UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Armando Santisteban Cárdenas

Dissertação

Orientador: Dr. Jaime E. Muñoz Rivera

Co-orientador: Dr. Pedro Gamboa Romero

Propriedades Qualitativas de Semigrupos Gerados por Formulações Variacionais.

Rio de Janeiro

13 de Novembro de 2015

Propriedades Qualitativas de Semigrupos Gerados por Formulações Variacionais.

Armando Santisteban Cárdenas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Jaime E. Muñoz Rivera
Co-orientador: Dr. Pedro Gamboa Romero

Rio de Janeiro

13 de Novembro de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Armando Santisteban Cárdenas.

Propriedades Qualitativas de Semigrupos Gerados por Formulações Variacionais.

Orientador: Dr. Jaime E. Muñoz Rivera
Co-orientador: Dr. Pedro Gamboa Romero

Dissertação - UFRJ / IM / Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2015.

I. Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática.

II. Título:

1) Resultados Preliminares
2) Um Exemplo Relativo a Má Colocação
3) Semigrupos Definidos por Formulações Variacionais
4) Analiticidade e Diferenciabilidade do Semigrupos Gerados por Formulação Variacional
5) Aplicações

III. Rio de Janeiro, UFRJ / IM - 2015

Propriedades Qualitativas de Semigrupos Gerados por Formulações Variacionais.

Armando Santisteban Cárdenas

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Dr. JAIME EDILBERTO MUÑOZ RIVERA - UFRJ

Dra. Luci Harue Fatori-UEL

Dr. Octavio Vera Villagran-U.Bio-Bio Chile

Dra. Amelie Rambaud-U.Bio-Bio Chile

Dra. Margareth da Silva Alves-UFV

Co-orientador, Dr. PEDRO GAMBOA ROMERO - UFRJ

Rio de Janeiro

13 de Novembro de 2015

A mi madre querida, por darme fuerzas
en la adversidad, incluso pese a la distancia.

Agradecimentos

• A Deus pela oportunidade de vida que novamente me foi outorgada.

• A minha família.

• Aos Professores que durante minha formação superior, dedicaram-se a me mostrar o quanto é preciso ser persistente para seguir com solidez na Matemática, em especial a Rafael Cabanillas Zannini e Yolanda Santiago Ayala por me ajudar em ter a oportunidade de estudar nesta universidade.

• Aos meus colegas da pós-graduação, alguns dos quais posso chamar de amigos.

• Aos Professores Jaime E. Muñoz Rivera e Pedro Gamboa Romero pela orientação, pela paciência, pela confiança.

• A Universidade Federal do Rio de Janeiro por me dar a oportunidade e o seu voto de confiança para fazer o mestrado.

• Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Conteúdo

Resumo

Nesta dissertação de mestrado desenvolveremos a teoria de semigrupos a partir de formulações fracas. Isto é, consideraremos uma classe de equações diferenciais parciais definidas a partir de sua formulação variacional e a partir desta formulação procuraremos por hipóteses sobre as correspondentes formas bilineares para poder garantir a existência de um C_0-semigrupo que defina a solução do problema. Resultados como este possuem muitas aplicações para problemas de evolução com coeficientes descontínuos.

Neste contexto, estudaremos uma classe de problemas variacionais de segunda ordem no tempo da forma

$$(u_{tt}, v) + b(u_t, v) + a(u, v) = 0.$$

Mostraremos que sob determinadas condições nas formas bilineares $(\cdot,\cdot)$, $a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ a solução é definida por um semigrupo, que pode ser analítico, diferenciável ou assintóticamente estável. Finalmente, ilustraremos a aplicabilidade do nosso resultado principal, atraves de diversos exemplos.

Palavras-chave: Semigrupos, formulações diferenciais, diferenciabilidade, analiticidade, estabilidade assintótica, equações diferenciais parciais.

Abstract

In this work we develop the theory of semigroups from partial diferential equations in its variational formulation. That is to say, we consider a class of partial differential equations defined from its variational formulation looking from hypotheses over the bilinear forms that garanted the existence of a C_0-semigroup that define the solutions of the corresponding problem. This problem has several applications to evolutions equations with discontinuous coefficients

In this approach we study a class of variariational problems of second order in time

$$(u_{tt}, v) + b(u_t, v) + a(u, v) = 0.$$

We will prove that over some conditions of the bilinear forms $(\cdot, \cdot)$, $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ the corresponding solution is defined by a semigroop that can be analytical or differentiable or asymptotically stable.

Finally, we give several examples of applications of our result.

Key-words: Semigroups, differential formulation, analyticity, asymptotic stability, partial differential equations.

Introdução

Este trabalho é dedicado ao problema de saber se um sistema linear elástico amortecido é associado a um semigrupo analítico ou diferenciável sobre seu espaço de estado de energia finita. Se a resposta for afirmativa, o sistema é bem conhecido por ter pelo menos as seguintes propriedades dinâmicas:

(i) Os estados do sistema se tornará a infinitamente suave no tempo após o tempo inicial;

(ii) A taxa exponencial de decaimento/crescimento da energia é determinado pelo espectro do sistema;

(iii) Modos de vibração com maior frequência de decaimento a taxas exponenciais mais elevadas.

A consideração deste problema parece ter sido iniciada por Chen e Russell [10] em 1981. Eles estudaram o sistema elástico amortecido descrito pelo equação de segunda ordem

$$w_{tt} + Bw_t + Aw(t) = 0$$

num espaço de Hilbert H onde A (o operador elástico) é um operador auto-adjunto definida positivo em H e B (o operador de amortecimento) é um operador adjunto positivo em H. Chen and Russell reduziram a equação anterior para uma de primeira ordem em $H \times H$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} A^{1/2}w \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{1/2} \\ -A^{1/2} & -B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{1/2}w \\ w_t \end{bmatrix}.$$

Seja $V = D(A^{1/2})$, $\mathscr{H} = V \times H$ com o produto interno induzidas naturalmente, então a equação anterior é equivalente à equação de primeira ordem em $\mathscr{H}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} w \\ w_t \end{bmatrix} = \mathscr{A}_B \begin{bmatrix} w \\ w_t \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{cases} \mathscr{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \\ D(\mathscr{A}_B) = D(A) \times [D(A^{1/2}) \cap D(B)]. \end{cases}$$

Chen e Russell [10] conjeturaram que $\mathscr{A}_B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico sobre H se

$$D(A^{1/2}) \subset D(B) \tag{1}$$

e qualquer das seguintes desigualdades vale para alguma constante $\rho_1 > 0$:

$$\begin{aligned} &\rho_1 \|A^{1/4}v\|_H \leq \|B^{1/2}v\|_H, \qquad \forall v \in D(A^{1/4}); \\ &\rho_1 \|A^{1/2}v\|_H \leq \|Bv\|_H, \qquad \forall v \in A^{1/2}. \end{aligned}$$

As provas completas dos dois conjeturas foram dadas por Huang [18], [19].
A condição (1) implica que $D(A^{1/4}) \subset D(B^{1/2})$. Ressaltamos que a condição (1) para a primeira conjetura não pode ser substituído por $D(B^{1/2}) = D(A^{1/4})$ (ver o contra-exemplo no capítulo 2).
Neste trabalho, consideramos analiticidade e diferenciabilidade do C_0-semigrupo dando a solução para uma equação de evolução variacional de segunda ordem. Este modelo pode cobrir sistemas elásticos com forças giroscópicas, tais como equações de vibração de um feixe de rotação. Primeiro damos uma condição sob a qual a equação da segunda ordem não é fortemente bem colocado. Em seguida, estudamos uma equação de viga com um coeficiente de amortecimento descontínua e será provado que o correspondente $\overline{\mathscr{A}_B}$ não é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo no espaço com a norma de energia natural. Na seção seguinte pelos teoremas de representação, apresentamos a nova definição na redução de primeira ordem. A boa colocação da equação de segunda ordem segue a partir da geração de um C_0-semigrupo. Fornecemos condições suficientes para que o semigrupo associado ser analítico ou diferenciável. Os teoremas abrangem os resultados conhecidos sempre que a equação de segunda ordem é escrita sob a forma variacional.
Finalmente, ilustramos a aplicabilidade do nosso resultado principal com vários modelos concretos.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nesta seção, daremos alguns resultados que serão usados durante o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Operadores Lineares

Nesta seção, todos os espaços vetoriais podem ser definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Apresentamos também a definição de resolvente e espectro de um operador linear e algumas propriedades.

Definição 1.1. *Sejam* X , Y *espaços de Banach e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear com domínio* $D(A)$.

1. A *é dito* **limitado** *quando existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que* $\|A\,u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$, $\forall\, u \in D(A)$. *Caso contrário,* A *é dito* **não limitado**.
2. A *é dito* **densamente definido** *quando* $\overline{D(A)} = X$.
3. A *é dito* **fechado** *quando o gráfico de* A, $G(A) = \{(u, A\,u) \in X \times Y : u \in D(A)\}$, *é um sub espaço fechado de* $X \times Y$, *onde* $X \times Y$ *é um espaço de Banach com a norma*

$$\|\cdot\|_{X\times Y} = \left(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2\right)^{1/2}.$$

Sejam X e Y espaços normados. Representa-se por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{A : X \longrightarrow Y \,/\, A \text{ é linear e limitado }\}.$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço normado com a norma definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|A\,u\|_Y.$$

Além disso, se Y é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach. Denotar-sé por $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Teorema 1.1 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam* X , Y *espaços de Banach e* $A : X \longrightarrow Y$ *um operador linear, limitado e sobrejetivo. Então existe* $r > 0$ *tal que* $B_Y(0; r) \subset A(B_X(0; 1))$.

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Corolário 1.1. *Sejam* X , Y *espaços Banach e* $A : X \longrightarrow Y$ *um operador linear, limitado e bijetivo. Então* A^{-1} *é limitado.*

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.2 (**Teorema do Gráfico Fechado**). *Sejam* X , Y *espaços de Banach e* $A : X \longrightarrow Y$ *um operador linear. Se* A *é fechado então é limitado.*

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.3 (**Operador Fechado**). *Sejam* X , Y *espaços normados e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear limitado.*

1. *Se* $D(A)$ *é um subconjunto fechado de* X , *então* A *é fechado.*

2. *Se* A *é fechado e* Y *é um espaço de Banach, então* $D(A)$ *é um subconjunto fechado de* X.

Demonstração. Ver [23]. $\square$

Teorema 1.4 (**Teorema da Limitação Uniforme**). *Sejam* X *um espaço de Banach,* Y *um espaço normado e* $(A_i)_{i\in I}$ *uma família (não necessariamente contável) em* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Suponha que:*

$$\sup_{i\in I} \|A_i\, u\|_Y < \infty \,,\ \forall\, u \in X.$$

Então

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty\,.$$

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.5. *Sejam* X *um espaço normado e* Y *um subespaço de* X. *Então:*

1. *Se* X *é reflexivo, então é completo.*

2. *Se* X *um espaço de Banach, então [* Y *é completo* $\Longleftrightarrow$ Y *é fechado em* X. *]*

3. *Se o espaço dual* X' *é separável, então* X *é separável.*

4. *Se* Y *tem dimensão finita, então é completo, reflexivo e fechado em* X.

Demonstração. Ver [23]. $\square$

Proposição 1.1. *Sejam* X *um espaço de Banach,* Y *um sub espaço de* X *e* $0 < r < 1$. *Se* $\overline{Y} \neq X$, *então existe um* $y_0 \in X$ *tal que* $\|y_0\| = 1$ *e* $\|y - y_0\| \geq r\,,\ \forall\, y \in \overline{Y}$.

Demonstração. Ver [29]. $\square$

Teorema 1.6. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *Se* $\|A\| < 1$, *então* $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *e* $(I - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^i$.

Demonstração. Ver [23]. $\square$

Definição 1.2. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*

1. *O conjunto resolvente de* A, $\varrho(A)$, *é o conjunto:*

$$\varrho(A) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, (\lambda I - A) \text{ é invertível, } (\lambda I - A)^{-1} \text{ é limitado com domínio denso em } X \Big\}.$$

Além disso; para cada $\lambda \in \varrho(A)$, *o operador linear* $R(\lambda\,;\,A) := (\lambda I - A)^{-1}$ *é chamado resolvente de* A.

2. *O espectro de* A, $\sigma(A)$, *é o conjunto:* $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$.

Proposição 1.2 (Domínio de $R(\lambda, A)$ **).** *Sejam* X *um espaço de Banach complexo,* $A : X \longrightarrow X$ *um operador linear e* $\lambda \in \varrho(A)$. *Se* A *é limitado ou fechado, então* $D(R(\lambda, A)) = X$.

Demonstração. Ver [23]. $\square$

Teorema 1.7 (Representação do Resolvente). *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Se* $\mu \in \varrho(A)$ *e* $|\lambda - \mu| = \|R(\mu, A)\|^{-1}$, *então* $\lambda \in \varrho(A)$ *e* $R(\lambda, A) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - A)^i \, R(\mu, A)^{i+1}$.

Demonstração. Ver [29]. $\square$

Corolário 1.2 (Resolvente e Espectro). *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear. Então:*

1. $\varrho(A)$ *é aberto em* X *e* $R(\lambda, A)$ *é uma função contínua em* $\varrho(A)$.

2. *Se* A *é limitado, então* $\sigma(A)$ *é um conjunto compacto não vazio e* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$.

Demonstração. Ver [29]. $\square$

Teorema 1.8 (Equação resolvente e Comutatividade). *Sejam* X *um espaço de Banach complexo,* $A, S \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\lambda, \mu \in \varrho(A)$. *então:*

1. *Equação resolvente:* $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu) \, R(\lambda, A) \, R(\mu, A)$.

2. *Se* $S\,A = A\,S \implies R(\lambda, A)\, S = S\, R(\lambda, A)$.

3. $R(\lambda, A)\, R(\mu, A) = R(\mu, A)\, R(\lambda, A)$.

Demonstração. Ver [23]. $\square$

Teorema 1.9. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo,* $A \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\mu \in \varrho(A)$. *então:*

1. $R(\lambda, A)$ *é analítica em* $\varrho(A)$.

2. $\|R(\mu, A)\| \geq \dfrac{1}{d(\mu)}$, *onde* $d(\mu) = dist(\mu, \varrho(A)) := \inf_{\lambda \in \varrho(A)} \|\mu - \lambda\|$.
Além disso, $\|R(\mu, A)\| \longrightarrow \infty$ *quando* $d(\mu) \longrightarrow 0$.

Demonstração. Ver [23]. □

Definição 1.3. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *O raio espectral de* A, $R_\sigma(A)$, *é o número real:* $R_\sigma(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

Proposição 1.3. *Sejam* X *um espaço de Banach complexo e* $A \in \mathcal{L}(X)$. *Então* $R_\sigma(A) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

Demonstração. Ver [23]. □

Definição 1.4. *Um produto interno num espaço vetorial* X *é um aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \langle .,. \rangle : X \times X & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (u,v) & \mapsto & \langle u,v \rangle, \end{array}$$

de maneira que satisfaz para $u, v, w \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$*:*

1. $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
3. $\langle u, u \rangle \geq 0$
4. $\langle u, u \rangle = 0$ *se e somente se* $u = 0$.

Num espaço com produto interno $(X, \langle .,. \rangle)$ *a função* $u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle}$, $u \in X$ *é uma norma, chamada norma induzida pelo produto interno.*

Definição 1.5. *Um espaço de Hilbert* H *é um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 1.10. *Sejam* H *um espaço de Hilbert e* Y *um subespaço de* H. *então:*

1. H *é reflexivo.*
2. *Se* H *é separável, então* Y *é separável.*
3. *Se* Y *é fechado em* H, *então* $Y = \left(Y^\perp\right)^\perp$ *e* $H = Y \oplus Y^\perp$.
4. Y *é denso em* $H \iff Y^\perp = \{0\}$.

Demonstração. Ver [23]. □

Definição 1.6. *Sejam* H *um espaço de Hilbert ,* D, $D(A)$ *subespaços de* H, $D \subset D(A)$, $B \in \mathcal{L}(H)$, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *um operador linear.*

1. $A \subset A^*$ *quando* $\langle A\,u, v \rangle_H = \langle u, A\,v \rangle_H \,, \forall\, u, v \in \mathcal{D}(A)$.
2. A *é dito* **simétrico** *quando* $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ *e* $A \subset A^*$.
3. A *é dito* **autoadjunto** *quando* $A = A^*$.
4. B *é dito* **unitário** *quando* $B^* = B^{-1}$.

5. *A é dito **não negativo** se $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in D(A)$.*

6. *A é dito **positivo** se $\langle Ax, x\rangle > 0$, $\forall x \in D(A)$, $x \neq 0$.*

7. *A **variação numérica** de A é o conjunto $\Theta(A) = \{(Ax, x)/x \in D(A), \|x\| = 1\}$.*

8. *A é dito **limitado inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(Ax, x) \geq m\|x\|^2 \qquad x \in D(A)$$

   Neste caso escrevemos $A \geq m$ é dizemos que m é uma cota inferior para A. A maior cota inferior de A é denotada por m_A a qual é dada por $m_A = inf\Theta(A)$.

9. *D é um **cerne** de $D(A)$ se D é denso em $D(A)$ para a norma $\|.\| = \|.\|_H + \|A(.)\|_H$.*

Teorema 1.11. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear e simétrico, são equivalentes:*

1. *A é autoadjunto.*

2. *A é fechado e $Ker(A^* \pm i) = \{0\}$.*

3. *$\mathscr{R}(A \pm i) = H$.*

Demonstração. Ver [34] $\square$

Definição 1.7. *Seja um operador linear $A : D(A) \subset H \to H$*

1. *A é dito **monótono ou acretivo** ($-A$ é **dissipativo**), se*

$$Re(Au, u) \geq 0 \qquad \forall u \in D(A).$$

2. *A é dito **maximal monótono** se $\mathscr{R}(I + A) = H$.*

Proposição 1.4. *Seja A um operador maximal monótono. Então*

1. *$D(A)$ é denso em H.*

2. *A é um operador fechado.*

3. *Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ é uma bijeção de $D(A)$ sobre H, $(I + \lambda A)^{-1}$ é um operador limitado e $\|(I + \lambda A)^{-1}\| \leq 1$*

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Proposição 1.5. *Seja A um operador maximal monótono. Se A é simétrico então A é autoadjunto.*

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.12. *Seja A um operador autoadjunto e não negativo, então existe um único operador $A^{1/2}$ autoadjunto e não negativo tal que $(A^{1/2})^2 = A$. Além disso, $D(A)$ é um cerne de $D(A^{1/2})$.*

Demonstração. Ver [21]. $\square$

Proposição 1.6. *Seja $C : D(C) \subset H \to H$, $C \geq 0$, $C = C^*$, então*

$$(Cx, y) = (C^{1/2}x, C^{1/2}y) \qquad x \in D(C), y \in D(C^{1/2}).$$

Demonstração. Decorre do $(w, C^{1/2}y) = (C^{1/2}w, y)$, para $w, y \in D(C^{1/2})$ e $(C^{1/2})^2 = C$. $\square$

1.2 Formas Sesquilineares em Espaços de Hilbert, Teoremas de Representação

Num espaço unitário de dimensão finita, a noção de uma forma sesquilinear e de um operador linear são equivalentes, formas simétricas correspondem a operadores simétricos . Isso é verdade mesmo em um espaço de Hilbert de dimensão infinita, no caso de formas limitadas e operadores limitados. No entanto as formas são não limitados, não existe tal óbvio relacionamento óbvio. Entretanto existe uma relação entre formas simétricas semilimitadas (limitadas inferiormente) e operadores auto-adjuntos.

Teorema 1.13 (**Teorema de Representação de Riesz-Frechet**). *Dada qualquer $\phi \in H'$ existe um único $f \in H$ tal que*

$$\phi(u) = \langle u, f\rangle \qquad \forall u \in H.$$

Mais ainda

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|.$$

Demonstração. Ver [6]. □

Definição 1.8. *Sejam N_1, N_2 espaços normados, $B(\cdot,\cdot) : N_1 \times N_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ e $f : N_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ aplicações.*

1. *$B(\cdot,\cdot)$ é uma* **forma sesquilinear** *quando $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se verifica:*
   (a) $B(\alpha\, u + \beta\, w, v) = \alpha\, B(u, v) + \beta\, B(w, v), \forall\, u, w \in N_1$, $\forall v \in N_2$,
   (b) $B(u, \alpha\, v + \beta\, w) = \overline{\alpha}\, B(u, v) + \overline{\beta}\, B(u, w)\,, \forall\, u \in N_1$, $\forall v, w \in N_2$.
2. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $B(\cdot,\cdot)$ é chamada* **forma bilinear**.
3. *f é dita* **antilinear** *quando $f(\alpha\, u + v) = \overline{\alpha}\, f(u) + f(v)\,, \forall\, u, v \in N_1\,, \forall\, \alpha \in \mathbb{C}\,.$*

Observação: Se f é antilinear e $g \in X'$, então $\overline{f} \in X'$ e $\overline{g}$ é antilinear, onde X é um espaço normado complexo.

