Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Dissertação de Mestrado

Estabilidade de Ondas Viajantes de tipo Kink para a Equação Korteweg-de Vries Modificada

Fredy Andrés Ortiz Diaz

January 8, 2016

Estabilidade de Ondas Viajantes de tipo Kink para a Equação Korteweg-de Vries Modificada

Fredy Andrés Ortiz Diaz

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Equações Diferenciais Parciais submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Rio de Janeiro
Maio, 2015

Estabilidade de Ondas Viajantes de tipo Kink para a Equação Korteweg-de Vries Modificada

Fredy Andrés Ortiz Diaz

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, prof. Adán José Corcho Fernández

Prof. Didier Jacques Francois Pilod

Prof. Xavier Carvajal Paredes

Prof. Fábio Matheus Amorin Natali

Rio de Janeiro

Maio, 2015

Resumo

Estabilidade de Ondas Viajantes de tipo Kink para a Equação Korteweg-de Vries Modificada

Fredy Andrés Ortiz Diaz

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Neste trabalho provaremos resultados de boa colocação global para a equação de Korteweg-de Vries modificada no espaço de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ usando os argumentos provados por A. V. Famiskii em [4]. Além disso, provaremos a estabilidade de ondas de tipo "**kink**", isto é, ondas viajantes limitadas que não se anulam no infinito com derivadas não nulas. A prova deste último resultado é baseada nos argumentos apresentados por Peter E. Zhidkov em [22].

Palavras-chave: Equação de Korteweg-de Vries Modificada, Estabilidade de Ondas Viajantes, Problema de Cauchy.

Rio de Janeiro
Maio, 2015

Abstract

Stability of Kink Traveling Wave Solutions for Modified Korteweg-de Vries Equation

Fredy Andrés Ortiz Diaz

Orientador: Adán José Corcho Fernández

In this work we prove global well-posedness results for the Cauchy problem associate to the modified Korteweg-de Vries equation in Sobolev space $H^2(\mathbb{R})$ using the arguments proved by A. V. Famiskii in [4]. Furthermore, we prove the stability of "kink" wave solutions, i.e., bounded traveling wave solutions nonvanishing at infinity with nonvanishing derivates. The proof of this last result is based on the arguments given by Peter E. Zhidkov in [22].

Keywords: Modified Korteweg-de Vries Equation, Estability of Traveling Wave Solution, Cauchy problem.

Rio de Janeiro

Maio, 2015

Aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar pela força em todos os momentos.

A minha família, por seu apoio e carinho incondicional. Em especial aos meus pais: Santos e Luz, quem são o alicerce de um lar forte e unido, por seu amor, apoio e por acreditar em mim. Seus ensinamentos me tornaram o homem que eu sou hoje.

As minhas irmas: Marissa e Karina, que considero minhas amigas, pelas palavras de motivação que tive delas e pelo apoio sempre.

A minha sobrinha: Belén, por ser criança experta .

A minha noiva: Vanessa "mi musa", que apesar da distância me fez sentir todo seu amor e me brindou com seu apoio nos momentos mais difíceis nesta etapa da minha vida.

A meu orientador: Adán, que além de ser uma excelente pessoa é um ótimo matemático, por sua paciência quando eu tentava enrolar nas minhas demonstrações e comentários.

Aos professores Fábio, Xavier, Didier, por aceitarem fazer parte da banca examinadora e pelas sugestões e comentários que fizerem ao trabalho.

A meu irmão "caçula" Marcio, que me apoiou muito esclarecendo as dúvidas no quadro ou em conversas matemáticas.

Aos bons amigos que conheci (de diversas nacionalidades e idades), com quem morei, estudei, joguei, bebi, comemorei, aprendi português (um pouquinho). Não os nomearei, pois, posso esquecer de mencionar algum que direta ou indiretamente apoiou o meu trabalho.

Finalmente, mas não menos importante, a CAPES, pelo apoio econômico. Ao IM-UFRJ em geral, aos professores que deram aula para minha turma, cada um de um jeito diferente, com quem a medida que aprendia mais ainda faltava aprender.

Contents

Introdução

O estudo das propriedades qualitativas para as soluções do Problema de Valor Inicial (PVI) associado a equações de evolução não-lineares que modelam fenômenos físicos tem crescido bastante nas últimas décadas. Dentre os problemas abordadas que possuem um grande interesse físico e matemático, podemos citar o estudo da estabilidade de ondas especiais, conhecidas como *ondas viajantes*.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a estabilidade de um tipo especial de ondas viajantes para o PVI, também conhecido como *Problema de Cauchy*, associado à equação de Korteweg-de Vries modificada (mKdV), isto é, estudaremos o modelo:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + \lambda u^2(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é no instante inicial $u(x,0) = u_0$ será considerado num espaço de funções adequado. Este modelo é aplicado em diversas áreas da física; por exemplo, aparece no contexto de ondas eletromagnéticas, em filmes de tamanho quantizados, em colisões de plasmas [9], em redes de fônons harmônicos [19], em interfaces de ondas entre dois líquidos com profundidades variando gradualmente [7], em linhas de transmissão, em barreira de Schottky, em ion(soliton) acústicos [13],[20],[21], média elástica [14] e por fim é aplicada também em problemas de fluxo de tráficos [10],[16],[17].

Nesta dissertação temos dois objetivos, o primeiro deles é provar que o modelo (1) é globalmente bem posto no espaço de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$, de maneira mais precisa mostraremos a existência, unicidade e dependência contínua das soluções com dados iniciais neste espaço. Esta parte do trabalho será desenvolvida no Capítulo 2, tomando como base principal o artigo de A. V. Faminskii [4], onde todos os conceitos e definições serão dados de forma rigorosa. O segundo objetivo é provar a estabilidade de ondas viajantes do tipo "kink", ou seja, ondas viajantes limitadas que não se anulam no infinito com derivadas não nulas. Em particular, deduziremos que

$$u_c(x,t) = \varphi(x-ct) = \sqrt{3|c|}\tanh\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}(x-ct)\right),$$

é solução de (1) para todo $c < 0$ e, além disso, mostraremos que para qualquer dado inicial próximo de $\varphi(x)$ com relação à métrica

$$\rho_q(u,v) = \inf_{\tau\in\mathbb{R}} \|u(\cdot) - qv(\cdot - \tau)\|_{H^1}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}).$$

a "forma"da solução correspondente a u_0 permanece para todo tempo próxima da forma da onda viajante. Estes resultados serão apresentados no Capítulo 3, usando os argumentos de P. Zhidkov [22].

Antes de demonstrar os resultados técnicos nos Capítulo 2 e 3, no Capítulo 1 apresentamos alguns resultados preliminares de Análise funcional e Teoria Espectral que serão de muita utilidade para obter os resultados desejados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos alguns conceitos e resultados básicos de análise que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Desigualdades Elementares

A seguir provaremos algumas desigualdades clássicas que serão úteis na prova dos resultados principais.

Proposição 1.1 (**Desigualdade de Young**). *Sejam a, b, p e q números positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Consultar [3]. □

Proposição 1.2. *Sejam a, b números positivos. Para todo $s \geq 0$, existem constantes positivas m_s e M_s, dependendo apenas de s, tais que*

$$m_s(a^s+b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s+b^s). \tag{1.2}$$

Demonstração. A desigualdade (1.2) é equivalente à desigualdade

$$m_s\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^s\right] \leq \left(1+\frac{b}{a}\right)^s \leq M_s\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^s\right]. \tag{1.3}$$

Portanto, é suficiente provar que existem constantes positivas m_s e M_s tais que

$$m_s(1+r^s) \leq (1+r)^s \leq M_s(1+r^s), \tag{1.4}$$

para todo $r > 0$. Com efeito, consideremos a função

$$F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s}.$$

Observe que para todo r, $s \geq 0$ tem-se $1 \leq (1+r)^s$ e $r^s \leq (1+r)^s$. Logo, $1 + r^s \leq 2(1+r)^s$, e consequentemente

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s}. \tag{1.5}$$

Por outro lado, para $r > 1$ tem-se $(1+r)^s \leq (r+r)^s = (2r)^s$. Portanto,

$$(1+r)^s \leq 2^s(1+r^s), \quad \text{isto é,} \quad \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s.$$

A função $F(r)$ é contínua em $[0,1]$ e não se anula nesse intervalo, logo, existe $\mu_s = \max\limits_{r\in[0,1]}\left\{\dfrac{(1+r)^s}{1+r^s}\right\}$. Tomando $M_s = \min\{2^s, \mu_s\}$, vemos que

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq M_s. \tag{1.6}$$

Das estimativas (1.5) e (1.6) concluímos que

$$\frac{1}{2} \leq F(r) \leq M_s,$$

conforme anunciado. □

Agora vamos provar outro resultado clássico e bastante importante, a saber, a desigualdade de Gronwall.

Proposição 1.3. *Seja $f : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa. Suponha além disso, que existem constantes não negativas a e b tais que*

$$f(t) \leq b + a\int_{t_0}^{t} f(s)ds, \tag{1.7}$$

para todo $t_0 \leq t \leq T$. Então, vale a desigualdade $f(t) \leq be^{a(t-t_0)}$, para todo $t_0 \leq t \leq T$.

Demonstração. Seja $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$. Se $t \in [t_0, T]$, então pelo teorema fundamental do Cálculo e por (1.7) temos

$$F'(t) \leq f(t) \leq b + aF(t).$$

Integrando esta desigualdade em $[t_0, t]$ obtemos

$$\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b + aF(t)}{b}\right) \leq t - t_0.$$

Portanto, $f(t) \leq b + aF(t) \leq be^{a(t-t_0)}$. Como queríamos mostrar. □

1.2 Elementos de Medida e Análise Funcional

Começamos por definir os espaços $L^p(I)$, onde I é um intervalo de reta ou $I = \mathbb{R}$.

Definição 1.1. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Denotaremos por* $L^p(I)$ *o conjunto de todas as funções* $f : I \to \mathbb{R}$ *mensuráveis segundo Lebesgue, tais que*

$$\|f\|_{L^p(I)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \ \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \inf\big\{ r; |f(x)| \leq r, \ q.t.p \ x \in I \big\} < \infty, \ \text{se } p = \infty. \end{cases} \tag{1.8}$$

Se $I = \mathbb{R}$ denotaremos $|| \cdot ||_{L^p} = || \cdot ||_{L^p(\mathbb{R})}$. Os espaços $L^p(I)$ são espaços de Banach e em particular $L^2(I)$ é espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(I)} = \int_I u(x)v(x)dx.$$

Além disso, vale o seguinte resultado importante.

Teorema 1.1 (**Desigualdade de Hölder**). *Sejam* $p, q \geq 1$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(I)$ *e* $g \in L^q(I)$, *então* $fg \in L^1(I)$ *e vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)} . \tag{1.9}$$

O leitor interessado pode ver em detalhes esses resultados no texto [15].

1.2.1 Convergências em um Espaço Normado

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$. Por $\mathcal{N}'$ denota-se o dual topológico de $\mathcal{N}$, que é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos definidos em $\mathcal{N}$. Em $\mathcal{N}'$ define-se a norma

$$\|f\|_{\mathcal{N}'} := \sup\big\{ |\langle f, \xi \rangle|; \xi \in \mathcal{N}; \|\xi\| = 1 \big\},$$

com a qual $\mathcal{N}'$ é um espaço de Banach. Podemos agora introduzir as seguintes definições de convergência.

Definição 1.2 (**Convergência Forte**). *Dizemos que* $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ *converge forte para* ξ *em* $\mathcal{N}$, *ou, simplesmente,* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *converge para* ξ *em* $\mathcal{N}$, *e anotamos* $\xi_n \to \xi$ *em* $\mathcal{N}$ *quando*

$$\|\xi_n - \xi\|_{\mathcal{N}} \to 0.$$

Definição 1.3 (**Convergência Fraca**). *Dizemos que* $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ *converge fraco para* ξ *em* $\mathcal{N}$*, e denotamos* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *em* $\mathcal{N}$ *quando*

$$\langle f, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle, \quad \forall\, f \in \mathcal{N}'.$$

Agora, sejam $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{N}'$ e $f \in \mathcal{N}'$.

Definição 1.4 (**Convergência Fraca***). *Dizemos que* f_n *converge fraco estrela para* f *em* $\mathcal{N}'$*, e anotamos* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\mathcal{N}'$ *quando*

$$\langle f_n, \xi \rangle \to \langle f, \xi \rangle, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{N}.$$

É possível definir uma topologia em $\mathcal{N}$ chamada de Topologia Fraca que induz a convergência fraca enunciada acima. Também pode-se definir uma topologia em $\mathcal{N}'$ chamada Topologia Fraca* que induz a convergência fraca*. Quando se procede dessa forma, as convergências numéricas usadas nas definições acima passam a ser uma consequência da maneira como as topologias são definidas. Para mais detalhes a respeito destas topologias consulte Oliveira ([18], p.104).

Um dos motivos para se definir a topologia fraca* é o Teorema de Alaoglu. Se $dim\,\mathcal{N}' = \infty$ sabe-se que $\overline{B}_{\mathcal{N}'}(0;1)$ não é compacto na topologia usual de $\mathcal{N}'$ ([18], p.11). Mas tem-se o

Teorema 1.2 (**Alaoglu**). *Se* $\mathcal{N}$ *é um espaço normado, então a bola fechada* $\overline{B}_{\mathcal{N}'}(0;1)$ *é compacto na topologia fraca*.*

Demonstração. Consultar ([18], p. 108). □

As principais relações entre estas convergências ficam determinadas pela seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Sejam* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de elementos de* $\mathcal{N}$*,* $(f_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de elementos de* $\mathcal{N}'$*,* $\xi \in \mathcal{N}$*, e* $f \in \mathcal{N}'$*. Tem-se:*

(i) *Se* $\xi_n \to \xi$ *em* N *então* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *em* N*,*

(ii) *Se* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *em* N*, então* $\|\xi_n\|$ *é limitada e* $\|\xi\| \leq \liminf_n \|\xi_n\|$*,*

(iii) *Se* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *em* N *e* $f_n \to f$ *em* $\mathcal{N}'$ *então* $\langle f_n, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle$*,*

(iv) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\mathcal{N}'$ *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\mathcal{N}'$*,*

(v) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\mathcal{N}'$ *e* $\xi_n \to \xi$ *em* $\mathcal{N}$*, então* $\langle f_n, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle$*,*

(vi) *Se* $\mathcal{N}$ *é um espaço de Hilbert então* $\xi_n \to \xi$ *em* $\mathcal{N}$ *se, e somente se,* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *em* $\mathcal{N}$ *e* $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$*.*

1.3 Um pouco de distribuições

Nesta seção apresentamos resultados básicos da teoria de distribuições em $\mathbb{R}$.

Definição 1.5. *Uma função real f de classe C^∞ definida em $\mathbb{R}$ está no espaço de Schwartz se para todo par de números inteiros não negativos m e n existe uma constante $C_{m,n}$ tal que*

$$p_{m,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m f^{(n)}(x) \right| \leq C_{m,n} < \infty. \tag{1.10}$$

Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções que pertencem ao espaço de Schwartz.

Definição 1.6. *Dizemos que uma sequência $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para zero, se para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$ temos*

$$p_{m,n}(\varphi_j) \to 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ diz-se que a sequência $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quando a sequência $(\varphi_j - \varphi)_{j\geq 1}$ converge para zero no sentido dado acima.
Agora vamos definir a transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definição 1.7. *A transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, denotada por $\hat{f}$ é dada por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx. \tag{1.11}$$

A próxima proposição resume as principais propriedades da Transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 1.5. *Sejam f e g em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, então valem*

(i) $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,

(ii) $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$,

(iii) $\widehat{bf} = b\hat{f}$,

(iv) $(f^{(m)})\hat{}(\xi) = (2\pi i \xi)^m \hat{f}(\xi)$,

(v) $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

Demonstração. Consultar [6]. □

As formas lineares definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ são denominadas distribuições temperadas. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual de sequências será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Assim

$$\lim_{j\to\infty} T_j = T \,\text{em}\, \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ se } \lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

O teorema abaixo é muito importante na hora de estimar derivadas de funções em $L^p(\mathbb{R})$

Proposição 1.6 (**Desigualdade de Gagliardo Nirenberg**). *Sejam* $q, r \in [1, +\infty)$ *e* $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *tal que* $0 \leq j \leq m$. *Então*

$$\|f^{(j)}\|_{L^p} \leq C(j,m,q,r,\theta)\|f^{(m)}\|_{L^q}\|f\|_{L^r}, \tag{1.12}$$

para todo $\theta \in [\frac{j}{m}, 1]$ *e* p *satisfazendo*

$$\frac{1}{p} = j + \theta\left(\frac{1}{q} - m\right) + (1-\theta)\,\frac{1}{r}.$$

Demonstração. Consultar [5]. □

Teorema 1.3. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *A aplicação inclusão*

$$\begin{aligned} i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto i(\varphi) = \varphi, \end{aligned}$$

é contínua e densa, isto é,

i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

ii) $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$, *onde o fecho é tomado na norma* $||\cdot||_{L^p}$.

iii) Existem constantes positivas $C_{m,n}$, M, N, *tais que*

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} p_{m,n}(\varphi),\ \forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.13}$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [3].

É fácil provar que se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $x^m\varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Assim usando o teorema 1.3 podemos definir em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a seguinte família de seminormas:

$$\tilde{p}_{m,n}(\varphi) = \|x^m\varphi^{(n)}(x)\|_{L^2}. \tag{1.14}$$

O seguinte resultado nos dà uma forma equivalente de gerar a topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e será de utilidade para obter parte dos resultados que serão apresentados no Capítulo 2.

Analogamente, dizemos que $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ com relação a família 1.14 se $\tilde{p}_{m,n}\left(\varphi_j - \varphi\right) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}_0$.

