Uma Desigualdade Isoperimétrica em Variedades Riemannianas Compactas

GALINDO TAZA CHAMBI

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Stefano Nardulli

Rio de Janeiro
Maio, 2015

Uma Desigualdade Isoperimétrica em Variedades Riemannianas Compactas

Galindo Taza Chambi

Orientador: Stefano Nardulli

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Stefano Nardulli

Prof. María Asunción Jiménez Grande

Prof. Maria Fernanda Elbert Guimarães

Rio de Janeiro
Maio, 2015

Resumo

Uma Desigualdade Isoperimétrica em Variedades Riemannianas Compactas

Galindo Taza Chambi

Orientador: Stefano Nardulli

Nesta dissertação apresentamos a demonstração de um teorema obtido por Olivier Druet, o qual estabelece uma desigualdade isoperimétrica em uma variedade Riemanniana compacta. Este artigo foi publicado no ano 2002 com o título *Isoperimetric Inequalities on Compact Manifolds* [Dru02].

Palavras-chave: Desigualdade isoperimétrica, desigualdades de Sobolev, variedades compactas, geometria Riemanniana.

Rio de Janeiro
Maio, 2015

Abstract

Uma Desigualdade Isoperimétrica em Variedades Riemannianas Compactas

Galindo Taza Chambi

Orientador: Stefano Nardulli

In this work we demonstrate a theorem obtained by Olivier Druet, which establishes the isoperimteric inequalities on compact manifolds. That result was published in 2002, with the title *Isoperimetric Inequalities on Compact Manifolds*[Dru02].

Keywords: Isoperimetric inequalities, Sobolev inequalities, compact manifolds, geometric Riemannian.

Rio de Janeiro
Maio, 2015

Agradecimentos

Primeiramente aos meus queridos pais Sofia e Benedicto e aos meus irmãos.

Ao professor Stefano Nardulli pelo incentivo e apoio acadêmico. Obrigado pela amizade, pelas conversas animadoras, por acreditar que posso ir além, muito mais do que eu mesmo acredito, a sua esposa Daniela pelo apoio, compreensão e a revisão da língua portuguesa desta dissertação.

Agradecemos a Olivier Druet pelas úteis conversas e explicações sobre este trabalho em particular na parte que concerne o esquema iterativo de Moser.

Agradecemos também a profesora Maria Fernanda e Maria Asunción por ter aceito fazer parte da banca avaliadora desta dissertação.

Aos meus amigos sempre dispostos a ajudar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

Sumário

1 Introdução

Esta dissertação está baseada no artigo *Isoperimetric Inequalities on compact manifolds* [Dru02].

Conjectura (Cartan-Hadamard)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva. Então dado qualquer subconjunto Ω de M com fecho compacto e fronteira diferenciável, vale*

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \quad \geq \quad K(n,1)^{-1},$$

onde nesta expressão os volumes são com respeito à medida Riemanniana e $K(n,1)^{-1} = \frac{|\partial B^n|_\xi}{|B^n|_\xi^{\frac{n}{n-1}}}$, onde ξ é a métrica Euclidiana do $\mathbb{R}^n$ e $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Olivier Druet em [Dru02] prova o seguinte resultado relacionado a esta conjectura de Cartan-Hadamard.

Teorema 1.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana diferenciável compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 2$. Então existe $B > 0$ tal que para qualquer $\Omega \in \Sigma$,*

$$\frac{|\partial\Omega|_g}{|\Omega|_g^{\frac{n-1}{n}}} \quad \geq \quad K(n,1)^{-1} - B|\Omega|_g^{\frac{1}{n}},$$

onde Σ denota a classe dos conjuntos de perímetro finito na variedade M. Se B_1 é a melhor constante B, existe um conjunto extremal não vazio $\Omega_0 \in \Sigma$, com $B = B_1$. Além disso ou $\Omega_0 = M$ é extremal, ou $|\Omega_0|_g \leq \frac{1}{2}|M|_g$, se $|\Omega_0| \leq \frac{1}{2}|M|$ Ω_0 é conexo, $\partial\Omega_0$ é regular, a menos de um conjunto de dimensão de Hausdorff no máximo $n-8$, (se $n \leq 7$, $\partial\Omega_0$ é suave) e $\partial\Omega_0$ tem curvatura média constante:

$$\eta \quad = \quad (\frac{\omega_{n-1}}{n})^{\frac{1}{n}}|\Omega_0|_g^{-\frac{1}{n}} - \frac{B_1}{n-1}$$

em seus pontos regulares. Onde $\omega_{n-1} = |\partial B^n|$.

2 Preliminares e Notação

Neste capítulo fixamos as notações e apresentamos os requisitos necessários para a compreensão dos resultados principais desta dissertação, a saber, noções de geometria Riemanniana, a aplicação exponencial, espaços de Sobolev em variedades, princípio de concentração compacidade, Teorema de Gallot, desigualdade isoperimétrica em $\mathbb{R}^n$.

2.1 Variedades diferenciáveis

Parafraseando Elie Cartan, uma variedade é realmente feita de pequenas peças do espaço Euclidiano. Seja M um espaço topológico e considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual.

Definição 1. *Um* ***sistema de coordenadas locais*** *(ou carta local) de dimensão n em M é um par (U, φ), onde $U \subset M$ é um conjunto aberto em M e $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.*

Definição 2. *Um* ***atlas*** *de dimensão n sobre M é uma coleção $\Phi = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ tal que $M = \cup_{i\in I} U_i$ e (U_i, φ_i) são cartas locais de dimensão n. Um atlas é diferenciável se as mudanças de coordenadas são diferenciáveis, isto é, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ são diferenciáveis sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.*

Definição 3. *Uma* ***variedade diferenciável*** *é um par (M, Φ), em que M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável de abertos, e Φ é um atlas diferenciável de dimensão n.*

Definição 4. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação e $p \in M$. Diz-se que f é* ***diferenciável em*** *$p \in M$, se existem sistemas de coordenadas (U, φ) e (V, ψ) tais que $p \in U, f(p) \in V$ e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Se f é diferenciável para todo ponto $p \in M$ dizemos que f é* ***diferenciável*** *e $f \in C^\infty(M)$.*

Dada uma variedade diferenciável M e $p \in M$, considere o conjunto $F_p = \{f : U_p \to \mathbb{R}; U_p \subset M \text{ é um aberto }, p \in U_p, f \text{ diferenciável}\}$.

Definição 5. *Um vetor tangente a M no ponto p é uma função $X_p : F_p \to R$ tal que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in F_p$, satisfaz*

1. $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$
2. $X_p(fg) = f(a)X_p(g) + g(p)X_p(f)$ *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $f, g \in F_p$

Definição 6. *O espaço tangente a M no ponto p é o conjunto T_pM de todos os vetores tangentes a M no ponto p.*

O conjunto T_pM é um espaço vetorial real de dimensão n. Além disso, se (U, φ) é uma carta local com $p \in U$, então as aplicações $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) : F_p \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)(f) = \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p))$$

são vetores tangentes, de acordo com a definição acima. Nesse sistema de coordenadas, o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ é uma base para T_pM.

Definição 7. *Um campo vetorial sobre M é uma aplicação*

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

que leva cada função f em $X(f)$, isto é, fixo $p \in M$, $X(p)$ define um vetor tangente a p, assim $X(f)(p) = X(p)(f)$.

2.2 A Desigualdade Isoperimétrica Euclidiana

Seja γ uma curva fechada simples no plano Euclidiano. Então o comprimento l de γ e a área A do domínio V limitado por γ são sujeitas à relação $l^2 \geq 4\pi A$, onde a igualdade é dada se e somente se γ é um círculo. Isto é, os domínios de máxima área que são limitados por curvas fechadas simples de comprimento l são discos. A inequação anterior é chamada a *desigualdade isoperimétrica*. Isto é de fato uma das mais famosas inequações entre invariantes geométricos.
Seja Ω um domínio limitado no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira diferenciável $\partial\Omega$. Então entre o volume $n-$dimensional $|\Omega|$ de Ω e o volume $(n-1)-$dimensional $|\partial\Omega|$ de $\partial\Omega$, a seguinte relação, chamada *desigualdade isoperimétrica*, é válida que:

$$|\partial\Omega| \geq c_n |\Omega|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{1}$$

A igualdade é válida se e somente se Ω é uma bola $B_r(p)$ de $\mathbb{R}^n$. Aqui c_n é definido como segue. Denotamos (só nesta subseção 2.2) por α_{n-1} (resp., ω_n) o volume $(n-1)-$dimensional da esfera unitária (resp., o volume da bola unitária B^n em $\mathbb{R}^n$)e tomamos $c_n := \alpha_{n-1}/\omega_n^{(n-1)/n}$.
A desigualdade isoperimétrica tem uma longa história, e muitas provas são conhecidas. No que segue daremos um esboço da prova baseado em uma ideia de M. Gromov. Vamos assumir que $|\Omega| = \omega_n$, e observamos

que ambos os lados de (1) são multiplicados por c^{n-1}, se aplicamos uma homotetia de fator de escala $c > 0$. Fixamos também uma base ordenada ortonormal $\{e_i\}$ e seja B a bola unitária centrada na origem. Agora definimos a aplicação $f : \bar{\Omega} \to \bar{B}$ forma seguinte:
Tomamos o hiperplano $H_1(p)$ passando pelo ponto p e perpendicular a e_1 definido por $x^1 = a^1$. Logo Ω é dividido por $H_1(p)$ em duas partes

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega; x^1 > a^1\} \text{ e } \Omega^- = \{x \in \Omega; x^1 < a^1\}$$

Agora vamos tomar um hiperplano $\hat{H}_1(p)$ paralelo a $H_1(p)$ de modo que $|\Omega^+|/|B^+| = |\Omega^-|/|B^-|$, onde B^+, B^- são as duas partes de B dividido por $\hat{H}_1(p)$ como anteriormente, seja $\Omega_1 := H_1(p) \cap \Omega$ e tomamos o subespaço $(n-2)-$dimensional $H_2(p)$ em $H_1(p)$ passando pelo ponto p perpendicular a e_2.
Podemos escolher agora um subespaço $(n-2)-$dimensional $\hat{B}_2(p)$ contido em $\hat{B}_1(p)$ perpendicular a e_2 de modo que se $B_1 := \hat{H}_1(p) \cap B$ temos que $|\Omega_1^+|/|B_1^+| = |\Omega_1^-|/|B_1^-|$. Onde $\Omega_1^{\pm}$, $B_1^{\pm}$ são definidos como antes. Repetindo este proceso $n-$vezes, obtemos $H_n(p) = \{p\}$, e o correspondente $\hat{H}_n(p)$ também consiste de um ponto, que é definido como $f(p)$. Podemos definir uma função $\tilde{f} : B \to \bar{\Omega}$, analogamente à definição de f, trocando B por Ω e viceversa. É fácil verificar que $\tilde{f} \circ f = 1_{\bar{\Omega}}$. Logo f é sobrejetora.

Observação 1. *Em geral f é só sobrejetora e não bijetora, ver figura 1. Se Ω é convexo, então f é bijetora.*

Se a função f é da forma $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n)$ então temos que $f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) = \xi(x^1, x^2, \cdots, x^i)$ Olhando de perto a função f é fácil se convencer que f é diferenciável de classe C^1 em Ω e que, temos $\partial f^i/\partial x^j = 0$ quando $j > i$. Logo, a matriz Jacobiana $\nabla f = [\partial f^i/\partial x^j]$ é triangular. Agora da definição de f e do teorema de Fubini, vemos que f preserva a medida e $\det \nabla f(p) = 1$. Denotando por $\lambda_1(p), \cdots, \lambda_n(p)$ os elementos da diagonal, é fácil de ver que $\lambda_i(p) > 0$ da definição de f, mas omitimos os detalhes pois são padrão e um pouco técnicos. Logo $\lambda_1(p) \cdots \lambda_n(p) = 1$. Por outro lado, temos $\| f(p) \| \leq 1$, $p \in \bar{\Omega}$, desde que $f(\bar{\Omega}) \subset \bar{B}$.
Agora denotamos por ν o campo de vetores normais unitários exterior a $\partial\Omega$ e consideramos f como um campo vetorial em Ω, pelo teorema de Green

$$\int_\Omega div f d\nu_{g_0} = \int_{\partial\Omega} \langle f(q), \nu(q) \rangle dA, \text{ e}$$

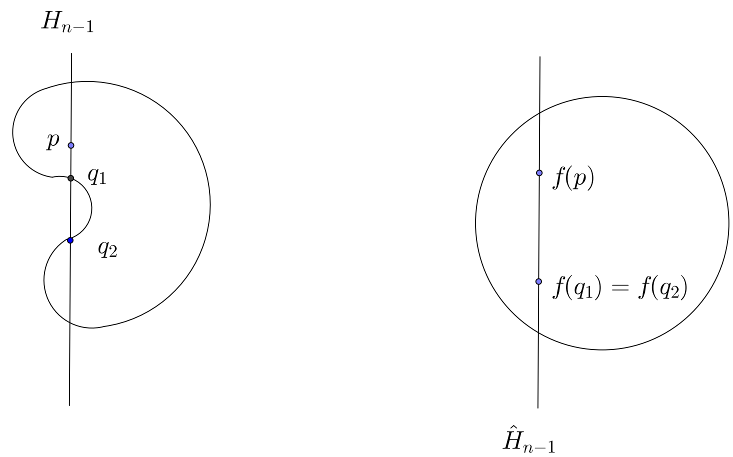

Figura 1:

$$div f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p).$$

Então, notando que $\mathrm{div} f(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p) \geq n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(p)\right)^{1/n} = n$ pela desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica, temos

$$n\omega_n = n|\Omega| \leq \int_{\Omega} div f d\nu_{g_0} = \int_{\partial\Omega} \langle f(q), \nu(q) \rangle dA \leq div f(p) \leq |\partial\Omega|, \quad (2)$$

onde a última desigualdade segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Lembre que $n\omega_n = \alpha_{n-1}$, então $|\partial\Omega| \geq \alpha_{n-1}$ asumindo que $|\Omega| = \omega_n$ temos (1).

Lema 2.1. (*Desigualdade geométrica-aritmética*) *Sejam* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in]0, +\infty[$. *Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{1/n}. \quad (3)$$

Em particular vale a igualdade em (3) *se e somente se* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Demonstração: Desde a convexidade da função exponecial, temos

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} &= e^{\log\left[\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n}\right]} \\
&= e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(\lambda_i)} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\log(\lambda_i)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.
\end{aligned}$$

Logo a (3) segue imediatamente.

Caso da igualdade. Se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ demostrar que vale a igualdade em (3) é trivial. Agora se

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n}, \tag{4}$$

demostraremos pelo absurdo que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. Suponhamos que existem $\lambda_i \neq \lambda_j$. Pondo $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\lambda_1 < A < \lambda_2. \tag{5}$$

Consideramos agora

$$\tilde{\lambda}_i = \begin{cases} A, & \text{se } i = 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - A, & \text{se } i = 2 \\ \lambda_i, & \text{se } 3 \leq i \leq n. \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i &= \frac{1}{n}(A + \lambda_1 + \lambda_2 - A + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = A.
\end{aligned}$$

De outra parte

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i &= [A(\lambda_1 + \lambda_2 - A) - \lambda_1\lambda_2]\lambda_3 \cdots \lambda_n \\
&= \left[A\lambda_1 + A\lambda_2 - A^2 - \lambda_1\lambda_2\right] \lambda_3 \cdots \lambda_n \\
&= (A - \lambda_1)(\lambda_2 - A)\lambda_3 \cdots \lambda_n.
\end{aligned}$$

Usando (5) obtemos que

$$\prod_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0,$$

logo

$$A \quad \geq \quad \left(\prod_{i=1^n} \tilde{\lambda}_i \right)^{1/n} > \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{1/n}$$

mas isso está em contradição com (4). $\square$

Agora vamos ver o caso onde a igualdade é satifeita. Primeiro, note que neste caso temos $\lambda_1(p) = \cdots = \lambda_n(p) = 1$ para $p \in \Omega$, e $\langle f, \nu \rangle \equiv 1$ em $\partial\Omega$. Daqui $f(q) = \nu(q)$ com $q \in \partial\Omega$. Lembre também que, para $p \in \Omega$, $H_{n-1}(p)$ é uma linha paralela a e_n, prova-se que $H_{n-1}(p)$ intersecta $\partial\Omega$ em exatamente dois pontos, caso contrário existe um ponto $p \in \Omega$ tal que $H_{n-1}(p)$ intersecta a $\partial\Omega$ em q_1, q_2 ($q_1 \neq q_2$), e o segmento de $H_{n-1}(p)$ que une q_1 e q_2 não intersecta Ω, então da definição de f temos $f(q_1) = f(q_2)$, e este ponto pertence ao interior de B. Por outro lado, temos $\| f(q_1) \| = \| f(q_2) \| = 1$, que é uma contradição.
Segundo, se a igualdade é atiginda em (1), então também temos a igualdade em (2) para qualquer base ordenada ortonormal $\{e_i\}$, e portanto podemos escolher e_n e consequentemente $H_{n-1}(p)$ em direções arbitrárias. Então Ω é um domínio convexo em $\mathbb{R}^n$, desde que qualquer segmento que une dois pontos quaisquer em $\partial\Omega$ esta contido em $\bar{\Omega}$.
Terceiro, se a igualdade se dá, temos $\partial f^i / \partial x^i \equiv 0$ quando ($j > i$) e $\lambda_i = \partial f^i / \partial x^i \equiv 1$.
Portanto, podemos asumir que

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (x^1, x^2 + g_2(x^1), x^3 + g_3(x^1, x^2), \cdots) \tag{6}$$

Por translação paralela se for necessário. Então $|\Omega^{\pm}| = |B^{\pm}|$ e pela fórmula da co-área temos $|\Omega_1| = |B_1|$. Portanto pela construção de f, para Ω_1 e $f_1 : \Omega_1 \to B_1$, que é a restrição de f a $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, o sinal de igualdade se mantém na desigualdade correspondente a (2) depois de normalização $|\Omega_1| = \omega_{n-1}$. Por outro lado isto é válido sucessivamente definindo $\Omega_i, f_i : \Omega_i \to B_i$ para $i = 1, \cdots, n-2$.
Em particular, para Ω_{n-2}, que é uma seção de Ω pelo plano paralelo a $\langle e_{n-1}, e_n \rangle_{\mathbb{R}}$, e para $f_{n-2} : \Omega_{n-2} \to B_{n-2}$, o sinal de igualdade se mantém

na desigualdade correpondente em (2), e portanto (6) se mantém.
No caso 2−dimensional, é fácil de ver que Ω_{n-2} é um disco. Já que podemos tomar $\langle e_{n-1}, e_m \rangle_{\mathbb{R}}$ como 2-planos arbitrários, deduz-se que uma seção de Ω por qualquer 2-plano é um disco cujo raio não é maior do que 1. Desde que f seja sobrejetiva, temos uma seção de Ω que é um disco D de raio 1. Denotamos por q_1, q_2 pontos antípodas de D, então seções de Ω por planos arbitrários d contendo q_1, q_2 são discos de raio 1, e Ω é uma bola de raio 1, centrada no ponto meio do segmento que une q_1 a q_2.
Em geral, para qualquer subvariedade $(n-1)-$dimensional compacta H sem fronteira em $\mathbb{R}^n$ e qualquer variedade $n-$dimensional Ω de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega = H$ que minimiza o volume entre as subvariedades de dimensão n, a desigualdade isoperimétrica (1) se mantém. Por outra parte, temos a igualdade se e somente se H é uma esfera $(n-1)-$dimensional contida em um subespaço $n-$dimensional afim.
Seja (S^n, g_0) a esfera com curvatura constante 1 e Ω um domínio em S^n com fronteira diferenciável. Tomamos uma bola B em S^n tal que $|B| = |\Omega|$.
Então, a saber

$$|\partial\Omega| \geq |\partial B|$$

e temos a igualdade se e somente se Ω é congruente com B. Além disso a mesma desigualdade isoperimétrica também se mantém para o espaço hyperbólico (H^n, g_0). Se queremos considerar a desigualdade isoperimétrica da forma (1) em uma variedade (conexa) Riemanniana M devemos representar uma constante correspondente a c_n em termos de quantidades geométricas de M.

2.3 Geometria Riemanniana

Seja M uma *variedade diferenciável*. Uma métrica Riemanniana g em M é um (2,0)-*campo tensorial diferenciável* em M tal que para qualquer $x \in M$, $g(x)$ é um *produto escalar* em $T_x(M)$. Uma variedade Riemanniana é um par (M, g) onde M é uma variedade diferenciável e g uma métrica em M.

Duas variedades Riemannianas (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são chamadas isométricas se existe um difeomorfismo $f : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que $f^* g_2 = g_1$. Dado (M, g) uma variedade Riemanniana diferenciável, e $\gamma : [a, b] \to M$

uma curva de classe C^1, o comprimento de γ é

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t)).\left(\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t, \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t\right)}dt$$

onde $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t \in T_{\gamma(t)}(M)$ é tal que $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t f = (f \circ \gamma)'(t)$ para qualquer $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\gamma(t)$. Se γ é C^1 diferenciável por partes, o comprimento de γ pode-se definir como a soma dos comprimentos destas partes.

Definição 8. *Para x e y em M, seja C_{xy} o espaço das curvas C^1 por partes $\gamma : [a, b] \to M$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.*

$$d_g(x, y) = \inf_{\gamma \in C_{xy}} \mathrm{L}(\gamma)$$

*diremos que d_g é a **distância associada a** g.*

Proposição 2.1. (*Teorema [Pet06],pag. 123.*) *d_g define uma distância em M e a topologia coincide com a original de M.*

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão ([DC79], Teorema 3.6) em M com a propriedade que $\nabla g = 0$. Tal conexão é dita conexão de Levi-Civita de g. Para qualquer *carta* (Ω, φ) de M (Cap. 0 [DC79]), de coordenadas associadas x^i, para qualquer $x \in \Omega$, os símbolos de Christoffel são dados pelas relações

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mj}}{\partial x_i}\right)_x + \left(\frac{\partial \mathrm{g}_{mi}}{\partial x_j}\right)_x - \left(\frac{\partial \mathrm{g}_{ij}}{\partial x_m}\right)_x\right) g(x)^{mk}$$

onde os g^{ij} são tais que $g_{im}g^{mj} = \delta_i^j$.

Definição 9. *A curvatura R de ∇ podemos ver como um $(3, 1)$-campo tensorial diferenciável em M cujas componentes em qualquer carta são dadas pela relação*

$$R'_{ijk} = \frac{\partial \Gamma'_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma'_{ji}}{\partial x_k} + \Gamma'_{j\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ki} - \Gamma'_{k\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ji}.$$

Observação 2. $R'_{ijk} = -R'_{ikj}$.

