Decomposições Espectrais, Estabilidade e Ações Hiperbólicas

Abel Rios Bravo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Carlos Arnoldo Morales Rojas

Co-orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Rio de Janeiro
Julho 2015

Ações Hiperbólicas
Rios Bravo, Abel

Abel Rios Bravo

Decomposições Espectrais, Estabilidade e Ações Hiperbólicas

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 01 de julho de 2015:

Orientador, Prof. Dr. Carlos Arnoldo Morales Rojas – IM/UFRJ

Co-orientador, Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza – IM/UFRJ

Prof. Dr. Enoch Humberto Apaza Calla – UFV

Prof. Dr. Marcelo Tavares Ramos Luiz– IM/UFRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro. E um agradecimento especial ao professor Alexander Eduardo Arbieto Mendoza pela orientação no desenvolvimento do trabalho e pelo tema escolhido para esta dissertação. Gostaria também, de agradecer a Davi Joel dos Anjos Obata e a todos os colegas, funcionários e professores do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

RESUMO

RIOS BRAVO, Abel. Decomposições Espectrais, Estabilidade e Ações Hiperbólicas. Rio de Janeiro, 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Neste trabalho estudamos a dinâmica de ações de grupos. Em particular, estudamos ações Axioma A e Anosovs. Tais ações são generalizações dos conceitos de difeomorfismos e fluxos hiperbólicos introduzidos por Smale. Assim, apresentamos as generalizações do teorema de decomposição espectral para ações Axioma A e do teorema de Ω-estabilidade para ações Hiperbólicas. Estes resultados foram obtidos por Pugh e Shub.

Também mostramos que se um grupo age de maneira hiperbólica mas não Anosov então o grupo tem que ser hiperbólico. Para isto, estudamos a teoria de fins de um grupo. Finalmente apresentamos uma decomposição mais fina que a decomposição espectral para classes homoclínicas, devido a Abdenur e Crovisier.

Palavras–chave: Decomposições espectrais, ações hiperbólicas , Estabilidade, fins.

ABSTRACT

RIOS BRAVO, Abel. Spectral Decomposition, hiperbolic action and stability. Rio de Janeiro, 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015

In this work we study the dynamics o group actions. In particular, we study Axiom A and Anosov actions. Such actions generalize the dynamics of hyperbolic diffeomorphisms and flows introduced by Smale. Hence, we show generalizations of the Spectral Decomposition Theorem and the Ω-stability theorem to Axiom A actions. These results were obtained by Pugh and Shub.

We also show that if a group acts hyperbolically, but non Anosov, over a manifold then the group must be hyperbolic. For that, we study the theory of ends of groups. Finally we show a decomposition finer than the spectral decomposition for homoclinic classes, a result due to Abdenur and Crovisier.

Key words: Spectral Decomposition, hiperbolic action, end, stability.

Conteúdo

Introdução

A teoria clássica dos sistemas dinâmicos lida com o estudo de difeomorfismos ou fluxos sobre variedades compactas. Neste caso, se f é um difeomorfismo e X_t é um fluxo, a interpretação da iteração por f^n ou X_t quando $n, t > 0$ representa o futuro de algum experimento a ser observado. Interpretação análoga ocorre para o passado. Nestes casos o tempo então é parametrizado pelos números inteiros $\mathbb{Z}$, no caso de difeomorfismos, e pelos números reais $\mathbb{R}$ no caso de fluxos.

Naturalmente os matemáticos decidiram abstrair a noção de tempo usando um grupo geral $(G, \cdot)$. Daí nasceu a teoria de ações de grupos. Tal teoria gerou muitos frutos, uma vez que tem uma relação forte com a teoria de folheações e portanto desempenha um papel grande no estudo da topologia de variedades.

O presente trabalho busca apresentar alguns tópicos desta teoria e em especial com a teoria hiperbólica, introduzida pelos trabalhos de Smale, Anosov, entre outros.

Em primeiro lugar, a teoria de sistemas dinâmicos busca descrever o comportamento assintótico das órbitas geradas: $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no caso de difeomorfismos e $\{X_t(x)\}_{t\in\mathbb{R}}$ no caso de fluxos. É bem conhecido que a informação assintótica está contida no chamado conjunto não-errante da dinâmica.