Definição 1.9. *Sejam N_1, N_2 espaços normados e $B(\cdot,\cdot) : N_1 \times N_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear.*

1. *$B(\cdot,\cdot)$ é dita* **contínua ou limitada** *quando existe $M \geq 0$ tal que $|B(u, v)| \leq M\, \|u\|\, \|v\|$, para todo $u \in N_1, v \in N_2$.*
2. *No caso que $N_1 = N_2$, $B(\cdot,\cdot)$ é dita* **coerciva** *quando existe $c \geq 0$ tal que $ReB(u, u) \geq c\, \|u\|^2$, para todo $u \in N_1$.*

Teorema 1.14 (**Teorema de Lax-Milgram**). *Sejam H um espaço de Hilbert e $b(\cdot,\cdot)$ uma forma sesquilinear, contínua e coerciva. Então para todo $f \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$b(\eta, u) = f(\eta), \qquad \forall \eta \in H.$$

Demonstração. Ver [14]. □

Corolário 1.3 (**Caso real**). *Sejam H um espaço de Hilbert real e $b(\cdot,\cdot)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Se $f \in H'$, então existe uma única $u \in H$ tal que $B(u, v) = f(v)\,, \forall\, v \in H$.*

Demonstração. Ver [6]. □

Corolário 1.4 (**Caso complexo**). *Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $B(\cdot,\cdot)$ uma forma sesquilinear, contínua e coerciva. Se $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação antilinear continua, então existe uma única $u \in H$ tal que $B(u,v) = f(v)$, $\forall\, v \in H$.*

Demonstração. Ver [40]. □

Definição 1.10. *Uma forma sesquilinear (ou brevemente uma forma) sobre um subespaço $D(t)$ de um espaço de Hilbert complexo H é uma aplicação $t : D(t) \times D(t) \to \mathbb{C}$ tal que*

$$t[\alpha x + \beta y, z] = \alpha t[x,z] + \beta t[y,z], \qquad t[z, \alpha x + \beta y] = \overline{\alpha} t[z,x] + \overline{\beta} t[z,y],$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $x, y, z \in D(t)$. O subespaço $D(t)$ é chamado o ***domínio*** *de t, e a forma quadrática $t[.] : D(t) \to \mathbb{C}$ associada com a forma t é definida por*

$$t[x] = t[x,x].$$

Definição 1.11. *Sejam s, t formas em H e $\alpha \in \mathbb{C}$, a soma $s + t$ e a múltiplo escalar αs são as formas*

1. $(s+t)[x,y] = s[x,y] + t[x,y], \qquad x, y \in D(s+t) := D(s) \cap D(t).$
2. $(\alpha s)[x,y] = \alpha s[x,y], \qquad x, y \in D(\alpha s) := D(s).$

Em particular denotamos por α a forma $\alpha(.,.)$, então $t + \alpha$ é a forma dada por

$$(t+\alpha)[x,y] := t[x,y] + \alpha(x,y), \qquad D(t+\alpha) = D(t).$$

Definição 1.12. *Seja t uma forma sesquilinear em $D(t)$ num espaço de Hilbert H.*

1. *t é dita* ***densamente definida*** *se $D(t)$ é denso em H.*
2. *Uma forma t é chamada* ***simétrica*** *ou* ***Hermitiana*** *se $t[x,y] = \overline{t[y,x]}$, para $x, y \in D(t)$.*
3. *Uma forma simetrica é dita* ***semilimitada inferiormente*** *, se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$t[x] \geq m\|x\|^2 \qquad x \in D(t).$$

Neste caso escrevemos $t \geq m$ e dizemos que m é uma cota inferior para t. A maior cota inferior de t é denotada por m_t a qual é dada por

$$m_t = inf\Theta(t), \text{ onde } \Theta(t) = \{t[x]\|x\|^{-2}/x \in D(t), x \neq 0\}.$$

A forma é dita ***positiva*** *se $t \geq 0$.*

Observação: *A forma t é simétrica se e somente se $\Theta(t) \subset \mathbb{R}$.*

Definição 1.13. *Suponhamos que t é uma forma simétrica, semilimitada inferiormente de um espaço de Hilbert complexo H, seja m uma cota inferior. A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \langle .,. \rangle_t : D(t) \times D(t) & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & t[x,y] + (1-m)(x,y)_H, \end{array}$$

define um produto interno em $D(t)$ com a norma dada por $\|x\|_t = (t[x] + (1-m)\|x\|^2)^{1/2}$, a qual satisfaz $\|.\|_t \geq \|.\|$ em $D(t)$.
Notemos que $\langle x, y\rangle_t = \langle x, y\rangle_{t_0} = t_0[x, y] + (x, y)_H$, onde $t_0 := t - m\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{e}(x, y) = (x, y)_H$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada a t_0 e da relação anterior chegamos a que

$$|t[x, y]| \leq (1 + |m|)\|x\|_t\|y\|_t, \qquad x, y \in D(t).$$

Seja H_t o espaço de Hilbert obtido por completamento do espaço Pre-Hilbert $(D(t), \|.\|_t)$. Desde que a aplicação inclusão $(D(t), \|.\|_t) \to (H, \|.\|)$ é contínua, esta admite uma única extensão I_t aplicação linear e continua de H_t em H.

Definição 1.14. *Seja t uma forma simétrica, semilimitada inferiormente.*

1. *t é dito* ***fechado*** *se $(D(t), \|.\|_t)$ é um espaço de Hilbert.*

2. *t é dito* ***fechável*** *se existe uma forma s simétrica, semilimitada inferiormente e fechada que estende a t i.e $D(t) \subset D(s)$ e $s[x, y] = t[x, y]$ para $x, y \in D(t)$.*

3. *Um subespaço D é um* ***cerne*** *de $D(t)$ se D é denso em $(D(t), \|.\|_t)$.*

Proposição 1.7. *São equivalentes*

1. *t é fechada.*

2. *Se $(x_n) \subset D(t)$, $x_n \xrightarrow{H} x$ e $t[x_n - x_m] \to 0$, então $x \in D(t)$ e $t[x_n - x] \to 0$.*

3. *t' é semi-contínua inferiormente em H, onde*

$$t'[x] = \begin{cases} t[x], \text{ se } x \in D(t) \\ +\infty, \text{ se } x \notin D(t). \end{cases}$$

4. *Se $(x_n) \subset D(t)$ tal que $x_n \xrightarrow{H} x$ e $\{t[x_n]/n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, então $x \in D(t)$ e $t[x] \leq \underline{\lim} t[x_n]$.*

Demonstração. Ver [37] □

Proposição 1.8. *Seja t uma forma simétrica e semilimitada inferiormente, são equivalentes:*

1. *t é fechável.*

2. *Para qualquer $(x_n) \subset D(t)$ tal que $x_n \xrightarrow{H} 0$ e $t[x_n - x_m] \to 0$, entao $t[x_n] \to 0$.*

3. *A aplicação I_t é injetiva.*

Se t é fechável. definimos

$$D(\bar{t}) = \{x \in H / \exists (x_n) \subset D(t), x_n \xrightarrow{H} x, t[x_n - x_m] \to 0\}.$$

Sejam $(x_n), (y_n)$ sequências em $D(t)$ associadas a $x, y \in D(\bar{t})$, então

$$\bar{t}[x, y] = \lim_{n \to +\infty} t[x_n, y_n],$$

então $D(\bar{t})$ é um subespaço vetorial de H, $\bar{t}$ é a menor extensão fechada de t e $m_t = m_{\bar{t}}$.

Demonstração. Ver [37],[5]. □

Proposição 1.9. *Temos que:*

1. *Seja A um operador em H com domínio $D(A)$, a forma t_A dada por $t_A[x,y] = (Ax,y)$ com domínio $D(t_A) = D(A)$ é dita a **forma gerada** por A. Se A é simétrico e limitado inferiormente o mesmo acontece para t_A*

2. *Uma forma s a qual é gerada por um operador A o qual é simétrico e limitado inferiormente; é fechável e seu fecho $\overline{s}$, satisfaz $\overline{s}[x,y] = (Ax,y)$, para todo $x \in D(A) = D(s)$ e $y \in D(\overline{s})$.*

Demonstração. Ver [5] □

Teorema 1.15 (Primeiro Teorema de Representação para Formas Sesquilineares). *Seja t uma forma sesquilinear simétrica, fechada, densamente definida e semilimitada inferiormente em H, então existe um operador A_t autoadjunto tal que:*

1. *$D(A_t) \subset D(t)$ e $t[u,v] = (A_t u, v)$, para todo $u \in D(A_t)$, $v \in D(t)$.*

2. *$D(A_t)$ é um cerne de t.*

3. *Se $u \in D(t)$ e $w \in H$ tal que $t[u,v] = (w,v)$, para todo v pertencendo a um cerne de t, então $u \in D(A_t)$ e $w = A_t u$.*

4. *Se T é um operador linear tal que $D(T) \subset D(t)$ e $t[u,v] = (Tu,v)$ para todo $u \in D(T)$ e $v \in D(t)$ então $T \subset A_t$. Em particular, se T é autoadjunto, $T = A_t$, dai que o operador A_t é unicamente determinado pela condição 1.*

5. *A_t é semilimitado inferiormente e $m_A = m_t$.*

Demonstração. Ver [5](Teorema 4.6.8), [37](Teorema 10.7), para uma versão geral [21]. □

Corolário 1.5. *O teorema de representação define uma bijeção entre $t \mapsto A_t$ do conjunto das formas fechadas, simétricas, densamente definidas e semilimitadas inferiormente com o conjunto dos operadores autoadjuntos limitados inferiormente ; A_t é limitado se e somente se t é limitado.*

Demonstração. Ver [5]. □

Teorema 1.16 (Extensão de Friedrichs). *Suponhamos que A_0 é um operador simétrico semilimitado inferiormente, s a forma fechada gerada por A_0 e A_s o operador autoadjunto associado a s, então $A_0 \subset A_s$ é $m_{A_s} = m_{A_0}$. Além disso, A_s é a única extensão autoadjunta de A_0 tal que $D(A_s) \subset D(s)$.*

Demonstração. Ver [5], [37], [38]. □

Teorema 1.17 (Segundo Teorema de Representação para Formas Sesquilineares). *Seja t uma forma simétrica, fechada, densamente definida e não negativa i.e $t \geq 0$ e $B = A_t$ o operador autoadjunto associado, então temos que:*

1. *$D(B^{1/2}) = D(t)$.*

2. *$t[u,v] = (B^{1/2}u, B^{1/2}v)$, para todo $u, v \in D(t)$.*

3. $D' \subset D(t)$ *é um cerne se e somente se* D' *é um cerne de* $D(B^{1/2})$.

Demonstração. Ver [21]. □

Corolário 1.6. *Sob as hipóteses do primeiro teorema de representação e seja* $t \geq m$*, então:*

1. $A_t - mI \geq 0$.

2. $D((A_t - mI)^{1/2}) = D(t)$ *e* $t[u, v] = ((A_t - mI)^{1/2}u, (A_t - mI)^{1/2}v) + m(u, v)$*,* $x, y \in D(t)$.

3. $D' \subset D(t)$ *é um cerne se e somente se* D' *é um cerne de* $(A_t - mI)^{1/2}$.

Demonstração. Ver [4] □

1.3 Teorema Espectral e Funções de um Operador Autoadjunto

Definição 1.15 (Resolução da Identidade). *Seja* H *um espaço de Hilbert separável. Uma família* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *de projeções ortogonais é dita uma família espectral ou resolução da identidade se satisfaz as seguintes condições:*

1. $E_\lambda.E_\mu = E_{inf(\lambda,\mu)} \quad \lambda\mu \in \mathbb{R}$;

2. $E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I$,
$$E_{-\infty}x = \lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x,$$
$$E_{+\infty}x = \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda x,$$
para todo $x \in H$.

3. $E_{\lambda+0} = E_\lambda$*, onde* $E_{\lambda+0}x = \lim_{e\to0^+} E_{\lambda+\epsilon}x \quad$ *para todo* $x \in H$.

Os limites são tomados na norma em H.

Teorema 1.18. *Existe uma aplicação injetiva*

$$\hat{\sigma}\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \mapsto A$$

do conjunto das famílias espectrais num espaço de Hilbert H *no conjunto dos operadores autoadjuntos em* H.

Demonstração. Ver [12]. □

Teorema 1.19 (Teorema Espectral). *Seja* H *um espaço de Hilbert separável.*

1. *Existe uma aplicação bijetiva* $\hat{\sigma}$ *do conjunto das famílias espectrais em* H *sobre o conjunto dos operadores autoadjuntos em* H

2. *Seja* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *uma família espectral e* $A = \hat{\sigma}(\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}})$*. Então* E_λ *e o resolvente* $R(\zeta) = (\zeta I - A)^{-1}$ *estão relacionados por*

$$\begin{cases} (R(\zeta)x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - \lambda} d(E_\lambda x, y) \\ \text{para todo } x, y \in H,\ \zeta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [12]. □

Definição 1.16. *Seja A um operador autoadjunto num espaço de Hilbert separável H e $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ sua decomposição espectral, se f é uma função complexo valorada definida em $\mathbb{R}$, então $f(A)$ é o operador definido pela fórmula*

$$f(A)x = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE_\lambda x, \quad x \in D(f(A)),$$

onde

$$D(f(A)) = \left\{ x \in H \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ é mensurável com a medida } d_\lambda(E_\lambda x, x) = d_\lambda |E_\lambda x|^2 \\ \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda(x)|^2 < +\infty. \end{array} \right\}$$

Definição 1.17. *Seja H um espaço de Hilbert separável. Definimos $\mathcal{M}_0$ como o conjunto das funções mensuráveis em relação a $d_\lambda(E_{\lambda x,x})$ para todo $x \in H$.*
Tais funções são obtidas por limites simples de funções contínuas.

Proposição 1.10. *Se $f \in \mathcal{M}_0$ e $f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda$. Então para todo $x \in D(f(A))$ e $y \in H$, temos que:*

$$(f(A)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d(E_\lambda x, y).$$

Demonstração. Ver [12]. □

Teorema 1.20. *Seja A um operador autoadjunto num espaço de Hilbert separável H e $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ seu decomposição espectral.*

1. *Se $\bar{f}$ é a função conjugada de f, então*

$$D(\bar{f}(A)) = D(f(A))$$

   e para $x, y \in D(\bar{f}(A)) = D(f(A))$:

$$(f(A)x, y) = (x, \bar{f}(A)y).$$

2. *Se $x \in D(f(A))$, $y \in D(g(A))$, então*

$$(f(A)x, g(A)y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\bar{g}(\lambda) d(E_\lambda x, y).$$

3. *Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in D(f(A))$*

$$(\alpha f)(A)x = \alpha f(A)x.$$

   Para $x \in D(f(A)) \cap D(g(A))$, temos que

$$(f + g)(A)x = f(A)x + g(A)x.$$

Demonstração. Ver [12]. □

O teorema a seguir sera muito crucial no desenvolvimento deste trabalho:

Teorema 1.21.

Se $x \in D(f(A))$, então a condição $f(A)x \in D(g(A))$ é equivalente à condição $x \in D(g.f(A))$ (onde $g.f(\lambda) = g(\lambda)f(\lambda)$) e temos que

$$g(A).f(A)x = (g.f)(A)x.$$

Se $f \in \mathcal{M}_0$ e $D(f(A))$ é denso em H, entao o adjunto

$$[f(A)]^* = \bar{f}(A);$$

$f(A)$ é um operador normal (e autoadjunto se $\bar{f} = f$).

Se $f \neq 0$ q.t.p em relação as medidas $\{\sigma_x\}_{x \in H}$, então $[f(A)]^{-1}$ existe e

$$[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A).$$

Onde $\sigma_x = \sigma_{x,x} = d(E_\lambda x, x)$.

Demonstração. Ver [12]. □

Teorema 1.22. *Seja A um operador autoadjunto num espaço de Hilbert separável H com domínio $D(A)$, denso em H satisfazendo a condição:*

$$\begin{cases} \exists \gamma > 0 \text{ tal que} \\ (Ax, x) \geq \gamma \|x\|^2, \qquad \forall x \in D(A). \end{cases} \tag{1.1}$$

Para $0 \leq \beta \leq 1$, temos que:

1. *$D(A) \subset D(A^\beta)$;*
2. *Para todo $x \in D(A)$,*
$$(A^\beta x, x) \leq \gamma^\beta \|x\|^2.$$
Além disso $(A^\beta)^{-1} = A^{-\beta} \in \mathcal{L}(H)$; $A^{-\beta}$, A^β sao operadores autoadjuntos;
3. *$D(A^\beta)$ munido da norma do gráfico definida por:*
$$\|x\|_\beta^2 = \|x\|^2 + \|A^\beta x\|^2, \qquad x \in D(A^\beta),$$
é um espaço de Hilbert;
4. *Se $0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq 1$,*
$$D(A^{\beta_2}) \hookrightarrow D(A^{\beta_1}) \qquad (\hookrightarrow \quad \text{inclusão contínua })$$
e $D(A^{\beta_2})$ é denso em $D(A^{\beta_1})$;
5. *Para todo $x \in D(A)$, temos que:*
$$\|A^\beta x\| \leq \|Ax\|^\beta \|x\|^{1-\beta}.$$

Demonstração. Ver [12]. □

Observação: *Decorre dos items 2 e 3 do teorema anterior que $D(A^\beta)$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|x\|_{A^\beta} = \|A^\beta x\|$, a qual é equivalente á norma do gráfico.*

1.4 Espaços de Sobolev

Notações:
$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$.
$\hookrightarrow$: *imersão contínua.*
$\overset{c}{\hookrightarrow}$: *imersão contínua e compacta.*

Teorema 1.23 (**Du - Bois - Raymond**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Se $\displaystyle\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,,\ \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$ *então* $u = 0$ *quase sempre em* Ω .

Demonstração. Ver [7]. □

Lema 1.1. *Seja* $f \in L^1_{loc}(I)$ *tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Então existe uma constante C *tal que* $f = C$ *q.t.p em* I.

Demonstração. Ver [6]. □

Proposição 1.11. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *limitado ou não,* $g \in L^1_{loc}(I)$*, para* $y_0 \in I$ *fixo definimos*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \qquad x \in I.$$

Então $v \in C(I)$ *e*

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Demonstração. Ver [6] □

Teorema 1.24 (**Desigualdade de Poincaré**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $1 \leq p < +\infty$. *Então existe uma constante* C , *que depende de* Ω *e* p , *tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla\, u\|_{L^p(\Omega)}\,,\ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Demonstração. Ver [6]. □

Teorema 1.25 (**Regularidade Elítica**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular,* L *um operador diferencial elítico de ordem* $2\,m$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $f \in L^2(\Omega)$. *Se* v *é solução de* $L\,v = f$ *no sentido distribucional, então* $v \in H^{2\,m}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1]. □

Corolário 1.7. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto regular e* $f \in L^2(\Omega)$. *Se* v *é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta\, u = f & \textit{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{em} \quad \partial\Omega \end{cases},$$

então $v \in H^2(\Omega)$ *e* $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$, *onde* $C \geq 0$.

Demonstração. Ver [1]. $\square$

Teorema 1.26. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e I limitado ou não; então existe uma função $\overline{u} \in C(\overline{I})$ tal que*

$$u = \overline{u} \qquad q.t.p \text{ em } I$$

e

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \qquad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.27. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|I} \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.28. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e somente se $u = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Ver [6]. $\square$

Teorema 1.29. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p(I)$. Definimos $\bar{u}$ por*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases}$$

Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e somente se $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver [6]. $\square$

1.5 Imersões em Espaços de Sobolev

Teorema 1.30 (Imersão Contínua). *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Se verificam:*
   (a) *Se* $m\,p < n$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.
   (b) *Se* $m\,p = n$ *e* $p \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.
   (c) *Se* $m\,p > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *é um inteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *onde*
      i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,
      ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Se verificam:*
   (a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$.
   (b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.

3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$. *Verifica-se:* $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [28]. □

Teorema 1.31 (**Imersão Contínua**). *Tem-se os seguintes casos:*

1. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Se verificam:*
   (a) *Se* $m\,p < n$ *e* $1 \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
   (b) *Se* $m\,p = n$ *e* $1 \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
   (c) *Se* $m\,p > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *é um inteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, *onde*
      i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,
      ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.
2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto limitado. Se verificam:*
   (a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$.
   (b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$.
3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Verifica-se:* $W^{m,+\infty}(\Omega)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [28]. □

Corolário 1.8. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $m \in \mathbb{N}$. *Então:*
$W_0^{m,+\infty}(\Omega)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [28]. □

Teorema 1.32 (**Rellich - Kondrachov**). *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Se verificam:*

1. *Se* $p < n$ *e* $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n - p}$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.
2. *Se* $p = n$ *e* $1 \leq q < +\infty$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.
3. *Se* $n < p \leq +\infty$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [6] □

Corolário 1.9. *Sejam* n, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Se verificam:*

1. *Se* $p < n$ *e* $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n - p}$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.

2. Se $p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.

3. Se $n < p \leq +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [28] □

Corolário 1.10. *Sejam $n\,,\, m \in \mathbb{N}\,,\, 1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se verificam:*

1. Se Ω é de classe C^{m+1} , então $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega)$.

2. $W_0^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W_0^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [28] □

Teorema 1.33 (Imersão Compacta). *Sejam $n\,,\, m \in \mathbb{N}\,,\, 1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^m . Se verificam:*

1. Se $m\,p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.

2. Se $m\,p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.

3. Se $m\,p > n$ e $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k é um inteiro não negativo, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [28] □

1.6 Espaços Intermediários entre Espaços de Hilbert

Sejam X e Y dois espaços complexos de Hilbert separáveis, assumimos que:

$$\begin{cases} X \hookrightarrow Y. \\ X \text{ é denso em } Y. \end{cases} \tag{1.2}$$

Denotemos por $(.,.)_X$ (resp. $(.,.)_Y$), $||_X$ (resp. $||_Y$) o produto escalar e a norma em X (resp. em Y). Definimos

$$h(u, v) = (u, v)_X \qquad \text{para } u, v \in X.$$

Seja A o operador não limitado em Y com domínio dado por:

$$D(A) = \{u \in X | v \mapsto h(u, v) \text{ é contínua em } X \text{ na topologia de } Y\}.$$

Sabemos das seções anteriores que A é um operador autoadjunto definido positivo com inversa limitada satisfazendo:

$$(Au, u)_Y = h(u, u) = |u|_X^2 \geq \tilde{C}|u|_Y^2,\ \tilde{C} > 0,\ \text{para todo } x \in D(A),$$

i.e a é coerciva. Temos também que:

$$D(A) = \{u \in X | Au \in Y\}.$$

Seja $\{E_\mu\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ a decomposição espectral de A em Y ($\sigma(A)\subset[\mu_0,+\infty)$ com $\mu_0>0$). Para $u\in D(A)$ temos que:

$$(Au,u)_Y=\int_{\mu_0}^{+\infty}\mu d|E_\mu u|_Y^2=|u|_X^2=\int_{\mu_0}^{+\infty}(\mu^{1/2})^2 d|E_\mu u|_Y^2,$$

i.e

$$|u|_X^2=|A^{1/2}u|_Y^2,\qquad u\in D(A).$$

Da densidade de $D(A)$ em $D(A^{1/2})$ e X, vemos que:

$$D(A^{1/2})=X.$$

Definindo $\Lambda=A^{1/2}$; Λ é um operador autoadjunto com domínio $D(\Lambda)=X$ satisfazendo:

$$(\Lambda u,u)_Y\geq(\tilde{C})^{1/2}|u|_Y^2\qquad u\in D(\Lambda)=X.$$

Seja $\{F_\lambda\}$ a família espectral associada com Λ; temos que

$$F_\lambda=E_{\lambda^2}.$$

Definição 1.18. *Sejam X, Y espaços de Hilbert separáveis satisfazendo a condição (1.2). Para $\theta\in[0,1]$, definimos os espaços de interpolação $[X,Y]_\theta$ dados por*

$$[X,Y]_\theta=D(\Lambda^{1-\theta})=D(A^{\frac{1-\theta}{2}}).$$

$\Lambda=A^{1/2}$ é o operador não limitado em Y com domínio X definido acima. Dado o produto escalar:

$$(u,v)_\theta=(u,v)_Y+(\Lambda^{1-\theta}u,\Lambda^{1-\theta}v)_Y,$$

$[X,Y]_\theta$ é um espaço de Hilbert, chamado o espaço intermédio entre X e Y.

