Alex David Hernández Maturrano

Espaços de Sobolev com peso - Aplicações para os operadores $div - grad - curl$ em $\mathbb{R}^n$

Universidade Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Huy Hoang Nguyen

Brasil

2015

Espaços de Sobolev com peso - Aplicações para os operadores $div - grad - curl$ em $\mathbb{R}^n$

Alex David Hernández Maturrano

Orientador: Huy Hoang Nguyen

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Huy Hoang Nguyen

Prof. Pedro Gamboa Romero

Prof. Flank David Morais Bezerra

Prof. Xavier Carvajal Paredes

Rio de Janeiro
2 de Junho, 2015

Agradecimentos

À Deus, pelo seu grande amor.

À minha família, pelo amor, apoio e compreensão .

À minha noiva Erika (minha musa), que sempre me estimula a crescer científica, ética, profissional e pessoalmente.

Ao Professor Huy Hoang Nguyen, mais que um orientador, um amigo que sempre compartilhou valiosos conselhos para o futuro.

À banca no dia da minha defesa. Os professores Pedro Gamboa Romero, Flank Morais Bezerra e Xavier Carvajal Paredes, pelo seu tempo para corrigir este trabalho e boa disposição ao aceitar o convite.

Aos amigos que fiz durante 2 anos no Rio de Janeiro. Não pudendo nomear todos simplesmente direi: Obrigado “galera da salinha”.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UFRJ pela atenção e disponibilidade para resolver todos os problemas de última hora.

Ao governo brasileiro pela oportunidade mediante a bolsa CAPES de mestrado que recebi durante dois anos, o pão de cada dia.

Resumo

O propósito deste trabalho é apresentar os espaços de Sobolev com peso no enfoque seguido por Amrouche-Girault-Giroire no artigo [3] e resultados recentes referentes aos operadores *div, grad* e *curl* assim como para alguns problemas elípticos no espaço inteiro com condições e soluções em L^1 ou nos espaços de Sobolev com peso apresentados. Os artigos base seguidos são : o artigo de Amrouche-Girault-Giroire [3] e Amrouche-Nguyen [7].

Palavras-chaves: Espaços de Sobolev com peso, operadores elípticos, L^1, div, curl, grad.

Abstract

The purpose of this work is to present the Weighted Sobolev Spaces in the approach followed by Amrouche-Girault-Giroire in the article [3] and recent results concerning the *div, grad* and *curl* operators as well as for some elliptic problems in the whole space with data and solutions which live in L^1 or in the weighted Sobolev spaces studied. This work is based in the results from the articles Amrouche-Girault-Giroire [3] and Amrouche-Nguyen [7].

Key-words: Weighted Sobolev Spaces, elliptic operators, L^1, div, curl, grad.

Introdução

A teoria dos espaços de Sobolev com peso começou no meados do século passado sob a ideia intuitiva de adicionar funções peso nas integrais das normas L^p. Desta forma, se ω é uma função localmente integrável sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $\omega(x) > 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a qual chamaremos de peso, e se $1 \leq p < \infty$, m um inteiro não negativo e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, o espaço de Sobolev com peso $W_\omega^{m,p}(\Omega)$ consiste de todas as funções $u = u(x)$, as quais estão definidas $q.t.p$ sobre Ω, com derivadas distribucionais $D^\alpha u,\ |\alpha| \leq m$ satisfazendo

$$||u||_{W_\omega^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \omega dx \right)^{1/p} < \infty.$$

No caso $\omega = 1$ estes espaços coincidem com os espaços de Sobolev clássicos e uma pergunta de interesse é para que tipo de funções ω estes espaços com peso mantém as propriedades dos espaços de Sobolev clássicos e nos permitem generalizá-los. Pode-se ver um estudo sobre esta pergunta em Kufner [29]. Ora, existem basicamente dois famílias de funções peso que funcionam bem nas aplicações e a eleição depende da limitação do domínio. Se trabalhamos em um domínio limitado, pesos que dependem da distância à fronteira do domínio mostraram bons resultados. Pode-se encontrar uma exposição detalhada de espaços de Sobolev com esses tipos de pesos no livro de Kufner [28]. Por outro lado, para domínios não limitados precisamos ter condições no infinito além das condições de fronteira. Estas condições podem ser descritas de uma forma conveniente em termos de funções peso como médias da forma

$$(1 + |x|)^\varepsilon, \ \varepsilon \in \mathbb{R},$$

pois a condição

$$\int_{|x|>1} |u(x)|^2 \, (1 + |x|)^\varepsilon dx < \infty$$

caracteriza o comportamento da função $u(x)$ para x grande. Uns dos primeiros trabalhos que aplica esta teoria no estudo de funções definidas sobre domínios não limitados foi iniciada por Kudrjavcev com sua monografia [27]. Recentemente, outros matemáticos e sucessores seguiram esta linha como B. Hanouzet [22], A. Avantaggiati [9], M. N. Le Roux [32], J. Giroire [21] e C. Amrouche ([3],[6],[8]).

Na linha dos espaços de Sobolev com peso $W_\omega^{m,p}(\Omega)$ para Ω não limitado, Amrouche-Girault-Giroire consideram pesos do tipo $(1 + |x|^2)^\varepsilon$ com ε dependente do peso, m e p e demostraram propriedades básicas no seu trabalho [3]. Estes espaços assim definidos são similares aos espaços de Sobolev clássicos, mas com pesos que controlam o crescimento ou decaimento das funções no infinito. Estes pesos, os quais são derivados naturalmente da desigualdade de Hardy, permitem provar uma desigualdade tipo Poincaré relacionada às normas das funções em vez de normas das suas derivadas. Isto da uma vantagem sobre as duas famílias de espaços atualmente usadas para resolver o laplaciano ou estudar a equação de Navier-Stokes, isto é, o fecho de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a norma do gradiente em $L^p(\Omega)$ e o subespaço de $L^p_{loc}(\Omega)$ de funções cujos gradientes pertencem a $L^p(\Omega)$. Por outro lado, quando $p \geq n$, existem algumas sequências em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ que não convergem para distribuições . Este sutil comportamento foi descrito em 1954 por Deny e Lions em [20], fato que é expandido na Observação 17 deste trabalho. Estas sequências são eliminadas nos espaços de Sobolev com peso de Amrouche-Girault-Giroire devido à consideração de normas de Sobolev completas em vez de somente normas do gradiente. Além disso, estas normas completas evitam a imprecisão no infinito inerente à norma L^p_{loc}. Lembre-se que em domínios não limitados é importante descrever claramente o comportamento das funções no infinito e não somente do seu gradiente. Isto é vital do ponto de vista matemático, não só porque permite caracterizar facilmente os dados para a qual podemos resolver nosso problema, mas também porque a análise feita neste trabalho para os expoentes dos pesos pode-se estender facilmente para um conjunto grande de expoentes reais. Isto é mais crucial do ponto de vista numérico, pois na maioria das formulações , o primeiro que se discretiza é a função mesma e o gradiente é deduzido dos valores desta.

Da definição de Amrouche-Girault-Giroire deduzimos que eles coincidem com os espaços de Sobolev clássicos para domínios limitados. Logo seu estudo se reduz basicamente para o espaço inteiro, o semiespaço e domínios exteriores. Nesta dissertação faremos um estudo apenas em $\mathbb{R}^n$ que servirá para o estudo em domínios exteriores. Porém, esta parte em $\mathbb{R}^n$ já permite derivar vários resultados estabelecidos para outros espaços clássicos e também completar eles com novos resultados. Existem também outros tipos de funções peso que funcionam tanto em domínios limitados quanto em não limitados, mas as propriedades destes espaços mudam e não estaremos interessado neste enfoque. Uma classe importante foi a introduzida por B. Muckenhoupt na década dos 70. Estes pesos são precisamente aqueles pesos para os quais o operador maximal de Hardy-Littlewood é limitado de $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ em $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ quando $1 < p < \infty$ e de $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ em $L^1_w(\mathbb{R}^n)$-fraco quando $p = 1$.

Como aplicação dos espaços de Sobolev aqui estudados derivamos várias estimativas para os operadores $div, curl$ e $grad$, as quais são muito importantes para diversos sistemas elípticos e ainda nas equações de Navier-Stokes e suas variantes. Os dados iniciais e as soluções vivem em L^1 ou em espaços de Sobolev com peso. A respeito, recentemente novas estimativas para campos vetoriais em L^1 tem sido descobertas por Bourgain, Brezis e Van Schaftingen ([11]-[14],[16] e [33]) as quais melhoram as estimativas para as soluções de sistemas elípticos em $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho apresentamos e justificamos várias extensões dos resultados destes autores usando espaços de Sobolev com peso focando em obter decomposições de Helmholtz de campos vetoriais. Estas extensões foram tiradas do trabalho de Amrouche-Nguyen [7].

Organizamos esta dissertação da seguinte maneira: No Capítulo 1 damos um listado da maioria dos teoremas e propriedades utilizados para o desenvolvimento deste trabalho, principalmente resultados clássicos de análise funcional, operadores não limitados e espaços de Sobolev junto a alguns resultados auxiliares como a desigualdade de Hardy e o teorema de Faà di Bruno. Dado que não é o objetivo, demonstramos somente os fatos que consideramos necessários. No Capítulo 2 introduzimos os espaços de Sobolev com peso junto com suas principais propriedades, entre elas a densidade das funções testes e uma versão da desigualdade de Poincaré para estes espaços. No Capítulo 3 mostramos os principais resultados sobre os operadores div, $grad$ e $curl$ definidos em espaços de Sobolev com peso sobre $\mathbb{R}^n$. Finalmente no Capítulo 4 aplicamos as estimativas obtidas no Capítulo 3 para obter resultados úteis para o operador $curl$ e problemas que o envolva.

Notações gerais

$B_r^E(x_0)$	$\{x \in E : \|\|x - x_0\|\| < r\}$.
B_r	Bola aberta com centro 0 e raio r.
B_r'	Complemento de $\overline{B}_r$.
$\sum$	Esfera unitária de $\mathbb{R}^n$.
ρ	$1 + \|\boldsymbol{x}\|$.
$E^* \perp M = M^\perp$	Espaço ortogonal de M.
p	Real $1 < p < \infty$.
p'	Hölder conjugado de p.
n	dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$.
C	Constante positiva genérica que pode depender da dimensão n, do expoente p e possivelmente de outros parâmetros, mas nunca das funções em consideração .
$\boldsymbol{x}$	Elemento de $\mathbb{R}^n$.
r	$\|\boldsymbol{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.
$\mathscr{P}_q$	Espaço dos polinômios de grau $\leq q$.
$\mathscr{P}_q = \{0\}$	Se $q < 0$.
$\mathscr{P}_q^\Delta$	Espaço dos polinômios harmômicos de grau $\leq q$.
$\mathscr{P}_q^\Delta = \{0\}$	Se $q < 0$.
$[s]$	Parte inteira do real s.
m	Inteiro maior do que 1.
Ω	Aberto limitado de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$C^0(\Omega)$	Conjunto das funções contínuas $u : \Omega \to \mathbb{K}$.
$C^m(\Omega)$	$\{\varphi \in C^0(\Omega) : D^\alpha \varphi \in C^0(\Omega), \forall \, \|\alpha\| \leq m\}$.
$C^\infty(\Omega)$	$\{u \in C^0(\Omega) : u$ possui infinitas derivadas em $\Omega\}$.
$C_b^m(\mathbb{R}^n)$	$\{u \in C^m(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u$ são limitadas $, \forall \; 0 \leq \|\alpha\| \leq m\}$.
$C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, com $0 < \lambda \leq 1$	$\{u \in C_b^m(\mathbb{R}^n) :$ tal que para $0 \leq \|\alpha\| \leq m$ existe uma constante c tal que $\|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)\| \leq c \, \|\|x - y\|\|^\lambda , \; \forall \; x, y \in \mathbb{R}^n\}$.
$C^m(\overline{\Omega})$	Restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^m(\mathbb{R}^n)$ que possuem suporte compacto.
$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, com $0 < \lambda \leq 1$	Restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^{m,\lambda}(\mathbb{R}^n)$
$D^\lambda u = \dfrac{\partial^{\|\lambda\|} u}{\partial x_1^{\lambda_1} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}}$	$\|\lambda\| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

Sumário

1 Preliminares

1.1 Definições

Definição 1. *Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos por E^* ao espaço dual de E, isto quer dizer o espaço de todas as funcionais lineares e contínuas sobre E. A norma dual é definida por*

$$||f||_{E^*} = \sup_{\substack{||x||\leq 1 \\ x\in E}} |f(x)| = \sup_{\substack{||x||\leq 1 \\ x\in E}} f(x).$$

Observação 1. Porém, como é comum denotamos como $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, para Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, ao espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e $\mathcal{D}'(\Omega)$ será o espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ com a topologia fraca estrela, isto quer dizer o espaço das distribuições sobre Ω.

Definição 2. *Seja E um espaço vetorial normado. Se $M \subset E$ é um subespaço linear, definimos*

$$M^\perp = \{f \in E^*, \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

Se $N \subset E^*$ é um subespaço linear definimos

$$N^\perp = \{x \in E, \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in N\}.$$

$M^\perp$ e $N^\perp$ são chamados espaços ortogonais (ou também polares) aos espaços M e N respectivamente. Quando tiver perigo de confusão também denotaremos eles como $E^* \perp M$ e $E \perp N$ respectivamente.

Definição 3. *Sejam E e F espaços de Banach, $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador linear com domínio $D(A)$.*

1. *A é dito limitado (ou contínuo) quando $D(A) = E$ e existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

   $$||Au||_F \leq C\|u\|_E,$$

   para todo $u \in D(A)$. Caso contrário, A é dito não limitado.

2. *A é dito densamente definido quando $\overline{D(A)} = E$.*

3. *A é dito fechado quando o gráfico de A, denotado por*

   $$G(A) = \{(u, Au) \in E \times F : u \in D(A)\},$$

   é um subespaço fechado de $E \times F$, onde $E \times F$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{E\times F} = (\|\cdot\|_E^2 + \|\cdot\|_F^2)^{1/2}$ ou uma norma equivalente.

Observação 2. Prova-se que um operador limitado é densamente definido e fechado.

Definição 4. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Representa-se por*

$$\mathcal{L}(E,F) = \{A : E \longrightarrow F;\ A \text{ é linear e limitado}\}.$$

Este é um espaço normado com a norma definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\|_F = \sup_{u\neq 0} \frac{||Au||_F}{||u||_E}.$$

Além disso, se F é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço de Banach. Denota-se $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$.

Procedemos agora a definir o operador adjunto. Para este fim precisamos da seguinte observação .

Observação 3. Sejam E e F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador linear e densamente definido. Se definimos

$$Z = \{v \in F^*; \exists\, c \geq 0 \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\,||u||\,,\ \forall u \in D(A)\}\,,$$

vemos que Z é um subespaço de F^*. Se $v \in Z$, consideramos a função $g : D(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) = \langle v, Au\rangle\,, \quad \forall u \in D(A),$$

Pela definição de Z temos que $|g(u)| \leq c\,||u||\,,\ \forall\, u \in D(A)$, então g define uma funcional linear e contínua em $D(A)$, logo pelo Teorema de Hanh-Banach existe uma funcional $g_v \in E^*$ que estende g e tal que

$$g_v(u) = \langle v, Au\rangle\,, \quad \forall u \in E.$$

Note que esta extensão é única desde que $D(A)$ é denso em E.

Definição 5 (Operador adjunto)**.** *Seja A um operador linear e densamente definido. Definimos o operador $A^* : D(A^*) \subset F^* \longrightarrow E^*$ da seguinte maneira. Primeiro definimos o domínio:*

$$D(A^*) = \{v \in F^*; \exists\, c \geq 0 \textit{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\,||u||\,,\ \forall u \in D(A)\}\,.$$

Isto é, $D(A^*) = Z$ como definida na observação anterior. Logo definimos $A^*v = g_v$, onde $g_v \in E^*$ é a funcional obtida em dita observação . Esta definição é boa desde que g_v existe e é única para cada $v \in F^*$. Este operador se chama operador adjunto de A.

Observação 4. Da Definição 5, a principal relação entre A e A^* é

$$\langle v, Au\rangle_{F^*,F} = \langle A^*v, u\rangle_{E^*,E} \quad \forall u \in D(A),\ \forall v \in D(A^*).$$

Observação 5. Se A é um operador limitado entre dois espaços de Banach, logo ele é densamente definido e fechado. Prova-se que A^* também é um operador limitado (de F^* a E^*) e Além disso,

$$||A^*||_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = ||A||_{\mathcal{L}(E,F)}\,.$$

1.2 Resultados de Análise Funcional

Nesta seção apresentamos resultados de Análise Funcional que usaremos nesta dissertação . Provamos apenas alguns resultados. Començamos com "os grandes" teoremas do Análise Funcional.

Teorema 1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Seja E espaço vetorial normado e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \forall x \in E \text{ e } \quad \forall \lambda > 0, \\ p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E. \end{aligned}$$

Seja $G \subset E$ um subespaço linear e seja $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ uma funcional linear tal que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G.$$

Logo, existe uma funcional $f \in E^*$ que estende g, isto é, $f(x) = g(x), \forall\, x \in G$, e tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 1.1. ∎

Corolário 1. *Seja E um espaço vetorial normado e $G \subset E$ um subespaço linear. Se $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funcional linear e contínua, logo existe um $f \in E^*$ que estende g e tal que*

$$||f||_{E^*} = ||g||_{G^*}\,.$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Corolário 1.2. ∎

Teorema 2 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear, contínuo e sobrejetivo. Então existe $r > 0$ tal que*

$$B_r^Y(0) \subset A(B_1^X(0)).$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.6. ∎

Corolário 2. *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear, contínuo e bijetivo. Então A^{-1} é contínuo.*

Demonstração. Ver Brézis [15], Corolário 2.7. ∎

Teorema 3 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Se A é fechado então é limitado.*

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.9. ∎

Teorema 4 (Teorema da Limitação Uniforme)**.** *Dados X e Y espaços de Banach, e seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família (não necessariamente contável) em $\mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que:*

$$\sup_{i \in I} \|A_i u\|_Y < \infty, \forall u \in X.$$

Então

$$\sup_{i \in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.2. ∎

Agora enunciamos propriedades gerais sobre espaços normados que precisaremos nos capítulos futuros.

Teorema 5. *Sejam X um espaço vetorial normado e Y um subespaço linear de X. Então:*

1. *Se X é reflexivo, então X é completo (logo um espaço de Banach).*
2. *Se X um espaço de Banach, então [Y é completo $\iff$ Y é fechado em X.]*
3. *Se o espaço dual X^* é separável, então X é separável.*
4. *Se Y tem dimensão finita, então é completo, reflexivo e fechado em X.*
5. *Se X é de Banach então*

$$X \text{ é reflexivo e separável } \Leftrightarrow X^* \text{ é reflexivo e separável }.$$

Demonstração. Ver Kreyszig [26], Teoremas 2.3.1, 2.4.2, 4.6.4, 4.6.5, 4.6.8. Brézis [15], Corolário 3.27. ∎

Teorema 6. *Sejam E um espaço vetorial normado e $M \subset E$ um subespaço linear, então*

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M},$$

e se $N \subset E^*$ é um subespaço linear, então

$$(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}.$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Proposição 1.9. ∎

Corolário 3. *Sejam E um espaço vetorial normado e $M \subset E$ um subespaço linear, logo M é denso se e só se $M^\perp = \{0\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\overline{M} = E$ então pelo teorema anterior

$$\{0\} = E^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp \supset \overline{M^\perp} \supset M^\perp.$$

Logo $M^\perp = \{0\}$

($\Leftarrow$) Se $M^{\perp} = \{0\}$, então também pelo teorema anterior

$$\overline{M} = \{0\}^{\perp} = E.$$

■

Proposição 1. *Sejam E um espaço vetorial normado e G e L dois subespaços fechados de E. Logo*

$$G \cap L = (G^{\perp} + L^{\perp})^{\perp}, \tag{1.1}$$

$$G^{\perp} \cap L^{\perp} = (G + L)^{\perp}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Proposição 2.14. ■

Teorema 7. *Sejam E um espaço de Banach e G e L dois subespaços fechados de E. As seguintes propriedades são equivalentes*

a) $G + L$ *é fechado em* E.

b) $G^{\perp} + L^{\perp}$ *é fechado em* E^*.

a) $G + L = (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp}$.

a) $G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp}$.