Podemos definir:

1. A **curvatura de Riemann** $Rm_{(M,g)}$ de g como o (4,0)- campo tensorial em M cujas componentes em cartas são

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl}.$$

2. A **curvatura de Ricci** $Rc_{(M,g)}$ de g, como o $(2,0)-$campo tensorial diferenciável em M cujas componentes em cartas são

$$R_{ij} = R_{\alpha i \beta j} g^{\alpha\beta}.$$

3. A **curvatura *escalar*** $Scal_{(M,g)}$ de g como a função diferenciável de valores reais em M cuja expressão em carta é

$$Scal_{(M,g)} = R_{ij} g^{ij}.$$

É fácil de ver, que para qualquer carta,

$$R_{ijkl} = R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}.$$

São validas também as duas desigualdades de Bianchi

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0,$$
$$\left(\nabla_i Rm_{(M,g)}\right)_{jklm} + \left(\nabla_m Rm_{(M,g)}\right)_{jkil} + \left(\nabla_l Rm_{(M,g)}\right)_{jkmi} = 0.$$

Em particular, a curvatura de Ricci, $Rc_{(M,g)}$ de g é un tensor simétrico, assim em qualquer carta $R_{ij} = R_{ji}$. Para qualquer $x \in M$, seja $G_x^2(M)$ a 2-Grassmanniana de $T_x(M)$. A curvatura seccional $K_{(M,g)}$ de g é a função de valores reais definida em $\cup_{x\in M} G_x^2(M)$ dada por:

$$K_{(M,g)}(P) = \frac{Rm_{(M,g)}(x)(X,Y,X,Y)}{g(x)(X,X)g(x)(Y,Y) - g(x)(X,Y)^2},$$

onde $P \in G_x^2(M)$, (X,Y) é uma base de P. Tal definição independe da escolha da base. Por outra parte pode-se mostrar que a curvatura seccional determina a curvatura de Riemann.

2.4 Geodésicas; Aplicação Exponencial

No que segue, (M,g) é uma variedade Riemanniana, e D a conexão de Levi-Civita.

Definição 10. *Uma curva diferenciável* $\gamma : [a, b] \to M$ *é uma geodésica se para todo* $t \in I$*,*

$$D_{\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_t}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$$

Isto significa que em qualquer carta, e para todo $k \in 1, ..., n$ vale

$$\left(\gamma^k\right)^{''}(t) + \Gamma^k_{ij}\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma^i\right)^{'}(t)\left(\gamma^j\right)^{'}(t) = 0.$$

Como as geodésicas são soluções de uma equação diferencial de segundo ordem não linear, o seu domínio maximal de definição é um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ o qual nem sempre é todo $\mathbb{R}$.
Para todo $x \in M$, e qualquer $X \in T_x(M)$, existe uma única geodésica $\gamma : [0, \epsilon] \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_0 = X$. Seja $\gamma_{x,X}$ tal geodésica. Para $\lambda > 0$ real, $\gamma_{x,\lambda X}(t) = \gamma_{x,X}(\lambda t)$. Portanto para $\| X \|$ suficientemente pequeno, onde $\| . \|$ representa a norma em $T_x(M)$ associada a $g(x)$, temos que $\gamma_{x,X}$ é definido em todo $[0, 1]$.
A aplicação exponencial em x é uma aplicação de uma vizinhança de 0 em $T_x(M)$, com valores em M, definido por $\exp_x(X) = \lambda_{x,X}(1)$.

Proposição 2.2. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana,* $n-$*dimensional. Para todo ponto* $x \in M$*, existe* $\Omega_x \subseteq T_xM$*,* Ω_x *aberto, tal que* $exp_{x|_M}$ *é um difeomorfismo.*

Sabemos também que $T_xM \cong \mathbb{R}^n$ logo é possível definir uma carta (Ω_x, exp_x^{-1}). Chamaremos uma tal carta de carta exponencial. Esta carta é *normal* em x no sentido que a componentes g_{ij} de g em esta carta são tal que $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, com a propriedade que os símbolos de Chistoffel da conexão de Levi-Civita em esta carta são tal que $\Gamma^k_{ij}(x) = 0$. As coordenadas associadas a esta carta são referidas como coordenadas geodésicas normais.

Teorema 2.1 (Hopf-Rinow)**.** *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O espaço métrico* (M, d_g) *é completo.*
2. *Qualquer subconjunto fechado e limitado de* M *é compacto.*
3. *Existe* $x \in M$ *tal que* exp_x *é definida sobre todo* $T_x(M)$*.*
4. *Para qualquer* $x \in M$*,* exp_x *é definida em todo o conjunto* $T_x(M)$*.*

Por outro lado, obtém-se que qualquer das anteriores afirmações, implica que quaisquer dois pontos em M podem-se unir por uma geodésica minimizante. Aqui, uma curva γ de x a y é chamada minimizante se $L(\gamma) = d_g(x, y)$. Dado (M, g) uma $n-$variedade Riemanniana diferenciável, podemos definir uma medida de Radon positiva em M. Em particular, a teoria da integral de Lebesgue se-pode aplicar. Para $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ atlas de M, diremos que a família $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j\in J}$ é uma partição da unidade subordinada à $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ou seja:

1. $(\alpha_j)_j$ é uma partição diferenciável da unidade subordinada á cobertura $(\Omega_i)_i$,
2. $(\Omega_j, \varphi_j)_j$ é um atlas de M, e
3. Para qualquer $j \in I$, supp $\alpha_j \subset \Omega_j$.

Facilmente podemos ver que para qualquer atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de M, existe uma partição da unidade $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j\in J}$. Definimos então a medida Riemanniana como segue: Dado $f : M \to \mathbb{R}$ contínua com suporte compacto, e dado $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ um atlas de M,

$$\int_M f dv_g = \sum_{j\in J} \int_{\varphi_j(\Omega_j)} \left(\alpha_j \sqrt{|g|f}\right) \circ \varphi_j^{-1} dx$$

onde $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j\in J}$ é uma partição da unidade subordinada a $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$, $|g|$ representa o determinante da matriz cujos elementos são as componentes de g em (Ω_j, φ_j), e dx representa o elemento volume de $\mathbb{R}^n$, tal construção independe da escolha do atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ e a partição da unidade $(\Omega_j, \varphi_j, \alpha_j)_{j\in J}$. Esta medida é dita **medida Riemanniana**.

2.5 Espaços de Sobolev em Variedades Riemannianas Compactas

Esta seção reúne os resultados de base pela teoria dos espaços de Sobolev em variedades Riemannianas e resulta fortemente inspirado do livro [Heb99]. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, α um multi-índice de comprimento $|\alpha|$, e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, uma função com valores reais em Ω, **localmente integrável**, i.e., $\int_K |u|dx < +\infty$, para todo $K \subset\subset \Omega$. Uma função $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é chamada a α **derivada distribucional** de u; escrevemos $v_\alpha = D_\alpha u$, se para qualquer $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega u(D_\alpha \varphi) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi dx,$$

onde $D(\Omega)$ denota o espaço das funções diferenciáveis com suporte compacto em Ω, e dx é o elemento de volume Lebesgue. Se tal v_α existe, isto é, quando $D_\alpha u$ existe para qualquer α tal que $|\alpha| = 1$, u é dita fracamente diferenciável em Ω. Dizemos que u é k **vezes fracamente diferenciável**, se todo $D_\alpha u$ existe para $|\alpha| \leq k$.

Definição 11. *Dado $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, e $a < b$ real, diremos que u é* ***absolutamente contínua*** *em $[a, b]$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer sequência finita*

$$a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots \leq x_m < y_m \leq b,$$

temos que

$$\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i) \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=i}^{m} |u(y_i) - u(x_i)| \leq \epsilon.$$

É fácil de ver que, u é absolutamente contínua em $[a, b]$ se e somente se existe v integrável no sentido de Lebesgue em $[a, b]$ tal que para qualquer $a \leq x \leq b$,

$$u(x) - u(a) = \int_a^x v(t)dt.$$

Em particular, u é diferenciável em quase todo ponto e $u' = v$. Por extensão dado Ω conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função com valores reais, diremos que u é absolutamente contínua em todo (resp. quase todo) segmento de linha em Ω paralelo aos eixos coordenados, se para todo (resp. quase todo) $x = (x_1, \cdots, x_n)$ em Ω, para todo $i = 1, \cdots, n$ e todo $a < x_i < b$ tal que

$$\{(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n), x \in [a, b]\} \subset \Omega,$$

a função

$$x \to u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

é absolutamente contínua em $[a, b]$. De acordo com o dito acima, se u é absolutamente contínua em quase toda linha de segmento em Ω paralelo aos eixos coordenados, então u tem derivadas parciais de primeira ordem em quase todo ponto.

Teorema 2.2. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então u é fracamente diferenciável em Ω se e somente se (até modificações em um conjunto de medida zero) u satisfaz as duas condições seguintes*

(i) u é absolutamente contínua em quase todo segmento de linha em Ω paralelo aos eixos coordenados

(ii) A primeira derivada parcial de u (que existe em quase todo ponto) pertence a $L^1_{loc(\Omega)}$

Lembremos agora alguns conceitos referentes à teoria dos espaçõs de Sobolev no contexto Euclidiano. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, k um inteiro, $p \geq 1$ real, e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com valores reais.

$$\| u \|_{k,p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left(\int_\Omega |D_\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e definimos os espaços de Sobolev

$$\begin{aligned} H_k^p(\Omega) &= \text{a completação de } \{u \in C^\infty(\Omega); \| u \|_{k,p} < +\infty\} \\ &\quad \text{para a norma } \| \,.\, \|_{k,p}, \\ W_k^p &= \{u \in L^p(\Omega)/\forall |\alpha| \leq k, D_\alpha u \text{ existe e pertence a } L^p(\Omega)\}, \end{aligned}$$

onde $D_\alpha u$ denota a α derivada parcial fraca de u definida anteriormente.

Teorema 2.3. *Para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, qualquer k, e qualquer $p \geq 1$, $H_k^p(\Omega) = W_k^p(\Omega)$.*

Teorema 2.4. *(i): Se Ω é limitado, subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é Lipschitz, então $u \in H_1^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$.*

(ii): Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz, com $u \in H_1^p(\Omega)$ para algum $p \geq 1$. Se $h \circ u \in L^p(\Omega)$, então $h \circ u \in H_1^p(\Omega)$ e

$$D_i(h \circ u)(x) \quad = \quad h^{'}(u(x)) D_i u(x),$$

para todo i=1,...,n, e quase todo ponto $x \in \Omega$.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, para k inteiro, e $u : M \to \mathbb{R}$ diferenciável, denotamos por $\nabla^k u$ a derivada covariante k-esima de u, e $|\nabla^k u|$ a norma de $\nabla^k u$ definida em uma carta por:

$$|\nabla^k u| = g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} (\nabla^k u)_{i_1 ... i_k} (\nabla^k u)_{j_1 ... j_k}$$

lembre que $(\nabla u)_i = \partial_i u$, e também

$$(\nabla^2 u)_{ij} = \partial_{ij} u - \Gamma_{ij}^k \partial_k u$$

dado k inteiro, e $p \geq 1$ real, seja

$$\mathbf{C}_k^p(M) = \{u \in C^\infty(M) / \text{ para todo } j = 0, ...k, \int_M |\nabla^j u|^p dv_g < \infty\}.$$

Proposição 2.3. *Dada (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, então $\mathbf{C}_k^p(M) = C^\infty(M)$.*

Para qualquer k inteiro e $p > 1$ real, definimos

$$\| u \|_{H_k^p} := \sum_{j=0}^{k} \left(\int_M |\nabla^j u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 12. *Dada (M, g) uma variedade Riemanniana, k um inteiro, $p \geq 1$ real, o espaço de Sobolev $H_k^p(M)$ é a completação de $\mathbf{C}_k^p(M)$ com respeito à norma $\| \,.\, \|_{H_k^p}$.*

Estes espaços podem ser vistos como subespaços dos $L^p(M)$. Seja $\| \,.\, \|_p$ a norma de $L^p(M)$ definida por

$$\| u \|_p = \left(\int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

É fácil de ver que

1. Toda sequência de Cauchy em $(\mathbf{C}_k^p(M). \| \,.\, \|_{H_k^p})$ é uma sequência de Cauchy no espaço Lebesgue $(L^p(M), \| \,.\, \|_{H_k^p})$,

2. Toda sequência de Cauchy em $(\mathbf{C}_k^p(M), \| \,.\, \|_{H_k^p})$ que converge para 0 no espaço de Lebesgue $(L^p(M), \| \,.\, \|_{H_k^p})$ também converge para 0 em $(\mathbf{C}_k^p(M). \| \,.\, \|_{H_k^p})$.

Como uma consequência, podemos ver que $H_k^p(M)$ é um subespaço de $L^p(M)$ feito de funções $u \in L^p(M)$ com limites em $(L^p(M), \| \,.\, \|_p)$ de uma sequência de Cauchy em $(C_k^p(M), \| \,.\, \|_p)$, e definimos $\| u \|_{H_k^p}$ como anteriormente, onde $|\nabla^j u|$, $0 \leq j \leq k$, é agora o limite em $(L^p(M), \| \,.\, \|_p)$ de uma sequência de Cauchy $(|\nabla^j u_m|)$. Voltando à Definição 12 podemos substituir $\| \,.\, \|_{H_k^p}$ por qualquer norma equivalente. Em particular vale a proposição seguinte.

Proposição 2.4. *Para qualquer k inteiro, $H_k^2(M)$ é um espaço de Hilbert quando esta dotado com a norma equivalente*

$$\| u \| = \sqrt{\sum_{j=0}^{k} \int_M |\nabla^j u|^2 dv_g},$$

o produto escalar $\langle ., . \rangle$ associado a $\| . \|$ é definido por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=0}^{k} \int_M \langle \nabla^j u, \nabla^j v \rangle dv_g,$$

onde, $\langle ., . \rangle$ é um produto escalar de campos tensoriais covariantes associados a g.

Proposição 2.5. *Seja M uma variedade compacta munida de duas métricas Riemannianas g e $\tilde{g}$, então existe $C > 1$ tal que*

$$\frac{1}{C} g \leq \tilde{g} \leq C g, \tag{7}$$

onde (7) tem que entender se no sentido das formas quadráticas.

Proposição 2.6. *Se M é compacta, $H_k^p(M)$ não depende da métrica.*

Proposição 2.7. *Se $p > 1$, $H_k^p(M)$ é reflexivo.*

Proposição 2.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $u : M \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz em M com suporte compacto. Então $u \in H_1^p(M)$ para qualquer $p > 1$. Em particular, se M é compacta, qualquer função Lipschitz em M pertence ao espaço de Sobolev $H_1^p(M)$ com $p \geq 1$.*

Teorema 2.5. *Dada (M, g) uma variedade Riemanniana completa, o conjunto $D(M)$ de funções diferenciáveis com suporte compacto em M é denso em $H_1^p(M)$ para qualquer $p \geq 1$.*

Teorema 2.6 (Desigualdade de Hölder, ver [Bog07] pag. I-140)**.** *Seja (X, A, μ) um espaço com medida não negativa μ (finita ou com valores em $[0, \infty]$), suponha que $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$. Então $fg \in L^1(\mu)$ e*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

2.6 Melhores constantes no caso Compacto

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional, pelo teorema de imersão de Sobolev temos que para qualquer $p \in [1, n[$ real, $H_1^p(M) \subset L^{p^*}(M)$ onde $1/p^* = 1/p - 1/n$. Logo existem duas constantes reais A, B que podem depender da métrica g, tal que para qualquer $u \in H_1^p(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g \right)^{1/p^*} \leq A \left(\int_M |\nabla u|^p dv_g \right)^{1/p} + B \left(\int_M |u|^p dv_g \right)^{1/p}. \quad (8)$$

Começamos primeiro com algumas definições

$$A_p(M) := \{A \in \mathbb{R}^+ : \exists B \in \mathbb{R} \text{ para que (8) é válida}\}$$

observe que analogamente podemos definir

$$B_p(M) := \{B \in \mathbb{R}^+ : \exists A \in \mathbb{R} \text{ para que (8) é válida}\}$$

mas somente precisamos estudar o primeiro conjunto. Claramente se $A \in A_p(M)$, e se $\bar{A} \geq A$, então $\bar{A} \in A_p(M)$. Assim $A_p(M)$ é um intervalo de extremo direito $+\infty$ portanto o número mais importante é $\alpha_p(M) = \inf A_p(M)$ a questão natural é saber se $A_p(M)$ é um conjunto fechado ou seja se $\alpha_p(M) \in A_p(M)$, i.e., que existe $B \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $u \in H_1^p(M)$.

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g \right)^{1/p^*} \leq \alpha_p(M) \left(\int_M |\nabla u|^p dv_g \right)^{1/p} + B \left(\int_M |u|^p dv_g \right)^{1/p}.$$

Teorema 2.7 (Teorema 4.4 [Heb99]). *Seja* $1 \leq p < n$ *e* $1/p^* = 1/p - 1/n$*, para qualquer* $u \in D(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq K(n,p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

onde

$$\begin{aligned} K(n,1) &= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{\omega_{n-1}} \right)^{1/n} \\ K(n,p) &= \frac{1}{n} \left(\frac{n(p-1)}{n-p} \right)^{1-1/p} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/p)\Gamma(n+1-n/p)\omega_{n-1}} \right)^{1/n} \end{aligned}$$

quando $p > 1$, *e* ω_{n-1} *é o volume da esfera unitária em* $\mathbb{R}^n$.

Observação 3.

$$\lim_{p\to 1} K(n,p) = K(n,1). \tag{9}$$

Teorema 2.8 (Teorema 4.2 [Heb99])**.** *Seja (M,g) uma variedade n-dimensional (não necessariamente compacta) e seja $p \in [1,n[$ um número real. Suponha que existem $A, B \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $u \in D(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{1/p^*} \leq A\left(\int_M |\nabla u|^p dv_g\right)^{1/p} + B\left(\int_M |u|^p dv_g\right)^{1/p}$$

onde $1/p^* = 1/p - 1/n$. Então $A \geq K(n,p)$ com $K(n,p)$ como no teorema 2.7.

Teorema 2.9 (Teorema 4.5 [Heb99])**.** *Seja (M,g) uma variedade compacta n-dimensional, para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $q \in [1,n[$ real, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer $u \in H_1^q(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^{q^*} dv_g\right)^{q/q^*} \leq (K(n,q)^q + \epsilon)\int_M |\nabla u|^q dv_g + B\int_M |u|^q dv_g$$

onde $1/q^* = 1/q - 1/n$ e $K(n,q)$ é como no Teorema 2.7. Em particular, para qualquer variedade Riemanniana compacta (M,g) e qualquer $q \in [1,n[$, $\alpha_q(M) = K(n,q)$.

2.7 Princípio de Concentração Compacidade

Teorema 2.10. *[Lema-I Pag. 39 [Str96]] Seja μ_m uma sequência de medidas de probabilidades em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu_m \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m = 1$. Então existe uma subsequência (μ_m) tal que somente uma das seguintes condições é satisfeita:*

i. (Compacidade) Existe uma sequência $x_m \subset \mathbb{R}^n$ tal que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $R > 0$ com a propriedadee que

$$\int_{B(x_m,R)} d\mu_m \geq 1 - \epsilon, \forall m.$$

ii. (Evanescência) Para todo $R > 0$ temos

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B(x,R)} d\mu_m\right) = 0.$$

iii. *(Dicotomia) Existe um número λ, $0 < \lambda < 1$, tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um número $R > 0$ e uma sequência $(x_m) \subset \mathbb{R}^n$ com a seguinte propriedadee: Dado $R' > R$, existem medidas μ_m^1, μ_m^2 tal que*

$$0 \leq \mu_m^1 + \mu_m^2 \leq \mu_m,$$

$$supp(\mu_m^1) \subset B(x_m, R), \; supp(\mu_m^2) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x_m, R'),$$

$$\limsup_{m\to\infty} \left(\left| \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m^1 \right| + \left| (1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m^2 \right| \right) \leq \epsilon.$$

Demonstração: A prova é baseada na noção de função de concentração

$$Q(r) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(x,r)} d\mu \right),$$

de uma medida não negativa. Dito isso sejam Q_m as funções de concentração associadas a cada μ_m, note que (Q_m) é uma sequência de funções limitadas crescentes, não negativas em $[0, +\infty[$ com $\lim_{R\to\infty} Q_m(R) = 1$. Portanto (Q_m) é localmente limitada em BV sobre $[0, \infty[$ e existe uma subsequência (μ_m) e uma função limitada crescente não negativa Q tal que

$$Q_m(R) \to Q(R), \text{ se } m \to \infty,$$

para quase todo $R > 0$. Como Q_m é crescente, segue que para qualquer $R > 0$ temos

$$Q(R) \leq \liminf_{m\to\infty} Q_m(R).$$

Seja

$$\lambda = \lim_{R\to\infty} Q(R),$$

claramente $0 \leq \lambda \leq 1$, se $\lambda = 0$ temos o caso Evanescência, agora suponha que $\lambda = 1$, então para algum $R_0 > 0$ temos $Q(R_0) > \frac{1}{2}$. Para qualquer $m \in \mathbb{N}$ seja x_m satisfazendo

$$Q_m(R_0) \leq \int_{B(y_m,R_0)} d\mu_m + \frac{1}{m},$$

para $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ fixo R tal que $Q(R) > 1-\epsilon > \frac{1}{2}$, e sejam y_m satisfazendo

$$Q_m(R) \leq \int_{B(y_m,R)} d\mu_m + \frac{1}{m},$$

então, com erro $o(1) \to 0$, se $m \to \infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{B(y_m,R)} d\mu_m + \int_{B(y_m,R_0)} d\mu_m &\geq Q_m(R_0) + Q_m(R) + o(1), \\ &\geq Q(R_0) + Q(R) + o(1) \end{aligned}$$

e o lado direito

$$> 1 = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m$$

para m suficentemente grande, logo para tal m

$$B(y_m, R) \cap B(x_m, R_0) \neq \emptyset$$

isto é $B(y_m, R) \subset B(x_m, 2R + r_0)$ e então

$$1 - \epsilon \leq \int_{B(x_m,2R+R_0)} d\mu_m$$

para m suficientemente grande, escolhendo R muito grande se for necessário, temos a Compacidade.
Se $0 < \lambda < 1$, dado $\epsilon > 0$ tomamos R e uma sequência (x_m) dependendo de ϵ e R tal que

$$Q_m(R) \geq \int_{B(x_m,R)} d\mu_m > \lambda - \epsilon,$$

se $m \geq m_0(\epsilon)$ tomando $m_0(\epsilon)$ grande se for necessário, podemos encontrar também uma sequência $R_m \to \infty$ tal que

$$Q_m(R) \leq Q_m(R_m) < \lambda + \epsilon,$$

se $m \geq m_0(\epsilon)$. Por outra parte, dado $R' > R$ assumindo que $R_m > R'$ para todo m, agora seja $\mu_m^1 = \mu_{m_{|_{B(x_m,R)}}}$ a restrição de μ a $B(x_m, R)$, similarmente definimos $\mu_m^2 = \mu_{m_{|_{(\mathbb{R} \setminus B(x_m,R))}}}$ é claro que

$$0 \leq \mu_m^1 + \mu_m^2 \leq \mu_m,$$

$$\text{supp}(\mu_m^1) \subset B(x_m, R), \ \text{supp}(\mu_m^2) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x_m, R_m) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x_m, R'),$$

finalmente para $m \geq m_0(\epsilon)$ estimamos

$$\left|\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m^1\right| + \left|(1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m^2\right| =$$

$$\left|\lambda - \int_{B(x_m,R)} d\mu_m\right| + \left|\int_{B(x_m,R_m)} d\mu_m - \lambda\right| < 2\epsilon.$$

□

Observação 4. *O teorema precedente é válido também se substituímos $\mathbb{R}^n$ com M variedade Riemanniana completa.*

Definição 13. *Seja u_j uma sequência de medidas sobre uma variedade Riemanniana completa M. Diremos que u_j* ***converge fracamente*** *a uma medida u, e escreveremos $u_j \rightharpoonup u$ se $\forall \varphi \in C_0(M) : \int_M \varphi u_j \to \int_M \varphi u$, onde $C_0(M)$ é o fecho de $C_c(M)$ respeito à norma $\| \, . \, \|_\infty$.*

Teorema 2.11. *[Lema-II Pag. 44 [Str96]] Seja $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $kp < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, suponha que $u_m \rightharpoonup u$ fracamente em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_m = |\nabla^k u_m|^p dx \rightharpoonup \mu$, $\nu_m = |u_m|^q dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas onde μ e ν são medidas limitadas não negativas em $\mathbb{R}^n$. Então*

i. Existe um conjunto J ao mais numerável, uma família $\{x^j; j \in J\}$ de pontos distintos de $\mathbb{R}^n$, e uma família $\{\nu^{(j)}; j \in J\}$ de números positivos tal que

$$\nu = |u|^q dx + \sum_{j \in J} \nu^{(j)} \delta_{x^{(j)}},$$

onde δ_x é a massa-Dirac de massa 1 concentrada em $x \in \mathbb{R}^n$.

ii. também temos

$$\mu \geq |\nabla^k u|^p dx + \sum_{j \in J} \mu^{(j)} \delta_{x^{(j)}}$$

para alguma família $\{\mu^{(j)}; j \in J\}$, $\mu^{(j)} > 0$ satisfazendo

$$S(\nu^{(j)})^{p/q} \leq \mu^{(j)}, \forall j \in J.$$

Em particular, $\sum_{j \in J} (\nu^{(j)})^{p/q} < \infty$.