Um típico exemplo da teoria anterior é

$$V=H_0^1(\Omega),\quad H=L^2(\Omega),\quad A=-\Delta$$

e

$$D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$$

onde Ω é um aberto limitado de classe C^2.

Observação

Se Λ_1 e Λ_2 são dois operadores autoadjuntos positivos em Y, com domínio X, então

$$D(\Lambda_1^{1-\theta})=D(\Lambda_2^{1-\theta}),\tag{1.3}$$

com normas equivalentes. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

A fronteira Γ de Ω é uma variedade diferenciável $(n-1)$ dimensional, Ω estando localmente de um lado de Γ. (1.4)

Ω é limitado. (1.5)

Teorema 1.34. *Suponhamos que Ω satisfaz (1.4) e (1.5). Seja*

$$s_1 > s_2 \geq 0,$$

s_1 *e* $s_2 \neq$ *inteiro* $+\frac{1}{2}$. *Se*

$$(1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq \text{ inteiro } + \frac{1}{2},$$

então

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega),$$

com normas equivalentes.

Demonstração. Ver [25]. □

1.7 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, todos os espaços vetoriais são definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Definição 1.19. *Seja* X *um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares e limitados* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *é dito um* **semigrupo** *em X, quando:*

1. $S(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X)$.

2. $S(t+s) = S(t)\, S(s)\,,\ \forall\, t, s \geq 0.$

Definição 1.20. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. *O operador linear* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *definido por*

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\, u - u}{t} \quad \text{existe} \right\}$

2. $A\, u = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\, u - u}{t}\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\,,$

é chamado **gerador infinitesimal** *do semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Observações:

1. $\mathcal{D}(A) = \{u \in X : A\, u \in X\}$.

2. $S(t) = e^{t\,A}\,,\ \forall\, t \geq 0$ *é um semigrupo em* X *com gerador infinitesimal* A, *onde* $A \in \mathcal{L}(X)$.

Definição 1.21. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **uniformemente contínuo** *quando* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Proposição 1.12. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é uniformemente contínuo se e somente se* $\lim\limits_{t\longrightarrow r} \|S(t) - S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.35. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupos em* X. *Se* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{T(t) - I}{t} = A = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t) - I}{t}$, *então* $T(t) = S(t)\,,\ \forall\, t \geq 0.$

Teorema 1.36. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X.
$S(t)$ *é uniformemente contínuo se e somente se* $S(t) = e^{t\,A}\,,\,\forall\, t \geq 0\,,$ *para algum* $A \in \mathcal{L}(X)$.

Demonstração. Ver [29]. □

Corolário 1.11. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo uniformemente contínuo. Então:*

1. *Existe uma* $\omega \geq 0$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega\, t}\,,\,\forall\, t \geq 0.$

2. *A aplicação* $t \longmapsto S(t)$ *é diferenciável em* $[0, +\infty[$ *e* $\dfrac{d}{dt}\,S(t) = A\,S(t) = S(t)\,A.$

Demonstração. Ver [32]. □

Definição 1.22. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X.

1. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **de classe** C_0 *ou* C_0- **semigrupo** *quando* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t)\,u = u\,,\,\forall\, u \in X.$

2. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **fortemente contínuo** *quando* $\lim\limits_{t\longrightarrow r} S(t)\,u = S(r)\,u\,,\,\forall\, u \in X.$

Proposição 1.13. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo em* X.

1. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0- *semigrupo se e somente se é fortemente contínuo.*

2. *Se* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é uniformemente contínuo, então é um* C_0- *semigrupo.*

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.37. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo. Então:*

1. $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \dfrac{ln\,\|S(t)\|}{t} = \inf\limits_{t>0} \dfrac{ln\,\|S(t)\|}{t} := \omega_0.$

2. *Para cada* $\omega > \omega_0,$ *existe uma constante* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M\,e^{\omega\, t}\,,\,\forall\, t \geq 0.$

Demonstração. Ver [29]. □

Corolário 1.12. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo. Então existem constantes* $\omega \geq 0$ *e* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M\,e^{\omega\, t}\,,\,\forall\, t \geq 0.$

Demonstração. Ver [32]. □

Corolário 1.13. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo. Então para cada* $u \in X,$ *a aplicação* $t \longmapsto S(t)\,u$ *é contínua em* $[0, +\infty[$.

Demonstração. Ver [32]. □

Definição 1.23. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo,* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito* **uniformemente limitado** *quando existe uma* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M\,,\,\forall\, t \geq 0.$ *Se* $M = 1\,,$ *é dito um* C_0- **semigrupo de contrações**.

Teorema 1.38. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A. *Então:*

1. $\forall\, u \in X$, *tem-se:* $\displaystyle\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(r)\, u\, dr = S(t)\, u.$

2. $\forall\, u \in X$, *tem-se:* $\displaystyle\int_0^t S(r)\, u\, dr \in \mathcal{D}(A)$ *e* $\displaystyle A\left(\int_0^t S(r)\, u\, dr\right) = S(t)\, u - u.$

3. $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$, *tem-se:* $S(t)\, u \in \mathcal{D}(A)\,,\, \forall\, t \geq 0$ *e* $\displaystyle\frac{d}{dt} S(t)\, u = A\, S(t)\, u = S(t)\, A\, u.$

4. $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$, *tem-se:* $\displaystyle S(t)\, u - S(s)\, u = \int_s^t S(r)\, A\, u\, dr = \int_s^t A\, S(r)\, u\, dr.$

Demonstração. Ver [32]. □

Corolário 1.14. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Então $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [32]. □

Definição 1.24. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Denota-se por: $A^0 = I$, $A^1 = A$. Supondo que A^{n-1} esteja definido, se define A^n como:*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A^n) = \left\{u \in X : u \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \quad e \quad A^{n-1}\, u \in \mathcal{D}(A)\right\}, \\ A^n\, u = A\,(A^{n-1}\, u)\,,\, \forall\, u \in \mathcal{D}(A^n). \end{cases}$$

Proposição 1.14. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Então:*

1. *$\mathcal{D}(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear.*

2. $\forall\, u \in \mathcal{D}(A^n)$, *tem-se:* $S(t)\, u \in \mathcal{D}(A^n)\,,\, \forall\, t \geq 0$ *e* $\displaystyle\frac{d^n}{dt^n} S(t)\, u = A^n\, S(t)\, u = S(t)\, A^n\, u.$

3. *Formula de Taylor: se $u \in \mathcal{D}(A^n)$, então*
$$S(t)\, u = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\, S^k\, S(t_0)\, u + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-r)^{n-1}\, A^n\, S(r)\, u\, dr.$$

4. *$\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ é denso em X.*

Demonstração. Ver [29]. □

Proposição 1.15. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. O funcional $\|\cdot\|_n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\|u\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|A^k\, u\|$ é uma norma sobre $\mathcal{D}(A^n)$ com a qual $\mathcal{D}(A^n)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [29]. □

Definição 1.25. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. A norma $\|\cdot\|_n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \displaystyle\|u\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|A^k\, u\|$ é chamada* **norma do gráfico***.*

Proposição 1.16. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Então, para cada $u \in \mathcal{D}(A^n)$ tem-se: $S(t)\,u \in C^{n-k}([0,+\infty[\,;\mathcal{D}(A^k))$, para todo $k = 0, 1, ..., n$, com a norma do gráfico.*

Demonstração. Ver [29]. ☐

Teorema 1.39. *Sejam X um espaço de Banach e A o gerador de um C_0-semigrupo $T(t)$ em X satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ então $A + B$ é o gerador de um C_0-semigrupo $S(t)$ em X satisfazendo $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega+M\|B\|)t}$.*

Demonstração. Ver [32]. ☐

Definição 1.26. *Sejam X um espaço de Banach, X^* seu dual e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear.*
Denota-se o valor de $u^* \in X^*$ em $u \in X$ por $\langle u, u^*\rangle_{X\times X^*}$. Para cada $u \in X$, define-se o conjunto dualidade $F(u) \subset X^*$ como: $F(u) = \left\{u^* \in X^* : \langle u, u^*\rangle_{X\times X^*} = \|u\|^2 = \|u^*\|^2\right\}$.
A é chamado **dissipativo** *quando $Re\,\langle A\,u, u^*\rangle_{X\times X^*} \leq 0\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)$ com $u^* \in F(u)$.*

Observação: *Se $X = H$ é um espaço de Hilbert, então usando-se o teorema de Representação de Riesz, tem-se:*
A é **dissipativo** *quando $Re\,\langle A\,u, u\rangle_H \leq 0\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)$.*

Teorema 1.40. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear.*
A é dissipativo se e somente se $\|(\lambda\, I - A)\, u\| \geq \lambda\, \|u\|\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\,,\ \forall\, \lambda > 0$.

Demonstração. Ver [32]. ☐

Proposição 1.17. *Seja $(A, D(A))$ um operador dissipativo num espaço de Banach X, então:*

1. *$\lambda - A$ é injetivo para todo $\lambda > 0$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|$$

   para todo $z \in (\lambda - A)(D(A))$.

2. *$\lambda - A$ é sobrejetivo para algum $\lambda > 0$ se e somente se é sobrejetivo para cada $\lambda > 0$. Neste caso tem-se que $(0, +\infty) \subset \varrho(A)$.*

Demonstração. Ver [15] ☐

Teorema 1.41. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A.*
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0- semigrupo de contrações, se e somente se A é dissipativo.

Demonstração. Ver [30]. ☐

Lema 1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Se existe uma sequência $\{A_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{L}(X)$ tais que:*

1. *$A_m\, u \longrightarrow A\, u$ em X, $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$.*

2. $\left\{e^{t\,A_m}\right\}_{m\geq 1} \longrightarrow S(t)$ *em* $\mathcal{L}(X)\,,\ \forall\, t>0\,.$

Então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo com gerador infinitesimal* $A\,.$

Demonstração. Ver [30]. □

Lema 1.3. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A:\mathcal{D}(A)\subset X\longrightarrow X$ *um operador linear não limitado. Se* A *satisfaz:*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)}=X\,.$

2. $\mathbb{R}^+\subset\varrho(A)$ *e* $\|R(\lambda\,;\,A)\|\leq\dfrac{1}{\lambda}\,,\ \forall\,\lambda>0\,,$ *onde* $R(\lambda\,;\,A)=(\lambda\,I-A)^{-1}\,.$

Então $\displaystyle\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\lambda\,R(\lambda\,;\,A)\,u=u\,,\ \forall\,u\in X\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Definição 1.27. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A:\mathcal{D}(A)\subset X\longrightarrow X$ *um operador linear. Para cada* $\lambda>0\,,$ *define-se* **a Aproximação de Yosida de** $A\,,$ *como a aplicação linear* $A_\lambda: X\longrightarrow X$ *tal que*

$$A_\lambda:=\lambda\,A\,R(\lambda\,;A)=\lambda^2\,R(\lambda\,;A)-\lambda\,I\,.$$

Observação: A_λ *é limitado.*

Lema 1.4. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A:\mathcal{D}(A)\subset X\longrightarrow X$ *um operador linear não limitado. Se* A *satisfaz as condições do lema anterior, então* $\displaystyle\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}A_\lambda\,u=A\,u\,,\ \forall\,u\in\mathcal{D}(A)\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Lema 1.5. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A:\mathcal{D}(A)\subset X\longrightarrow X$ *um operador linear não limitado. Se* A *satisfaz as condições do lema anterior, então* $e^{t\,A_\lambda}\,,\ t\geq 0$ *é um semigrupo de contrações, uniformemente contínuo tal que:*

$$\|e^{t\,A_\lambda}\,u-e^{t\,A_\mu}\,u\|\leq t\,\|A_\lambda\,u-A_\mu\,u\|\,,\ \forall\,\lambda\,,\ \mu>0\,.$$

Demonstração. Ver [32]. □

Teorema 1.42 (**Hille - Yosida**). *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A:\mathcal{D}(A)\subset X\longrightarrow X$ *um operador linear não limitado.*
A *é o gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações, se e somente se*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)}=X\,.$

2. $\mathbb{R}^+\subset\varrho(A)$ *e* $\|R(\lambda\,;\,A)\|\leq\dfrac{1}{\lambda}\,,\ \forall\,\lambda>0\,.$

Demonstração. Ver [32]. □

Corolário 1.15. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* $A\,.$ *Então:*

$$S(t)\,u=\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}e^{t\,A_\lambda}\,u\,,\ \forall\,u\in X\,.$$

Demonstração. Ver [32]. $\square$

Corolário 1.16. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* A *. Então:*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda > 0\} \subset \varrho(A) \quad \textit{e para tal} \quad \lambda \quad \textit{tem-se} \quad \|R(\lambda\,;\,A)\| \leq \frac{1}{Re\,\lambda}\,.$$

Demonstração. Ver [32]. $\square$

Corolário 1.17. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*
A *é o gerador infinitesimal de um* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ C_0- *semigrupo satisfazendo* $\|S(t)\| \leq e^{\omega\,t}\,,\,\forall\, t \geq 0\,;$ *se e somente se*

1. A *é fechado e* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *.*
2. $\{\lambda \in \mathbb{C} : Im\,\lambda = 0\,,\,\lambda > \omega\} \subset \varrho(A)$ *e para tal* λ *tem-se* $\|R(\lambda\,;\,A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - \omega}\,.$

Demonstração. Ver [32]. $\square$

Proposição 1.18. *Sejam* X *um espaço de Banach ,* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear ,* $B \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo.*
Se A *é o gerador infinitesimal de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $A\,B = B\,A$*, então* $(A + B)$ *é o gerador infinitesimal do* $\left\{S(t)\,e^{B\,t}\right\}_{t\geq 0}$ C_0- *semigrupo.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.43 (**Lumer - Phillips**). *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear densamente definido.*

1. *Se* A *é dissipativo e existe uma* $\lambda_0 > 0$ *tal que* $Im\,(\lambda_0\,I - A) = X$ *, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*
2. *Se* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações, então* A *é dissipativo e* $\mathscr{R}\,(\lambda\,I - A) = X\,,\,\forall\,\lambda > 0\,.$

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Corolário 1.18. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear fechado e densamente definido.*
Se A *e* A^* *são dissipativos, então* A *é gerador infinitesimal de um* C_0- *semigrupo de contrações.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.44. *Seja* A *um operador linear densamente definido num espaço de Hilbert* H*.* A *é o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações se e somente se* A *é dissipativo e* $\mathscr{R}(I - A) = H$*.*

Demonstração. Ver [27] $\square$

Lema 1.6. *Sejam* X *um espaço de Banach ,* $B \in \mathcal{L}(X)$ *e* $A \in \mathcal{L}(X)$ *com inversa limitada.*
Se $\|B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ *então* $(A + B)$ *é linear, limitado e inversível.*

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.45. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, densamente definido e dissipativo.*
Se $0 \in \varrho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações.

Demonstração. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.46. *Seja A um operador dissipativo em X.*

(a) Se para algum $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - A) = X$ então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

(b) Se A é fechável então $\bar{A}$, é também dissipativo.

(c) Se $\overline{D(A)} = X$ então A é fechável.

Demonstração. Ver [32] $\square$

Teorema 1.47. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, dissipativo com $R(I - A) = X$.*
Se X é reflexivo, então $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Demonstração. Ver [32]. $\square$

1.8 Problema de Cauchy Abstrato.

Sejam X um espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, $f : [0, T\rangle \longrightarrow X$ uma aplicação e $x_0 \in X$.

Definição 1.28. *O problema de Cauchy abstrato é uma equação de evolução abstrata do tipo*

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) + f(t)\,, \quad t > 0 \\ u(0) = x_0\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Definição 1.29. *Uma aplicação $u : [0, T) \longrightarrow X$ é uma solução clássica de (1.6) sobre $[0, T)$, se u é contínua sobre $[0, T)$, continuamente diferenciável sobre $(0, T)$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para $(0, T)$ e u satisfaz (1.6) em $[0, T)$.*

Definição 1.30. *Sejam $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A, $f \in L^1(0, T; X)$ e x_0. A aplicação $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)\,x_0 + \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds\,, \quad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de solução integral do problema (1.6) sobre $[0, T]$.

Teorema 1.48. *Sejam $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A, $f \in L^1(0, T; X)$ contínua em $(0, T]$ e*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds\,, \quad 0 \leq t \leq T\,.$$

Então o problema (1.6) possui uma solução u sobre $[0, T)$ para cada $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, se uma das seguintes condições é satisfeita

1. v *é continuamente diferenciável sobre* $(0,T)$.

2. $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ *para* $0 < t < T$ *e* $A\,v(t)$ *é contínua sobre* $(0,T)$.

Reciprocamente, se (1.6) *possui uma solução* u *sobre* $[0,T)$ *para algum* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, *então* v *satisfaz as condições* 1 *e* 2.

Demonstração. Ver [32]. □

1.9 Estabilidade Exponencial e Analiticidade.

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados relacionados à estabilidade exponencial e decaimento do tipo polinomial de C_0- *semigrupos definidos em espaço de Hilbert.*

Definição 1.31. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A .
Diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é* **exponencialmente estável** *quando existem constantes* $\mu > 0$ *e* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\,e^{-\mu\,t}$, $\forall\, t \geq 0$.

Definição 1.32. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear.*
A **cota superior do espectro** *de* T , $\omega_\sigma(T)$, *é o valor*

$$\omega_\sigma(T) := \sup\{Re\,\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Definição 1.33. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A . *O* **tipo do semigrupo gerado por** A , $\omega_0(A)$, *é o valor*

$$\omega_0(A) := \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{ln\,\|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\,\|S(t)\|}{t}\,.$$

Proposição 1.19. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A . *Então:*

1. $\omega_0(t\,A) = t\,\omega_0(A)$, $\forall\, t > 0$.

2. $\forall\, \epsilon > 0$, *existe* $M_\epsilon \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon\, e^{(\omega_0(A)+\epsilon)\,t}$, $\forall\, t > 0$.

Demonstração. Ver [30]. □

Proposição 1.20. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo de contrações com gerador infinitesimal* A . *Se* $\omega_0(A) = 0$, *então* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$, $\forall\, t > 0$.

Demonstração. Ver [30]. □

Lema 1.7. *Sejam* X *um espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0- *semigrupo com gerador infinitesimal* A . *Então:*

1. $\omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A)$.

2. $R_\sigma(S(t)) = e^{\omega_0(A)\,t}$, $\forall\, t > 0$.

Demonstração. Ver [30]. □

Teorema 1.49. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Então:*

$$\omega_0(A) = \inf\left\{\mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,,\, \forall\, Re\,\lambda \geq \mu\right\}\,.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Corolário 1.19. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo com gerador infinitesimal A. Se $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subset \varrho(A)$ e $\|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,,\, \forall\, Re\,\lambda \geq 0\,,$ então existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq -\epsilon\} \subset \varrho(A)$$

e $\|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,,\, \forall\, Re\,\lambda \geq -\epsilon\,.$

Demonstração. Ver [30]. □

Corolário 1.20. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A.*
Se $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subset \varrho(A)$ e existe $M > 0$ tal que $\|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < M\,,\, \forall\, Re\,\lambda \geq 0\,,$ então o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável.

Demonstração. Ver [30]. □

Definição 1.34. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tem a* **propriedade do crescimento determinada pelo espectro,** *quando $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$.*

Proposição 1.21. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo com gerador infinitesimal A. Então:*
$\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)\,,$ se e somente se, $\forall\, \epsilon > 0\,,$ existe $M_\epsilon > 0$ tal que

$$\|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon\,,\, \forall\, Re\,\lambda \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon\,.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Teorema 1.50. *Seja $(S(t))_{t\,\geq\,0}$ um C_0-semigrupo sobre um espaço de Hilbert H, gerado por A.. Então $(S(t))_{t\,\geq\,0}$ é exponencialmente estável, se e somente se*

$$sup\{Re\lambda;\ \lambda \in \sigma(A)\} < 0$$

e

$$\sup_{Re\ \lambda\geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty$$

Demonstração. Ver [27] □

Teorema 1.51 (Gearhart). *Seja $(S(t))_{t\,\geq\,0}$ um C_0-semigrupo de contrações sobre um espaço de Hilbert H, gerado por A. O semigrupo $(S(t))_{t\,\geq\,0}$ é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$i\,\mathbb{R} \subset \varrho(A) \quad e \quad \limsup_{|\alpha|\longrightarrow+\infty} \left\|(i\,\alpha\, I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty\,.$$

Demonstração. Ver [17]. □

Teorema 1.52 (**Prüss - Huang - Renardy**). *Seja* $(S(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo sobre um espaço de Hilbert* H , *gerado por* $\mathcal{A}$ *. O semigrupo* $(S(t))_{t\geq 0}$ *é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$i\,\mathbb{R} \subset \varrho(A) \quad e \quad \left\|(i\,\lambda\, I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C\,, \quad \forall\,\lambda\,\in\,\mathbb{R}\,.$$

Demonstração. Ver [33]. □

Observação : *Observa-se que existem duas maneiras equivalentes de se obter estabilidade exponencial para* C_0- *semigrupos de contrações em espaços de Hilbert, e uma prova dessa equivalência pode ser encontrada em Liu - Zheng* [27] .
Nem sempre um semigrupo é exponencialmente estável. Neste caso, devemos procurar outra forma de estabilizar o sistema, como por exemplo determinar decaimento polinomial de soluções.