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.16. ■

Teorema 8. *Seja E um espaço de Banach. Assuma que G e L são dois subespaços tais que $G + L$ é fechado. Logo existe uma constante $C \geq 0$ tal que para todo $z \in G + L$ existe $x \in G$ e $y \in L$ satisfazendo $z = x + y$, $||x|| \leq C\,||z||\,,\ ||y|| \leq C\,||z||$*

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.10. ■

Ora, se M é um subespaço fechado de um espaço de Banach E, é conhecido que E/M é um espaço de Banach com a norma quociente. Os duais de M e E/M podem ser descritos em função do ortogonal $M^{\perp}$ de M. O Teorema 9 basicamente diz que $M^* \cong E^*/M^{\perp}$ e $(E/M)^* \cong M^{\perp}$. Antes de prová-lo precisamos da seguinte proposição muito útil que também será usada nos seguintes capítulos.

Proposição 2. *Sejam E e Z dois espaços vetoriais normados e $L : E \longrightarrow Z$ uma aplicação linear. Suponha que F é um subespaço fechado de E tal que $F \subset Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ e seja $\pi : E \longrightarrow E/F$ a aplicação quociente. Logo existe uma única aplicação $\tilde{L} : E/F \longrightarrow Z$ satisfazendo $L = \tilde{L} \circ \pi$. E além disso vale as seguintes afirmações*

a) $\tilde{L}$ *é linear e tem a mesma imagem que* L.

b) $\tilde{L}$ *é contínua se e somente se* L *é contínua. Neste caso, vale* $\left|\left|\tilde{L}\right|\right| = ||L||$.

c) $\tilde{L}$ *é aberta se e somente se* L *é aberta.*

Demonstração.

a) Basta definir $\tilde{L}(\bar{x}) = \tilde{L}(x + F) = L(x)$ para todo $x \in E$. Vejamos que $\tilde{L}$ está bem definida. Se $x, y \in \bar{x}$ então $x - y \in F \subset Ker(L)$, logo $\tilde{L}(x + F) = L(x) = L(y) = \tilde{L}(y + F)$. Assim $\tilde{L}$ está bem definida e é claro que é linear e tem a mesma imagem que L.

b) ($\Rightarrow$)Se $\tilde{L}$ é contínua, como π é contínua então L é contínua e além disso, $||L(x)|| = \left|\left|\tilde{L}(\bar{x})\right|\right| \leq \left|\left|\tilde{L}\right|\right| ||\bar{x}|| \leq \left|\left|\tilde{L}\right|\right| ||x||$, logo $||L|| \leq \left|\left|\tilde{L}\right|\right|$.

($\Leftarrow$) Se L é contínua então $\left|\left|\tilde{L}(\bar{x})\right|\right| = ||L(x)|| \leq ||L|| \, ||x|| \leq ||L|| \, ||x||$ para todo $x \in \bar{x}$. Logo tomando o ínfimo sobre todos os representantes de $\bar{x}$ temos $\left|\left|\tilde{L}(\bar{x})\right|\right| \leq ||L|| \, ||\bar{x}||$, $\forall \, x \in E$ e então $\tilde{L}$ é contínua e $\left|\left|\tilde{L}\right|\right| \leq ||L||$.

Finalmente se vale qualquer um L ou $\tilde{L}$ seja contínua, logo a outra é contínua e valem as desigualdades $||L|| \leq \left|\left|\tilde{L}\right|\right|$ e $\left|\left|\tilde{L}\right|\right| \leq ||L||$. Logo $||L|| = \left|\left|\tilde{L}\right|\right|$.

c) Se $\tilde{L}$ é aberta, como π é aberta então L é aberta. Resta provar a inversa. Se L é aberta. Seja $\bar{A} \subset E/F$ aberto, então existe um $A \subset E$ tal que $\bar{A} = \{x + F, x \in A\}$. Se demostramos que A é aberto em E, pela definição de $\tilde{L}$ teremos demostrado o pedido. Assim, vejamos que A é aberto. Seja $x \in A$ qualquer, logo $\bar{x} \in \bar{A}$ e então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \bar{A}$. Se $y \in B(x, \varepsilon)$ então

$$||\bar{y} - \bar{x}|| = ||\overline{y - x}|| \leq ||y - x|| < \varepsilon,$$

logo $\bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \bar{A}$. Finalmente pela definição de $\bar{A}$ temos que $y \in A$ e portanto $B(x, \varepsilon) \subset A$.

■

Teorema 9. *Seja M um subespaço fechado de um espaço de Banach E.*

i) O corolário 1 estende cada $g \in M^*$ a uma funcional $f \in E^*$. Definimos

$$\sigma(g) = f + M^{\perp}.$$

Logo σ é uma isometria de M^* em $E^*/M^{\perp}$.

ii) Seja $\pi : E \to E/M$ a função quociente. Se $F = E/M$, e definimos para cada $y^* \in F^*$,

$$\tau(y^*) = y^* \circ \pi.$$

Logo τ é uma isometria de F^* em $M^{\perp}$.

Demonstração.

- *i)* Se f_1 e f_2 são estensões de g, logo $f_1 - f_2$ está em $M^{\perp}$, portanto $f_1 + M^{\perp} = f_2 + M^{\perp}$. Portanto σ está bem definida. Além disso, claramente σ é linear. Ora, desde que a restrição de todo $f \in E^*$ a M é uma funcional linear em M^*, o posto de σ é $E^*/M^{\perp}$. Agora, para um $g \in M^*$ fixo, se $f \in E^*$ estende g, é obvio que $||g|| \leq ||f||$. Em particular, tomando ínfimo sobre todas as funcionais em $f + M^{\perp}$ temos

  $$||g|| \leq ||\sigma(g)|| \leq ||f||, \quad \forall f \text{ que estende } g.$$

  Ora, pelo Corolário 1 existe uma estensão f de g com $||f|| = ||g||$. Logo, segue que $||\sigma(g)|| = ||g||$. Isto completa a parte a).

- *ii)* Se $x \in E$ e $y^* \in F^*$, logo $\pi(x) \in F$, portanto $x \mapsto y^*(\pi(x))$ é uma funcional contínua sobre E tal que se anula em M. Portanto, $\tau y^* \in M^{\perp}$. A linearidade de τ é clara como composição de funções lineares. Para ver a sobrejetividade fixamos $f \in M^{\perp}$. Seja N o núcleo de f. Desde que $M \subset N$, existe uma única funcional contínua Λ sobre F tal que $\Lambda\pi = f$ (pela Proposição 2), isto é, $\Lambda \in F^*$. Portanto $\tau\Lambda = \Lambda\pi = f$ e o posto de τ é $M^{\perp}$.

  Resta mostrar que τ é uma isometria. Seja B a bola unitária aberta em E. Logo $\pi(B)$ é a bola unitária aberta em $F = \pi(E)$. Desde que $\tau y^* = y^*\pi$ temos

  $$\begin{aligned} ||\tau y^*|| &= ||y^*\pi|| = sup\{|\langle y^*, \pi x\rangle| : x \in B\} \\ &= sup\{|\langle y^*, y\rangle| : y \in \pi B\} = ||y^*|| \end{aligned}$$

  para todo $y^* \in F^*$.

■

Daqui para frente $N(A), N(A^*)$ representaram o núcleo de A e A^* respectivamente e $R(A), R(A^*)$ o rango de A e A^* respectivamente. Prosseguimos dando resultados sobre operadores lineares densamente definidos e fechados.

Proposição 3. *Seja $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador linear e densamente definido, logo A^* é fechado.*

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.17. ■

Proposição 4. *Sejam E, F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador linear, fechado e densamente definido. Logo*

$$
\begin{aligned}
N(A) &= R(A^*)^{\perp}, && (1.3)\\
N(A^*) &= R(A)^{\perp}, && (1.4)\\
N(A)^{\perp} &\supset \overline{R(A^*)}, && (1.5)\\
N(A^*)^{\perp} &= \overline{R(A)}. && (1.6)
\end{aligned}
$$

Demonstração. Ver Brézis [15], Corolário 2.18. ■

Teorema 10. *Sejam E, F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador linear, fechado e densamente definido. As seguintes propriedades são equivalentes*

a) $R(A)$ *é fechado.*

b) $R(A^*)$ *é fechado.*

c) $R(A) = N(A^*)^{\perp}$.

d) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$.

Demonstração. Ver Brézis [15], Teorema 2.19. ■

Agora provamos duas proposições que caracterizam os operadores sobrejetivos. Note que a Propoição 5 é uma versão dual da Proposição 6. Além disso, a Proposição 5 será importante para provar o Teorema 23.

Proposição 5 (Teorema 2.21 do Brézis [15])**.** *Sejam X e Y espaços de Banach, $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear, densamente definido e fechado. As seguintes propriedades são equivalentes*

i) A^* *é sobrejetivo, é dizer,* $R(A^*) = X^*$,

ii) Existe uma constante C tal que

$$
||u|| \leq C\,||Au||\,, \quad \forall u \in D(A). \tag{1.7}
$$

iii) $N(A) = \{0\}$ *e* $R(A)$ *é fechado.*

Demonstração. Faremos uma demostração similar à demostração do Teorema 2.20 do Brézis [15].

- $i) \to ii)$ Seja
$$B = \{u \in D(A); ||Au|| \leq 1\}.$$
Basta provar que B é limitado, pois se $u \in D(A)$, logo $\frac{u}{||Au||} \in B$ e se segue a desigualdade. Mas, como X, Y são de Banach então basta provar que $f(B)$ é limitada(em $\mathbb{R}$) para todas as funcionais $f \in X^*$. Logo seja $f_0 \in X^*$ qualquer, desde que A^* é sobrejetivo existe um $v_0 \in F^*$ tal que $A^*v_0 = f_0$. Para todo $u \in B$ temos
$$|\langle f_0, u\rangle| = |\langle A^*v_0, u\rangle| = |\langle v_0, Au\rangle| \leq ||v_0||\,||Au|| = ||v_0||\,.$$
Assim $f_0(B)$ é limitada. Como f_0 foi arbitrário em X^* então B é limitada em X

- $ii) \to iii)$ Suponha $f_n = Av_n \to f$. Usando (ii) com $v_n - v_m$ vemos que (v_n) é de Cauchy em X, logo existe $v \in X$ tal que $v_n \to v$. Desde que A é fechado por hipótese, concluímos que $Av = f$. Logo $R(A)$ é fechado. Também de $ii)$ notamos que se $Au = 0$ logo $u = 0$, então $N(A) = \{0\}$.

- $iii) \to i)$ Como $R(A)$ é fechado então $R(A^*) = N(A)^{\perp} = X^*$, pelo Teorema $10-c)$.

■

Para a seguinte proposição podemos proceder similar como na proposição anterior. Porém, damos uma demostração diferente a do livro do Brézis [15].

Proposição 6. *Sejam X e Y espaços de Banach, $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear densamente definido e fechado. As seguintes propriedades são equivalentes*

i) *A é sobrejetivo, isto é, $R(A) = Y$,*

ii) *Existe uma constante C tal que*
$$||v|| \leq C\,||A^*v||\,, \quad \forall v \in D(A^*). \tag{1.8}$$

iii) $N(A^*) = \{0\}$ *e* $R(A^*)$ *é fechado.*

Demonstração. • $i) \Leftrightarrow iii)$ Consequência direta da Proposição 4 e o Teorema 10.

- $ii) \to iii)$ Por uma substituição $A^*v = 0$ em $ii)$ vemos que $N(A^*) = \{0\}$, para ver que $R(A^*)$ é fechado suponha $f_n = A^*v_n \to f$. Usando (b) com $v_n - v_m$ vemos que (v_n) é de Cauchy em Y^*, logo existe $v \in Y^*$ tal que $v_n \to v$. Desde que A^* é fechado (Proposição 3) concluímos que $A^*v = f$, logo $R(A^*)$ é fechado.

- $iii) \to ii)$ Fazendo $G = G(A)$ e $L = E \times \{0\}$. Sabemos que se cumpre

$$\{0\} \times N(A^*) = G^\perp \cap L^\perp,$$
$$R(A^*) \times F^* = G^\perp + L^\perp.$$

Logo, $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$ e $G^\perp + L^\perp$ é fechado. Aplicando o Teorema 8 existe um $C > 0$ tal que $\forall\ z \in G^\perp + L^\perp$ se descompõe de maneira única (pois $G^\perp \cap L^\perp = \{0\}$) em $z = x + y$ com $||x|| \leq C\,||z||$ e $||y|| \leq C\,||z||$. Ora, para $v \in D(A^*)$ como $z = [A^*v, 0]$ se escreve como $z = \underbrace{[A^*v, -v]}_{\in G^\perp} + \underbrace{[0, v]}_{\in L^\perp}$, então $||[0, v]|| = ||v|| \leq C\,||z|| = C\,||A^*v||$.

■

Observação 6. Do teorema anterior deduzimos o seguinte: Se A é um operador linear, densamente definido e fechado

$$A \text{ é sobrejetivo } \Rightarrow A^* \text{ é injetivo } (N(A^*) = \{0\}),$$
$$A^* \text{ é sobrejetivo } \Rightarrow A \text{ é injetivo } (N(A) = \{0\}),$$

As voltas falham, como podemos ver do seguinte exemplo. Se $X = Y = l^2$, para todo $x \in l^2$ escrevemos $x = (x_n)_{n\geq 1}$ e definimos $A(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\geq 1}$. Se comprova que A é um operador linear contínuo e $A^* = A$. Porém, $A^*(resp.\, A)$ é injetivo mas $A(resp.\, A^*)$ não é sobrejetivo. Além disso, $R(A)(resp.\, R(A^*))$ não é fechado.

Ora, se assumimos que $dim\, X < \infty$ ou que $dim\, F < \infty$, logo se verificam as equivalências:

$$A \text{ é sobrejetivo } \Leftrightarrow A^* \text{ é injetivo },$$
$$A^* \text{ é sobrejetivo } \Leftrightarrow A \text{ é injetivo }.$$

as quais são resultados clássicos para operadores em espaços finito-dimensionais. A razão para que estas equivalências radica no Teorema 10 e no fato que $R(A)$ e $R(A^*)$ são finito-dimensionais (e portanto fechados).

Da Observação 6 podemos deduzir facilmente a seguinte proposição conhecida.

Proposição 7. *Se A é um isomorfismo então A^* é um isomorfismo.*

Demonstração. Como A é contínua então A^* é contínua. Ora, como $R(A^*)$ é fechado, da Observação 6 e o Teorema 10 temos que A^* é bijetiva. ■

Observação 7. O sentido inverso da proposição anterior também vale. Porém, para nosso trabalho basta a Proposição 7.

O seguinte teorema é uma versão $k-$dimensional do Teorema de Representação de Riesz para L^p com $1 \leq p < \infty$. É dizer, $(\boldsymbol{L}^p)^* = \boldsymbol{L}^{p'}$ se $1 \leq p < \infty$.

Proposição 8. *Seja k um inteiro positivo, $1 \leq p < \infty$ e $\boldsymbol{E} = (L^p(\Omega))^k$ normado por*

$$||w||_{\boldsymbol{E}}^p = \sum_{j=1}^{k} ||w_j||_{L^p(\Omega)}^p ,$$

para todo $w = (w_1, w_2, ..., w_k) \in \boldsymbol{E}$. Um funcional linear f definido em $\boldsymbol{E}$ é contínuo se e somente se existem $f_1, f_2, ..., f_k \in L^{p'}(\Omega)$ únicos tal que

$$f(w) = \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega f_j(x) w_j(x) dx,$$

para todo $w \in \boldsymbol{E}$. Onde p' é o conjudado de Hölder de p.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $f \in \boldsymbol{E}^*$ e consideremos $\tilde{f}_j : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ definido como

$$\tilde{f}_j(u) = \langle f, (0, ..., u, ..., 0) \rangle_{\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}} ,$$

onde o elemento u aparece na $j-$ésima posição . Notamos que $\tilde{f}_j$ é linear. Além disso é contínuo em $L^p(\Omega)$ pois

$$\left|\left|\tilde{f}_j(u)\right|\right| = |\langle f, (0, ..., u, ..., 0)\rangle| \leq ||f||_{\boldsymbol{E}^*} ||(0, ..., u, ..., 0)||_{\boldsymbol{E}} = ||f||_{\boldsymbol{E}^*} ||u||_{L^p(\Omega)} .$$

Assim, para cada $j = 1, 2, ..., k,\ \tilde{f}_j \in (L^p(\Omega))^*$. Além disso, dado $w \in \boldsymbol{E}$

$$\begin{aligned} f(w) &= \langle f, (w_1, 0, ..., 0)\rangle + \langle f, (0, w_2, 0, ..., 0)\rangle + \langle f, (0, ..., 0, w_k)\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle f_j, w_j . \rangle \end{aligned}$$

Pelo teorema de Representação de Riesz para L^p existem $f_j \in L^{p'}(\Omega)$ únicos para cada $j = 1, 2, ..., n$ que representam aos $\tilde{f}_j$, logo

$$f(w) = \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega f_j(x) w_j(x) dx. \tag{1.9}$$

Se existissem outros $g_1, g_2, ..., g_k \in L^{p'}(\Omega)$ tal que (1.9) vale para todo $w \in \boldsymbol{E}$, então tomando $w = (0, ..., v, ..., 0) \in \boldsymbol{E}$ para cada componente temos

$$\int_\Omega f_j(x) v(x) dx = \int_\Omega g_j(x) v(x) dx \quad \forall j = 1, 2, ..., k, \forall v \in L^p(\Omega),$$

logo

$$\int_\Omega (f_j(x) - g_j(x)) v(x) dx = 0 \quad \forall j = 1, 2, ..., k, \forall v \in L^p(\Omega),$$

e novamente pelo Teorema de Representação de Riesz para L^p

$$f_j = g_j, \quad \forall j = 1, 2, ..., k.$$

Logo tais f_j são únicos.

($\Leftarrow$) Seja $f(w) = \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega f_j(x) w_j(x) dx$, então por Hölder temos

$$\begin{aligned} |f(w)| &\leq \sum_{j=1}^{k} \int_\Omega |f_j(x)| \, |w_j(x)| \, dx \leq \sum_{j=1}^{k} ||f_j||_{L^{p'}(\Omega)} \, ||w_j||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} ||f_j||_{L^{p'}(\Omega)} \, ||w||_{\boldsymbol{E}} \leq k \left(\max_{1 \leq j \leq k} ||f_j||_{L^{p'}(\Omega)} \right) ||w||_{\boldsymbol{E}} \, , \end{aligned}$$

para todo $w \in \boldsymbol{E}$. Logo f é contínua.

∎

Agora enunciaremos a desigualdade de Hardy e a fórmula Faà de Bruno para a derivada $j-$ésima de uma função composta. Também se enunciam generalizações destas propriedades.