Demonstração: Seja $v_m = u_m - u \in D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Então $v_m \rightharpoonup 0$ fracamente em $D^{k,p}$ e por (4,4)[Pag. 42 [Str96]] temos

$$\begin{aligned}\omega_m := \nu - |u|^q dx &= (|u_m|^q - |u|^q)dx \\ &= |u_m - u|^q dx + o(1) = |v_m|^q dx + o(1),\end{aligned}$$

onde $o(1) \rightharpoonup 0$ quando $m \to \infty$. Também seja $\lambda_m := |\nabla^k v_m|^p dx$. E assumimos que $\lambda_m \to \lambda$, enquanto $\omega_m \to \omega = \nu - |u|^q dx$ fracamente no sentido das medidas, onde $\lambda, \omega \geq 0$. Escolha $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^q d\omega &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^q d\omega_m = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |v_m \xi|^q dx \\ &\leq S^{-q/p} \liminf_{m\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^k (v_m \xi)|^p dx \right)^{q/p} \\ &= S^{-q/p} \liminf_{m\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^p |\nabla^k v_m|^p dx \right)^{q/p} \\ &= S^{-q/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi)|^p d\lambda \right)^{q/p}\end{aligned}$$

Observe que pelo Teorema de Rellich qualquer termos de ordem mais baixo $|\nabla^l \xi||\nabla^{k-l} v_m| \to 0$, quando $m \to \infty$ i.e., temos

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^q d\omega \right)^{p/q} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^p d\lambda \tag{10}$$

para todo $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Agora seja $\{x^{(j)}; j \in J\}$ os átomos da medida ω e descompondo $\omega = \omega_0 + \sum_{j\in J} \nu^{(j)} \delta_{x^{(j)}}$, com ω_0 livre dos átomos. Como $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega < \infty$, J é um conjunto ao mais numerável. Por outra parte, $\omega_0 \geq 0$. Escolhendo ξ tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi(x^{(j)}) = 1$ por (10) temos

$$\lambda \geq S(\nu^{(j)})^{p/q} \delta_{x^{(j)}}, \forall j \in J$$

como $|\nabla^k u_m|^p - |\nabla^k v_m|^p$ é de menor ordem de $|\nabla^k v_m|^p$ nos pontos de concentração, a última estimativa se mantém para μ.

Em outras palavras, pela fracamente semicontínua inferiormente temos

$$\mu \geq |\nabla^k u| p dx.$$

Esta última medida e as medidas $\delta_{x^{(j)}}$ são relativamente singular, portanto (ii).

Agora, para qualquer conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\int_\Omega d\lambda \leq S$, por (10) com $\xi = \xi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ que converge para a função característica de Ω quando $k \to \infty$ temos

$$\int_\Omega d\omega \leq \left(\int_\Omega d\omega\right)^{p/q} \leq S^{-1} \int_\Omega d\lambda \leq 1. \tag{11}$$

isto é, ω é absolutamente contínua com respeito a λ e pelo teorema de Radon-Nikodym existe $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ tal que $d\omega = f d\lambda$, $\lambda-$ quase todo ponto. Por outra parte, para $\lambda-$ $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$f(x) = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{\int_{B(x,\rho)} d\omega}{\int_{B(x,\rho)} d\lambda} \right).$$

Por (11), se x não é um atomo de λ,

$$Sf(x)^{p/q} = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{S\left(\int_{B(x,\rho)} d\omega\right)^{p/q}}{\left(\int_{B(x,\rho)} d\lambda\right)^{p/q}} \right) \leq \lim_{\rho \to 0} \left(\int_{B(x,\rho)} d\lambda \right)^{\frac{q-p}{q}} = 0.$$

λ-quase todo ponto. Como λ somente tem átomos contáveis e ω_0 não tem átomos, implica que $\omega = 0$ isto é (i). $\square$

2.8 Teorema de Gallot

Nesta seção apresentaremos a definição da função isoperimétrica em uma variedade Riemanniana compacta e do Teorema de Gallot a usar mais tarde.

Definição 14. *Dada uma variedade Riemanniana Compacta (M, g), para $\beta \in]0, 1[$ seja*

$W_\beta := \{\Omega \subset M : \Omega$ *domínio de fronteira* $\partial\Omega$ *diferenciável e* $|\Omega| = \beta|M|\}$.

Definição 15. *A função isoperimétrica $h :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$h(\beta) = \inf_{\Omega \in W_\beta} \left[\frac{|\partial\Omega|}{|M|} \right].$$

Observação 5. *i.* $h(\beta) \geq 0$, *ii.* $h(\beta) = h(1-\beta)$, *pois* $\partial\Omega = \partial(M \setminus \Omega)$,

iii. $h(0) := \lim_{\beta \longrightarrow 0} h(\beta) = 0 (= h(1))$.

Teorema 2.12. (*Lema 6.4 (iii),* [*Gal88*]) *Para toda variedade compacta* (M, g) *se* h^* *e* Φ *são duas funções de classe* C^1 *definidas respectivamente em* $]0, \frac{1}{2}]$ *e* $\mathbb{R}$*, se* Φ *é crescente e se* $\Phi \circ h_M - \Phi \circ h^*$ *atinge um mínimo local em um ponto* β *de* $]0, \frac{1}{2}]$*, então o ponto* β *é regular e a curvatura seccional* η *da superficie minimizante* H *que realiza* $h_M(\beta)$ *verifica*

$$(n-1)\eta = h'^*(\beta) \frac{\Phi'[h^*(\beta)]}{\Phi'[h_M(\beta)]}.$$

3 Formulação Funcional em $BV(M)$ do Teorema 1.1

Nesta seção apresentamos o principal resultado que discutiremos nesta dissertação, i.e., o Teorema 3.1, que é exatamente o Teorema 0.1 de [Dru02]. Para este fim precisamos antes introduzir as seguintes definições.

Definição 16. *Seja*

$$BV(M) := \{u \in L^1(M) : \| \nabla u \|_{BV(M)} < +\infty\},$$

onde

$$\| \nabla u \|_{BV(M)} := sup \left\{ \int_M u div_g(X) dv_g, X \in \Gamma(TM), |X|_g(x) \leq 1, \forall x \in M \right\},$$

e onde $\Gamma(TM)$ denota o conjunto dos campos vetoriais em M com divergência em $L^n(M)$. Chamaremos os elementos de $BV(M)$ ***funções a variação limitada****. Um subconjunto Ω de M é dito de* ***perímetro finito****, se a sua função característica 1_Ω pertence a $BV(M)$. Denotaremos com Σ o conjunto seguinte*

$$\Sigma := \{\Omega \text{ subconjunto aberto de } M \text{ tal que } 1_\Omega \in BV(M)\}.$$

Para $\Omega \in \Sigma$, existe uma noção de volume da fronteira de Ω; dado por $|\partial\Omega| = ||\nabla 1_\Omega||_{BV(M)}$.

Observação 6. *Se Ω tem fronteira diferenciável, então a Definição* 16 *de $|\partial\Omega|$ e o volume Riemanniano $|\partial\Omega|$ da subvariedade $\partial\Omega$ munida da métrica induzida para M coincidem.*

Teorema 3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana diferenciável compacta sem fronteira de dimensão $n \geq 2$. Então existe $B > 0$ tal que para qualquer $\Omega \in \Sigma$,*

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \geq K(n,1)^{-1} - B|\Omega|^{\frac{1}{n}}, \tag{12}$$

onde Σ denota a classe dos conjuntos de perímetro finito na variedade M. Se B_1 é a melhor constante B em (12)*, então existe um conjunto* ***extremal*** *não vazio, de medida não nula $\Omega_0 \in \Sigma$, com $B = B_1$, i.e., Ω_0 realiza a igualdade em (12) com $B = B_1$. Além disso ou $\Omega_0 = M$ é extremal ou $|\Omega_0| \leq \frac{1}{2}|M|$, se $|\Omega_0| \leq \frac{1}{2}|M|$ Ω_0 é conexo, $\partial\Omega_0$ é regular, a* *menos de um conjunto de dimensão de Hausdorff no máximo* $n-8$, *(em particular, se* $n \leq 7, \partial\Omega_0$ *é suave) e* $\partial\Omega_0$ *tem curvatura média constante*

$$\eta \;=\; (\frac{\omega_{n-1}}{n})^{\frac{1}{n}}|\Omega_0|^{-\frac{1}{n}} - \frac{B_1}{n-1},$$

em seus pontos regulares.

Existe uma formulação equivalente do Teorema 3.1 em termos de funções BV.

Proposição 3.1. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta, sem fronteira de dimensão* $n \geq 2$ *então existe* $B > 0$ *tal que para qualquer* $u \in BV(M)$.

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq K(n,1)\,(\| \nabla u \|_{BV} + B \| u \|_1)\,. \tag{13}$$

Além disso, existe uma função extremal $u_0 \in BV(M)$ *da forma* $u_0 = \lambda 1_{\Omega_0}$ *para algum* $\Omega_0 \in \Sigma$ *e algum* $\lambda \in \mathbb{R}$. *De novo extremal significa que* u_0 *realiza a igualdade em (13)*

No que segue vamos provar que o Teorema 3.1 e a Proposição 3.1 são dois resultados equivalentes.

Lema 3.1. *Dada* $u \in C_c^\infty(M)$, *seja* $\Omega_t = \{x : |u|(x) > t\}$, *então*

$$\left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|dt\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_0^\infty |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt. \tag{14}$$

A igualdade é satisfeita se somente se $|\Omega_t| = \lambda 1_{[0,t_0]}$ *para alguns* $t_0 > 0, \lambda > 0$.

Demonstração:(Do Lema 3.1) Seja $s \geq 0$. Pondo

$$F(s) = \left(\frac{n}{n-1}\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|dt\right)^{\frac{n-1}{n}}, \qquad G(s) = \int_0^s |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt,$$

$F(0) = G(0) = 0$. As derivadas de F e G são

$$F'(s) \;=\; \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\frac{1}{n}}\left\{\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|dt\right\}^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_s|,$$

$$G'(s) \;=\; |\Omega_s|^{\frac{n-1}{n}}.$$

Por outro lado para $0 \leq t < s$, temos

$$\begin{aligned} |\Omega_s| &\leq |\Omega_t| \text{ ; não crescente} \\ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_s| dt &\leq \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_t| dt, \end{aligned}$$

daqui

$$\left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_t| dt \right\}^{-\frac{1}{n}} \leq \left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_s| dt \right\}^{-\frac{1}{n}}, \tag{15}$$

logo

$$\left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{-1}{n}} \left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_t| dt \right\}^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_s|$$

$$\leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{-1}{n}} \left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_s| dt \right\}^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_s|, \tag{16}$$

assim

$$\begin{aligned} F'(s) &\leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\frac{-1}{n}} |\Omega_s|^{-\frac{1}{n}} \left\{ \int_0^s t^{\frac{1}{n-1}} dt \right\}^{-\frac{1}{n}} s^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_s| \\ &\leq |\Omega_s|^{\frac{n-1}{n}} = G'(s), \end{aligned}$$

portanto, para todo $s \geq 0$ obtemos

$$F'(s) \leq G'(s) \text{ , } F(0) = G(0) = 0,$$

logo

$$F(s) \leq G(s), \text{ para todo } s > 0. \tag{17}$$

Tomando os limites em (17) quando $s \longrightarrow +\infty$,

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} F(s) \leq \lim_{s \longrightarrow +\infty} G(s), \tag{18}$$

assim é imediato ver que (18) é exatamente (14). Por outra parte, se $|\Omega_t| = \lambda 1_{[0,t_0]}$, claramente a igualdade é satisfeita.

Agora no outro sentido, se vale a igualdade em (14) então $F(s) = G(s)$, $\forall s \in [0, +\infty[$, segue se que temos igualdade em (16). Agora dois casos mutuamente exclusivos podem aparecer para termos a igualdade

em (16).
Caso 1) $|\Omega_s| = 0$
Caso 2) $|\Omega_s| > 0$
Se $|\Omega_s| > 0$ implica que temos a igualdade em (15), i.e.,

$$\left\{\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|dt\right\}^{-\frac{1}{n}} = \left\{\int_0^s t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_s|dt\right\}^{-\frac{1}{n}},$$

se somente se

$$\int_0^s (|\Omega_t| - |\Omega_s|)t^{\frac{1}{n-1}}dt = 0 \tag{19}$$

mas, sabemos que no intervalo $[0, s[$, $|\Omega_t| \geq |\Omega_s|$, pois $t \longrightarrow |\Omega_t|$ não é crescente, logo vale (19) se e somente se $|\Omega_t| = |\Omega_s|$ para quase todo ponto $t \in [0, s]$. De novo como temos que não é crescente $t \longrightarrow |\Omega_t|$ garante que $|\Omega_t| = |\Omega_s|$, $\forall t \in [0, s]$.
Se $|\Omega_s| = 0$ tem duas alternativas, ou $t \longrightarrow |\Omega_t|$ é identicamente nula ou $\exists\ 0 \leq t < s$ tal que $|\Omega_t| > 0$. Neste caso aplicamos o caso 2) ao intervalo $[0, t]$ e veremos que pondo $t_0 := sup\{t \in [0, s] : |\Omega_t| > 0\}$ logo $|\Omega_t| = \lambda 1_{[0,t_0]}$ com $\lambda = |\Omega_0|$. $\square$

Agora estamos em condições de provar o seguinte resultado.

Proposição 3.2. *O Teorema 3.1 e a Proposição 3.1 são equivalentes.*

Demonstração:(Da Proposição 3.2) Primeiro provaremos que o Teorema 3.1 é verdadeiro se assumimos que a Proposição 3.1 é válida. Para isso basta tomar $\Omega \in \Sigma$ e substituir a função $u = 1_\Omega$ na desigualdade (13) obtendo

$$\| 1_\Omega \|_{\frac{n}{n-1}} \leq K(n, 1)(\| \nabla 1_\Omega \|_{BV} + B \| 1_\Omega \|_1),$$

por outro lado

$$\| 1_\Omega \|_{\frac{n}{n-1}} = |\Omega|^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\| 1_\Omega \|_1 = |\Omega|,$$

assim

$$|\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \leq K(n, 1)(|\partial\Omega| + B|\Omega|).$$

Portanto é fácil de ver que

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \quad \geq \quad K(n,1)^{-1} - B|\Omega|^{\frac{1}{n}}.$$

Agora falta provar as afirmações sobre a regularidade do conjunto extremal, seja Ω_0 o nosso conjunto extremal tal que $|\Omega_0| \neq |M|$ e como $M \setminus \Omega_0 \in \Sigma$, substituindo em (12)

$$\frac{|\partial(M \setminus \Omega_0)|}{|M \setminus \Omega_0|^{\frac{n-1}{n}}} \geq K(n,1)^{-1} - B_1|M \setminus \Omega_0|^{\frac{1}{n}}, \tag{20}$$

daqui

$$|\partial(M \setminus \Omega_0)| \geq |M \setminus \Omega_0|^{\frac{n-1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1|M \setminus \Omega_0|^{\frac{n-1}{n}} |M \setminus \Omega_0|^{\frac{1}{n}},$$

Por outro lado, sendo Ω_0 um conjunto extremal, temos a igualdade

$$\frac{|\partial\Omega_0|}{|\Omega_0|^{\frac{n-1}{n}}} = K(n,1)^{-1} - B_1|\Omega_0|^{\frac{1}{n}},$$

daí

$$|\partial\Omega_0| = |\Omega_0|^{\frac{n-1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1|\Omega_0|,$$

uma vez que $|\partial(M \setminus \Omega_0)| = |\partial\Omega_0|$ obtemos

$$|\Omega_0|^{\frac{n-1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1|\Omega_0| \geq |M \setminus \Omega_0|^{\frac{n-1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1|M \setminus \Omega_0|. \tag{21}$$

Afirmação 1. *A desigualdade anterior é satisfeita se* $|\Omega_0| \leq \frac{1}{2}|M|$

De fato, pondo $v = \frac{|\Omega_0|}{|M|}$ e uma vez que $0 \leq v \leq 1$ a desigualdade acima pode ser escrita como segue

$$v^{\frac{n-1}{n}} |M|^{-\frac{1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1 v \geq (1-v)^{\frac{n-1}{n}} |M|^{-\frac{1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1(1-v),$$

logo

$$f(v) \geq f(1-v), \tag{22}$$

onde $f(v) = v^{\frac{n-1}{n}} |M|^{-\frac{1}{n}} K(n,1)^{-1} - B_1 v$, a desigualdade (22) pelo comportamento da função f, só pode ser satisfeita se $v \leq \frac{1}{2}$, i.e., a desigualdade (21) é satisfeita se $|\Omega_0| \leq \frac{1}{2}|M|$.

Definimos então para cada $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ a função isoperimétrica em uma variedade Riemanniana compacta

$$h(\beta) = inf\left\{\frac{|\partial\Omega|}{|M|}, \Omega \in \Sigma, |\Omega| = \beta|M|\right\},$$

e vamos escrever (12) em termos da função isoperimétrica h.

De (12), temos

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \geq K(n,1)^{-1} - B|\Omega|^{\frac{1}{n}},$$

então

$$|\partial\Omega| \quad \geq \quad (K(n,1)^{-1}|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}|M|^{-1} - B|\Omega||M|^{-1})|M|,$$

assim

$$\frac{|\partial\Omega|}{|M|} \quad \geq \quad K(n,1)^{-1}|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}|M|^{-1} - B|\Omega||M|^{-1}.$$

Agora, tomando Ω tal que $|\Omega| = \beta|M|$ temos

$$\begin{aligned} \frac{|\partial\Omega|}{|M|} \quad &\geq \quad K(n,1)^{-1}(\beta|M|)^{\frac{n-1}{n}}|M|^{-1} - B\beta \\ &= \quad K(n,1)^{-1}\beta^{\frac{n-1}{n}}|M|^{-\frac{1}{n}} - B\beta. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo, podemos escrever a (12) como segue

$$h(\beta) \quad \geq \quad K(n,1)^{-1}\beta^{\frac{n-1}{n}}|M|^{-\frac{1}{n}} - B\beta,$$

com igualdade se $\beta_0 = |\Omega_0|/|M|$. Por um resultado clássico de compacidade em teoria geometrica da medida para qualquer $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$, $h(\beta)$ é atingido por algum conjunto de perimetro finito Ω_0, é facil de ver que Ω_0 é conexo pois h^*, definida em baixo, é estritamente côncava, não negativa e vale 0 em zero, logo estritamente subaditiva. Além disso um resultado profundo de Almgren [Alm76] mostra que Ω_0 tem a propriedade que $\partial\Omega_0$ é regular a menos de um conjunto de dimensão de Haussdorf menor ou igual de $n-8$.

Além disso usando o Teorema 2.12 vamos calcular a curvatura media nos pontos regulares de Ω_0 tomando as funções

$$\begin{aligned} h^* := [0, \frac{1}{2}] \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ \beta \quad &\mapsto \quad K(n,1)^{-1}\beta^{\frac{n-1}{n}}|M|^{-\frac{1}{n}} - B_1\beta, \end{aligned}$$

e $\Phi = id_{\mathbb{R}}$, observe que h^* é definido a partir da existencia de Ω_0 para cada $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$. Assim

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{n-1} h^{*\prime}(\beta) &= \frac{1}{n-1}\left\{K(n,1)^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\beta^{-\frac{1}{n}}|M|^{-\frac{1}{n}} - B_1\right\} \\ &= \left(\frac{w_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\beta^{-\frac{1}{n}}|M|^{-\frac{1}{n}} - \frac{B_1}{n-1} \\ &= \left(\frac{w_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}}|\Omega_0|^{-\frac{1}{n}} - \frac{B_1}{n-1}, \end{aligned}$$

valor que coincide com o valor constante calculado no Teorema 3.1 e assim o Teorema 3.1 fica demonstrado.

