}(\pi)$.*

Prova : Suponha que $v \in \mathcal{H}(\sigma)$ é da forma $v = P(\psi)w$, onde $\psi \in C_c(G/H)$ e $w \in \mathcal{H}(\sigma)$. Como o espaço $P(C_c(G/H))\mathcal{H}(\sigma)$ é denso em $\mathcal{H}(\sigma)$, Φ é uma isometria se e só se $\|\Phi(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in P(C_c(G/H))\mathcal{H}(\sigma)$.

Além disso, já provamos a desigualdade $\|\Phi v\| \leq \|v\|$, e portanto basta provar a desigualdade inversa, ou seja $\|\Phi v\| \geq \|v\|$.

Para tanto escolhemos $\phi \in C_c(G/H)$, tal que $0 \leq \phi \leq 1$, e $\phi(xH) = 1$ para todo $xH \in supp(\psi)$. Calculamos:

$$|\mu_{\Phi v}(G/H)| = |\langle P(\phi)v, v\rangle| =$$

$$|\langle P(\phi)P(\psi)w, v\rangle| = |\langle P(\phi\psi)w, v\rangle| = |\langle P(\psi)w, v\rangle| =$$

$$|\langle v, v\rangle| = \|v\|^2.$$

Portanto temos $\|\Phi v\|^2 = \mu_{\Phi v}(G/H) \geq \mu_{\Phi v}(\phi) = \|v\|^2$, e o resultado está provado.

Resumindo o que construimos até então:

Temos dois sistemas de imprimitividade (P, σ), $(P^\pi, ind_H^G(\pi))$, e uma isometria Φ entre seus espaços de representação $\mathcal{H}(\sigma)$ e $\mathcal{H}(\pi) = \mathcal{H}$. Vamos agora estabelecer a propriedade de entrelaçamento de Φ com relação a $ind_H^G(\pi)$ e σ, ou seja, que para todo $\xi \in \mathcal{H}(\sigma)$, $\Phi\sigma(y)\xi = ind_H^G\pi(y)\Phi\xi$, e que Φ é um operador sobrejetivo. Para mostrar a propriedade de entrelaçamento vemos que

$$ind_H^G\pi(y)\Phi\xi(x) = \Phi\xi(y^{-1}x) = [\sigma(x^{-1}y)\xi] = (\Phi\sigma(y)\xi)(x)$$

Lema 4.26. *O Conjunto $P^\pi(C_c(G/H))\Phi\mathcal{D}$ é total em $\mathcal{H}$.*

Prova : Seja $\chi \in \mathcal{H}$ tal que $\langle P^\pi(f^H)\Phi\xi, \chi\rangle = 0$ para toda $f \in C_c(G)$ e toda $\xi \in \mathcal{D}$. Basta provarmos, neste caso, que $\chi = 0$. Por definição teremos $\int_G f(x)\langle\Phi\xi(x), \chi(x)\rangle dx = \int_G f(x)\langle[\sigma(x^{-1})\xi], \chi(x)\rangle dx = 0$.

Temos que mostrar então que esta igualdade nos dá $\chi(x) = 0$ localmente em quase todo ponto, ou seja, se S é um subconjunto compacto de G e $A = \{x \in S; \chi(x) \neq 0\}$ então $\mu(A) = 0$ onde $\mu(A)$ denota a medida de Haar de A. Suponha, por absurdo, que A seja um tal subconjunto de G com $\mu(A) > 0$. Pelo teorema de Lusin generalizado (veja [3]) existe um subconjunto compacto C de A com $\mu(C) > 0$ e χ restrita a C é contínua.

Como $\mathcal{D}/K$ é denso em $\mathcal{H}$, para cada $x \in C$ temos $\chi(x) \neq 0$ e que existe $\eta_x \in \mathcal{D}$ tal que $\langle [\eta_x], \chi(x) \rangle \neq 0$. Seja então $\xi_x = \sigma(x)\eta_x \in \mathcal{D}$ e defina $F_x : C \to \mathbb{C}$ por $F_x(y) = \langle \sigma(y^{-1})\xi_x, \chi(y) \rangle$. Para qualquer $x \in C$ a função F_x é contínua e $F_x(x) \neq 0$ por hipótese. Logo podemos tomar uma vizinhança V_x de x em C tal que $F_x(y) \neq 0$ para todo $y \in \bar{V}_x$.