Proposição 9 (Desigualdade de Hardy)**.** *Sejam β e p dois números reais com $\beta \neq -1$ e $1 < p < \infty$. Seja f uma função mensurável e positiva, definida sobre $[0, \infty)$ tal que*

$$\int_0^\infty |f(r)|^p \, r^{\beta+p} dr < \infty.$$

Defina

$$F(r) = \begin{cases} -\displaystyle\int_r^\infty f(t)dt & se \ \beta > -1 \\ \\ \displaystyle\int_0^r f(t)dt & se \ \beta < -1. \end{cases}$$

Logo

$$\int_0^\infty |F(r)|^p \, r^\beta dr \leq \left(\frac{p}{|\beta + 1|} \right)^p \int_0^\infty |f(r)|^p \, r^{\beta+p} dr. \tag{1.10}$$

Demonstração. Ver Hardy-Littlewood-Polya [23]. Teorema 3.30. ∎

Proposição 10 (Desigualdade generalizada de Hardy)**.** *Seja $1 < p < \infty$ e $f \in \mathcal{D}((R, \infty))$. Logo, para todo número real σ e γ com $\sigma \neq -1$ e se $R > exp \left(\dfrac{2\,|\gamma|}{|\sigma + 1|} \right)$, temos*

$$\int_R^{+\infty} |f(r)|^p \, r^\sigma ln^\gamma(r) dr \leq \left(\frac{2p}{|\sigma + 1|} \right)^p \int_R^{+\infty} \left| \frac{df(r)}{dr} \right|^p r^{\sigma+p} ln^\gamma(r) dr. \tag{1.11}$$

Quando $\sigma = -1$, logo, para todo real γ com $\gamma \neq -1$ e $R > 1$, temos

$$\int_R^{+\infty} |f(r)|^p \, r^{-1} ln^\gamma(r) dr \leq \left(\frac{p}{|\gamma + 1|} \right)^p \int_R^{+\infty} \left| \frac{df(r)}{dr} \right|^p r^{-1+p} ln^{\gamma+p}(r) dr. \tag{1.12}$$

Demonstração. Ver Bolley and Camus [10]. ■

Proposição 11 (Fórmula de Faà di Bruno)**.** *Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que g está definida em uma vizinhança de x_0 e é diferenciável j vezes em x_0. Se f está definida em uma viznhança de $y_0 = g(x_0)$ e é diferenciável j vezes em y_0. A $j-$éssima derivada da função composta $f \circ g$ em x_0 é dada por*

$$\frac{d^j}{dt^j} f(g(x_0)) = \sum_{m=1}^{j} \sum_{I(m,j)} \frac{j!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_j!} f^{(m)}(g(x_0)) \left(\frac{g'(x_0)}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{g''(x_0)}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{g^{(j)}(x_0)}{j!}\right)^{\alpha_j}, \tag{1.13}$$

onde $I(m, j) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_j) \in \mathbb{N}^j : \alpha_1 + \cdots + \alpha_j = m, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + j\alpha_j = j\}$.

Demonstração. Ver Huang-Marcantognini-Young [25]. ■

Proposição 12 (Geralização de Faà di Bruno com varias variáveis)**.** *Seja $|\nu| = j$ um multi-índice em $\mathbb{N}^n$, $\boldsymbol{x}_0 = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $h(\boldsymbol{x}_0) = f(g(\boldsymbol{x}_0))$. Se $D^l g$ existe e é contínua em uma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$ para todo multi-índice $l \leq \nu$ e $f^{(s)}$ existe e é contínua em uma vizinhança de $y_0 = g(\boldsymbol{x}_0)$ para todo $s \leq j$. Logo a derivada de multi-índice ν da função composta $f \circ g$ em $\boldsymbol{x}_0$ é dada por*

$$D^\nu h(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{m=1}^{j} \sum_{I(m,\nu)} \frac{\nu!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_j!} f^{(m)}(g(\boldsymbol{x}_0)) \left(\frac{D^{l_1} g(\boldsymbol{x}_0)}{l_1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{D^{l_2} g(\boldsymbol{x}_0)}{l_2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{D^{l_j} g(\boldsymbol{x}_0)}{l_j!}\right)^{\alpha_j} \tag{1.14}$$

onde

$$\begin{aligned} I(m,\nu) = \{ &(\alpha_1, ..., \alpha_j, l_1, ..., l_j) : \text{ onde } \alpha_r \in \mathbb{N}, l_r \in \mathbb{N}^n \ \forall r = 1, ..., j. \\ &\text{Os } l_r \text{ são multi-índices tal que para } 1 \leq s \leq j, \\ &\ \alpha_i = 0 \text{ e } l_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq j - s; \alpha_i > 0 \text{ para } j - s + 1 \leq i \leq j; \\ &\ \text{e } 0 \prec l_{j-s+1} \prec \cdots \prec l_j \text{ são tal que} \\ &\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_j = m \ , \ \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_j l_j = \nu \}. \end{aligned}$$

e a notação $\mu \prec \nu$ para multi-índices em $\mathbb{N}^n$ significa que acontece uma das três posibilidades:

i) $|\mu| < |\nu|$

ii) $|\mu| = |\nu|$ *e* $\mu_1 < \nu_1$.

iii) $|\mu| = |\mu|$, $\mu_1 = \nu_1, ..., \mu_k = \nu_k$ *e* $\mu_{k+1} < \nu_{k+1}$ *para algum* $1 \leq k < n$.

Demonstração. Ver Constantine e Savits [18]. Corolário 2.10. ■

1.3 Resultados de Distribuições e Espaços de Sobolev

Nesta seção como é comum usaremos a seguinte notação

$\hookrightarrow$: imersão contínua.
$\overset{c}{\hookrightarrow}$: imersão contínua e compacta.

Definição 6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\xi \in C^\infty(\Omega)$. Definiremos o produto ξT da seguinte forma*

$$\langle \xi T, \varphi \rangle = \langle T, \xi\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se prova facilmente que ξT define uma distribuição .

Proposição 13 (Leibniz para distribuições)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ é um multi-índice e $\xi \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então vale a fórmula de Leibniz*

$$D^\alpha(\xi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} T. \tag{1.15}$$

Demonstração. Ver Adams[1], resultado 1.63. ■

Proposição 14. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\xi \in C^\infty(\Omega)$, T uma distribuição e $\{T_n\}$ uma sequência de distribuições tal que $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, então $\xi T_n \longrightarrow \xi T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração. Por definição $\langle \xi T_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \xi\varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, logo dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \xi T_n, \varphi \rangle = \left\langle T_n, \underbrace{\rho\varphi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} \right\rangle \longrightarrow \langle T, \xi\varphi \rangle = \langle \xi T, \varphi \rangle.$$

Assim, $\xi T_n \longrightarrow \xi T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Teorema 11 (Du-Bois-Raymond)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração. Ver Medeiros[30], Proposição 1.4. ■

Teorema 12 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $1 \leq p < +\infty$. Então existe uma constante C que depende de Ω e p tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver Brezis[15], Corolário 9.19. ■

Teorema 13 (Imersão Contínua no espaço inteiro)**.** *Tem-se os seguintes casos*

1. ***Caso***: $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2, m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Se verificam*

   a) *Se* $mp < n$ *e* $p \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

   b) *Se* $mp = n$ *e* $p \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

   c) *Se* $mp > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1, k$ *é um enteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *onde*

      i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

      ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. ***Caso***: $n = 1, m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Se verificam*

   a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$.

   b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.

3. ***Caso***: $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$. *Verifica-se:* $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver Medeiros[30], Corolário 2.4, Teoremas 2.7, 2.8, 2.9, 2.10. ■

Teorema 14 (Imersão Contínua para abertos limitados)**.** *Tem-se os seguintes casos*

1. ***Caso***: $n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2, m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Se verificam*

   a) *Se* $mp < n$ *e* $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

   b) *Se* $mp = n$ *e* $1 \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

   c) *Se* $mp > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1, k$ *é um enteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, *onde*

      i. $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

      ii. $0 < \lambda < 1$ *se* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. ***Caso***: $n = 1, m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto limitado. Se verificam*

   a) *Se* $p = 1$, *então* $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$.

   b) *Se* $1 < p < +\infty$ *e* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *então* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$.

3. ***Caso***: $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ *e* $p = +\infty$. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^m. *Verifica-se:* $W^{m,+\infty}(\Omega)$ *é isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver Medeiros[30], Teoremas 2.15, 2.16 e 2.17. ■

Corolário 4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado sem condições de regularidade na fronteira e $m \in \mathbb{N}$. Então $W_0^{m,+\infty}(\Omega)$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver Medeiros[30], Corolário 2.8. ■

Definição 7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $M \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que M está fortemente incluído, denotado $M \subset\subset \Omega$, quando $\overline{M} \subset \Omega$ e $\overline{M}$ é compacto.*

Teorema 15 (Rellich - Kondrachov)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Se verificam*

1. *Se $p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
2. *Se $p = n$ e $p \leq q < +\infty$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*
3. *Se $n < p \leq +\infty$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.*

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver Brezis[15], Teorema 9.10. ■

Corolário 5. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^m. Se verificam*

1. *Se $p < n$ e $1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.*
2. *Se $p = n$ e $1 \leq q < +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.*
3. *Se $n < p \leq +\infty$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver Medeiros[30], Corolário 2.9. ■

Corolário 6. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se verificam*

1. *Se Ω é de classe C^{m+1}, então $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega)$.*
2. *$W_0^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Medeiros[30], Corolário 2.10. ■

Teorema 16 (Imersão Compacta)**.** *Sejam $n, m \in \mathbb{N}, 1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^m. Se verificam*

1. *Se $mp < n$ e $1 \leq q < \dfrac{np}{n-mp}$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.*

2. *Se* $mp = n$ *e* $1 \leq q < +\infty$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.

3. *Se* $mp > n$ *e* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k+1, k$ *é um inteiro não negativo, então* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver Medeiros[30], Teorema 2.20. ■

2 Espaços de Sobolev com peso

Neste capítulo, consideraremos um tipo de espaço de distribuições : os espaços de Sobolev com peso. A teoria de espaços funcionais com pesos vem chamando a atenção dos pesquisadores e já existe uma ampla literatura sobre isto. Aqui trabalhamos no enfoque seguido por Amrouche, Girault e Giroire para definir espaços de Sobolev com peso. Estes espaços são adequados para tratar problemas sobre domínios não limitados pois se adiciona um peso para controlar o comportamento das funções no infinito. Não desenvolveremos toda a teoria, mas daremos uma sequência autocontida de resultados e definições . Para um estudo detalhado da teoria de espaços com pesos sobre domínios limitados pode-se ver Kufner[28] e para um estudo em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$ pode-se ver Hanouzet[22]. Nesta parte usaremos extensamente o trabalho de Amrouche, Girault, e Giroire ([3]).

Com respeito a notação usamos letras em negrito para denotar elementos vetoriais ou espaços vetoriais (vetores, funções vetoriais, distribuições vetoriais ou espaços destes elementos) e $C > 0$ usualmente denota uma constante positiva genérica que pode depender da dimensão n, do expoente p e possivelmente de outros parâmetros, mas nunca das funções em consideração . Para qualquer número real $1 < p < \infty$, p' denotará seu Hölder conjugado. Se $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, sua distância ao origem é denotada por $r = |\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Para qualquer $q \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_q$(resp. $\mathscr{P}_q^\Delta$) será o espaço dos polinômios(resp. harmômicos) de grau $\leq q$. Se q é um inteiro estritamente negativo convenimos que $\mathscr{P}_q = \{0\}$ (resp. $\mathscr{P}_q^\Delta = \{0\}$) e para $s \in \mathbb{R}$, $[s]$ representa a parte inteira de s.

A partir de agora consideraremos que todos os espaços vetoriais são definidos sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

2.1 Definições

Damos uma definição geral de espaços de Sobolev com peso.

Definição 8 (Sobolev com peso I)**.** *Para* $m \in \mathbb{N}, \alpha, p \in \mathbb{R}$ *com* $1 < p < \infty$ *e* $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função mensurável e positiva q.t.p, definimos*

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq m, \rho^{\alpha - m + |\lambda|} D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}. \qquad (2.1)$$

Aqui ρ representa um peso que se aplica a u e suas derivadas. É claro que, como conjunto, estes espaços generalizam aos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, pois basta tomar $\rho = 1$. Ora, com uma definição tão geral, pode acontecer que $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ não seja um espaço de Banach segundo a função peso a considerar. Para um estudo sobre o conjunto de funções peso tal que $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ na definição (2.1) é de Banach veja-se [29].

Neste trabalho usaremos a função peso $\rho(\boldsymbol{x}) = 1 + |\boldsymbol{x}| = 1 + r$. Este peso, além de controlar o comportamento das funções desses espaços no infinito também foi escolhido de tal forma que o espaço correspondente satisfaça duas propriedades importantes. Por um lado, o espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e por outro lado vale uma desigualdade tipo Poincaré em $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ([3], [4] e [5]).

Com o peso considerado, $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ se converte em um espaço de Banach com a norma natural

$$||u||_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{0\leq|\lambda|\leq m} \left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}. \tag{2.2}$$

Também definimos a seminorma que nos será útil depois

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \left|\left| \rho^{\alpha} D^\lambda u \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Observação 8. A pesar de ter definido $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para todas as dimensões e para qualquer real α, nós consideramos apenas aqueles valores de m, n, p e α tais que

$$\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, 2, ..., m\}.$$

Se esta condição não se satisfaz, não poderemos garantir uma desigualdade tipo Poincaré. Note que esta é uma restrição forte, porque por exemplo, nos impede trabalhar em $\mathbb{R}^2$ no caso $m = 1, p = 2$ e $\alpha = 0$. Qualquer valores dos parâmetros m, n, p e α para os quais $\frac{n}{p}+\alpha$ é um valor de $\{1, 2, ..., m\}$ é chamado valor crítico. Para solucionar este inconveniente existe uma generalização dos espaços $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ que considera os casos críticos. Estes são os espaços $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ que introduzem pesos logarítmicos nos casos críticos e conseguem manter várias propriedades dos espaços $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para casos críticos.

Nosso propósito é trabalhar com os espaços $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dada sua definição simples e vantagem da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e a desigualdade de Poincaré. Porém, pela Observação 8 isto serveria apenas nos casos não críticos. Procedemos então a definir os espaços $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, mais complicados que os anteriores, contudo, nos permitem obter resultados para os casos críticos. Demostraremos propriedades básicas para $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ que seguiram valendo para os espaços $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 9. *Sejam $m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta, p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$ e*

$$l = l(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1, & se\ \frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\} \\ m - \frac{n}{p} - \alpha, & se\ \frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\} \end{cases} \tag{2.4}$$

definimos

$$\begin{aligned} W_{\alpha,\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \quad & \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); \forall\lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq l, \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta-1} D^\lambda u \in L^p(\Omega); \\ & \forall\lambda \in \mathbb{N}^n : l+1 \leq |\lambda| \leq m, \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\lambda u \in L^p(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Onde se $l=-1$ consideramos na definição 2.5 o intervalo $[0,l]$ como vazio.

Proposição 15. *Se $m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta, p \in \mathbb{R}$ com $1<p<\infty$ então o espaço $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach, reflexivo e separável com a norma*

$$||u||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{0\le|\lambda|\le l} \left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta-1} D^\lambda u\right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right.$$
$$\left. + \sum_{l+1\le|\lambda|\le m} \left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\lambda u\right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Sejam m, n, p, α, β como nas hipóteses, para demostrar que $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ com a norma (2.6), logo denotando

$$w_\lambda = \begin{cases} (1+r)^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta-1} & \text{se } 0\le|\lambda|\le l \\ (1+r)^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} & \text{se } l+1\le|\lambda|\le m \end{cases}$$

com l definido como em (2.4). Para cada $0\le|\lambda|\le m$, w_λ é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que nunca se anula em $\mathbb{R}^n$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ temos que

$$\left|\left|w_\lambda D^\lambda u_n\right|\right|_{L^p} \le ||u_n||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}} \qquad \forall\, 0\le|\lambda|\le m.$$

Logo $\left\{w_\lambda D^\lambda u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $0\le|\lambda|\le m$. Assim existem $\tilde{u}^\lambda \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $w_\lambda D^\lambda u_n \longrightarrow \tilde{u}^\lambda$ em L^p para cada $0\le|\lambda|\le m$. Contudo, como w_λ nunca se anula, existem u^λ tal que $\tilde{u}^\lambda = w_\lambda u^\lambda$ e logo

$$w_\lambda D^\lambda u_n \longrightarrow w_\lambda u^\lambda \quad \text{em } L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

Ora, como $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ então

$$w_\lambda D^\lambda u_n \longrightarrow w_\lambda u^\lambda \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Da Proposição 14 e da equação (2.8),

$$D^\lambda u_n \longrightarrow u^\lambda \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, 0\le|\lambda|\le m, \tag{2.9}$$

e em particular:

$$u_n \longrightarrow u^{(0,\ldots,0)} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.10}$$

Logo, dado que a função derivada é continua em $\mathcal{D}'$, de (2.10),

$$D^\lambda u_n \longrightarrow D^\lambda u^{(0,\ldots,0)} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \forall\, 0\le|\lambda|\le m. \tag{2.11}$$

Finalmente da unicidade da convergência em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos que $D^\lambda u^{(0,\dots,0)} = u^\lambda$, $\forall\ 0 \leq |\lambda| \leq m$. Então , $w_\lambda D^\lambda u^{(0,\dots,0)} = w_\lambda u^\lambda = \tilde{u}^\lambda \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e logo $u^{(0,\dots,0)} \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\left|\left|u_n - u^{(0,\dots,0)}\right|\right|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}} = \sum_{0\leq|\lambda|\leq m} \left|\left|w_\lambda D^\lambda u_n - w_\lambda D^\lambda u^{(0,\dots,0)}\right|\right|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Assim, $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ é de Banach.

Para ver que $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo e separável, seja $E = \prod_{|\lambda|\leq m} L^p(\mathbb{R}^n)$ equipado da norma produto $p-$euclidiana. É claro que E é de Banach, reflexivo e separável. Consideramos o mapa

$$\begin{array}{rcl} P : W^{m,p}_{\alpha,\beta} & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & (w_\lambda D^\lambda u)_{|\lambda|\leq m} \end{array}$$

Claramente P é linear. Afirmamos que P é uma isometria contínua. Isto devido à definição das normas em E e $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, pois se $u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, logo

$$||u||^p_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}} = \sum_{0\leq|\lambda|\leq m} \left|\left|w_\lambda D^\lambda u\right|\right|^p_{L^p} = ||Pu||^p_E .$$

Assim, P é uma isometria e como é linear então é continua. Finalmente como $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ é de Banach então $P(W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n))$ é fechado em E, logo a imagem de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ por P é reflexiva e separável, logo se conclui que $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ também é reflexivo e separável.

■

Observação 9. Observe que a Definição (2.5) generaliza os espaços $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ definidos em (2.1), pois para $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$ e $\beta = 0$, o espaço $W^{m,p}_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n)$ coincide com $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 10. É possível definir $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ para um Ω aberto de $\mathbb{R}^n$. A definição é a mesma como en (2.5) substituindo $\mathbb{R}^n$ por Ω e proposição 15 segue valendo com as mudanças devidas. Porém, quando Ω é limitado então os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ coincidem algebraica e topologicamente. Isto porque as funções $\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta-1}$ e $\rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta}$ alcançam mínimo e máximo em $\overline{\Omega}$. Logo, os espaços de Sobolev com peso $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ tem interesse só quando Ω é não limitado.

Observação 11. A seminorma para $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\lambda|=m} \left|\left|\rho^\alpha(ln(2+r))^\beta D^\lambda u\right|\right|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Corolário 7. *Os espaços $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ são espaços de Banach com a norma (2.2).*

Demonstração. Obvio, pois $W^{m,p}_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ para $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$. ■

Para terminar a seção fazemos ênfases em que a escolha de pesos foi devido a que $\rho(r)$ e $ln(2+r)$ tem no infinito um comportamento parecido, respectivamente, a r e $ln(r)$ e portanto controlam o crescimento no infinito das funções destes espaços. Usamos estes pesos em vez de r e $ln(r)$ pois eles não modificam propriedades locais, as quais são idênticas as propriedades locais dos espaços de Sobolev ordinários.

2.2 Propriedades fundamentais

As funções de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ são distribuições que podem ser polinômios.

Proposição 16. *Se definimos*

$$j = j(m,n,p,\alpha) = \begin{cases} m - \left(\dfrac{n}{p} + \alpha\right) - 1, & \textit{se } n/p+\alpha \textit{ é um inteiro negativo ou zero} \\ \left[m - \left(\dfrac{n}{p} + \alpha\right)\right], & \textit{outro caso} \end{cases} \tag{2.13}$$

Então , $\mathcal{P}_j$ é o maior espaço de polinômios contidos em $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiro notamos que se $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^s = x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}$ é um monômio de grau $|s|$(s é o multi-índice $s=(s_1,s_2,...,s_n)$) que pertence a $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ então todos os monomios $\boldsymbol{x}^w$ de grau $|w|$ com , $w \leq s$ pertencem a $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, logo , como $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial basta encontrar o maior grau dos monômios contidos em $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Vejamos isto mais detalhadamente.