Agora mostraremos a Proposição 3.1 asumindo o Teorema 3.1 verdadeiro. Seja $u \in BV(M)$ definimos para cada $t \geq 0$ o conjunto

$$\Omega_t := \{x \in M : |u|(x) > t\}.$$

Então

$$\begin{aligned} \| u \|_{\frac{n}{n-1}} &= \left(\int_M |u|^{\frac{n}{n-1}} dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}}, \\ &= \left(\int_0^\infty dv_g \int_0^{|u|} \frac{n}{n-1} t^{\frac{1}{n-1}} dt\right)^{\frac{n-1}{n}}, \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} dt \int_{\Omega_t} dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}}, \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}} |\Omega_t| dt\right)^{\frac{n-1}{n}}, \end{aligned} \tag{23}$$

analogamente

$$\| u \|_1 = \int_0^\infty |\Omega_t| dt. \tag{24}$$

Por outro lado, a fórmula da co-área para funções de variação limitada, implica que

$$\| \nabla u \|_{BV} = \int_0^\infty |\partial \Omega_t| dt, \tag{25}$$

usando $(23), (24), (25)$ para o conjunto Ω_t vale (12) então

$$\frac{|\partial\Omega_t|}{|\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}} \geq K(n,1)^{-1} - B_1 |\Omega_t|^{\frac{1}{n}},$$

logo

$$|\partial\Omega_t| \quad \geq \quad K(n,1)^{-1}|\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}} - B_1|\Omega_t|. \tag{26}$$

Integrando a desigualdade com respeito a t obtemos

$$\int_0^\infty |\partial\Omega_t|dt \quad \geq \quad K(n,1)^{-1}\int_0^\infty |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt - B_1\int_0^\infty |\Omega_t|dt,$$

assim

$$\| \nabla u \|_{BV} + B_1 \| u \|_1 \geq K(n,1)^{-1}\int_0^\infty |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt,$$

portanto

$$K(n,1)(\| \nabla u \|_{BV} + B_1 \| u \|_1) \geq \int_0^\infty |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt. \tag{27}$$

pelo Lema 3.1 e (23) obtemos

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq K(n,1)(\| \nabla u \|_{BV} + B_1 \| u \|_1).$$

Isto prova que a Proposição 3.1 é verdadeira, para qualquer função $u \in BV(M)$. Agora se $u_0 \in BV(M)$ é uma função extremal para a proposição e uma vez que

$$\begin{aligned} \| u_0 \|_{\frac{n}{n-1}} &\leq \int_0^\infty |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt \\ &\leq K(n,1)^{-1}(\| \nabla u_0 \|_{BV} + B_1 \| u_0 \|_1), \end{aligned}$$

temos os extremos iguais, i.e.,

$$\left(\frac{n}{n-1}\int_0^\infty t^{\frac{1}{n-1}}|\Omega_t|dt\right)^{\frac{n-1}{n}} = \int_0^\infty |\Omega_t|^{\frac{n-1}{n}}dt.$$

Onde $\Omega_t = \{x \in M : |u_0(x)| > t\}$ e pelo Lema precedente $|\Omega_t| = \lambda 1_{[0,t_0]}$ se e somente se $u_0 = \lambda 1_{\Omega_0}$ para algum $\Omega_0 \in \Sigma$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Feita a prova da equivalência do Teorema 3.1 com a Proposição 3.1 nosso objetivo agora é provar que é válida a Proposição 3.1. Primeiro vamos dar alguns resultados úteis.

Pelo teorema de imersão de Sobolev, $H_1^p(M) \subset L^{p^*}(M)$, onde $p^* = np/(n-p)$, logo existem duas constantes $A > 0$ e $B > 0$ tal que para qualquer $u \in H_1^p(M)$,

$$\| u \|_{p^*}^p \leq A \| \nabla u \|_p^p + B \| u \|_p^p . \tag{28}$$

Pelo Teorema 2.9, $\alpha_p(M) = K(n,p)^p$, onde $K(n,p)$ é como no Teorema 2.7.

Dos trabalhos de [AL99] e [Dru99] temos que se $1 < p \leq 2$, α_p é de fato um mínimo, portanto existe alguma constante $B_p > 0$ tal que para qualquer $u \in H_1^p(M)$,

$$\| u \|_{p^*}^p \leq K(n,p)^p (\| \nabla u \|_p^p + B_p \| u \|_p^p). \tag{29}$$

Por outra parte no trabalho [DD01] se prova que para $p^2 < n$ e $p < 2$, existe uma função u_p em $C^1(M)$ com $u_p \not\equiv 0$ tal que

$$\| u_p \|_{p^*}^p = K(n,p)^p (\| \nabla u_p \|_p^p + B_p \| u_p \|_p^p). \tag{30}$$

Seja agora $\Delta_p u = -\mathrm{div}_g(|\nabla u|_g^{p-2} \nabla u)$ o $p-$Laplaciano de uma função u. As funções extremais u_p, podem ser escolhidas de modo que

$$u_p > 0, \tag{31}$$

$$\int_M u_p^{p^*} dv_g = 1, \tag{32}$$

e satisfazem

$$\Delta_p u_p + B_p u_p^{p-1} = K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-1}. \tag{33}$$

Para mostrar (31), (32),(33), consideramos o funcional $J_p : C^1(M) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, onde

$$J_p[u] = K(n,p)^p \left(\| \nabla u \|_p^p + B_p \| u \|_p^p \right) - \| u \|_{p^*}^p .$$

(29) mostra que $J_p[u] \geq 0$, a equação (30) mostra que $J_p[u_p] = 0$, logo u_p é um mínimo para o funcional J_p. Observamos agora que $J_p[|u|] = J_p[u]$ o que nos permite de escolher u_p satisfazendo (31). É verdadeiro também que $\forall \lambda > 0$ resulta $J_p[\lambda u] = \lambda J_p[u]$, o que nos permite de escolher u_p satisfazendo (32). Calculamos agora a derivada de Gateaux do funcional J_p no ponto de mínimo u_p

$$J_p^{'}[u_p](v) = \frac{d}{dt} \left[J_p[u_p + tv] \right]_{|t=0} ,$$

$$
\begin{aligned}
J_p[u_p+tv] &= K(n,p)^p\left(\int_M |\nabla(u_p+tv)|^p dv_g + B_p\int_M |u_p+tv|^p dv_g\right)\\
&- \left(\int_M |u_p+tv|^{p^*}dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}, \qquad (34)
\end{aligned}
$$

sejam

$$
\begin{aligned}
J_{1,p}[u_p] &= \int_M |\nabla u_p|^p dv_g,\, J'_{1,p}[u_p] = \frac{d}{dt}J_{1,p}[u_p+tv]_{|t=0},\\
J_{2,p}[u_p] &= \int_M |u_p|^p dv_g,\, J'_{2,p}[u_p] = \frac{d}{dt}J_{2,p}[u_p+tv]_{|t=0},\\
J_{3,p}[u_p] &= \left(\int_M |u_p|^{p^*}dv_g\right)^{p/p^*},\, J'_{3,p}[u_p] = \frac{d}{dt}J_{3,p}[u_p+tv]_{|t=0},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_{1,p}[u_p+tv] &= \frac{d}{dt}\int_M |\nabla(u_p+tv)|^p dv_g,\\
&= \int_M p|\nabla(u_p+tv)|^{p-1}\frac{d}{dt}|\nabla(u_p+tv)|dv_g, \qquad (35)
\end{aligned}
$$

por outro lado

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\nabla(u_p+tv)| &= \frac{d}{dt}\sqrt{\langle\nabla(u_p+tv),\nabla(u_p+tv)\rangle},\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{|\nabla(u_p+tv)|}2\langle\frac{d}{dt}\nabla(u_p+tv),\nabla(u_p+tv)\rangle,\\
&= \frac{1}{|\nabla(u_p+tv)|}\langle\nabla v,\nabla(u_p+tv)\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo (35) fica

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}J_{1,p}[u_p+tv]\\
&= \int_M p|\nabla(u_p+tv)|^{p-1}\frac{1}{|\nabla(u_p+tv)|}\langle\nabla v,\nabla(u_p+tv)\rangle dv_g,
\end{aligned}
$$

avaliando em $t=0$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_{1,p}[u_p+tv]_{|t=0} &= \int_M p|\nabla u_p|^{p-1}\frac{1}{|\nabla u_p|}\langle\nabla v,\nabla u_p\rangle dv_g,\\
&= \int_M p|\nabla u_p|^{p-2}\langle\nabla v,\nabla u_p\rangle dv_g,\\
&= p\int_M \langle\nabla v,|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\rangle dv_g, \qquad (36)
\end{aligned}
$$

por outro lado, pondo $X = v|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p$, temos

$$\int_M div(X)dv_g = \langle \nabla v, |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\rangle + div(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)v,$$

como a variedade M não tem fronteira, aplicando o Teorema de Stokes e integrando sobre M obtemos

$$0 = \int_M \langle \nabla v, |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\rangle dv_g + \int_M div(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)vdv_g, \qquad (37)$$

logo (36) fica

$$\frac{d}{dt}J_{1,p}[u_p + tv]_{|t=0} = -p\int_M div(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)vdv_g,$$

portanto

$$J'_{1,p}[u_p](v) = -p\int_M div(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)vdv_g = p\int_M (\Delta_p u_p)vdv_g,$$

$$\frac{d}{dt}J_{2,p}[u_p + tv] \quad = \quad \int_M p|u + tv|^{p-1}sign(u_p + tv)vdv_g,$$

avaliando em $t = 0$

$$\frac{d}{dt}J_{2,p}[u_p + tv]_{|t=0} \quad = \quad \int_M p|u_p|^{p-1}sign(u_p)vdv_g,$$

logo

$$J'_{2,p}[u_p](v) = \int_M p|u_p|^{p-2}u_p vdv_g,$$

$$\frac{d}{dt}J_{3,p}[u_p + tv] \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(\int_M |u_p + tv|^{p^*}dv_g\right)^{p/p^*},$$

$$= \quad \frac{p}{p^*}\left(\int_M |u_p + tv|^{p^*}dv_g\right)^{p/p^*-1}\left(\int_M \frac{d}{dt}|u_p + tv|^{p^*}dv_g\right),$$

por outro lado

$$\frac{d}{dt}|u_p + tv|^{p^*} = p^*|u_p + tv|^{p^*-1}sign(u_p + tv)v$$

então

$$\frac{d}{dt}J_{3,p}[u_p+tv]$$

$$= p\left(\int_M |u_p+tv|^{p^*}dv_g\right)^{p/p^*-1}\left(\int_M |u_p+tv|^{p^*-1}sign(u_p+tv)vdv_g\right),$$

avaliando em $t=0$

$$\frac{d}{dt}J_{3,p}[u_p+tv]_{|t=0} \quad = \quad p\left(\int_M |u_p|^{p^*}dv_g\right)^{-p/n}\left(\int_M |u_p|^{p^*-2}u_p v dv_g\right).$$

Portanto

$$J'_{3,p}[u_p](v) \quad = \quad p\left(\int_M |u_p|^{p^*}dv_g\right)^{-p/n}\left(\int_M |u_p|^{p^*-2}u_p v dv_g\right).$$

Logo voltando a (34) vale

$$\begin{aligned} J'_p[u_p](v) \quad &= \quad K(n,p)^p\left(p\int_M (\Delta_p u_p)vdv_g + B_P\int_M |u_p|^{p-2}u_p v dv_g\right) \\ &\quad -p\left(\int_M |u_p|^{p^*}dv_g\right)^{-p/n}\left(\int_M |u_p|^{p^*-2}u_p v dv_g\right). \end{aligned}$$

Sabendo que $\| u_p \|_{p^*}=1$ e a precedente equação vale para todo $v \in C^1(M)$ a equação (33) é necessariamente satisteifa, isto pelo teorema fundamental do cálculo das variações.

4 A Minoração Uniforme de $\| u_p \|_p$ implica a Proposição 3.1

No resto da dissertação vamos considerar as funções u_p para p suficientemente próximo de 1 (em particular $p^2 < n$ e $p < 2$) e estudaremos a sequência (u_p) quando $p \to 1$. Mostraremos que

$$\limsup_{p\to 1} B_p < \infty, \tag{38}$$

e

$$\liminf_{p\to 1} \| u_p \|_p > 0. \tag{39}$$

Observação 7. *Note que* (38) *é consequência de* (39), *pois da equação* (30) *segue que*

$$1 = K(n,p)^p(\| \nabla u_p \|_p^p + B_p \| u_p \|_p^p) \geq B_p \| u_p \|_p^p .$$

Lema 4.1. ($Pag.$187[*Fol99*]) *Seja* $p < \infty$ *tal que* $f \in L^q$ $\forall q > p$, $f \in L^\infty$. *Então*

$$\| f \|_\infty = \lim_{q\to\infty} \| f \|_q .$$

Demonstração:(Do Lema 4.1) Pela Proposição 6.10 [Fol99] para o caso $r = +\infty$, temos $L^p \cap L^\infty \subset L^q$ e para $q > p$

$$\| f \|_q \leq \| f \|_p^{p/q} \| f \|_\infty^{1-p/q},$$

tomando o limite

$$\lim_{q\to 1} \| f \|_q \leq \| f \|_\infty,$$

agora desde que $p < q$ e tomando no caso $q = \infty$ temos

$$\| f \|_\infty^p = sup_\alpha |f(\alpha)|^p \leq \sum_\alpha |f(\alpha)|^p,$$

portanto

$$\| f \|_\infty \leq \lim_{p\to+\infty} \| f \|_p .$$

Logo obtemos o resultado. $\square$

Lema 4.2. (*Proposição 3.5* [*Bre11*]) *Seja* (x_n) *uma sequência em um espaço de Banach* E, *se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente, então* $(\| x_n \|)$ *é limitado e* $\| x \| \leq \liminf_{n\to\infty} \| x_n \|$

Demonstração:(Do Lema 4.2) Pelo princípio de limitação uniforme (Teorema 2.2 [Bre11]) temos que $\forall f \in E^*$ a sequência $(\langle f, x_n\rangle)_n$ é limitada

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \| f \| \| x_n \|,$$

logo pasando ao limite vale a desigualdade

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \| f \| \liminf \| x_n \| .$$

Sabendo também que

$$\| x \| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|,$$

chegamos em fim à desigualdade

$$\| x \| \leq \liminf \| x_n \| .$$

$\square$

Afirmação 2. (39) *implica que a Proposição 3.1 válida para qualquer* $u \in H_1^1(M)$ *com* $B_1 = \liminf_{p\to 1} B_p$ *e que existe alguma função* $u_0 \in BV(M)$ *atingindo a igualdade, com* $u_0 \not\equiv 0$.

Demonstração:(Da Afirmação 2) De fato, para todo $u \in C^\infty(M)$ e todo $1 < p \leq 2$, vale

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}}^p \leq |M|_g^{\frac{n(p-1)}{n-1}} \| u \|_{p^*}^p, \tag{40}$$

se verifica facilmente que (40) deduz-se de uma aplicação da desigualdade de Hölder (Teorema 2.6), se $p > 1$, e $g \equiv 1$. Usando (29) e (40)

$$\begin{aligned} \| u \|_{\frac{n}{n-1}}^p &\leq |M|_g^{\frac{n(p-1)}{n-1}} K(n,p)^p \left(\| \nabla u \|_p^p + B_p \| u \|_p^p\right) \\ &\leq |M|_g^{\frac{n(p-1)}{n-1}} K(n,p)^p (\| \nabla u \|_\infty^{p-1} \| \nabla u \|_1 + B_p \| u \|_\infty^{p-1} \| u \|_1), \end{aligned} \tag{41}$$

pois

$$\begin{aligned} \| \nabla u \|_p^p \int_M |\nabla u|^p dv_g &= \int_M |\nabla u|^{p-1} |\nabla u| dv_g \\ &\leq \| \nabla u \|_\infty^{p-1} \int_M |\nabla u| dv_g \\ &= \| \nabla u \|_\infty^{p-1} \| \nabla u \|_1, \end{aligned}$$

e

$$\| u \|_p^p \leq \| u \|_\infty^{p-1} \| u \|_1 .$$

Passando ao limite quando $p \to 1$ em (41) obtemos

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leq K(n,1) \left(\| \nabla u \|_1 + \liminf_{p \to 1} B_p \| u \|_1 \right), \forall u \in C^\infty(M). \quad (42)$$

Sabendo que vale $\overline{(C^\infty(M))}_{BV(M)} = BV(M)$ e $\overline{(C^\infty(M))}_{L^{\frac{n}{n-1}}(M)} = L^{1^*}(M)$ temos que $\forall u \in BV(M)$ existe uma sequência $u_j \in C^\infty(M)$ tal que $u_j \to u$ se $j \to +\infty$, logo

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} = \lim_{j \to +\infty} \| u_j \|_{\frac{n}{n-1}} \leq \lim_{j \to +\infty} K(n,1) \left(\| \nabla u_j \|_1 + B_1 \| u_j \|_1 \right).$$

Assim para obter a desigualdade (13) é suficiente usar a desigualdade

$$\| u_p \|_{p^*}^p \leq K(n,p)^p (\| \nabla u_p \|_p^p + B_p \| u_p \|_p^p) \quad (43)$$

combinada com a desigualdade de Hölder e tomar os limites. O único problema que pode acontecer é que

$$\liminf_{p \to 1} B_p = +\infty. \quad (44)$$

Mostrar que na verdade $\limsup_{p \to 1} B_p < +\infty$ é objeto das seções que seguem. Em conclusão para obter (13), precisamos da desigualdade (29) por $p > 1$ mais a desigualdade de Hölder, a desigualdade (44) e de tomar o limite quando $p \to 1$.

Para mostrar que (13) admite um mínimo $u_0 \in BV(M)$ é preciso usar (39). De fato, especializando a equação (29) ao caso $u \equiv 1$ vale

$$|M|^{p/p^*} \leq K(n,p)^p B_p \| 1 \|_p^p,$$

o que é equivalênte a

$$B_p \geq K(n,p)^{-p} |M|^{-\frac{p}{n}}.$$

Então uma vez que u_p verifica (30) e (32), obtemos que existe uma constante $C > 0$ que não depende de p, para p próximo de 1, tal que

$$\begin{aligned} 1 = \| u_p \|_{p^*}^p &= K(n,p)^p (\| \nabla u_p \|_p^p + K(n,p)^p B_p \| u_p \|_p^p) \\ &\geq C (\| \nabla u_p \|_p^p + \| u_p \|_p^p) \end{aligned}$$

Isto significa que a sequência (u_p) é limitada em $H_1^1(M)$. Então $u_0 \in BV(M)$ de tal modo que existe uma subsequência,

$$u_p \rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } L^{\frac{n}{n-1}}(M), \quad (45)$$

$$u_p \to u_0 \text{ em } L^q(M) \text{ para todo } 1 \leq q < \frac{n}{n-1}. \quad (46)$$

Mostraremos agora que u_0 é nossa função extremal.

Para isso seja $\sigma_p = |\nabla u_p|_g^{p-2}\nabla u_p$. Para qualquer $q > 0$ temos

$$\begin{aligned}\int_M |\sigma_p|_g^q dv_g &= \int_M ||\nabla u_p|_g^{p-2}\nabla u_p|^q dv_g \\ &= \int_M |\nabla u_p|_g^{(p-1)q} dv_g.\end{aligned}$$

Usando uma aplicação da desigualdade de Hölder (Teorema 2.6) obtemos

$$\int_M |\sigma_p|_g^q dv_g \leq |M|_g^{1-\frac{(p-1)q}{p}} \left(\int_M \left(|\nabla u_p|^{(p-1)q}\right)^{\frac{p}{(p-1)q}} dv_g\right)^{\frac{q(p-1)}{p}},$$

portanto

$$\int_M |\sigma_p|_g^q dv_g \leq \left(\int_M |\nabla u_p|_g^p dv_g\right)^{\frac{(p-1)q}{p}} |M|_g^{1-\frac{(p-1)q}{p}},$$

tomando o limite quando $p \to 1$, temos que para qualquer $q > 0$,

$$\limsup_{p\to 1} \int_M |\sigma_p|_g^q dv_g \leq |M|_g. \tag{47}$$

Agora vamos enunciar dois resultados importantes antes de continuar com a demonstração da Afirmação 2

Continuamos agora a explicar o argumento interrompido antes da apresentação dos Lemas 4.1 e 4.2. Depois de aplicar um argumento diagonal podemos passar a uma subsequência tal que para qualquer $q > 0$, $\lim_{p\to 1}\sigma_p = \sigma$ fracamente em $L^q(M)$ onde σ é algum campo vetorial em M verificando $\| \sigma \|_\infty \leq 1$. Para verificar esta última desigualdade notamos que pela teoria geral dos espaços L^p (ver Lema 4.1), $\| \sigma \|_\infty = \lim_{q\to+\infty} \| \sigma \|_q$, e pela teoria geral dos espaços de Banach a norma é fracamente semicontínua inferiormente (ver Lema 4.2) logo $\| \sigma \|_q \leq \liminf_{p\to 1} \| \sigma_p \|_q$. De outro lado pela equação (47) vale $\| \sigma_p \|_q \leq |M|^{1/q}$, logo passando ao limite temos que $\| \sigma \|_\infty \leq 1$.

Da equação (33) temos

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 1}\left(\Delta_p u_p + B_p u_p^{p-1}\right) &= \lim_{p\to 1} K(n,p)^{-1} u_p^{p^*-1}, \\ \lim_{p\to 1}\left(-\mathrm{div}(|\nabla u_p|_g^{p-2}\nabla u_p) + B_p u_p^{p-1}\right) &= K(n,1)^{-1} u_0^{\frac{1}{n-1}},\end{aligned}$$

assim

$$-\lim_{p\to 1}\operatorname{div}(\sigma_p)+B_1\operatorname{sign}(u_0) \quad = \quad K(n,1)^{-1}u_0^{\frac{1}{n-1}},$$

portanto

$$-\operatorname{div}_g(\sigma)+B_1\operatorname{sign}(u_0) \quad = \quad K(n,1)^{-1}u_0^{\frac{1}{n-1}},$$

onde $\operatorname{sign}(u_0)\in L^\infty(M)$ e $\operatorname{sign}(u_0)u_0=|u_0|$. Multiplicando esta última equação por u_0 e integrando sobre M sabendo que $u_0>0$ obtemos

$$-\int_M \operatorname{div}_g(\sigma)u_0 dv_g + B_1 \parallel u_0 \parallel_1 \quad = \quad K(n,1)^{-1} \parallel u_0 \parallel_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}}. \quad (48)$$

No espírito do princípio de concentração compacidade Lema II (ver Teorema 2.11) é esperado que a sequência (u_p) não desenvolva massas de Dirac o que implica que $\parallel u_0 \parallel_{\frac{n}{n-1}}=1$, mas daremos uma demonstração direta deste fato. Seja $x\in M$, arbitrário e $\delta>0$ arbitrário. Suponhamos que existe um $x_0\in M$ tal que

$$\limsup_{p\to 1}\int_{B(x_0,2\delta)} u_p^{p^*}=1. \quad (49)$$

Pelo esquema iterativo de Moser, de (49) segue que $u_p\to 0$, em $C^0_{loc}(M\setminus\{x_0\})$. Isso significa que $u_0\equiv 0$ em quase todo ponto de M o que é uma contradição com $\parallel u_p \parallel_p > C$. Na verdade para $q>1$ fixado e perto de 1 vale $1<p<q$ o que implica, pela desigualdade de Hölder que

$$\parallel u_p \parallel_p \leq \parallel u_p \parallel_q |M|^{\frac{q-p}{q}}. \quad (50)$$

Passando ao limite temos que existe $C>0$ tal que

$$\parallel u_0 \parallel_q = \lim_{p\to 1} \parallel u_p \parallel_q \geq C>0, \quad (51)$$

em particular $u_0\not\equiv 0$. A primeira igualdade em (51) é devida à convergência forte $u_p\to u_0$ em $L^q(M)$, $1<q<\frac{n}{n-1}$.