Proposição 1.7. *Valem as seguintes afirmações*

a) $\tilde{p}_{m,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \tilde{p}_{m,0}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e* $\tilde{p}_{0,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

b) $p_{m,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \tilde{p}_{m,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Demonstração. Observe que basta provar que as seminormas são uniformemente equivalentes.

a) A condição é necessária por ser um caso particular. Para a suficiência notamos que

$$\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\big(\varphi^{(n)}(x)\big)^2 dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{d^n}{dx}\Big(x^{2m}\varphi^{(n)}(x)\Big)dx,$$

agora, usando a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx}\Big(x^{2m}\varphi^{(n)}(x)\Big) &= \sum_{0\leq k\leq n} C_{m,k,n}\, x^{2m-k}\varphi^{(2n-k)}(x)\\ &= \sum_{0\leq k\leq min\{n,2m\}} C_{m,k,n}\, x^{2m-k}\varphi^{(2n-k)}(x).\end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy Schwarz e Young

$$\begin{aligned}\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) &\leq C_{m,n} \sum_{0\leq k\leq mim\{n,2m\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)x^{2(2m-k)}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi^{(2n-k)}(x)\Big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C_{m,n} \sum_{0\leq k\leq mim\{n,2m\}} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)x^{2(2m-k)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi^{(2n-k)}(x)\Big)^2 dx\right\}\\ &\leq C_{m,n} \sum_{0\leq k\leq mim\{n,2m\}} \Big\{\tilde{p}^2_{2m-k,0}(\varphi) + \tilde{p}^2_{0,2n-k}(\varphi)\Big\}.\end{aligned}$$

b) Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e estimemos $\tilde{p}_{m,n}(\varphi)$ como segue

$$\begin{aligned}\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\big(\varphi^{(n)}(x)\big)^2 dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(1+x^2\right)\left(\varphi^{(n)}(x)\right)^2 \frac{1}{(1+x^2)}dx\\ &\leq \Big(p^2_{m,n}(\varphi) + p^2_{m+1,n}(\varphi)\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx\\ &\leq C\Big(p^2_{m,n}(\varphi) + p^2_{m+1,n}(\varphi)\Big).\end{aligned}$$

Por outro lado, usando 1.1 e 1.12 temos

$$
\begin{aligned}
p^2_{m,n}(\varphi) &= \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m \varphi^{(n)}(x) \right| \right\}^2 \leq C \left\| x^m \varphi^{(n)}(x) \right\|_{L^2} \left\| \frac{d}{dx} \left(x^m \varphi^{(n)}(x) \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq C_m \left\| x^m \varphi^{(n)}(x) \right\|_{L^2} \left\| x^{m-1} \varphi^{(n)}(x) \right\|_{L^2} + C \left\| x^m \varphi^{(n)}(x) \right\|_{L^2} \left\| x^m \varphi^{(n+1)}(x) \right\|_{L^2} \\
&\leq C_m \left\{ \left\| x^m \varphi^{(n)}(x) \right\|^2_{L^2} + \left\| x^{m-1} \varphi^{(n)}(x) \right\|^2_{L^2} + \left\| x^m \varphi^{(n+1)}(x) \right\|^2_{L^2} \right\} \\
&= C_m \left\{ \tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) + \tilde{p}^2_{m-1,n}(\varphi) + \tilde{p}^2_{m,n+1}(\varphi) \right\}.
\end{aligned}
$$

□

1.4 Espaços de Sobolev

Fixando $1 \leq p \leq \infty$, para k um inteiro não negativo, definimos agora um cirto espaço de funçoes, cujos membros têm derivada no sentido das distribuições de vários ordens pertencentes a espaços $L^p(\mathbb{R})$.

Definição 1.8. *O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R})$ consiste de todas as funçoes $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada inteiro m com $m \leq k$, $D^m u$ existe no sentido das distribuições pertencendo a $L^p(\mathbb{R})$.*

Se $u \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ definimos sua norma por

$$
\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{m\leq k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(D^m u(x) \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \displaystyle\sum_{m\leq k} \operatorname*{supess}_{x\in\mathbb{R}} \left| D^m u(x) \right| & (p = \infty) \end{cases}
$$

Definição 1.9. *Seja $(u_m)_{m\geq 1}$, $u \in W^{k,p}(\mathbb{R})$. Dizemos que u_m converge para u em $W^{k,p}(\mathbb{R})$, escrevemos*

$$u_m \to u, \ \text{em}\, W^{k,p}(\mathbb{R}),$$

se

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} = 0.$$

Teorema 1.4 (Espaço de Sobolev como Espaço de Funções). *Para cada $k \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach.*

O caso particular $p = 2$ é útil nas aplicações e neste caso o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\mathbb{R})$ é representado por $H^k(\mathbb{R})$. O espaço $H^k(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^k} = \sum_{m\leq k}\langle D^m u, D^m v\rangle_{L^2},$$

para todo $u, v \in H^k(\mathbb{R})$, e é denominado espaço de Sobolev de ordem k.

Definição 1.10. *Denotamos por $W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ em $W^{k,p}(\mathbb{R})$.*

Assim $u \in W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ se e só se existem funções $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\mathbb{R})$.

No caso $p = 2$ iremos denotar $H_0^k(\mathbb{R}) = W_0^{k,2}(\mathbb{R})$.

Definição 1.11. *Suponha $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-k,q}(\mathbb{R})$ o dual topológico de $W^{k,p}(\mathbb{R})$.*

O dual topológico de $H^k(\mathbb{R})$ denota-se por $H^{-k}(\mathbb{R})$. A seguir veremos uma outra caracterização dos espaços $H^m(\mathbb{R})$, m inteiro positivo.

Proposição 1.8. *$H^m(\mathbb{R})$ coincide com $\left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R});\ \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})\right\}$. Definindo*

$$|||u|||_m = \|(1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u}\|_{L^2}, \tag{1.15}$$

a aplicação $u \longmapsto |||u|||_m$ de $H^m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma norma equivalente a norma de Sobolev $\|u\|_{H^m}$.

Proposição 1.9. *$H^m(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está continuamente imerso em $H^m(\mathbb{R})$, sendo aí denso.*

Seja $m \geq 0$ e $H^{-m}(\mathbb{R}) = \left(H^m(\mathbb{R})\right)'$ o dual de $H^m(\mathbb{R})$. Da proposição anterior resulta que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{-m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

onde $\hookrightarrow$ representa imersão contínua.

Representa-se por $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})}$ a norma de uma forma linear contínua $f \in H^{-s}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} = \sup\left\{|\langle f, u\rangle|;\ u \in H^s(\mathbb{R}),\ \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = 1\right\}.$$

1.5 Tópicos de teoria espectral

Nesta secção estabelecemos ferramentas básicas para teoria de operadores lineares fechados em espaços de Hilbert que serão usados neste trabalho. Além disso, faremos a teoria espectral associada com o operador linear limitado, fechado e auto-adjunto $L : H^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + c + \varphi^2,$$

com $c \in (0, +\infty)$ o qual é associado com solução tipo "Kink" $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ da equação não linear de evolução:

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) - u^2(x,t)\partial_x u(x,t) = 0,$$

onde $x, t \in \mathbb{R}$. Em particular estabelecemos a teoria de Sturn Liouville em $\mathbb{R}$ associada com o operador diferencial de segundo ordem $-\varphi'''(\xi) + V(\xi)\varphi(\xi) = 0$, onde $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada.

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Definição 1.12. *Um operador linear A é uma aplicação $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$, onde $D(A)$ é um subespaço de H, com a seguinte propriedade*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v), \quad \forall\, u, v \in H,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Iremos denotar por

$$\mathcal{R}(A) = \{Au;\ u \in D(A)\},$$

o conjunto de todas as imagens de A, e

$$\mathcal{N}(A) = \{u \in D(A);\ Au = 0\},$$

é chamado Núcleo de A.

Observação 1.1. *Os conjuntos $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$ são sempre subespaços lineares de A.*

Definição 1.13. *Um operador A é limitado em seu domínio $D(A)$ se existe uma constante $m \geq 0$ tal que*

$$\|Au\| \leq m\|u\|,\ \forall\, u \in D(A).$$

Neste caso, a norma de A é o número

$$\|A\| = \inf\big\{m;\ \|Au\| \leq m\|u\|,\ \forall\, u \in D(A)\big\}.$$

Definição 1.14. *Dizemos que um operador é contínuo em* $u \in D(A)$ *se, qualquer sequência* $(u_n)_{n\geq 1} \subset D(A)$ *com* $u_n \to u$*, então* $Au_n \to Au$*.*

Um operador é contínuo em seu domínio $D(A)$, se é contínuo em cada ponto de $D(A)$.

Proposição 1.10. *Se* A *é contínuo na origem, então* A *é contínuo em todo* $D(A)$*.*

Proposição 1.11. *Um operador é contínuo, se e só se,* A *é limitado.*

Exemplo 1.1 (Operador multiplicação por uma função). *Seja* $q(x)$ *uma função mensurável definida em* $\mathbb{R}$*. Definimos o operador multiplicação* $M_q u \equiv qu$ *em* $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} M_q : D(M_q) \subset L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto qu, \end{aligned}$$

com $D(M_q) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R});\, qu \in L^2(\mathbb{R})\right\}$*.*

O operador M_q*, pode ser limitado ou não, dependendo da função* q*, se* $q \in L^\infty(\mathbb{R})$*, então* $\|qu\| \leq \|q\|_\infty \|u\|$ *e* $D(M_q) = L^2(\mathbb{R})$*.*

Definição 1.15. *Seja* A *um operador linear num subespaço linear* $D(A)$*. Dizemos que* A *é fechado se para toda sequência* $(u_n)_{n\geq 1}$ *satisfazendo*

$$u_n \to u, \quad Au_n \to f,$$

temos $u \in D(A)$ *e* $Au = f$*.*

Teorema 1.5 (Teorema do gráfico fechado). *Um operador fechado com domínio limitado é limitado.*

Definição 1.16. *Seja* $A : D(A) \longrightarrow H$ *operador fechado com domínio* $D(A) \subset H$*. O conjunto*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\, A - \lambda I \text{ tem inversa limitada e } \mathcal{R}(A - \lambda I) = H\},$$

e $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ *são chamados respectivamente, o resolvente do conjunto* A*, e o espectro do conjunto* A*. Se* $\lambda \in \rho(A)$*,* $\mathcal{R}_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ *é chamado de resolvente de* A *em* λ*.*

O espectro $\sigma(A)$ pode ser particionado nos seguintes conjuntos disjuntos:

- O espectro pontual, $\sigma_p(A)$, é o conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(A - \lambda I)u = 0$ tem soluções não triviais, em outras palavras, λ é um autovalor de A e cada correspondente solução não trivial u é uma autofunção de A associado à λ;

- O espectro contínuo, $\sigma_c(A)$, é o conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ é não limitada;

- O espectro residual, $\sigma_r(A)$, é o conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}_\lambda(A)$ existe (pode ser limitado ou não), mas $\overline{R(A - \lambda I)} \neq H$. Então temos a seguinte união disjunta

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \rho(A) \cup \sigma(A) \\ &= \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A). \end{aligned}$$

Definição 1.17. *Seja $A : H \longrightarrow H$ um operador linear limitado. Então o operador auto-adjunto $A^* : H \longrightarrow H$ é definido por*

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle, \quad \forall\, u, v \in H.$$

Definição 1.18. *Seja $A : H \longrightarrow H$ um operador linear limitado. Dizemos que A é adjunto se $A = A^*$.*

Definição 1.19. *Seja $A : D(A) < H \longrightarrow H$, operador linear densamente definido. Então chamamos A operador auto-adjunto se $A = A^*$, isto é, se $D(A) = D(A^*)$ e*

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \quad \forall\, u, v \in D(A).$$

Teorema 1.6 (Espectro de um Operador Auto-adjunto). *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto, então*

i) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,

ii) A não tem espectro residual, então, $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.

Exemplo 1.2. *O operador multiplicação por uma função (M_q) é auto-adjunto. Uma prova deste fato pode ser vista em [1].*

Exemplo 1.3 (Operador linear associado a mKdV). *Seja $A_1 : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dado por $A_1 = -\dfrac{d^2}{dx^2} + c$, onde $c \in (0, +\infty)$, então*

$$\sigma(A_1) = \sigma_c(A_1) = [c, +\infty).$$

Definição 1.20. *Sejam X, Y espaços de Banach. O operador linear $K : X \longrightarrow Y$ é dito compacto se, para cada sequência $(u_n)_{n\geq 1} \subset X$ limitada, a sequência $\big(K(u_n)\big)_{n\geq 1}$ é pre-compacta em Y, isto é, existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $\big(K(u_{n_k})\big)_{k\geq 1}$ converge em Y.*

Definição 1.21. *Seja $A : D(A) < H \longrightarrow H$ operador linear.*

1. *Dizemos que $\lambda \in \sigma(A)$ é não essencial, se e só se, λ é autovalor isolado de $\sigma(A)$ e o espaço $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ tem dimensão finita. Chamamos o conjunto de todos os λ não essenciais de discretos e denotemos por $\sigma_{dis}(A)$.*

2. *O complemento de $\sigma(A)$ de um ponto não essencial é chamado o espectro essencial de A, denotado por $\sigma_{ess}(A)$. Logo $\sigma(A) = \sigma_{dis}(A) \cup \sigma_{ess}(A)$.*

Exemplo 1.4. *Considerando A_1 como no exemplo* (1.3)*, então $\sigma(A_1) = [c, +\infty)$, além disso*

$$\sigma(A_1) = \sigma_c(A_1) = \sigma_{ess}(A_1).$$

Proposição 1.12 (Invariança de Espectro Essencial). *Sejam A, B operadores auto-adjuntos em H tal que*

1. *$D(A) = D(B)$, e*

2. *$A - B$ é um operador compacto de $D(A)$ em H, onde $D(A)$ é considerado com a norma $\|u\|_A^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2$. Então*

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$

Teoria de Sturn-Liouville

Estabelecemos resultados básicos da teoria de Sturn-Liouville associados a equação diferencial da forma

$$\mathcal{J}\phi = -\phi'' + V(\xi)\phi = 0, \tag{1.16}$$

onde V é uma função real contínua. Estes resultados dão informações mais precisas sobre o espectro do operador

$$L\Psi \equiv -\Psi'' + \left[c + \phi^2\right]\Psi,$$

o qual é associado para soluções do tipo "Kink", ϕ, para a equação mKdV.

Teorema 1.7. *Se ϕ é uma solução não trivial de* (1.16)*, onde V satisfaz*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} V(\xi) = c > 0, \tag{1.17}$$

então o conjunto de zeros de ϕ é finito (provablemente vazio).

Teorema 1.8. *Sejam ϕ_1 e $\phi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ autofunções de $\mathcal{J}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2 < c$ e com número de zeros η_1, η_2, respectivamente. Se $\lambda_2 > \lambda_1$, então $\eta_2 > \eta_1$.*

Demonstração. Consultar [1]. $\square$

s

Capítulo 2

O problema de Cauchy para a equação Korteweg-de Vries Modificada

Antes de enunciar o principal resultado que provaremos neste capítulo definimos o que significa boa colocação para o problema de Cauchy associado a uma equação de evolução abstrata.

Seja $\mathcal{X}$ um espaço de Banach com norma $||\cdot||$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo da reta. Seja

$$\begin{aligned} u : & I \longrightarrow \mathcal{X} \\ & t \longmapsto u(\cdot, t). \end{aligned}$$

Definimos $C\big(I;\mathcal{X}\big) = \big\{u : I \longrightarrow \mathcal{X};\ u(\cdot,t)$ é contínua e limitada em $I\big\}$, e sua norma $\|u\|_{C(I;\mathcal{X})} = \sup_{t\in I} \|u(\cdot,t)\|$.

Analogamente, definamos

$$C^1\big(I;\mathcal{X}\big) = \big\{u : I \longrightarrow \mathcal{X};\ u(\cdot,t),\ \partial_t u(\cdot,t) \text{ são contínuas e limitadas em } I\big\},$$

e sua norma $\|u\|_{C^1(I;\mathcal{X})} = \max\big\{\sup_{t\in I}\|u(\cdot,t)\|, \sup_{t\in I}\|\partial_t u(\cdot,t)\|\big\}$.

Definição 2.1 (**Boa Colocação**). *Dados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach e $T_0 \in (0,\infty)$, dizemos que o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in \mathcal{X}, \\ u(0) = \phi \in \mathcal{Y}, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $F : [0; T_0] \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ é uma função contínua, é localmente bem-posto se

(a) Existe $T \in (0, T_0]$ e uma função $u \in C([0,T];\mathcal{Y})$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - F(t,u(t))\right\|_{\mathcal{X}} = 0, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

onde as derivadas em 0 e T são calculadas à direita e à esquerda;

(b) O problema (2.1) tem no máximo uma solução em $C([0,T];\mathcal{Y})$;

(c) a aplicação $\phi \longrightarrow u$ é contínua. Mais precisamente, sejam $\phi_n \in \mathcal{Y}$, $n \geq 1$, tal que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{Y}} \phi$, e sejam $u_n \in C([0,T_n];\mathcal{Y})$ correspondentes soluções. Seja $T \in (0;T_0)$, então as soluções u_n podem ser estendidas ao intervalo $[0,T]$ para todo n suficientemente grande e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_{\mathcal{Y}} = 0.$$

Se qualquer uma dessas condições não for satisfeita, o problema é dito mal-posto. Finalmente, se $F(t,\cdot)$ estiver definida em $[0,+\infty)$ e (a), (b), e (c) são válidas em $[0,T]$, para todo $T > 0$ diremos que (2.1) é bem posto globalmente.

Nosso objetivo é demonstrar a boa colocação global para a equação Korteweg-de Vries modificada (mKdV), modelada por

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e o dado inicial u_0 é considerado no espaço $H^2(\mathbb{R})$, que no resto do texto será denotado por H^2.

Definição 2.2. *Seja $u_0 \in H^2$. Uma função $u(\cdot,t) \in C\big([0,T];H^2\big) \cap C^1\big([0,T];H^{-1}\big)$ é solução de (2.2) se*

(i) $u(\cdot,0) = u_0$.

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)}{h} - \partial_x^3 u(\cdot,t) - \lambda u^2(\cdot,t)\partial_x u(\cdot,t) \right\|_{H^{-1}} = 0$ *para todo $t \in [0,T]$.*

Observemos que de acordo com a definição 2.1 neste caso estamos considerando $\mathcal{Y} = H^2$ e $\mathcal{X} = H^{-1}$.