- **Afirmação 1**: Se $\boldsymbol{x}^s \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ então $\boldsymbol{x}^w \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ para todos os multi-índices $w \leq s$.
É simples ver que
$$D^\lambda \boldsymbol{x}^w = \begin{cases} c\boldsymbol{x}^{w-\lambda} & \text{se } w \geq \lambda \\ 0 & \text{se } w < \lambda. \end{cases}$$
Onde c é uma constante positiva. Logo, fixado um $w \leq s$, para cada $0 \leq |\lambda| \leq m$ tal que $w \geq \lambda$ temos que
$$\left|D^\lambda \boldsymbol{x}^w\right| = \left|c\boldsymbol{x}^{w-\lambda}\right| = c\,|x_1|^{w_1-\lambda_1}\ldots|x_n|^{w_n-\lambda_n} < c\,|x_1|^{s_1-\lambda_1}\ldots|x_n|^{s_n-\lambda_n} = c\left|\boldsymbol{x}^{s-\lambda}\right|,$$
fora do cubo $D = \{\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1,2,...,n\}$. Então
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda \boldsymbol{x}^w\right|^p =& c\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{\alpha-m+\lambda}\left|\boldsymbol{x}^{w-\lambda}\right|^p \\ =& \underbrace{c\int_D \rho^{\alpha-m+\lambda}\left|\boldsymbol{x}^{w-\lambda}\right|^p}_{I} + c\int_{\mathbb{R}^n\setminus D} \rho^{\alpha-m+\lambda}\left|\boldsymbol{x}^{w-\lambda}\right|^p \\ \leq& I + c\int_{\mathbb{R}^n\setminus D} \rho^{\alpha-m+\lambda}\left|\boldsymbol{x}^{s-\lambda}\right|^p < \infty, \end{aligned}$$

donde I é finito pois é a integral de uma função contínua sobre um compacto e a outra integral é finita pois $\boldsymbol{x}^s \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, somando sobre todos os $0 \leq |\lambda| \leq m$ temos que $||\boldsymbol{x}^w||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

- **Afirmação 2**: Para $a > 0$ e $\gamma + n \neq 0$, a integral

$$\int_a^\infty r^{\gamma+n-1} dr,$$

converge se e só se $\gamma < -n$.
Notamos que,

$$\int_a^\infty r^{\gamma+n-1} dr = C r^{\gamma+n}\Big|_a^\infty ,$$

logo, a integral em questão é convergente se e só se $\gamma < -n$.

- **Afirmação 3**: j definido como em (2.13) é o maior grau dos monômios contidos em $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.
Seja j o grau do monômio buscado, vejamos que a condição em (2.13) é necessária. Por hipóteses $||\boldsymbol{x}^w||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty$ com $|w| = j$. Logo, para todo $0 \leq |\lambda| \leq m$ tem-se $\left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda \boldsymbol{x}^w\right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Isto é, no caso não trivial quando $w \geq \lambda$

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\right|^p |x_1|^{(w_1-\lambda_1)p} \cdots |x_n|^{(w_n-\lambda_n)p} dx < \infty.$$

Mas como,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \int_{Q(0,r)} (1+r)^{(\alpha-m+|\lambda|)p} r^{jp-|\lambda|p} dQ(r) dr \\ &= \int_0^\infty (1+r)^{(\alpha-m+|\lambda|)p} r^{jp-|\lambda|p} \int_{Q(0,r)} dQ(r) dr \\ &= C \int_0^\infty (1+r)^{(\alpha-m+|\lambda|)p} r^{jp-|\lambda|p} r^{n-1} dr, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $Q(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| = r\}$ é o cubo centrado em 0 e de lados paralelos aos eixos de comprimento r. Ora, tem duas possibilidades: se $\alpha - m + |\lambda| < 0$, dado que

$$r \geq 1 \Rightarrow 1 + r \leq 2r, \Rightarrow 2^{\alpha-m+|\lambda|} r^{\alpha-m+|\lambda|} \leq (1+r)^{\alpha-m+|\lambda|} \Rightarrow$$
$$2^{\alpha-m+|\lambda|} \int_1^\infty r^{(\alpha-m+j)p+n-1} dr \leq \int_1^\infty (1+r)^{(\alpha-m+|\lambda|)p} r^{jp-|\lambda|p} r^{n-1} dr.$$

Como a integral em (2.14) converge, então da Afirmação 2 e da última desigualdade, $(\alpha - m + j)p < -n$, logo $j < m - \left(\dfrac{n}{p} + \alpha\right)$. Se $\alpha - m + |\lambda| \geq 0$ vale

$$\begin{aligned} A &= C \int_0^\infty (1+r)^{(\alpha-m+|\lambda|)p} r^{jp-|\lambda|p+n-1} dr \\ &\geq \int_0^\infty r^{(\alpha-m+j)p+n-1} dr \\ &\geq \int_1^\infty r^{(\alpha-m+j)p+n-1} dr. \end{aligned}$$

Logo da Afirmação 2 e da última desigualdade tem-se $(\alpha - m + j)p < -n$, logo $j < m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)$.

Inversamente, se assumimos $j < m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)$, para cada $0 \leq |\lambda| \leq m$ temos: se $w < \lambda$ então $D^\lambda \boldsymbol{x}^w = 0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e se $w \geq \lambda$, pela equação (2.14), vale

$$\begin{aligned} A &= C\int_0^\infty (1+r)^{(\alpha-m+|\lambda|)p} r^{jp-|\lambda|p+n-1} dr \\ &\leq \int_0^\infty (1+r)^{(\alpha-m+j)p+n-1} dr \\ &= \int_1^\infty s^{(\alpha-m+j)p+n-1} ds, \end{aligned}$$

mas a integral no lado direito converge pela hipóteses e a Afirmação 2, logo somando sobre $0 \leq |\lambda| \leq m$ temos que $||\boldsymbol{x}^j||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} < \infty$ e a hipótese é suficiente.

Resumindo, $\boldsymbol{x}^j \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ se e só se $j < m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)$. Como j é um inteiro, se $m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)$ não for inteiro, então o maior j tal que $\boldsymbol{x}^j \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ é o máximo inteiro $\left[m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)\right]$. Se $m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)$ for inteiro, na verdade só importam os inteiros tal que $m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right) > 0$ pois $\mathcal{P}_j = \{0\}$ se j é negativo. Logo o maior j tal que $\boldsymbol{x}^j \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ é $m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right) - 1$ se $\frac{n}{p} + \alpha$ é um inteiro menor do que m, mas como por assunção de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ consideramos só os valores de m, n, p tal que $\left(\frac{n}{p} + \alpha\right) \notin \{1, 2, ..., m\}$. Então (2.13) representa o maior grau dos monômios contidos em $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ e portanto dos polinômios contidos em $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

∎

Observação 12. Mais geral que na proposição anterior, se definimos

$$q = \begin{cases} m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right) - 1, & se \begin{cases} \frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\} \ e \ (\beta - 1)p \geq -1 \\ \frac{n}{p} + \alpha \in \{i \in \mathbb{Z}; i \leq 0\} \ e \ \beta p \geq -1 \end{cases} \\ \left[m - \left(\frac{n}{p} + \alpha\right)\right], & outro\ caso \end{cases} \tag{2.15}$$

então q definido como em (2.15) é o maior grau dos polinômios contidos em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. A demostração se reduz a mesma análise que na prova anterior e usando a desigualdade

$$\frac{x+1}{x+2} \leq ln(2+x) \leq x+1, \quad x > -2.$$

Por outro lado, se verificam as seguintes inclusões algebraicas e topologicamente.

Proposição 17. *Para $m > 0$ e $n/p + \alpha \notin \{1, 2, ..., m\}$ as seguintes inclusões*

$$W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \subset \cdots \subset W_{\alpha-m}^{0,p}(\mathbb{R}^n), \tag{2.16}$$

são imersões contínuas.

Demonstração. Primeiro notamos que se $u \in W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ então $\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^{\lambda}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq |\lambda| \leq m$, mas $\rho^{\alpha-m+|\lambda|} = \rho^{\alpha-1-(m-1)+|\lambda|}$, logo em particular, $\rho^{\alpha-1-(m-1)+|\lambda|} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $0 \leq |\lambda| \leq m-1$. Assim as inclusões algebraicas em (2.16) valem. Para ver que estas inclusões são imersões contínuas notamos que

$$\begin{aligned} ||u||_{W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{0\leq|\lambda|\leq m} \left|\left|\rho^{\alpha-m+\lambda}D^{\lambda}u\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq \sum_{0\leq|\lambda|\leq m-1} \left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^{\lambda}u\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sum_{0\leq|\lambda|\leq m-1} \left|\left|\rho^{\alpha-1-(m-1)+\lambda}D^{\lambda}u\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= ||u||_{W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Logo $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

Uma propriedade fundamental é a densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, para demostrá-la usaremos um processo de truncação adequado. A função de truncação que usaremos foi introduzida por Bolley-Camus [10]. Seja $\phi \in C^{\infty}((0,\infty))$ tal que

$$\phi(t) = 0, \forall t \in [0,1], 0 \leq \phi(t) \leq 1, \forall t \in [1,2], \phi(t) = 1, \forall t \geq 2.$$

Logo, para $k \in \mathbb{N}$ definimos ϕ_k por

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \phi\left(\dfrac{k}{ln(|x|)}\right) & , \forall x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1 \\ 1 & , \text{ em outro caso} \end{cases} \tag{2.17}$$

Logo vemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \phi_k(x) = 1, &\ se\ |x| \leq e^{\frac{k}{2}}. \\ 0 \leq \phi_k(x) \leq 1, &\ se\ |x| \in [e^{\frac{k}{2}}, e^k]. \\ \phi_k(t) = 0, &\ se\ |x| \geq e^k. \end{aligned}$$

Logo a multiplicação por ϕ_k é de fato um processo de truncação . O seguinte lema limita as derivadas de ϕ_k.

Lema 1. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $||x|| \in [e^{\frac{k}{2}}, e^k]$ com $k \geq 2$, e para todo $\mu \in \mathbb{N}^n$, vale a seguinte estimativa*

$$|D^{\mu}\phi_k(x)| \leq \frac{c_{\mu}}{\rho(r)^{|\mu|}(ln(2+r))},$$

donde c_{μ} é uma constante independente de k.

Demonstração. Primeiro, para todo $r \in [e^{\frac{k}{2}}, e^k]$, introduzimos a função auxiliar

$$\psi_k(r) = \phi\left(\frac{k}{ln(r)}\right)$$

A fórmula de Faà di Bruno (1.13) para a $j-$ésima derivada de uma função composta de uma variável nos da

$$\frac{d^j}{dr^j}\psi_k(r) = \sum_{m=1}^{j} \sum_{(\alpha_1,...,\alpha_j)\in I(m,j)} C_{\alpha_1...\alpha_j}\phi^{(m)}\left(\frac{k}{ln(r)}\right) \times \left(\frac{d}{dr}\left(\frac{k}{ln(r)}\right)\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{d^j}{dr^j}\left(\frac{k}{ln(r)}\right)\right)^{\alpha_j}, \tag{2.18}$$

donde

$$I(m,j) = \left\{(\alpha_1, ..., \alpha_j) \in \mathbb{N}^j; \alpha_1 + \cdots + \alpha_j = m, \alpha_1 + \cdots + j\alpha_j = j\right\},$$

e $C_{\alpha_1...\alpha_j}$ é uma constante que depende de $\alpha_1, ..., \alpha_j$.

Similarmente aplicando dita fórmula para a $i-$ésima derivada de $1/ln(r)$, afirmamos que para todos os inteiros $i \geq 1$,

$$\frac{d^i}{dr^i}\left(\frac{1}{ln(r)}\right) = \frac{1}{r^i}\frac{1}{ln^2(r)}P_{i-1}\left(\frac{1}{ln(r)}\right), \tag{2.19}$$

donde $P_{i-1}(t)$ é um polinômio em t de grau $\leq i-1$. Para ver isto notamos que a derivada $m-$éssima de r^{-1} é

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m m!}{r^{m+1}}.$$

Logo aplicando a fórmula Faà di Bruno temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^i}{dr^i}\left(\frac{1}{ln(r)}\right) &= \sum_{m=1}^{i}\sum_{I(m,i)} C_{\alpha_1...\alpha_i}\frac{1}{ln^{m+1}(r)}\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{1}{r^i}\right)^{\alpha_i} \\
&= \sum_{m=1}^{i}\sum_{I(m,i)} C_{\alpha_1...\alpha_i}\frac{1}{ln^{m+1}(r)}\frac{1}{r^i} \\
&= \frac{1}{r^i}\frac{1}{ln^2(r)}\sum_{m=1}^{i}\sum_{I(m,i)} C_{\alpha_1...\alpha_i}\frac{1}{ln^{m-1}(r)} \\
&= \frac{1}{r^i}\frac{1}{ln^2(r)}P_{i-1}\left(\frac{1}{ln(r)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (2.19) em (2.18) e tomando em conta o fato que as escolhas de r e k implicam $0 < \dfrac{1}{ln(r)} \leq 1$, obtemos uma estimativa da forma

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{dr^j}\psi_k(r) &= \sum_{m=1}^{j}\sum_{I(m,j)} C_{\alpha_1...\alpha_j}\phi^{(m)}\left(\frac{k}{ln(r)}\right)k^m\frac{1}{r^j}\frac{1}{ln^{2m}(r)}\left(\prod_{i=1}^{j} P_{i-1}^{\alpha_i}\left(\frac{1}{ln(r)}\right)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{j}\sum_{I(m,j)} C_{\alpha_1...\alpha_j}\phi^{(m)}\left(\frac{k}{ln(r)}\right)\frac{1}{r^j}\left(\frac{1}{ln(r)}\right)^m\left(\frac{k}{ln(r)}\right)^m P_{j-m}\left(\frac{1}{ln(r)}\right) \\
&\leq \frac{1}{r^j}\sum_{m=1}^{j} C_m\left(\frac{1}{ln(r)}\right)^m\left(\frac{k}{ln(r)}\right)^m\phi^{(m)}\left(\frac{k}{ln(r)}\right).
\end{aligned}$$

E desde que $1 \leq \dfrac{k}{ln(r)} \leq 2$, isto implica que

$$\left| \frac{d^j}{dr^j} \psi_k(r) \right| \leq \frac{c_j}{r^j ln(r)},$$

para alguma constante c_j independente de k.

Ora, $D^\mu \phi_k(x) = D^\mu \psi_k(|x|)$. Então , a fórmula Faà di Bruno para varias variáveis (1.14) da por um lado

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |D^\alpha(|x|)| \leq \frac{b_\alpha}{|x|^{|\alpha|-1}},$$

e por outro lado,

$$|D^\mu \phi_k(x)| \leq \frac{c_\mu}{|x|^{|\mu|}\, ln(|x|)} = \frac{c_\mu}{r^{|\mu|} ln(r)}.$$

Finalmente, por hipóteses, $r \geq e$, logo $r < 1 + r \leq \frac{3}{2} r$ e $ln(r) < ln(2 + r) \leq ln(2r) \leq ln(r^2) = 2ln(r)$. De donde se conclui o resultado. ■

Teorema 17. *Para $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}$ tal que $1 < p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja $u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ e seja $u_k = \phi_k u$. A sequência $\{u_k\}_{k \geq 2}$ tende para u se e só se

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq l, \left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta-1} D^\lambda(u-u_k) \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

e

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : l+1 \leq |\lambda| \leq m, \left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\lambda(u-u_k) \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

tendem para zero quando k tende para ∞. A prova é igual para ambos casos. Nós escreveremos a prova para o segundo termo. Desenvolvendo $D^\lambda(\phi_k u)$ obtemos

$$\begin{aligned} \left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\lambda(u-u_k) \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} (1-\phi_k) D^\lambda u \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} \left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\mu \phi_k D^{\lambda-\mu} u \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

onde usamos a fórmula de Leibniz para distribuições (1.15). O primeiro termo no lado direito tende a 0 quando k tende a infinito, pois $1 - \phi_k = 0$ para todos os x tal que $|x| \leq e^{k/2}$. O outro termo pode-se escrever como

$$\begin{aligned} &\left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\mu \phi_k D^{\lambda-\mu} u \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad = \left(\int_{e^{k/2} \leq |x| \leq e^k} \rho^{p(\alpha-m+|\lambda|)} (ln(2+r))^{p\beta} \left| D^\mu \phi_k D^{\lambda-\mu} u \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

e usando a estimativa obtida no Lema 1 para $D^\mu \phi_k$, chegamos a

$$\begin{aligned} &\left|\left| \rho^{\alpha-m+|\lambda|}(ln(2+r))^{\beta} D^\mu \phi_k D^{\lambda-\mu} u \right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\qquad \leq c_\mu \left(\int_{e^{k/2} \leq |x| \leq e^k} \rho^{p(\alpha-m+|\lambda-\mu|)} (ln(2+r))^{p(\beta-1)} \left| D^{\lambda-\mu} u \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

e esta última quantidade tende para 0 quando k tende a infinito, desde que $u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Portanto $\lim_{k\to\infty} ||u - u_k||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Finalmente, desde que cada u_k tem suporte compacto e as topologias de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ coincidem sobre este suporte, a afirmação do teorema segue da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

■

Corolário 8. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Pois $W^{m,p}_{\alpha,0}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ para $\dfrac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$. ■

Observação 13. O corolário acima nos permite garantir que o dual de $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de distribuições . Porém, quando Ω é aberto de $\mathbb{R}^n$, com uma definição análoga a (2.1) substituindo $\mathbb{R}^n$ por Ω, em geral não se cumpre que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)$ (ver [4] para domínios exteriores).

Observação 14. O termo $\frac{1}{ln(2+r)}$ é um ingrediente essencial na cota superior do Lema 1. De fato, quando $\dfrac{n}{p} + \alpha$ pertence a $\{1, ..., m\}$, este termo é necessário para garantir a convergência dos termos com $|\lambda| \geq l+1$ e $|\lambda - \mu| \leq l$ na última desigualdade do Teorema 17.

Definição 10. *Para $\Omega \subset \mathbb{R}$ aberto definimos o espaço*

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{m,p}_{\alpha}(\Omega)}},$$

e seu espaço dual $W^{-m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ o qual é um espaço de distribuições . Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, pelo visto antes temos que $W^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 15. Note que pelo Teorema 5-item 5 e a Proposição 15 o espaço $W^{-m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ é reflexivo e separável para os valores admissíveis de m, n, p.