A teoria hiperbólica busca entender a dinâmica dentro deste conjunto assumindo algum comportamento da derivada da dinâmica sobre este. No caso de difeomorfismos, dizemos que a dinâmica é hiperbólica se em cada ponto o espaço tangente se decompõe em duas direções $T_xM = E^s \oplus E^u$, uma das quais é contraída pela dinâmia e a outra expandida pela dinâmica. Em suma, existe uma constante $\lambda < 1$ tal que se $v \in E^s$ e $w \in E^u$ então

$$\|Df(x)v\| \leq \lambda\|v\| \quad e \quad \|Df^{-1}(x)w\| \leq \lambda\|w\|.$$

Os trabalhos de Smale [20], Anosov, Bowen [19] e outros, mostra que se além da hiperbolicidade as órbitas periódicas são densas no não-errante então este se decompõe de maneira disjunta por finitos conjuntos invariantes compactos e transitivos (isto é, com uma órbita densa). Além disso, a dinâmica restrita a cada peça é essencialmente equivalente a uma dinâmica simbólica, que é bem entendida.

No caso de fluxos, a decomposição é transversal as órbitas. Isto é, temos uma decomposição $T_xM = E^s \oplus \langle X(x)\rangle \oplus E^u$. Existem constantes $\lambda, K > 0$ tal que

- E^s é (K, λ)-contração, isto é para cada $x \in M$ e cada $t \geq 0$

$$\|DX_t(x)|_{E^s}\| \leq K^{-1}e^{-\lambda t},$$

- E^u é (K, λ)-expandida sobre a norma mínima, isto é para cada $x \in M$ e cada $t \geq 0$

$$m(DX_t(x)|_{E^s}) \geq Ke^{\lambda t}.$$

Onde $\langle X(x)\rangle$ denota o subespaço unidmiensional gerado pelo campo. A mesma decomposição é obtida no caso de fluxos.

O primeiro resultado desta dissertação versa sobre a generalização deste fato para ações de grupos gerais. Este resultado foi obtido por Pugh e Shub em [17]. Primeiramente, é necessário definir o conceito de uma ação hiperbólica ou Axioma A. Isto será feito no capítulo (4). Com isto temos o seguinte teorema:

0.0.1 Teorema (Decomposição Espectral Para Axioma A)**.** *Seja φ uma G-ação C^1 satisfazendo o Axioma A. Então, existe uma única decomposição*

$$\Omega_\varphi = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k.$$

Tal que os Ω_i são compactos, disjuntos, φ-invariantes e indecomponível. Em cada peça básica Ω_i, φ é topologicamente transitiva.

Na prova do teorema para difeormorfismo ou fluxos obtêm-se o fato de que cada peça da decomposição é uma classe homoclínica. Dada uma órbita periódica hiperbólica do tipo sela $O(p)$, temos o que chamamos de variedades estáveis e instáveis da órbita periódica:

$$W^s(O(p)) = \bigcup_i \{y \in M; d(f^n(y), f^{n+i}(p)) \to 0 \text{ quando } n \to \infty\},$$

$$W^u(O(p)) = \bigcup_i \{y \in M; d(f^n(y), f^{n+i}(p)) \to 0 \text{ quando } n \to -\infty\}.$$

A teoria mostra que estes conjuntos são variedades diferenciáveis e a classe homoclínica de p é $\mathcal{H}(p)$ composta pelo fecho das interseções transversais entre estas variedades.

Quando uma classe homoclínica é hiperbólica, um resultado devido a Bowen permite decompo-la em finitas peças disjuntas $\mathcal{H}(p) = \mathcal{H}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{H}_l$ que são permutadas pela dinâmica e tal que $f^l|_{\mathcal{H}_i}$ são topologicamente misturadoras, propriedade dinâmica muito mais forte que a transitividade.

O segundo resultado desta dissertação é uma decomposição similar a de Bowen, porém sem disjunção, de *qualquer* classe homoclínica, hiperbólica ou não. Este resultado é devido a Abdenur e Crovisier em [8]. Isto será feito na ultima seção do capítulo (5).