De maneira mais precisa, o resultado principal do capítulo é o seguinte.

Teorema 2.1. *O problema de Cauchy (2.2) é globalmente bem posto em H^2 no sentido da definição (2.1) e, além disso, $u \in C^1\big([0,T];H^{-1}\big)$ para todo $T > 0$.*

A prova deste resultado será feita em varias etapas usando um método conhecido como regularização parabólica. O capítulo esta estruturado da seguinte maneira. Na Seção 2.1 obteremos duas quantidades conservadas pelo fluxo da equação que serão de bastante utilidade.

Em seguida, na Seção 2.2, encontramos para cada $0 < \varepsilon < 1$ uma solução global $w(x,t;\varepsilon)$ no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para o problema regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^4 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.3}$$

com dados inicias tomados no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Além disso, procuramos que as soluções convirjam para uma solução global $w(x,t;\varepsilon)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para o problema original (2.2). Na Seção 2.3 provaremos estimativas à priori para o problema regularizado. Finalmente, na Seção 2.4, usando as soluções regulares obtidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ provaremos a existência de soluções em H^2 satisfazendo as exigências iniciais.

2.1 Leis de conservação

A seguir mostraremos dois funcionais importantes que são conservados pelo fluxo da equação Korteweg-de Vries modificada. [1]

Proposição 2.1. *Seja $u(\cdot,t)$ uma solução regular para a equação (2.2) com dado inicial $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então,*

$$M\big[u(\cdot,t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx = M\big[u_0\big], \tag{2.4}$$

$$E\big[u(\cdot,t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \lambda \frac{u^4}{12} \right\} dx = E\big[u_0\big], \tag{2.5}$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja u solução regular de (2.2), então multiplicando o lado esquerdo da equação (2.2) por u obtemos

$$u\partial_t u + \lambda u^3 \partial_x u + u\partial_x^3 u = u\partial_t u + \left[\left(\partial_x u \partial_x^2 u + u \partial_x^3 u \right) - \partial_x u \partial_x^2 u + \lambda u^3 \partial_x u \right],$$

que podemos reescrevê-la na forma

$$\partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) = -\partial_x \left(u\partial_x^2 u - \frac{(\partial_x u)^2}{2} + \lambda \frac{u^4}{4} \right).$$

[1] A prova será realizado sobre a hipótese de existência de soluções regulares com decaimento a zero no infinito.

Integrando com relação à variável espacial e usando que a solução pertence ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right)dx\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u\partial_x^2 u - \frac{(\partial_x u)^2}{2} + \lambda\frac{u^4}{4}\right)dx = 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2(x)dx,$$

de onde segue (2.4).

Por outro lado, derivando com relação à variável espacial obtemos

$$\partial_{xt}^2 u + \partial_x^4 u + \lambda\partial_x\left(u^2\partial_x u\right) = 0. \tag{2.6}$$

Multiplicando (2.6) por $\partial_x u$ e integrando com respeito a x tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{tx}^2 u\partial_x u dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^4 u\partial_x u dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u^2\partial_x u\right)\partial_x u dx = 0.$$

Usando integração por partes temos então que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u)^2 dx &= -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u^2\partial_x u\right)\partial_x u\, dx\\ &= \frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u^3\right)\partial_x^2 u\, dx\\ &= -\frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3\partial_x^3 u\, dx.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando de novo a equação (2.2) em (2.7) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u)^2 dx &= -\frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3\Big(-\partial_t u - \lambda u^2\partial_x u\Big)dx\\ &= \frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3\partial_t u\, dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^5\partial_x u\, dx\\ &= \frac{\lambda}{12}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{1}{2}(\partial_x u(x,t))^2 - \frac{\lambda}{12}u^4(x,t)\right\}dx = 0,$$

e, consequentemente, vale (2.5). □

2.2 Solução local para problema regularizado

Definição 2.3. *Uma função* $u : \mathbb{R} \times [0.T) \longrightarrow \mathbb{R}]$ *pertence ao espaço* $C^\infty\big([0,T);\mathcal{S}\big)$ *se*

i) $u \in C^\infty\big(\mathbb{R} \times [0,T)\big)$*;*

ii) $\displaystyle\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T)} \left| x^k \frac{\partial^{m+n} u(x,t)}{\partial_t^m \partial_x^n} \right| < \infty.$

Nesta seção provaremos a existência de soluções locais para o problema (2.3), de forma mais precisa mostraremos o resultado a seguir.

Proposição 2.2. *Sejam* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *e* ε *um número real tal que* $0 < \varepsilon < 1$*. Então, o problema* (2.3) *tem uma única solução* $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T_\varepsilon);\mathcal{S}\big)$*.*

A prova deste resultado será realizada em vários passos. Primeiro procuramos solução do problema (2.3) mediante um processo iterativo.

2.2.1 Esquema iterativo

Considerando $0 < \varepsilon < 1$ arbitrário, construiremos soluções do problema (2.3) mediante um processo interativo, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos:

- $w_1(x,t;\epsilon) = u_0(x)$,
- $w_n(x,t;\epsilon)$ solução para o problema descrito a continuação.

$$
\begin{cases}
\partial_t w_n + \partial_x^3 w_n + \varepsilon \partial_x^4 w_n = -\lambda w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1}, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\
w_n(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}.
\end{cases} \tag{2.8}
$$

Dado $n \geq 2$ mostraremos que existe uma única solução $w_n(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,+\infty);\mathcal{S}\big)$ para (2.8). De fato, faremos a prova por indução. Para $n = 2$ em (2.8)

$$
\begin{cases}
\partial_t w_2 + \partial_x^3 w_2 + \varepsilon \partial_x^4 w_2 = -\lambda u_0^2 u_0', & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\
w_2(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Aplicando a transformada de Fourier e suas propriedades obtemos

$$
\begin{cases}
\partial_t \widehat{w_2}(\xi,t) + (-8\pi^3 i\xi^3 + 16\pi^4\xi^4\varepsilon)\, \widehat{w_2}(\xi,t) = -\lambda \widehat{u_0^2 u_0'}(\xi) & (\xi,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\
\widehat{w_2}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & \xi \in \mathbb{R}.
\end{cases}
$$

Fixando $\xi \in \mathbb{R}$ o problema anterior é uma E.D.O de primeira ordem como função de t, então obtemos sua solução explícita, dada por

$$\widehat{w_2}(\xi,t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{f_\varepsilon(\xi)t} + \lambda\left(\frac{1-e^{f_\varepsilon(\xi)t}}{f_\varepsilon(\xi)}\right)\widehat{u_0^2u_0'}(\xi),$$

onde $f_\varepsilon(\xi) = 8\pi^3\xi^3\,(i - 2\pi\xi\varepsilon)$.

Assim, usando a transformada de Fourier inversa podemos escrever

$$w_2(x,t;\varepsilon) = \big(H_1(\cdot,t) * u_0(\cdot)\big)(x) + \lambda\big(H_2(\cdot,t) * u_0^2u_0'(\cdot)\big)(x),$$

onde $\widehat{H_1}(\xi,t) = e^{f_\varepsilon(\xi)t}, \quad \widehat{H_2}(\xi,t) = \dfrac{1-e^{f_\varepsilon(\xi)t}}{f_\varepsilon(\xi)} = g_\varepsilon(\xi,t).$

Como $g_\varepsilon(\xi,t),\ e^{f_\varepsilon(\xi)} \in L^1(\mathbb{R}_\xi)$ tem-se que $H_1(x,t)$ e $H_2(x,t)$ são contínuas em relação a x. Além disso, como $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos que $H_1(\cdot,t) * u_0(\cdot)$ e $H_2(\cdot,t) * u_0^2u_0'(\cdot)$ são C^∞ com relação a variável x.

Faremos a prova para a continuidade de $w_2(x,t;\varepsilon)$ como função do tempo t, para o primeiro termo de $w_2(x,t;\varepsilon)$ fixando $T>0$, considere uma sequência $(t_k)_{k\geq 1}$ em $[0,T]$ convergindo para t_0, então temos

$$I_1(x,t_k) := \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{f_\varepsilon(\xi)t_k}}{f_\varepsilon(\xi)}\right)e^{2\pi i\xi(x-y)}d\xi\right)u_0(y)\,dy.$$

Usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que $I_1(x,t_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I_1(x,t_0)$. Do mesmo modo prova-se que para cada $T>0$ $w_2(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T);\mathcal{S}\big)$.

Logo, suponha existe $w_{n-1} \in C^\infty\big([0,+\infty);\mathcal{S}\big)$. Fazendo um processo análogo ao caso n=2, existe $w_n \in C^\infty\big([0,T);\mathcal{S}\big)$, para cada $T>0$.

2.2.2 Estimativa para a norma H^2 da soluções num intervalo de tempo dependendo de ε

Nesta seção provaremos que a sequência construída no processo iterativo é limitada no espaço $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Primeiro, usando (1.12) temos $\|\partial_x w\|_{L^2} \leq \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$, e por definição

$$\|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 \leq \|w\|_{H^2}^2 \leq \frac{3}{2}\left(\|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 w\|_{L^2}\right).$$

Assim, temos a seguinte equivalência $\|w\|_{H^2}^2 \cong \|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2$.

Observação 2.1. *Uma mesma constante C denotará várias constantes que podem ser diferentes durante as estimações realizadas. No entanto, quando o crescimento ou dependência de certas constantes com relação a parâmetros seja importante faremos a distinção correspondente.*

Multiplicando (2.8) por w_n temos

$$w_n\partial_t w_n + w_n\partial_x^3 w_n + \varepsilon w_n\partial_x^4 w_n = -\lambda w_n w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}. \tag{2.9}$$

Por outro lado, derivando (2.8) duas vezes temos

$$\partial_x^2\partial_t w_n + \partial_x^5 w_n + \varepsilon\partial_x^6 w_n = -\lambda\partial_x^2\left[w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\right], \tag{2.10}$$

logo, multiplicando (2.10) por $\partial_x^2 w_n$ temos

$$\partial_x^2 w_n\left[\partial_x^2\partial_t w_n + \partial_x^5 w_n + \varepsilon\partial_x^6 w_n\right] = -\lambda\partial_x^2 w_n\partial_x^2\left[w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\right]. \tag{2.11}$$

Somando (2.9) com (2.11) e integrando obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}^2 = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w_n\right)^2 dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w_n + \partial_x^4 w_n\right) w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\,dx,$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}^2 &\leq \varepsilon\|\partial_x^2 w_n\|_{L^2}^2 + \left(\|w_n\|_{L^2} + \|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}\right)\|w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}\\ &\leq \varepsilon\|w_n\|_{H^2} + \varepsilon\|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Logo, usando (1.12) obtemos

$$\|w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}^2 \leq \|w_{n-1}\|_\infty^4\|\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}^2 \leq 4\|w_{n-1}\|_{H^2}^6,$$

então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 \leq \varepsilon\|w_n\|_{H^2}^2 + \frac{2}{\varepsilon}\|w_{n-1}\|_{H^2}^6,$$

agora, tomando $C_\varepsilon = \max\left\{\varepsilon, \dfrac{2}{\varepsilon}\right\} = \dfrac{2}{\varepsilon}$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 \leq C_\varepsilon\Bigg(\|w_n\|_{H^2}^2 + \|w_{n-1}\|_{H^2}^6\Bigg). \tag{2.12}$$

Afirmação 2.2.1. *Existe $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|w_n\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0\|_{H^2}^2, \quad \forall\, t\in[0,T_1],\ n\geq 2 \tag{2.13}$$

Demonstração. Integrando em (2.12) temos

$$\|w_n(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t\|w_n(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t\|w_{n-1}(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^6\,ds + \|u_0\|_{H^2}^2,$$

Agora, usaremos indução. Para o caso $n = 2$ temos

$$\|w_2(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \|w_2(\cdot, s; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \, ds + \frac{4}{\varepsilon} \|u_0\|_{H^2}^6 t + \|u_0\|_{H^2}^2.$$

Considere $0 < T_0 < \dfrac{\varepsilon}{64\|u_0\|_{H^2}^4}$, então

$$\|w_2(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \|w_2(\cdot, s; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \, ds + \frac{3}{2} \|u_0\|_{H^2}^2.$$

Aplicando o lema de Gronwall temos

$$\|w_2(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{3}{2} \|u_0\|_{H^2}^2 e^{\frac{4}{\varepsilon} t},$$

logo considere $0 < T_1(\varepsilon) = \min \left\{ T_0, \dfrac{\varepsilon}{4} \ln \left(\dfrac{4}{3} \right) \right\}$, então $\|w_2(\cdot . t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0\|_{H^2}^2$, para cada $0 < t < T_1$.

Suponhamos a hipótese é válida para $(n-1)$, isto é,

$$\|w_{n-1}(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0\|_{H^2}^2, \quad \text{para todo } 0 < t < T_1(\varepsilon).$$

Agora, de (2.12) e usando a hipótese indutiva

$$\begin{aligned} \|w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 &\leq \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \|w_n(\cdot, s; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \, ds + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \|w_{n-1}(\cdot, s; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \, ds + \|u_0\|_{H^2}^2. \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \|w_n(\cdot, s; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \, ds + \frac{32}{\varepsilon} \|u_0\|_{H^2}^6 t + \|u_0\|_{H^2}^2. \end{aligned}$$

Usaremos o seguinte fato $T_1 < T_0 < \dfrac{\varepsilon}{64\|u_0\|_{H^2}^4}$, então

$$\|w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \|w_2(\cdot, s; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \, ds + \frac{3}{2} \|u_0\|_{H^2}^2.$$

Aplicando o lema de Gronwall temos

$$\|w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{3}{2} \|u_0\|_{H^2}^2 e^{\frac{4}{\varepsilon} t},$$

logo, para $t < T_1 < \dfrac{\varepsilon}{4} \ln \left(\dfrac{4}{3} \right)$, então $\|w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0(\cdot)\|_{H^2}^2$.

Isto verifica nossa afirmação. $\square$

A próxima afirmação nos dá a limitação uniforme das derivadas de w_n em L^2 no mesmo intervalo de tempo obtido na Afirmação 2.2.1.

Afirmação 2.2.2. *Seja $l \leq 3$, $l \in \mathbb{N}$. Existe uma constante positiva $C(\varepsilon, l)$ tal que para todo $0 \leq t \leq T_1(\varepsilon)$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$\|\partial_x^l w_n\|_{L^2}^2 \leq C(\epsilon, l). \tag{2.14}$$

Demonstração. Derivando l vezes em (2.8) temos

$$\partial_x^l \partial_t w_n + \partial_x^{l+3} w_n + \varepsilon \partial_x^{l+4} w_n = -\lambda \partial_x^l \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right]. \tag{2.15}$$

Multiplicando (2.15) por $\partial_x^l w_n$ e integrando obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^l w_n\right)^2 dx + \varepsilon \|\partial_x^{l+2} w_n\|_{L^2}^2 = -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^l w_n \partial_x^l \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] dx,$$

usando integração por partes e (1.9) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^l w_n\right)^2 dx + \varepsilon \|\partial_x^{l+2} w_n\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|\partial_x^{l+2} w_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left\| \partial_x^{l-2} \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] \right\|_{L^2}^2, \tag{2.16}$$

então $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^l w_n\right)^2 dx \leq \frac{1}{4\varepsilon} \left\| \partial_x^{l-2} \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] \right\|_{L^2}^2$, onde

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^{l-2} \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] \right\|_{L^2} &= \left\| \sum_{k=0}^{l-2} C_k \partial_x^{l-2-k} \left(w_{n-1}^2 \right) \partial_x^{k+1} w_{n-1} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{l-2} C_k \left(\sum_{j=0}^{l-2-k} C_{j,k} \partial_x^{l-2-k-j} w_{n-1} \partial_x^j w_{n-1} \right) \partial_x^{k+1} w_{n-1} \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1-k} C_{j,k} ||\partial_x^{p-1-k-j} w_{n-1}||_{H^1}^2 ||\partial_x^j w_{n-1}||_{H^1}^2 ||\partial_x^{k+1} w_{n-1}||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Usando indução e aplicando o lema de Gronwall obtemos para cada $0 \leq t \leq T_1$ que $\|\partial_x^l w_n(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq C(\varepsilon, l)$. □

Afirmação 2.2.3. *Existe $T_2 = T_2(\varepsilon) \in \left(0, T_1(\varepsilon)\right)$ tal que para cada m, $n \in \mathbb{N}$ temos a seguinte estimativa*

$$\sup_{0 \leq t \leq T_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2(x,t) dx \leq C(m, \varepsilon), \tag{2.17}$$

onde $C(m, \epsilon)$ é uma constante independente de n.

Demonstração. Podemos assumir $m \geq 2$, pois o caso $m = 1$ é trabalhado de forma análoga.

Fazendo integração por partes obtemos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \left(\partial_x^2 w_n\right)^2 dx = \sum_i P_i,$$

onde P_i pode ser das seguintes formas

- $P_1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-k} w_n \partial_x^l w_n \, dx$ ou $P_1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-k} \partial_x w_n \partial_x^l w_n \, dx,$
- $P_2 = C \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \frac{w_{n-1}^3}{3} w_n \, dx,$
- $P_3 = C \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \frac{w_{n-1}^3}{3} \partial_x w_n \, dx,$

onde $k, l = 0, 1, 2.$

Usando (2.8) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$I_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n \partial_x^3 w_n \, dx,$$

$$I_2 = -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n \partial_x^4 w_n \, dx,$$

$$I_3 = -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \, dx.$$

Podemos escrever I_1 da seguinte forma

$$I_1 = \underbrace{2m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=1,l=2)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \partial_x w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=0,l=2)}.$$

Analogamente temos

$$I_2 = - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \left(\partial_x^2 w_n\right)^2 dx - \underbrace{(4m^2 - 2m)\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=2,l=2)} -$$
$$- \underbrace{4m\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \partial_x w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=1,l=2)},$$

e

$$I_3 = \underbrace{2\lambda m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \frac{w_{n-1}^3}{3} w_n \, dx}_{P_2} + \underbrace{\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \frac{w_{n-1}^3}{3} \partial_x w_n \, dx}_{P_3}.$$

Agora veremos estimativas para algumas das integrais que aparecem acima. As outras que restarão, podem ser tratadas analogamente. Usaremos a seguinte desigualdade

(2.18) $$|x|^{m'} \leq \varepsilon_1 x^{2m} + C(\varepsilon_1, m), \; m' \leq 2m$$

Estimativa para I_1:

$$\left|2m\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} w_n \partial_x^2 w_n \, dx\right| \leq 2m\big\|x^m \partial_x^2 w_n\big\|_{L^2}\big\|x^{m-1}w_n\big\|_{L^2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{K}\big\|x^m\partial_x^2 w_n\big\|_{L^2}^2 + \frac{m^2}{\varepsilon}K\big\|x^{m-1}w_n\big\|_{L^2}^2$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{K}\big\|x^m\partial_x^2 w_n\big\|_{L^2}^2 + \frac{m^2}{\varepsilon}K\varepsilon_1\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w_n^2\,dx + C(\varepsilon, m),$$

onde pela desigualdade (2.18) temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2}w_n^2\,dx \leq \varepsilon_1\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w_n^2\,dx + C(\varepsilon_1, m)\int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2\,dx.$$

Além disso, estamos considerando ε_1 apropriado e K suficientemente grande tal que

$$\frac{m^2KC(\varepsilon_1, m)}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2\,dx \leq C(\varepsilon, m).$$

Para o outro termo de I_1 o procedimento é análogo.