Vamos designar por $\Delta(\alpha)$ *o setor do plano complexo definido por*

$$\Delta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} | z \neq 0,\ |arg\ z| < \alpha,\ 0 < \alpha \leq \pi\}.$$

Seja X *um espaço de Banach.*

Definição 1.35. *(* ***Semigrupos Analíticos****) Diz-se que uma função* $S : \Delta(\alpha) \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{L}(X)$*, onde* $0 < \alpha \leq \pi/2$*, é um semigrupo holomorfo de classe* C_0 *em* $\Delta(\alpha)$ *se:*

1. $S(0) = I$*;*
2. $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$*, para todo* $z_1, z_2 \in \Delta(\alpha)$*;*
3. $\lim_{z\to 0} S(z)x = x$*, para todo* $z \in X$*,* $z \in \Delta(\alpha - \epsilon)$*,* $0 < \epsilon < \alpha$*;*
4. S *é holomorfa em* $\Delta(\alpha)$*.*

No que se refere a analiticidade de um C_0*-semigrupo de contrações em espaços de Hilbert, nós temos o seguinte resultado*

Teorema 1.53. *Seja* $S(t) = e^{At}$ *um* C_0*-semigrupo de contrações num espaço de Hilbert. Suponhamos que*

$$\{i\beta | \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \subset \varrho(A).$$

Então $S(t)$ *é analítico se e somente se*

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|\beta(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$$

Demonstração. Ver [27]. □

Capítulo 2

Um Exemplo Relativo a Má Colocação

2.1 Introdução

Nesta seção daremos primeiro as condições nas quais a equação

$$w_{tt}(t) + Bw_t(t) + Aw(t) = 0 \qquad (t \geq 0) \tag{2.1}$$

num espaço de Hilbert H com norma $\|.\|$, onde A é um operador auto-adjunto definido positivo em H e B é um operador adjunto positivo em H, não é fortemente bem colocada, conceito a definir na seção 2.2, seguidamente enunciamos uma caraterização para um problema ser fortemente bem colocado. Na seção 2.3 apresentamos uma condição, em geral fácil de verificar sob, a qual podemos conhecer se uma equação da segunda ordem não é fortemente bem colocada. Em seguida na seção 2.4, estudamos uma equação de viga com um coeficiente de amortecimento descontínuo (equação 2.5) onde o operador A é chamado o operador elástico e B como o operador de amortecimento, e será provado com a ajuda da proposição 2.1 que o correspondente operador $\overline{\mathscr{A}_B}$, onde

$$\begin{cases} \mathscr{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \\ D(\mathscr{A}_B) = D(A) \times [D(A^{1/2}) \cap D(B)], \end{cases} \tag{2.2}$$

não é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo no espaço $\mathscr{H} = V \times H$, onde $V = D(A^{1/2})$ com o produto interno induzido de maneira natural, o qual diz que em algumos casos a configuração de 2.2 pode ser inadequado. Por outro lado, pode acontecer que um problema não seja fortemente bem colocado em H mesmo que $\overline{\mathscr{A}_B}$ seja o gerador de um C_0-semigrupo analítico em $\mathscr{H}$(ver o exemplo 3.1 em [9]).

2.2 O Problema Fortemente Bem Colocado e Teoremas Relacionados

Denotamos com $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, vamos começar com algumas reformulações das definições de [16] e [39]:

Definição 2.1. *Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}_0^+ \to H$, é uma solução de (2.1) se $u(t)$ é duas vezes continuamente diferenciável, $u(t) \in D(A)$, $u_t \in D(B)$, $Au(t)$ e Bu_t são contínuas e (2.1) é satisfeita para $t \geq 0$.*

Definição 2.2. *Dizemos que o problema de Cauchy para (2.1) é bem colocado se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) Existem subespaços densos D_0, D_1 de H tal que, para qualquer $u_0 \in D_0$, $u_1 \in D_1$, existe a solução $u(t)$ de (2.1) com $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$.

(b) Existe uma função não negativa $N(t)$ definida em $t \geq 0$ tal que

$$\|u(t)\| \leq N(t)(\|u(0)\| + \|u_t(0)\|) \qquad (t \geq 0) \tag{2.3}$$

para qualquer solução de (2.1).

Definição 2.3. *Assuma que o problema de Cauchy para (2.1) é bem colocado. Defina para $t \geq 0$, $u \in D_0$, $v \in D_1$,*

$$C(t)u = u(t), \quad S(t)v = v(t),$$

onde $u(t)$ (resp. $v(t)$) é solução de (2.1) com $u(0) = u, u_t(0) = 0$ (resp. $v(0) = 0, v_t(0) = v$). Em vista da (2.3), $C(t)$ (resp. $S(t)$) é um operador limitado em D_0 (resp. D_1). Desde que D_0 (resp. D_1) é denso em H nós podemos estender $C(t)$ (resp. $S(t)$) a um operador limitado em H, o qual denotamos pelo mesmo símbolo.

Nós chamamos as funções $C(t)$ e $S(t)$ com valores em $\mathcal{L}(H)$, os propagadores de (2.1).

Definição 2.4. *Um estado de fase em $t \geq 0$ para a equação (2.1) é um espaço produto $\mathscr{H} = H_0 \times H_1$ munido de qualquer de suas normas produto, onde H_0 e H_1 são espaços de Hilbert satisfazendo as seguintes hipóteses:*

(a) $H_0, H_1 \subset H$ com inclusão contínua, mais ainda, $D_0 \cap H_0$ (resp. $D_1 \cap H_1$) é denso em H_0 na topologia de H_0 (resp. é denso em H_1 na topologia de H_1).

(b) Existe um C_0-semigrupo $\mathcal{G}(t)$ em $\mathcal{H}$ tal que

$$\mathcal{G}(t)\begin{bmatrix} u(0) \\ u_t(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix},$$

em $t \geq 0$ para qualquer solução $u(t)$ com $u(0) \in H_0$, $u_t(0) \in H_1$.

Se $B = 0$, a equação (2.1) torna-se na equação incompleta

$$w_{tt}(t) + Aw(t) = 0 \qquad t \geq 0). \tag{2.4}$$

Segundo [16] (capítulo 2, teoremas 1.1 e 2.1), se o problema de Cauchy para (2.4) é bem colocado então as soluções crescem exponencialmente e existe um estado de fase, ainda melhor a boa colocação é determinado pelo resolvente de A.

Teorema (A). *O Problema de Cauchy para (2.4) é bem colocado se e somente se existem constantes $C, \omega \geq 0$ tais que para $Re\lambda > 0$, $(\lambda^2 I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e*

$$\|[\lambda(\lambda^2 I + A)^{-1}]^{(n)}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Cn!(Re\lambda - \omega)^{-n-1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Demonstração. Ver [16], Teorema 2.1. □

No entanto, para a equação completa (2.1), os problemas são difíceis de discutir se usamos a mesma definição de boa colocação. Podemos encontrar situações que impliquem perda de crescimento exponencial de soluções e não existência de espaços de fase como foi ilustrado por [16](reveja o exemplo 2.1 e o teorema 2.3 do capítulo VIII). Para isso êm Fattorini [16] introduz a seguinte

Hipótese 3.1

(a) $S(t)u$ *é continuamente diferenciável em* $t \geq 0$ *para todo* $u \in H$.

(b) $S(t)(H) \subset D(B)$ *e* $BS(t)u$ *é continua em* $t \geq 0$ *para todo* $u \in H$.

Em [16], se mostra que a Hipótese 3.1 garante crescimento exponencial das soluções ([16], Teorema 3.2, Cap. VIII) ê a existência de um estado de fase ([16], Teorema 4.2, Cap. VIII).

Definição 2.5. *Dizemos que o problema de Cauchy para (2.1) é fortemente bem colocado se é bem colocado e satisfaz a Hipótese 3.1.*

Decorre das definições anteriores que se $\mathscr{A}_B$ *gera um* C_0*-semigrupo em* $\mathscr{H}$ *então a equação (2.1) é fortemente bem colocada em* H.

Existe uma caraterização muito útil para os problemas de Cauchy fortemente bem colocados, a qual enunciamos no contexto dos espaços de Hilbert:

Teorema 2.1. *Para a equação (2.1) os seguinte enunciados são equivalentes:*

1. *O problema de Cauchy para (2.1) é fortemente bem colocado.*

2. *Existe* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *tal que*
$$\Delta(\lambda_0) = \lambda_0^2 I + \lambda_0 B + A$$
é fechado, densamente definido e $\Delta(\lambda_0)(D(\Delta(\lambda_0))) = H$. *O problema de Cauchy é bem colocado e (2.1) tem uma única solução para todo valor inicial* $(u_0, u_1) \in (D(A) \cap D(B)) \times (D(A) \cap D(B))$.

3. $D(A) \cap D(B)$ *é denso em* H. *Existem constantes* $C, \omega \geq 0$ *tais que para* $Re\,\lambda > \omega$
$$\Delta(\lambda)^{-1} = (\lambda^2 I + \lambda B + A)^{-1} \in \mathcal{L}(H),$$
$\Delta(\lambda)^{-1} A$ *é fechável e*
$$\begin{array}{rcll} \|[\lambda\Delta(\lambda)^{-1}]^{(n)}\|_{\mathcal{L}(H)} & \leq & Cn!(Re\lambda - \omega)^{-n-1} & (n = 0, 1, 2, ...), \\ \|[B\Delta(\lambda)^{-1}]^{(n)}\|_{\mathcal{L}(H)} & \leq & Cn!(Re\lambda - \omega)^{-n-1} & (n = 0, 1, 2, ...), \\ \|[\Delta(\lambda)^{-1}Bu]^{(n)}\|_{\mathcal{L}(H)} & \leq & Cn!(Re\lambda - \omega)^{-n-1}\|u\| & (u \in D(A) \cap D(B), n = 0, 1, 2, ...). \end{array}$$

Demonstração. Ver [39] □

A seguir, escreveremos uma proposição estabelece condições suficientes para que o problema de Cauchy associado a (2.1) não seja fortemente bem colocado.

Proposição 2.1. *Seja A um operador autoadjunto definido positivo em H e B um operador autoadjunto não negativo em H, definimos*

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + A, \quad D(\Delta(\lambda)) := D_\Delta = D(A) \cap D(B).$$

Suponhamos que $D(A^{1/2}) \subset D(B^{1/2})$ e D_Δ não é denso em $D(A^{1/2})$, então $\mathscr{R}(\Delta(\lambda)) \neq H$, para todo $\lambda > 0$. Assim a equação (2.1) não é fortemente bem colocada em H.

Demonstração. Seja $\lambda > 0$, definimos em H a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} a_\lambda : V \times V & \to & \mathbb{C} \\ (u, v) & \mapsto & \lambda^2(u, v) + \lambda(B^{1/2}u, B^{1/2}v) + (A^{1/2}u, A^{1/2}v), \end{array}$$

onde $D(a_\lambda) := D(A^{1/2}) = V$. Note que A é autoadjunto e definida positiva, B é autoajunto e não negativa, assim existem $A^{1/2}$ e $B^{1/2}$ e são definida positiva e não negativa respectivamente, logo a_λ é bem definido.

Sejam $u, v \in V$, da linearidade do produto interno em H e a linearidade dos operadores $A^{1/2}$ e $B^{1/2}$ que a_λ é uma forma sesquilinear em V e também vale $a_\lambda(u, v) = \overline{a_\lambda(v, u)}$.

Por outra lado para $u \in V$, temos que

$$a_\lambda(u, u) = \lambda^2(u, u) + \lambda(B^{1/2}u, B^{1/2}u) + (A^{1/2}u, A^{1/2}u) \geq 0$$

e

$$a_\lambda(u, u) \geq \lambda^2(u, u).$$

Da ultima desigualdade, se $a_\lambda(u, u) = 0$, então $u = 0$, isto é a_λ é uma forma sesquilinear simétrica definida positiva, por tanto a_λ é um produto interno em V.

Já que $D(A^{1/2})$ é denso em H, então a_λ é densamente definida em H. Também acontece que a forma a_λ é fechada; de fato, seja $(x_n) \subset V$, $x_n \overset{H}{\to} x$ e $a_\lambda[x_n - x_m] \to 0$, então

$$\|A^{1/2}x_n - A^{1/2}x_m\|^2, \|B^{1/2}x_n - B^{1/2}x_m\|^2 \to 0.$$

Segue-se que existem $x_1, x_2 \in H$ tais que $A^{1/2}x_n \overset{H}{\to} x_1$ e $B^{1/2}x_n \overset{H}{\to} x_2$, já que os operadores $A^{1/2}$, $B^{1/2}$ são fechados, então $x \in D(A^{1/2}) \cap D(B^{1/2}) = D(A^{1/2})$ e $x_1 = A^{1/2}x$ e $B^{1/2}x = x_2$, logo $x \in D(a_\lambda)$ e $a_\lambda[x_n - x] \to 0$, pela proposição (1.7) temos provado que a forma a_λ é fechada.

Além disso $a_\lambda[u] \geq \lambda^2\|u\|^2$, para $u \in D(a_\lambda)$, i.e a_λ é semi-limitada inferiormente. Assim se cumprem as hipóteses do Primeiro e Segundo Teorema de Representação (Teoremas 1.15, 1.17), logo existe um operador autoadjunto não-negativo $\widetilde{\Delta}$ tal que $D(\widetilde{\Delta}^{1/2}) = V$. Da proposição (1.6) temos que $a_\lambda(u, v) = (\Delta(\lambda)u, v)$ para $u \in D_\Delta$, $v \in V$, dai que pelo item 4) do Teorema(1.15):

$$\Delta \subset \widetilde{\Delta}.$$

Como $D(\widetilde{\Delta})$ é denso em $D(\widetilde{\Delta}^{1/2}) = V = D(A^{1/2})$ então $D_\Delta \neq D(\widetilde{\Delta})$. Observando que $\widetilde{\Delta} \geq \lambda^2$ então $\widetilde{\Delta}$ é injetiva, logo existe $\widetilde{\Delta}^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Segue-se daí que $\mathscr{R}(\Delta(\lambda)) \subsetneq \mathscr{R}(\widetilde{\Delta})$, logo $\mathscr{R}(\Delta(\lambda)) \neq H$, para todo $\lambda > 0$. Se a equação (2.1) fosse fortemente bem colocada, pelo Teorema (2.1 $\Delta(\lambda_0)$ é sobrejetivo para algum $\lambda_0 > 0$ o qual é absurdo, isto conclui a prova. □

2.3 Uma Equação de Viga com Coeficiente de Amortecimento Descontinuo

Consideremos a equação de viga amortecida

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) + w_{xxxx}(x,t) - (d(x)w_{xt}(x,t))_x = 0, & (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}^+, \\ w(0,t) = w(2,t) = w_x(0,t) = w_x(2,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde

$$d(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Seja $H = L^2(0,2)$, defina em H os operadores

$$\begin{cases} Aw = w_{xxxx} & D(A) = H^4(0,2) \cap H_0^2(0,2), \\ Bv = -(d(x)v_x)_x, & D(B) = \{v \in H_0^1(0,2) / \, dv_x \in H^1(0,2)\}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Afirmação 2.1. *Os operadores A, B definidos em (2.6) são positivos, autoadjuntos em H e*

$$D(A^{1/2}) = H_0^2(0,2), \quad D(B^{1/2}) = D(A^{1/4}) = H_0^1(0,2).$$

Demonstração. Seja $\Omega = (0,2)$, dividimos a prova em etapas:

(a) <u>A, B são operadores monótonos:</u> seja $v \in D(A)$, pelo teorema (1.31), $v \in C^3(\overline{\Omega})$. Por outra parte $v \in H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ e $v_x \in H_0^1(\Omega)$, pelo teorema (1.28) temos que $v = v_x = 0$ em $\partial\Omega$. Agora consideramos

$$(Av, v) = \int_0^2 v_{xxxx}(x,t)\overline{v}(x,t)dx,$$

pelas considerações anteriores e integrando por partes temos que

$$(Av,v) = v_{xxx}\overline{v}|_0^2 - \int_0^2 \overline{v_x}v_{xxx} = -\int_0^2 \overline{v_x}v_{xxx} = -v_{xx}\overline{v}_x|_0^2 + \int_0^2 \overline{v_{xx}}v_{xx} = \int_0^2 v_{xx}\overline{v_{xx}} \geq 0.$$

Logo o operador A é monótono.
Agora tomemos $w \in D(B)$, como antes temos que $w = 0$ em $\partial\Omega$ e $dw_x \in C(\overline{\Omega})$, logo por integração por partes

$$(Bw,w) = \int_0^2 (-dw_x)_x\overline{w}dx = (\overline{w}(-dw_x))|_0^2 - \int_0^2 (-dw_x)\overline{w_x} = \int_0^2 d|w_x|^2 \geq 0.$$

(b) <u>$\mathscr{R}(I + A) = \mathscr{R}(I + B) = H:$</u> sejam $f, g \in H$, por provar que existem $w_0 \in D(A)$ e $w_1 \in D(B)$ satisfazendo

$$w_0 + w_{0xxxx} = f \text{ e } w_1 - (dw_{1x})_x = g.$$

Consideremos á aplicação b dada por

$$b(u,v) = \int_\Omega u\overline{v} + \int_\Omega u_{xx}\overline{v_{xx}}, \qquad u, v \in D(b) = H_0^2(\Omega).$$

É claro que b é sesquilinear e continua, a coercividade segue da Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.24). Considerando a forma antilinear contínua $\overline{f}(v) = (f,v)$ com $v \in H_0^2(\Omega)$ temos pelo Teorema de Lax-Milgram versão complexa (Teorema 1.14) que existe um único $u \in H_0^2(\Omega)$ verificando que $b(u,v) = \overline{f}(v)$, para todo $v \in H_0^2(\Omega)$, em particular temos que

$$\int_\Omega (f-u)\overline{v} = \int_\Omega u_{xx}\overline{v_{xx}} \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Segue-se dai que existe a derivada distribucional de ordem 2 de u_{xx} e $u_{xxxx} = f - u \in H = L^2(\Omega)$. Fixando $y_0 \in \Omega$ e definindo $w(x) = \int_{y_0}^x (f-u)$, temos pela proposição (1.11) que $w \in C(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (pois $|I| < \infty$) e $w_x = f - u = u_{xxxx}$, dai que existe $u_{xxx} = w \in L^2(\Omega)$. Assim $u \in H^4(\Omega)$, junto $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

Agora consideremos a aplicação h dada por $h(u,v) = \int_\Omega u\overline{v} + \int_\Omega du_x\overline{v'}$ com $u, v \in D(h) = H_0^1(\Omega)$. É claro que h é sesquilinear e continua, a coercividade decorre de

$$h(u,u) = \int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega d|u_x|^2 \geq \int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |u_x|^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Definindo a forma antilinear continua $\tilde{g}(v) = (g,v)$ com $v \in H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema de Lax-Milgram versão complexa (Teorema 1.14) que existe um único $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $h(u_o, v) = (g,v)$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Analogamente ao raciocínio anterior temos que $-(dv_x)_x = g - v \in L^2(\Omega)$. Assim temos que $dv_x \in H^1(\Omega)$. Junto $v \in D(B)$.

(c) A, B são autoadjuntos: Temos pelos itens anteriores que A, B são operadores maximaís monótonos, logo pela proposição (1.4) são densamente definidos em H. Sejam $u, v \in D(A) \subset H_0^2(\Omega)$ temos que

$$(Au, v) = \int_\Omega u_{xxxx}\overline{v} = \int_\Omega (f_u - u)\overline{v} = \overline{f_u}(v) - (u,v) = \int_\Omega u_{xx}\overline{v_{xx}},$$

e

$$(u, Av) = \int_\Omega u\overline{v^{xxxx}} = \int_\Omega u\overline{(f_v - v)} = \overline{\overline{f_v}(u) - (v,u)} = \overline{(v_{xx}, u_{xx})} = (u_{xx}, v_{xx}) = \int_\Omega u_{xx}\overline{v_{xx}}.$$

De donde concluímos que A é simétrico. Sejam agora $u, v \in D(B)$, temos que

$$(Bu, v) = (-(du_x)_x, v) = (f_u - u, v) = (du_x, v_x),$$

e

$$(u, Bv) = (u, -(dv_x)_x) = (u, f_v - v) = \overline{(f_v - v, u)} = \overline{(dv_x, u_x)} = (du_x, v_x).$$

De donde temos que B é simétrico. Segue-se da proposição (1.5) que A, B são autoadjuntos.

(d) A, B são definidos positivos: Temos do item (a) que para $v \in D(A)$, $(Av, v) = \|v_{xx}\|_H^2$. Assim, $(Av, v) = 0$ então $v_{xx} = 0$ q.t.p em Ω, já que $v \in C^3(\overline{\Omega})$ e $v = v_x = 0$ em $\partial\Omega$. Logo $v = 0$ q.t.p em Ω. Analogamente, se $(Bw, w) = 0$, $w \in D(B)$ pelo item (a), temos que $w = 0$ q.t.p em Ω.