Logo se $\liminf_{p\to 1} \parallel u_p \parallel_p > 0$ então $\forall x\in M$, resulta $a(2\delta)<1$, onde $a(2\delta)$ esta definido em (65). (65) implica que existe $\epsilon'>0$ tal que

$$\int_{B(x,\delta)} u_p^{(1+\epsilon')p^*} dv_g \leq C', \quad (52)$$

onde C' não depende de p. Usando uma partição da unidade e (52) temos

$$\int_M u_p^{(1+\epsilon')p^*} dv_g \leq C'',$$

novamente C'' não depende de p. Agora usamos a desigualdade de interpolação com $1 < 1^* < \alpha_p = (1+\epsilon')p^*$ chegando a provar que

$$\| u_p - u_0 \|_{1^*} \leq \| u_p - u_0 \|_1^{\lambda_p} \| u_p - u_0 \|_{\alpha_p}^{1-\lambda_p} \to 0,\ p \to 1,$$

onde $\lambda_p = \frac{1^* - (1+\epsilon')p^*}{1-(1+\epsilon')p^*}$, o que prova que $u_p \to u_0$, em $L^{1^*}(M)$. Obviamente disso segue por definição que

$$\| u_p \|_{1^*} \to \| u_0 \|_{1^*} . \tag{53}$$

Aplicamos novamente a desigualdade de interpolação com $1^* < p^* < \alpha_p$ obtendo em tal modo que

$$1 = \| u_p \|_{p^*} \leq \| u_p \|_{1^*}^{\lambda_p} \| u_p \|_{\alpha_p}^{1-\lambda_p},$$

onde $\lambda_p \frac{1}{1^*} + (1-\lambda_p)\frac{1}{\alpha_p} = \frac{1}{p^*}$, obtendo que

$$\lim_{p\to 1} \| u_p \|_{1^*} \geq 1, \tag{54}$$

pois $\lambda_p \to 1$ quando $p \to 1$. Agora aplicando mais uma vez a desigualdade de interpolação para $1 < 1^* < p^*$

$$\| u_p \|_{1^*} \leq \| u_p \|_1^{\lambda_p} \| u_p \|_{p^*}^{1-\lambda_p},$$

onde $\lambda_p \to 0$ quando $p \to 1$ obtemos que $\lim_{p\to 1} \| u_p \|_{1^*} \leq 1$. Esta última desigualdade juntamente com (54) e (53) da $\| u_0 \|_{\frac{n}{n-1}} = 1$.

Pela sua própria construção a função u_0 é limite em $L^1(M)$ de uma subsequência de u_p quando $p \to 1$, logo

$$\| \nabla u_0 \|_{BV(M)} \leq \liminf_{p\to 1} \| \nabla u_p \|_{BV(M)} = \liminf_{p\to 1} \| \nabla u_p \|_1,$$

pois a norma BV é semicontínua inferiormente com respeito à topologia $L^1(M)$ e $\| \nabla u_p \|_{BV(M)} = \| \nabla u_p \|_1$, devido ao fato que $u_p \in C^1(M)$. Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \| \nabla u_p \|_1 &\leq |M|^{\frac{p-1}{p}} \| \nabla u_p \|_p \\ &= |M|^{\frac{p-1}{p}} \left(K(n,1)^{-1} - B_p \| u_p \|_p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem da equação (30). De quanto dito até agora é fácil de ver

$$\begin{aligned} \| \nabla u_0 \|_{BV(M)} &\leq \liminf_{p\to 1} \| \nabla u_p \|_1 \leq \liminf_{p\to 1} |M|^{\frac{p-1}{p}} \| \nabla u_p \|_p \\ &= \liminf_{p\to 1} |M|^{\frac{p-1}{p}} \left(K(n,p)^{-p} - B_p \| u_p \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K(n,1)^{-1} - B_1 \| u_0 \|_1, \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do fato que $\lim_{p\to 1} \| u_p \|_p^p = \| u_0 \|_1$ e isso se vê com um procedimento diagonal usando a convergência forte $u_p \to u_0$ em L^q para $1 \leq q < \frac{n}{n-1}$. Da equação (48) e a definição de norma BV temos

$$K(n,1)^{-1} - B_1 \| u_0 \|_1 = -\int_M div(\sigma) u_0 \leq \| \nabla u_0 \|_{BV(M)},$$

pois $\| \sigma \|_\infty \leq 1$. Isso é suficiente junto com a equação (48) para garantir que u_0 verifica a igualdade na equação (13), se vale (39). $\square$

5 Prova da minoração uniforme de $\| u_p \|_p$

Nesta seção vamos mostrar (39) por redução ao absurdo. Primeiro mostraremos o lema seguinte assumindo nesta seção que

$$\lim_{p\to 1} \| u_p \|_p = 0. \tag{55}$$

Lema 5.1. *Se é válida (55), então*

$$\lim_{p\to 1} B_p \| u_p \|_p^p = 0. \tag{56}$$

Demonstração:(Do Lema 5.1) Com efeito, se os B_p são limitados não temos nada para fazer e (56) segue imediatamente de (55), caso contrário, do Teorema 2.9 aplicado ao caso particular de $q = 1$ e à função $u = u_p^{\frac{p(n-1)}{n-p}}$ com $\frac{p(n-1)}{n-p} > 0$ temos

$$\begin{aligned} \left(\int_M u_p^{\frac{p(n-1)}{n-p} \frac{n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq (K(n,1)+\epsilon) \int_M |\nabla \left(u_p^{\frac{p(n-1)}{n-p}} \right)|_g dv_g \\ &+ B_\epsilon \int_M u_p^{\frac{p(n-1)}{n-p}} dv_g. \end{aligned}$$

Denotamos $\alpha = \frac{p(n-1)}{n-p}$, logo

$$\left(\int_M u_p^{\alpha \frac{n}{n-1}} dv_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq (K(n,1)+\epsilon)\alpha \int_M u_p^{\alpha-1} |\nabla u_p| + B_\epsilon \int_M u_p^\alpha dv_g,$$

desde que $\int_M u_p^{\alpha \frac{n}{n-1}} dv_g = \int_M u_p^{p^*} dv_g = 1$ e usando a desigualdade de Hölder $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos que

$$\begin{aligned} 1 &\leq (K(n,1)+\epsilon)\alpha \left\{ \int_M u_p^{(\alpha-1)q dv_g} \right\}^{1/q} \left\{ \int_M |\nabla u_p|^p dv_g \right\}^{1/p} && (57) \\ &+ B_\epsilon \left\{ \int_M u_p^{(\alpha-1)q dv_g} \right\}^{1/q} \left\{ \int_M u_p^p dv_g \right\}^{1/p}. && (58) \end{aligned}$$

Por outro lado, $(\alpha-1)q = \left(\frac{p(n-1)}{n-p} - 1 \right) \frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$ e também do fato que

$$\| \nabla u_p \|_p = \frac{1}{K(n,p)} \left(1 - B_p K(n,p)^p \| u_p \|_p^p \right)^{1/p},$$

a (57) torna-se

$$\begin{aligned} 1 &\leq (K(n,1)+\epsilon) \frac{p(n-1)}{n-p} \frac{1}{K(n,p)} \left(1 - B_p K(n,p)^p \| u_p \|_p^p \right)^{1/p} \\ &+ B_\epsilon \| u_p \|_p^p, \end{aligned}$$

agora com o suposto, e o fato que $\lim_{p \to 1} K(n,p) = K(n,1) > 1$ temos

$$1 \leq (1 + \epsilon K(n,1)^{-1}) \liminf_{p \to 1} \left(1 - B_p \| u_p \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

esta desigualdade é válida para qualquer $\epsilon > 0$. Tomando o limite quando $\epsilon \to 0$ temos

$$\lim_{p \to 1} B_p \| u_p \|_p^p = 0$$

$\square$

Definição 17. *Um ponto $x \in M$ é dito* ***ponto de concentração de*** *(u_p) se para todo $\delta > 0$*

$$\limsup_{p \to 1} \int_{B(x,\delta)} u_p^{p^*} dv_g > 0.$$

Dividiremos a demonstração de (55) em 5 passos.

1. O passo 1 é demonstrado usando o esquema iterativo de Moser, para o bom funcionamento do argumento, é crucial provar a priori uma estimativa do tipo expresso no Lema 5.3.

2. Com os resultados do passo 1 podemos provar a estimativa integral do passo 2, sempre assumindo (55).

3. A estimativa integral do passo 2 é transformada numa estimativa pontual no passo 3.

4. A estimativa pontual do passo 3 serve para mostrar no passo 4 que se (55) é satisfeita a massa L^p de u_p fora de uma bola que contém o ponto de concentração é um $o(||u_p||_p)$.

5. O passo 4 é usado depois no passo 5 para mostrar a contradição final.

5.1 Passo 1

Lema 5.2. *Se* $\liminf_{p\to 1} u_p = 0$*, então a menos de uma subsequência,* (u_p) *tem um único ponto de concentração.*

Demonstração:(Do Lema 5.2) Primeiro vamos provar a existência de pelo menos um ponto de concentração da sequência (u_p). Suponhamos por absurdo que não existe nenhum ponto de concentração, logo pela definição temos que $\forall x \in M$ existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\limsup_{p\to 1} \int_{B(x,\delta_0)} u_p^{p^*} dv_g \quad = \quad 0,$$

por outro lado existe uma partição da unidade $(B(x_i,\delta_0),\alpha_i,\varphi_i)_{i\in I}$ subordinada ao atlas $(B(x_i,\delta_0),\alpha_i)$ de M onde $B(x_i,\delta_0)$ são bolas de raio δ_0 centradas nos pontos x_i. Pela compacidade da variedade M, I tem um subconjunto finito $J = \{1,\cdots,N\}$ tal que

$$\begin{aligned}\int_M u^{p^*} dv_g = \int_M \left(\sum_{i\in I} \varphi_i\right) u_p^{p^*} dv_g \quad &= \quad \sum_{i=1}^{N} \int_M \varphi_i u_p^{p^*} dv_g \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^{N} \int_{B(x_i,\delta_0)} u_p^{p^*} dv_g,\end{aligned}$$

assim tomando o limite

$$\begin{aligned} 1 = \limsup_{p\longrightarrow 1}\int_M u^{p^*}dv_g &= \sum_{i=1}^{N}\limsup_{p\longrightarrow 1}\int_{B(x_i,\delta_0)}\varphi_i u_p^{p^*}dv_g \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\int_{B(x_i,\delta_0)}\limsup_{p\longrightarrow 1}u_p^{p^*}dv_g. \end{aligned}$$

Vendo que os termos da última somatória são todos 0 obtemos uma contradição, portanto (u_p) tem pelo menos um ponto de concentração.

Seja agora $x \in M$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $\eta \in C^{\infty}(M)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1, \eta \equiv 1$ em $B(x,\delta)$, $\eta \equiv 0$ em $M \setminus B(x,2\delta)$ e $|\nabla\eta| \leq C_0/\delta$. Multiplicamos (33) por $\eta^p u_p^k$ para algum $k > 1$ e integrando sobre M obtemos

$$\int_M \eta^p u_p^k \Delta_p u_p dv_g + B_p\int_M \eta^p u_p^{k+p-1}dv_g = K(n,p)^{-p}\int_M \eta^p u^{k+p^*-1}dv_g,$$

daqui

$$\begin{aligned} \int_M \eta^p u_p^k \Delta_p u_p dv_g &= K(n,p)^{-p}\int_M \eta^p u^{k+p^*-1}dv_g \\ &- B_p\int_M \eta^p u_p^{k+p-1}dv_g. \end{aligned} \tag{59}$$

Desde que

$$\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g = \int_M |\eta\nabla(u_p^{\frac{k+p-1}{p}}) + u_p^{\frac{k+p-1}{p}}\nabla\eta|_g^p dv_g, \tag{60}$$

sabemos por um resultado elementar e padrão que vale

$$(1+t)^p \leq 1 + C_p pt + C_p t^p, \text{ para todo } t \geq 0, \tag{61}$$

onde $C_p =$max$(1, 2^{p-2})$. Logo pondo $v_p = u_p^{\frac{k+p-1}{p}}$ em (60) temos

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g &= \int_M |\nabla(\eta v_p)|^p dv_g = \int_M |\eta\nabla v_p + v_p\nabla\eta|^p dv_g, \\ &\leq \int_M (|\eta\nabla v_p| + |v_p\nabla\eta|)^p dv_g \\ &= \int_M |\eta\nabla v_p|^p\left(1 + \frac{|v_p\nabla\eta|}{|\eta\nabla v_p|}\right)^p dv_g, \end{aligned}$$

aplicando (61)

$$
\begin{aligned}
&\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g \\
\leq\ & \int_M |\eta\nabla v_p|^p \left(1 + C_p p\frac{|v_p\nabla\eta|}{|\eta\nabla v_p|} + C_p\frac{|v_p\nabla\eta|^p}{|\eta\nabla v_p|^p}\right)^p dv_g, \\
=\ & \int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g + C_p p\int_M |v_p\nabla\eta||\eta\nabla v_p|^{p-1} dv_g \\
+\ & C_p\int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g,
\end{aligned}
$$

aplicando agora a desigualdade de Hölder no termo central temos

$$
\begin{aligned}
&\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g \\
\leq\ & \int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g \\
+\ & C_p p\left\{\int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g\right\}^{1/p}\left\{\int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g\right\}^{1/q} \\
+\ & C_p\int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g.
\end{aligned}
$$

Seja $\epsilon > 0$ e tomamos $\epsilon_1 = \left(\frac{C_p p}{q\epsilon}\right)^{1/q} > 0$, usando a desigualdade de Young novamente no termo do meio, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g \leq\ & \int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g \\
+\ & C_p p\left\{\frac{\epsilon_1^p}{p}\int_M |v_p\nabla\eta|^p + C_p p\frac{1}{q\epsilon^q\int_M |\eta\nabla v_p|^p}\right\} \\
+\ & C_p\int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g \\
=\ & \left(1 + \frac{C_p p}{q\epsilon_1^q}\right)\int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g \\
+\ & C_p\left(p\frac{\epsilon_1^p}{p} + 1\right)\int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g \\
=\ & (1+\epsilon)\int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g + C_\epsilon\int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g,
\end{aligned}
$$

com $C_\epsilon = C_p\left(p\frac{\epsilon_1^p}{p}+1\right)$. Logo

$$\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g = (1+\epsilon)\int_M |\eta\nabla v_p|^p dv_g + C_\epsilon \int_M |v_p\nabla\eta|^p dv_g, \quad (62)$$

onde $v_p = u_p^{\frac{k+p-1}{p}}$. Portanto para qualquer $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ que depende somente de $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g &\leq \left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)\int_M \eta^p u_p^{k-1}|\nabla u_p|_g^p dv_g + \\ &+ C_\epsilon \int_M |\nabla\eta|_g^p u_p^{k+p-1} dv_g, \end{aligned} \quad (63)$$

observe que no primeiro termo da desigualdade anterior aplicamos o seguinte resultado

$$\int_M \eta^p |\nabla(u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g = \left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p \int_M \eta^p u_p^{k-1}|\nabla u_p|_g^p dv_g,$$

da definição de $\Delta_p u_p$, temos

$$\begin{aligned}\int_M \eta^p u_p^k \Delta_p u_p dv_g &= \int_M |\nabla u_p|_g^{p-2}\langle\nabla(\eta^p u_p^k), \nabla u_p\rangle_g dv_g \\ &= k\int_M \eta^p u_p^{k-1}|\nabla u_p|_g^p dv_g \\ &+ p\int_M u_p^k |\nabla u_p|_g^{p-2}\langle\nabla(\eta^p), \nabla u_p\rangle_g dv_g,\end{aligned}$$

daqui

$$\begin{aligned}\int_M \eta^p u_p^{k-1}|\nabla u_p|_g^p dv_g &= \frac{1}{k}\int_M \eta^p u_p^k \Delta_p u_p dv_g \\ &- \frac{p}{k}\int_M u_p^k |\nabla u_p|_g^{p-2}\langle\nabla(\eta^p), \nabla u_p\rangle_g dv_g,\end{aligned}$$

substituindo em (63) temos

$$\begin{aligned}&\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g \\ \leq\ & \frac{1}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)\int_M \eta_p u_p^k \Delta_p u_p dv_g \\ -\ & \frac{p}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)\int_M u_p^k |\nabla u_p|^{p-2}\langle\nabla(\eta^p), \nabla u_p\rangle_g dv_g \\ +\ & C_\epsilon \int_M |\nabla\eta|_g^p u_p^{k+p-1} dv_g\end{aligned}$$

Combinando (59), com a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a propriedade $|\nabla(\eta^p)| = |p\eta^{p-1}\nabla\eta|$, segue-se que

$$\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)K(n,p)^{-p}\int_M \eta^p u_p^{k+p^*-1} dv_g \\
-\ & \frac{1}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)B_p\int_M \eta^p u_p^{k+p-1} dv_g \\
+\ & \frac{p}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)\int_M |\nabla u_p|_g^{p-1} u_p^k |\nabla(\eta^p)|_g dv_g \\
+\ & C_\epsilon \int_M u_p^{k+p-1}|\nabla\eta|^p dv_g,
\end{aligned}$$

portanto

$$\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}})|_g^p dv_g$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)K(n,p)^{-p}\int_M \eta^p u_p^{k+p^*-1} dv_g \\
-\ & \frac{1}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)B_p\int_M \eta^p u_p^{k+p-1} dv_g \\
+\ & C_\epsilon \int_M u_p^{k+p-1}|\nabla\eta|^p dv_g \\
+\ & \frac{p}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)\int_M |\nabla u_p|_g^{p-1} u_p^k |\nabla\eta|_g dv_g.
\end{aligned}$$

Agora aplicando (29) a $\eta^p u_p^{\frac{k+p-1}{p}}$, pela desigualdade de Hölder e desde que $k > 1$, obtemos

$$\left(\int_M \left(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}}\right)^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \left[1 - \frac{1+\epsilon}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p \left(\int_{B(x,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g\right)^{1-\frac{p}{p^*}}\right]$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & C_\epsilon K(n,p)^p \int_M u_p^{k+p-1}|\nabla\eta|_g^p dv_g \\
+\ & \frac{p(1+\epsilon)}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p K(n,p)^p \int_M |\nabla u_p|_g^{p-1} u_p^k |\nabla\eta|_g dv_g. \quad (64)
\end{aligned}$$

Seja agora x um ponto de concentração de (u_p) e vamos asumir que para algum $\delta > 0$,

$$a(2\delta) = \limsup_{p\to 1} \int_{B(x,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g < 1. \tag{65}$$

É fácil mostrar que para $0 < b < 1$ existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $b(1+\epsilon_0) < 1$ então existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que $(1+\epsilon_0)a(2\delta)^{1-\frac{p}{p^*}} < 1$, logo podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\lim_{p\to 1} \left(\frac{1+\epsilon}{k} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^p a(2\delta)^{1-\frac{p}{p^*}} \right) < 1. \tag{66}$$

Agora desde que

$$\int_M \left(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} dv_g$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B(x,2\delta)} \left(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} dv_g \\
&+ \int_{M\setminus B(x,2\delta)} \left(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} dv_g \\
&= \int_{B(x,2\delta)} \left(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} dv_g, (\eta \equiv 0 \text{ em } M \setminus B(x,2\delta)) \\
&\geq \int_{B(x,\delta)} \left(u_p^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} dv_g. (\eta \equiv 1 \text{ em } B(x,\delta))
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\int_{B(x,\delta)} u_p^{\frac{k+p-1}{p}p^*} dv_g \right)^{p/p^*} [A] \leq \left(\int_M \left(\eta u_p^{\frac{k+p-1}{p}} \right)^{p^*} dv_g \right)^{p/p^*} [A],$$

onde

$$A = \left[1 - \frac{1+\epsilon}{k} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^p \left(\int_{B(x,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g \right)^{1-\frac{p}{p^*}} \right] > 0,$$

assim por (64) temos

$$\left(\int_{B(x,\delta)} u_p^{\frac{k+p-1}{p}p^*} dv_g \right)^{p/p^*} [A]$$

$$\begin{aligned} &\leq \quad C_\epsilon K(n,p)^p \int_M u_p^{k+p-1} |\nabla \eta|_g^p dv_g + \\ &+ \quad \frac{p(1+\epsilon)}{k} \left(\frac{k+p-1}{p} \right)^p K(n,p)^p \int_M |\nabla u_p|_g^{p-1} u_p^k |\nabla \eta|_g dv_g. \end{aligned}$$

Observamos que $[A]$, $C_\epsilon K(n,p)^p$, e $\frac{p(1+\epsilon)}{k}\left(\frac{k+p-1}{p}\right)^p K(n,p)^p$ são quantidades limitados quando p é próximo de 1, logo existe uma constante $C > 0$ independente de p tal que

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x,\delta)} u_p^{\frac{k+p-1}{p} p^*} dv_g \right)^{p/p^*} &\leq \quad C \int_M u_p^{k+p-1} |\nabla \eta|_g^p dv_g \\ &+ \quad C \int_M |\nabla u_p|_g^{p-1} u_p^k |\nabla \eta|_g dv_g, \end{aligned}$$

pela escolha de k próximo de 1, obtemos que o termo do lado direito da desigualdade é limitada quando $p \to 1$, para ver isto, primeiro mostramos que de (33), (32) e integrando sobre a variedade M obtemos

$$\int_M (\Delta_p u_p) u_p dv_g + B_p \int_M u_p^p dv_g = K(n,p)^{-p} \tag{67}$$

logo por (37) temos que

$$\int_M (\Delta_p u_p) u_p dv_g = \int_M |\nabla u_p|^p dv_g = \| \nabla u_p \|_p^p,$$

portanto (67) fica

$$\| \nabla u_p \|_p^p = K(n,p)^{-p} - B_p \| u_p \|, \tag{68}$$

tomando o limite quando $p \to 1$ e pelo suposto $\| u_p \|_p \to 0$, quando $p \to 1$ obtemos que $\| \nabla u_p \|_p$ é limitado para p próximo de 1.