Estimativa para I_2:

$$\left|-2m(2m-1)\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2}w_n\partial_x^2 w_n\,dx\right| \leq (4m^2-2m)\varepsilon\|x^m\partial_x^2 w_n\|_{L^2}\|x^{m-2}w_n\|_{L^2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{K}\big\|x^m\partial_x^2 w_n\big\|_{L^2}^2 + Km^2(2m-1)^2\varepsilon\big\|x^{m-2}w_n\big\|_{L^2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{K}\big\|x^m\partial_x^2 w_n\big\|_{L^2}^2 + C\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w_n^2\,dx + C(\varepsilon, m),$$

onde pela desigualdade (2.18) temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-4}w_n^2\,dx \leq \varepsilon_1\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w_n^2\,dx + C(\epsilon_1, m)\int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2\,dx.$$

Além disso, estamos considerando ε_1 apropriado e K suficientemente grande tal que

$$Km^2(2m-1)^2\varepsilon\varepsilon_1\int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2\,dx \leq C(\epsilon, m).$$

Para o outro termo de I_2 o procedimento é análogo.

Estimativa para I_3:

$$\left|2\lambda m\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}\frac{w_{n-1}^3}{3}w_n\,dx\right| \leq \frac{2m}{3}\big\|x^m w_n\big\|_{L^2}\big\|x^{m-1}w_{n-1}^3\big\|_{L^2}$$
$$\leq \frac{m}{3}\big\|x^m w_n\big\|_{L^2}^2 + \frac{m}{3}\big\|x^{m-1}w_{n-1}^3\big\|_{L^2}^2$$
$$\leq C_1 + C_2\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(w_{n-1}^2 + w_n^2\right)dx,$$

Para o outro termo de I_3 o procedimento é análogo. Finalmente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2\, dx \leq C(\varepsilon, m)\left[1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(w_{n-1}^2 + w_n^2\right) dx\right]. \tag{2.19}$$

Aplicando o lema de Gronwall e indução concluímos análogo à Afirmação (2.2.2) que existe $T_2 = T_2(\varepsilon) \in \big(0, T_1(\varepsilon)\big)$ tal que

$$\sup_{0\leq t\leq T_2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2(x,t)dx \leq C(m,\varepsilon).$$

$\square$

2.2.3 Existência e Unicidade da solução local

Assim, até agora temos

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]} \|x^k \partial_x^l w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2} \leq C_{k,l}, \quad \forall\, k,\, l \in \mathbb{N}_0.$$

Equivalentemente por (1.7) temos

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \partial_x^l w_n(x,t;\varepsilon)| \leq \tilde{C}_{k,l}, \quad \forall\, k,\, l \in \mathbb{N}_0.$$

De acordo com (2.8) concluímos que $\partial_x w_n(x,t;\varepsilon) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, para cada $0 \leq t \leq T_2(\varepsilon)$ e ainda obtemos que

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]} \|x^k \partial_x^l w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2} \leq M_{k,l}, \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}_0,$$

equivalentemente temos

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \partial_x^l w_n(x,t;\varepsilon)| \leq \tilde{M}_{k,l}, \quad k, l \in \mathbb{N}_0. \tag{2.20}$$

De (2.20) podemos concluir que a família $\tilde{w}_{k,l} = \big(w_n(x,t;\varepsilon)\big)_{n\geq 1}$ verifica as seguintes propriedades:

- t contínua em $[0, T_2(\varepsilon)]$,
- uniformemente limitado em $[0, T_2(\varepsilon)]$.

Pelo teorema de Arzela Ascolí podemos concluir que existe

$$w(x,t;\varepsilon) \in C^1\big([0, T_2(\varepsilon)]; \mathcal{S}(\mathbb{R})\big). \tag{2.21}$$

Agora provaremos que existe $\tilde{w}(x,t;\varepsilon)$ tal que $w_n \to \tilde{w}$ em L^2. Com efeito para cada $0<\varepsilon<1$ usando (2.21) temos que

(2.22)
$$\begin{cases} \partial_t w(x,t;\varepsilon) + \partial_x^3 w(x,t;\varepsilon) + \varepsilon\partial_x^4 w(x,t;\varepsilon) = -\lambda w^2(x,t;\varepsilon)\partial_x w(x,t;\varepsilon), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda=\pm 1,\\ w(x,0;\varepsilon) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Seja $[0,T^*(\varepsilon)]$ o intervalo maximal da solução. Provaremos que $T^*(\varepsilon)=+\infty$, para isto vamos obter na próxima seção estimativas a priori em $C\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ para qualquer intervalo $[0,T]$ de existência da solução.

Além disso, também a seguinte estimativa é satisfeita.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n^2\,dx \le C_\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty}\left[g_{n-1}^2+g_n^2\right]dx, \tag{2.23}$$

onde $g_n = w_n - w_{n-1}$. De fato, partindo de (2.8) temos

$$\partial_t w_n + \partial_x^3 w_n + \varepsilon\partial_x^4 w_n = -\lambda w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1} \tag{2.24}$$

$$\partial_t w_{n-1} + \partial_x^3 w_{n-1} + \varepsilon\partial_x^4 w_{n-1} = -\lambda w_{n-2}^2\partial_x w_{n-2} \tag{2.25}$$

subtraindo (2.25) de (2.24) temos

$$\partial_t g_n + \partial_x^3 g_n + \varepsilon\partial_x^4 g_n = -\lambda\left[w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1} - w_{n-2}^2\partial_x w_{n-2}\right]. \tag{2.26}$$

Multiplicando (2.26) por $g_n = w_n - w_{n-1}$, e integrando obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n^2\,dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 g_n\right)^2 dx = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left[\left(w_{n-1}^2 - w_{n-2}^2\right)\partial_x w_{n-1} + w_{n-2}^2\partial_x g_{n-1}\right]dx.$$

Onde usando as seguintes estimativas verificamos (2.23)

$$\begin{aligned} -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(w_{n-1}^2-w_{n-2}^2\right)\partial_x w_{n-1}dx &= -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(w_{n-1}+w_{n-2}\right)g_{n-1}\partial_x w_{n-1}dx\\ &\le \|w_{n-1}+w_{n-2}\|_\infty\|\partial_x w_{n-1}\|_\infty\|g_{n-1}\|_{L^2}\|g_n\|_{L^2}\\ &\le C_1\left(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2+\|g_n\|_{L^2}^2\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n w_{n-2}^2\partial_x g_{n-1}\,dx &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w_{n-2}\,g_{n-1}\,g_n\partial_x w_{n-2}\,dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}\,w_{n-2}^2\partial_x g_n\,dx\\ &\le C_1\|g_{n-1}\|_{L^2}\|g_n\|_{L^2} + \|w_{n-2}\|_\infty^2\|g_{n-1}\|_{L^2}\|\partial_x g_n\|_{L^2}\\ &\le C_1\left(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2+\|g_n\|_{L^2}^2\right) + C_2\|g_{n-1}\|_{L^2}\|\partial_x^2 g_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|g_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\\ &\le C_1\left(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2+\|g_n\|_{L^2}^2\right) + \frac{C_2}{2}\left(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2 + \frac{2\epsilon}{C_2}\|\partial_x^2 g_n\|_{L^2}^2 + \frac{C_2}{8\varepsilon}\|g_n\|_{L^2}^2\right)\\ &\le C_\varepsilon\left(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2+\|g_n\|_{L^2}^2\right) + \varepsilon\|\partial_x^2 g_n\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $\big(w_n(x,t;\varepsilon)\big)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em L^2, assim, converge para uma função $w(x,t,\varepsilon)$ no espaço L^2.

Nosso objetivo agora é provar que a convergência anterior é satisfeita no espaço $C\big([0,T(\varepsilon)];L^2\big)$, onde $T(\varepsilon)\in(0,T_2(\varepsilon)]$ é suficientemente pequeno. Para isto, basta provar a continuidade de w em $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Considere uma sequência $(t_k)_{k\geq 1}\subset[0,T(\varepsilon)]$ tal que $t_k\to t_0$ em $[0,T(\varepsilon)]$, agora usando desigualdade triangular temos

$$||w(\cdot,t_k)-w(\cdot,t_0)||_{L^2}\leq ||w(\cdot,t_k)-w_n(\cdot,t_k)||_{L^2}+||w_n(\cdot,t_k)-w_n(\cdot,t_0)||_{L^2}+||w_n(\cdot,t_0)-w(\cdot,t_0)||_{L^2}.$$

Notemos que no 1º e 3º termo vamos usar que $w_n\to w$ em L^2. Já no segundo vamos a usar o fato que $w_n\in C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Logo, concluímos que $w\in C\big([0,T(\varepsilon)];L^2\big)$. Assim, usando que a sequência $(w_n)_{n\geq 1}$ converge para $w(x,t;\varepsilon)$ no espaço $C\big([0,T(\varepsilon)];L^2\big)$ e é limitada em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ obtemos a convergência no espaço $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Finalmente tomando limite em (2.8) quando $n\to\infty$ obtemos a existência de solução local do problema (2.3) no espaço $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$.

Para provar a unicidade desta solução suponha a existência de duas soluções $w_1(x,t,\varepsilon)$ e $w_2(x,t,\varepsilon)$ no espaço $C\big([0,T];\mathcal{S}\big)$, para algum $T>0$. Consideremos $w=w_1-w_2$, então existe uma constante $C(\varepsilon)>0$ que não depende de $x\in\mathbb{R}$ nem de $t\in[0,T]$ satisfazendo

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}w^2(x,t,\varepsilon)dx\leq C(\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty}w^2(x,t,\varepsilon)dx. \tag{2.27}$$

De fato, é simples verificar usando (2.3) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}w^2\,dx+\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w\right)^2dx=-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}ww_1^2\partial_x w_1\,dx+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}ww_2^2\partial_x w_2\,dx.$$

Fazendo integração por partes temos $-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}ww_1^2\partial_x w_1\,dx=\dfrac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}w_1^3\partial_x w\,dx$, também analogamente $\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}ww_2^2\partial_x w_2\,dx=-\dfrac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}w_2^3\partial_x w\,dx$, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}w^2\,dx+\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w\right)^2dx&=\frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w_1^3-w_2^3\right)\partial_x w\,dx\\&\leq\frac{1}{3}\|w_1^2+w_1w_2+w_2^2\|_\infty\|w\|_{L^2}\|\partial_x w\|_{L^2}\\&\leq\frac{C}{3}\|w\|_{L^2}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\\&\leq\frac{C^2}{18}\|w\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}\|w\|_{L^2}\\&\leq\frac{C^2}{18}\|w\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2+\frac{1}{16\varepsilon}\|w\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Cancelando os termos semelhantes temos $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\,dx \leq C(\varepsilon)\|w\|_{L^2}^2$. Logo integrando obtemos

$$||w(\cdot,t;\varepsilon)||_{L^2}^2 \leq 2C(\varepsilon)\int_0^t ||w(\cdot,s;\varepsilon)||_{L^2}^2 ds. \tag{2.28}$$

Aplicando o lema de Gronwall em (2.28) concluímos que $w = 0$, isto é, $w_1 = w_2$. Assim, temos provada a unicidade da solução local do problema (2.3).

2.3 Estimativas a priori para a solução do problema

Agora vamos provar algumas estimativas, as quais são uniformes com respeito a $\varepsilon \in (0,1]$, para soluções do problema (2.3).

Lema 2.1. *Para $T > 0$ seja $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ solução de (2.3), então:*

i) $\|w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}$ é uma função decrescente de argumento $t > 0$.

ii) Para cada $T > 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Seja $R_1 > 0$ tal que $\|w(\cdot,0;\varepsilon)\|_{H^1} \leq R_1$. Então, existe $R_2 > 0$ tal que para cada $0 < t < T$

$$\|w(\cdot,t,\varepsilon)\|_{H^1} \leq R_2.$$

Demonstração. Denotemos

$$g(t) = \|w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,t;\varepsilon)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

i) Observe que basta provar que $g'(t) \leq 0$. De fato, se w é solução de (2.3) temos

$$\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2} = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\partial_x^2 w(x,t;\varepsilon)\big)^2 dx. \tag{2.29}$$

De fato, multiplicando por w em (2.3) temos

$$\frac{1}{2}\partial_t\bigg(w^2\bigg) + \lambda w^3\partial_x w + w\partial_x^3 w + \varepsilon w\partial_x^4 w = 0,$$

integrando com respeito a variável espacial

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,t;\varepsilon)dx = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^3\partial_x w\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^3 w\,dx - \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^4 w\,dx.$$

Verifica-se integrando por partes que $\int_{-\infty}^{+\infty} w^3\partial_x w\,dx = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^3 w\,dx = 0$, e também $-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^4 w dx = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w\right)^2 dx \leq 0$.
Assim $g'(t) \leq 0$. A primeira parte do lema está provado.

ii) Agora provaremos a segunda parte do lema. Derivando (2.3) temos

$$\partial_x\partial_t w + \lambda\partial_x\left(w^2\partial_x w\right) + \partial_x^4 w + \epsilon\partial_x^5 w = 0, \tag{2.30}$$

Multiplicando (2.30) por $\partial_x w$ obtemos

$$\partial_x w\partial_x\partial_t w + \lambda\partial_x w\left[2w(\partial_x w)^2 + w^2\partial_x^2 w\right] + \partial_x w\partial_x^4 w + \varepsilon\partial_x w\partial_x^5 w = 0. \tag{2.31}$$

Por outro lado, multiplicando (2.3) por $\lambda\frac{w^3}{3}$ temos

$$\lambda\frac{w^3}{3}\partial_t w + \frac{w^5}{3}\partial_x w + \lambda\frac{w^3}{3}\partial_x^3 w + \lambda\varepsilon\frac{w^3}{3}\partial_x^4 w = 0. \tag{2.32}$$

Subtraindo (2.32) de (2.31) e integrando obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_t\left(\frac{1}{2}(\partial_x w)^2 - \lambda\frac{w^4}{12}\right)dx + 2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w(\partial_x w)^3 dx + \\ &+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\,\partial_x^2 w\,dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^3 w\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x w\,\partial_x^4 w\,dx - \\ &-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^5}{3}\partial_x w\,dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x w\,\partial_x^5 w\,dx - \lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^4 w\,dx = 0.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Usando integração por partes em (2.33) temos que

$$2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w(\partial_x w)^3 dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\partial_x^2 w dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^3 w dx = 0,$$

e $\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x w\,\partial_x^4 w\,dx = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^5}{3}\partial_x w\,dx = 0$, ocorrem. Também

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x w\,\partial_x^5 w\,dx = \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^3 w\right)^2 dx,$$

$$-\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^4 w\,dx = \lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\partial_x^3 w\,dx.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^2 dx =& -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^3 w\right)^2 dx + \lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^4}{12}\,dx - \\ &-\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\,\partial_x^3 w\,dx.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Afirmação 2.3.1. *A seguinte desigualdade é satisfeita*

$$I = -\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x w \, \partial_x^3 w \, dx \leq C + \varepsilon \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. Usando (1.12) temos

$$\|w\|_\infty \leq C_1 \|w\|_{L^2}^{\frac{5}{6}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{6}} \quad \text{e} \quad \|\partial_x w\|_{L^2} \leq C_2 \|w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}, \tag{2.35}$$

então,

$$\begin{aligned} I &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left| w^2 \partial_x w \, \partial_x^3 w \right| dx \\ &\leq \varepsilon \|w^2 \partial_x w\|_{L^2} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Agora, note que $\|w^2 \partial_x w\|_{L^2}^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w^4 (\partial_x w)^2 dx \leq \|w\|_\infty^4 \|\partial_x w\|_{L^2}^2$. Logo,

$$\|w^2 \partial_x w\|_{L^2} \leq \|w\|_\infty^2 \|\partial_x w\|_{L^2}.$$

Usando (2.35) e (1.1) temos

$$\begin{aligned} I &\leq \varepsilon \|w\|_\infty^2 \|\partial_x w\|_{L^2} \|\partial_x^3 w\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon C_1 \|w\|_{L^2}^{\frac{5}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} C_2 \|w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2} \\ &= \varepsilon C \|w\|_{L^2}^{\frac{7}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \\ &= \varepsilon C \left(\frac{C_1}{\varepsilon} \|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{7}{18}} + \frac{\varepsilon}{C} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq C + \varepsilon \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Usando a Afirmação provada, temos de (2.34)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x w)^2 dx \leq \lambda \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^4}{12} dx + C$$