0.0.2 Teorema (Abdenur Crovisier)**.** *Seja $p \in \mathcal{O}$ e $\ell = \ell(\mathcal{O})$ é o período da classe homoclínica $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, $h(p) = \overline{W^u(p) \pitchfork W^s(p)}$. Então:*

1. *$\mathcal{H}(\mathcal{O})$ é a união dos iterados $f^k(h(p))$;*
2. *$h(p)$ é invariante por f^ℓ;*
3. *a restrição de f^ℓ a $h(p)$ é topologicamente mixing;*
4. *se $f^j(h(p)) \cap f^k(h(p))$ tem interior não vazio em $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, então $f^j(h(p)) = f^k(h(p))$.*

Um problema interessante é o de mostrar o mesmo resultado para ações de grupos. Mesmo no caso em que $G = \mathbb{Z}^k$. A principal dificuldade é que o número de peças é obtido através dos períodos das órbitas periódicas dentro da classe homoclínica. O que não tem um análogo óbvio no caso de ações.

Finalmente, Smale demonstrou que todo difeomorfismo hiperbólico (Axioma A), com uma condição extra de não-ciclos, é Ω-estável. Ou seja, existe uma vizinhança do difeomorfismo na topologia C^r tal que a dinâmica dentro do não-errante de qualquer difeomorfismo nesta vizinhança é essencialmente a mesma da dinâmica do difeomorfismo original.

Um resultado similar pode ser demonstrado para ações de grupos. Isto é feito no capítulo (6)

0.0.3 Teorema (**Ω-Estabilidade**). *Uma ação de grupos Axioma A sem ciclos é Ω-estável.*

Porém um resultado muito interessante devido a Pugh e Shub, mostra que essencialmente a presença de duas peças básicas distintas de uma ação hiperbólica Ω-estável implica uma estrutura extra do grupo que gera a ação.

Essencialmente, um fim de um grupo topológico é uma parte não compacta de um grupo. Por exemplo, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ tem dois fins, $\mathbb{R}^2$ tem um fim, o grupo livre tem um continuum de fins, etc. O resultado citado acima mostra que sobre tais hipóteses o grupo deve ter dois fins. Este é o último resultado principal desta dissertação. O grupo G é hiperbólico se têm dois fins invariantes.

0.0.4 Teorema. *Se φ é G-ação e satisfaz Axioma A em M então ou $\Omega_\varphi = M$ ou senão G é hiperbolico.*

Ressaltamos, porém, que para obter tal teorema, um estudo da teoria de fins de um grupo é dado nesta monografia. Em particular, necessitamos de resultados sobre compactificações de grupos topológicos obtidos por Freudenthal. Tal estudo tem interesse por si só na teoria algébrica e topológica de grupos e é feito no capítulo (3).

Capítulo 1

Teoria de Grupos

Nosso principal objetivo neste capítulo, é estabelecer notações e terminologias necessárias à compreensão do capítulo (2) e capítulo (3). Estudaremos aqui os conceitos básicos da teoria de grupos abstratos e na segunda seção grupos de Lie.

1.1 Definições Básicas

1.1.1 Definição (Operação)**.** *Dado um conjunto G. Uma operação (binária) sobre G é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \rho : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto \rho(x, y). \end{aligned}$$

Em geral, denotamos $\rho(x, y)$ por $x \cdot y$ ou simplesmente por xy. O ordem de aplicaçaõ da operação é representada por parenteses: $x(yz)$ significa $\rho(x, \rho(y, z))$.

Um **grupo** é um par $(G, \cdot)$, constituído por um conjunto G e uma operação binária $\rho : G \times G \to G$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- Associatividade: se x, y, z são elementos de G então $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- Elemento neutro: existe um elemento e em G tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- Inversos: para todo o elemento x de G existe um elemento x' em G tal que $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$.

Se, além disso, $x \cdot y = y \cdot x$ para todos os elementos x e y de G, o grupo $(G; \cdot)$ diz-se abeliano ou comutativo

1.1.2 Exemplo. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ *são grupos aditivos e se n é um inteiro positivo* $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ *é um grupo abeliano para a adição módulo n, $+_n$. Onde* $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Um **subgrupo** H de $(G, \cdot)$ é um subconjunto de G tal que $(H, \cdot)$ tem estrutura de grupo relativamente à operação que define o grupo G.