Como C é compacto, existe uma subcobertura V_{x_i}, $i = 1, ..., n$ e sendo $\mu(C) > 0$ temos que para algum i, temos $\mu(V_{x_i}) > 0$. Substituindo, C por $\overline{V_{x_i}}$ podemos supor que existe um subconjunto compacto C de G com $\mu(C) > 0$ com χ é contínua em C e tal que existe uma $\xi \in \mathcal{D}$ de modo que para todo x pertencente a C tenhamos

$$F(x) = \langle [\sigma(x^{-1})\xi], \chi(x) \rangle \neq 0.$$

Existe então U aberto de fecho compacto tal que $C \subset U$. Pelo teorema de extensão de Tietze aplicado às funções $\Re(F)$ e $\Im(F)$, as partes real e imaginária de F respectivamente, temos uma extensão contínua $\tilde{F}$ de F a $\bar{U}$ tal que $\|\tilde{F}\|_\infty \leq 2\|F\|_\infty$ para todo $y \in \bar{U}$. Como $\chi \in \mathcal{H}$, temos que χ é o limite em $L^2(G, \mathcal{H}(\pi))$ de funções contínuas, donde χ é localmente de quadrado integrável, ou seja, temos que $d = (\int_{\bar{U}} \|\chi(y)\|^2 dy)^{1/2} < \infty$.

Além disso $c = \inf\{|F(y)|^2;\ y \in C\} > 0$ uma vez que F é contínua e não nula em C.

Temos, por definição do produto interno em $\mathcal{D}/K$ que $\|[\sigma(y^{-1})\xi]\| = R_{\xi,\xi}^{1/2}(y)$, e como $R_{\xi,\xi}$ é contínua, segue que $M = \sup\{\|[\sigma(y^{-1})\xi]; \; y \in \bar{U}\} < \infty$. Escolha um aberto V de modo que $C \subset V \subset U$ e

$$|V \backslash C|^{1/2} < \tfrac{c|C|}{4dM\|F\|_\infty}.$$

Por fim, seja $g \in C_c(G)$ tal que $1_C \leq g \leq 1_V$ e defina $f \in C_c(G)$ por

$$f(y) = \begin{cases} g(y)\overline{\tilde{F}(y)}, \; se \; y \in V \\ 0, \; se \; y \in V \backslash C \end{cases}$$

Usando estas definições calculamos:

$$0 = \int_G f(y)\langle[\sigma(y^{-1})\xi], \chi(y)\rangle dy$$

$$\int_C f(y)F(y)dy + \int_{V\backslash C} f(y)\langle[\sigma(y^{-1})\xi], \chi(y)\rangle dy$$

$$\int_C |F(y)|^2 dy + \int_{V\backslash C} f(y)\langle[\sigma(y^{-1})\xi], \chi(y)\rangle dy \geq$$

$$c|C| - \int_{V\backslash C} |f(y)|\|[\sigma(y^{-1})\xi]\|\|\chi(y)\|dy \geq$$

$$c|C| - M\left(\int_{V\backslash C} |f(y)|^2 dy\right)^{1/2}\left(\int_{V\backslash C} \|\chi(y)\|^2 dy\right)^{1/2} \geq$$

$$c|C| - 2Md\|F\|_\infty |V\backslash C|^{1/2} \geq c|C|/2 > 0$$

Esta contradição mostra que $\chi = 0$ localmente em quase todo ponto.

Proposição 4.27. *A aplicação Φ definida anteriormente é um operador unitário entre os espaços $\mathcal{H}(\sigma)$ e $\mathcal{H}(ind_H^G \pi)$.*

Prova :

Já provamos que Φ é uma isometria linear em 4.25. Além disso, o lema a seguir nos dá que $P^{\pi}(C_c(G/H))\Phi\mathcal{H}(\sigma) \subset \Phi(\mathcal{H}(\pi))$. Mas $P^{\pi}(C_c(G/H))\Phi\mathcal{H}(\sigma)$ é total em $\mathcal{H}(\pi)$ por 4.26. Concluímos então que Φ é unitário.