Teorema 18. *Seja $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Então $T \in W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ se e somente se existem funções $f_\lambda \in W^{0,p'}_{-\alpha+m-|\lambda|}(\mathbb{R}^n)$, $|\lambda| \leq m$ tais que*

$$T = \sum_{|\lambda|\leq m} D^\lambda f_\lambda.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha T definida pelo somatório acima. Então , para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle \sum_{|\lambda|\leq m} D^\lambda f_\lambda, \varphi \right\rangle = \sum_{|\lambda|\leq m} \left\langle D^\lambda f_\lambda, \varphi\right\rangle = \sum_{|\lambda|\leq m} (-1)^{|\lambda|} \left\langle f_\lambda, D^\lambda \varphi\right\rangle \quad (2.20)$$

$$= \sum_{|\lambda|\leq m} (-1)^{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}^n} f_\lambda(x) D^\lambda \varphi(x) dx \quad (2.21)$$

$$= \sum_{|\lambda|\leq m} (-1)^{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho^{-\alpha+m-|\lambda|} f_\lambda(x)\right) \left(\rho^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda \varphi(x)\right) dx. \quad (2.22)$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|\langle T,\varphi\rangle| &\leq \sum_{|\lambda|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\rho^{-\alpha+m-|\lambda|}f_\lambda(x)\right|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda\varphi(x)\right|dx && (2.23)\\
&\leq \sum_{|\lambda|\leq m}\left|\left|\rho^{-\alpha+m-|\lambda|}f_\lambda\right|\right|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda\varphi\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n)} && (2.24)\\
&\leq \left(\sum_{|\lambda|\leq m}\left|\left|\rho^{-\alpha+m-|\lambda|}f_\lambda\right|\right|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p'}\left(\sum_{|\lambda|\leq m}\left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda\varphi\right|\right|^{p}_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p} && (2.25)\\
&= \left(\sum_{|\lambda|\leq m}\left|\left|\rho^{-\alpha+m-|\lambda|}f_\lambda\right|\right|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p'}||\varphi||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}. && (2.26)
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, da última desigualdade passando ao limite podemos estender T ao espaço $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ continuamente. Logo $T\in W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

($\Rightarrow$) Seja $T\in W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e k o número de índices $\lambda\in\mathbb{N}^n$ tais que $|\lambda|\leq m$. Os elementos u de $E=(L^p(\mathbb{R}^n))^k$ são as $k-$uplas que serão representadas por $(u_\lambda)_{|\lambda|\leq m}, u_\lambda\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Notemos que a aplicação

$$
\begin{aligned}
\sigma: W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow E && (2.27)\\
u &\longrightarrow \sigma(u)=(\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda u)_{|\lambda|\leq m} && (2.28)
\end{aligned}
$$

é uma isometria linear. Com efeito, a linearidade é óbvia. Agora, se $u\in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ temos

$$||u||^p_{W^{m,p}_\alpha}=\sum_{0\leq|\lambda|\leq m}\left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda u\right|\right|^p_{L^p}=||\sigma(u)||^p_E.$$

O que prova σ ser uma isometria. Segue que $E_0=\sigma(W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n))$ é um subespaço fechado de E, pois $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ é de Banach. Seja f_0 o funcional linear definido sobre E_0 por

$$\left\langle f_0,\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda u\right\rangle=\langle T,u\rangle,$$

isto é, $f_0=T\circ\sigma^{-1}$, logo é um funcional linear contínuo. Pelo Teorema de Hahn-Banach, f_0 possui uma extensão linear e contínua ao espaço E, que representaremos por f. Pela Proposição 8 existem $(g_\lambda)_{|\lambda|\leq m},\ g_\lambda\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\left\langle f,(w_\lambda)_{|\lambda|\leq m}\right\rangle=\sum_{|\lambda|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}g_\lambda(x)w_\lambda(x)dx,$$

para todo $(w_\lambda)_{|\lambda|\leq m}\in E$. Logo, para todo $u\in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle T,u\rangle=\left\langle f_0,\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda u\right\rangle=\sum_{|\lambda|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}g_\lambda(x)\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda u(x)dx.$$

Em particular, para todo $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{|\lambda|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}g_\lambda(x)\rho^{\alpha-m+|\lambda|}D^\lambda\varphi(x)dx=\left\langle\sum_{|\lambda|\leq m}D^\lambda\left((-1)^{|\lambda|}\rho^{\alpha-m+|\lambda|}g_\lambda(x)\right),\varphi\right\rangle.$$

Então , tomando $f_\lambda = (-1)^{|\lambda|}\rho^{\alpha-m+|\lambda|}g_\lambda$, temos que $f_\lambda \in W^{0,p'}_{-\alpha+m-|\lambda|}(\mathbb{R}^n)$ e

$$T = \sum_{|\lambda|\leq m} D^\lambda f_\lambda.$$

■

Corolário 9. *Seja $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com p e p' Hölder conjugados. Se existem $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ e um $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $T = \partial_i g$ então $T \in W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. É claro que $T \in W^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)$. A outra inclusão é uma consequência do teorema anterior e do fato que $L^{p'}(\mathbb{R}^n) = W_0^{0,p'}(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposição 18. *Para todo $\lambda \in \mathbb{N}^n$, a aplicação*

$$\begin{aligned} T : W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow W^{m-|\lambda|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto D^\lambda u \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. A linearidade é óbvia da linearidade da derivada. Quando $0 \leq |\lambda| \leq m$,

$$\left|\left|D^\lambda u\right|\right|^p_{W^{m-|\lambda|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0\leq|s|\leq m-|\lambda|} \left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda|+|s|}D^{s+\lambda}u\right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.29}$$

Como s e λ são multi-índices então $|s+\lambda| = |s| + |\lambda|$, logo em (2.29) temos

$$\begin{aligned} \left|\left|D^\lambda u\right|\right|^p_{W^{m-|\lambda|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{0\leq|s+\lambda|\leq m} \left|\left|\rho^{\alpha-m+|\lambda+s|}D^{s+\lambda}u\right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sum_{0\leq|\nu|\leq m} \left|\left|\rho^{\alpha-m+|\nu|}D^{\nu}u\right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = ||u||^p_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Assim T é uma isometria e portanto contínua.
Quando $|\lambda| > m$, primeiro provemos a boa definição . Dado $u \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ temos

$$D^\lambda u = D^r(D^w u),$$

onde $|w| = m$ e $|r| = |\lambda| - m$. Ora pela parte anterior $D^w u \in W^{0,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ e do Teorema 18 segue que $D^\lambda u \in W^{-|r|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) = W^{m-|\lambda|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Para ver que T é contínua notamos que

$$\begin{aligned} \left|\left\langle D^\lambda u, \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}\right| &= \left|\left\langle D^r(\underbrace{D^w u}_{\in W^{0,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}), \varphi\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\right| = \left|\langle D^w u, D^r\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} D^w u D^r\varphi dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\alpha D^w u \rho^{-\alpha} D^r\varphi dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho^\alpha D^w u| \left|\rho^{-\alpha}D^r\varphi\right| dx \\ &\leq ||\rho^\alpha D^w u||_{L^p} \left|\left|\rho^{-\alpha}D^r\varphi\right|\right|_{L^{p'}} \\ &\leq ||u||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} ||\varphi||_{W^{|r|,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)} \\ &= ||u||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} ||\varphi||_{W^{|\lambda|-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Logo, pela densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $W^{|\lambda|-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\left|\left\langle D^\lambda u, v\right\rangle\right| \leq ||u||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\, ||v||_{W^{|\lambda|-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)} \quad ,\forall\, v \in W^{|\lambda|-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Assim

$$\left|\left|D^\lambda u\right|\right|_{W^{m-|\lambda|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\,.$$

∎

A seguinte proposição nos permitirá trabalhar nossas demostrações com $W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)$ nos casos não críticos.

Proposição 19. *Se $n/p+\alpha \notin \{1,...,m\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $n/p+\alpha-\gamma \notin \{1,...,m\}$ então a aplicação*

$$u \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \rho^\gamma u \in W^{m,p}_{\alpha-\gamma}(\mathbb{R}^n), \tag{2.30}$$

é um isomorfismo e a aplicação

$$u \in W^{m,p}_{\alpha-\gamma}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \rho^{-\gamma} u \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n), \tag{2.31}$$

é sua inversa.

Demonstração. Primeiro notemos que aplicando a fórmula Faà di Bruno multivariável (1.14) para $f(t) = (1+t)^\gamma$ e $g(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$ se prova que para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, existe uma constante C tal que

$$\left|\partial^\lambda(\rho^\gamma)\right| \leq C\rho^{\gamma-|\lambda|}. \tag{2.32}$$

Logo para $m \geq 0$, seja $u \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Para cada $|\lambda| \leq m$, usando primeiro a regra de Leibniz e depois a estimativa (2.32) temos

$$\begin{aligned}
\rho^{\alpha-\gamma-m+|\lambda|}\left|D^\lambda(\rho^\gamma u)\right| &= \rho^{\alpha-\gamma-m+|\lambda|}\left|\sum_{\mu\leq\lambda}\binom{\lambda}{\mu} D^\mu\rho^\gamma D^{\lambda-\mu}u\right| \\
&\leq C\sum_{\mu\leq\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\rho^{\alpha-m+|\lambda-\mu|}\left|D^{\lambda-\mu}u\right| \\
&\leq C\sum_{0\leq\eta\leq\lambda}\rho^{\alpha-m+|\eta|}\left|D^\eta u\right|.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ora, de (2.33) e usando a desigualdade $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p \leq n^{p-1}(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)$ que vale para todos os números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ e $p \geq 1$ (Ver [23]).

$$\left\{\rho^{\alpha-\gamma-m+|\lambda|}\left|D^\lambda(\rho^\gamma u)\right|\right\}^p \leq C\sum_{0\leq\eta\leq\lambda}\left\{\rho^{\alpha-m+|\eta|}\left|D^\eta u\right|\right\}^p. \tag{2.34}$$

Assim, existe uma constante C que não depende de u tal que

$$||\rho^\gamma u||_{W^{m,p}_{\alpha-\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.35}$$

Logo a aplicação definida em (2.30) está bem definida e é contínua. Ora, considerando α como $\alpha - \gamma$ e γ como $-\gamma$ pelo demostrado concluímos que a aplicação definida em (2.31) também está bem definida e é contínua. Logo, como é claro que são inversas, tem-se que (2.30) é um isomorfismo. Para $m < 0$ basta aplicar dualidade e transposição .

■

Outra propriedade fundamental dos espaços de Sobolev com peso é uma desigualdade tipo Poincaré. Esta segue de uma desigualdade generalizada de Hardy (Proposição 10). Ela permite, em particular, caracterizar as distribuições de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ como uma media da suas derivadas de maior ordem.

Para demostrar o Teorema 19 precisaremos do Lema 2. Porém, requeremos da seguinte notação . Para qualquer real estritamente positivo, lembre que B_R é a bola aberta com centro 0 e raio R, logo denotamos por $B'_R = (\overline{B}_R)^c$ o complemento de $\overline{B}_R$. Além disso, introduzimos o espaço $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)$ com a norma $||.||_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)}$ e seminorma $|.|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)}$ definidas com as integrais tomadas sobre B'_R em vez de $\mathbb{R}^n$.

Lema 2. *Sejam α e β dois números reais e m um inteiro estritamente positivo que não satisfaz simultaneamente*

$$\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\} \text{ e } (\beta - 1)p = -1.$$

Logo, para um real R suficientemente grande, existe uma constante C_R tal que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(B'_R), \quad ||\varphi||_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)} \leq C_R \, |\varphi|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)} \, . \tag{2.36}$$

Em outras palavras, a seminorma $|.|_{W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)}$ é uma norma em $\mathcal{D}(B'_R)$, equivalente a norma de $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)$.

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(B'_R)$. Primeiro, observe que, como φ é de suporte compacto em $\mathcal{D}(B'_R)$ e o origem está no interior de B_R, podemos trabalhar em $W_{\alpha,\beta}^{m,p}(B'_R)$ usando r e $ln(r)$ como pesos em vez de $\rho(r)$ e $ln(2 + r)$ nas expresões da norma e seminorma.

Provamos em seguida que

$$\forall \, \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq m - 1, \left| \frac{\partial}{\partial r}(D^\lambda \varphi) \right|^p \leq n^{\frac{p}{p'}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\lambda \varphi) \right|^p . \tag{2.37}$$

Para provar isto basta notar que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \nabla \varphi . \frac{\overrightarrow{r}}{r}.$$

Logo por uma desigualdade já usada na Proposição 19 vale

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|^p \leq n^{\frac{p}{p'}} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^p. \tag{2.38}$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}(B'_R)$ o mesmo vale para $D^\lambda \varphi$ e se conclui (2.37).

Ora, se θ engloba as "variáveis angulares", temos

$$D^\lambda \varphi(r,\theta) = \int_R^r \frac{\partial}{\partial t}(D^\lambda \varphi)(t,\theta)dt,$$

e, assumindo que R é suficientemente grande, aplicamos a desigualdade generalizada de Hardy à função

$$r \longrightarrow D^\lambda \varphi(r,\theta),$$

com θ fixo e adequadas potencias de r e $ln(r)$. Os valores destes expoentes dependem de $n/p+\alpha$ e λ. Quando $n/p+\alpha \notin \{1,...,m\}$, para λ, tal que $0 \leq |\lambda| \leq m-1$, escolhemos $\gamma = \beta p$ e $\sigma = (\alpha - m + |\lambda|)p + n - 1$. Note que $\sigma \neq -1$. Fazemos a mesma escolha quando $n/p+\alpha \in \{1,...,m\}$, e $k+1 \leq |\lambda| \leq m-1$. Logo, integrando com respeito a r e aplicando (2.37), chegamos em ambos casos a

$$\left\|r^{\alpha-m+|\lambda|} ln^\beta(r) D^\lambda \varphi\right\|_{L^p(B'_R)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\|r^{\alpha-m+|\lambda|+1} ln^\beta(r) \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\lambda \varphi)\right\|_{L^p(B'_R)}. \tag{2.39}$$

Quando $n/p+\alpha \in \{1,...,m\}$. Se $(\beta-1)p \neq -1$, para todo λ tal que $0 \leq |\lambda| \leq k-1$, escolhemos $\gamma = (\beta-1)p$ e $\sigma = (\alpha - m + |\lambda|)p + n - 1$. Logo, desde que $\sigma \neq -1$, a mesma desigualdade (2.39) é válida mas como $\beta - 1$ em vez de β.

$$\left\|r^{\alpha-m+|\lambda|} ln^{\beta-1}(r) D^\lambda \varphi\right\|_{L^p(B'_R)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\|r^{\alpha-m+|\lambda|+1} ln^{\beta-1}(r) \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\lambda \varphi)\right\|_{L^p(B'_R)}. \tag{2.40}$$

Finalmente, quando $|\lambda| = k$, esta desigualdade não é válida porque este caso corresponde a $\sigma = -1$ e devemos então aplicar a segunda desigualdade generalizada de Hardy com $\gamma = (\beta-1)p \neq -1$. De novo, integrando com respeito a r e aplicando (2.37), obtemos

$$\left\|r^{\alpha-m+|\lambda|} ln^{\beta-1}(r) D^\lambda \varphi\right\|_{L^p(B'_R)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left\|r^{\alpha-m+|\lambda|+1} ln^{\beta}(r) \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\lambda \varphi)\right\|_{L^p(B'_R)}. \tag{2.41}$$

Ora, como as equações (2.39),(2.40) e (2.41) são recursivas, somando estas adequadamente obtemos (2.36). Pois, seja que $n/p+\alpha \in \{1,...,m\}$ ou não , em todos os casos para $0 \leq |\lambda| \leq m-1$ as normas $\left\|r^{\alpha-m+|\lambda|} ln^\beta(r) D^\lambda \varphi\right\|_{L^p(B'_R)}$ e $\left\|r^{\alpha-m+|\lambda|} ln^{\beta-1}(r) D^\lambda \varphi\right\|_{L^p(B'_R)}$ estão limitadas por somas de elementos no conjunto

$$\left\{\left\|r^\alpha ln^\beta(r) D^w \varphi\right\|_{L^p(B'_R)} : \ |w| = m\right\}.$$

■

Teorema 19 (Desigualdade tipo Poincaré para $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$)**.** *Sejam α e β dois números reais e $m \geq 1$ um inteiro que não satisfaz simultaneamente*

$$\frac{n}{p} + \alpha \in \{1, ..., m\} \text{ e } (\beta - 1)p = -1.$$

Seja $q' = inf\,\{q, m-1\}$, donde q é o maior grau dos polinômios contidos em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Logo a seminorma $|.|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ define sobre $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{q'}$ uma norma a qual é equivalente a norma quociente. É dizer, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\forall\ u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n),\ ||\bar{u}||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{q'}} \leq C\,|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{2.42}$$

onde $\bar{u}$ representa a classe de equivalência de u.

Demonstração. É claro que $|u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ é uma norma em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{q'}$, e que

$$\forall\ u \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n), \quad |u|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq ||u||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Portanto, temos que demostrar a desigualdade (2.42).

A prova segue em dois passos: O primeiro passo consiste em eliminar a norma quociente escolhendo um representante adequado da classe de $\bar{u}$. Com este fim, fixamos um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com medida positiva, digamos $\mathcal{O}$ e escolhemos o representante U de $\bar{u}$ em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça o sistema de equações

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_{q'}, \quad \int_{\mathcal{O}} U\mu dx = 0. \tag{2.43}$$

É simples ver que (2.43) determina U univocamente e obviamente

$$||\bar{u}||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,|U|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Portanto, o segundo passo consiste em provar que existe uma constante C tal que a seguinte desigualdade vale para todo $U \in W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (2.43):

$$||U||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,|U|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.44}$$

Provaremos isto por contradição . Se (2.44) não fosse verdade, então existiria uma sequência (U_ν) de elementos de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo (2.43) e tal que

$$||U||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad e \quad |U|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

Logo, a sequência (U_ν) é limitada em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$, e como este é um espaço de Banach reflexivo podemos extrair uma subsequência, a que denotaremos ainda de (U_ν), que converge fracamente a um elemento U_* de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Desta convergência fraca se deduz que U_* também satisfaz (2.43). Mas desde que $|U|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ tende a zero, a semicontinidade inferior da norma implica que $|U_*|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 0$. Portanto, U_* é um polinômio de $\mathcal{P}$ e como U_* satisfaz (2.43) implica que $U_* = 0$.

Agora, precisamos de uma convergência forte para concluir por contradição . Derivaremos esta convergência forte via uma partição da unidade adequada que nos permitirá considerar separadamente um domínio limitado donde as topologias de $W^{m,p}_{\alpha,\beta}$ e $W^{m,p}$ coincidem e o complemento de uma bola, donde o Lema 2 pode-se aplicar.

Seja R um número real, suficientemente grande como para aplicar a desigualdade generalizada de Hardy. Sejam φ e ψ dois funções de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\begin{gathered}\forall\, x \in \mathbb{R}^n, (\varphi+\psi)(x) = 1,\ 0 \leq \varphi(x) \leq 1\\ supp(\phi) \subset \overline{B}_{R+1}, \qquad supp(\psi) \subset B'_R\end{gathered}$$

Desde que para um R fixo, $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B_{R+1})$ é isomorfo a $W^{m,p}(B_{R+1})$, temos que U_ν converge fracamente a 0 em $W^{m,p}(B_{R+1})$ e desde que $W^{m,p}(B_{R+1})$ está compactamente imerso em $W^{m-1,p}(B_{R+1})$ pelo Corolário 6-item 1, logo:

$$U_\nu \longrightarrow 0 \text{ fortemente em } W^{m-1,p}(B_{R+1})$$

Como ademais, $|U_\nu|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)}$ tende a zero, segue que:

$$U_\nu \longrightarrow 0 \text{ fortemente em } W^{m,p}(B_{R+1})$$

Logo,

$$\varphi U_\nu \longrightarrow 0 \text{ fortemente em } W^{m,p}{}_\alpha, \beta(B_{R+1})$$

Agora, examinemos o comportamento de ψU_ν. Para um ν fixo, seja (θ_j) uma sequência de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que tende para U_ν em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\psi\theta_j \in \mathcal{D}(B'_R)$ e podemos aplicar o Lema 2:

$$||\psi\theta_j||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R)} \leq C_R\, |\psi\theta_j|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R)}$$

Logo, fazendo $j \longrightarrow \infty$ e usando o fato de que $\psi = 1$ fora de B_{R+1} obtemos:

$$\begin{aligned} ||\psi U_\nu||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R)} \leq &\qquad C_R\, |\psi U_\nu|_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R)} \\ \leq &\quad C_R(|\psi U_\nu|^p_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R \cap B_{R+1})} + \quad |U_\nu|^p_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_{R+1})})^{1/p} \end{aligned}$$

Logo, se fazemos $\nu \longrightarrow \infty$ observamos que ψU_ν tende para zero fortemente em $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R \cap B_{R+1})$ pois $B'_R \cap B_{R+1}$ é limitado e $W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R \cap B_{R+1})$ é isomorfo a $W^{m,p}(B'_R \cap B_{R+1})$. Finalmente,

$$\psi U_\nu \longrightarrow 0 \text{ fortemente em } W^{m,p}_{\alpha,\beta}(B'_R)$$

Desde que $U_\nu = \varphi U_\nu + \psi U_\nu$, obtemos que

$$U_\nu \longrightarrow 0 \text{ fortemente em } W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$$

o qual contradiz a nossa assunção de que

$$||U_\nu||_{W^{m,p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)} = 1$$

■

O seguinte Corolário é o caso particular do teorema anterior quando $\alpha = 0, \beta = 0$.

Corolário 10 (Desigualdade tipo Poincaré para $W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$). *Seja $m \geq 1$ inteiro e $1 < p < \infty$ real. Logo existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de m, p e n, tal que*

$$\forall u \in W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n),\ [u]_{W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, |u|_{W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.45}$$

onde $[u]_{W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)}$ é a norma do espaço quociente $W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-\frac{n}{p}]}$, isto é:

$$[u]_{W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)} = ||u||_{W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-\frac{n}{p}]}} = \inf_{Q \in \mathcal{P}_{[m-\frac{n}{p}]}} \left\{ ||u+Q||_{W^{m,p}_{0,0}(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

Demonstração. Por (2.13) e o teorema anterior, basta provar que $\left[m - \dfrac{n}{p}\right] \leq m-1$, para todo $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$ com as condições do Corolário. Como m é inteiro basta provar que $\left[-\dfrac{n}{p}\right] \leq -1$. Mas como, $\dfrac{n}{p} > 0$ então $-\dfrac{n}{p} < 0$, assim $\left[-\dfrac{n}{p}\right] + 1 \leq 0$. Finalmente somando m a ambos lados temos o que queremos provar. ■

Observação 16. Note que corolário anterior inclui casos críticos e não críticos. Em particular, quando $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, temos que (2.45) vale para os $W^{m,p}_0(\mathbb{R}^n)$.