Se x é elemento de um grupo então

$$\langle x \rangle = \{x^m | m \in \mathbb{Z}\}.$$

é subgrupo de G. Ele é o subgrupo gerado por x. Se $G = \langle x \rangle$, para algum dos seus elementos, diz-se que G é **grupo cíclico**.

O **centro do grupo** G é o conjunto:

$$Z(G) = \{f \in G : \forall g \in G, f \cdot g = g \cdot f\}.$$

É fácil ver que o centro de um grupo é um subgrupo.
Um grupo G diz-se **finitamente gerado** se $G = \langle X \rangle$ para algum subconjunto finito X de G.

1.1.1 Homomorfismos e Isomorfismos

1.1.3 Definição. *Uma função $\varphi : G \to G'$ de um grupo noutro diz-se um homomorfismo se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todo o elemento x, y de G. Um isomorfismo é um homomorfismo bijectivo.*

Da definicão temos $\varphi(1_G) = 1_{G'}$ e $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$ para todo $x \in G$.

1.1.4 Exemplo. *Grupos cíclicos infinitos são isomorfos ao grupo aditivo dos inteiros.*

Seja S um conjunto arbitrário. Um **grupo livre sobre o conjunto** S (ou um grupo livre gerado por S) é um grupo G junto com a função $\phi : S \to G$ tal que a seguinte condição é satisfeita: Para qualquer grupo H e qualquer função $\psi : S \to H$, há um único homomorfismo $f : G \to H$ tal que $f \circ \phi(s) = \psi(s)$ para cada $s \in S$.

Classes Laterais se H é subgrupo de G, a relação binária $\sim$ definida por

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \; (modulo\, H)$$

é uma relação de equivalência. Nesse caso, as classes de equivalência são exactamente as classes laterais esquerdas definida por

$$aH = \{ax | x \in H\}.$$

Analogamente se $ab^{-1} \in H$, denotamos por Ha a classe lateral direita

$$Ha = \{xa | x \in H\}.$$

A união de todas classes laterais à esquerda, módulo H, é igual a G:

1.1.5 Observação. *Nos próximos resultados usaremos classes laterais à esquerda, porém os resultados são válidos para classes laterais à direita e a demonstração é análoga.*
Note que o conjunto das classes laterais à esquerda, módulo H, forma uma partição em G e os conjuntos desta partição são equipotentes entre si, ou seja, tem a mesma cardinalidade.

1.1.6 Notação. *Se H é subgrupo de G indicamos por $G/H = \{gH | g \in G\}$ o conjunto das classes laterais à esquerda (e por $H \setminus G$ classes laterais à direita), módulo H; em G.*

Um subgrupo H de um grupo G é dito **normal** de G se $gH = Hg$ para todo $g \in G$.

Seja H um subgrupo normal de G: Então G/H é fechado em relação à lei de multiplicação de subconjuntos de G: Mais precisamente é válida a relação $(aH)(bH) = (ab)H$. $(G/H; \cdot)$ é um grupo com a lei de multiplicação de subconjuntos de G. O grupo $(G/H; \cdot)$ é chamado grupo quociente (ou grupo fator) de G por H. O **homomorfismo canônico** de G sobre G/H é uma aplicação $\pi : G \to G/H$ definida por $\pi(g) = gH$

1.2 Grupos de Lie

1.2.1 Definição. *Um grupo de Lie é um grupo* $(G, \cdot)$ *que possui uma estrutura de variedade diferenciável* C^∞ *tal que a aplicação* $(x, y) \in G \times G \mapsto xy^{-1} \in G$*, é de classe* C^∞*.*

1.2.1 Topologia no grupo de Lie

Grupos Lie conexos e desconexos Um grupo Lie G é dito ser desconexo se for a união disjunta de dois conjuntos A e B, ambos não-vazios e ambos simultaneamente abertos e fechados. Ou seja, $G = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ com $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, onde A e B são abertos e fechados. Um grupo Lie G é dito ser conexo se não for desconexo.