Além disso, sabemos que existe uma constante positiva C_3 tal que

$$\lambda \frac{w^4}{12} \leq C_3 \left(w^2 + w^4 \right). \tag{2.36}$$

Por outro lado, usando (1.12) temos $\|w\|_{L^4}^4 \leq C_4 \|w\|_{L^2}^3 \|\partial_x w\|_{L^2}$. Agora, integrando (2.36) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^4}{12} dx &\leq C_3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} w^4 dx \right) \\
&= C_3 \left(\|w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^4}^4 \right) \\
&\leq C_3 \left(\|w\|_{L^2}^2 + C_4 \|w\|_{L^2}^3 \|\partial_x w\|_{L^2} \right) \\
&= C + \frac{1}{4} \|\partial_x w\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Assim, para todo $t \in [0, T]$ tem se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_x w(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq \lambda \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^4}{12} dx + C. \tag{2.37}$$

Logo, integrando (2.37) em $(0, t)$

$$\frac{1}{2} \|\partial_x w(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\partial_x w(\cdot, 0; \varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^4(x, t; \varepsilon)}{12} dx - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^4(x, 0; \varepsilon)}{12} dx + Ct,$$

isto é, $\frac{1}{2} ||\partial_x w||_{L^2}^2 \leq \frac{1}{4} ||\partial_x w||_{L^2}^2 + C(R_1) + CT$, donde

$$\|\partial_x w(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C(R_1, T).$$

□

Lema 2.2. *Sejam R_1, $T > 0$ arbitrários, considere $R_2(R_1, T)$ proveniente do Lema 2.1. Para cada $R_3 > 0$ e $0 < \varepsilon < 1$, seja a solução de (2.3) $w(x, t; \varepsilon) \in C^\infty\big([0, T]; \mathcal{S}\big)$ tal que $\|w(\cdot, 0; \varepsilon)\|_{H^1} \leq R_1$ e $\|w(\cdot, 0; \varepsilon)\|_{H^2} \leq R_3$. Então existe $R_4 > 0$ tal que*

$$\|w(\cdot, t; \varepsilon)\|_{H^2} \leq R_4, \quad \textit{para}\, t \in [0, T].$$

Demonstração. Partindo de (2.3) provamos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^2 w\right)^2 dx &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 w \partial_x^2 \left(w^2 \partial_x w \right) dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 w \partial_x^5 w dx}_{0} - - \, \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 w \partial_x^6 w dx \\
&= -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^4 w\right)^2 dx \; \underbrace{-2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x w\right)^3 \partial_x^2 w \, dx}_{I_1} \; \underbrace{-5\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w \partial_x w \left(\partial_x^2 w\right)^2 dx}_{I_2} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^2 w\right)^2 dx = -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^4 w\right)^2 dx + I_1 + I_2. \tag{2.38}$$

Estimativa para I_1:

Aplicando a desigualdade de Gagliardo Nirenberg (1.12), estimativas de energia em H^1 e as propriedades dos espaços L^p temos

$$\begin{aligned} I_1 \leq 2\left\|(\partial_x w)^3\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2} &= 2\left\|\partial_x w\right\|_{L^6}^3\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2} \\ &\leq 2C_1\left\|\partial_x w\right\|_{L^2}^2\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2} \\ &\leq C(R_2)\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Afirmação 2.3.2. *A seguinte igualdade é satisfeita*

$$I_2 = -\frac{5}{6}\lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2 w\,dx + \frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w^3(\partial_x w)^3 + \lambda(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\right)dx + I_\varepsilon, \tag{2.39}$$

onde

$$I_\varepsilon = \frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w^2(\partial_x^3 w)^2 + (\partial_x w)^3\partial_x^3 w + 4w\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w\right)dx.$$

Demonstração. Multiplicando (2.3) por $-\frac{5}{6}\lambda w^2\partial_x w$ temos

$$-\frac{5}{6}\lambda w^2\partial_x^2 w\left(\partial_t w + \lambda w^2\partial_x w + \partial_x^3 w + \varepsilon\partial_x^4 w\right) = 0. \tag{2.40}$$

Por outro lado, derivando (2.3) duas vezes e depois multiplicando por $-\frac{5}{18}\lambda w^3$ obtemos

$$-\frac{5}{6}\lambda\frac{w^3}{3}\partial_x^2\partial_t w - \frac{5}{6}\frac{w^3}{3}\partial_x^2\left(w^2\partial_x w\right) - \frac{5}{6}\lambda\frac{w^3}{3}\partial_x^5 w - \frac{5}{6}\lambda\varepsilon\frac{w^3}{3}\partial_x^6 w = 0. \tag{2.41}$$

Assim, ao somar (2.40) e (2.41) obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}\lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2 w\,dx - \underbrace{\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2\left[w^2\partial_x w\right]\,dx}_{=0} - \frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} w^4\partial_x^2 w\partial_x w\,dx \\ -\frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^5 w\,dx - \frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^2 w\partial_x^3 w\,dx + \overline{I}_\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\overline{I}_\varepsilon = -\frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^2 w\partial_x^4 w\,dx - \frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^6 w\,dx. \tag{2.42}$$

Usando integração por partes chegamos à

$$-\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} w^4\partial_x^2 w\partial_x w\,dx = \frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} w^3(\partial_x w)^3 dx, \tag{2.43}$$

também temos $-\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2\left(w^2\partial_x w\right) = 0$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^5 w\,dx &= \frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\,\partial_x^4 w\,dx\\
&= -\frac{5}{3}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w(\partial_x w)^2\partial_x^3 w\,dx - \frac{1}{6}I_2\\
&= \frac{5}{3}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\,dx - \frac{5}{6}I_2.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Por outro lado temos

$$
-\frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w\,dx = -\frac{1}{6}I_2.
$$

Somando (2.43) e (2.44) obtemos

$$
-\frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^5 w\,dx - \frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w\,dx = \frac{5}{3}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\,dx - I_2,
$$

logo

$$
-\frac{5}{6}\lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2 w\,dx + \frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(w^3(\partial_x w)^3 + \lambda(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\big)\,dx + \overline{I}_\varepsilon = I_2.
$$

Fazendo integração por partes em (2.42) temos

$$
-\frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^2 w\,\partial_x^4 w\,dx = \frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(2w\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w + w^2\big(\partial_x^3 w\big)^2\Big)\,dx.
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^6 w\,dx &= \frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\,\partial_x^5 w\,dx\\
&= -\frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^4 w\Big(2w(\partial_x w)^2 + w^2\partial_x^2 w\Big)dx\\
&= \frac{5}{6}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(2(\partial_x w)^3\partial_x^3 w + 6w\,\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w - w^2\partial_x^2 w\,\partial_x^4 w\Big)dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\overline{I}_\varepsilon = \frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(w^2\big(\partial_x^3 w\big)^2 + (\partial_x w)^3\partial_x^3 w + 4w\,\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w\Big)\,dx = I_\varepsilon.
$$

$\square$

Agora faremos algumas estimativas para os termos de (2.39). Usando (1.12) temos

$$
\|\partial_x w\|_{L^3} \le C\|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{5}{6}}\,\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{6}},
$$

$$
\|\partial_x w\|_{L^6} \le C\|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\,\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}},
$$

então

$$\frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w^3(\partial_x w)^3+\lambda(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\right)dx \le \frac{5}{6}\left\{\|w\|_\infty^3\|\partial_x w\|_{L^3}^3+\|(\partial_x w)^3\|_{L^2}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}\right\}$$
$$\le \frac{5}{6}CR_2^3\|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{5}{2}}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{6}\|\partial_x w\|_{L^6}^3\|\partial_x^2 w\|_{L^2}$$
$$\le \frac{5}{6}CR_2^3R_2^{\frac{5}{2}}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{6}R_2^2\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2$$
$$\le C_1+C_2\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2.$$

Afirmação 2.3.3. *A seguinte desigualdade é satisfeita*

$$I_\varepsilon \le \varepsilon\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2+C(R_2).$$

Demonstração. Fazendo integração por partes obtemos

$$\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\big(\partial_x^3 w\big)^2dx=-\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2 w\left(2w\partial_x w\,\partial_x^3 w+w^2\partial_x^4 w\right)dx,$$

$$\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^3\partial_x^3 w\,dx=-\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w\left(2\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w+(\partial_x w)^2\partial_x^4 w\right)dx,$$

então

$$I_\varepsilon=-\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^4 w\,dx-\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^2\partial_x^4 w\,dx,$$

assim

$$I_\varepsilon \le \frac{5}{3}\varepsilon\|w\|_\infty\|w\|_{L^2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}+\frac{5}{3}\varepsilon\big\|(\partial_x w)^2\big\|_{L^2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}. \tag{2.45}$$

Onde é fácil ver que $\big\|(\partial_x w)^2\big\|_{L^2}=\|\partial_x w\|_{L^4}^2$, e usando (1.12) temos

$$\|\partial_x w\|_{L^4}\le C\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^{\frac{5}{16}}\|w\|_{L^2}^{\frac{11}{16}}.$$

Seguindo de (2.45), aplicando o Lema (2.1) e (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &\le \frac{5}{3}\varepsilon R_2^2\|\partial_x^4 w\|_{L^2}+\frac{5}{3}\varepsilon C\|\partial_x^4 w\|_{L^2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^{\frac{5}{8}}\|w\|_{L^2}^{\frac{11}{8}} \\ &\le \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{3\varepsilon}{10}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2+\frac{5}{6\varepsilon}R_2^4\right)+\frac{5}{3}C\varepsilon\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^{\frac{13}{8}}R_2^{\frac{11}{8}} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2+C_1(R_2)+\frac{\varepsilon}{2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2+C_2(R_2) \\ &= \varepsilon\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2+C(R_2). \end{aligned}$$

□

Afirmação 2.3.4. *A seguinte desigualdade é satisfeita*

$$I_3(w,t) = -\frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3} \partial_x^2 w \, dx \leq C + \frac{1}{4}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. De fato, usando (1.12) obtemos

$$\begin{aligned} I_3(w,t) &\leq \frac{5}{18}\|w\|_{L^6}^3 \|\partial_x^2 w\|_{L^2} \\ &\leq C\|\partial_x w\|_{L^2} \|w\|_{L^2}^2 \|\partial_x^2 w\|_{L^2} \\ &\leq C\, R_2^3 \|\partial_x^2 w\|_{L^2} \leq C\left(\frac{1}{4C}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 + C\, R_2^6\right) \\ &= C + \frac{1}{4}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 \leq C_1 + C_2||\partial_x^2 w||_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} I_3(w,t)$$

então integrando em $(0,t)$ temos

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x^2 w(\cdot,0;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^t \|\partial_x^2 w(\cdot,s;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \, ds + +I_3(w,t) - I_3(w,0) + C_1 t,$$

assim, $\|\partial_x^2 w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^t \|\partial_x^2 w(\cdot,s;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \, ds + C(R_2,R_3,T)$. Portanto aplicando o Lema de Gronwall obtemos

$$\|\partial_x^2 w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq R_4 = R_4(R_3,T).$$

□

Lema 2.3. *Seja $T>0$ tal que para $0<\varepsilon<1$ fixado, $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ é solução de* (2.3)*. Então para cada inteiro $l \geq 2$ existe $C(l,T)>0$ satisfazendo*

$$\|\partial_x^l w(\cdot,t:\varepsilon)\|_{L^2} \leq C(l,T), \quad \textit{para } t\in[0,T].$$

Demonstração. Provaremos o Lema usando indução. O caso $l=2$ é satisfeito pelo Lema (2.2). Agora suponha a estimativa é satisfeita para $2 \leq l \leq r$, isto é,

$$||\partial_x^l w(\cdot,t;\varepsilon)||_{L^2} \leq C(l,T), \quad \text{para } 2\leq l \leq r. \tag{2.46}$$

Considere $l=r+1$, partindo de (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{r+1} w\|_{L^2}^2 &= -\varepsilon\|\partial_x^{r+3} w\|_{L^2}^2 - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^{r+1}\left[w^2\partial_x w\right]\partial_x^{r+1} w \, dx \\ &\leq -\varepsilon\|\partial_x^{r+3} w\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^{r+3} w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^{r-1}\left[w^2\partial_x w\right]\right)^2 dx, \end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\left\|\partial_x^{r-1}\left(w^2\partial_x w\right)\right\|_{L^2} &= \left\|\sum_{k=0}^{r-1} C_k \partial_x^{r-1-k}\left(w^2\right)\partial_x^{k+1} w\right\|_{L^2} \\
&= \left\|\sum_{k=0}^{r-1} C_k \left\{\sum_{j=0}^{r-1-k} C_{j,k}\partial_x^{r-1-k-j} w \partial_x^j w\right\}\partial_x^{k+1} w\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1-k} C_k C_{j,k} ||\partial_x^{r-1-k-j} w||_\infty ||\partial_x^j w||_\infty ||\partial_x^{k+1} w||_{L^2} \\
&\leq C\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1-k} ||\partial_x^{r-1-k-j} w||_{H^1} ||\partial_x^j w||_{H^1} ||\partial_x^{k+1} w||_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.46) concluímos a prova. □

Lema 2.4. *Sejam $T > 0$ tal que para cada $0 < \varepsilon < 1$ fixado $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ é solução de* (2.3)*.Então para cada inteiro $m > 0$ existe $C(m) > 0$ satisfazendo*

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^2(x,t;\varepsilon)dx \leq C(m), \quad \textit{para}\, t \in [0,T].
$$

Demonstração. Antes de provar o Lema, provaremos uma desigualdade que será importante na demostração.

Afirmação 2.3.5. *Sejam $l = 0,\ 1,\ 2$; $m \in \mathbb{N}$, e $n = 1,\ 2$. Então existe $C > 0$ e um inteiro positivo r tal que para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos*

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u(x)}{dx^n}\right)^2 dx \leq C\left\{\|u\|_{H^r}^2 + \|u\|_{H^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}u^2(x)dx\right\}. \tag{2.47}
$$

Demonstração. Aplicando (1.12) e considerando $a \in \mathbb{Z}$, $n = 1,\ 2$ e $r > 2$ inteiro temos a seguinte estimativa,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{d^n u}{dx^n}\right\|_{L^2(a,a+1)} &\leq C_r \|u\|_{L^2(a,a+1)}^{1-\frac{n}{r}} \left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(a,a+1)}^{\frac{n}{r}} \\
&\leq C_r \|u\|_{L^2(a,a+1)}^{1-\frac{n}{r}} \left(\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(a,a+1)}^{\frac{n}{r}} + \|u\|_{L^2(a,a+1)}^{\frac{n}{r}}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, no termo a esquerda em (2.47) é igual a

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx + \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right)\int_k^{k+1} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx.
$$

Usando para $x \in (k, k+1)$ com $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ as seguintes estimativas

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|k|}{|x|} \leq 2 \quad \text{e} \quad |k|^{2m-l} \leq 2^{2m-l} x^{2m}.$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l} \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx &\leq \|u\|_{H^2}^2 + C\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right) |k|^{2m-l} \int_k^{k+1} \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C &\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right) |k|^{2m-l} \left(\int_k^{k+1} u^2 dx\right)^{1-\frac{n}{r}} \left(\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^{\frac{n}{r}} + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^{\frac{n}{r}}\right)^2 \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C_r &\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right) 2^{2m-l} \left(\int_k^{k+1} x^{2m} u^2 dx\right)^{1-\frac{n}{r}} \left(\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^2 + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^2\right)^{\frac{n}{r}} \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C_r &\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right) \left\{\int_k^{k+1} x^{2m} u^2 dx + \left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^2 + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^2\right\} \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C_r &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{\int_k^{k+1} x^{2m} u^2 dx + \left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^2 + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^2\right\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l} \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx \leq C_r \left\{\|u\|_{H^r}^2 + \|u\|_{H^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} u^2 dx\right\}.$$

□

Partindo do fato que w é solução de (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^2 dx = &- \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^3 \partial_x w \, dx + 2m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} w \partial_x^2 w dx \\
&- m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} (\partial_x w)^2 dx - \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w \partial_x^4 w \, dx.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Agora faremos estimativas para os termos obtidos anteriormente. No primeiro termo temos

$$-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^3 \partial_x w \, dx \leq \|x^m w^2 \partial_x w\|_{L^2} \|x^m w\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\left(\|x^m w^2 \partial_x w\|_{L^2}^2 + \|x^m w\|_{L^2}^2\right),$$

também

$$\begin{aligned}
\|x^m w^2 \partial_x w\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^4 (\partial_x w)^2 dx \leq \|w\|_\infty^4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} (\partial_x w)^2 dx \\
&\leq C_1 \left\{\|w\|_{H^r}^2 + \|w\|_{H^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^2 dx\right\} \\
&\leq C_1 + C_2 \|x^m w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^3\partial_x w\,dx\leq C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.49}$$

Para o segundo termo temos

$$\begin{aligned}2m\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-1}w\partial_x^2w\,dx&\leq 2m\|x^{m-1}\partial_x^2w\|_{L^2}\|x^mw\|_{L^2}\\&\leq m\left(\|x^{m-1}\partial_x^2w\|_{L^2}^2+\|x^mw\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

onde

$$\|x^{m-1}\partial_x^2w\|_{L^2}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-2}\big(\partial_x^2w\big)^2dx\leq C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx,$$

assim,

$$2m\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-1}w\partial_x^2w\,dx\leq C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.50}$$

De (2.47) obtemos

$$-m\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-1}(\partial_xw)^2dx\leq C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.51}$$

Analogamente, fazendo duas vezes integração por partes e procedendo como em (2.49) e (2.50) obtemos

$$I_\varepsilon=-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w\partial_x^4w\,dx\leq C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.52}$$

Usando (2.49)-(2.52) em (2.48) temos para $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2\,dx\leq C_3+C_4\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx,$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2(x,t,\varepsilon)dx\leq 2C_4\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2(x,t,\varepsilon)dx+2C_3t+\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2(x,0;\varepsilon)dx.$$

Portanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2\,dx\leq C(m,T).$ $\square$

2.3.1 Solução da KdV Modificada em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Proposição 2.3. *Para cada $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $0 < \varepsilon < 1$. Então o problema* (2.3) *tem uma única solução global.*

Demonstração. De fato, seja $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Suponha existe $T^* > 0$ tal que a única solução $w(\cdot, t; \varepsilon) \in C\big([0, T]; \mathcal{S}\big)$ de (2.3), pode-se estender no semi-intervalo de tempo $[0, T^*)$ e não pode ser estendida numa vizinhamça à direita do ponto $t = T^*$.