O lema seguinte põe em evidência algumas propriedades do comportamento ao infinito das funções de $W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e p tal que $n/p + \alpha \neq 1$. Se $u \in W^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, então , para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\boldsymbol{x}| > 1$, temos:*

i) Se $p > n$:
$|u(\boldsymbol{x})| \leq C\, |\boldsymbol{x}|^{1-n/p-\alpha}\, ||u||_{W^{1,p}_\alpha}$ *e* $|\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}\, |u(\boldsymbol{x})| \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ii) Se $p < n$:
$||u(|\boldsymbol{x}|, .)||_{L^p(\sum)} \leq C\, |\boldsymbol{x}|^{1-n/p-\alpha}\, ||u||_{W^{1,p}_\alpha}$ *e* $|\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}\, ||u(|\boldsymbol{x}|, .)||_{L^p(\sum)} \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

donde $C > 0$ é uma constante independente de u e $\sum$ denota a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração.

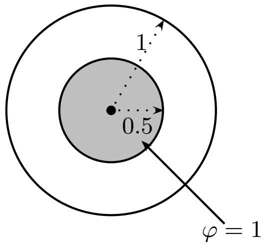

Figura 1 – $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com $\varphi = 1$ em $B(0, 1/2)$ e $supp\varphi \subset B(0, 1)$.

i) Primeiro fazemos o caso $\alpha = 0$. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, com suporte compacto na bola de raio 1 centrada em 0 e igual a 1 sobre a bola de raio 1/2 centrada em 0(veja Figura 1). A desigualdade proposta é trivial para $u\varphi$ pois $(u\varphi)(x) = 0$ se $|\boldsymbol{x}| > 1$. Por outra parte, como $(1-\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, então $u(1-\varphi) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, pois os espaços de Sobolev com peso são iguais aos Sobolev clássicos quando o domínio é limitado. De modo que, como $p > n$, graças à imersão de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}$ temos que:

$$|u(\boldsymbol{x})(1-\varphi(\boldsymbol{x})) - u(\boldsymbol{y})(1-\varphi(\boldsymbol{y}))| \leq C\,||\nabla(u(1-\varphi))||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{1-n/p}$$

onde temos usado que a seminorma $|\nabla .|$ sobre $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma $||.||_{w^{1,p}}$ o que permite concluir escolhendo $y = 0$. Para tratar o caso geral, é suficiente notar que se $u \in W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ e $n/p + \alpha \neq 1$, então $\rho^{\alpha} u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$. Para a segunda propriedade, considere uma sequência $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que tende para u em $W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Segue da primeira desigualdade que

$$\sup_{|x|>1}\left||\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}\,u(\boldsymbol{x}) - |\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}\,u_n(\boldsymbol{x})\right| \leq C\,||\nabla(u-u_n)||_{W^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

Portanto, fora da bola unitária, $|\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}\,u$ é limite uniforme de funções de suporte compacto portanto tende a zero no infinito.

ii) Quando $\alpha = 0$ o resultado segue da continuidade do operador traço sobre $\sum$ de $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\sum)$ por homogeneidade. Com efeito, devido a esta propriedade se obtém a desigualdade:

$$||u(|\boldsymbol{x}|\,,.)||_{L^p(\sum)} \leq C\,|\boldsymbol{x}|^{1-n/p}\,||\nabla u(\boldsymbol{y})||_{L^p(\{|\boldsymbol{y}|>|\boldsymbol{x}|\})}$$

o que permite concluir quando $\alpha = 0$. Raciocinamos como no item anterior para tratar o caso $\alpha \neq 0$.

$\blacksquare$

Observação 17. Neste ponto é útil comparar o espaço $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ com o espaços $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ definidos respectivamente para $m \geq 1$ pelo fecho de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ com a seminorma de $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$D^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{|.|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}},$$

e, se $\dfrac{n}{p} - m > 0$ por

$$\hat{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : D^\beta v \in L^{q(\beta)}(\mathbb{R}^n),\ com\ |\beta| = 0, ..., m,\ e\ \frac{1}{q(\beta)} = \frac{1}{p} - \frac{m - |b|}{n} \right\}.$$

Para $\dfrac{n}{p} - m > 0$ é conhecido que, algebraica e topologicamente,

$$D^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \hat{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

Pode-se ver a demostração desse fato em Hanouzet [22]. Porém, quando $\dfrac{n}{p} - m \leq 0$, $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ não é um espaço de distribuições . Podemos encontrar em Deny-Lions [20], Teorema 2.1, Capítulo 2 quando $m = 1$ e $p = 2$ uma caracterização dos domínios Ω para os quais $D^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de distribuições e para contraexemplos na seção 4 do Capítulo 1 do mesmo livro [20], na qual mostra-se que $D^{1,2}(\mathbb{R})$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ não são espaços de distribuições . Podemos nos referir também a Hömander-Lions [24] quem mostram que uma condição necessária e suficiente para $D^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ ser um espaço de distribuições é que $n \geq 2m+1$. Similarmente, podemos provar que a correspondente condição para $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ é $\dfrac{n}{p} - m > 0$.

Podemos ver por que $D^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ não é um espaço de distribuições mediante a Proposição 23. Seja (φ_v) a sequência de funções de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tal que $||\nabla\varphi_v||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ é uma sequência de Cauchy. Logo a Proposição 23 aplicada a cada φ_v implica que existe uma constante c_v tal que

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} ||\varphi_v + c||_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)} = ||\varphi_v + c_v||_{W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)}$$

é também uma sequência de Cauchy e portanto converge. Mas isto não significa que φ_v converge. Deny-Lions mostraram um exemplo de uma sequência tal que $||\nabla\varphi_v||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ tende a zero, porém $\langle\varphi_v, \psi\rangle$ tende a infinito para muitos $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ em vez de convergir. Estas considerações sugerem que o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ carece de funções constantes.

Vale a pena pensar o mesmo argumento para o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ (que é um espaço de distribuições) e descobrir por que este comportamento patológico não ocorre. De novo tomamos uma sequência (φ_v) de funções em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tal que $||\nabla\varphi_v||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é uma sequência de Cauchy. A Proposição 23 diz que para cada v existe uma única K_v tal que $\varphi_v + K_v$ pertence a $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Mas, desde que φ_v tem suporte compacto, esta constante K_v tem que ser zero. Logo, φ_v é uma sequência de Cauchy em $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ e seu limite é um elemento de $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Podemos provar a convergência de φ_v porque, em contraste com $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, o espaço $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ não contem funções constantes.

3 Operadores $div - grad$ em $\mathbb{R}^n$

No que segue estabeleceremos propriedades para os operadores $div - grad$ e o laplaciano extraídas de Amrouche-Girault-Giroire [3] e Amrouche-Nguyen [7]. A amplitude dos resultados e o objetivo deste trabalho nos obrigou a escolher só uma parte pequena. Esta eleição foi pessoal e no intuito de apresentar uma sequência clara de ideias.

3.1 Casos particulares

Como vamos considerar só alguns casos particulares quando $\alpha = 0$. Para nossos fins, vamos redefinir os espaços $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ de tal forma que não precisemos da notação β.

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \frac{u}{w_1} \in L^p(\mathbb{R}^n), \nabla u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \right\},$$

onde w_1 é a função peso

$$w_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 + r & \text{se } p \neq n, \\ (1+r)ln(2+r) & \text{se } p = n. \end{cases}$$

$$W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \frac{u}{w_2} \in L^p(\mathbb{R}^n), \frac{\nabla u}{w_1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n), D^\lambda u \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n), \forall\ |\lambda| = 2 \right\},$$

onde w_2 é a função peso

$$w_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} (1+r)^2 & \text{se } p \notin \left\{ \frac{n}{2}, n \right\}, \\ (1+r)^2 ln(2+r) & \text{outro caso.} \end{cases}$$

Note que o peso logarítmico só aparece quando $p = n$ ou $p = \dfrac{n}{2}$. Estes casos são os casos críticos quando $\dfrac{n}{p} + \alpha \in \{1, 2, ..., m\}$. As proposições seguintes são casos particulares da Proposição 15.

Proposição 20. *O espaço $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma:*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\left|\left| \frac{u}{w_1} \right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Proposição 21. *O espaço $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma:*

$$||u||_{W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\left|\left| \frac{u}{w_2} \right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left|\left| \frac{\nabla u}{w_1} \right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left|\left| D^2 u \right|\right|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

A partir de agora, quando escrevamos $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ou $W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ estaremos usando as definições acima de espaços de Sobolev com peso por uma questão de comodidade. Também serão úteis os seguintes espaços

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega), div\boldsymbol{\varphi} = 0\}.$$
$$\boldsymbol{H}_p(\Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega), div\boldsymbol{\varphi} = 0\}.$$

3.2 Resultados iniciais

Lembre que para $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_n)$ definimos o operador divergente por

$$div\,\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

e repare na identidade

$$div(\nabla u) = \Delta u$$

Proposição 22. *Seja $1 < p < \infty$ real e $n \geq 2$. Logo os operadores*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \xrightarrow{grad} \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{H}_{p'}, \tag{3.3}$$

e

$$\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)/\boldsymbol{H}_{p'} \xrightarrow{div} W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p]}, \tag{3.4}$$

são isomorfismos.

Demonstração. O operador gradiente definido sobre $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é claramente linear e contínuo. Nas afirmações 1 e 2 provaremos que e seu núcleo K_g se reduz a $\{0\}$ se $1 < p < n$ e a $\mathcal{P}_0$ se $n \leq p < \infty$. Isto é, $K_g = \mathcal{P}_{[1-n/p]}$. Além disso, do Corolário 10 temos

$$[u]_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,|u|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = C\,||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)},$$

e portanto o operador gradiente é um isomorfismo entre $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]}$ e R_g. Portanto R_g é um subespaço fechado de $\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$, logo, pelo Teorema 10-c:

$$R_g = (Ker(div))^{\perp},$$

onde div é o operador definido por

$$div : \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n) \longmapsto (W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]})^*.$$

e lembre que $-div$ é o operador adjunto do gradiente. Ora, por definição do espaço $H_{p'}$:

$$R_g = (H_{p'})^{\perp},$$

logo, o operador gradiente em (3.3) é um isomorfismo. Finalmente, pela Proposição 7 e o Teorema 9 o operador div definido por (3.4) também é um isomorfismo.

1 **Afirmação :** A integral:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^\gamma dx,$$

converge se e só se $\gamma < -n$. Logo se $p > n$, então as constantes pertencem a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^\gamma dx = \int_0^\infty \int_{B(0,r)} (1+r)^\gamma dS(r)dr = \int_0^\infty C(1+r)^\gamma r^{n-1} dr,$$

mas,

$$\int_0^\infty C(1+r)^\gamma r^{n-1} dr \leq C \int_0^\infty (1+r)^{\gamma+n-1} dr = C \int_1^\infty y^{\gamma+n-1} dy.$$

Logo pela Afirmação 2 da Proposição 16, se $\gamma < -n$ então nossa integral converge. Inversamente, se supôrmos que nossa integral converge e $\gamma \geq -n$ então para $r \geq 1$ vale $1+r \leq 2r$. Se $-n \leq \gamma < 0$ segue-se que $2^\gamma r^\gamma \leq (1+r)^\gamma$, logo vale a desigualdade

$$2^\gamma C \int_1^\infty r^{\gamma+n-1} dr \leq \int_1^\infty C(1+r)^\gamma r^{n-1} dr.$$

Como pela Afirmação 2 da Proposição 16 a integral no lado esquerdo diverge, o mesmo acontece com a integral do lado direito. E como $\int_0^1 C(1+r)^\gamma r^{n-1} dr$ é finita por ser o integrando uma função contínua então nossa integral inicial diverge, uma contradição . Se $\gamma \geq 0$ então vale a desigualdade

$$C \int_0^\infty r^{\gamma+n-1} dr \leq \int_0^\infty C(1+r)^\gamma r^{n-1} dr.$$

Como o lado esquerdo diverge em este caso a nossa integral também diverge, contradição novamente. Portanto, a integral $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^\gamma dx$ converge se e só se $\gamma < -n$.

2 **Afirmação :** A integral:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n} ln^{-n}(2+|x|) dx,$$

converge. Logo as constantes pertencem a $W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

Como o logaritmo é uma função crescente temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n} ln^{-n}(2+|x|) dx &= \int_0^\infty \int_{B(0,r)} (1+r)^{-n} ln^{-n}(2+r) dS(r) dr, \\
&= C \int_0^\infty (1+r)^{-n} ln^{-n}(2+r) r^{n-1} dr, \\
&\leq \int_0^\infty (1+r)^{-1} ln^{-n}(2+r) dr, \\
&\leq \int_0^\infty (1+r)^{-1} ln^{-n}(1+r) dr, \\
&= \int_1^\infty s^{-1} ln^{-n}(s) ds, \\
&= \int_1^\infty ln^{-n}(s) d(lns), \\
&= \int_1^\infty u^{-n} d(u) < \infty,
\end{aligned}$$

pois $n \geq 2$.

■

Para demostrar a seguinte Proposição precisamos do seguinte Lema, do qual no forneceremos a demostração , a qual pode ser vista em [31].

Lema 4. *O espaço $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\boldsymbol{H}_p(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 23. *Seja $n \geq 2$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Logo*

i) Se $1 < p < n$, existe uma constante K, dependendo de n, tal que $u + K \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$, independente de u, tal que

$$||u + K||_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, ||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)} \, .$$

ii) Se $n \leq p$, logo $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C > 0$, independente de u, tal que

$$||u||_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0} \leq C \, ||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Demonstração. Esta proposição é uma consequência simples da Proposição 22 e do Lema 4. De fato, seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Desde que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\forall \, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \nabla u, \boldsymbol{\varphi} \rangle = - \langle u, div \; \boldsymbol{\varphi} \rangle \, ,$$

logo ∇u é ortogonal a $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Então , desde que $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ é denso em $\boldsymbol{H}_p$, como $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\perp} \subset \overline{(\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\perp})} \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\perp\perp\perp} = (\boldsymbol{H}_{p'})^{\perp}$ vemos que $\nabla u \in (\boldsymbol{H}_{p'})^{\perp}$, logo pela Proposição 22, existe um $w \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\nabla w = \nabla u$ e se cumpre

$$||w||_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]}} \leq C \, ||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Ora, desde que $\nabla(w - u) = 0$, temos que $w = u + K$, onde K é uma constante. Se $1 < p < n$, então $\mathcal{P}_{[1-n/p]} = \{0\}$ e $i)$ está provado. Se $n \leq p$, logo $\mathcal{P}_{[1-n/p]} = \mathcal{P}_0$ e w pertence a mesma classe que u, logo $ii)$ está demostrado. ■

Observação 18. Da proposição anterior deduzimos um resultado não trivial

- Se $p \geq n$ então $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
- Se $1 < p < n$ então se $u \in W^{1,p}$, existe um uma constante K tal que $u + K \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Em vista da Proposição anterior vale a pena reescrever a Proposição 22 para o caso particular $m = 1, p = n$.

Proposição 24. *Para $n \geq 2$ os operadores*

$$W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0 \overset{grad}{\longrightarrow} \boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{H}_{n/(n-1)} \tag{3.5}$$

e

$$\boldsymbol{L}^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)/\boldsymbol{H}_{n/(n-1)} \overset{div}{\longrightarrow} W_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_0 \tag{3.6}$$

são isomorfismos

A Proposição 23 não considera o caso $p = 1$. Porém, existe um resultado por Amrouche-Nguyen [7] que da uma resposta para este caso.

Proposição 25. *Assuma que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e que $\nabla u \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Logo existe uma única constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $u + K \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos*

$$||u + K||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.7}$$

e

$$K = -\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{\omega_n} \int_{S_{n-1}} u(\sigma\,|x|)d\sigma \tag{3.8}$$

onde S_{n-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ e ω_n sua superfície.

Demonstração. Ver Amrouche-Nguyen [7], Proposição 2.14. ∎

Teorema 20. *Para todos os inteiros $n \geq 2$, o laplaciano:*

$$\Delta : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \longmapsto W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']}. \tag{3.9}$$

está bem definido e é um isomorfismo.

Demonstração. O laplaciano definido sobre $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é claramente linear. Também é contínuo graças a Proposição 18. Além disso, como $\Delta u = 0$ e $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ implica que u é um polinômio de $\mathcal{P}_{[1-n/p]}$. Então o laplaciano definido por (3.9) é linear, contínuo e injetivo (aqui usamos implicitamente a Proposição 2). Resta provar a sobrejetividade, logo concluímos pelo Corolário 2. Para este fim, dado $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']}$ precisamos construir um $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Delta u = f$. Um candidato obvio é $F * f$ onde F é a solução fundamental do operador laplaciano. Porém a dificuldade é dar um significado a esta convolução desde que nenhuma destas duas distribuições tem suporte compacto. Procedemos em três passos.

i) Graças a Proposição 22 existe um $v \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $div\, v = f$ e além disso

$$||v||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||f||_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

onde a constante C não depende de v. Agora, desde que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $v_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $v_m \to v$ em $\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

ii) Seja $f_m = div\, v_m$ e $\psi_m = F * f_m$. Para todo $i = 1, ..., n$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\langle \partial_i \psi_m, \varphi \rangle = -\langle F * f_m, \partial_i \varphi \rangle = \langle v_m, \nabla \partial_i (F * \varphi) \rangle .$$

Logo, pelas desigualdades de Calderón-Zygmund temos

$$\begin{aligned} |\langle \partial_i \psi_m, \varphi \rangle| &\leq ||v_m||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)} \, ||\nabla \partial_i (F * \varphi)||_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)} , \\ &\leq C_1 \, ||v_m||_{\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)} \, ||\Delta (F * \varphi)||_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)} , \\ &\leq C_2 \, ||f||_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \, ||\varphi||_{\boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Logo $\nabla \psi_m$ é limitado em $\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

iii) Finalmente, pela Proposição 23, para cada m existe uma constante c_m tal que

$$\psi_m + c_m \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad ||\psi_m + c_m||_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \, ||f||_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Segue-se que $\psi_m + c_m$ converge fracamente a alguma função $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $-\Delta u = f$, logo encontramos o u que precisávamos.

■

Podemos obter outros isomorfismos úteis para os casos não críticos usando as desigualdades de Hardy e Calderón-Zygmund. Porém não daremos a prova aqui. Esta pode ser encontrada em Amrouche, Girault e Giroire [3], Lema 5.2 e Teorema 9.6.

Teorema 21. *Para* $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ *e* $\dfrac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$ *o laplaciano definido por*

$$\Delta : W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]} \longmapsto W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-2-n/p]}. \tag{3.10}$$

está bem definido e é um isomorfismo.

Teorema 22. *Para* $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ *o laplaciano definido por*

$$\Delta : W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[m-n/p]} \longmapsto W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n). \tag{3.11}$$

está bem definido e é um isomorfismo.

Agora, sabemos que se $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ sempre podemos encontrar uma $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ tal que $div\, \boldsymbol{u} = f$ vale. Uma pergunta interessante é se $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$? A seguinte proposição é dada por J. Bourgain e H. Brézis ([12]) para funções periódicas. Aqui damos uma prova detalhada para funções no espaço inteiro.

Teorema 23. *Seja* $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$*. Logo existe* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tal que:*

$$div\ \boldsymbol{u} = f \ \ com \ \ ||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \, ||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)} \tag{3.12}$$

Demonstração. Consideramos o operador linear não limitado

$$A = -\nabla : D(A) \subset L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \to \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

com

$$D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in L^1(\mathbb{R}^n), \nabla v \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n) \right\} \subset L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n).$$

Donde a inclusão em $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ está garantida pela imersão no Teorema 13-*Caso 1-a*. Vamos a demostrar que A é um operador fechado e densamente definido, logo vamos a concluir usando a proposição 5 sobre o operador adjunto de A.