Seja G um grupo de Lie. Dizemos que uma coleção de conjuntos abertos $\mathcal{A}_\lambda \in G$, $\lambda \in \mathcal{I}$, é uma **cobertura** de G se

$$G = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_\lambda.$$

Um grupo Lie é dito ser **compacto** se possuir a seguinte propriedade: para toda cobertura $\mathcal{A}_\lambda \in G$ com $\lambda \in \mathcal{I}$, de G existir um subcobertura finita $\mathcal{A}_{\lambda_1}, \cdots \mathcal{A}_{\lambda_n}$, de conjuntos abertos que também é uma cobertura de G:

$$G = \mathcal{A}_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \mathcal{A}_{\lambda_n}.$$

O grupo de Lie G é **localmente compacto** se cada ponto de G tem uma vizinhança compacta. Seja $U \subset G$ e $g \in G$ o conjunto U^n consiste de todos os produtos n-vezes de elementos de U isto é

$$U^n = \{u_1 u_2 \cdots u_n |\, u_i \in U\} \quad e \quad gU = \{gx |\, x \in U\}.$$

1.2.2 Definição (Convergência de seqüências)**.** *Seja* G *um grupo de Lie. dizemos que uma seqüência* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é convergente quando existir* $g \in G$ *tal que para toda vivinhança* $\mathcal{V} \subset G$ *de* g*, existir* $N_\mathcal{V} \in \mathbb{N}$ *satisfazendo*

$$n \geq N_\mathcal{V} \Rightarrow g_n \in \mathcal{V}.$$

1.2.3 Definição (Aplicação contínua)**.** *Sejam* G *e* G' *grupos de Lie e* $\tau : G \to G'$ *uma aplicação. Então, dizemos que* τ *é contínua no ponto* $g \in G$ *quando, dado uma vizinhança* V *de* $\tau(g)$ *em* G'*, então* $\tau^{-1}(V)$ *é vizinhança de* g*.*

1.2.2 Subgrupo de Lie

1.2.4 Definição. *Seja* G *um grupo de Lie e* $H \subset G$*. Dizemos que* H *é um subgrupo de Lie se*

(1) H *é um subgrupo abstrato de* G*,*

(2) H *é uma subvariedade imersa de* G*,*

(3) H *é um grupo de Lie com a operação de grupo dada em* (1) *e com a estrutura de variedade dada em* (2)*.*

A componente conexa da identidade do grupo é um subgrupo de Lie. De fato seja G um grupo de Lie. A componente conexa G_1 do elemento identidade 1 em G é o maior conjunto conexo de G que contem 1. Logo, é um conjunto fechado em G. Portanto, G_1 com a estrurura de grupo de G é um subgrupo fechado de G, e, portanto um subgrupo de Lie de G.

1.2.5 Proposição ([7] pag: 93). *Seja G um grupo de Lie conexo. Se U é uma vizinhança de 1 então*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Neste caso U gera G.

1.2.6 Proposição ([7] pag: 110). *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Então, H é um subgrupo de Lie.*

O quociente pode ser visto como variedade

1.2.7 Teorema ([7] pag:120). *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G, e seja G/H o conjunto $\{gH : g \in G\}$ de classes laterais esquerda modulo H. Se $\pi : G \to G/H$ denota a projeção natural $\pi(g) = gH$. Então G/H tem uma única estrutura de variedade com $dim(G/H) = dim(G) + dim(H)$ tal que*

(a) π é C^∞.

(b) Existe uma secão local suave de G/H em G; isto é, se $gH \in G/H$, existe uma vizinhança W de gH e um mapa C^∞ $\tau : W \to G$ tal que $\pi \circ \tau = id$.

Seja H um subgrupo normal fechado de um grupo G. Então o espaço quociente G/H das classes laterais à esquerda (direita) de H em G com a topologia quociente induzida pela projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é um espaço Hausdorff ou também chamado (grupo fator). Se G é localmente compacto, então G/H também é um grupo fator, localmente compacto.
Quando H é um subgrupo de Lie de G, implica que G/H é uma variedade C^∞ com $dim(G/H) = dim(G) - dim(H)$. Além disso, $\pi : G \to G/H$ é C^∞.