Segundo, escolhemos $1 < k < \frac{n}{n-1}$ e p que satisfaz

$$\begin{aligned} 1 < p < \frac{n}{n-1} + 1 - k \quad &\Longrightarrow \quad 1 < k + p - 1 < \frac{n}{n-1} \\ 1 < p < \frac{n}{n-1} \frac{1}{k} \quad &\Longrightarrow \quad 1 < kp < \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Logo pela convergência forte establecida em (46) temos que $\| u_p \|_{k+p-1}$,

$\| u_p \|_{kp}$ são limitados, portanto

$$\begin{aligned} B = C\int_M u_p^{k+p-1}|\nabla\eta|_g^p dv_g &+ C\int_M |\nabla u_p|_g^{p-1}u_p^k|\nabla\eta|_g dv_g \\ &\leq C\frac{C_0^p}{\delta^p}\int_M u_p^{k+p-1}dv_g \\ &+ C\frac{C_0}{\delta}\int_M |\nabla u_p|_g^{p-1}u_p^k dv_g \\ &= C\frac{C_0^p}{\delta^p}\| u_p \|_{k+p-1}^{k+p-1} \\ &+ C\frac{C_0}{\delta}\| \nabla u_p \|_p^{p/q}\| u_p \|_{kp}^k, \end{aligned}$$

tomando $q = \frac{p}{p-1} > 1$ então $q' = p$ e pelo fato que $\| \nabla u_p \|_p$ é limitado para $p \to 1$ segue que B é limitada uniformemente por uma constante C' independente de p por p próximo de 1. Do fato que $\eta \equiv 1$ em $B(x,\delta)$ e de (64) segue imediatamente

$$\limsup_{p\to 1}\left(\int_{B(x,\delta)} u^{\frac{k+p-1}{p}p^*}dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C'. \tag{69}$$

Por outro lado aplicamos a desigualdade de Hölder, desde que $\frac{p}{p^*} + \left(1 - \frac{p}{p^*}\right) = 1$ temos que

$$\int_{B(x,\delta)} u_p^{p^*}dv_g \leq \left(\int_{B(x,\delta)} u_p^{\frac{k+p-1}{p}p^*}dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}\left(\int_M u_p^{p^*-(k-1)\frac{p^*}{p^*-p}}dv_g\right)^{1-\frac{p}{p^*}}, \tag{70}$$

como $p \leq p^* - (k-1)\frac{p^*}{p^*-p} \leq p^*$ e usando a desigualdade de interpolação (Proposição 6.10 [Fol99]) temos

$$\| u_p \|_q \leq \| u_p \|_p^{\lambda}\| u_p \|_{p^*}^{1-\lambda},$$

onde $q = p^* - (k-1)\frac{p^*}{p^*-p}$ e $\lambda = \frac{1/q-1/p^*}{1/p-1/p^*}$. De $\| u_p \|_{p^*} = 1$ segue-se

$$\| u_p \|_q \leq \| u_p \|_p^{\lambda} \Longrightarrow \int_M u_p^q dv_g \leq \| u_p \|_p^{\lambda q},$$

tomando o limite

$$\left(\limsup_{p\to 1}\int_M u_p^q dv_g\right)^{1/n} \leq \left(\limsup_{p\to 1}\| u_p \|_p^{\lambda q}\right)^{1/n},$$

como $\limsup_{p\to 1} \lambda q/n > 0$ e do fato que assumimos $\| u_p \|_p \to 0$ quando $p \to 1$ temos

$$\limsup_{p\to 1} \left(\int_M u^{p^*-(k-1)\frac{p^*}{p^*-p}} dv_g \right)^{1-\frac{p}{p^*}} = 0,$$

portanto junto com (69) obtemos de (70)

$$\limsup_{p\to 1} \int_{B(x,\delta)} u_p^{p^*} dv_g = 0.$$

Isto é uma contradição com o fato que x é um ponto concentração de (u_p) assim (65) tem que ser falso i.e.,
$\forall \delta > 0$

$$\limsup_{p\to 1} \int_{B(x,\delta)} u_p^{p^*} dv_g \quad \geq \quad 1,$$

por outro lado

$$\int_{B(x,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g \leq \int_M u_p^{p^*} = 1 \Longrightarrow 1 \leq \limsup_{p\to 1} \int_{B(x,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g \leq 1,$$

implica que $\forall \delta > 0$

$$\limsup_{p\to 1} \int_{B(x,\delta)} u_p^{p^*} dv_g = 1.$$

Isto prova que ao menos de uma subsequência, (u_p) tem um único ponto de concentração, suponha que temos x_1, x_2 dois pontos de concentração da sequência (u_p) logo para todo $\delta > 0$

$$\limsup_{p\to 1} \int_{B(x_1,\delta)} u_p^{p^*} dv_g = \limsup_{p\to 1} \int_{B(x_2,\delta)} u_p^{p^*} dv_g = 1,$$

por outro lado temos

$$1 = \int_M u_p^{p^*} dv_g \geq \limsup_{p\to 1} \int_{B(x_1,\delta)} u_p^{p^*} dv_g + \limsup_{p\to 1} \int_{B(x_2,\delta)} u_p^{p^*} dv_g,$$

esta última desigualdade é uma contradição que completa a demonstração. $\square$

Denotemos com $x_0 \in M$ o único ponto de concentração de (u_p).
De (64) podemos obter o lema seguinte.

Lema 5.3. *Existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $\Omega \subset\subset M \setminus \{x_0\}$*

$$\int_\Omega u_p^{p^*(1+\epsilon)} dv_g \leq C \tag{71}$$

onde C não depende de p, para p perto de 1.

Demonstração:(Do Lema 5.3) Sabendo que x_0 é o único ponto de concentração da sequência (u_p) é imediato verificar que

$$\limsup_{p\to 1} \int_\Omega u_p^{p^*} dv_g = 0. \tag{72}$$

tomando $\epsilon = \frac{k-1}{p}$ em (64) sabendo que o lado direito é limitado por C', junto com (72) obtemos imediatamente (71). $\square$

Agora usaremos o esquema iterativo de Moser para mostrar o Lema seguinte.

Lema 5.4. *Se vale* $\lim_{p\to 1} \| u_p \|_p = 0$*, então*

$$\lim_{p\to 1} u_p = 0 \text{ em } C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\}). \tag{73}$$

Demonstração:(Do Lema 5.4) Seja $\Omega \subset\subset M \setminus \{x_0\}$ e tomamos uma bola centrada no ponto $x \in \Omega$ de raio δ, $B(x,\delta) \subset \Omega$. Agora de (33), o fato que $B_p > 0$ e $u_p > 0$ temos que

$$K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-1} - B_p u_p^{p-1} \quad \leq \quad K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-p} u_p^{p-1},$$

logo

$$\Delta_p u_p \leq K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-p} u_p^{p-1}, \forall x \in M.$$

Pondo $f := K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-p}$ ($f > 0$ desde que $u_p > 0$) a desigualdade anterior vale na bola $B(x,\delta)$, i.e.,

$$\Delta_p u_p \leq f u_p^{p-1}, \text{ em } B(x,\delta). \tag{74}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,\delta)} f^{\frac{p^*}{p^*-p}(1+\epsilon)} dv_g &= \int_{B(x,\delta)} \left(K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-p} \right)^{\frac{p^*}{p^*-p}(1+\epsilon)} dv_g \\
&= \int_{B(x,\delta)} K(n,p)^{-n(1+\epsilon)} u_p^{p^*(1+\epsilon)} dv_g \\
&= K(n,p)^{-n(1+\epsilon)} \int_{B(x,\delta)} u_p^{p^*(1+\epsilon)} dv_g.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $p \to 1$ e fazendo uso de (71) é fácil de ver que existe uma contaste $C'' > 0$ independente de p por p próximo de 1 tal que

$$\lim_{p\to 1}\int_{B(x,\delta)} f^{\frac{p^*}{p^*-p}(1+\epsilon)}dv_g \le C''. \tag{75}$$

Sejam $0 \le r < s \le \delta$ e $\eta \in C_c^\infty(B(x,\delta))$ tais que

i. $0 \le \eta \le 1$,

ii. $\eta \equiv 1$, em $B(x,r)$,

iii. $\eta \equiv 0$, em $B(x,\delta) \setminus B(x,s)$,

iv. $|\nabla\eta| \le \frac{C_0}{s-r}$, onde C_0 depende somente da geometria de (M,g).

Seja $k > 0$ multiplicamos (74) por $\eta^p u_p^{k+1}$ e integramos sobre M, para termos

$$\int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g \le \int_M \eta^p f u_p^{k+p}. \tag{76}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g &= \int_M |\nabla u_p|^{p-2}\langle\nabla u_p, \nabla(\eta^p u_p^{k+1})\rangle dv_g,\\
= & \int_M |\nabla u_p|^{p-2}\langle\nabla u_p, \eta^p\nabla u_p^{k+1} + u_p^{k+1}\nabla(\eta^p)\rangle dv_g,\\
= & \int_M |\nabla u_p|^{p-2}\langle\nabla u_p, \eta^p(k+1)u_p^k\nabla u_p\rangle dv_g\\
+ & \int_M |\nabla u_p|^{p-2}\langle\nabla u_p, u_p^{k+1}\nabla(\eta^p)\rangle dv_g,\\
= & (k+1)\int_M |\nabla u_p|^{p-2}\eta^p u_p^k\langle\nabla u_p, \nabla u_p\rangle dv_g\\
+ & \int_M |\nabla u_p|^{p-2}u_p^{k+1}\langle\nabla u_p, p\eta^{p-1}\nabla\eta\rangle dv_g,\\
= & (k+1)\int_M |\nabla u_p|^p\eta^p u_p^k dv_g + p\int_M |\nabla u_p|^{p-2}u_p^{k+1}\eta^{p-1}\langle\nabla u_p, \nabla\eta\rangle dv_g,
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
(k+1)\int_M |\nabla u_p|^p\eta^p u_p^k dv_g &= \int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g\\
&- p\int_M |\nabla u_p|^{p-2}u_p^{k+1}\eta^{p-1}\langle\nabla u_p, \nabla\eta\rangle dv_g,
\end{aligned}$$

aplicamos a desigualdade de Cauchy Schwarz e deduzimos

$$\begin{aligned}(k+1)\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g &\leq \int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g \\ &+ p\int_M |\nabla u_p|^{p-1} u_p^{k+1}\eta^{p-1}|\nabla \eta| dv_g.\end{aligned}$$

Usando agora o item (iv) para obtermos

$$(k+1)\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g$$

$$\leq \int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g + p\frac{C_0}{s-r}\int_{B(x,s)} |\nabla u_p|^{p-1} u_p^{k+1}\eta^{p-1} dv_g. \quad (77)$$

Lembrando dapela desigualdade de Young, sabemos que $\forall \theta > 0$

$$XY \leq \frac{p-1}{p}\theta^{p/(p-1)} X^{p/(p-1)} + \frac{1}{p}\theta^{-p} Y^p, \text{ com } X, Y \in \mathbb{R}^+$$

e aplicamos no segundo termo da desigualdade (77) tomando $X = \eta^{p-1}|\nabla u_p|^{p-1} u_p^{k(p-1)/p}$ e $Y = u_p^{1+k/p}$ obtemos

$$(k+1)\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g$$

$$\begin{aligned}&\leq \int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g \qquad (78)\\ &+ p\frac{C_0}{s-r}\left(\frac{p-1}{p}\theta^{p/(p-1)}\int_M \eta^p |\nabla u_p|^p u_p^k dv_g + \frac{1}{p}\theta^{-p}\int_{B(x,s)} u_p^{p+k} dv_g\right),\end{aligned}$$

tomando $\theta > 0$ tal que

$$\theta^{\frac{p}{p-1}}(p-1)\frac{C_0}{s-r} = \frac{1}{2}(k+1), \quad (79)$$

consequentemente a (78) torna-se em

$$(k+1)\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g \leq \int_M \eta^p u_p^{k+1}\Delta_p u_p dv_g$$

$$+\frac{1}{2}(k+1)\int_M \eta^p |\nabla u_p|^p u_p^k dv_g + p\frac{C_0}{(s-r)}\frac{1}{p}\theta^{-p}\int_{B(x,\delta)} u_p^{p+k} dv_g,$$

portanto

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)}{2}\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g &\leq \int_M \eta^p f u_p^{p+k} dv_g \\ &+ \frac{C_0\theta^{-p}}{s-r}\int_{B(x,s)} u_p^{p+k} dv_g. \end{aligned} \tag{80}$$

Por outro lado usando a desigualdade de Hölder tomando

$$q' = \frac{n(1+\epsilon)}{p} \Longrightarrow q = \frac{n(1+\epsilon)}{n(1+\epsilon)-p}, \tag{81}$$

temos

$$\int_M \eta^p f u_p^{p+k} dv_g \leq \left\{\int_{B(x,\delta)} f^{\frac{n}{p}(1+\epsilon)} dv_g\right\}^{\frac{p}{n(1+\epsilon)}} \left\{\int_{B(x,\delta)} (\eta^p u_p^{p+k})^q dv_g\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

E de (75) temos

$$\int_{B(x,\delta)} f^{\frac{n}{p}(1+\epsilon)} dv_g = \int_{B(x,\delta)} f^{\frac{p^*}{p^*-p}(1+\epsilon)} dv_g \leq C'', \text{ pois } \tfrac{p^*}{p^*-p} = \tfrac{n}{p}$$

logo

$$\left\{\int_{B(x,\delta)} f^{\frac{p^*}{p^*-p}(1+\epsilon)} dv_g\right\}^{\frac{p}{n(1+\epsilon)}} \leq C''^{\frac{p^*-p}{p^*(1+\epsilon)}} \leq C,$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de p, observe também que $\frac{p^*}{p^*-p} = \frac{n}{p}$, logo (80) fica

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)}{2}\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g &\leq C\left\{\int_{B(x,\delta)} (\eta^p u^{p+k})^q dv_g\right\}^{1/q} \\ &+ \frac{C_0\theta^{-p}}{s-r}\int_{B(x,s)} u_p^{p+k}. \end{aligned}$$

Por outra parte, usando a desigualdade de Hölder com q e q' obtemos

$$\int_{B(x,s)} u_p^{p+k} \leq \left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(p+k)q}\right\}^{1/q} |B(x,\delta)|^{(q-1)/q},$$

assim (80) fica

$$\frac{(k+1)}{2}\int_M |\nabla u_p|^p \eta^p u_p^k dv_g \quad \leq$$

$$\leq \left[C + \frac{C_0}{s-r}\theta^{-p}|B(x,\delta)|^{(q-1)/q}\right]\left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(p+k)q}\right\}^{1/q}. \qquad (82)$$

Independentemente observamos que

$$\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k}{p}+1})|^p dv_g \leq 2^{p-1}\left[\int_M |\nabla \eta|^p u_p^{k+p} + \int_M \eta^p |\nabla(u_p^{\frac{k}{p}+1})|^p dv_g\right],$$

pois $|X+Y|^p \leq 2^{p-1}(|X|^p + |Y|^p)$, usando novamente o item (iv.) na desigualdade precedente temos que

$$\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k}{p}+1})|^p dv_g$$

$$\leq 2^{p-1}\left[\frac{C_0^p}{(s-r)^p}\int_{B(x,s)} u_p^{k+p} dv_g + \left(\frac{k+p}{p}\right)^p \int_M u_p^k |\nabla u_p|^p \eta^p dv_g\right]. \ (83)$$

Pondo $[A] = \left[C + \frac{C_0}{s-r}\theta^{-p}|B(x,\delta)|^{(q-1)/q}\right]$ em (82) obtemos

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k}{p}+1})|^p dv_g \quad &\leq \quad 2^{p-1}\frac{C_0^p}{(s-r)^p}\int_{B(x,s)} u_p^{k+p} dv_g \\ &+ \quad 2^{p-1}\left(\frac{k+p}{p}\right)^p \frac{2}{k+1}[A]\left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(p+k)q}\right\}^{1/q} (84)\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder na primeira integral do lado direito temos

$$\int_{B(x,s)} u_p^{k+p} dv_g \leq \left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(k+p)/q} dv_g\right\}^{1/q} |B(x,s)|^{\frac{q-1}{q}}.$$

logo de (84) segue se

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla(\eta u_p^{\frac{k}{p}+1})|^p dv_g \quad &\leq \quad 2^{p-1}\frac{C_0^p}{(s-r)^p}\left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(k+p)/q}\right\}^{1/q} |B(x,s)|^{\frac{q-1}{q}} \\ &+ \quad 2^{p-1}\left(\frac{k+p}{p}\right)^p \frac{2}{k+1}[A]\left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(p+k)q}\right\}^{1/q},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\int_{B(x,s)} u_p^{(k+p)/q}\right\}^{1/q}\left[2^{p-1}\frac{C_0^p}{(s-r)^p}|B(x,s)|^{\frac{q-1}{q}}+\left(\frac{k+p}{p}\right)^p\frac{2^p}{k+1}[A]\right],\\
&\leq \left\{\int_{B(x,\delta)} u_p^{(k+p)/q}\right\}^{1/q} 2^{p-1}\frac{C_0^p}{(s-r)^p}|B(x,\delta)|^{\frac{q-1}{q}}\\
&+ \left\{\int_{B(x,\delta)} u_p^{(k+p)/q}\right\}\left(\frac{k+p}{p}\right)^p\frac{2^p}{k+1}\left[C+\frac{C_0}{s-r}\theta^{-p}|B(x,\delta)|^{(q-1)/q}\right].
\end{aligned}
$$

A desigualdade de Sobolev local nas variedades Riemannianas diz que

$$
\left(\int_{B(x,\delta)}|v|^{p^*}dv_g\right)^{p/p^*}\leq C_1\int_{B(x,\delta)}|\nabla v|^p dv_g, \forall v\in C_c^\infty(B(x,\delta)).
$$

Portanto

$$
\left(\int_{B(x,r)} u_p^{\frac{k+p}{p}p^*}dv_g\right)^{p/p^*}\leq B_0\left(\int_{B(x,s)} u_p^{(k+p)q}dv_g\right)^{1/q} \tag{85}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
B_0 &= C_1\frac{2^p}{k+1}\left(\frac{k+p}{p}\right)^p\left(C+\frac{C_0}{s-r}\theta^{-p}|B(x,\delta)|^{\frac{q-1}{q}}\right)\\
&+ C_1 2^{p-1}\frac{C_0^p}{(s-r)^p}|B(x,\delta)|^{\frac{q-1}{q}},
\end{aligned}
$$

substituindo $\frac{q-1}{q}=\frac{p}{n(1+\epsilon)}$ e com o valor de θ obtemos

$$
B_0 =
$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1\left[\frac{2^p}{k+1}\left(\frac{k+p}{p}\right)^p\left(C+\left(\frac{C_0}{s-r}\right)^p(p-1)^{p-1}\frac{2^{p-1}}{(k+1)^{p-1}}|B(x,\delta)|^{\frac{p}{n(1+\epsilon)}}\right)\right]\\
&+ C_1\left[2^{p-1}\frac{C_0^p}{(s-r)^p}|B(x,\delta)|^{\frac{q-1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

Desde que $p>1$ e $k>0$ temos

$$
\left(\frac{k+p}{p}\right)^p\leq (k+1)^p,
$$

assim

$$B_0 \quad \leq$$

$$\leq C_1 \left[2^p (k+1)^{p-1} C + \left(2^p 2^{p-1} (p-1)^{p-1} + 2^{p-1} \right) |B(x,\delta)|^{\frac{p}{n(1+\epsilon)}} \frac{C_0^p}{(s-r)^p} \right]. (86)$$

Definimos agora uma aplicação F

$$F(t,\rho) = \left(\int_{B(x,\rho)} u_p^t dv_g \right)^{1/t},$$

pela desigualdade (85) obtemos

$$F(\frac{k+p}{p} p^*, r) \leq B_0^{\frac{1}{k+p}} F((k+p)q, s). \tag{87}$$

Escolhemos, k_0 tal que $(k_0 + p)q = p^*$, $s_0 = \delta$ e definimos para cada $i \geq 1$

$$(k_i + p) = \left(\frac{p^*}{pq} \right)^i (k_0 + p), s_i = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2^{i+1}}.$$

Aplicando (87) para $k = k_i$, $s = s_i$ e $r = s_{i+1}$, observe que $s_i - s_{i+1} = \delta/(2^{i+2})$ e também que $k_i \to +\infty$ quando $i \to +\infty$, desde que

$$\begin{aligned} k_{i+1} - k_i &= \left[\left(\frac{p^*}{pq} \right)^{i+1} (k_0 + p) - \left(\frac{p^*}{pq} \right)^i (k_0 + p) \right], \\ &= (k_0 + p) \left(\frac{p^*}{pq} \right)^i \left[\frac{p^*}{pq} - 1 \right], \end{aligned}$$

logo $k_{i+1} - k_i > 0$ se somente se $\frac{p^*}{pq} - 1 > 0 \Longleftrightarrow q - \frac{p^*}{p} < 0$ fato que é verdadeiro desde que

$$\begin{aligned} q - \frac{p^*}{p} &= \frac{n(1+\epsilon)}{n(1+\epsilon) - p} - \frac{np}{(n-p)p}, \\ &= \frac{n}{(n(1+\epsilon) - p)(n-p)} [(1+\epsilon)(n-p) - n(n(1+\epsilon) - p)], \\ &= \frac{n}{(n(1+\epsilon) - p)(n-p)} [-\epsilon p] < 0, \text{ pois } -\epsilon p < 0. \end{aligned}$$

Logo $k_i \to \infty$ quando $i \to \infty$. Por outro lado

$$F(\frac{k_i + p}{p} p^*, s_{i+1}) = F((k_{i+1} + p)q, s_{i+1}) \leq B_i^{\frac{1}{k_i+p}} F((k_i + p)q, s_i).$$

Iterando

$$\| u \|_{L^\infty(B(x,\delta/2))} \leq \prod_{i=0}^{+\infty} B_i^{\frac{1}{k_i+p}} F(p^*, \delta) \tag{88}$$

$$B_i$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 2^p (k_i + 1)^{p-1} C \\ &+ C_1 \left(2^p 2^{p-1} (p-1)^{p-1} + 2^{p-1}\right) |B(x,\delta)|^{\frac{p}{n(1+\epsilon)}} \frac{C_0^p}{\delta^p 2^{-(i+2)p}} \end{aligned}$$

Agora como $p \leq n$, $|B(x,\delta)| \leq C_2 \delta^n$ temos

$$B_i$$

$$\leq C_1 \left[2^n (k_i + 1)^n C + 2^{(n-1)} \left(2^n (n-1)^{n-1} + 1\right) C_2^{\frac{p}{n(1+\epsilon)}} \delta^{\frac{p}{1+\epsilon}} C_0^p \delta^{-p} 2^{(i+2)p} \right]$$

tomando $\tilde{C_j}$ =Max$\{1, C_j\}$, $\tilde{\delta}$ =Max$\{1, \delta\}$

$$B_i \leq C_1 \left[2^n (k_i + 1)^n C + 2^{(n-1)} \left(2^n (n-1)^{n-1} + 1\right) \tilde{C_2}^{\frac{1}{(1+\epsilon)}} \tilde{\delta}^{\frac{-\epsilon n}{1+\epsilon}} \tilde{C_0}^n 2^{(i+2)n} \right]$$

pondo $\mu = \frac{p^*}{pq}$ se prova que é independente de p para p próximo de 1:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{np(1+\epsilon)}{(n-p)(n(1+\epsilon)-p)} = \frac{n(1+\epsilon)-p}{(1+\epsilon)(n-p)} \\ &\leq \frac{n}{n-p} \leq \frac{n}{n-\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

a última desigualdade é válida desde que $p < \sqrt{2}$, observe também que $\mu > 1$. Logo

$$B_i \leq C_1 \left[2\mu^{ni} (k_0 + n)^n C + 2^{n-1} (2^n (n-1)^{(n-1)} + 1) \tilde{c_2}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \tilde{\delta}^{-\frac{\epsilon n}{1+\epsilon}} \tilde{C_0}^n 2^{(i+2)n} \right].$$

Desde que

$$(k_0+1)\mu^i \leq k_i + p = (k_0+p)\mu^i \leq \mu^i(k_0+n),$$

tomando $\alpha_i = \frac{1}{\mu^i(k_0+1)}$ se $B_i \geq 1$ ou $\alpha_i = \frac{1}{\mu^i(k_0+n)}$, se $B_i < 1$, se obtém

$$B_i^{\frac{1}{k_i+p}} \leq B_i^{\alpha_i}.$$

Passando aos produtos infinitos temos

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{+\infty} B_i^{\frac{1}{k_i+p}} &\leq \prod_{i=0}^{+\infty} B_i^{\frac{1}{(k_0+1)\mu^i}} \leq \left(\prod_{i=0}^{+\infty} \tilde{C}(n,\epsilon)^{\frac{1}{\mu^i}}\right)\left(\prod_{i=0}^{+\infty} \tilde{\mu}^{\frac{1}{\mu^i}}\right) \\ &= \left(\tilde{C}(n,\epsilon)^{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu^i}}\right)\left(\tilde{\mu}^{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{\mu^i}}\right)\end{aligned}$$

com $\tilde{\mu} = (2\mu)^n > 1$. Voltando à (88) temos enfim

$$\| u \|_{L^\infty(B(x,\delta/2))} \leq C_1 C(n,\epsilon,M)^{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu^i}} C(n)^{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{\mu^i}} \| u_p \|_{p^*(1+\epsilon),(B(x,\delta))}$$

Pelo critério do quociente as séries $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu^i}$ e $\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{\mu^i}$ são convergentes, pois $\mu > 1$ assim a constante é finita e não depende de p. Tomando o limite obtemos

$$\begin{aligned}&\| u \|_{L^\infty(B(x,\delta/2))} \\ &\leq C_1 C(n,\epsilon,M)^{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu^i}} C(n)^{\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{\mu^i}} \limsup_{p\to 1} \| u_p \|_{p^*,(B(x,\delta))} \\ &= 0,\end{aligned}$$

observe que o limite do lado direito é 0 desde que x não é ponto de concentração de (u_p), portanto

$$\lim_{p\to 1} u_p = 0 \text{ em } C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$$

$\square$

Observação 8. *Usando o resultado anterior obtemos*

$$\int_{\Omega \subset\subset M\setminus\{x_0\}} u_p^{p^*(1+\epsilon)} \leq \| u_p \|_{\infty,\Omega}^{p^*(1+\epsilon)} |M| \leq \| u_p \|_{\infty,\Omega}^{p^*(1+\epsilon)} |M| \to 0, p \to 1.$$

portanto a constante C'' pode ser escolhida tal que seja menor do que 1 quando p perto de 1. logo teremos uma estimativa

$$\| u \|_{L^\infty(B(x,\delta/2))} \leq C(n,\delta) \| u_p \|_{p^*,(B(x,\delta))} .$$

Seja $x_p \in M$, o ponto onde u_p atinge seu máximo e definimos a constante μ_p por

$$\mu_p^{1-\frac{n}{p}} = \| u_p \|_\infty = u_p(x_p), \tag{89}$$

temos que $x_p \to x_0$, e $\mu_p \to 0$, quando $p \to 1$.