(e) $D(A^{1/2}) = H_0^2(\Omega)$ e $D(B^{1/2}) = D(A^{1bh/4}) = H_0^1(\Omega)$: seja $t[u,v] = (Au, v)$ a forma gerada por A, $D(t) = D(A)$, pela proposição (1.9) t é densamente definida, simétrica, não negativa ($t \geq 0$, $m = 0$) e fechável, já que A é autoadjunto, segue do primeiro e segundo teorema de representação que $A_{\overline{t}} = A$ e $D(\overline{t}) = D(A^{1/2})$. Do item (c) temos $t[u,v] = (u_{xx}, v_{xx})$, logo a norma do $D(t)$

é dada por $\|u\|_t^2 = \|u_{xx}\|_H^2 + \|u\|_H^2$, $u \in D(t)$ e notamos que pela desigualdade Poincaré é uma norma equivalente em $H_0^2(\Omega)$.
Se $x \in D(\bar{t})$ e $(x_n) \subset D(t)$ a sequência associada a x na definição de $D(\bar{t})$, então (x_n) é de Cauchy em $\|.\|_t$, $D(t) \subset H_0^2(\Omega)$ e como $\|.\|_t$ é uma norma em $H_0^2(\Omega)$, temos que $x \in H_0^2(\Omega)$, logo temos provado que $D(\bar{t}) \subset H_0^2(\Omega)$.
Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^2(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega) \subset D(t)$, temos que $H_0^2(\Omega) \subset D(\bar{t})$. Portanto, $D(\bar{t}) = H_0^2(\Omega)$.
Por outro lado, considerando $X = H_0^2(\Omega)$ e $Y = L^2(\Omega)$ temos que estos espaços verificam a condição (1.2), logo existe um operador $\tilde{A}$ autoadjunto e definido positivo tal que $D(\tilde{A}^{1/2}) = X$, decorre de (1.3) e o feito acima que

$$D(A^{\frac{1-\theta}{2}}) = D(\tilde{A}^{\frac{1-\theta}{2}})$$

com normas equivalentes.
Decorre do teorema (1.34) aplicado com $\theta = \frac{1}{2}$ que

$$[H_0^2(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega) = D(\tilde{A}^{1/4}),$$

segue-se disto e a relação entre $\tilde{A}$ e A e além disso que $D(A^{1/4}) = H_0^1(\Omega)$.

Como antes consideramos a forma s gerada por B, ela é densamente definida, simétrica, não negativa; segue do primeiro e segundo teorema de representação que $B_{\bar{s}} = B$ e $D(\bar{s}) = D(B^{1/2})$, do item (c) temos que $s[u, v] = (du_x, v_x)$, logo a norma do $D(s)$ é dada por $\|u\|_s^2 = \|u\|_H^2 + \|\sqrt{d}u_x\|_H^2$, como $d > 0$ é limitada, temos que $\|.\|_s$ é equivalente a norma do $H_0^1(\Omega)$, segue da definição de $D(\bar{s})$ e de maneira análoga ao anterior que $D(\bar{s}) = H_0^1(\Omega)$.

□

Proposição 2.2. *O $\mathscr{A}_B$ definido por (2.2) onde A, B são definidos por (2.6); é densamente definido, fechado dissipativo em $\mathscr{H} = H_0^2(0,2) \times L^2(0,2)$, mas a imagem $(\mathscr{I} - \mathscr{A}_B)(D(\mathscr{A}_B)) \neq \mathscr{H}$. Isto é $\overline{\mathscr{A}_B}$ não é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em $\mathscr{H}$.*

Demonstração. A prova decorre da proposição da seção anterior e o fato que $\mathscr{A}_B$ é fechado. Note que $D(A^{1/2}) \subset D(B^{1/2})$. Note que $D(A^{1/2}) \cap D(B) = \{v \in H_0^2(\Omega)/v_x(1) = 0\}$ e que $D(A^{1/2}) \cap D(B)$ não é denso em $D(A^{1/2})$. De fato Como antes denotamos com $\Omega = (0, 2)$, $V = H_0^2(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, temos então que

$$\begin{aligned} D(A) \cap D(B) &= H^4(\Omega) \cap (H_0^2(\Omega) \cap \{v \in H_0^1(\Omega)/dv_x \in H^1(\Omega)\}) \\ &= H^4(\Omega) \cap (D(A^{1/2}) \cap \{v \in H_0^1(\Omega)/dv_x \in H^1(\Omega)\}) \\ &= H^4(\Omega) \cap \{v \in H_0^2(\Omega)/v_x(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Seja

$$\varphi(x) = \begin{cases} exp(4/((6x-5)^2 - 4)) \text{ ; se } x \in (1/2; 7/6) \\ 0 \quad \text{; se } x \in \mathbb{R} \setminus (1/2; 7/6) \end{cases}$$

então $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $supp(\varphi) = [1/2; 7/6] \subset (0; 2)$, dai que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^2(\Omega) = D(A^{1/2})$, $\varphi(1) \neq 0$. Agora suponhamos que existe $(f_n) \subset D(A) \cap D(B)$, tal que $f_n \overset{H_0^2}{\to} \varphi$, daí que $(f_n)_x \overset{L^2}{\to} \varphi_x$.

Logo existe $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que $(f_{n_j})_x \to \varphi_x$ q.t.p em Ω, como $(f_{n_j})_x(1) = 0$ então $\varphi_x(1) = 0$ o qual é uma contradição. Logo pela proposição anterior, o problema (2.5) não é fortemente bem colocado e por tanto $\mathscr{A}_B$ não é o gerador de um C_0-semigrupo.

Agora daremos uma prova direta da proposição 2.2 , para isto consideramos $H_0^2(\Omega) = D(A^{1/2})$ munido do produto interno $(A^{1/2}., A^{1/2}.)_H$, a qual, pela desigualdade de Poincaré é equivalente a norma do gráfico de $H_0^2(\Omega)$. Começamos provando que:

(a) $\underline{\mathscr{A}_B \text{ é dissipativo:}}$ seja $y = (u, v)^T \in D(\mathscr{A}_B)$, então

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}_B y, y)_{\mathscr{H}} &= = (v, u)_V + (-Au - bv, v)_H \\
&= (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_H - (Au, v)_H - (Bv, v)_H \\
&= (v, Au)_H - (Au, v)_H - (Bv, v)_H \\
&= 2iIm((v, Au)_H) - (Bv, v)_H.
\end{aligned}$$

Onde a terceira igualdade decorre da proposição (1.6), assim $Re(\mathscr{A}_B y, y)_{\mathscr{H}} = Re(-(Bv, v)) \leq 0$.

(b) $\underline{D_1 := D(A^{1/2}) \cap D(B) = \{v \in H_0^2(\Omega)/v_x(1) = 0\}}$: seja $w \in C_0^\infty(\Omega)$ então

$$\begin{aligned}
((dv_x)_x, w) &= -(dv_x, w_x) \\
&= -\int_0^2 dv_x w_x \\
&= -\int_0^1 v_x w_x - 2\int_1^2 v_x w_x \\
\text{(int. por partes)} &= -\{v_x w|_0^1 - \int_0^1 v_{xx} w\} - 2\{v_x w|_1^2 - \int_1^2 v_{xx} w\} \\
&= v_x(1)w(1) + \int_0^1 v_{xx} w + 2\int_1^2 v_{xx} w \\
&= v_x(1)w(1) + \int_0^2 dv_{xx} w \\
&= (v_x \delta_1 + dv_{xx}, w).
\end{aligned}$$

Assim temos que $((dv_x)_x - dv_{xx}, w) = (v_x(1)\delta_1, w)$ para todo $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Segue-se que

$$v \in D(A^{1/2}) \cap D(B) \text{ se e somente se } v \in H_0^2(\Omega) \text{ tal que } v_x(1) = 0$$

Alem disso $(dv_x)_x = dv_{xx}$.

(c) $\underline{R_1 := \mathscr{R}(\mathscr{A}_B) = D_1 \times H}$: seja $y = (u, v) \in D(A) \times D_1$, tem-se que

$$\mathscr{A}_B y = (v, -Au - Bv) \in D_1 \times H.$$

Dado $(f, g) \in D_1 \times H$ queremos provar que existem $(u_0, v_0) \in D(A) \times D_1$ e $\mathscr{A}_B(u_o, v_o) = (f, g)$ isto é possível se e somente se $v_o = f$ e $-Au_0 - Bv_0 = g$. Definindo $v_0 = f \in D_1$ temos que $-g - Bv_0 \in L^2(\Omega)$. Logo existe um único $u_0 \in D(A)$ tal que $Au_0 = -g - bv_0$ (decorre da existência da solução fraca e o teorema de regularidade 1.25).

(d) $\underline{R_1 \text{ é fechado em } \mathscr{H}}$: sejam $(f, g) \in \overline{D_1 \times H}^{\mathscr{H}}$, então existe $(f_n) \subset D_1$ e $(g_n) \subset H$ tal que $f_n \overset{H_0^2}{\to} f$ e $g_n \overset{H}{\to} g$. Logo $f \in H_0^2(\Omega)$, $g \in H$ e existe $(f_{n_j}) \subset (f_n)$, $(f_{n_j})_x \to f_x$, $q.t.p$ assim $f_x(1) = 0$ i.e $f \in D_1$, portanto $(f, g) \in \mathscr{R}_1$.

(e) $\underline{D(\mathscr{A}_B) = D(A) \times D_1 \text{ é denso em } \mathscr{H}}$: seja $(f, g) \in \mathscr{H}$, então $f \in H_0^2(\Omega)$ e $g \in \times L^2(\Omega)$. Como $C_c^\infty(\Omega) \subset D(A) \subset H_0^2(\Omega)$ e $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^2}} = H_0^2(\Omega)$ então existe $(f_n) \subset C_0^\infty(I) \subset D(A)$ tal que $f_n H_0^2 \to f$. Por outro lado $g \in L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega \setminus \{1\})$, logo existe $(g_n) \subset C_c^\infty(\Omega \setminus \{1\}) \subset C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^2(I)$ tal que $g_n \overset{L^2(\Omega\setminus\{1\})}{\longrightarrow} g$ e $g_n^{(k)}(1) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, decorre do teorema (1.29) que $g_n \in H_0^2(\Omega)$, daí que $g_n \in D_1$ e $g_n \overset{L^2(I)}{\longrightarrow} g$.

(f) Existe $\mathscr{A}_B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$: considere

$$\mathscr{A}_B^{-1} := \begin{bmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

É claro que $\mathscr{A}_B^{-1} \circ \mathscr{A}_B = \mathscr{I}_{D(\mathscr{A}_B)}$ e $\mathscr{A}_B \circ \mathscr{A}_B^{-1} = \mathscr{I}_{D(\mathscr{A}_B^{-1})}$.
Seja $y = (u, v) \in R_1$, temos que $\mathscr{A}_B^{-1} y = (-A^{-1}Bu - A^{-1}v, u)$

$$\begin{array}{rcl} \|\mathscr{A}_B^{-1}y\|_{\mathscr{H}} & = & \|-A^{-1}Bu - A^{-1}v\|_{H_0^2} + \|u\|_{L^2} \\ & \leq & \|A^{-1}Bu\|_{H_0^2} + \|A^{-1}v\|_{H_0^2} + \|u\|_{L^2} \\ (C \text{ é uma constante obtida da desig. de Poincaré}) & \leq & C\|Bu\|_{L^2} + C\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \\ & = & C\|-(du_x)_x\|_{L^2} + C\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \\ & = & C\|du_{xx}\|_{L^2} + C\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \\ & \leq & C\|d\|_\infty \|u_{xx}\|_{L^2} + C\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \\ & = & 2C\|u_{xx}\|_{L^2} + C\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \\ & \leq & \tilde{C}\|u\|_{H_0^2} + \tilde{C}\|v\|_{L^2} \\ & = & \tilde{C}\|y\|_{\mathscr{H}} \end{array}.$$

Por tanto $\mathscr{A}_B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$.

(g) $\mathscr{A}_B$ é fechado: decorre do fato de que $\mathscr{A}_B^{-1}$ é limitado e R_1 é fechado.

(h) $0 \in \sigma(\mathscr{A}_B)$: decorre do fato de $R_1 \subsetneq \mathscr{H}$ (0 pertence ao espectro residual). De fato R_1 é um hiperplano não trivial (a demonstração é análoga ao caso presentado no [9]).

Finalmente suponhamos que $\mathscr{R}(\mathscr{I} - \mathscr{A}_B) = \mathscr{H}$, pela dissipatividade de $\mathscr{A}_B$ e pela proposição (1.17) temos que $(0, +\infty) \subset \varrho(\mathscr{A}_B)$. Logo existe uma sucessão $(u_n) \subset \varrho(\mathscr{A}_B)$, tal que $u_n \to 0$. Assim, pelo Teorema (1.9) temos que $\|R(u_n, \mathscr{A}_B)\| \to \infty$. Segue-se do Teorema (1.4) que existe $z_0 \in \mathscr{H}$, $z_0 \neq 0$ e $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $\|R(u_{n_j}, \mathscr{A}_B) z_0\| \to \infty$. Definimos

$$z_j := \frac{R(u_{n_j}, \mathscr{A}_B) z_0}{\|R(u_{n_j}, \mathscr{A}_B) z_0\|_{\mathscr{H}}}.$$

Temos que $z_j \in D(u_{n_j} - \mathscr{A}_B) = D(\mathscr{A}_B)$, $\|z_j\|_{\mathscr{H}} = 1$. Por outra parte

$$u_{n_j} R(u_{n_j}, \mathscr{A}_{\mathscr{B}}) - \mathscr{A}_B R(u_{n_j}, \mathscr{A}_{\mathscr{B}}) = \mathscr{I}_{\mathscr{H}},$$

substituindo z_j:

$$u_{n_j} z_j - \mathscr{A}_B z_j = \frac{z_0}{\|R(u_{n_j}, \mathscr{A}_B z_0)\|_{\mathscr{H}}},$$

dai que $\mathscr{A}_B z_j \to 0$ e como $\mathscr{A}_B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ temos que $z_j \to 0$, o qual é uma contradição. Portanto pelo teorema (1.44) $\mathscr{A}_B$ não é o gerador de um C_0-semigrupo.

$\square$

Capítulo 3

Semigrupos Definidos por Formulações Variacionais

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos as condições que devem apresentar as formas bilineares de tal maneira que a solução da equação este definido por um semigrupo C_0 de contrações.

3.2 Os Modelos

Consideremos a seguinte equação de evolução variacional

$$c(w_{tt}(t), \hat{w}) + b(w_t(t), \hat{w}) + a(w(t), \hat{w}) = 0, \;\; \forall \hat{w} \in V, t > 0. \tag{3.1}$$

Um sistema elástico linear amortecido pode ser escrito sob a forma (3.1), onde $a(v, v)$ e $c(v, v)$ são as formas quadráticas relacionadas a energia de deformação e a energia cinética, respectivamente e além disso $b(v, v)$ é a forma a quadrática tal que, $Reb(v, v)$ e $Imb(v, v)$ representam as forças de amortecimento e giroscópicas respetivamente (Ver [24]).

Assumamos que:

(A1) *V, H são espaços de Hilbert com produto interno e norma $a(.,.)$ e $\|.\|_V$, $c(.,.)$ e $\|.\|_H$ respectivamente.*

(A2) *$V \hookrightarrow H$ é uma imersão contínua e densa.*
Existe $M > 0$ tal que $M\|u\|_H^2 \leq a(u, u)$, para tudo $u \in V$. Como V é denso em H, então pelo primeiro e segundo teorema de representação para formas sesquilineares (teoremas 1.15, 1.17), existe um operador autoadjunto, definido positivo A em H tal que

$$c(Au, u) = a(u, u) = \|u\|_V^2 \geq Mc(u, u) = M\|u\|_H^2 \;\; \forall u \in D(A),$$

e

$$D(A^{1/2}) = V, \quad a(u, v) = c(A^{1/2}u, A^{1/2}v), \; \forall u, v \in V.$$

Decorre do H é Hilbert separável e o teorema (1.22) e sua observação correspondente que $D(A^\beta)$, com $0 < \beta \leq 1$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$c(A^\beta., A^\beta.).$$

(A3) $b(.,.)$ *é uma forma sesquilinear contínua em $D(A^{\alpha/2})$, para $\alpha \in (0,1]$.*
Pelo teorema de representação de Riesz, existe um operador $S_1 \in \mathcal{L}(D(A^{\alpha/2}))$ tal que

$$b(u,v) = c(A^{\alpha/2}S_1u, A^{\alpha/2}v), \ \ \forall u, v \in D(A^{\alpha/2}).$$

Definimos $S := A^{\alpha/2}S_1$, tomando $v = A^{-\alpha/2}Su$, com $u \in D(A^{\alpha/2})$ obtemos que

$$S \in \mathcal{L}(D(A^{\alpha/2}); H), \tag{3.2}$$

já que b é contínua em o referido domínio.
Seja

$$\mathscr{H} = V \times H$$

com o produto interno induzido de maneira natural dado por

$$< (u,v), (\hat{u}, \hat{v}) >_{\mathscr{H}} = a(u,\hat{u}) + c(v,\hat{v}).$$

Definimos o operador $\mathscr{A}$ em $\mathscr{H}$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} D(\mathscr{A}) = \{(u,v) \in \mathscr{H} | u \in D(A^{1-(\alpha/2)}), v \in V, A^{1-(\alpha/2)}u + Sv \in D(A^{\alpha/2})\}, \\ \mathscr{A}(u,v) = (v, -A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + Sv]). \end{cases} \tag{3.3}$$

Denotamos por $b(v) = b(v,v)$.

Teorema 3.1. *Sob as condições (A1)-(A3) e assumindo que existe $\lambda_0 \geq 0$ tal que*

$$\lambda_0 \|v\|_H^2 + Re\ b(v) \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Então $\mathscr{A}$ é o gerador de um C_0- semigrupo $e^{t\mathscr{A}}$ em $\mathscr{H}$.

Demonstração. Podemos supor que $\lambda_0 = 0$. De fato, consideramos a forma

$$b_0(v) = b(v) + \lambda_0 \|v\|_H^2,$$

então por (3.2), o operador $S_0 \in \mathcal{L}(D(A^{\alpha/2}); H)$, onde $b_0(u,v) = c(S_0u, A^{\alpha/2}v)$ tem a forma

$$S_0 = S + \lambda_0 A^{-\alpha/2}, \quad D(S_0) = D(S).$$

De fato para $u, v \in D(A^{\alpha/2})$

$$\begin{array}{rcl} b_0(u,v) & = & c(S_0u, A^{\alpha/2}v) \\ & = & b(u,v) + \lambda_0(u,v) \\ & = & c(Su, A^{\alpha/2}v) + \lambda_0 c(u,v) \\ (A^{-\alpha/2} \in \mathcal{L}(H, D(A^{\alpha/2})), A^{-\alpha/2} = (A^{-\alpha/2})^*) & = & c(Su, A^{\alpha/2}v) + \lambda_0 c(A^{-\alpha/2}u, A^{\alpha/2}v). \end{array}$$

Tomando $v = A^{-\alpha/2}w$ com $w \in H$ nesta ultima igualdade temos que

$$c(S_0u, w) = c(Su + \lambda_0 A^{-\alpha/2}u, w), \qquad u \in D(A^{\alpha/2}),\ w \in H,$$

logo $S_0 = S + \lambda_0 A^{-\alpha/2}$ e $D(S_0) = D(S)$.
Do anterior deduzimos que

$$D(\mathscr{A}_0) = \{(u,v) | u \in D(A^{1-(\alpha/2)}), v \in V, A^{1-(\alpha/2)}u + (S + \lambda_0)A^{-\alpha/2}v \in D(A^{\alpha/2})\} = D(\mathscr{A})$$

pois $A^{-\alpha/2}v \in D(A^{\alpha/2})$, para todo $v \in H$, também

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}_0(u,v) & = & (v, -A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + S_0 v]) \\ & = & (v, -A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + Sv]) + (0, -A^{\alpha/2}(\lambda_0 A^{-\alpha/2}v)) \\ & = & \mathscr{A}(u,v) - \lambda_0(0, A^{\alpha/2}(A^{-\alpha/2}v)). \end{array}$$

Definindo $\mathscr{B}(u,v) = (0, \lambda_0 v)$, temos que $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A} - \mathscr{B}$ e $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. Logo pelo Teorema (1.39) temos que $\mathscr{A}_0$ é o gerador de um C_0-semigrupo se e somente se $\mathscr{A}$ é gerador de um C_0-semigrupo.

(a) $\underline{\mathscr{A}\text{ é dissipativo:}}$ seja $(u,v) \in D(\mathscr{A})$, como

$$A^{\alpha/2} = (A^{\alpha/2})^*$$

e

$$(u,v)_V = a(u,v) = c(A^{1/2}u, A^{1/2}v) = (u,v)_H,$$

temos que

$$\begin{array}{rcl} < \mathscr{A}(u,v),(u,v) >_{\mathscr{H}} & = & (v,u)_V + (-A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}u + Sv), v)_H \\ (\,0 < \alpha \leq 1\,:V = D(A^{1/2}) \hookrightarrow D(A^{\alpha/2})) & = & (v,u)_V - (A^{1-(\alpha/2)}u + Sv, A^{\alpha/2}v)_H \\ & = & (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_H - (A^{1-(\alpha/2)}u, A^{\alpha/2}v)_H \\ & & -(Sv, A^{\alpha/2}v)_H \\ & = & (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_H - (A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}u), v)_H \\ & & -b(v) \\ (\text{ teorema 1.21}, f(x) = x^{1-(\alpha/2)},\ g(x) = x^{\alpha/2}) & = & (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_H - (Au, v)_H - b(v) \\ (1/2 \leq 1 - \alpha/2\,: D(A^{1-(\alpha/2)}) \hookrightarrow D(A^{1/2})) & = & (A^{1/2}v, A^{1/2}u)_H - (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_H - b(v) \\ & = & 2Im((A^{1/2}v, A^{1/2}u)_H)i - b(v). \end{array}$$

Daí que $Re(< \mathscr{A}(u,v),(u,v) >_{\mathscr{H}}) = -Re\ \ b(v) \leq 0$.

(b) $\underline{Ker(\mathscr{A})=\{0\}}$: consideramos $(u,v) \in D(\mathscr{A})$, tal que $\mathscr{A}(u,v) = (v, -A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + Sv]) = 0$, então $v = 0$ e $-A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + Sv] = 0$, já que $A^{\alpha/2}$ é definido positivo então $A^{1-(\alpha/2)}u = 0$. De novo pelo mesmo argumento segue que $u = 0$.