Então, em virtude da continuidade acima indicada existe $\lim\limits_{t \to T^{*-}} u(x, t; \varepsilon) = u_1(x)$, entendido no sentido do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Assim, considerando o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^4 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x, T^*) = u_1(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Logo, temos solução local do sistema anterior num intervalo de tempo $[T^*, T^* + \delta)$, isto é uma contradição. Portanto, a solução pode ser estendida pata todo T^* positivo. □

Usando a Proposição 2.3 obteremos o seguinte resultado para o problema (2.2).

Proposição 2.4. *Seja $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então, existe solução global para o problema* (2.2)*.*

Demonstração. Em vista da Proposição 2.3 temos para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ arbitrário solução global de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^4 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos solução de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A unicidade desta solução pode ser provada como na Proposição (2.3). □

2.4 Solução do problema em H^2

Nesta seção resolveremos o problema de Cauchy para a equação Korteweg-de Vries modificada associado a um dado inicial no espaco H^2. Lembremos que a equação Korteweg-de Vries modificada que procuramos resolver é a seguinte.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

À seguir, faremos a demonstração do resultado principal deste Capítulo.

Demonstração. (Teorema 2.1) A prova deste Teorema sera feita em alguns passos.

2.4.1 Procura de um Candidato

Procuramos um candidato para a solução do problema no espaço L^2.

Seja $u_0 \in H^2$ e $T > 0$ arbitrários. Considere a sequência $(u_0^n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $u_0^n \to u_0$ em H^2 quando $n \to \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $u_n(\cdot, t) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ a solução de

$$
\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0^n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.53}
$$

Sabemos que $\|u_0^n\|_{H^1} < \infty$, já que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1$, então $\|u_0^n(\cdot)\|_{H^1} \leq \sup_n \|u_0^n(\cdot)\|_{H^1} < \infty$. Consideremos $R_2^n = R_2\left(\|u_n\|_{H^1}, T\right)$ proveniente do Lema 2.1. Observe que $(R_2^n)_{n\geq 1}$ é limitado, denotemos por

$$
\overline{R}_2 = \sup_n R_2(\|u_n\|_{H^1}, T) = \sup_n R_2^n > 0.
$$

Analogamente $\|u_0^n\|_{H^2} \leq R_3^n$, denotemos $\overline{R}_3 = \sup_n R_3^n$. Então, devido ao Lema 2.2 existe $\overline{R}_4 = R_4(\overline{R}_3) > 0$ tal que $\|u_n\|_{H^2} \leq \overline{R}_4$. Assim, para $t \in (0,T)$ temos

$$
\|u_n(\cdot,t)\|_{H^1} \leq \overline{R}_2 \qquad \text{e} \qquad \|u_n(\cdot,t)\|_{H^2} \leq \overline{R}_4. \tag{2.54}
$$

Portanto, temos a seguinte

Afirmação 2.4.1. *A sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em $C([0,T];L^2)$*

Demonstração. Para $0 < t \leq T$, partindo de (2.53) temos

$$
\partial_t u_n + \partial_x^3 u_n + \lambda u_n^2 \partial_x u_n = 0, \tag{2.55}
$$

$$
\partial_t u_m + \partial_x^3 u_m + \lambda u_m^2 \partial_x u_m = 0. \tag{2.56}
$$

Subtraindo (2.56) de (2.55), depois multiplicando por $u_n - u_m$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)\left[u_m^2 \partial_x u_n - u_m^2 \partial_x u_m\right] dx \\
&= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)\left[u_n^2\left(\partial_x u_n - \partial_x u_m\right) + \partial_x u_m\left(u_n^2 - u_m^2\right)\right] dx,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)\, u_n^2 \partial_x (u_n - u_m) dx &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u_n \partial_x u_n (u_n - u_m)^2 dx \\
&\leq \|u_n\|_\infty \|\partial_x u_n\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx \\
&\leq C(T) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx,
\end{aligned}
$$

também

$$
\begin{aligned}
-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 (u_n + u_m)\, \partial_x u_m \, dx &\leq \|u_n + u_m\|_\infty \|\partial_x u_m\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx \\
&\leq C(T) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx,
\end{aligned}
$$

então

$$
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx \leq C(T) \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx.
$$

Aplicando o Lema de Gronwall temos

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx \leq \|u_0^n - u_0^m\|_{L^2}^2 \, e^{2C(T)t},
$$

devido que $\|u_0^n - u_0^m\|_{L^2} \to 0$ quando $n, m \to \infty$, então fazendo $n, m \to \infty$ obtemos $\|u_n(\cdot, t) - u_m(\cdot, t)\|_{L^2} \to 0$, como queríamos provar. $\square$

Logo a sequência $\big(u_n(\cdot, t)\big)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em L^2, por tanto $\big(u_n(\cdot, t)\big)_{n\geq 1}$ converge no espaço $C\big([0, T]; L^2\big)$ para uma função $u(x, t)$.

A continuidade é satisfeita, pois se $t_k \to t_0$ em $[0, T]$, então

$$
\|u(\cdot, t_k) - u(\cdot, t_0)\|_{L^2} \leq \|u(\cdot, t_k) - u_n(\cdot, t_k)\|_{L^2} + \|u_n(\cdot, t_k) - u_n(\cdot, t_0)\|_{L^2} + \|u_n(\cdot, t_0) - u(\cdot, t_0)\|_{L^2}.
$$

2.4.2 Regularidade em H^2

Agora, devido a (2.54) temos a seguinte Afirmação.

Afirmação 2.4.2. *Para $t \in [0, T]$ temos:*

$$
u(\cdot, t) \in H^2(\mathbb{R}) \qquad e \qquad \|u(\cdot, t)\|_{H^2} \leq \overline{R}_4. \tag{2.57}
$$

Demonstração. De fato, tomando um arbitrário $t \in [0, T]$, devido a (2.54) e Teorema 1.2 a sequência $\big(u_n(\cdot, t)\big)_{n\geq 1}$ é fracamente compacta em H^2, já que H^2 é reflexivo. Logo contém uma subsequência convergindo fracamente (sem perda de generalidade podemos supor a mesma sequência).

Portanto, aplicando a proposição 1.4 temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^2} \leq \liminf_n \|u_n(\cdot,t)\|_{H^2} \leq \overline{R}_4.$$

Assim, (2.57) é provada. $\square$

Analogamente, provaremos que nosso candidato é regular em H^1.

Lema 2.5. *Para cada $T>0$, $u_n \to u$ quando $n\to\infty$ em $C\big((0,T);H^1\big)$.*

Demonstração. Seja $T>0$ arbitrário fixado, consideremos $t\in(0,T)$.

Note que já temos verificado $u_n(\cdot,t), u(\cdot,t)\in H^1$, logo

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u_n\|_{H^1} < \infty, \qquad \sup_{t\in(0,T)} \|u\|_{H^1} < \infty.$$

Por definição sabemos que

$$\|u_n-u\|_{H^1}^2 = \|u_n-u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_n - \partial_x u\|_{L^2}^2,$$

agora, usando Cauchy Schwarz, desigualdade triangular e à Afirmação anterior

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u_n - \partial_x u\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(u_n-u)\partial_x(u_n-u)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} (u_n-u)\partial_x^2(u_n-u)dx \\
&\leq \|u_n-u\|_{L^2}\|u_n-u\|_{H^2} \\
&\leq 2\overline{R}_4\|u_n-u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Assim, quando $n\to\infty$ temos $\|u_n-u\|_{H^1}\to 0$, além disso, como

$$\begin{aligned}
\|u_n-u\|_{H^1} &\leq \|u_n-u\|_{L^2}^2 + 2\overline{R_4}\|u_n-u\|_{L^2} \\
&\leq 4\overline{R}_4{}^2 + 2\overline{R}_4\overline{R}_2 < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\sup_{t\in(0,T)} \|u_n(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_{H^1} < \infty$. Para provar a continuidade considere uma sequência $t_k\to t_0$ em $[0,T]$ e basta usar a seguinte desigualdade.

$$\begin{aligned}
||u(\cdot,t_k)-u(\cdot,t_0)||_{H^1} \leq & ||u(\cdot,t_k)-u_n(\cdot,t_k)||_{H^1} + ||u_n(\cdot,t_k)-u_n(\cdot,t_0)||_{H^1} \\
& + ||u_n(\cdot,t_0)-u(\cdot,t_0)||_{H^1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.6. *Para cada $T > 0$, seja $t \in [0,T]$. Então $\|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^2} \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Devido aos argumentos acima, para cada $t \in \mathbb{R}^+$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } H^2 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Além disso, temos a partir de (2.38) e (2.39) tomando $\varepsilon = 0$

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 = R(u_n), \tag{2.58}$$

onde

$$R(u_n) = R_1(u_n) + R_2(u_n),$$

$$R_1(u_n) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{-\frac{\lambda}{3}(\partial_x u_n(x,s))^3 \partial_x^2 u_n(x,s) + \frac{5}{3}u_n^3(x,s)(\partial_x u_n(x,s))^3\right\} dxds,$$

$$R_2(u_n) = \frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{u_n^2(x,t)(\partial_x u_n(x,t))^2 - u_n^2(x,0)(\partial_x u_n(x,0))^2\right\}dx.$$

Queremos provar que $R(u_n)$ tende para $R(u)$ quando $n \to \infty$. Para $R_2(u_n)$ o passagem para o limite é válido em vista da seguinte desigualdade.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{u_n^2(\partial_x u_n)^2 - u^2(\partial_x u)^2\right\}dx &= -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{u_n^3 \partial_x^2 u_n - u^3 \partial_x^2 u\right\}dx \\
&= C\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{u_n^3\left(\partial_x^2 u_n - \partial_x^2 u\right) + \partial_x^2 u\left(u_n^3 - u^3\right)\right\}dx \\
&\le C_1\|u_n - u\|_{H^1} + C_2\|u_n - u\|_{H^1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{u_n^2(x,0)(\partial_x u_n(x,0))^2 - u^2(x,0)(\partial_x u(x,0))^2\right\}dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para os termos de $R_1(u_n)$ usando

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{(\partial_x u_n(x,s))^3 \partial_x^2 u_n(x,s) - (\partial_x u(x,s))^3 \partial_x^2 u(x,s)\right\}dx\,ds \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\partial_x^2 u_n\left[(\partial_x u_n)^3 - (\partial_x u)^3\right] + (\partial_x u)^3\left(\partial_x^2 u_n - \partial_x^2 u\right)\right\}dx\,ds \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\partial_x^2 u_n\left[(\partial_x u_n)^3 - (\partial_x u)^3\right] - 3(\partial_x u)^2 \partial_x^2 u\left(\partial_x u_n - \partial_x u\right)\right\}dx\,ds \\
&\le \int_0^t \left\{C_1\|\partial_x^2 u_n(\cdot,s)\|_{L^2}||u_n - u||_{H^1} + C_2\|u(\cdot,s)\|_{H^2}^3\|u_n - u\|_{H^1}\right\}ds \\
&\le C\sup_{s\in(0,t)}\|u_n - u\|_{H^1} t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Analogamente para o outro termo de $R_1(u_n)$, concluímos que $R(u_n) \to R(u)$ quando $n \to \infty$.

Lembrando que $u_0^n \to u_0$ em H^2 quando $n \to \infty$, como

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 = R(u_n),$$

então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|\partial_x^2 u_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + \liminf_{n\to\infty} R(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Agora, observemos que as considerações acima continuam válidas no seguinte problema, fixando t

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x^3 w + \lambda w^2 \partial_x w = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ w(x,t) = u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consideremos uma sequência arbitraria $(w_0^n)_{n\ge 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tal que $w_0^n(\cdot) \to u(\cdot,t)$ em H^2. Então denotemos por $w_n(\cdot,s)$ a solução de

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x^3 w + \lambda w^2 \partial_x w = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ e } \lambda = \pm 1, \\ w(x,t) = w_0^n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Onde $w_n(\cdot,s) \in C^\infty\big((0,T);\mathcal{S}\big)$, e observe que $w_n(\cdot,t) = w_0^n(\cdot)$. Como antes $w_n(\cdot,s) \to u(\cdot,s)$ em $C\big((0,T);H^1\big)$, além disso, para $s \in \mathbb{R}$ fixado, $w_n(\cdot,s) \rightharpoonup u(\cdot,s)$ em $H^2(\mathbb{R})$.

Dado que $w_n(\cdot,t) = w_0^n(\cdot) \to u(\cdot,t)$ em $H^2(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 &\le \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|\partial_x^2 w_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|\partial_x^2 w_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - \liminf_{n\to\infty} R(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - R(u). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Agora, de (2.59) e (2.60) concluímos que

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u). \tag{2.61}$$

Tomando limite em (2.58)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2\right) &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u) \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, temos $u_n(\cdot,t) \rightharpoonup u(\cdot,t)$ em H^2 e $\|u_n(\cdot,t)\|_{H^2} \to \|u(\cdot,t)\|_{H^2}$, portanto $u_n(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$ em H^2, como queríamos provar. □

2.4.3 Continuidade do candidato em H^2

Lema 2.7. *Para cada $T > 0$, $u \in C\big((0,T); H^2\big)$.*

Demonstração. De (2.61) temos

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u).$$

Afirmação 2.4.3. *$\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}$ é contínua como função de t.*

Demonstração. Observe que basta provar $R(u(\cdot,t))$ é contínua como função de t. Lembrando que $R(u) = R_1(u) + R_2(u)$, onde

$$R_1\big(u(\cdot,t)\big) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{-\frac{\lambda}{3}(\partial_x u(x,s))^3 \partial_x^2 u(x,s) + \frac{5}{3}u^3(x,s)(\partial_x u(x,s))^3\right\} dxds,$$

$$R_2\big(u(\cdot,t)\big) = \frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{u^2(x,t)(\partial_x u(x,t))^2 - u^2(x,0)(\partial_x u(x,0))^2\right\} dx.$$

Para $R_1(\cdot,t)$ considere $t_1, t_2 \in [-T,T]$

$$\begin{aligned}
R_1\big(u(\cdot,t_1)\big) - R_1\big(u\cdot,t_2)\big) &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{\lambda}{3}(\partial_x u)^3 \partial_x^2 u + \frac{5}{3}u^3(\partial_x u)^3\right\} dx\, ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\{C_1\|\partial_x u\|_\infty^2 \|\partial_x u\|_{L^2}\|\partial_x^2 u\|_{L^2} + C_2\|u\|_\infty^3 \|\partial_x u\|_\infty \|\partial_x u\|_{L^2}^2\right\} ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\{C_1\|u\|_{H^2}^4 + C_2\|u\|_{H^2}^6\right\} ds \\
&\leq C|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Assim, $R_1\big(u(\cdot,t)\big)$ é continua como função de t.

Para provar a continuidade de $R_2\big(u(\cdot,t)\big)$, consideremos uma sequência $(t_k)_{k\geq 1}$ contida em

$[0,T]$ tal que $t_k \to t_0$ quando $k \to \infty$, logo

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ u^2(x,t_k)(\partial_x u(x,t_k))^2 - u^2(x,t_0)(\partial_x u(x,t_0))^2 \Big\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ u^2(x,t_k)\left[(\partial_x u(x,t_k))^2 - (\partial_x u(x,t_0))^2 \right] \Big\} dx \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u(x,t_0))^2 \left[u^2(x,t_k) - u^2(x,t_0) \right] \Big\} dx \\
&\leq \|u\|_\infty^2 \|\partial_x u(\cdot,t_k) - \partial_x u(\cdot,t_0)\|_{L^2} \|\partial_x u(\cdot,t_k) + \partial_x u(\cdot,t_0)\|_{L^2} + \\
&+ \|u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)\|_{H^1} \|u(\cdot,t_k) + u(\cdot,t_0)\|_{H^1} \|\partial_x u(\cdot,t_0)\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_1 \|u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)\|_{H^1} + C_2 \|u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Dado que, $u(\cdot,t) \in C\big((0,T);H^1\big)$, o último termo na desigualdade anterior tende a zero, quando $k \to \infty$. Isto prova nossa afirmação. $\square$

Logo, $\|u(\cdot,t)\|_{H^2}$ é continua como função de t, para cada $t \in [0,T]$.

Tomando um arbitrário $t_0 \in [0,T]$ e uma sequência $(t_n)_{n\geq 1} \subset [0,T]$ tal que $t_n \to t_0$ quando $n \to \infty$. Então devido aos fatos anteriores temos $u(\cdot,t_n) \to u(\cdot,t_0)$ em H^1.

Além disso, como $\|u(\cdot,t_n)\|_{H^2} \leq \overline{R}_4$ existe uma subsequência fracamente convergente (sem perdida de generalidade podemos tomar a mesma sequência). Mas, convergência forte implica convergência fraca, então $u(\cdot,t_n) \rightharpoonup u(\cdot,t_0)$ em H^1, logo, $u(\cdot,t_n) \rightharpoonup u(\cdot,t_0)$ em H^2. Devido a continuidade de $||u(\cdot,t)||_{H^2}$ como função de t, temos

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\cdot,t_n)\|_{H^2} = \|u(\cdot,t_0)\|_{H^2},$$

então, $u(\cdot,t_n) \to u(\cdot,t_0)$ em H^2, portanto

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\cdot,t_n) - u(\cdot,t_0)\|_{H^2} = 0.$$

$\square$

2.4.4 Existência da solução do problema

Lema 2.8. *Para cada $T > 0$, $u_n(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$ quando $n \to \infty$ em $C\big([0,T];H^2\big)$.*

Demonstração. Suponha a afirmação não é válida, então existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $(t_n)_{n\geq 1} \subset [0,T]$ tais que

$$\|u_n(\cdot,t_n) - u(\cdot,t_n)\|_{H^2} \geq \epsilon. \tag{2.62}$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $(t_{n_k})_{k\geq 1} \subset (t_n)_{n\geq 1}$ e $t_0 \in [0,T]$ tal que $t_{n_k} \to t_0$ quando $k \to \infty$.