1.3 Geradores de um grupo de Lie

1.3.1 Definição. *O grupo de Lie G, é compactamente gerado se existe um subconjunto $K \subset G$ compacto tal que*

$$\langle K \rangle := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (K \cup K^{-1})^n = G$$

1.3.2 Definição. *Dizemos que $U \subset G$ é um gerador do grupo topologico G se:*

- *$U = U^{-1}$ é uma vizinhança compacta de $1 \in G$*
- *$Int(U)$ gera G*
- *$U^n \to G$ quando $n \to \infty$*

1.3.3 Observação. *Pode-se imaginar o grupo G como o crescimento de U, ou seja $U^n \subset U^{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$.*

Qualquer grupo compactamente gerado tem um gerador: De fato pela definição existe V vizinhança compacta da identidade gerando G. Então, seja W uma vizinhança compacta de V com $V \subset Int(W)$ e $U = W \cup W^{-1}$. Resulta que U é gerador de G.

1.3.4 Exemplo. *Seja $(\mathbb{R}, +)$ o grupo aditivo e $U = [-2, 2]$, então U é gerador de $\mathbb{R}$. De fato*

- $U = U^{-1} = [-2, 2]$ *é vizinhança compacta de* $1 \in \mathbb{R}$
- $Int(U) = (-2, 2)$ *gera* $\mathbb{R}$
- $U^n = [-2n, 2n]$ *e* $\lim_{n\to\infty} U^n = \mathbb{R}$. *Onde* $U^n = U + \cdots + U$ *(n-vezes)*

Capítulo 2

Ações de Grupos

2.0.5 Definição. *Uma ação de classe $C^r, r \geq 1$ de um grupo de Lie G numa variedade M é uma aplicação $\varphi : G \times M \to M$, de classe C^r satisfazendo às propriedades abaixo:*

(i) $\varphi(g \cdot f, x) = \varphi(g, \varphi(f, x))$ *para qualquer* $g, f \in G$ *e* $x \in M$

(ii) $\varphi(1, x) = x$ *para qualquer* $x \in M$*, onde* 1 *é a identidade de* G*.*

Seja $g \in G$, denotaremos por $\varphi(g) : M \to M$ à aplicação $\varphi(g)(x) = \varphi(g, x)$. Da definição segue-se que $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. Dai $\varphi(g) : M \to M$ é um difeomorfismo de classe $C^r, r \geq 1$ para todo $g \in G$. Sempre que seja conveniente. Escreveremos $\varphi(g, x)$ por $\varphi(g)(x)$.

2.0.6 Exemplo (Tempo discreto, ações de $G = \mathbb{Z}$ em M)**.** *Um difeomorfismo $f : M \to M$ gera uma $\mathbb{Z}$-ação $\varphi : \mathbb{Z} \times M \to M$, definido por:*

$$\varphi(n, p) = \begin{cases} p & se\ n = 0 \\ f^n(p) & se\ n > 0 \\ (f^n)^{-1}(p) & se\ n < 0 \end{cases}$$

onde $f^n(p) = f \circ \ldots \circ f(p)$ (n-vezes).

2.0.7 Exemplo (Tempo contínuo, ações de $G = \mathbb{R}$ em M)**.** *Seja X um campo de vetores em M de classe C^r $(r \geq 1)$. Como M é compacto para cada $p \in M$ existe uma única $\varphi(., p) : \mathbb{R} \to M$ definido por $\varphi(0, p) = p$ e $\frac{d}{dt}\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$. Vamos mostrar que $\varphi(s + t, p) = \varphi(s, \varphi(t, p))$ para $s, t \in \mathbb{R}$ e $p \in M$. De fato, sejam $\alpha(t) = \varphi(s + t, p)$ e $\beta(t) = \varphi(s, \varphi(t, p))$ temos $\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(s, p)$ por unicidade $\alpha(t) = \beta(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Então φ é uma ação do grupo aditivo $\mathbb{R}$ em M.*

(i) $\varphi(s + t, p) = \varphi(s, \varphi(t, p))$ *para qualquer* $s, t \in \mathbb{R}$ *e* $p \in M$

(ii) $\varphi(0, p) = p$ *para todo* $p \in M$*.*

A partir de agora, as hipóteses são permanentes: G é um grupo de Lie gerado por um conjunto compacto , M é uma variedade suave, compacta, sem bordo e conexa, as ações discutidas são pelo menos C^1. Quando G é discreto, compacto significa finito e, em seguida, estamos assumindo G é finitamente gerado.