(c) $\underline{R(\mathscr{A}) = \mathscr{H}}$: seja $(f,g) \in \mathscr{H}$, temos que provar que existe (u,v) tal que $\mathscr{A}(u,v) = (f,g)$, isto é, se e somente se $(v, -A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + Sv]) = (f,g)$ se e somente se

$$v = f \ \text{ e } \ - A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u + Sv] = g.$$

Definimos $v := f$ e notamos que $A^{1-(\alpha/2)}u + Sf \in D(A^{-\alpha/2})$ e que

$$A^{1-(\alpha/2)}u = -A^{-\alpha/2}g - Sf.$$

Como $A^{-\alpha/2}g \in D(A^{\alpha/2})$, $Sf \in H$ temos que $A^{-\alpha/2}g + Sf \in H$, então $u \in D(A^{1-(\alpha/2)})$ e $u = -A^{-1-(\alpha/2)}(A^{-\alpha/2}g + Sf)$. Logo $(u,v) \in D(\mathscr{A})$.

(d) Se $\mathscr{A}(u,v)=(f,g)$, existe $\hat{M}>0$ tal que $|(u,v)|_{\mathscr{H}}\leq \hat{M}|(f,g)|_{\mathscr{H}}$: temos que

$$\begin{array}{rcl}
|(u,v)|_{\mathscr{H}} & = & \|u\|_V^2+\|v\|_H^2 \\
& = & \|A^{-(1-(\alpha/2))}(A^{-\alpha/2}g+Sf)\|_V^2+\|f\|_H^2 \\
& = & \|A^{1/2}(A^{-(1-(\alpha/2))}(A^{-\alpha/2}g+Sf))\|_H^2+\|f\|_H^2 \\
(V\hookrightarrow H) & \leq & \|A^{1/2}(A^{-(1-(\alpha/2))}(A^{-\alpha/2}g+Sf))\|_H^2+\frac{1}{M}\|f\|_V^2 \\
(D(A^{1-(\alpha/2)}\hookrightarrow D(A^{1/2})) & \leq & (C_1)^2\|A^{1-(\alpha/2)}[A^{-(1-(\alpha/2))}(A^{-\alpha/2}g+Sf)]\|_H^2+\frac{1}{M}\|f\|_V^2 \\
& = & (C_1)^2\|A^{-\alpha/2}g+Sf\|_H^2+\frac{1}{M}\|f\|_V^2 \\
& \leq & 2(C_1)^2(\|A^{-\alpha/2}g\|_H^2+\|Sf\|_H^2)+\frac{1}{M}\|f\|_V^2 \\
& \leq & 2(C_1)^2(\|A^{-\alpha/2}\|^2\|g\|_H^2+\|S\|^2\|f\|_H^2)+\frac{1}{M}\|f\|_V^2 \\
& \leq & 2(C_1)^2(\|A^{-\alpha/2}\|^2\|g\|_H^2+\|S\|^2\frac{1}{M}(\|f\|_V^2))+\frac{1}{M}\|f\|_V^2 \\
& \leq & \hat{M}(\|f\|_V^2+\|g\|_H^2) \\
& = & \hat{M}|(f,g)|_{\mathscr{H}}.
\end{array}$$

(e) $\mathscr{A}$ é fechado: decorre do fato que $\mathscr{A}$ é sobrejetivo e $\mathscr{A}^{-1}$ é limitado.

(f) $\mathscr{R}(\lambda\mathscr{I}-\mathscr{A})=\mathscr{H}$, para algum $\lambda>0$: é consequência do fato que $\mathscr{A}^{-1}$ é limitado i.e $0\in\varrho(\mathscr{A})$, como $\varrho(\mathscr{A})$ é um conjunto aberto de $\mathbb{C}$ temos o resultado.
Finalmente pelos teoremas 1.46, 1.47 temos que $D(\mathscr{A})$ é denso em $\mathscr{H}$, logo pelo Teorema de Lummer-Phillips (Teorema 1.43); $\mathscr{A}$ é o gerador de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathscr{H}$.

$\square$

Seja $S(t)=e^{t\mathscr{A}}$ o semigrupo gerado por o operador $\mathscr{A}$ da proposição anterior, temos o seguinte:

Teorema 3.2. *Sob as hipóteses do Teorema anterior e definindo*

$$(w(t),w_1(t))=e^{t\mathscr{A}}(w_0,w_1),\quad (w_0,w_1)\in\mathscr{H}.$$

Então a função $w(.)\in C([0,\infty);V)\cap C^1([0,\infty);H)$ e satisfaz $w_t(.)=w_1(.)$. Além disso,

$$c(w_{tt}(t),\hat{w})+b(w_t(t),\hat{w})+a(w(t),\hat{w})=0,\ \ \forall\hat{w}\in V,t>0$$

com a condição inicial $w(0)=w_0$, $w_t(0)=w_1$.
Se $(w_0,w_1)\in D(\mathscr{A})$, então $w(.)\in C^2([0,\infty);H)\cap C^1([0,\infty);V)\cap C([0,\infty);D(A^{1-(\alpha/2)}))$ e satisfaz

$$w_{tt}(t)+A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(t)+Sw_t(t))=0,\quad t\geq 0.$$

Demonstração. Vamos a dividir a prova do teorema em 2 casos:
Caso i: $(w_0,w_1)\in D(\mathscr{A})$. Seja

$$u(t)=(w(t),w_1(t))=e^{t\mathscr{A}}(w_0,w_1),$$

então u é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t=\mathscr{A}u & t>0\\ u(0)=(w_0,w_1). \end{cases}\tag{3.4}$$

Segue-se que $u \in C([0,+\infty); D(\mathscr{A})) \cap C^1([0,+\infty); \mathscr{H})$. Seja $t_0 \in [0;+\infty)$, das condições anteriores temos que:

$$u(t) \overset{\mathscr{H}}{\to} u(t_0), \ \ \mathscr{A}u(t) \overset{\mathscr{H}}{\to} \mathscr{A}u(t_0), \ \ u_t(t) \overset{\mathscr{H}}{\to} u_t(t_0).$$

Em termos das componentes temos que:

$$w(t) \overset{V}{\to} w(t_0) \tag{3.5}$$

$$w_1(t) \overset{H}{\to} w_1(t_0) \tag{3.6}$$

$$w_1(t) \overset{V}{\to} w_1(t_0) \tag{3.7}$$

$$A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(t) + Sw_1(t)) \overset{H}{\to} A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(t_0) + Sw_1(t_0)) \tag{3.8}$$

$$w_t(t) \overset{V}{\to} w_t(t_0) \tag{3.9}$$

$$(w_1)_t(t) \overset{H}{\to} (w_1)_t(t_0). \tag{3.10}$$

Por outro lado da equação (3.4) temos que para $t > 0$:

$$w_t(t) = w_1(t) \tag{3.11}$$

$$(w_1)_t(t) = -A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(t) + Sw_1(t)). \tag{3.12}$$

Já que $V \hookrightarrow H$, temos de (3.5):

$$w(t) \overset{H}{\to} w(t_0). \tag{3.13}$$

De (3.11), (3.5), (3.6):

$$w_1 = w_t, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.14}$$

de isto

$$w(0) = w_0 \qquad w_t(0) = w_1. \tag{3.15}$$

Das relações (3.14), (3.13), (3.6), (3.10) temos que $w \in C^2([0,+\infty); H)$ e de (3.14), (3.5), (3.7) deduzimos que $w \in C^1([0,+\infty); V)$.
Desde que $w \in D(A^{1-(\alpha/2)})$ e $A^{-\alpha/2} \in \mathcal{L}(H)$, por (3.8):

$$A^{1-(\alpha/2)}w(t) + Sw_1(t) \overset{H}{\to} A^{1-(\alpha/2)}w(t_0) + Sw_1(t_0), \tag{3.16}$$

mas $S \in \mathcal{L}(D(A^{\alpha/2}); H)$ e $V \hookrightarrow D(A^{\alpha/2})$, logo de (3.6):

$$Sw_1(t) \overset{H}{\to} Sw_1(t_0). \tag{3.17}$$

De (3.16) e (3.17):

$$A^{1-(\alpha/2)}w(t) \overset{H}{\to} A^{1-(\alpha/2)}w(t_0). \tag{3.18}$$

Assim de (3.13) e (3.18) concluímos que $w \in C([0,+\infty); D(A^{1-(\alpha/2)}))$.
De (3.4) e (3.14):

$$w_{tt}(t) + A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(t) + Sw_t(t)) = 0 \qquad t \geq 0. \tag{3.19}$$

Seja $\hat{w} \in V$, de (3.19) tomando o produto interno em H e integrando em relação a t, com $t > 0$:

$$\int_0^t c(w_{tt}(r), \hat{w})dr + \int_0^t c(A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(r) + Sw_t(r)), \hat{w})dr = 0.$$

Acontece que na primeira integral $w \in C^2([0,+\infty);H)$, logo o integrando do primeiro termo o qual é bem definido e contínuo, pode-se aplicar o teorema fundamental do cálculo e obtemos que:

$$\int_0^t c(w_{tt}(r),\hat{w})dr = c(w_t(t),\hat{w}) - c(w_1,\hat{w}).$$

Na segunda integral já que $V \hookrightarrow D(A^{\alpha/2})$ e $A^{\alpha/2} = (A^{\alpha/2})^*$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t c(A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(r) + Sw_t(r)(t)),\hat{w})dr &= \int_0^t c(A^{1-(\alpha/2)}w(r) + Sw_t(r), A^{\alpha/2}\hat{w})dr \\
&= \int_0^t c(A^{1-(\alpha/2)}w(r), A^{\alpha/2}\hat{w})dr + \\
&\quad \int_0^t c(Sw_t(r), A^{\alpha/2}\hat{w})dr \\
(w_t = w_1 \in V \hookrightarrow D(A^{\alpha/2}), S \in \mathcal{L}(D(A^{\alpha/2})), H) &= \int_0^t c(A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}w(r)),\hat{w})dr + \\
&\quad c(Sw(t), A^{\alpha/2}\hat{w}) - c(Sw(0), A^{\alpha/2}\hat{w}) \\
(A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}u) = Au, \forall u \in D(A)) &= \int_0^t c(Aw(r)),\hat{w})dr + c(Sw(t), A^{\alpha/2}\hat{w}) - \\
(D(A^{1-(\alpha/2)}) \hookrightarrow D(A)) &\quad c(Sw(0), A^{\alpha/2}\hat{w}) \\
(w(r) \in V) &= \int_0^t c(A^{1/2}w(r)), A^{1/2}\hat{w})dr + \\
&\quad c(Sw(t), A^{\alpha/2}\hat{w}) - c(Sw(0), A^{\alpha/2}\hat{w})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b(u,v) = c(Su, A^{\alpha/2}v); u,v \in D(A^{\alpha/2})) &= \int_0^t a(w(r),\hat{w})dr + \\
(V \hookrightarrow D(A^{\alpha/2})) &\quad b(w(t),\hat{w}) - b(w(0),\hat{w}).
\end{aligned}$$

Portanto temos que:

$$c(w_t(t),\hat{w}) - c(w_1,\hat{w}) + \int_0^t a(w(r),\hat{w})dr + b(w(t),\hat{w}) - b(w(0),\hat{w}) = 0 \quad \forall \hat{w} \in V, \ \ t > 0, \tag{3.20}$$

o qual é equivalente a equação (3.1).
Caso ii: $(w_0,w_1) \in \mathscr{H}$. Seja $(w_0,w_1) \in \mathscr{H}$ então as funções $w(t), z(t)$ definidas por

$$u(t) := (w(t), z(t)) = e^{t\mathscr{A}}(w_0,w_1)$$

verificam que $u \in C([0,+\infty);\mathscr{H})$, i.e

$$w \in C([0,+\infty);V)$$

e

$$z \in C([0,+\infty);H).$$

Por outro lado da densidade de $D(\mathscr{A})$, existe uma sequência $(w_{0,n}, w_{1,n}) \in D(\mathscr{A})$ tal que

$$(w_{0,n}, w_{1,n}) \stackrel{\mathscr{H}}{\to} (w_0,w_1)$$

isto é $w_{0,n} \stackrel{V}{\to} w_0$ e $w_{1,n} \stackrel{H}{\to} w_1$. Pelo Caso i, existem funções

$$(w_n(t), z_n(t)) = e^{t\mathscr{A}}(w_{0,n}, w_{1,n}), \tag{3.21}$$

tal que $w_n \in C^2([0,+\infty);H) \cap C^1([0,+\infty);V) \cap C([0,+\infty);D(A^{1-(\alpha/2)}))$, $(w_n)_t = z_n$ e

$$c((w_n)_t, \hat{w}) - c(w_{1,n}, \hat{w}) + \int_0^t a(w_n(r), \hat{w})dr + b(w_n(t), \hat{w}) - b(w_{0,n}, \hat{w}) = 0 \quad \forall \hat{w} \in V, \;\; t > 0.$$

Seja $T > 0$, de 3.21 temos que $w_n \to w$ em $C([0,T];V)$ e $z_n = (w_n)_t \to z$ em $C([0,T];H)$, i.e $z = w_t \in C([0,T];H)$, então tomando limite na relação integral anterior:

$$c(w_t(t), \hat{w}) - c(w_1, \hat{w}) + \int_0^t a(w(r), \hat{w})dr + b(w(t), \hat{w}) - b(w_0, \hat{w}) = 0 \quad \forall \hat{w} \in V, \;\; t > 0,$$

ou equivalentemente:

$$c(w_{tt}, \hat{w}) + b(w_t, \hat{w}) + a(w(t), \hat{w}) = 0, \;\; \forall \hat{w} \in V, t > 0.$$

□

Capítulo 4

Analiticidade e Diferenciabilidade do Semigrupos Gerados por Formulação Variacional

4.1 Introdução

Neste capítulo fornecemos condições suficientes para o semigrupo associado com a equação de segunda ordem escrita na forma variacional seja analítico ou diferenciável.

4.2 Definições e Resultado Principal

Vamos começar com uma definição:

Definição 4.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $e^{t\mathscr{A}}$ em $\mathscr{H}$. O tipo do semigrupo é dado por*

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{log\|e^{t\mathscr{A}}\|}{t}.$$

Definição 4.2. *O semigrupo $e^{t\mathscr{A}}$ é dito de **classe G(ϵ)** para algum $0 < \epsilon \leq 1$, se existe $\sigma > \omega_0$, $M_\sigma \geq 1$ tal que*

$$\|(\sigma + i\omega - \mathscr{A})^{-1}\| \leq \frac{M_\sigma}{1 + |\omega|^\epsilon}, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Observações:

(a) Se (4.1) se verifica para algum $\sigma_1 > \omega_0$, então se verifica para todo $\sigma > \omega_0$.

(b) Um C_0-semigrupo é de classe $G(1)$ se e somente se é analítico.

(c) Se (4.1) se verifica então $e^{t\mathscr{A}}$ é um semigrupo diferenciável satisfazendo:

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}}\, t^{(2/\epsilon)-1}\|\mathscr{A}e^{t\mathscr{A}}\| < +\infty,$$

que tem algumas propriedades desejadas como as de um semigrupo analítico.

(d) Se $e^{t\mathscr{A}}$ é de classe $G(\epsilon)$, então $e^{t(\mathscr{A}+\mathscr{B})}$ é de classe $G(\epsilon)$ para qualquer $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$.

Teorema 4.1. *Sob as condições **(A1)-(A3)** do Capitulo 3, e assumindo que para α considerado em (A3) existem constantes $\lambda_0 \geq 0$, $\delta > 0$ tais que*

$$\lambda_0 \|v\|_H^2 + Re\ \ b(v) \geq \delta \|A^{\alpha/2} v\|^2, \quad \forall v \in V. \tag{4.2}$$

Então $e^{t\mathscr{A}}$ é de classe $G(\epsilon)$, onde $\epsilon = min\{1, 2\alpha\}$.

Demonstração. Desde que a classe $G(\epsilon)$ de C_0-semigrupos é preservado sob perturbação limitada do gerador infinitesimal, podemos supor que $\lambda_0 = 0$ como ao inicio do Teorema 3.1 sem perdida de generalidade, logo $0 \in \rho(\mathscr{A})$ e $\mathscr{A}$ é um C_0-semigrupo de contrações, também por isto podemos supor que $\sigma = 0$.

Devemos verificar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathscr{A})$ e que a relação (4.1) se verifica para $\epsilon = min\{1, 2\alpha\}$ e $\sigma = 0$. Como $0 \in \varrho(\mathscr{A})$, é suficiente provar que existe $c > 0$

$$|\omega|^{-\epsilon} \|(i\omega - \mathscr{A})z\|_{\mathscr{H}} \geq c > 0 \tag{4.3}$$

para todo $z \in D(\mathscr{A})$, $\|z\|_{\mathscr{H}} = 1$ e para todo $|\omega| > \delta_0$, $\delta_0 = \frac{1}{2}\|\mathscr{A}^{-1}\|^{-1}$.
Suponhamos que (4.3) é falso, então existe uma sequência $(\omega_n) \subset \mathbb{R}$, $|\omega_n| > \delta_0$ e $(z_n) \subset D(\mathscr{A})$, $\|z_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, $z_n = (u_n, v_n)$ tal que:

$$\|\omega_n^{-\epsilon}(i\omega_n - \mathscr{A})z_n\|_{\mathscr{H}} \to 0. \tag{4.4}$$

Podemos supor que $\omega_n > \delta_0$ (no caso que $\omega_n < -\delta_0$, a prova será análoga nesse caso), então a relação (4.4) em termos de componentes fica da seguinte forma:

$$i\omega_n^{1-\epsilon} u_n - \omega_n^{-\epsilon} v_n \xrightarrow{V} 0, \tag{4.5}$$

$$i\omega_n^{1-\epsilon} v_n + \omega_n^{-\epsilon} A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)} u_n + S v_n] \xrightarrow{H} 0. \tag{4.6}$$

Segue-se de (4.4) que

$$\begin{aligned}
(\omega_n^{-\epsilon}(i\omega_n - \mathscr{A})z_n, z_n)_{\mathscr{H}} &= a(i\omega_n^{1-\epsilon}u_n - \omega_n^{-\epsilon}v_n, u_n) \\
&\quad + c(i\omega_n^{1-\epsilon}v_n + \omega_n^{-\epsilon}A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u_n + Sv_n], v_n) \\
&= i\omega_n^{1-\epsilon}a(u_n, u_n) - \omega_n^{-\epsilon}a(v_n, u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u_n + Sv_n], v_n) \\
&= i\omega_n^{1-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}u_n) - \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}v_n, A^{1/2}u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n, A^{\alpha/2}v_n) + \omega_n^{-\epsilon}c(Sv_n, A^{\alpha/2}v_n) \\
&= i\omega_n^{1-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) - \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}v_n, A^{1/2}u_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n, A^{\alpha/2}v_n) + \omega_n^{-\epsilon}c(Sv_n, A^{\alpha/2}v_n) \\
&= i\omega_n^{1-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) - \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}v_n, A^{1/2}u_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(A^{\alpha/2}(A^{1-(\alpha/2)}u_n), v_n) + \omega_n^{-\epsilon}c(Sv_n, A^{\alpha/2}v_n) \\
&= i\omega_n^{1-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) - \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}v_n, A^{1/2}u_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(Au_n, v_n) + \omega_n^{-\epsilon}b(v_n, v_n) \\
&= i\omega_n^{1-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) - \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}v_n, A^{1/2}u_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}v_n) + \omega_n^{-\epsilon}b(v_n) \\
&= \omega_n^{-\epsilon}b(v_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}u_n) + i\omega_n^{1-\epsilon}c(v_n, v_n) \\
&\quad + \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}u_n, A^{1/2}v_n) - \omega_n^{-\epsilon}c(A^{1/2}v_n, A^{1/2}u_n).
\end{aligned}$$

Decorre de esta última igualdade que $Re(\omega_n^{-\epsilon}(i\omega_n - \mathscr{A})z_n, z_n)_{\mathscr{H}} = \omega_n^{-\epsilon} Re\ \ b(v_n)$, logo por (4.4):

$$\omega_n^{-\epsilon} Re\ b(v_n) \to 0. \tag{4.7}$$

Então de (4.2), (4.7) e a hipótese (A3) (continuidade de b):

$$\|\omega_n^{-\epsilon/2} A^{\alpha/2} v_n\|_H \to 0, \qquad w_n^{-\epsilon} b(v_n) \to 0. \tag{4.8}$$

Fazendo o produto interno de (4.5) com $\omega_n^{\epsilon-1} u_n$ em V, pela desigualdade de Schwarz e tendo em conta que $\|(u_n, v_n)\| = 1$ temos que

$$i\|u_n\|_V^2 - \omega_n^{-1} a(v_n, u_n) \to 0, \tag{4.9}$$

agora o mesmo para (4.6) com $\omega_n^{\epsilon-1} v_n$ em H e tendo em conta (4.8) temos que

$$\omega_n^{-1} c(Sv_n, A^{\alpha/2} u_n) = \omega_n^{-1} b(v_n, u_n) \to 0\,,$$

logo

$$i\|v_n\|_H^2 + \omega_n^{-1} c(A^{1-(\alpha/2)} u_n, A^{\alpha/2} v_n) \to 0, \tag{4.10}$$

pelo feito linhas acima:

$$i\|v_n\|_H^2 + \omega_n^{-1} c(A^{1-(\alpha/2)} u_n, A^{\alpha/2} v_n) = i\|v_n\|_H^2 + \omega_n^{-1} a(u_n, v_n),$$

consequentemente:

$$i\|v_n\|_H^2 + \omega_n^{-1} a(u_n, v_n) \to 0.$$

Tomando a parte imaginária da diferença de (4.9) e (4.10) temos que:

$$\|u_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2 \to 0. \tag{4.11}$$

Já que $\|(u_n, v_n)\|_{\mathscr{H}} = 1$, obtemos de (4.11) que

$$\|u_n\|_V^2 \to \frac{1}{2}, \qquad \|v_n\|_H^2 \to \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

Dividiremos a prova em casos tendo em conta os valores de α.