Mas, pelo lema anterior, $u(\cdot, t_{n_k}) \to u(\cdot, t_0) \quad \text{em } H^2$. Analogamente ao Lema (2.6) pode-se provar que

$$u_{n_k}(\cdot, t_{n_k}) \to u(\cdot, t_0) \quad \text{em } H^2,$$

logo, temos

$$\begin{aligned} \|u_{n_k}(\cdot, t_{n_k}) - u(\cdot, t_{n_k})\|_{H^2} &\leq \|u_{n_k}(\cdot, t_{n_k}) - u(\cdot, t_0)\|_{H^2} + \|u(\cdot, t_{n_k}) - u(\cdot, t_0)\|_{H^2} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Isto é uma contradição com (2.62). □

Vejamos a seguir que u é de fato a solução do problema (3.2). Com efeito, dado que u_n são regulares então

$$\partial_t u_n(\cdot, t) = F\big(u_n(\cdot, t)\big) = -\lambda u_n^2(\cdot, t)\partial_x u_n(\cdot, t) - \partial_x^3 u_n(\cdot, t) \tag{2.63}$$

fazem sentido no espaço H^{-1}, para cada $t \in [0,T]$, de onde concluímos que

$$u_n(\cdot, t+h) - u_n(\cdot, t) = \int_t^{t+h} F(u_n(\cdot, s))ds.$$

Usando que $u_n \longrightarrow u$ em H^2 e o Teorema da convergência dominada obtemos a igualdade

$$u(\cdot, t+h) - u(\cdot, t) = \int_t^{t+h} F(u(\cdot, s))ds,$$

válida em H^{-1}, de onde podemos concluir que $u(\cdot, t) \in C^1\big([0,T]; H^{-1}\big)$ e $\partial_t u_n \to \partial_t u$ em H^{-1}.

Finalmente tomando limite no espaço H^{-1} em ambos lados de (2.63) concluímos a prova.

2.4.5 Unicidade da solução do problema

Consideremos $u_1(\cdot, t), u_2(\cdot, t)$ duas soluções generalizadas de (2.2) definidas no intervalo do tempo $[0,T]$, onde $T > 0$. Observe que para $t \in [0,T]$ e $w = u_1 - u_2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w\big[u_1^2 \partial_x u_1 - u_2^2 \partial_x u_2\big]dx \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w\big[(u_1^2 - u_2^2)\partial_x u_1 + u_2^2 \partial_x w\big]dx \\ &\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall obtemos $u_1 = u_2$.

2.4.6 Dependência contínua

Seja $u_0 \in H^2$ e uma sequência $(u_0^n)_{n\geq 1} \subset H^2$ tal que $u_0^n \to u_0$ em H^2 quando $n \to \infty$. Sejam $u(x,t)$ e $u_n(x,t)$ as correspondentes soluções generalizadas de (2.2) para dados iniciais $u_0(x)$ e $u_0^n(x)$ respectivamente.

Precisamos provar que para cada $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^2} = 0. \tag{2.64}$$

Tomemos $T > 0$ arbitrário, como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é denso em H^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{u}_0^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que para a correspondente solução $\tilde{u}_n(\cdot,t) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ de (2.2) temos

$$\max_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_n(\cdot,t) - u_n(\cdot,t)\|_{H^2} < \frac{1}{n}, \tag{2.65}$$

observe que $\tilde{u}_0^n \to u_0$ em H^2 quando $n \to \infty$. Donde pelo lema 2.7 temos

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t) - \tilde{u}_n(\cdot,t)\|_{H^2} = 0. \tag{2.66}$$

Aplicando desigualdade triangular e usando (2.65) e (2.66) obtemos (2.64). $\square$

Capítulo 3

Estabilidade de Ondas Tipo Kink para mKdV

3.1 Ondas Viajantes

Nesta seção, consideramos o principal problema de nosso estudo, soluções tipo ondas viajantes. Uma representação matemática fundamental de um movimento de onda num meio unidimensional é dado por funções de duas variáveis $u(x,t)$ da seguinte forma

$$u(x,t) = \phi(x - ct), \tag{3.1}$$

onde ϕ é uma função de uma variável e $c \neq 0$ uma constante, a motivação de tal função começa com o gráfico do perfil inicial $u(x,0) = \phi(x)$. Se $c > 0$, então o perfil de $u(x,t) = \phi(x - ct)$ no tempo t grande é exatamente a translação do perfil inicial por uma cota ct na direção positiva x. Tal função representa o movimento de perturbação com velocidade constante c. Similarmente, $u(x,t) = \phi(x - ct)$ com $c < 0$ representa o movimento de perturbação na direção negativa x com velocidade $|c|$.

Ondas representadas por funções da forma (3.1) são chamadas ondas viajantes. Duas características básicas para as ondas viajantes são as formas de perfil subjacente definida por ϕ e a velocidade $|c|$ em que o perfil é transladado ao longo do eixo x.

Uma solução tipo onda viajante para uma equação diferencial parcial é a solução suave da equação diferencial da forma de uma onda viajante $u(x,t) = \phi(x - ct) = \phi(\xi)$ onde c é a velocidade de onda e ξ é a variável característica. Para encontrar soluções tipo onda viajante geralmente começamos assumindo a forma (3.1), então determinamos a função ϕ e constantes c produzindo uma solução para a equação diferencial. A determinação de ϕ e c, como será visto, depende essencialmente das condições de fronteira dadas em ϕ. Em geral,

ϕ será uma função dependendo de c e denotaremos tal dependência escrevendo ϕ_c.

Definição 3.1 (Onda tipo Kink)**.** *Dizemos que uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução onda viajante tipo Kink se satisfaz as seguintes condições de contorno,*

$$k_l = \lim_{\xi \to -\infty} \phi(\xi) \quad e \quad k_r = \lim_{\xi \to +\infty} \phi(\xi)$$

existem, e $k_l > k_r$ ou $k_l < k_r$. Às vezes a função ϕ pode satisfazer condições assintóticas adicionais:

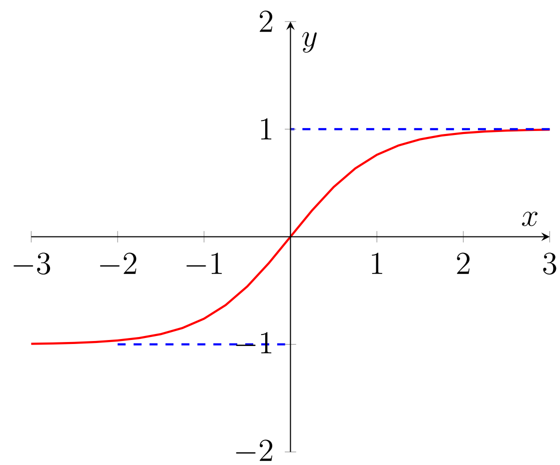
$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \phi^{(j)}(\xi) = 0, \ j \geq 1.$$

3.2 Existência de Soluções Tipo Kink para mKdV

Consideraremos ondas solitárias para a equação Korteweg-de Vries Modificada (mKdV).

$$\partial_t u + \lambda u^2 \partial_x u + \partial_x^3 u = 0, \ \lambda = \pm 1. \tag{3.2}$$

Dediquemo-nos agora a encontrar uma solucção de onda tipo "Kink" para a equação mKdV (3.2). A solução tipo Kink que procuramos é $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ tal que $\varphi(\pm\infty) = \pm a$ e $\varphi'(\xi)$, $\varphi''(\xi)$ tendem a zero quando $|\xi|$ tende ao infinito. Por exemplo a $\tanh(x)$, ilustrada na figura abaixo, é uma onda de tal tipo que aparece usualmente nos modelos.



Observamos que:

i) $\partial_t u = \dfrac{d}{dt}\varphi(x - ct) = -c\varphi'(x - ct)$,

ii) $\partial_x u = \dfrac{d}{dx}\varphi(x - ct) = \varphi'(x - ct)$,

iii) $\partial_x^3 u = \dfrac{d^3}{dx^3}\varphi(x-ct) = \varphi'''(x-ct)$.

Agora, fazendo a mudamça de variável $\xi = x - ct$ e introduzindo esta forma de onda tipo Kink na equação mKdV, ficamos com uma equação diferencial ordinária para $\varphi(\xi)$ da seguinte forma:

$$-c\varphi'(\xi) + \lambda\varphi^2(\xi)\varphi'(\xi) + \varphi'''(\xi) = 0, \tag{3.3}$$

então

$$\frac{d}{d\xi}\left(-c\varphi(\xi) + \lambda\frac{\varphi^3(\xi)}{3} + \varphi''(\xi)\right) = 0,$$

assim

$$-c\varphi(\xi) + \frac{\lambda}{3}\varphi^3(\xi) + \varphi''(\xi) = A. \tag{3.4}$$

Onde A é uma constante. Fazendo os limites quando $\xi \to \pm\infty$, dado que $\varphi(\pm\infty) = \pm a$, obtemos que $A = 0$. Donde $a = 0$ ou $a^2 = 3\lambda c$. Trabalharemos com o caso $a^2 = 3\lambda c$, então temos a seguinte equação

$$\varphi''(\xi) = -\frac{\lambda}{3}\varphi^3(\xi) + c\varphi(\xi). \tag{3.5}$$

Multiplicando (3.5) por $\varphi'(\xi)$ e integrando el resultado em $(-\infty, \xi)$ temos

$$\int_{-\infty}^{\xi}\varphi'(s)\varphi''(s)ds = -\frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{\xi}\varphi^3(s)\varphi'(s)ds + c\int_{-\infty}^{\xi}\varphi(s)\varphi'(s)ds,$$

usando o fato que $a^2 = 3\lambda c$ obtemos

$$\begin{aligned}
(\varphi'(\xi))^2 &= -\frac{\lambda}{6}\varphi^4(\xi) + c\varphi^2(\xi) - \frac{3\lambda}{2}c^2 \\
&= -\frac{\lambda}{6}\big(\varphi^4(\xi) - 6\lambda c\varphi^2(\xi) + 9c^2\big) \\
&= -\frac{\lambda}{6}\big(\varphi^2(\xi) - 3\lambda c\big)^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda = -1$ e então $c < 0$. Usando isto na igualdade acima temos

$$\varphi'(\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\varphi^2(\xi) + 3c\right).$$

Depois, integrando e para simplificar os cálculos façamos a substituição $\varphi = \sqrt{3|c|}\tanh(z)$. Assim, a equação acima assume a seguinte forma,

$$\int \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi^2(\xi) - 3|c|}d\xi = \int \pm\frac{1}{\sqrt{6}}d\xi,$$

logo

$$-\frac{1}{\sqrt{3|c|}}\,\text{arctan}h\left(\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{3|c|}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\xi+x_0.$$

Por tanto, temos que

$$\varphi(\xi)=\sqrt{3|c|}\tanh\left(\mp\sqrt{\frac{|c|}{2}}\xi+x_0\right). \tag{3.6}$$

Visto que x_0 é a constante de integração, para simplificar nossa solução e já que a equação é invariante por translação admitiremos $x_0=0$, e ficamos com a equação:

$$\varphi(\xi)=\sqrt{3|c|}\tanh\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}\xi\right).$$

Assim, a solução da equação mKdV (3.2) de onda tipo Kink é

$$\boxed{u_c(x,t)=\varphi(x-ct)=\sqrt{3|c|}\tanh\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}(x-ct)\right),\ c<0.} \tag{3.7}$$

3.3 Estabilidade de Ondas do Tipo Kink para mKdV

Na literatura matemática dedicada a estabilidade de ondas solitárias, o artigo pioneiro, devido a T. B. Benjamin (ver [2]) deu origem a outras investigações.

Nesta seção provaremos a estabilidade no sentido de Liapunov para as ondas obtidas em (3.7) com relação à métrica

$$\rho_q^2(u,v)=\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left\{||u'(\cdot)-v'(\cdot-\tau)||_{L^2}^2+q||u(\cdot)-v(\cdot-\tau)||_{L^2}^2\right\}. \tag{3.8}$$

Isto significa geometricamente que para cada $t\geq 0$ existe uma translação $\tau=\tau(t)$ tal que os "gráficos" de $u(x,t)$ e $\varphi(x-ct-\tau)$ estão bem próximas.

À seguir, daremos a definição de estabilidade segundo Liapunov, também chamado estabilidade da forma.

Consideremos dois espaços de Banach $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de funções reais definidas em $\mathbb{R}$ tais que $\mathcal{Y}\hookrightarrow\mathcal{X}$ $(||u||_{\mathcal{X}}\leq||u||_{\mathcal{Y}},$ para todo $u\in\mathcal{Y})$, sejam d_1, d_2 pseudoédricas em $\mathcal{X}$, então temos a seguinte definição geral de estabilidade com relação a equação mKdV.

Definição 3.2 (Estabilidade Segundo Liapunov)**.** *Seja $\phi\in\mathcal{X}$ a solução tipo onda viajante para a equação mKdV* (3.2)*. Dizemos que ϕ é estável com relação ao fluxo de* (3.2) *e a d_1, d_2, se para cada $\epsilon>0$ existe $\delta=\delta(\epsilon)>0$ tal que se $u_0\in\mathcal{Y}$ e $d_1(u_0,\phi)<\delta$, então a solução $u(\cdot,t)$ para* (3.2) *com $u(\cdot,0)=u_0$ existe para cada t real e temos que $d_2(u(\cdot,t),\phi(\cdot))<\epsilon$ para cada $t\in\mathbb{R}$.*

Considere a equação mKdV (3.2). Na seção anterior a existência da solução do tipo Kink $\varphi(x-ct)$ foi garantida para $\lambda=-1$, $c<0$. Queremos provar a estabilidade segundo Liapunov de $\varphi(x-ct)$. Para este objetivo precisamos um resultado apropriado de existência e unicidade de solução $u(x,t)$ do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u - u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.9}$$

com condições $u(\pm\infty, t) = \pm a$. O resultado é o seguinte.

Teorema 3.1. *Seja u_0 tal que $u_0(\cdot)-\varphi(\cdot) \in H^2$. Então, existe um intervalo $[0,a)$ e uma única solução $u(x,t)$ de (3.9) tal que $u(\cdot,t)-\varphi(\cdot - ct) \in C\big([0,a);H^2\big) \cap C^1\big([0,a);H^{-1}\big)$. Para cada uma destas soluções a quantidade*

$$I(u(\cdot,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x u(x,t))^2 + \frac{1}{12}\big(u^2(x,t)-a^2\big)^2 \right\} dx, \tag{3.10}$$

é uma lei de conservação. Além disso, se a solução $u(x,t)$ existe num intervalo $[0,a)$, $a>0$ e existe $C>0$ tal que $||u(\cdot,t)-\varphi(\cdot - ct)||_{H^1} < C$ para cada $t \in [0,a)$, então, existe $\delta>0$ tal que esta solução pode se estender no intervalo $[0, a+\delta]$.

Demonstração. Primeiro observamos que existência e unicidade das soluções em $C\big([0,a);H^2\big)$ podem ser obtidos usando a mesma técnica que na prova do Teorema 2.1.

Vamos agora provar que I é uma lei de conservação. Derivando (3.10) em relação a t temos $I'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \partial_{xt} u \, dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u^2-a^2\right) u \partial_t u \, dx$. Logo,

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \left[-\partial_x^4 u + \partial_x \left(u^2 \partial_x u\right)\right] dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u \left(u^2-a^2\right)\left(u^2\partial_x u - \partial_x^3 u\right) dx \\ &= -\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \partial_x^3 u dx}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \partial_x \left(u^2 \partial_x u\right) dx + \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 \left(u^2 \partial_x u\right) dx}_{=0} \\ &\quad - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 \partial_x^3 u dx - \frac{a^2}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 \partial_x u dx}_{=0} + \frac{a^2}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u \partial_x^3 u dx}_{=0} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 u \left(u^2 \partial_x u\right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \partial_x u \partial_x^2 u dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$I[u(x,t)] = I[u(x,0)].$$

$\square$

Em nosso caso usaremos $\mathcal{Y} = H^2$, $\mathcal{X} = H^1$, e também $d_1 = d_2 = \rho_q$, definido em (3.8). Assim temos a seguinte definição de estabilidade.

Definição 3.3. *Seja $\varphi(x-ct)$, $c<0$ a solução tipo Kink de* (3.2)*, $\varphi \in H^1$. Então chamamos φ de estável se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u_0 \in H^2$ e $\rho(u_0, \varphi) < \delta$ então a correspondente solução $u(x,t) \in H^2$ de* (3.2) *pode ser estendida na reta e temos $\rho(u(\cdot,t), \varphi(\cdot,t)) < \epsilon$ para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Observação 3.1. *Seja $\varphi(x-ct)$ a solução do tipo Kink da mKdV* (3.2)*. Para cada $u(\cdot)$ tal que $u(\cdot) - \varphi(\cdot) \in H^1$ denotemos*

(3.11)
$$\rho_q^2\big(u(\cdot,t), \varphi(\cdot - ct)\big) = \inf_{\tau\in\mathbb{R}} \left\{ \|\partial_x u(\cdot,t) - \varphi'(\cdot - ct - \tau)\|_{L^2}^2 + q\|u(\cdot,t) - \varphi(\cdot - ct - \tau)\|_{L^2}^2 \right\},$$

onde $q = 4|c| + 1$, é escolhido convenientemente.

No seguinte teorema enunciamos e provamos o resultado de estabilidade de Kink para mKdV.

Teorema 3.2. *A onda do tipo Kink φ de* (3.2) *é estável com relação à distância ρ_q.*

Demonstração. Seja $u(x,t) = \varphi(x - ct - \tau) + h(x,t)$, onde $\tau = \tau(t) \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma a minimizar $\rho_q(u, \varphi)$.