2.0.8 Notação. *Seguindo a prática, muitas vezes pensamos de $g \in G$ como o difeomorfismo $\varphi(g) \in Dif^r(M)$.*

2.1 Órbita e grupo de isotropia

2.1.1 Definição. *A φ-órbitas de uma G-ação do ponto $p \in M$ é o subconjunto*

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}(p) = \{\varphi(g,p) = gp \in M : g \in G\}$$

O grupo de isotropia de $p \in M$ é o subgrupo

$$G_p = G_p(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g,p) = p\}$$

Fixado $x \in M$ a aplicação φ_x é continua definida por

$$\begin{aligned} \varphi_x : \quad G &\to M \\ g &\mapsto \varphi_x(g) = \varphi(g,x). \end{aligned}$$

Dai o conjunto G_p é um subgrupo fechado em G.
Consideremos em G a relação de equivalência $\sim$ tal que $g_1 \sim g_2$ se, e somente se, $g_1^{-1}.g_2 \in G_x$. Seja G/G_x o espaço quociente de G por $\sim$ e $\pi : G \to G/G_x$ a projeção que leva $g \in G$ na sua classe de equivalência $\pi(g) = \overline{g} = g \cdot G_x = \{g \cdot f : f \in G_x\}$. Assim $\pi^{-1}(\overline{g}) = g \cdot G_x$.

2.1.2 Teorema. *Seja $\varphi : G \times M \to M$ uma ação C^∞ de G em M. Então, as órbitas da ação são subvariedades imersas de M*

Demonstração. Seja $g \in G$ e $\varphi(g)$ o difeomorfismo C^∞. Seja $p \in M$. Consideremos a aplicação $\varphi_p : G \to M$ definida por $\varphi_p(g) = gp$, ou seja $\varphi_p(g) = \varphi|_{G\times p}$. Portanto, φ_p é uma aplicação C^∞ e $\varphi_p(G) := \mathcal{O}_p$. Pelo teorema (1.2.7), G/G_p tem estrutura de variedade C^∞. A aplicação φ_p é constante nas clases laterais de G/G_p. Note que φ_p induz uma aplicação bijetora

$$\begin{aligned} \lambda : \quad G/G_p &\to M \\ gG_p &\mapsto gp. \end{aligned}$$

A aplicação está bem definido pois se $gG_p = g_1G_p$ então $gp = g_1p$ ou seja, $\lambda(gG_p) = \lambda(g_1G_p)$.
Consideremos, agora, a seção local $\tau : G/G_p \to G$ de classe C^∞ dado pelo teorema (1.2.7) item (b). Segue que a composição $\lambda = \varphi \circ \tau : G/G_p \to \mathcal{O}_p$ é de classe C^∞. Dai o mapa linear $D\lambda_{\overline{1}} : T_{\overline{1}}(G/G_p) \to T_p\mathcal{O}_p$ é injetor onde $\overline{1} = 1G_p$. Portanto λ é uma imersão e assim $\mathcal{O}_p$ é uma subvariedade imersa de M. ■

Dado qualquer $x \in M$ é claro que G_x é um subgrupo de Lie de G. Dai G/G_x possui uma estrutura diferenciável e a órbita $\mathcal{O}_x$ de x é uma subvariedade imersa de M.

2.1.3 Definição. *Uma ação $\varphi : G \times M \to M$ é localmente livre se o grupo de isotropia G_x é discreto $\forall x \in M$.*

2.1.4 Observação. *Equivalentemente a ação φ é localmente livre se a aplicação*

$$\varphi_x : g \in G \mapsto gx \in M,$$

é uma imersão para cada $x \in M$ fixado. Além disso $dim(\mathcal{O}_x) = dim(G)$, $\forall x \in M$.