Caso i: $\alpha \in [1/2, 1]$. Neste caso temos que $\epsilon = 1$. Notamos que $A^{1-\alpha} u_n$ é limitado em H, de fato temos que para esta escolha de α tem-se que $D(A^{1/2}) \hookrightarrow D(A^{1-\alpha})$, disto existe $M > 0$ tal que

$$\|A^{1-\alpha} w\|_H \leq M \|A^{1/2} w\|_H, \qquad \forall w \in D(A^{1/2}),$$

Por outro lado $D(A^{1-(\alpha/2)}) \subset D(A^{1/2})$, pois $\alpha \leq 1$. Se $(u_n) \subset D(A^{1-(\alpha/2)})$, então

$$\|A^{1-\alpha} u_n\|_H \leq M \|A^{1/2} u_n\|_H = M \|u_n\|_V \leq M.$$

Continuando com a prova do caso, tomando o produto interno de (4.6) com $A^{1-\alpha} u_n$ em H temos que

$$ic(v_n, A^{1-\alpha} u_n) + \|\omega_n^{-1/2} A^{1-(\alpha/2)} u_n\|_H^2 + \frac{1}{\omega_n} c(Sv_n, A^{1-(\alpha/2)} u_n) \to 0. \tag{4.13}$$

Tomando a parte real de (4.13)

$$Re\left(ic(v_n, A^{1-\alpha} u_n)\right) + \|\omega_n^{-1/2} A^{1-(\alpha/2)} u_n\|_H^2 + Re\ \ c(\omega_n^{-1/2} Sv_n, \omega_n^{-1/2} A^{1-(\alpha/2)} u_n) \to 0.$$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então

$$|Re\left(ic(v_n, A^{1-\alpha}u_n)\right) + \|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^2 + Re\ c(\omega_n^{-1/2}Sv_n, \omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n)| \leq 1.$$

Note que $|Re\left(ic(v_n, A^{1-\alpha}u_n)\right)| \leq M\|v_n\|_H \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\|v_n\|_H \leq 1$. Disto deduzimos que existe $R > 0$ tal que

$$n \geq n_0 : \quad \|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^2 + Re\ c(\omega_n^{-1/2}Sv_n, \omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n)| \leq R,$$

por outro lado, já que $S \in \mathcal{L}(D(A^{\alpha/2}); H)$ deduzimos da relação (4.8) que $\|\omega_n^{-1/2}Sv_n\|_H$ é limitado, logo

$$Re\ c(\omega_n^{-1/2}Sv_n, \omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n) \leq k\|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H,$$

então

$$\|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^2 \leq R + k\|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H.$$

disto obtemos que $\|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H$ é limitado; caso contrário

$$\|\omega_{n_j}^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_{n_j}\|_H \to +\infty$$

e

$$\|\omega_{n_j}^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_{n_j}\|_H \leq \frac{R}{\|\omega_{n_j}^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_{n_j}\|_H} + k,$$

fazendo $j \to +\infty$ obtemos uma contradição.
Finalmente já que $\|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H$ é limitado e por (4.8) com $\epsilon = 1$ temos que

$$|\omega_n^{-1}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n, A^{\alpha/2}v_n)| \leq \|\omega_n^{-1/2}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H\|\omega^{-1/2}A^{\alpha/2}v_n\|_H \to 0,$$

ou seja

$$\omega_n^{-1}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n, A^{\alpha/2}v_n) \to 0,$$

e

$$w_n^{-1}b(v_n) \to 0.$$

isto em (4.10) da como resultado que

$$\|v_n\|_H \to 0.$$

Logo de (4.9) segue como resultado que $\|u_n\|_V \to 0$ o qual contradiz o fato $\|(u_n, v_n)\|_{\mathscr{H}} = 1$.

Caso ii: $\alpha \in (0, 1/2)$. Neste caso temos que $\epsilon = 2\alpha$. Tomando o produto interno de (4.6) com $\omega_n^{4\alpha-2}A^{1-\alpha}u_n$ em H temos que:

$$c(g_n, \omega_n^{4\alpha-2}A^{1-\alpha}u_n) = c(\omega_n^{2\alpha-1}g_n, \omega_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) \to 0,$$

onde

$$g_n := iw_n^{1-2\alpha}v_n + w_n^{-2\alpha}A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u_n + Sv_n] \xrightarrow{H} 0,$$

já que como no Caso i. $(A^{1-\alpha}u_n)$ é limitado em H. Também

$$
\begin{aligned}
c(g_n, \omega_n^{4\alpha-2}A^{1-\alpha}u_n) &= c(iv_n, \omega_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) + \omega_n^{2\alpha-2}c(A^{\alpha/2}[A^{1-(\alpha/2)}u_n + Sv_n], A^{1-\alpha}u_n) \\
&= c(iv_n, \omega_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) + \omega_n^{2\alpha-2}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n + Sv_n, A^{\alpha/2}(A^{1-\alpha}u_n)) \\
&= c(iv_n, \omega_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) + \omega_n^{2\alpha-2}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n + Sv_n, (A^{1-(\alpha/2)}u_n)) \\
&= c(iv_n, \omega_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) + \omega_n^{2\alpha-2}c(A^{1-(\alpha/2)}u_n, A^{1-(\alpha/2)}u_n) + \\
&\quad\ \omega_n^{2\alpha-2}c(Sv_n, (A^{1-(\alpha/2)}u_n)) \\
&= c(iv_n, \omega_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) + \|\omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|^2 + \\
&\quad\ c(\omega_n^{\alpha-1}Sv_n, \omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n).
\end{aligned}
$$

Temos a seguinte igualdade:

$$
\|w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^2 = c(w_n^{2\alpha-1}g_n - iv_n, w_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n) - c(w_n^{\alpha-1}Sv_n, w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n). \quad (4.14)
$$

Observamos que $A^{1/2}u_n$, $\omega_n^{2\alpha-1}g_n$, iv_n são limitados em H, por $(A2)$, (4.6) e (4.12) respetivamente. Pelo teorema (1.21) temos que:

$$
A^{1-\alpha}w = (A^{1/2-\alpha})(A^{1/2}w), \quad w \in D(A^{1-\alpha}) \subset D(A^{1/2}),
$$

também pelo mesmo teorema:

$$
(A^{\frac{1-\alpha}{2}})^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}} = A^{(1/2)-\alpha},
$$

isto junto com a desigualdade de interpolação (Teorema 1.22):

$$
\begin{aligned}
\omega_n^{2\alpha-1}\|A^{1-\alpha}u_n\|_H &= \omega_n^{2\alpha-1}\|(A^{\frac{1-\alpha}{2}})^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}(A^{1/2}u_n)\|_H \\
&\le \omega_n^{2\alpha-1}\|A^{(1-\alpha)/2}(A^{1/2}u_n)\|_H^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)}\|A^{1/2}u_n\|_H^{(1-(1-2\alpha)/(1-\alpha)} \\
(\text{ Teorema } (1.21)) &= \omega_n^{2\alpha-1}\|A^{1/2}u_n\|_H^{\alpha/(1-\alpha)}\|A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)} \\
&= \|A^{1/2}u_n\|_H^{\alpha/(1-\alpha)}\|\omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)}.
\end{aligned} \quad (4.15)
$$

Tomando valor absoluto em (4.14) e usando (4.15):

$$
\begin{aligned}
\|w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^2 &\le |c(w_n^{2\alpha-1}g_n - iv_n, w_n^{2\alpha-1}A^{1-\alpha}u_n)| + |c(w_n^{\alpha-1}Sv_n, w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n)| \\
&\le \|\omega_n^{2\alpha-1}g_n - iv_n\|_H(\omega_n^{2\alpha-1}\|A^{1-\alpha}u_n\|_H) + \|w_n^{\alpha-1}Sv_n\|_H\|w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H \\
&\le \|\omega_n^{2\alpha-1}g_n - iv_n\|_H\|A^{1/2}u_n\|_H^{\alpha/(1-\alpha)}\|\omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)} + \\
&\quad\ \|w_n^{\alpha-1}Sv_n\|_H\|w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H.
\end{aligned} \quad (4.16)
$$

Como no Caso i; acontece que $\omega_n^{\alpha-1}Sv_n$ é limitado em H, isto junto com $A^{1/2}u_n$, $\omega_n^{2\alpha-1}g_n - iv_n$ limitados em H tem como consequência que

$$
\|w_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^2 \le C\|\omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)} + \|\omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H,
$$

para alguma $M > 0$, decorre disto último de maneira análoga ao Caso i que $\|\omega_n^{\alpha-1}A^{1-(\alpha/2)}u_n\|_H$ é limitado.
Segue-se disto último e a relação (4.8) com $\epsilon = 2\alpha$, em (4.10) que

$$
\|v_n\|_H \to 0.
$$

Logo de (4.9) segue que $\|u_n\|_V \to 0$ o qual contradiz o fato $\|(u_n, v_n)\|_{\mathscr{H}} = 1$.

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo aplicamos os resultados das seções anteriores para diversos PDE's com coeficientes descontínuos e condições mecânicas de fronteira.
No primeiro exemplo provamos que o sistema está associado a um semigrupo analítico e exponencialmente estável embora sua forma quadrática não seja definida positiva. Outro é um exemplo de modelo de vibração de flexão de um gasoduto com um amortecimento estrutural contendo fluido, a analiticidade do semigrupo associado será provado para este caso. Finalmente o último exemplo é associado a um semigrupo diferenciável.

5.1 O Modelo de Histerese Espacial de Russell para uma Viga Elástica

Vamos introduzir uma descrição do modelo a tratar, para detalhes revisar a referência [36].
A equação de viga de Euler-Bernoulli, servirá de ponto de partida para nossa discussão aqui e baseia-se na conservação no tempo da expressão de energia, isto é

$$\mathcal{E}\left(w, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right] dx,$$

onde por simplicidade escreveremos w, ρ, EI em lugar de $w(x,t)$, $\rho(x)$, $EI(x)$ respectivamente, sendo ρ a densidade de massa por unidade de comprimento, onde ρ e EI o segundo momento do módulo da elasticidade em relação ao eixe elástico (sobre a qual o primeiro momento do módulo de elasticidade desaparece), ρ, EI são funções uniformemente positivas em $[0,L]$. Assumindo que a função w a qual descreve a evolução do deslocamento da viga é suave, um cálculo simples mostra que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}\left(w(.,t), \frac{\partial w}{\partial t}(.,t)\right) = \int_0^L \left[\rho\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2}\right] dx,$$

então integrando o segundo termo por partes,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}\left(w(.,t), \frac{\partial w}{\partial t}(.,t)\right) = \int_0^L \left[\rho\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right] dx + EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\Big|_0^L. \quad (5.1)$$

A presença da expressão da velocidade angular $\partial^2 w/\partial t \partial w$ indica que o coeficiente $-(\partial/\partial x)(EI\partial^2 w/\partial x^2)$ deve ser interpretado como um torque de restauração que surge na variável espacial devido flexão da viga.

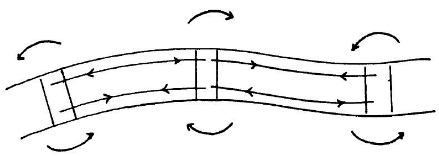
Percebendo que este coeficiente representa um torque ajuda-nos na interpretação do termo de amortecimento o qual introduzimos via definição

$$\tau_h(x,t) = 2\int_0^L h(x,\xi)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}(\xi,t)\right] d\xi.$$

Nós pensamos de τ_h como um torque atuando na viga no ponto x, devido ao diferencial de rotação, em comparação com a rotação em x da viga em os pontos ξ próximos a x. Em muitos casos o soporte do Kernel de interação $h()x,\xi$ deve ser restringido a uma faixa estreita em $\mathbb{R}^2$ centrada na linha $x = \xi$. A aplicação da segunda lei de Newton dita a condição de simetria

$$h(\xi,x) = h(x,\xi).$$

A fonte do torque de amortecimento em rotação diferencial é melhor ilustrado para o caso de vigas compostas do materiais composto como fibra de vidro, compostos de grafite e boro, e madeira. Podemos imaginar que fibras grandes cujos modulo de elasticidade por unidade de área transversal é maior que o total da viga, passam através da viga, mantido no lugar por um material de matriz de algum tipo. Como a viga sofre deformação de diversos tipos, os elementos da viga em x e ξ podem rotar a taxas diferentes, refletidas por diferentes valores de $(\partial^2 w/\partial t\partial x)(x,t)$, $(\partial^2 w/\partial t\partial x)(\xi,t)$.
Se pensamos que as fibras elas mesmas tendo quase comprimento constante, diferencial de rotação deve resultar em movimento das fibras relativo a matriz com acompanhamento de força de fricção ou deformação do material da matriz. O resultado é um torque, do tipo que acabamos de descrever, uma vez que o movimento em conjunto das fibras em relação à matriz, dentro dos elementos de viga individuais, será diferente de um lado do eixo elástico do que no outro lado, quando uma tal rotação diferencial for efetuada



Somando o termo

$$\int_0^L \tau_h(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}(x,t)dx$$

a ambos lados de (5.1) temos que

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{E}\left(w,\tfrac{\partial w}{\partial t}\right) + \int_0^L \tau_h(x,t)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}(x,t)dx &= \int_0^L \left(\rho\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[\tau_h - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right)dx \\
&\quad + EI\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\tfrac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\big|_0^L \\
(\text{ int.partes }) &= \int_0^L \frac{\partial w}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \tau_h\right]\right)dx \\
&\quad + \left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \tau_h\right]\frac{\partial w}{\partial t}\right)\big|_0^L .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Igualando as partes separadas de (5.2) a zero (pelo princípio de trabalho virtual)

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\tau_h\right]=0$$

se produz a equação integro-diferencial parcial

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^L h(x,\xi)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial w}(x,t)-\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial w}(\xi,t)\right]d\xi+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0 \tag{5.3}$$

e a exigência de que, em $x=0$ e $x=L$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\tau_h\right]\frac{\partial w}{\partial t}=0 \tag{5.4}$$

Várias configurações da viga agora levam a diferentes conjuntos de condições de contorno, por exemplo, no caso onde a viga está fixada em $x=0$ e livre em $x=L$ obtém-se que

$$w(0,t)=\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)=0 \tag{5.5}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)|_{x=L}+2\int_0^L h(L,\xi)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}(L,t)-\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}(\xi,t)\right]d\xi=0 \tag{5.6}$$

Então temos a equação:

$$\begin{cases}\rho w_{tt}-2\left(\displaystyle\int_0^L h(x,\xi)[w_{xt}(x,t)-w_{xt}(\xi,t)]d\xi\right)_x+(EIw_{xx})_{xx}=0 & (0,L)\times\mathbb{R}^+\\ w(0,t)=w_x(0,t)=w_{xx}(L,t)=0 & t>0\\ -(EI(x)w_{xx})_x\,|_{x=L}+2\displaystyle\int_0^L h(L,\xi)[w_{xt}(L,t)-w_{xt}(\xi,t)]d\xi=0 & t>0,\end{cases} \tag{5.7}$$

onde os coeficientes satisfazem:

$$\begin{gathered}\rho, EI\in L^\infty(0,L),\quad h\in L^\infty((0,L)^2),\quad \rho, EI\geq c_0>0,\quad h\geq c_1>0.\\ h(x,\xi)=h(\xi,x)\end{gathered} \tag{5.8}$$

Multiplicando a equação (5.7) por u em algum espaço adequado por determinar e integrando em $(0,L)$ procedendo formalmente temos que:

$$\underbrace{\int_0^L \rho w_{tt}\bar{u}}_{i}\underbrace{-2\int_0^L\left(\int_0^L\right)_x\bar{u}}_{ii}\underbrace{+\int_0^L (EIw_{xx})_{xx}\bar{u}}_{iii}=0$$

(i) Queremos que

$$c(w_{tt},u)=\int_0^L \rho w_{tt}\bar{u}.$$

Fazemos $H=L^2_\rho(0,L)$, com a forma bilinear associada $c(u,v)=\displaystyle\int_0^L \rho u\bar{v}dx$, para $u,v\in H$.

(ii) Integrando por partes temos que:

$$\begin{aligned} -2\int_0^L \left(\int_0^L h(x,\xi)[w_{xt}(x,t)-w_{xt}(\xi,t)]d\xi\right)_x \bar{u}dx &= 2\int_0^L\int_0^L h(x,\xi)[w_{xt}(x,t)-w_{xt}(\xi,t)]\bar{u_x}(x)d\xi dx \\ &+2\bar{u}(0)\left(\int_0^L h(0,\xi)[w_{xt}(0,t)-w_{xt}(\xi,t)]d\xi\right) \\ &-2\bar{u}(L)\left(\int_0^L h(L,\xi)[w_{xt}(L,t)-w_{xt}(\xi,t)]d\xi\right) \end{aligned}$$

Precisamos ter $b(w_t,u)$ e $b\in\mathcal{L}(D(A^{\alpha/2}))$, $V=D(A^{1/2})\subset D(A^{\alpha/2})$, então fazemos $u(0)=0$ e

$$b(w_t,v)=2\int_0^L\int_0^L h(x,\xi)[w_{xt}(x,t)-w_{xt}(\xi,t)]\bar{v_x}(x)d\xi dx.$$

(iii) Integrando por partes e tendo em conta as condições de fronteira:

$$\int_0^L (EIw_{xx})_{xx}\bar{u}(x)dx = u(L)(EIw_{xx})_x\,|_{x=L} + (EIw_{xx}(0,t)\bar{u_x}(0)) + \int_0^L EIw_{xx}\bar{u_{xx}}dx.$$

Fazemos $u_x(0)=0$, $u_{xx}\in L^2(0,L)$ e $a(u,v)=\displaystyle\int_0^L EIu_{xx}\bar{v_{xx}}$

Pelas condições de fronteira temos que:

$$c(w_{tt},u)+b(w_t,u)+a(w,u)=0 \qquad t>0,$$

portanto definimos

- $H=L^2_\rho(0,L), \qquad c(u,v)=\displaystyle\int_0^L \rho u\bar{v}dx.$
- $V=\{v\in H^2(0,L)|v(0)=v_x(0)=0\}, \qquad a(u,v)=\displaystyle\int_0^L EIu_{xx}\overline{v_{xx}}dx.$
- $b(u,v)=2\displaystyle\int_0^L\int_0^L h(x,\xi)[u_x(x)-u_x(\xi)]\bar{v_x}(x)d\xi dx.$

Por simplicidade escreveremos $J=(0,L)$.

Afirmação 5.1. *Existe $\tilde{c}=\tilde{c}(L)>0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(J)}\le\tilde{c}\|u_{xx}\|_{L^2(J)} \qquad u\in V.$$

Demonstração. Seja $u\in V$, então $u\in H^1(J)$ e $u(0)=0$, pelo teorema (1.27) existe $(u_n)\subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|J}\to u$ em $H^1(J)$. Consideremos $t\in J$,

$$u_n(t)=\int_0^t (u_n)_x(r)dr \qquad ; u_n(0)=0,$$

pela Desigualdade de Hölder:

$$|u_n(t)|^2\le L\|(u_{n,x}\|^2_{L^2(J)},$$

assim

$$\|u_n\|_{L^2(J)} \leq L\|u_{n,x}\|_{L^2(J)},$$

logo pelo teorema (1.27) concluímos que

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq L\|u_x\|_{L^2(J)} \tag{5.9}$$

Já que $u \in V$, então $u_x \in H^1(J)$ e $u_x(0) = 0$, aplicando a desigualdade anterior temos

$$\|u\|_{L^2(J)} \leq L\|u_x\|_{L^2(J)} \leq L^2\|u_{xx}\|_{L^2(J)}. \tag{5.10}$$

□

Agora verificaremos que as hipóteses $(A1)$, $(A2)$, $(A3)$ são satisfeitas:

(a) É claro que V, H são espaços vetoriais e que a, c são formas sesquilineares positivas em V, H respetivamente. Se $a(u,u) = 0$, então $\|u_{xx}\|_{L^2} = 0$, logo $u_{xx} = 0$, pelo Lema (1.1); $u_x = C\ q.t.p\ J$, já que $H^2(J) \subset C^{1,\lambda}(\bar{J})$ e como $u \in V$, então $u = 0$, assim $a(.,)$ é um produto interno em V.

Se $c(u,u) = 0$, $u \in H$, decorre da propriedade de ρ que $\|u\|_{L^2(J)} = 0$, logo $u = 0$, i.e $c(.,.)$ é um produto interno em H. Definimos $M := max\{\|\rho\|_\infty, \|EI\|_\infty\}$, então

$$c_0\|u\|_{L^2(J)} \leq \|u\|_H \leq M\|u\|_{L^2(J)}, \tag{5.11}$$

disto decorre que H é um espaço de Hilbert.
Seja $(u_n) \subset V$, sequencia de Cauchy, então pela desigualdade (5.10), $(u_n), ((u_n)_x), ((u_n)_{xx})$ são sequencias de Cauchy em $L^2(J)$, logo existem $u_o, v_0, w_0 \in L^2(J)$ tais que

$$u_n \overset{L^2(J)}{\rightarrow} u_0$$
$$u_{n,x} \overset{L^2(J)}{\rightarrow} v_0$$
$$u_{n,xx} \overset{L^2(J)}{\rightarrow} w_0.$$

Temos que

$$\int_J u_{n,x}\varphi = -\int_I u_n\varphi_x, \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(J),$$

fazendo $n \to \infty$: $\displaystyle\int_J v_0\varphi = -\int_I u_0\varphi_x$ i.e $v_0 = (u_0)_x$ no sentido distribucional, analogamente $w_0 = (v_0)_x$ no sentido distribucional, segue-se que $u \in H^2(J)$. Por outra parte existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_j} \to u_0 \qquad q.t.p\ \ J$$
$$(u_{n_j})_x \to v_0 \qquad q.t.p\ \ J$$

por tanto $u(0) = u_x(0) = 0$, como $u_{n,xx} \to u_{xx}$ em $L^2(J)$ temos que $u_n \to u_0$ em V, $u_0 \in V$, i.e V é um espaço de Hilbert. A hipótese $(A1)$ é verificada.