Definimos $\Delta I = I(u(\cdot,t)) - I(\varphi(\cdot - ct - \tau))$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{1}{12}\big(u^2 - a^2\big)^2 \right\} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}(\varphi')^2 + \frac{1}{12}\big(\varphi^2 - a^2\big)^2 \right\} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\partial_x u)^2 - (\varphi')^2 \right] dx + \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u^2 - \varphi^2\right)\left(u^2 + \varphi^2 - 2a^2\right) dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x h\,(\partial_x h + 2\varphi')\, dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h\,(h + 2\varphi)\left(h^2 + 2h\varphi + 2\varphi^2 - 2a^2\right) dx}_{I_2}.
\end{aligned}$$

Para I_1 usando (3.5) temos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x h)^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi'' dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h\partial_x^2 h dx - \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{\varphi^3}{3} + c\varphi\right) dx,
\end{aligned}$$

analogamente para I_2

$$\begin{aligned}
I_2 =& \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^4 dx + \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\varphi dx + \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2\varphi^2 dx - \frac{a^2}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx \\
&+ \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\varphi dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2\varphi^2 dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi^3 dx - \frac{a^2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi dx \\
=& \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^4 dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2\varphi^2 dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi^3 dx \\
&+ \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx + c\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\Delta I =& -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h\partial_x^2 h dx + \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 h^2 dx + \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^4 dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\varphi dx \\
=& \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h\left(-\partial_x^2 h + ch + \varphi^2 h\right) dx + \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\left(h + 4\varphi\right) dx.
\end{aligned}$$

Seja

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + c + \varphi^2, \tag{3.12}$$

assim, temos

$$\Delta I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} hLh dx + \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\left(h + 4\varphi\right) dx. \tag{3.13}$$

Afirmação 3.3.1. *A seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\Delta I \leq C\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^2 + \beta\left(\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^2\right), \tag{3.14}$$

onde $\lim_{s\to 0^+} \frac{\beta(s)}{s} = 0$.

Demonstração. De (3.12) e usando (3.10) em $\Delta I(t)$ temos

$$\begin{aligned}
\Delta I(t) =& \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x h)^2 dx + \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 h^2 dx + +\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^4 dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\varphi dx \\
\leq& \frac{1}{2}\|\partial_x h\|_{L^2}^2 + \frac{|c|}{2}\|h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\infty}^2\|h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{12}\|h\|_{L^4}^2 + \frac{1}{3}\|\varphi\|_{\infty}\|h\|_{L^3}^2 \\
\leq& C_1\|h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{12}\|h\|_{L^2}^3\|\partial_x h\|_{L^2} + \frac{C_2}{3}\|h\|_{L^2}^{\frac{5}{2}}\|\partial_x h\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
\leq& C_0\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^2 + C_1\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^4 + C_2\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^3.
\end{aligned}$$

Assim, $\Delta I(t) \leq C_0\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^2 + \beta\big(\|h(\cdot,t)\|_{H^1}^2\big)$, onde

$$\beta\big(\|h\|_{H^1}^2\big) = C_1\|h\|_{H^1}^4 + C_2\|h\|_{H^1}^3, \quad \lim_{\|h\|_{H^1}\to 0^+} \frac{\beta\big(\|h\|_{H^1}^2\big)}{\|h\|_{H^1}^2} = 0.$$

□

Afirmação 3.3.2. *A seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\Delta I \geq C\rho_q^2(u,\phi) - \alpha\left(\rho_q^2(u,\phi)\right), \tag{3.15}$$

onde $\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{\alpha(s)}{s} = 0.$

Demonstração. Lembrando que temos de (3.12) um operador $L : H^2 \to L^2$, definido por

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + c + \varphi^2,$$

onde $\varphi(x) = \sqrt{3|c|}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{|c|}{2}}x\right)$. Observe que, devido a (3.3) com $\lambda = -1$ temos

$$L\varphi' = -\varphi''' + c\varphi' + \varphi^2\varphi' = 0 = 0\,\varphi'.$$

Além disso, $\varphi'(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}|c|sech^2\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}x\right) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Portanto, $\varphi' > 0$ é autofunção associada ao autovalor $\lambda_1 = 0$. Chamemos

$$\begin{aligned} H_0 :\ H^2 &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto -\frac{d^2 f}{dx^2}. \end{aligned}$$

Sabemos que o espectro de H_0 é $[0, +\infty)$ (exemplo (1.3)). Agora, escrevemos o operador L de uma forma conveniente:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{d^2}{dx^2} + c + \varphi^2 \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} - |c| + 3|c|\tanh^2\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}x\right) \\ &= \underbrace{-\frac{d^2}{dx^2} + 2|c|}_{L_1}\ \underbrace{-3|c|sech^2\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}x\right)}_{L_2}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\sigma_{ess}(L_1) = \big[|2c|, +\infty\big)$. Além disso, o operador de multiplicação

$$\begin{aligned} L_2 :\ H^2 &\longrightarrow L^2 \\ f(\cdot) &\longmapsto -3|c|sech^2\left(\sqrt{\frac{|c|}{2}}\,\cdot\right) f(\cdot). \end{aligned}$$

é compacto, logo pelo Teorema 1.12 obtemos que $\sigma_{ess}(L) = \sigma_{ess}(L_1 + L_2)) = \big[2|c|, +\infty\big)$.

Por outro lado, o operador L não tem autovalores negativos. De fato, se existir $\lambda_0 < 0 = \lambda_1 < 2|c|$ autovalor associado a uma função f_0; considerando η_0 e η_1 o número de zeros de

f_0 e φ', respectivamente, temos que $\eta_1 = 0$ (pois $\varphi'(x) > 0$), mas pelo Teorema 1.8 teríamos que $\eta_0 < 0$, o que é impossível. Portanto, L não tem autovalores negativos (ver [1]).

Seja λ_2 o menor autovalor positivo, caso ele exista, então definimos $b := \min\{\lambda_2, 2|c|\}$. Agora, seja $h = \mu\varphi' + g$, onde $\langle \varphi', g\rangle = 0$, então usando esta mudança de variáveis vale a seguinte afirmação.

Afirmação 3.3.3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx \geq b\|g\|_{L^2}^2. \tag{3.16}$$

Demonstração. Usando $h = \mu\varphi' + g$ temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu\varphi' + g)\, L\, (\mu\varphi' + g)\, dx \\ &= \mu \underbrace{\langle \varphi', g\rangle}_{=0} + \langle g, Lg\rangle \geq b\|g\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

o que decorre das propriedades espectrais do operador. □

Afirmação 3.3.4. *Existe $q = q(c)$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[q - c - \varphi^2\right] \varphi' hdx = 0. \tag{3.17}$$

Demonstração. De fato, por definição em (3.11), o mínimo é atingido em $\tau(t)$, logo

$$\rho_q^2(u, \varphi) = \|\partial_x u(\cdot, t) - \varphi'(\cdot - ct - \tau)\|_{L^2}^2 + q\|u(\cdot, t) - \varphi(\cdot - ct - \tau)\|_{L^2}^2, \tag{3.18}$$

então

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{d\tau}\left[\rho_q^2(u, \varphi)\right] &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u - \varphi')\, \varphi'' dx + 2q\int_{-\infty}^{+\infty} (u - \varphi)\, \varphi' dx \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x h \varphi'' dx + 2q\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi' dx \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x h \left(c\varphi + \frac{\varphi^3}{3}\right) dx + 2q\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi' dx \\ &= -2\int_{-\infty}^{+\infty} h\left(c + \varphi^2\right)\varphi' dx + 2q\int_{-\infty}^{+\infty} h\varphi' dx,\end{aligned}$$

logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[q - c - \varphi^2\right] \varphi' hdx = 0.$$

□

Afirmação 3.3.5. *Fazendo a substituição* $h = \mu\varphi' + g$ *em* (3.17) *obtemos*

$$\mu \leq C_1 \|g\|_{L^2}. \tag{3.19}$$

Demonstração. Tomando $q = 4|c| + 1$ em (3.17)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[5|c| + 1 - \varphi^2\right] \varphi' \left(\mu\varphi' + g\right) = 0,$$

ou seja,

$$(5|c|+1)\,\mu \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi')^2 dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 (\varphi')^2 dx + (5|c|+1) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi' g dx}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 \varphi' g dx = 0,$$

então

$$\begin{aligned} \mu\,(5|c|+1)\,\|\varphi'\|_{L^2}^2 &= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 (\varphi')^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 \varphi' g dx \\ &\leq \mu \|\varphi\|_\infty^2 \|\varphi'\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_\infty^2 \|\varphi'\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \\ &\leq \mu(3|c|) \|\varphi'\|_{L^2}^2 + 3|c| \|\varphi'\|_{L^2} \|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu\,(2|c|+1)\,\|\varphi'\|_{L^2}^2 \leq 3|c| \|\varphi'\|_{L^2} \|g\|_{L^2},$$

assim,

$$\begin{aligned} \mu &\leq \left(\frac{3|c|}{2|c|+1}\right) \frac{1}{\|\varphi'\|_{L^2}} \|g\|_{L^2} \\ \mu &\leq C_1 \|g\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

□

Afirmação 3.3.6. *Usando* (3.16) *e* (3.19), *temos que existe* $C_2 > 0$ *tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx \geq C_2 \|h\|_{L^2}^2. \tag{3.21}$$

Demonstração. Dado de $h = \mu\varphi' + g$, com $\langle \varphi', g \rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2}^2 &= \langle \mu\varphi' + g, \mu\varphi' + g \rangle \\ &= \mu^2 \|\varphi'\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_1^2 \|g\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \\ &= \overline{C} \|g\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\overline{C}}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx. \end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx \geq C_2 \|h\|_{L^2}^2.$ □

Afirmação 3.3.7. *Existe $C_3 > 0$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx \geq C_3\|h\|_{H^1}^2.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\langle h, Lh\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} hLhdx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^2 h + ch + \varphi^2 h\right) hdx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x h)^2 dx + c\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 h^2 dx \\ &= \|\partial_x h\|_{L^2}^2 - |c|\|h\|_{L^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 h^2 dx \\ &= \frac{k}{k+1}\left(\|\partial_x h\|_{L^2}^2 + q\|h\|_{L^2}^2\right) + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 h^2 dx}_{\geq 0} - |c|\|h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{k+1}\left(\|\partial_x h\|_{L^2}^2 + q\|h\|_{L^2}^2\right).\end{aligned}$$

Escolhemos $k > 0$ tal que $|c| < \frac{1}{k+1}$, então

$$|c|\|h\|_{L^2}^2 \leq |c|\|h\|_{H^1}^2 < \frac{1}{k+1}\|h\|_{H^1}^2,$$

assim,

$$\frac{1}{k+1}\|h\|_{H^1}^2 - |c|\|h\|_{L^2}^2 \geq 0.$$

Portanto

$$\langle h, Lh\rangle \geq C_3\|h\|_{H^1}^2, \quad C_3 > 0.$$

□

Agora, voltando na prova da estimativa (3.15), resulta das afirmativas anteriores e (3.13) que

$$\begin{aligned}\Delta I &= \frac{1}{2}\langle h, Lh\rangle + \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3 (h + 4\varphi)\, dx \\ &\geq C\|h\|_{H^1}^2 - \alpha\left(\|h\|_{H^1}^2\right)\end{aligned}$$

e usando (1.12) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3 (h + 4\varphi)\, dx &= \frac{1}{12}\int_{-\infty}^{+\infty} h^4 dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} h^3\varphi dx \\ &\geq \frac{1}{12}\|h\|_{L^4}^2 - C\|\varphi\|_\infty\|h\|_{L^3}^3 \\ &\geq -C_1\|h\|_{H^1}^3 - C_2\|h\|_{H^1}^4 \\ &= -\alpha\left(\|h\|_{H^1}^2\right).\end{aligned}$$

Assim, $\alpha\left(||h||_{H^1}^2\right) = C\left(||h||_{H^1}^3 + ||h||_{H^1}^4\right)$ e $\displaystyle\lim_{\|h\|_{H^1}\to 0^+} \frac{\alpha\left(\|h\|_{H^1}^2\right)}{\|h\|_{H^1}^2} = 0.$ □

Afirmação 3.3.8. $\|h(\cdot,t)\|_{H^1}$ *é contínua como função de* t.

Demonstração. Para arbitrários t_1, t_2 temos

$$\begin{aligned}\|h(\cdot,t_1)\|_{H^1} - \|h(\cdot,t_2)\|_{H^1} =& \|u(\cdot,t_1) - \varphi(\cdot - ct_1 - \tau(t_1))\|_{H^1} - \|u(\cdot,t_2) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1} \\ \leq& \|u(\cdot,t_1) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1} - \|u(\cdot,t_2) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1} + \\ &+ \|\varphi(\cdot - ct_1 - \tau(t_1)) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando desigualdade triangular temos

$$\|u(\cdot,t_1) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1} - \|u(\cdot,t_2) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2)\|_{H^1} \leq \|u(\cdot,t_1) - u(\cdot,t_2)\|_{H^1}.$$

Usando isto na desigualdade (3.22)

$$\|h(\cdot,t_1)\|_{H^1} - \|h(\cdot,t_2)\|_{H^1} \leq \|u(\cdot,t_1) - u(\cdot,t_2)\|_{H^1} + \|\varphi(\cdot - ct_1 - \tau(t_1)) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1},$$

analogamente

$$\|h(\cdot,t_2)\|_{H^1} - \|h(\cdot,t_1)\|_{H^1} \leq \|u(\cdot,t_1) - u(\cdot,t_2)\|_{H^1} + \|\varphi(\cdot - ct_1 - \tau(t_1) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1}.$$

Portanto,

$$\Big| \|h(\cdot,t_2)\|_{H^1} - \|h(\cdot,t_1)\|_{H^1} \Big| \leq \|u(\cdot,t_1) - u(\cdot,t_2)\|_{H^1} + \|\varphi(\cdot - ct_1 - \tau(t_1)) - \varphi(\cdot - ct_2 - \tau(t_2))\|_{H^1}.$$

□

Agora vamos provar a estabilidade da solução de onda tipo Kink para a equação (3.2). Pelas afirmações (3.3.1), (3.3.2) concluímos o seguinte.

$$K||h(\cdot,t)||^2_{H^1} - C\left(||h(\cdot,t)||^3_{H^1} + ||h(\cdot,t)||^4_{H^1}\right) \leq \Delta I, \tag{3.22}$$

$$\Delta I \leq C_0||h(\cdot,t)||^2_{H^1} + C_1||h(\cdot,t)||^3_{H^1} + C_2||h(\cdot,t)||^4_{H^1}. \tag{3.23}$$

Por definição e lembrando que $u(x,t) = \varphi(x - ct - \tau) + h(x,t)$, é fácil provar que

$$||h(\cdot,t)||^2_{H^1} \leq \rho_q(u,\varphi), \quad \rho^2_q(u,\varphi) \leq q||h(\cdot,t)||^2_{H^1}. \tag{3.24}$$

Seja $g(s) = C_0s^2 + C_1s^3 + C_2s^4$, então, usando (3.24) em (3.23) e dado que g e $||h(\cdot,t)||_{H^1}$ são continuas obtemos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 = \delta_0(\epsilon)$ tal que se $\rho_q(u_0,\varphi) < \delta_0$, então, $g(\rho_q(u_0,\varphi)) < \dfrac{K}{2q}\epsilon^2$.

$$\begin{aligned}\Delta I &\leq C_0||h(\cdot,t)||^2_{H^1} + C_1||h(\cdot,t)||^3_{H^1} + C_2||h(\cdot,t)||^4_{H^1} \\ &\leq C_0\rho^2_q(u,\varphi) + C_1\rho^3_q(u,\varphi) + C_2\rho^4_q(u,\varphi) \\ &\leq \frac{K}{2q}\epsilon^2.\end{aligned}$$

Por outro lado, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $t < \delta_1$ temos

$$\frac{K}{2}||h(\cdot,t)||^2_{H^1} \leq K||h(\cdot,t)||^2_{H^1} - C\left(||h(\cdot,t)||^3_{H^1} + ||h(\cdot,t)||^4_{H^1}\right) \leq \Delta I,$$

então

$$\frac{K}{2q}\rho_q^2(u,\varphi) \leq \Delta I \leq g(\rho_q(u_0,\varphi)) \leq \frac{K}{2q}\epsilon^2.$$

Logo $\rho_q\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot - ct)\big) < \epsilon$ para $t \in [0,\delta_1)$. Além disso, $||h(\cdot,t)||_{H^1} \leq C(||h(\cdot,0)||_{H^1})$, para cada $t \in [0,\delta_1)$. Usando que I é lei de conservação e repetindo o processo acima, obtemos que podemos estender nossa solução para todo $t > 0$.

$\square$

Bibliografia

[1] Angulo, J.; Nonlinear Dispersive Equations (Mathematical Surveys and Monographs). American Mathematical Society, 2009.

[2] Benjamin, T. B.; The Stability of Solitary Waves. Fluid Mechanics Research Institute, University of Essex, 1971.

[3] Evans, L. C.; Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.

[4] Faminskii, A. V.; The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation and for its Generalization, translated from Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, No. 13, pp. 56–105, 1988.

[5] Friedman, A.; Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[6] Grafakos, L.; Classical Fourier Analysis (Graduate Texts in Mathematics). Springer, 2008.

[7] Helfrich, K. R., Melville, W. K., Miles, J. W.; J. Fluid. Mech. 149, 1984.

[8] Henri, D. B., Perez, J. F., Wreszinski, W. F.; Stability Theory for Solitary Wave Solutions of Scalar Field Equation, 1982.

[9] Khater, A. H., El-Kakaawy, O. H., Callebaut, D. K.; Phys. Scr. 58, 1968.

[10] Komatsu, T. S., Sasa, S. I.; Phys. Rev. E 52, 1995.

[11] Linares, F., Ponce, G.; Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. Springer, 2007.

[12] Lima, E. L.; Espaços Métricos. IMPA, 1977.

[13] Lonngren, K. E.; Opt. Quantum Electron 30, 1998.

[14] Matsutani, S., Tsuru, H.; J. Phys. Soc. Jpn. 60, 1991.

[15] Medeiros, L. A., Milla Miranda, M.; Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos). UFRJ, 2000.

[16] Nagatani, T.; Physica A 264, 1999.

[17] Nagatani, T.; Physica A 265, 1999.

[18] Oliveira, C. R.; Introdução à Análise Funcional. IMPA, 2008.

[19] Ono, H.; J. Phys. Soc. Jpn. 61, 1962.

[20] Tajiri, M., Nishihara, K.; J. Phys. Soc. Jpn. 54, 2001.

[21] Watanabe, S.; J. Phys. Soc. Jpn. 53, 1984.

[22] Zhidkov, P. E.; Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations: Qualitative Theory, Lectures Notes in Mathematics 1756. Springer, 2001.