1. A **é fechado**, pois se $v_n \to v$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ and $-\nabla v_n \to \boldsymbol{z}$ em $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$, como $L^1(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ então

$$v_n \to v \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

$$-\nabla v_n \to \boldsymbol{z} \text{ em } \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n).$$

Do primeiro limite, como a derivada é uma função contínua em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ então

$$-\nabla v_n \to -\nabla v \text{ em } \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n).$$

Finalmente da unicidade do limite em $\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n)$ tem-se $-\nabla v = \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e assim, $v \in W^{1,1} = D(A)$ e $\boldsymbol{z} = -\nabla v$. Portanto, A é fechado.

2. $(D(A), ||.||_{n/n-1})$ **é denso em** $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$, pois claramente $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset D(A) \subset L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$, logo da densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ temos que $D(A)$ é denso em $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. Assim, A é densamente definido.

3. **Vale a desigualdade:**

$$||u||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, ||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.13}$$

para todo $u \in D(A)$.

A imersão de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg no caso 1-a do Teorema 13 goza de uma desigualdade fornecida no Teorema 9.9 do Brezis[15]. A desigualdade 3.13 é um caso particular quando $p = 1$.

4. Graças à Proposição 5, dado que (3.13) vale, o operador adjunto $A^* = div : \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^n(\mathbb{R}^n)$ é sobrejetivo, é dizer para todo $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ existe $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $div\ \boldsymbol{u} = f$. Estendemos A^* por continuidade a $\tilde{A}^* = \overline{D(A^*)} \subset \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \to$

$L^n(\mathbb{R}^n)$ Logo, como $\overline{D(A^*)}$ é de Banach, pelo Teorema 2 (da aplicação aberta) existe um $c > 0$ tal que

$$\overline{div_{\boldsymbol{L}^\infty}(0,1)} \supset B_{L^n}(0,c). \tag{3.14}$$

Seja então $f \in L^n(\mathbb{R}^n), f \neq 0$, se definimos

$$h = c\frac{f}{2\,||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}}.$$

Portanto, de (3.14) existe $\boldsymbol{v}_n \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $||\boldsymbol{v}_n||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ tal que

$$div\ \boldsymbol{v}_n \to h \text{ em } L^n(\mathbb{R}^n).$$

Logo existe uma subsequência $\boldsymbol{v}_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{v}$ em $\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $||\boldsymbol{v}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ e $h = div\ \boldsymbol{v}$. Portanto, obtemos (3.12) com $\boldsymbol{u} = \frac{2}{c}\,||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}\,\boldsymbol{v}$.

■

Observação 19. O Teorema 23 pode ser melhorado mostrando que $\boldsymbol{u}$ realmente pertence $\boldsymbol{W}^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$(ver Teorema 25)

Agora falaremos do Teorema De Rham e de vários resultados derivados dele para espaços de Sobolev com peso. Enunciamos o teorema De Rham, não com toda sua generalidade uma vez que De Rham estabeleceu este para fluxos em variedades.

Teorema 24 (De Rham)**.** *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{f}$ uma distribução de $\boldsymbol{D}'(\Omega)$ que satisfaz*

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}},\ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{D}'(\Omega)\times \boldsymbol{D}(\Omega)} = 0,$$

logo existe $\pi \in \boldsymbol{D}'(\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{f} = \nabla \boldsymbol{\pi}.$$

Demonstração. Ver De Rham [19]. ■

Observação 20. Existem outras variações deste teorema. No Teorema 2.10 de Alliot-Amrouche [2] se prova que, em particular, se $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$ e satisfaz

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}, \quad \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{3.15}$$

logo existe um único $\pi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $\boldsymbol{f} = \nabla\pi$ e se verifica a seguinte estimativa

$$||\pi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Similarmente , se $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p < \infty$, e satisfaz

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} = 0 \tag{3.16}$$

logo, $\boldsymbol{f} = \nabla\pi$ com $\pi \in W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. Note ademais que $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ não é denso em $\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)$, mas é denso em

$$\boldsymbol{V}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n) = \left\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n);\ div\, \boldsymbol{v} = 0\right\}.$$

pelo Teorema 2.9 de Alliot-Amrouche [2]. Logo (3.15) é equivalente a

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3.17}$$

Com o mesmo razozínio na equação (3.16) podemos substituir $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ por $\boldsymbol{H}_{p'}(\mathbb{R}^n)$ pelo Lema 4.

O seguinte corolário é uma versão tipo De Rham e da uma resposta na Observação 20 quando $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 11. *Assuma que* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo :*

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\ \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} = 0.$$

Logo existe um único $\pi \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\boldsymbol{f} = \nabla\pi$ *com a estimativa*

$$||\pi||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.18}$$

Demonstração. Com ∇ definido como no Teorema 23, aplicando a Proposição 5-*iii*, vemos que ∇ é injetiva e $Im\nabla$ é um subespaço fechado de $\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$, logo $[\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)]^\perp = (Ker\ \ div)^\perp = Im\nabla$ pela parte *c)* do Teorema 10. Também, pela Definição 2 com $N = \boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)$ e a Proposição 8 temos que

$$[\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)]^\perp = \left\{\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} = 0, \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Logo a hipóteses implica que $\boldsymbol{f} \in [\boldsymbol{H}_\infty(\mathbb{R}^n)]^\perp$ e o resultado se segue, onde a equação (3.18) é a equação (3.13) para este caso particular. A unicidade deve-se à injetividade do gradiente. ∎

Observação 21. Observe que a hipóteses do Corolário 11 implica que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} = 0$, pois basta tomar $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ o vetor canônico em $\mathbb{R}^n$ para concluir que cada componente $\int_{\mathbb{R}^n} f_i = 0$. Logo, note que a conclusão deste corolário mostra que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ pelo Corolário 9 e logo $div\boldsymbol{f} \in W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ pelo Teorema 18. Além disso temos

$$\forall \lambda \in \mathcal{P}_1, \quad \langle div\boldsymbol{f}, \lambda\rangle_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\times W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

3.3 Principais resultados sobre os operadores div-grad

O seguinte teorema é um resultado por J. Bourgain e H. Brézis no Teorema 1 de [12] ou no Corolário 6 de [14] traduzido ao linguagem de espaços de Sobolev com peso.

Teorema 25. *Para cada* $f \in L^n(\mathbb{R}^n)$ *existe* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tal que div* $\boldsymbol{w} = f$ *e*

$$||\boldsymbol{w}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{w}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||f||_{L^n(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Observação 22. Note que J. Bourgain e H. Brézis usam o espaço $\widehat{W}^{1,n}(\mathbb{R}^n)$(respectivamente, $\widehat{W}^{2,n}(\mathbb{R}^n)$), os quais são definidos pela aderência de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ para a norma $||\nabla.||_{L^n(\mathbb{R}^n)}$ (respectivamente, pela aderência de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ para a norma $||\nabla^2.||_{L^n(\mathbb{R}^n)}$) como seu modo de trabalho. Nossa escolha é pelos espaços de Sobolev com peso e este enfoque nos parece mais adaptativo.

Observação 23. Note também que não temos unicidade para o $\boldsymbol{w}$ de este teorema, pois como $\mathcal{P}_0 \subset \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ então se $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que *div* $\boldsymbol{w} = f$ também se cumpre o mesmo para $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{c}$ com $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ constante.

O segundo item da proposição seguinte é uma extensão do Corolário 11.

Proposição 26.

(i) *Existe um* $C > 0$ *tal que para todo* $u \in L^{n/n-1}(\mathbb{R}^n)$, *vale a seguinte desigualdade:*

$$||u||_{L^{n/n-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \inf_{\boldsymbol{g}+\boldsymbol{h}=\nabla u} \left(||\boldsymbol{g}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{h}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/n-1}(\mathbb{R}^n)} \right) \tag{3.19}$$

com $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,n/n-1}(\mathbb{R}^n)$

(ii) *Se* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n) + \boldsymbol{W}_0^{-1,n/n-1}(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz a seguinte condição de compatibilidade*

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \tag{3.20}$$

logo existe um único $\pi \in L^{n/n-1}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\boldsymbol{f} = \nabla\pi$

Demonstração. (i) Considerando os seguintes operadores:

$$A = -\nabla : L^{n/n-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n) + \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n),$$

$$A^* = div : \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^n(\mathbb{R}^n),$$

a prova é similar ao Teorema 23 considerando que a sobrejetividade de A^* vem do Teorema 25.

(ii) Consequência da parte (i) e do Teorema de Rham.

∎

Observação 24. Note que para todo $u \in W^{1,1}$,

$$||u||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla u||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.21}$$

e para todo $u \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$,

$$||u||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla u||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.22}$$

A desigualdade (3.21) é conhecida. Consideremos agora (3.22). Pelo Teorema 22 o laplaciano Δ é um isomorfismo de $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_1$ em $L^n(\mathbb{R}^n)$. Por dualidade temos que

$$\Delta : L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \to W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_1$$

é também um isomorfismo. Logo para todo $u \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$, deduzimos

$$||u||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\Delta u||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.23}$$

Por outra parte, sabemos que

$$||\Delta u||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} = ||div\,\nabla u||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}\,,$$

e o seguinte operador

$$div : \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \to W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$$

é contínuo. Logo

$$||\Delta u||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla u||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}$$

e portanto concluímos (3.22). A desigualdade (3.19), mais forte do que (3.21) ou (3.22) é especialmente interessante se $u \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla u \notin \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Outros resultados por H. Brézis e J. Van Schaftingen no Lema 3.3 e Lema 3.9 de [16].

Teorema 26 (Bourgain,Brézis)**.** *Seja* Ω *um domínio Lipschitz aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$*.*

(i) Para todo $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\Omega)$ *existe um* $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\Omega)$ *e* $\eta \in W_0^{2,n}(\Omega)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla\eta \tag{3.24}$$

com a seguinte estimativa

$$||\nabla\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^n(\Omega)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\Omega)} + \left|\left|D^2\eta\right|\right|_{\boldsymbol{L}^n(\Omega)} \leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\Omega)} \tag{3.25}$$

onde C *só depende de* Ω*.*

(ii) Para todo $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}^{1,n}(\Omega)$, existe um $\psi \in \boldsymbol{W}^{1,n}(\Omega) \cap \boldsymbol{L}^{\infty}(\Omega)$ e $\eta \in W^{2,n}(\Omega)$ tal que (3.24) vale com $\boldsymbol{\psi}.\boldsymbol{n} = 0$ sobre Γ satisfazendo a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}^{1,n}(\Omega)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^{\infty}(\Omega)} + ||\eta||_{\boldsymbol{W}^{2,n}(\Omega)} \leq C\,||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}^{1,n}(\Omega)} \tag{3.26}$$

No teorema acima $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev clássico de funções em $\boldsymbol{W}^{1,n}(\Omega)$ que se anulam na fronteira de Ω e $\boldsymbol{W}_0^{2,n}(\Omega)$ o espaço de funções em $\boldsymbol{W}^{2,n}(\Omega)$ cujo traço e derivadas normais se anulam na fronteira de Ω.

Agora provaremos um resultado similar correspondente aos espaços Sobolev com peso.

Corolário 12. *Para todo $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ existe um $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla\eta \tag{3.27}$$

com a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)} + \left|\left|D^2\eta\right|\right|_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \tag{3.28}$$

Demonstração. Graças a densidade de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ que converge para um $\boldsymbol{\varphi}$ em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. Seja B_{r_k} ser a bola tal que $supp\boldsymbol{\varphi}_k \subset B_{r_k}$ e seja $\boldsymbol{\varphi}'_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varphi}(r_k\boldsymbol{x})$. Logo deduzimos que $\boldsymbol{\varphi}'_k \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(B_1)$. Aplicando o Teorema 26, existem $\boldsymbol{\psi}'_k \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(B_1) \cap \boldsymbol{L}^{\infty}(B_1)$ e $\eta'_k \in W_0^{2,n}(B_1)$ tal que:

$$\boldsymbol{\varphi}'_k = \boldsymbol{\psi}'_k + \nabla\eta'_k$$

com a seguinte estimativa

$$||\nabla\boldsymbol{\psi}'_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} + ||\boldsymbol{\psi}'_k||_{\boldsymbol{L}^{\infty}(B_1)} + \left|\left|D^2\eta'_k\right|\right|_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} \leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}'_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)}$$

Agora fazemos:

$$\boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}'_k\left(\frac{\boldsymbol{x}}{r_k}\right) \quad e \quad \eta_k(\boldsymbol{x}) = r_k\eta'_k\left(\frac{\boldsymbol{x}}{r_k}\right)$$

Logo temos:

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \boldsymbol{\psi}_k + \nabla\eta_k \tag{3.29}$$

Além disso, desde que:

$$\begin{aligned} ||\nabla\boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} &= ||\nabla\boldsymbol{\psi}'_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} \\ ||\boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)} &= ||\boldsymbol{\psi}'_k||_{\boldsymbol{L}^{\infty}(B_1)} \\ ||\nabla\boldsymbol{\varphi}_k||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} &= ||\nabla\boldsymbol{\varphi}'_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} \end{aligned}$$

Logo temos que:

$$||\nabla\boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}_k||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \tag{3.30}$$

Portanto pela Proposição 23 existe uma sequência $(\boldsymbol{a}_k)$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{\psi}_k + \boldsymbol{a}_k$ é limitado em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e

$$||\boldsymbol{\psi}_k + \boldsymbol{a}_k||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \tag{3.31}$$

Como $||\boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$ é também limitado, a sequência $(\boldsymbol{a}_k)$ é limitada, logo existe uma subsequência, ainda denotada por $(\boldsymbol{a}_k)$, tal que $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$. Sabemos que existe $\boldsymbol{\psi}_0 \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\boldsymbol{\psi}_k + \boldsymbol{a}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\psi}_0$ em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e:

$$||\boldsymbol{\psi}_0||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

Logo, $\boldsymbol{\psi}_k \rightharpoonup \boldsymbol{\psi}_0 - \boldsymbol{a}$ em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\boldsymbol{\psi}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{\psi}$ em $\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Logo, isto implica que $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 - \boldsymbol{a}$. Ainda mais, temos a seguinte estimativa:

$$||\nabla \boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

Da equação (3.29), deduzimos que:

$$\left|\left|D^2 \eta_k\right|\right|_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

é dizer, existe $\alpha_k \in \mathcal{P}_1$ tal que:

$$\eta_k + \alpha_k \text{ é limitado em } W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n) \tag{3.32}$$

e existe η_0 em $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta_k + \alpha_k \rightharpoonup \eta_0$ em $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$. Como $\boldsymbol{\varphi}_k$ e $\boldsymbol{\psi}_k$ são limitadas em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, o mesmo vale para $\nabla \eta_k$, logo, de (3.32) deduzimos que $\nabla \alpha_k$ é limitado em $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$. Portanto existe uma sequência real b_k tal que $\alpha_k + b_k$ é limitado em $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, a sequência $\eta_k - b_k$ é limitada em $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$ e podemos extrair uma subsequência, denotada igual, tal que $\eta_k - b_k \rightharpoonup \eta$ em $W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$. Logo, temos

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \boldsymbol{\psi}_k + \nabla(\eta_k - b_k)$$

com a estimativa

$$\left|\left|D^2 (\eta_k - b_k)\right|\right|_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

mas tomando limite na equação acima temos $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla \eta$ com:

$$||\nabla \boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} + \left|\left|D^2 \eta\right|\right|_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

e acabamos de deduzir (3.28). ■

Também podemos dar uma outra versão do Corolário 12

Teorema 27. *Para todo* $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ *existe um* $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\eta \in W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla \eta \tag{3.33}$$

com a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||\eta||_{W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.34}$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}$ e η obtidos como na prova do Colorario 12. Logo

$$|\boldsymbol{a}_k| = \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1} |\boldsymbol{a}_k| \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\int_{B_1} |\boldsymbol{a}_k|^n\right)^{1/n} |B_1|^{(n-1)/n}$$

Logo, de (3.30) e (3.31)

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}_k| \leq C\,||\boldsymbol{a}_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} &\leq C\,||\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} + C\,||\boldsymbol{\psi}_k||_{\boldsymbol{L}^n(B_1)} \\ &\leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

e

$$||\boldsymbol{a}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

Como $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 - \boldsymbol{a}$, logo

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

Como $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla\eta$, temos

$$||\nabla\eta||_{W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

Portanto, existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$||\eta + b||_{W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,||\nabla\eta||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

e a prova está completa. ∎

Observação 25. Este Teorema sugere a seguinte pergunta aberta: Se $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{2,n/2}(\mathbb{R}^n)$, existe uma função $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{2,n/2}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e uma função $\eta \in W_0^{3,n/2}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla\eta$$

com a correspondente estimativa?

Finalmente para as aplicações precisaremos do seguinte espaço:

$$\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n) = \left\{\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n),\ div\ \boldsymbol{f} \in W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

o qual é um espaço de Banach munido com a seguinte norma:

$$||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} = ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} + ||div\ \boldsymbol{f}||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}$$

Note que $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$ é não vazio pela Observação 21.

Teorema 28. *Seja* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$, *logo* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ *e vale a seguinte desigualdade:*

$$\forall\,\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \left|\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\varphi}\right| \leq ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)}\,||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \tag{3.35}$$

Demonstração. Consideramos o seguinte operador linear

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\varphi} &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

Pelo Teorema 27 temos

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.(\boldsymbol{\psi} + \nabla \eta) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\psi} - \langle div\ \boldsymbol{f}, \eta\rangle_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n), W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)} \right| \\ &\leq ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||div\ \boldsymbol{f}||_{W_0^{-2,n/(n-1)}} ||\eta||_{W_0^{2,n}} \\ &\leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} ||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, aplicando o Teorema de Hanh-Banach, podemos estender $\boldsymbol{F}$ unívocamente a um elemento $\tilde{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\left|\left|\tilde{\boldsymbol{F}}\right|\right|_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} .$$

Além disso, o operador linear $\boldsymbol{f} \longrightarrow \tilde{\boldsymbol{F}}$ de $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$ em $\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo e injetivo. Portanto $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com um subespaço de $\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ com imersão densa e contínua. ∎

Observação 26. i) Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$. Logo $\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} = 0$ se e só se

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{P}_1, \quad \langle div\ \boldsymbol{f}, \lambda\rangle_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\times W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)} .$$

Note que $\int_{\mathbb{R}^n} f_i = \langle f_i, \mathbf{1}\rangle_{W_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\times W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$.

ii) Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} = 0$. Logo vale a seguinte desigualdade: para todo $\boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \right| \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} .$$

Com efeito, observamos que para qualquer $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| = |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{a}\rangle| \leq ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} ||\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{a}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} .$$

Consequentemente, tomando ínfimo, temos que para todo $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)} .$$

Do teorema anterior é simples deduzir o seguinte corolário.

Corolário 13. *Seja* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $div\, \boldsymbol{f} = 0$. *Logo* $\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} = 0$ *e para todo* $\varphi \in \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *temos,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\varphi} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^n(\mathbb{R}^n)}$$

Corolário 14. *Seja* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. *Logo o problema*

$$-\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \text{em } \mathbb{R}^n$$

tem uma única solução $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. *Além disso, temos que* $\boldsymbol{u} = \varepsilon_n * \boldsymbol{f}$ *e* $\boldsymbol{u}$ *satisfaz a seguinte estimativa*

$$||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Demonstração. Este corolário é uma consequência imediata do Teorema 28, a Observação 26 e o fato que

$$\Delta : W_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \to W_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_0, \text{ se } n \geq 2,$$

$$\Delta : W_0^{1,2}(\mathbb{R}^2)/\mathcal{P}_0 \to W_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2) \perp \mathcal{P}_0, \text{ se } n = 2,$$

são isomorfismos pelo Teorema 20. ■

Observação 27. Em particular, quando $n = 2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^2)$ e $div\, \boldsymbol{f} = 0$, a solução dada no Corolário 14 pertence a $\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Este resultado pode-se encontrar em Brézis-Van Schaftingen [16] e em J.Bourgain-H.Brézis [14].