5.2 Passo 2

Lema 5.5. *Se* $\lim_{p\to 1} \| u_p \|_p = 0$*, então*

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{p\to 1} \int_{B(x_p,R\mu_p)} u_p^{p*} dv_g = 1. \tag{90}$$

Afirmação 3. *Se* $\lim_{p\to 1} \| u_p \|_p = 0$*, então* $\forall \epsilon > 0$

$$\limsup_{p\to 1} \int_{M\setminus B(x_p,\epsilon)} |\nabla u_p|_g^p dv_g = 0. \tag{91}$$

Demonstração:(Da Afirmação 3) Seja $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 0$ em $B(x_p,\epsilon/2)$ e $\psi \equiv 1$ em $M \setminus B(x_p,\epsilon)$. Isto é possível uma vez que $x_p \to x_0$ quando $p \to 1$. Desde que

$$\begin{aligned}\int_M \psi^p |\nabla u_p|_g^p dv_g &= \int_{B(x_p,\epsilon)} \psi^p |\nabla u_p|_g^p dv_g + \int_{M\setminus B(x_p,\epsilon)} \psi^p |\nabla u_p|^p, \\ &\geq \int_{M\setminus B(x_p,\epsilon)} \psi^p |\nabla u_p|^p dv_g,\end{aligned}$$

e pela definição de $\psi = 1$ em $M \setminus B(x_p,\epsilon)$, temos

$$\int_M \psi^p |\nabla u_p|_g^p dv_g \geq \int_{M\setminus B(x_p,\epsilon)} |\nabla u_p|_g^p dv_g. \tag{92}$$

Por outra parte

$$\begin{aligned}\int_M \psi^p |\nabla u_p|_g^p dv_g &\leq \int_M \psi^p u_p \Delta_p u_p dv_g && (93)\\ &+ p\int_M \psi^{p-1} |\nabla\psi|_g u_p |\nabla u_p|_g^{p-1} dv_g && (94)\end{aligned}$$

Por outra parte usando duas vezes a desigualdade de Hölder obtemos

$$p\int_M \psi^{p-1}|\nabla\psi|_g u_p|\nabla u_p|_g^{p-1}dv_g$$

$$\begin{aligned}
&\leq \; p \parallel \nabla\psi \parallel_\infty \parallel u_p\psi^{p-1}|\nabla u_p|^{p-1} \parallel_1,\\
&= \; p \parallel \nabla\psi \parallel_\infty \int_M u_p\psi^{p-1}|\nabla u_p|^{p-1}dv_g,\\
&\leq \; p \parallel \nabla\psi \parallel_\infty \parallel u_p \parallel_p \parallel \psi^{p-1}|\nabla u_p|^{p-1} \parallel_{\frac{p}{p-1}} dv_g,\\
&= \; p \parallel \nabla\psi \parallel_\infty \parallel u_p \parallel_p \left(\int_M \psi^p|\nabla u_p|^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

então reescrevendo (93)

$$\begin{aligned}
\int_M \psi^p|\nabla u_p|_g^p dv_g \;&\leq\; K(n,p)^{-p}\int_{M\setminus B(x_p,\frac{\epsilon}{2})} u_p^{p^*}dv_g\\
&+\; p \parallel \nabla\psi \parallel_\infty \parallel u_p \parallel_p \left(\int_M \psi^p|\nabla u_p|_g^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

novamente por (73) e (55) temos

$$\limsup_{p\to 1}\int_M \psi^p|\nabla u_p|_g^p dv_g = 0,$$

assim voltando a (92)

$$\limsup_{p\to 1}\int_{M\setminus B(x_p,\epsilon)} |\nabla u_p|_g^p dv_g \;=\; 0.$$

□

Demonstração:(Do Lema 5.5) Seja $\delta > 0$ tal que a aplicação exp_{x_p}

é um difeomorfismo de $B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ em $B(x_p,\delta)$ para cada p, seja também $\Omega_p = B(0,\delta\mu_p^{-1})$ e para qualquer $x \in \Omega_p$ definimos

$$g_p(x) \;=\; (exp_{x_p}^*(g))(\mu_p x), \tag{95}$$

$$v_p(x) \;=\; \mu_p^{\frac{n}{p}-1}u_p(exp_{x_p}(\mu_p x)). \tag{96}$$

Desde que $\mu_p \to 0$, e $x_p \to x_0$, quando $p \to 1$, é claro que

$$\lim_{p \to 1} g_p = \xi \text{ em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \tag{97}$$

onde ξ é a métrica Euclidiana.

Observe que $v_p(0) = 1$, e também que v_p é contínua pois é composição de funções contínuas, além disso desde que no ponto x_p a função u_p tem um máximo temos

$$v_p(x) = \mu_p^{\frac{n}{p}-1} u_p(exp_{x_p}(\mu_p x)) \leq \mu_p^{\frac{n}{p}-1} u_p(x_p) = v_p(0) = 1, \forall x \in \Omega_p,$$

assim

$$\| v_p \|_{L^\infty(\Omega_p)} = v_p(0) = 1. \tag{98}$$

$g_p : T\Omega_p \oplus T\Omega_p \to \mathbb{R}$, onde $\oplus$ denota a soma de Whitney de dois fibrados vetoriais, $\Omega_p \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ é fixo, Ω_p varia com respeito a p, mas para todo p, o conjunto Ω_p contém a origem. Seja $G_{p,ij} = [g_{p,ij}(x)]$ a matriz que representa $exp_p^*(g)$ na carta exponencial $exp_{x_p} : \tilde{\Omega}_p \to M$, onde $\tilde{\Omega}_p = B(0, \delta)$, i.e.,

$$g_{p,ij}(x) = \left\langle d(exp)_{x_p}(x)(e_i), d(exp)_{x_p}(x)(e_j) \right\rangle_g (exp_p(x)),$$

$g_p(x) = exp^*_{x_p}(g)(\mu_p x)$, então a matriz representativa de g_p que indicaremos com $\tilde{G}_p$ satisfaz a relação $\tilde{G}_p(x) = G_p(\mu_p x)$. Vamos calcular $div_{g_p}(X)$ onde $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\begin{aligned}
div_{g_p}(X) &= \frac{1}{\sqrt{det(\tilde{G}_p(x))}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{det(\tilde{G}_p(x))} X^i \right), \\
&= \frac{1}{\sqrt{det(\tilde{G}_p(\mu_p x))}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{det(\tilde{G}_p(\mu_p x))} X^i \right) \\
&= \frac{1\mu_p}{\sqrt{det(\tilde{G}_p(y))}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\sqrt{det(\tilde{G}_p(y))} X^i(y) \right) \\
&= \mu_p div_g(X)(y),
\end{aligned}$$

onde $y = \mu_p x$. Temos também

$$\begin{aligned}
\nabla_{g_p} u_p \circ (exp_{x_p}(\mu_p x)) &= \tilde{g}_p^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} u_p(\mu_p x) = g_p^{ij}(\mu_p x) \mu_p \frac{\partial u_p}{\partial x^i}(\mu_p x) \\
&= g_p^{ij}(y) \mu_p \frac{u_p}{\partial x^i}(y) = \mu_p (\nabla_g u_p)(y),
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}(\Delta_p)_{g_p} v_p &= -div_{g_p}(|\nabla_{g_p} v_p|^{p-2}\nabla_{g_p} v_p)\\ &= -\mu_p^{\left(\frac{n}{p}-1\right)(p-1)} div_{g_p}(|\nabla_{g_p} u_p|^{p-2}\nabla_{g_p} u_p)(x)\\ &= \mu_p^{n-\frac{n}{p}+1}(-div_g(|\nabla_g u_p|^{p-2}\nabla u_p)) = \mu_p^{n-\frac{n}{p}+1}\Delta_{g,p} u_p.\end{aligned}$$

É fácil de ver que fazendo uso da igualdade (33) temos que v_p verifica

$$(\Delta_p)_{g_p} v_p + B_p \mu_p^p v_p^{p-1} = K(n,p)^{-1} v_p^{p^*-1}. \tag{99}$$

Seja agora $\eta \in C_c^\infty(B(0,\delta))$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ em $B(0,\delta/2)$. Definimos para $x \in \Omega_p$

$$\omega_p(x) = \eta(\mu_p x) v_p(x), \tag{100}$$

claramente, $w_p \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, logo $w_p \in H_1^p(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 4.

$$\lim_{p\to 1} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \omega_p|_\xi^p dv_\xi}{(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_p^{p^*} dv_\xi)^{\frac{p}{p^*}}} = K(n,1)^{-1}. \tag{101}$$

Demonstração:(Da Afirmação 4) O fato que o termo no lado esquerdo é maior que do lado direito vem diretamente da desigualdade de Sobolev Euclidiana e também que $\lim_{p\to 1} K(n,p) = K(n,1)$. Mostremos agora que o lado direito é menor ou igual que o lado esquerdo.
Primeiro, usando a expansão de Cartan da métrica g próximo de x_p e a definição (95), podemos obter a existência de uma constante $C > 0$ tal que para qualquer $x \in \Omega_p$,

$$(1 - C\mu_p^2|x|^2) dv_{g_p} \leq dv_\xi \leq (1 + C\mu_p^2|x|^2) dv_{g_p}. \tag{102}$$

É fácil de ver que multiplicando por $\omega_p^{p^*}$ a (102) obtemos

$$\begin{aligned}(1 - C\epsilon^2)\int_{B(0,\epsilon\mu_p^{-1})} \omega_p^{p^*} dv_{g_p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p^{p^*} dv_\xi\\ &\leq (1 + C\epsilon^2)\int_{B(0,\epsilon\mu_p^{-1})} \omega_p^{p^*} dv_{g_p} \qquad (103)\\ &+ (1 + C\delta^2)\int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})\setminus B(0\epsilon\mu_p^{-1})} \omega_p^{p^*} dv_{g_p}.\end{aligned}$$

Por (100), (95), (96) e (73) é válida a seguinte equação

$$\int_{B(0,\epsilon\mu_p^{-1})} w_p^{p^*} dv_{g_p} = \int_{B(x_p,\epsilon)} u_p^{p^*} dv_g,$$

que vai para 1 quando $p \to 1$ e quando $\epsilon < \frac{1}{2}\delta$. Por outro lado vale também

$$\int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})\setminus B(0.\epsilon\mu_p^{-1})} w_p^{p^*} dv_{g_p} = \int_{B(x_p,\delta)\setminus B(x_p,\epsilon)} u_p^{p^*} dv_g,$$

que vai para 0, quando $p \to 1$.
Tomando o limite quando $p \to 1$ na desigualdade (103) obtemos

$$(1 - C\epsilon^2) \leq \lim_{p\to 1} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_p^{p^*} dv_\xi \leq (1 + C\epsilon^2),$$

agora tomando o limite por $\epsilon \to 0^+$ temos que

$$\lim_{p\to 1} \int_{\mathbb{R}^n} w_p^{p*} dv_\xi = 1. \tag{104}$$

Por outro lado, analogamente como em (62) para $0 < \epsilon < \delta/2$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_p|_\xi^p dv_\xi &\leq (1+\epsilon) \int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})} |\nabla v_p|_\xi^p dv_\xi \\ &+ C_\epsilon \mu_p^p \int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})\setminus B(0,\frac{\delta}{2}\mu_p^{-1})} v_p^p dv_\xi,\end{aligned}$$

de (102), temos

$$|\nabla v_p|_\xi^p dv_\xi \leq (1 + C\mu_p^2 |x|^2) |\nabla v_p|_{g_p}^p dv_{g_p},$$

assim com esta desigualdade e pela Proposição 2.5 (a existência de $\lambda > 1$ tal que $\lambda^{-1}\xi \leq g_p \leq \lambda\xi$ logo então $dv_{g_p} \leq \lambda^{\frac{n}{2}} dv_\xi$) temos a validade da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_p|_\xi^p dv_\xi &\leq (1+\epsilon) \int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})} |\nabla v_p|_{g_p}^p dv_{g_p} \\ &+ C_\epsilon \lambda^{\frac{n}{2}} \mu_p^p \int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})\setminus B(0,\frac{\delta}{2}\mu_p^{-1})} v_p^p dv_{g_p} \\ &+ C\mu_p^2 \int_{B(0,\delta\mu_p^{-1})} |x|^2 |\nabla v_p|_{g_p}^p dv_{g_p}.\end{aligned}$$

Pelas definições (95) e (96), e uma mudança de variáveis o lado direito da desigualdade precedente é igual a

$$
\begin{aligned}
& (1+\epsilon)\int_{B(x_p,\delta)}|\nabla u_p|_g^p dv_g + C_\epsilon \lambda^{\frac{n}{2}}\int_{B(x_p,\delta)\backslash B(x_p,\frac{\delta}{2})} u_p^p dv_g \\
+ & \; C\mu_p \int_{B(x_p,\delta)}|x|^2|\nabla u_p|_g^p dv_g \\
= & \; (1+\epsilon)\int_{B(x_p,\delta)}|\nabla u_p|_g^p dv_g + C_\epsilon \lambda^{\frac{n}{2}}\int_{B(x_p,\delta)\backslash B(x_p,\frac{\delta}{2})} u_p^p dv_g \\
+ & \; C\mu_p \left[\int_{B(x_p,\epsilon)}|x|^2|\nabla u_p|_g^p dv_g + \int_{B(x_p,\delta)\backslash B(x_p,\epsilon)}|x|^2|\nabla u_p|_g^p dv_g\right].
\end{aligned}
$$

Argumentos desenvolvidos até aqui nos permitem com facilidade de se convencer que $\forall\epsilon<\delta$ vale

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w_p|_\xi^p dv_\xi \;\le\; & (1+\epsilon+C\epsilon^2)\int_M |\nabla u_p|_g^p dv_g + C_\epsilon\lambda^{\frac{n}{2}}\int_M u_p^p dv_g \\
+ & \; C\delta\int_{M\backslash B(x_p,\epsilon)}|\nabla u_p|_g^p dv_g \\
= & \; C_\epsilon\lambda^{\frac{n}{2}}\int_M u_p^p dv_g + (1+C'\epsilon)\int_M|\nabla u_p|_g^p dv_g \\
+ & \; C\delta^2\int_{M\backslash B(x_p,\epsilon)}|\nabla u_p|_g^p dv_g. \qquad (105)
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\lim_{p\to 1}\parallel \nabla u_p \parallel_p^p = K(n,1)^{-1}$, junto com o suposto $\parallel u_p \parallel_p \to 0$, quando $p\to 1$, pasando ao limite na desigualdade anterior quando $p\to 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\limsup_{p\to 1}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla w_p|_\xi^p dv_\xi \;\le\; & K(n,1)^{-1}(1+C\epsilon) \\
+ & \; C\delta^2\limsup_{p\to 1}\int_{M\backslash B(x_p,\epsilon)}|\nabla u_p|_g^p dv_g. \qquad (106)
\end{aligned}
$$

Pela Afirmação 3 e logo tomando o limite quando $\epsilon\longrightarrow 0$, obtemos

$$\limsup_{p\to 1}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\omega_p|_\xi^p dv_\xi \le K(n,1)^{-1},$$

e usando o resultado (104), obtemos

$$\lim_{p\to 1}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\omega_p|_\xi^p dv_\xi}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\omega_p^{p^*}dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}}} \le K(n,1)^{-1}.$$

□

Continuando com a demonstração do Lema 5.5, vamos aplicar agora o Princípio de concentração compacidade (Teorema 2.10) a $w_p^{p^*}$, temos três situações: dicotomia, evanescência ou compacidade, é claro que (101) evita a dicotomia, no caso de evanescênce, é uma consequência de (99) e pelo esquema iterativo de Moser existe alguma constante $C > 0$ independente de p tal que

$$\| v_p \|_\infty = 1 = v_p(0) \leq C \left(\int_{B(0,1)} w_p^{\frac{np}{n-p}} dv_\xi \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Portanto, evanescênce não acontece, e assim a compacidade se reduz a

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{p \to 1} \int_{B(0,R)} w_p^{\frac{np}{n-p}} dv_\xi = 1.$$

e desde que

$$\int_{B(0,R)} w_p^{p^*} dv_g = \int_{B(x_p, R\mu_p)} u_p^{p^*} dv_g,$$

portanto

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{p \to 1} \int_{B(x_p, R\mu_p)} u_p^{p*} dv_g = 1.$$

□

5.3 Passo 3

Lema 5.6. *Se* $\lim_{p \to 1} \| u_p \|_p = 0$*, então para qualquer* $p > 1$*, existe* $C > 0$ *independente de* p *tal que*

$$d_g(x_p, x)^{\frac{n}{p}-1} u_p(x) \leq C. \tag{107}$$

onde d_g *denota a distância com respeito à métrica* g.

Demonstração:(Do Lema 5.6) Para isto, definimos

$$\varphi_p(x) = d_g(x_p, x)^{\frac{n}{p}-1} u_p(x), \tag{108}$$

e vamos supor que

$$\lim_{p\to 1} \parallel \varphi_p \parallel_\infty = +\infty. \tag{109}$$

Seja agora y_p algum ponto de M onde φ_p atinge seu máximo, ou seja

$$\varphi_p(y_p) = \parallel \varphi_p \parallel_\infty . \tag{110}$$

Se $y_p \not\to x_0$ quando $p \to 1$, então para p suficientemente perto de 1 $y_p \in M \setminus B(x_0, r)$ e

$$\varphi_p(y_p) = \parallel \varphi_p \parallel_\infty \leq d(x_p, y_p)^{\frac{n}{p}-1} \parallel u_p \parallel_{\infty, M\setminus B(x_0,r)} \to 0,$$

o que é em contradição com (109). Este argumento mostra claramente que $d_g(x_0, y_p) \to 0$ e que $u_p(y_p) \to +\infty$ quando $p \to 1$. Agora vamos mostrar que

$$\lim_{p\to 1} \frac{d_g(x_p, y_p)}{\mu_p} = +\infty. \tag{111}$$

Para ver isto da definição de $\varphi_p(x)$ temos

$$\left(\frac{\varphi_p(x)}{u_p(x)}\right)^{\frac{p^*}{n}} = d_g(x_p, x),$$

logo

$$\frac{d_g(x_p, y_p)}{\mu_p} = \frac{\varphi_p(y_p)^{\frac{p^*}{n}}}{\mu_p u_p(y_p)^{\frac{p^*}{n}}} \geq \varphi_p(y_p)^{\frac{p^*}{n}},$$

pois pela definição $\parallel u_p \parallel_\infty^{-\frac{p^*}{n}} = \mu_p$. Analizando esta última desigualdade e como $0 < \frac{p^*}{n} = \frac{p}{n-p}$ para p próximo a 1 então pelo suposto (109) o lado direito vai para $+\infty$ quando $p \to 1$ portanto temos (111).