(b) Seja $u \in V$, pela desigualdade (5.10):

$$\|u\|_H \leq M\|u\|_{L^2(I)} \leq ML^2\|u''\|_{L^2(I)} \leq \frac{ML^2}{c_0}c_0\|u''\|_{L^2(I)} \leq \frac{ML^2}{c_0}\|u\|_V,$$

disto decorre que $V \hookrightarrow H$. Sabemos que $C_c^\infty(I)$ é denso em $L^2(I)$, como $C_c^\infty(I) \subset V$ temos pela desigualdade (5.11) que V é denso em H, i.e a hipótese $(A2)$ é verificada.

(c) Temos que

$$D(A^{1/4}) = \{v \in H^1(0,L) | v(0) = 0\}.$$

então para $u, v \in D(A^{1/4})$

$$\begin{aligned}
|b(u,v)| &\leq \|h\|_\infty \textstyle\int_0^L \int_0^L |u'(x)||u'(\xi)||v'(x)| d\xi dx \\
&= \|h\|_\infty \textstyle\int_0^L \left(\int_0^L |u'(x)||v'(x)| d\xi + |v'(x)| \int_0^L |u'(\xi)| d\xi \right) dx \\
&\leq \|h\|_\infty L \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|h\|_\infty (\textstyle\int_0^L |u'(\xi)| d\xi)(\int_0^L |v'(\xi)| dx) \\
\text{(Desig. Hölder)} &\leq 2\|h\|_\infty L \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2}. \\
&\leq 2\|h\|_\infty L \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Assim a condição $(A2)$ é verificada para $\alpha = 1/2$.

Verificaremos que se cumpre a desigualdade (4.2) usando as condições sobre a função h, seja $u \in V$, nós agora calculamos

$$\begin{aligned}
b(u) &= 2 \int_0^L \int_0^L h(x,\xi)[u_x(x) - u_x(\xi)] \bar{u_x}(x) d\xi dx \\
&= \int_0^L \int_0^L h(x,\xi)[u_x(x) - u_x(\xi)] \bar{v_x}(x) d\xi dx + \int_0^L \int_0^L h(x,\xi)[u_x(x) - u_x(\xi)] \bar{u_x}(x) d\xi dx \\
&= \int_0^L \int_0^L h(x,\xi)[u_x(x) - u_x(\xi)] \bar{u_x}(x) d\xi dx + \int_0^L \int_0^L h(\xi,x)[u_x(\xi) - u_x(x)] \bar{u_x}(\xi) dx d\xi \\
(T.Fubini) &= \int_0^L \int_0^L h(x,\xi)[u_x(x) - u_x(\xi)] \bar{u_x}(x) d\xi dx + \int_0^L \int_0^L h(x,\xi)[u_x(\xi) - u_x(x)] \bar{u_x}(\xi) d\xi dx \\
&= \int_0^L \int_0^L h(x,\xi) |[u_x(x) - u_x(\xi)|^2 d\xi dx \\
&\geq c_1 \int_0^L \int_0^L |u_x(x) - u_x(\xi)|^2 d\xi dx \\
&= c_1 \int_0^L \int_0^L (u_x(x) - u_x(\xi))(\overline{u_x(x)} - \overline{u'(\xi)}) d\xi dx \\
&= c_1 \int_0^L \int_0^L (u_x(x) - u_x(\xi)) \overline{u_x(x)} d\xi dx + c_1 \int_0^L \int_0^L (u_x(\xi) - u_x(x)) \overline{u_x(\xi)} d\xi dx \\
&= c_1 \int_0^L \int_0^L (u_x(x) - u_x(\xi)) \overline{u_x(x)} d\xi dx + c_1 \int_0^L \int_0^L (u_x(x) - u_x(\xi)) \overline{u_x(\xi)} d\xi dx \\
(T.Fubini) &= 2c_1 \int_0^L \int_0^L (u_x(x) - u_x(\xi)) \overline{u_x(x)} d\xi dx \\
&= 2c_1 \left(\int_0^L \int_0^L |u_x(x)|^2 d\xi dx - \int_0^L \int_0^L u_x(\xi) \overline{u_x(x)} d\xi dx \right) \\
&= 2c_1 \left(L \int_0^L |u_x(x)|^2 dx - |u(L)|^2 \right),
\end{aligned}$$

ou seja

$$b(u) \geq 2c_1 \left(L \int_0^L |u_x(x)|^2 dx - |u(L)|^2 \right), \qquad \forall v \in V. \tag{5.12}$$

Observamos que para $u \in V$ se verifica

$$\begin{aligned}
|u(L)|^2 &= 2Re\int_0^L u_x\bar{u}dx \\
&\leq 2\int_0^L |u_x||\bar{u}|dx \\
\left((\sqrt{\tfrac{L}{2}}|u_x| - \sqrt{\tfrac{2}{L}}|u|)^2 \geq 0 \text{ , integrando em } (0,L)\right) &\leq \frac{L}{2}\int_0^L |u_x|^2dx + \frac{2}{L}\int_0^L |u|^2dx.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Decorre de (5.12) e (5.13) que

$$b(u) \geq c_1L\int_0^L |u_x|^2dx - 4\frac{c_1}{L}\int_0^L |u|^2dx.$$

Por tanto se verificam as hipóteses do teorema (4.1), logo o sistema (5.7) esta associado a um C_0-semigrupo $e^{t\mathscr{A}}$ de classe $G(1)$, pela observação b) no Capítulo 4, $e^{t\mathscr{A}}$ é um C_0-semigrupo analítico de contrações em $V \times H$.
Já que $e^{t\mathscr{A}}$ é um C_0-semigrupo analítico de contrações, segue dos teoremas (1.51) e (1.53) que basta provar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathscr{A})$, ou uma condição equivalente

$$\begin{cases} a(u,\hat{u}) - \omega^2c(u,\hat{u}) = 0, & \forall\hat{u} \in V \\ b(u) = 0, u \in V.\omega \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \quad u = 0, \qquad \text{em } V. \tag{5.14}$$

Pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned}
|u(L)|^2 &= \left|\int_0^L u_xdx\right|^2 \\
&\leq \left(\int_0^L |u_x|dx\right)^2 \\
&\leq L\int_0^L |u_x|^2dx, \qquad \forall u \in V.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Considerando $u \in V$, se a igualdade em (5.15) se verifica então $u \equiv 0$; para isto basta provar que $u(L) = 0$. De fato $\int_0^L \left||u_x|^2 - \frac{|u(L)|^2}{L^2}\right| dx = 0$, daí que $|u|^2 = \frac{|u(L)|^2}{L^2}$ em $[0,L]$, como $u_x(0) = 0$ chegamos a uma contradição. A recíproca é imediata.
Por tanto de (5.12) temos que $b(u) > 0$ para tudo $u \in V$ não nulo. Logo a condiçao (5.14) é verificada.
Temos provado o teorema:

Proposição 5.1. *O Modelo de Histerese Espacial de Russell dado pela equação (5.7) esta associado a um C_0-semigrupo analítico e exponencialmente estável no espaço de energia finita $\mathscr{H} = V \times H$.*

5.2 Um Modelo de Flexão-Vibração de um Gasoduto com Amortecimento Estrutural Contendo Líquido Circulante

Consideramos o modelo

$$\begin{cases} (\rho+\rho_1)w_{tt} + (EIw_{xx})_{xx} + \rho_1\eta^2w_{xx} + 2\rho_1\eta w_{xt} - (dw_{xt})_x = 0 & (0,L)\times\mathbb{R}^+ \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0 & t > 0, \end{cases} \tag{5.16}$$

onde os coeficientes satisfazem

$$\begin{aligned} \rho, \rho_1, \eta, EI, d \in L^\infty(0,L) \\ \rho, EI, d \geq c_0 > 0, \qquad \rho_1, \eta \geq 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

onde ρ é a densidade de massa por unidade de comprimento do tubo, ρ_1 a densidade de fluido, η é a velocidade do fluido e EI é a rigidez à flexão do tubo. Em ordem de definir os espaços V, H e seus produtos internos multiplicamos a equação (5.16) por uma função v e integramos em $J := (0,L)$, tem-se

$$\underbrace{\int_0^L (\rho+\rho_1)w_{tt}\bar{v}}_{i} + \underbrace{\int_0^L (EIw_{xx})_{xx}\bar{v}}_{ii} + \underbrace{\int_0^L \rho_1\eta^2 w_{xx}\bar{v}}_{iii} + \underbrace{\int_0^L (2\rho_1\eta w_{xt} - (dw_{xt})_x)\bar{v}}_{iv} = 0.$$

Tendo em conta as condições de fronteira procedemos a analisar os termos senhalados

1. De i, temos que ja aparece um termo com segunda derivada, então definimos $H := L^2(J)$ e $c(u,v) = \displaystyle\int_0^L (\rho+\rho_1)u\bar{v}dx.$

2. De ii, integrando por partes temos que

$$\int_0^L (EIw_{xx})_{xx}\bar{v} = (EIw_{xx})_x\bar{v}\,\Big|_0^L - \int_0^L (EIw_{xx})_x\bar{v_x},$$

   daí que para simplificar a expressão fazemos que $u = 0$ em $x = 0, L$. Integrando por partes o termo restante:

$$\int_0^L (EIw_{xx})_{xx}\bar{v} = -(EIw_{xx})\bar{v_x}\,\Big|_0^L - \int_0^L (EIw_{xx})\bar{v_{xx}},$$

   novamente por simplicidade fazemos $u_x = 0$ em $x = 0, L$, logo podemos definir $V = H_0^2(J)$ e $a(u,v) = \displaystyle\int_0^L EIu_{xx}\bar{v_{xx}}.$

3. De iv, integrando por partes só um termo, tem-se

$$\int_0^L 2\rho_1\eta w_{xt}\bar{v}dx - \int_0^L (dw_{xt})_x\bar{v}dx = \int_0^L 2\rho_1\eta\, w_{xt}\bar{v}dx - (dw_{xt})\bar{v}\,\Big|_0^L + \int_0^L (dw_{xt})\bar{v_x}dx$$

   pelas condições de fronteira a integral fica como

$$\int_0^L 2\rho_1\eta w_{xt}\bar{v}dx - \int_0^L (dw_{xt})_x\bar{v}dx = \int_0^L (dw_{xt}barv_x + 2\rho_1\eta w_{xt}\bar{v})dx.$$

   Logo definimos $b(u,v) = \displaystyle\int_0^L (du_x\bar{v_x} + 2\rho_1\eta u_x\bar{v})dx.$

Resumindo

- $H = L^2(0,L) \qquad c(u,v) = \displaystyle\int_0^L (\rho+\rho_1)u\bar{v}dx,$

- $V = H_0^2(0,L) \qquad a(u,v) = \displaystyle\int_0^L EIu_{xx}\bar{v_{xx}}dx,$

- $b(u,v)=\displaystyle\int_0^L (du_x\bar{v_x}+2\rho_1\eta u_x\bar{v})dx.$

Logo a equação de evolução variacional correspondente a (5.16) é dada por

$$c(w_{tt}(t),\hat{w})+b(w_t(t),\hat{w})+a(w(t),\hat{w})+\int_0^L \rho_1\eta^2 w_{xx}\hat{w}dx=0, \qquad \forall \hat{w}\in V,\, t>0. \tag{5.18}$$

De maneira análoga ao feito na equação anterior as hipóteses $(A1)$ e $(A2)$ se verificam imediatamente. Em quanto a hipótese $(A3)$, considerando $X=H_0^2(J)$ e $Y=L^2(J)$ temos que aqueles espaços verificam a condição (1.2), logo existe um operador $\tilde{A}$ autoadjunto e definido positivo tal que $D(\tilde{A}^{1/2})=X$, decorre da observação (1.3) e o feito acima que

$$D(A^{\frac{1-\theta}{2}})=D(\tilde{A}^{\frac{1-\theta}{2}})$$

com normas equivalentes, Decorre do teorema (1.34) aplicado com $\theta=\frac{1}{2}$ que

$$[H_0^2(J),L^2(J)]_{\frac{1}{2}}=H_0^1(J)=D(\tilde{A}^{1/4}),$$

logo $D(A^{1/4})=H_0^1(0,L)$.
Consideremos $u,v\in D(A^{1/4})=H_0^1(0,L)$ então

$$\begin{array}{rcl}
|b(u,v)| & \leq & \displaystyle\int_0^L |(du_x\bar{v_x}+2\rho_1\eta u_x\bar{v})|dx \\
(\ k=\ \max\{\|d\|_\infty,2\|\rho_1\|_\infty,\|\eta\|_\infty\}) & \leq & \displaystyle k\int_0^L |u_x||v_x|+2k^2\int_0^L |u_x||v| \\
(\text{ Desigualdade de Hölder }) & \leq & k\|u_x\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}+2k^2\|u_x\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
 & \leq & M\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.
\end{array}$$

Assim a hipótese $(A2)$ se verifica para $\alpha=1/2$.
Seja $u\in V$, a desigualdade (4.2) decorre da seguinte estimativa:

$$\begin{array}{rcl}
Reb(u) & = & \displaystyle\int_0^L d\|u_x\|^2+Re\left(\int_0^L 2\rho_1\eta\bar{u}u_x\right) \\
 & \geq & \displaystyle c_0\int_0^L \|u_x\|^2+Re\left(\int_0^L 2\rho_1\eta\bar{u}u_x\right) \\
 & \geq & \displaystyle c_0\int_0^L \|u_x\|^2-\left(\frac{c_0}{2}\int_0^L \|u_x\|^2+\frac{2}{c_0}\int_0^L |\rho_1\eta u|^2dx\right),
\end{array}$$

definindo $M=max\{\|\rho_1\|_\infty,\|\eta\|_\infty\}$, temos que

$$\frac{2M^2}{c_0}\|u\|_H^2+Re\ b(u)\geq\frac{c_0}{2}\int_0^L \|u_x\|^2. \tag{5.19}$$

Segue-se da desigualdade de Poincaré que podemos considerar que $\|u_x\|_{L^2}=\|u\|_{H_0^1}$ e pela observação (1.3) que $\|u\|_{D(A)^{1/4}}=\|A^{1/4}u\|=\|u\|_{H_0^1}$. Logo a desigualdade anterior comprova a verifica a relação (4.2) com $\alpha=1/2$, segue então pelo teorema (4.1) e pela observação (a) do Capítulo 4 que o semigrupo gerado por nossa forma variacional é analítico.
Definimos em $\mathscr{H}=H_0^2(0,L)\times L^2(0,L)$ o operador

$$\mathscr{B}(u,v)=(0,\rho_1\eta^2u''), \qquad \forall u,v\in\mathscr{H},$$

é claro que $\mathscr{B}\in\mathcal{L}(\mathscr{H})$. Pela observação (d) do capitulo 4, temos que $e^{t(\mathscr{A}+\mathscr{B})}$ também é de classe $G(1)$. Além disso o semigrupo $e^{t(\mathscr{A}+\mathscr{B})}$ é solução da equação (5.18) no sentido dado pelo teorema (3.2). Note-se que a equação (2.5) é um caso especial do (5.16).

5.3 Um Terceiro Exemplo

Consideremos a seguinte equação

$$\begin{cases} w_{tt} - (w_{xxxx} + d(x)w_{xt})_x = 0 & (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ w(0,t) = w(L,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(L,t) = w_{xxxx}(0,t) = w_{xxxx}(L,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{5.20}$$

Onde

$$d \in L^\infty(0, L), \qquad d(x) \geq c_0 > 0.$$

Tal como foi feito nas seções anteriores, definimos

- $H = L^2(0, L), \qquad c(u, v) = \int_0^L u\bar{v}dx,$
- $V = \{v \in H_0^1(0, L) \cap H^3(0, L) | v_{xx}(0) = v_{xx}(L) = 0\}$, $a(u, v) = \int_0^L u_{xxx}\bar{v_{xxx}}dx,$
- $b(u, v) = \int_0^L d(x)u_x\bar{v_x}dx.$

Assim a equação (5.20) fica na forma:

$$c(w_{tt}(t), \hat{w}) + b(w_t(t), \hat{w}) + a(w(t), \hat{w}), \ \ \forall \hat{w} \in V, t > 0.$$

De maneira análoga como na prova da Afirmação (5.1) temos que

$$L\|u_{xxx}\|_{L^2(J)} \geq \|u_{xx}\|_{L^2(J)},$$

e

$$L\|u_x\|_{L^2(J)} \geq \|u\|_{L^2(J)}, \ \ u \in V.$$

Seja $u \in V$, então $u_x \in H^1(J)$ segue-se do teorema (1.27) que

$$L\|u_{xx}\|_{L^2(J)} \geq \|u_x\|_{L^2(J)}.$$

Resumindo existem constantes $c_1(L), c_2(L), c_3(L) > 0$ tais que

$$\|u_{xxx}\|_{L^2(J)} \geq c_1\|u_{xx}\|_{L^2(J)} \geq c_2\|u_x\|_{L^2(J)} \geq c_3\|u\|_{L^2(J)}. \tag{5.21}$$

Decorre das propriedades da integral e a desigualdade (5.21) que a, c são produtos internos em V, H os quais tornam-se em espaços de Hilbert. Já que $C_c^\infty(J) \subset V$ então deduzimos que V é denso em H, assim as hipóteses $(A1$ e $(A2)$ são verificadas. Já que

$$D(A^{1/6}) = H_0^1(0, L),$$

então a hipótese $(A3)$ se verifica para $\alpha = 1/3$, também de maneira imediata se verifica a hipótese do teorema (4.1), logo por o mesmo teorema temos que o semigrupo $e^{t\mathscr{A}}$ associado com a equação (5.20) é de classe $G(2/3)$, logo é um semigrupo diferenciável.

Bibliografia

[1] **S. Agmon, H. Douglis and L. Nirenberg,** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[2] **N.I Akhiezer and I.M. Glazman,** Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Ungar, New York (1961).

[3] **A.V. Balakrishnan,** Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pacific J. Math. 10 (1960). 419-437

[4] **Ph. Blanchard and E. Brüning** Mathematical Methods in Physics - Distributions, Hilbert Space Operators, and Variational Methods, Series: Progress in Mathematical Physics, Vol. 26; Birkhäuser Boston New York 2003.

[5] **J. Blank and P. Exner and M. Havlícek,** Hilbert Space Operators in Quantum Physics, Second edition (revised and extended), Springer, Dordrecht 2008.

[6] **H. Brezis,** Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin (2011).

[7] **M. Cavalcanti and V. Cavalcanti,** Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, UEM / DMA, 2010.

[8] **M. Cavalcanti and V. Cavalcanti and V. Komornik,** Introdução à Análise Funcional, UEM/DMA, 2010.

[9] **S. Chen, K. Liu, and Z. Liu,** Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping, SIAM J. Appl. Math. 59 (2) (1998) 651-668.

[10] **G. Chen and D. L. Russell,** A mathematical model for linear elastic systems with structural damping, Quart. Appl. Math. 39 (1981-1982), 433-454.

[11] **M. G. Crandall and A. Pazy,** On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach space, J. Math. Mech. 18, No. 10 (1969) 1007-1016.

[12] **R. Dautray and J.L. Lions,** Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Spectral Theory and Applications Vol.3,Springer-Verlag (1985).

[13] **E. Davies,** One parameter semigroups, Academic Press, 1980.

[14] **Cesar R. De Oliveira,** Introdução à Analise Funcional, Rio de Janeiro, Projesto Euclides,IMPA, 2010.

[15] **K.J Engel and R. Nagel,** One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer-Verlag, Berlin (2000).

[16] **H. O. Fattorini,** Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces, Elsevier, Amsterdam, 1985.

[17] **L. Gearhart,** Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces, Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[18] **F. L. Huang,** On the holomorphic property of the semigroup associated with linear elastic systems with structural damping, Acta Math. Sci. (Chinese) 55 (1985), 271-277.

[19] **F. L. Huang,** A problem for linear elastic systems with structural damping, Acta Math. Sci. (Sinica) 6 (1986), 107-113.

[20] **F. L. Huang,** Strong asymptotic stability of linear dynamical systems in Banach spaces,J. Differential Equations, 104 (1993), pp. 307-324.

[21] **T. Kato,** Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1980.

[22] **S.G. Krein,** Linear differential equations in Banach space. Translated from the Russian by J. M. Danskin. (English), Translations of Mathematical Monographs. Vol. 29. Providence, R. I.: American Mathematical Society (AMS).

[23] **E. Kreyszig,** Introductory Functional Analysis with Applications, Jhon Wiley e Sons, 1978.

[24] **J. Lagnese,** Boundary Stabilization of Thin Plates,Vol. 10, SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.

[25] **J.L.Lions, and E. Magenes,** Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, vol. I. Springer-Verlag, Berlin (1972).

[26] **K. Liu and Z. Liu,** Analyticity and differentiability of semigroups associated with elastic systems with damping and gyroscopic forces, J. Diff. Eqs. 141 (1997), 340?355.

[27] **Z. Liu and S. Zheng,** Semigroups associated with dissipative systems, In CRC Reseach Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall. (1999).

[28] **A. Medeiros and M. Miranda,** Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogéneos), UFRJ / IM, 2011.

[29] **A. Moreira Gomes,** Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações as Equações de Evolução, UFRJ / IM, 2012.

[30] **J. Muñoz Rivera,** Estabilização de Semigrupos e Aplicações, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.

[31] **J. Muñoz Rivera,** Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. LNCC, Petrópolis - Rio de Janeiro (2004).

[32] **A. Pazy,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag (1983). New York.

[33] **J. Prüss,** On the spectrum of C_0-semigroups, Trans. AMS. 284 (1984), pp. 847-857.

[34] **M. Reed and B. Simon,** Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1. London: Academic Press, 1979.

[35] **W. Rudin,** Functional Analysis. McGraw-Hili, New York 1973.

[36] **D. L. Russell,** On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping, in "Control and Estimation of Distributed Parameter Systems" (H. T. Banks, Ed.), SIAM, Philadelphia, 1992.

[37] **K. Schmüdgen** Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Dordrecht, 2012.

[38] **J. Thayer,** Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferencias Parciais, Rio de Janeiro, Projeto Euclides-CNPq.

[39] **T. Xiao and J. Liang,** On complete second order linear differential equations in Banach spaces, Pacific J. Math. 142 (1990), 175-195.

[40] **K. Yosida,** Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.