Corolário 15. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\partial_n f \in W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$.

i) Logo temos que $f \in W_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ *e se verifica a seguinte estimativa*

$$||f||_{W_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} + ||\partial_n f||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

ii) Ainda mais, se $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$, *logo existe um único* $u \in W_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo o seguinte problema*

$$\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

e vale a seguinte estimativa

$$||u||_{W_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} + ||\partial_n f||_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Demonstração. Este corolário pode ser obtido aplicando o Teorema 28 e o Corolário 14 com $\boldsymbol{f} = (0, ..., 0, f)$ ■

4 Aplicações para alguns problemas elípticos no plano e espaço

Nesta seção obteremos vários resultados quando $n = 2, 3$ envolvendo o operador *curl*, o qual é importante para estudar vorticidade dos fluidos. Primeiro lembremos que quando $n = 2$ definimos o operador *curl* para distribuições $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{curl}\, \varphi &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right), \\ curl\, \boldsymbol{v} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Quando $n = 3$ definimos o *curl* de uma distribuição $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n)$ por

$$\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Também, utilizando as definições acima podemos comprovar que valem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} curl(\boldsymbol{curl}\, \varphi) &= -\Delta \varphi \quad , n = 2 \\ \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{v}) &= -\Delta \boldsymbol{v} + \nabla(div\, \boldsymbol{v}) \quad , n = 3 \\ \boldsymbol{curl}(curl\, \boldsymbol{v}) &= -\Delta \boldsymbol{v} + \nabla(div\, \boldsymbol{v}) \quad , n = 2 \end{aligned}$$

Graças ao Teorema 25, em dimensão $n = 3$ podemos provar um resultado similar ao Corolário 12 envolvendo o operador *curl*.

Proposição 27. *Seja $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$. Logo existem $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{W}_0^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\eta},$$

e temos a seguinte estimativa

$$||\nabla \boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} + \left|\left| D^2 \boldsymbol{\eta} \right|\right|_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}.$$

Além disso, $\boldsymbol{\psi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ podem ser escolhidos tal que

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\eta}||_{\boldsymbol{W}_0^{2,3}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)}.$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, logo $div\ \boldsymbol{\varphi} \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Pelo Teorema 25, existe um $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$ tal que $div\ \boldsymbol{\psi} = div\ \boldsymbol{\varphi}$ e

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||div\ \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}.$$

Seja $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}$. Sabemos que existe $\boldsymbol{\eta}_0 \in \boldsymbol{W}_0^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{z}$ satisfazendo a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\eta}_0||_{\boldsymbol{W}_0^{2,3}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}\, .$$

Porém, $div\ \boldsymbol{\eta}_0 \in W_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$ é harmônico, logo deduzimos que $div\ \boldsymbol{\eta}_0 = a$ com $a \in \mathbb{R}$. Portanto, temos

$$\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\eta}_0) = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{z}.$$

Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\eta}_0$. Logo $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, $div\ \boldsymbol{y} = 0$ e $\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{y} = 0$. Isto é, $\Delta\boldsymbol{y} = 0$. Logo deduzimos que $\boldsymbol{y} = b \in \mathbb{R}^3$. Seja $\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}_1$ tal que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{q}$. Agora fazemos $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{q}$. Logo

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\eta},$$

e temos a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} + \left|\left|D^2\boldsymbol{\eta}\right|\right|_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\nabla\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}\, .$$

■

Proposição 28. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo $\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)$ e $div\,\boldsymbol{u} = 0$ temos a seguinte estimativa*

$$||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)}\, . \tag{4.1}$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}$. Logo $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ e para todo $i = 1, 2, 3$,

$$\langle f_i, 1\rangle_{W_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)\times W_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Portanto, existe uma única solução $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ de $-\Delta\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}$ em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo

$$||\boldsymbol{z}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)}\, .$$

A última desigualdade é consequência da imersão $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ e porque $div\,\boldsymbol{f} = 0$ e $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}(\mathbb{R}^3)$. Por outra parte, é simples ver que $div\,\boldsymbol{z} = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Fazendo $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}$, podemos deduzir fácilmente que $\Delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ em $\mathbb{R}^3$. Logo $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{z}$ e obtemos a estimativa (4.1). ■

Proposição 29. *Se $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)$ tal que $div\ \boldsymbol{f} = 0$. Então existe $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ com $div\ \boldsymbol{u} = 0$, tal que*

$$\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f},\ \ com\ \ ||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}$$

Demonstração. Similar à prova do Teorema 23. ■

Se assumimos as mesmas hipóteses da Proposição anterior, no espaço tridimensional, graças ao Teorema 27 podemos deduzir outro resultado.

Proposição 30. *Se $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)$ tal que $div\ \boldsymbol{f} = 0$. Logo existe $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, única a menos de vetores constantes, e existe $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{f} \quad e \quad div\, \boldsymbol{\varphi} = 0,$$

satisfazendo a seguinte estimativa

$$||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}.$$

Demonstração. Das hipóteses, deduzimos que $\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3}(\mathbb{R}^3)$. Logo, graças ao Teorema 20 existe $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$ único a menos de um vetor constante, tal que $-\Delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{f}$ em Ω e satisfazendo a seguinte estimativa

$$\inf_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3} ||\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{a}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}.$$

Como $div\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)$ é harmônico, logo deduzimos que $div\, \boldsymbol{\varphi} = 0$. Consequentemente, temos

$$-\Delta \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} - \nabla div\, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi}.$$

Portanto, obtemos que $\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0}$ em Ω. Seja $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{f}$. Logo $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3), div\, \boldsymbol{z} = 0$ e $\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Portanto, deduzimos que $\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, é dizer, $\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}$. Aplicando o Teorema 27, existe $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $\eta \in W_0^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla \eta$ em $\mathbb{R}^3$, com a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\nabla \boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}.$$

A função $\boldsymbol{\psi}$ é a função requerida, logo acabou a prova. ∎

Observação 28. Da proposição anterior, temos a seguinte descomposição de Helmholtz: para todo $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\psi} + \nabla p \tag{4.2}$$

com $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p \in W_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$ e a seguinte estimativa,

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} + ||\nabla p||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.3}$$

Com efeito, temos que $div\, \boldsymbol{f} \in W_0^{-1,3}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{R}$ pois $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)$. Logo existe $p \in W_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, única a menos de constantes, tal que $\Delta p = div\, \boldsymbol{f}$ e vale a seguinte estimativa

$$||\nabla p||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)}.$$

A função $\boldsymbol{f} - \nabla p$ satisfaz a hipóteses da Proposição 30, logo podemos decompor $\boldsymbol{f}$ como em (4.2) com a estimativa (4.3).

Corolário 16. *Existe $C > 0$ tal que para todo $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, se verifica a seguinte desigualdade*

$$||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \inf_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}=\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}} \left(||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{g}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \right), \tag{4.4}$$

com $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)$ e $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$

Demonstração. Consideramos os seguintes operadores

$$A = \boldsymbol{curl} : \boldsymbol{H}_{3/2}(\mathbb{R}^3) \to \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3) + \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3),$$

$$A^* = \boldsymbol{curl} : \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3) \to \boldsymbol{H}_3(\mathbb{R}^3).$$

O resto da prova é similar à prova do Teorema 23. ■

Corolário 17. *Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0$. Logo para todo $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$, temos a seguinte estimativa*

$$\left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} \right| \leq C \, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^n)} \, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \tag{4.5}$$

Demonstração. Primeiro, note que da hipóteses, deduzimos que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$. Seja $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)$. Logo temos $\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)$. Graças à Proposição 30, existe $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi}$ com a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} + ||\boldsymbol{\psi}||_{\boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \,. \tag{4.6}$$

Além disso, existe $\eta \in W_0^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi} + \nabla\eta$ em $\mathbb{R}^3$. Logo temos

$$\left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} \right| = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\varphi} + \langle \boldsymbol{f}, \nabla\eta \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{f}.\boldsymbol{\varphi}.$$

Portanto, a estimativa (4.5) pode ser deduzida da estimativa (4.6). ■

Observação 29. Temos uma outra prova do corolário anterior. Podemos escrever $\boldsymbol{f} = -\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{curlcurl}\,\boldsymbol{u}$, com $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)}$$

Logo deduzimos

$$\begin{aligned} \left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{W}_0^{1,3}(\mathbb{R}^3)} \right| &= \left| \langle \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi} \rangle_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3) \times \boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^n)} \right| \\ &\leq ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)} \, ||\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^3(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

Proposição 31. *Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0$. Logo existe um único $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}$ e $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$ em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo a seguinte estimativa*

$$||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)} \,.$$

Demonstração. Da definição de $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^3)$, temos que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$. Como

$$\Delta : \boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3) \to \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{R}$$

é um isomorfismo segundo o Teorema 20, logo existe um único $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}$ e temos a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{h}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)}$$

Além disso, podemos ver que $div\, \boldsymbol{h} = 0$ e logo $-\Delta \boldsymbol{h} = \boldsymbol{curlcurl}\, \boldsymbol{h}$. A nossa proposição pode ser obtida facilmente fazendo $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{h}$. ■

Temos a seguinte decomposição de Helmholtz.

Corolário 18. *Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_0^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $div\, \boldsymbol{f} \in W_0^{-2,3/2}(\mathbb{R}^3)$. Logo existe um único $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $div\, \boldsymbol{\varphi} = 0$ e um único $\pi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo*

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} + \nabla \pi,$$

e a seguinte estimativa vale

$$||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} + ||\pi||_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C \left(||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3)} + ||div\, \boldsymbol{f}||_{W_0^{-2.3/2}(\mathbb{R}^3)} \right).$$

Demonstração. É claro que

$$\forall\, \lambda \in \mathcal{P}_1,\ \langle div\, \boldsymbol{f}, \lambda \rangle = 0$$

Da hipóteses existe um único $\pi \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\Delta \pi = div\, \boldsymbol{f}$ e

$$||\pi||_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||div\, \boldsymbol{f}||_{W_0^{-2,3/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Logo, deduzimos que $\boldsymbol{f} - \nabla \pi \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{R}^3$. Portanto, existe um único $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f} - \nabla \pi$. Além disso, vemos que $div\, \boldsymbol{z} = 0$. Logo, $\boldsymbol{f} - \nabla \pi = \boldsymbol{curlcurl}\, \boldsymbol{z}$. Completamos a prova fazendo $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{z}$ ■

A seguinte proposição é uma extensão da Proposição 31.

Proposição 32. *Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_0^1(\mathbb{R}^3) + \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $div\, \boldsymbol{f} = 0$ e satisfazendo a seguinte condição*

$$\forall\, i = 1, 2, 3, \quad \langle f_i, 1 \rangle = 0.$$

Logo existe uma única $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\boldsymbol{curl}\, \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}$ e $div\, \boldsymbol{\varphi} = 0$ em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo a seguinte estimativa

$$||\boldsymbol{\varphi}||_{\boldsymbol{L}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\, ||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^3) + \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}$ com $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}_0^1(\mathbb{R}^3)$,$\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ e $div\,\boldsymbol{f} = 0$. Logo $div\,\boldsymbol{g} = -div\,\boldsymbol{h} \in W_0^{-2,3/2}(\mathbb{R}^3)$. Portanto deduzimos que $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ e $\boldsymbol{g} \perp \mathbb{R}^3$. Como $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-1,3/2}(\mathbb{R}^3) \perp \mathbb{R}^3$, logo existe um único $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W}_0^{1,3/2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}$ e $div\,\boldsymbol{z} = 0$. A prova termina escolhendo $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{curl}\,\boldsymbol{z}$. ■

Em dimensão 2 temos um resultado similar como na Proposição 32.

Proposição 33. *Assuma que* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_0^1(\mathbb{R}^2) + \boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $div\,\boldsymbol{f} = 0$. *Logo existe* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\boldsymbol{curl}\,\varphi = \boldsymbol{f}$ *e satisfazendo a seguinte estimativa*

$$||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\,||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^2)+\boldsymbol{W}^{-1,2}0(\mathbb{R}^2)}\,.$$

Finalmente aplicamos estas estimativas para um problema em concreto: o problema de Stokes. Esta sistema modela fluxos de fluidos viscosos em estado estacionário. Lembremos um resultado geral em Alliot-Amrouche [2] respeito ao problema de Stokes em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 29. *Seja* $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo a condição de compatibilidade*

$$\forall\,\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{[1-n/p']}, \quad \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda}\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.7}$$

Logo o sistema de Stokes

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \text{ e } div\,\boldsymbol{u} = g \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \tag{4.8}$$

tem uma única solução $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \times L^p(\mathbb{R}^n)$. *Além disso, temos a seguinte estimativa*

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_{[1-n/p]}} ||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + ||\pi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Demonstração. Ver Alliot-Amrouche [2], Teorema 3.3. ■

Observação 30. Com as ferramentas estudadas até agora podemos demostrar o teorema anterior para um caso particular. Trabalhamos no caso $p = n/(n-1), n \geq 3$. Para demostrar o Teorema 29 no caso $p = n/(n-1)$ basta provar que o operador

$$\begin{aligned} T : \boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \times L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0 \times L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \\ (\boldsymbol{u}, \pi) &\longrightarrow (-\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi, -div\,\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

é um isomorfismo. T é claramente linear e é contínua pela Proposição 18. Para demostrar que T é injetiva , se $(\boldsymbol{u}, \pi)$ pertence ao núcleo de T então

$$\begin{aligned} -\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi &= 0, \\ div\,\boldsymbol{u} &= 0. \end{aligned}$$

Tomando divergência na primeira equação temos que $\Delta\pi = 0$, logo como $\pi \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ então $\pi = 0$. Substituindo de novo nas equações acima temos que $\Delta \boldsymbol{u} = 0$ e $div\, \boldsymbol{u} = 0$, logo como $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ então $\boldsymbol{u} = 0$. Assim T é injetiva. Falta só demostrar a sobrejetividade. Seja $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \times L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a condição 4.7 no nosso caso particular, é dizer,

$$\langle f_i, 1\rangle = 0 \qquad \text{para todo } i = 1, 2, ..., n.$$

Logo $div\, \boldsymbol{f} \in W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ e para qualquer polinômio $\mu \in \mathcal{P}_1 \subset W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)$, verifica-se

$$\langle div\, \boldsymbol{f}, \mu\rangle_{W_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\times W_0^{2,n}(\mathbb{R}^n)} = -\langle \boldsymbol{f}, \nabla\mu\rangle_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)\times \boldsymbol{W}_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Quer dizer $div\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}_0^{-2,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_1$ e a mesma conclusão vale para Δg fazendo um argumento parecido. Logo como o operador $\Delta : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2-n/p']}$ é um isomorfismo então o problema $\Delta\pi = div\, \boldsymbol{f} + \Delta\, g$ tem uma única solução $\pi \in L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como

$$\langle \partial_i \pi, 1\rangle = -\langle \pi, 0\rangle = 0,\ i = 1, ..., n$$

então $\nabla\pi \in W_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0$. Assim pelo Teorema 20 existe uma única solução $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ para o problema

$$\Delta \boldsymbol{u} = \nabla\pi - \boldsymbol{f}$$

Finalmente $div\, \boldsymbol{u} - g$ é um polinômio harmônico que pertence a $L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$, logo identicamente nulo.

Agora damos uma versão menos geral do teorema anterior, porém com uma hipóteses mais simples de verificar. Note-se que antes do trabalho em que nos baseamos não se conhecia a relação entre os espaços $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n)$ e $\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 19. *Seja* $(\boldsymbol{f}, g) \in \boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n) \times L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo as seguintes condições*

$$\langle f_i, 1\rangle = 0 \qquad \textit{para todo } i = 1, 2, ..., n.$$

Logo o sistema de Stokes (4.8) tem uma única solução $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n) \times L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ *e vale a seguinte estimativa*

$$||\boldsymbol{u}||_{\boldsymbol{W}_0^{1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + ||\pi||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(||\boldsymbol{f}||_{\boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Demonstração. Este corolário é uma consequência de $\boldsymbol{X}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \boldsymbol{W}_0^{-1,n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)$ e o Teorema 29. ■

Referências

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press, New York, 1978.

[2] F. Alliot and C. Amrouche. The stokes problem in $\mathbb{R}^n$: An approach in weighted sobolev spaces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9(5):723–754, 1999.

[3] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 73(6):579–606, 1994.

[4] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator: An approach in weighted sobolev spaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76(1):55 – 81, 1997.

[5] C. Amrouche and S. Nečasová. Laplace equation in the half-space with a nonhomogeneous Dirichlet boundary condition. *Math. Bohem.*, 126(2):265–274, 2001.

[6] C. Amrouche and H. H. Nguyen. New characterization of the kernel of the n-dimensional laplace operator in exterior domains. *Comptes Rendus Mathematique*, 346(23-24):1257–1260, 2008.

[7] C. Amrouche and H. H. Nguyen. New estimates for the div-curl-grad operators and elliptic problems with L^1-data in the whole space and in the half-space. *Journal of Differential Equations*, 250(7):3150 – 3195, 2011.

[8] C. Amrouche and H. H. Nguyen. Elliptic problems with l^1-data in the half-space. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 5(3):369–397, 2012.

[9] A. Avantaggiati. Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni. *Boll. Unione Mat. Ital., V. Ser., A*, 13:1–52, 1976.

[10] P. Bolley and J. Camus. Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids. In *Publications des Séminaires de Mathématiques (Univ. Rennes, Rennes, année 1968-1969), Fasc. 1: Séminaires d'analyse fonctionnelle, Exp. No. 1*, page 70. Dép. Math. et Informat., Univ. Rennes, Rennes, 1969.

[11] J. Bourgain and H. Brezis. Sur l'équation $div\ u = f$. *Comptes Rendus Mathematique*, 334(11):973 – 976, 2002.

[12] J. Bourgain and H. Brezis. On the equation $div\ y = f$ and application to control of phases. *Journal of the American Mathematical Society*, 16(2):393–426, 2003.

[13] J. Bourgain and H. Brezis. New estimates for the Laplacian, the div-curl, and related Hodge systems. *Comptes Rendus Mathematique*, 338(7):539 – 543, 2004.

[14] J. Bourgain and H. Brezis. New estimates for elliptic equations and Hodge type systems. *J. Eur. Math. Soc.*, 9(2):277–315, 2007.

[15] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext (Berlin. Print). Springer, 2010.

[16] H. Brezis and J. Van Schaftingen. Boundary estimates for elliptic systems with L^1-data. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 30(3):369–388, 2007.

[17] Alexandre J. Chorin and Jerrold E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, 3rd edition, 1993.

[18] G. M. Constantine and T. H. Savits. A multivariate Faà di Bruno formula with applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(2):503–520, 1996.

[19] Georges de Rham. Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques. 2 éd. Actualites Scientifiques et Industrielles. 1222. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago. III. Paris: Hermann & Cie. XII, 196 p. (1960)., 1960.

[20] J. Deny and J. L. Lions. Les espaces du type de beppo levi. *Annales de l'institut Fourier*, 5:305–370, 1954.

[21] J. Giroire. Etude de Quelques Problèmes aux Limites Extérieurs et Résolution par Equations Intégrales. In *Thèse de Doctorat d'Etat Université Pierre et Marie Curie, Paris-VI*. 1987.

[22] B. Hanouzet. Espaces de sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 46:227–272, 1971.

[23] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge mathematical library. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Autre tirage 2001.

[24] L. Hörmander and J. L. Lions. Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. *Math. Scand.*, 4:259–270, 1956.

[25] H. N. Huang, S. A. M. Marcantognini, and N. J. Young. Chain rules for higher derivatives. *The Mathematical Intelligencer*, 28(2):61–69, 2006.

[26] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Application*. Wiley, 1978.

[27] L. D. Kudryavcev. Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of elliptic equations by variational methods. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 55:182 pp. (Russian), 1959.

[28] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces.* Wiley 1 edition, 1985.

[29] A. Kufner and B. Opic. How to define reasonably weighted sobolev spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 025(3):537–554, 1984.

[30] L. A. Medeiros and M. M. Miranda. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos.* Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

[31] T. Miyakawa. On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. *Hiroshima Math. J.*, 12(1):115–140, 1982.

[32] M.N. Le Roux. Résolution Numérique du Problème du Potentiel dans le Plan par une Méthode Variationnelle d'Eléments Finis. In *Thèse de 3ème Cycle Université de Rennes.* 1974.

[33] J. Van Schaftingen. Estimates for L^1-vector fields. *Comptes Rendus Mathematique*, 339(3):181 – 186, 2004.

[34] E. M. Stein and T. S. Murphy. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton mathematical series; 43. Princeton, N.J. Princeton University Press, 1993. Collection d'après la jaquette.