Definimos para um número $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $x \in B(0, \delta u_p(y_p)^{\frac{p}{n-p}}) \subset \mathbb{R}^n$

$$\tilde{g}_p(x) = \left(\exp^*_{y_p}(g)\right)(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x) \tag{112}$$

e

$$\tilde{u}_p(x) = u_p(y_p)^{-1} u_p \left(\exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x) \right) \tag{113}$$

Desde que $u_p(y_p) \to +\infty$ quando $p \to 1$ temos

$$\lim_{p\to 1} \tilde{g}_p = \xi \text{ em } C^2_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{114}$$

Novamente é fácil de ver que $(\Delta_p)_{\tilde{g}_p} \tilde{u}_p = u_p(y_p)^{1-p^*} \Delta_p u_p$ e fazendo uso de (33) se confere que $\tilde{u}_p$ verifica em $B\left(0, \delta u_p(y_p)^{\frac{p}{n-p}}\right)$

$$(\Delta_p)_{\tilde{g}_p} \tilde{u}_p + B_p u_p(y_p)^{\frac{p^2}{p-n}} \tilde{u}_p^{p-1} = K(n,p)^{-p} \tilde{u}_p^{p^*-1}. \tag{115}$$

Afirmação 5. *Seja* $x \in B(0,1)$*, então*

$$\begin{aligned} & d_g(x_p, exp_{y_p}\left(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x)\right) \\ & \geq d_g(x_p, y_p) - u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} \quad \geq \quad d_g(x_p, y_p)\left(1 - \varphi_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right). \end{aligned}$$

Demonstração:(Da Afirmação 5) Seja $x \in B(0,1)$, pela definição da aplicação $\exp_{y_p}$, temos

$$u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} \quad \geq \quad d_g(y_p, \exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x)),$$

logo

$$d_g(x_p, y_p) - d_g(y_p, \exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x)) \geq d_g(x_p, y_p) - u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}.$$

Por outro lado da desigualdade triangular na variedade M com a métrica g temos

$$d_g(x_p, \exp_{y_p}\left(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x)\right) \quad \geq \quad d_g(x_p, y_p) - d_g(y_p, \exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x)),$$

portanto das duas desigualdades anteriores se deduz que

$$d_g(x_p, \exp_{y_p}\left(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} x)\right) \quad \geq \quad d_g(x_p, y_p) - u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}. \tag{116}$$

Agora pela definição de φ_p, $u_p(y_p) = \varphi_p(y_p) d_g(x_p, y_p)^{1-\frac{n}{p}}$ temos

$$\begin{aligned} d_g(x_p, y_p) - u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}} &= d_g(x_p, y_p) - \left(\varphi_p(y_p) d_g(x_p, y_p)^{1-\frac{n}{p}}\right)^{\frac{p}{p-n}} \\ &= \left(1 - \varphi_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right) d_g(x_p, y_p). \end{aligned}$$

Logo de (116)

$$d_g(x_p, \exp_{y_p}\left(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}x\right) \quad \geq \quad d_g(x_p, y_p)\left(1 - \varphi_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right).$$

$\square$

Afirmação 6. *Se* $\lim_{p\to 1} \parallel \varphi_p \parallel_\infty = +\infty$*, então*

$$\parallel \tilde{u}_p \parallel_{L^\infty B(0,1)} \leq 2^{\frac{n}{p}-1}.$$

Demonstração:(Da Afirmação 6) Desde que $\varphi_p(y_p) \to +\infty$, quando $p \to 1$ e $\frac{p}{p-n} < 0$ para p próximo de 1, e com (109) e (110), para $x \in B(0,1)$ ́válida

$$d_g\left(x_p, \exp_{y_p}\left(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}x\right)\right) \geq \frac{1}{2}d_g(x_p, y_p), \tag{117}$$

De consequência para qualquer $x \in B(0,1)$, rescrevendo (113) pela definição temos

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x) &= u_p(y_p)^{-1}u_p\left(\exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{n-p}}x)\right)\\ &= u_p(y_p)^{-1}\varphi_p(\exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}x))d_g\left(x_p, \exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}x)\right)^{1-\frac{n}{p}},\end{aligned}$$

por (117) e desde que $1 - \frac{n}{p} < 0$ quando p é próximo de 1, obtemos

$$\tilde{u}_p(x) \quad \leq \quad u_p(y_p)^{-1}\varphi_p(\exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}x))(\frac{1}{2}d_g(x_p, y_p))^{1-\frac{n}{p}},$$

agora como em y_p, φ_p atinge seu máximo, ou seja $\varphi_p(\exp_{y_p}(u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}x) \leq \varphi_p(y_p)$ logo

$$\tilde{u}_p(x) \quad \leq \quad 2^{\frac{n}{p}-1}d_g(x_p, y_p)^{1-\frac{n}{p}}u_p(y_p)^{-1}\varphi_p(y_p),$$

novamente pela definição de φ temos que $u_p(y_p)^{-1}\varphi_p(y_p) = d_g(x_p, y_p)^{\frac{n}{p}-1}$, assim

$$\tilde{u}_p(x) \leq 2^{\frac{n}{p}-1},$$

portanto $\parallel \tilde{u}_p \parallel_{L^\infty B(0,1)} \leq 2^{\frac{n}{p}-1}$. $\square$

Continuando com a demonstração da afirmação 5.6, uma vez que $\tilde{u}_p$ é uniformemente limitado em $B(0,1)$ e verifica (115) com $\tilde{g}_p$ verificando (114), obtemos pelo esquema iterativo Moser a existência de algum $C > 0$ independente de p tal que para qualquer $p > 1$ próximo de 1

$$\| \tilde{u}_p \|_{L^\infty(B(0,\frac{1}{2}))} \leq C \left(\int_{B(0,1)} \tilde{u}_p^{p^*} dv_{\tilde{g}_p} \right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{118}$$

pelas definições (112) e (113) temos

$$\int_{B(0,1)} \tilde{u}_p^{p^*} dv_{\tilde{g}_p} = \int_{B\left(y_p, u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right)} u_p^{p^*} dv_g. \tag{119}$$

Por outro lado para p próximo de 1, $0 < p^*/n < 1$, sendo x_p o ponto onde u_p atinge seu máximo temos $\frac{u_p(y_p)}{u_p(x_p)} \leq 1$, logo dado $R > 0$ temos

$$\varphi_p(y_p)^{p^*/n} > 1 + R \left(\frac{u_p(y_p)}{u_p(x_p)} \right)^{p^*/n},$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \varphi_p(y_p)^{p^*/n} \geq 1 + R u_p(y_p)^{p^*/n} \| u_p \|_\infty^{-p^*/n}, \\
&\Longleftrightarrow \quad d(x_p, y_p)^{p^*/n} u_p(y_p)^{p^*/n} \geq 1 + R u_p(y_p)^{p^*/n} \| u_p \|_\infty^{-p^*/n}, \\
&\Longleftrightarrow \quad d(x_p, y_p) \geq R\mu_p + u_p(y_p)^{p/(p-n)}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$B(x_p, R\mu_p) \cap B(y_p, u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}) = \emptyset$$

claramente pelo anterior

$$\int_M u_p^{p^*} dv_g \geq \int_{B\left(y_p, u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right)} u_p^{p*} dv_g + \int_{B(x_p, R\mu_p)} u_p^{p^*} dv_g$$

portanto, usando o fato que $\| u_p \|_{p^*} = 1$ temos

$$\int_{B\left(y_p, u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right)} u_p^{p*} dv_g \leq 1 - \int_{B(x_p, R\mu_p)} u_p^{p^*} dv_g$$

tomando o limite quando $p \to 1$, e o limite quando $R \to +\infty$ em esta desigualdade, obtemos

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{p \to 1} \int_{B\left(y_p, u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right)} u_p^{p*} dv_g \leq 1 - \lim_{R \to +\infty} \lim_{p \to 1} \int_{B(x_p, R\mu_p)} u_p^{p^*} dv_g$$

logo pelo resultado (90)

$$0 \leq \lim_{p \to 1} \int_{B\left(y_p, u_p(y_p)^{\frac{p}{p-n}}\right)} u_p^{p^*} dv_g \leq 0$$

portanto de (119)

$$\lim_{p \to 1} \int_{B(0,1)} \tilde{u}_p^{p^*} dv_{\tilde{g}_p} = 0$$

assim,voltando a (118)

$$\| \tilde{u}_p \|_{L^\infty(B(0,1/2))} \leq C \left(\int_{B(0,1)} \tilde{u}_p^{p^*} dv_{\tilde{g}_p} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

temos que

$$\lim_{p \to 1} \| \tilde{u}_p \|_{L^\infty(B(0,1/2))} = 0 \Longrightarrow \lim_{p \to 1} \tilde{u}_p(0) = 0$$

por outro lado de (113), $\tilde{u}_p(0) = 1$ para qualquer $p > 1$. Isto é uma contradição, portanto (107) é verdadeiro.
□

5.4 Passo 4

Lema 5.7. *Para todo* $\delta > 0$*,*

$$\lim_{p \to 1} \frac{\int_{M \setminus B(x_0,\delta)} u_p^p dv_g}{\int_M u_p^p dv_g} = 0. \tag{120}$$

Demonstração:(Do Lema 5.7) Pelo esquema iterativo de Moser, existe uma constante $C > 0$ independente de p tal que

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus B(x_0,\delta)} u_p^p dv_g &\leq \left(\sup_{M \setminus B(x_0,\delta)} u_p \right) \int_M u_p^{p-1} dv_g, \\ &\leq C \| u_p \|_p \int_M u_p^{p-1} dv_g. \end{aligned}$$

Agora usamos a equação (33), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus B(x_0,\delta)} u_p^p dv_g &\leq C \parallel u_p \parallel_p \int_M \Big(K(n,p)^{-p} u_p^{p^*-1} - \Delta_p u_p\Big) B_p^{-1} dv_g, \\
&= \frac{C}{K(n,p)^p B_p} \parallel u_p \parallel_p \int_M u_p^{p^*-1} dv_g \\
&- \frac{C}{B_p} \parallel u_p \parallel_p \int_M (\Delta_p u_p) dv_g,
\end{aligned}$$

o último termo da desigualdade é zero uma vez que a variedade M não tem fronteira e usando o teorema de Stokes. Temos

$$\int_{M\setminus B(x_0,\delta)} u_p^p dv_g \leq \frac{C}{K(n,p)^p B_p} \parallel u_p \parallel_p \int_M u_p^{p^*-1} dv_g. \tag{121}$$

Por outro lado tomando $u \equiv 1$ em (29) obtemos

$$B_p K(n,p)^p \quad \geq \quad |M|_g^{-\frac{p}{n}}$$

e pela desigualdade de Hölder e a equação (32), para p próximo de 1 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M u_p^{p^*-1} dv_g &\leq \parallel u_p \parallel_p^{p^*-1}, \text{ para } n \geq 3, \\
\int_M u_p^{p^*-1} dv_g &\leq \parallel u_p \parallel_p^{\frac{n}{p^*}}, \text{ se } n = 2.
\end{aligned}$$

De fato: O caso $n \geq 3$ implica $2 - n < 0$ tomando

$$\alpha = \frac{p}{p^*-1} = \frac{p(n-p)}{np-n+p} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{p^*}{p} \to 2 + \frac{n}{n-1}$$

quando $p \to 1$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, aplicando a desigualdade de Hölder

$$\int_M u_p^{p^*-1} dv_g \quad \leq \quad |M|^{1/q} \parallel u_p \parallel_p^{p^*-1} \leq C \parallel u_p \parallel_p^{p^*-1},$$

onde $C = (\text{Max}\{1, |M|\})^4$.
Caso $n = 2$, desde que $\beta = \frac{p^2}{2-p} > 1$, tomando $\alpha = \frac{2(p^2-2+p)}{2-p}$ aplicando a desigualdade de Hölder temos

$$\int_M u_p^{p^*-1} dv_g = \int_M u_p^{\frac{3p-2}{2-p}} \leq \left\{\int_M u_p^{q\alpha} dv_g\right\}^{1/q} \left\{\int_M (u_p^{\frac{2-p}{p}})^\beta dv_g\right\}^{\frac{1}{\beta}},$$

onde $\alpha q = \frac{2(p^2-2+p)}{2-p}\left(\frac{p^2}{p^2-2+p}\right) = p^*$ e sabendo que $\| u_p \|_{p^*} = 1$ obtemos

$$\int_M u_p^{p^*-1} dv_g \leq \left\{ \int_M (u_p^{\frac{2-p}{p}})^\beta dv_g \right\}^{\frac{1}{\beta}} = \int_M u_p^p \| u_p \|_p^{\frac{n}{p^*}} .$$

Voltando a (121), temos os seguintes casos:

(i) Se $n = 2$

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\int_{M \setminus B(x_0,\delta)} u_p^p dv_g}{\int_M u_p^p dv_g} &\leq C|M|^{\frac{p}{n}} \| u_p \|_p \| u_p \|_p^{\frac{n}{p^*}-p} \\ &= C|M|^{\frac{p}{n}} \| u_p \|_p^{\frac{n}{p^*}-p+1}, \end{aligned}$$

claramente $\frac{n}{p^*} - p + 1 > 0$, tomando limite quando $p \to 1$ temos (120).

(ii) Se $n \geq 3$

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\int_{M \setminus B(x_0,\delta)} u_p^p dv_g}{\int_M u_p^p dv_g} &\leq C|M|^{\frac{p}{n}} \| u_p \|_p \| u_p \|_p^{p*-p-1} \\ &= C|M|^{\frac{p}{n}} \| u_p \|_p^{p*-p}, \end{aligned}$$

claramente o exponente $p^* - p > 0$, Logo tomando limite quando $p \to 1$ obtemos o desejado. $\square$

5.5 Passo 5

Agora vamos tomar $\delta > 0$ pequeno, $B(x_p, 2\delta)$ a bola geodésica de centro x_p e raio 2δ e também $\eta_p \in C_c^\infty(B(x_p, 2\delta))$ tal que $0 \leq \eta_p \leq 1$, $\eta_p = 1$ em $B(x_p, \delta)$ e $\| \nabla \eta_p \|_\infty \leq C/\delta$ para alguma constante C independente de p e δ. As constantes C no que segue são independentes de p e δ, por abuso de notações, vamos escrever a desigualdade de Sobolev Euclidiana para qualquer $p > 1$

$$\left(\int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_\xi \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi \quad (122)$$

pela expansão de Cartan da métrica g perto do ponto x_p e desde que $x_p \to x_0$ quando $p \to 1$, obtemos que para algum $C > 0$:

$$\left(1 - Cd_g(x_p, x)^2\right) dv_g \leq dv_\xi \leq (1 + Cd_g(x_p, x)^2) dv_g \tag{123}$$

$$|\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi \leq (1 + Cd_g(x_p, x)^2)|\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \tag{124}$$

usando a desigualdade esquerda de (123) multiplicando por $u_p^{p^*}$ e integrando sobre $B(x_p, 2\delta)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_\xi \geq & \int_{B(x_p,\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_g \\
& + \int_{B(x_p,2\delta)\setminus B(x_p,\delta} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_g \\
& - C \int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} d_g(x_p, x)^2 dv_g \\
= & \ 1 - \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*} dv_g \\
& + \int_{B(x_p,2\delta)\setminus B(x_p,\delta} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_g \\
& - C \int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} d_g(x_p, x)^2 dv_g \\
\geq & \ 1 - \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*} dv_g \\
& - C \int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} d_g(x_p, x)^2 dv_g \\
\geq & \ 1 - \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*} dv_g \\
& - C \int_{B(x_p,2\delta)} u_p^{p^*} d_g(x_p, x)^2 dv_g,
\end{aligned} \tag{125}$$

onde a última desigualdade é válida desde que $0 \leq \eta_p \leq 1$.

Agora desde que

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*} dv_g &= \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*-p} u_p^p dv_g, \\
&\leq \sup_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*-p} \int_M u_p^p dv_g,
\end{aligned} \tag{126}$$

(sabemos por um resultado anterior $\lim_{p\to 1} u_p = 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$ logo $u_p^{p^*-p} \to 0$ quando $p \to 1$) portanto de (126) se obtém

$$\int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*} dv_g = o(\| u_p \|_p^p). \tag{127}$$

Por (107)

$$\int_{B(x_p,2\delta)} d_g(x_p,x)^2 u_p^{p^*} dv_g \le C\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p,$$

portanto podemos transformar (125) em

$$\left(\int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}} \ge 1 - o\left(\| u_p \|_p^p\right) - C\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p . \tag{128}$$

Agora para o termo do lado direito de (122), claramente obtemos com (124)

$$\begin{aligned}
& K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi \\
\le \;& K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \\
+ \;& CK(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} d_g(x_p,x)^2 |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g.
\end{aligned} \tag{129}$$

Independentemente, com (33), (32) e alguma integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
& K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \\
\le \;& 1 - \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^{p^*} dv_g \\
- \;& B_p K(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g \\
+ \;& C\delta^{-p} \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g \\
+ \;& C\delta^{-1} \| u_p \|_p \left(\int_{M\setminus B(x_p,\delta)} |\nabla u_p|_g^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} .
\end{aligned} \tag{130}$$

Para ver isso multiplicamos (33) por $\eta_p u_p$ e integramos por partes obtendo

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_p,2\delta)} u_p\langle\nabla\eta_p, |\nabla u_p|^{p-1}\nabla u_p\rangle dv_g &+ \int_{B(x_p,2\delta)} \eta_p|\nabla u_p|^p dv_g \\
&+ B_p\int_{B(x_p,2\delta)} \eta_p u_p^p dv_g \\
&= K(n,p)^{-p}\int_{B(x_p,2\delta)} \eta_p u_p^{p^*} dv_g \\
&\leq K(n,p)^{-p}\int_{B(x_p,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g,
\end{aligned}$$

então

$$K(n,p)^{-p}\int_{B(x_p,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g \leq K(n,p)^{-p}\left(1-\int_{B(x_p.\delta)} u_p^{p^*} dv_g\right). \quad (131)$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
&K(n,p)^p\int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|^p dv_g \\
\leq& \int_{B(x_p,2\delta)} 2^{p-1}(|\nabla\eta_p|^p u_p^p + \eta_p^p|\nabla u_p|^p) dv_g \\
\leq& \frac{2^{p-1}}{\delta^{-p}}\int_{B(x_p,2\delta)\setminus B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g \\
+& \int_{B(x_p,2\delta)} \eta^p|\nabla u_p|^p dv_g \\
\leq& \frac{2^{p-1}}{\delta^{-p}}\int_{M\setminus B(x_p,2\delta)} u_p^p dv_g \\
+& \int_{B(x_p,2\delta)} \eta^p|\nabla u_p|^p dv_g, \qquad (132)
\end{aligned}$$

combinando (132) e (131) obtemos (130). Como anteriormente em (127) é fácil de ver que com (120), ver passo 2 para as técnicas involvidas que

$$\left(\int_{M\setminus B(x_p,\delta)} |\nabla u_p|_g^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} = o(\| u_p \|_p^{p-1}),$$

portanto

$$\begin{aligned} o(\| u_p \|_p^p) &= -\int_{M\setminus B(x_p,2\delta)} u_p^{p^*} dv_g + C\delta^{-p}\int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g \\ &+ C\delta^{-1} \| u_p \|_p \left(\int_{M\setminus B(x_p,\delta)} |\nabla u_p|_g^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

assim da desigualdade (130) se chega à

$$\begin{aligned} K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g &\le 1 - B_p K(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g \\ &+ o(\| u_p \|_p^p). \end{aligned} \tag{133}$$

Agora, em relação ao segundo termo do lado direito da desigualdade (129), é fácil de comprovar misturando com as técnicas do passo 2 e outras usadas na prova de (128), que

$$\int_{B(x_p,2\delta)} d_g(x_p,x)^2 |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \le C\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p . \tag{134}$$

De (133) se chega facilmente à

$$\begin{aligned} B_p K(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g &\le 1 + o(\| u_p \|_p^p) \\ &- K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g, \end{aligned}$$

de (129)

$$\begin{aligned} &-K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \\ &\le C\int_{B(x_p,2\delta)} d_g(x_p,x)^2 |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \\ &- K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi. \end{aligned}$$

Misturando as duas desigualdades anteriores temos

$$\begin{aligned} B_p K(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g &\le 1 + o(\| u_p \|_p^p) \\ &+ C\int_{B(x_p,2\delta)} d_g(x_p,x)^2 |\nabla(\eta_p u_p)|_g^p dv_g \\ &- K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi. \end{aligned}$$

Com ajuda de (134) temos

$$\begin{aligned} B_pK(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g &\leq 1 + o(\| u_p \|_p^p) + C^2\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p \\ &- K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado de (122) temos

$$-K(n,p)^p \int_{B(x_p,2\delta)} |\nabla(\eta_p u_p)|_\xi^p dv_\xi \leq -\left(\int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}},$$

logo

$$\begin{aligned} B_pK(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g &\leq 1 + o(\| u_p \|_p^p) + C^2\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p \\ &- \left(\int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}}. \end{aligned}$$

Agora de (128) deduzimos

$$-\left(\int_{B(x_p,2\delta)} (\eta_p u_p)^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq -1 + o(\| u_p \|_p^p) + C^2\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p,$$

então

$$\begin{aligned} B_pK(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g &\leq 1 + o(\| u_p \|_p^p) + C^2\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p - 1 \\ &+ o(\| u_p \|_p^p) + C^2\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p \\ &= o(\| u_p \|_p^p) + 2C^2\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p. \end{aligned}$$

Assim

$$B_pK(n,p)^p \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g \leq C\delta^{2-p} \| u_p \|_p^p + o\left(\| u_p \|_p^p\right).$$

Dividindo-se cada lado da desigualdade precedente por $\| u_p \|_p^p$ obtemos que

$$B_pK(n,p)^p \frac{\int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g}{\int_M u_p^p dv_g} \leq C\delta^{2-p} + \frac{o\left(\| u_p \|_p^p\right)}{\| u_p \|_p^p}. \qquad (135)$$

Por outro lado

$$\int_M u_p^p dv_g = \int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g + \int_{M\setminus B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g.$$

Dividindo-se por $\int_M u_p^p dv_g$ e fazendo uso de (120) do passo 4 obtemos

$$\lim_{p\to 1} \frac{\int_{B(x_p,\delta)} u_p^p dv_g}{\int_M u_p^p dv_g} = 1,$$

logo da desigualdade (135) tomando o limite $p \to 1$, comcluímos que

$$\limsup_{p\to 1} B_p K(n,p)^p \leq C\delta \ , \forall \delta > 0.$$

gora tomando o limite $\delta \to 0$ temos que $\limsup_{p\to 1} B_p K(n,p)^p \leq 0$ o que é uma contradição, como o fato que $B_p K(n,p)^p \geq |M|_g^{-\frac{p}{n}}$ para qualquer $p > 1$ assim $\lim_{p\to 1} \parallel u_p \parallel_p = 0$ é falso, logo a Proposição 3.1 é provada e portanto o Teorema 3.1 também.

Referências

[AL99] Thierry Aubin and Yan Yan Li. On the best Sobolev inequality. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 78(4):353–387, 1999.

[Alm76] F. J. Almgren, Jr. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4(165):viii+199, 1976.

[Bog07] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[Bre11] Haim Bresiz. *Functionall Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[DC79] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Geometria riemanniana*, volume 10 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[DD01] Zindine Djadli and Olivier Druet. Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 12(1):59–84, 2001.

[Dru99] Olivier Druet. The best constants problem in Sobolev inequalities. *Math. Ann.*, 314(2):327–346, 1999.

[Dru02] Olivier Druet. Isoperimetric inequalities on compact manifolds. *Geom. Dedicata*, 90:217–236, 2002.

[Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[Gal88] Sylvestre Gallot. Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes. *Astérisque*, (163-164):5–6, 31–91, 281 (1989), 1988. On the geometry of differentiable manifolds (Rome, 1986).

[Heb99] Emmanuel Hebey. Meilleures constantes et inégalités de Sobolev optimales sur les variétés riemanniennes compactes. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 16, Année 1997–1998*, volume 16 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 175–210. Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 199?

[Heb99] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, volume 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Lio84] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2):109–145, 1984.

[Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

[Str96] Michael Struwe. *Variational methods*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.