Lema 4.28. *Para toda $\phi \in C_c(G/H)$ temos $\Phi P(\phi) = P^{\pi}\Phi$. Em outras palavras, Φ é um operador de entrelaçamento com relação as representações P e P^{π}.*

Prova : Fixe uma $\phi \in C_c(G/H)$ e escolha $f \in C_c(G)$ tal que $f^H = \phi$. Calculamos, para ξ, $\eta \in \mathcal{D}$:

$$\langle P^{\pi}(\phi)\Phi\xi, \Phi\eta\rangle = \int_G f(x)\langle \Phi\xi(x), \Phi\eta(x)\rangle dx =$$

$$\int_G f(x)\langle [\sigma(x^{-1})\xi], [\sigma(x^{-1})\eta]\rangle dx =$$

$$\int_G f(x)\langle \sigma(x^{-1})\xi, \sigma(x^{-1})\eta\rangle_{\mathcal{H}} = \langle P(\phi)\xi, \eta\rangle.$$

Pela continuidade de P^{π} temos que $\langle P^{\pi}\Phi\xi, \Phi\eta\rangle = \langle P(\phi)\xi, \eta\rangle$ para $\phi \in C_0(G/H)$ e quaisquer ξ, η. Segue que para qualquer $\psi \in C_c(G/H)$ e v, $w \in \mathcal{H}(\sigma)$ temos

$$\langle \Phi P(\phi)v, P^{\pi}(\psi)\Phi w\rangle = \langle P^{\pi}(\bar{\psi})\Phi P(\phi)v, \Phi w\rangle =$$

$$\langle P(\bar{\psi})P(\phi)\Phi v, \Phi w\rangle = \langle P^{\pi}(\bar{\psi}\phi)\Phi v, \Phi w\rangle =$$

$$\langle P^{\pi}(\phi)\Phi v, P^{\pi}(\psi)\Phi w\rangle$$

Mas como $P^{\pi}(C_c(G/H))\Phi\mathcal{D}$ é denso em $\mathcal{H}$, temos que $\Phi P(\phi)v = P^{\pi}(\phi)\Phi v$ para todo $v \in \mathcal{H}(\sigma)$, $\phi \in C_c(G/H)$. Concluímos então que Φ é um operador de entrelaçamento.

Isto completa a demonstração do teorema da imprimitividade.

Referências

[1] G. Bachman, L Narici, *Functional Analysis*, Dover, 2000.

[2] N. Dunford, J. T. Schwarz, *Linear Operators, Part I, General Theory*, Wiley Classics Library, 1988.

[3] G. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, 1999.

[4] S. Gaal, *Linear Analysis and Representation Theory*, Dover, 1973.

[5] I.M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions. applications of harmonic analysis*, 4, Acad. Press, 1964.

[6] P. R. Halmos *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1974.

[7] K. H. Hofmann, S. A. Morris *The Structure of Compact Groups*, De Gruyter Studies in Mathematics 2006.

[8] T. Husain *Introduction to Topological Groups*, Saunders Company, 1966.

[9] E. Kaniuth, K. F. Taylor, *Induced Representations of Locally Compact Groups*, Cambridge Texts in Mathematics, 2013.

[10] G. W. Mackey, *Induced Representations of Locally Compact Groups I*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 55, No. 1 (Jan., 1952), pp. 101-139.

[11] G. W. Mackey, *Induced Representations of Locally Compact Groups II.The Frobenius Reciprocity Theorem*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 58, No. 2, (Sep., 1953), pp. 193-221.

[12] C. C. Moore *On the Frobenius Reciprocity Theorem for Locally Compact Groups*, Pacific J. Math. Volume 12, Number 1 (1962), 359-365.

[13] M. R. Sepanski *Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 2006.