2.2 Noções Básicas da Dinâmica de Ações

Um sistema dinâmico é definido como uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável (de classe C^∞) M. As ações que consideraremos serão diferenciáveis de classe C^r ($r \geq 1$), isto é, homomorfismo de grupos $\varphi : G \to Dif(M)$ tais que $\varphi : G \times M \to M$, definida por $\varphi(x, g) = \varphi(x)(g)$, são de classe C^r de M, $Dif(M)$ representa o grupo de difeomorfismos de classe C^r de M, munido com a topologia C^r. Do ponto de vista aqui adotado, os casos mais estudados até agora são aqueles em que $G = \mathbb{R}$ ou $G = \mathbb{Z}$ e M é compacto e sem bordo.

► Um subconjunto $\Lambda \subset M$ é φ-invariante se $\varphi(g)(\Lambda) = \Lambda$, para cada $g \in G$.

2.2.1 Definição. *Um ponto $x \in M$ é não-errante para a ação φ se, e somente se para cada vizinhança U de x em M e cada subconjunto compacto $S \subset G$, existe $g \in G - S$ com $gU \cap U \neq \emptyset$. O conjunto de pontos não-errante de φ é denotado por Ω_φ.*

2.2.2 Proposição. *O conjunto não-errantes Ω_φ. é fechado e φ-invariante*

Demonstração. Por definicão, o complemento do conjunto não-errante é aberto; assim o Ω_φ é fechado.

Se $x \in \Omega_\varphi$, U uma vizinhança de $\varphi(g)(x)$ e S um subconjunto compacto de G. Então $\varphi(g^{-1})(U)$ é uma vizinhança de x.

Portanto, existe $\widehat{g} \in G \setminus g^{-1}Sg$ com $\widehat{g}\varphi(g^{-1})(U) \cap \varphi(g^{-1})(U) \neq \emptyset$; dai existem $a, b \in U$ tal que $\varphi(g\widehat{g}g^{-1}, a) = b$. Daí $g\widehat{g}g^{-1} \in G - S$ e $g\widehat{g}g^{-1}U \cap U \neq \emptyset$. Portanto $\varphi(g)(x) \in \Omega_\varphi$ para cada $g \in G$ logo $\varphi(g)(\Omega_\varphi) = \Omega_\varphi$, para cada $g \in G$ ■

2.2.3 Definição. *O bordo de uma órbita $\mathcal{O}(p)$, $p \in M$ é o conjunto dos pontos limite da seqüências $\varphi(g_n, p) = g_n p$ onde $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em G que não tem ponto de acumulação em G. Denotamos o bordo de uma órbita $\mathcal{O}(p)$ por $\partial\mathcal{O}(p)$*

Claramente $\partial\mathcal{O}(p) = \partial\mathcal{O}(q)$ se $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$.

2.2.4 Proposição. *O bordo de cada órbita esta contido em Ω_φ .*

Demonstração. Dado $x \in \partial\mathcal{O}(p)$, seja $\{g_n\}$ uma seqüência em G com $g_n p \to x$. Seja S um subconjunto compacto de G e U uma vizinhança de x em M. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_n p \in U$, $\forall n \geq k$.
Seja $x' = g_k p$, claramente $g_n g_k^{-1}(x') \to x$ quando $n \to \infty$. Já que g_n não tem ponto de acumulação em G, o mesmo ocorre com $\{g_n g_k^{-1}\}$. Assim, para n grande, $g = g_n g_k^{-1} \in G - S$ e $gx' \in U$, isto é $gU \cap U \neq \emptyset$. Portanto $x \in \Omega_\varphi$. ■

2.2.5 Definição. *Uma G-ação φ é* **topologicamente transitiva** *em $\Lambda \subset M$, se quaisquer dois subconjuntos abertos relativos U, V φ-invariantes e não vazios, de Λ tem intercessão.*

- Topologicamente Transitiva é equivalente à existência de um ponto $p \in \Lambda$ cuja órbita $\mathcal{O}_p$ é denso em Λ.
- Um subconjunto $X \subset M$ é **Indecomponível** se X não pode ser decomposto em dois subconjuntos compacto, disjuntos não vazios e φ-invariante.

2.2.6 Definição. *O* **saturado** *de um subconjunto $X \subset M$ pela ação φ é o fecho da união das órbitas que passam por X. Isto é $Sat(X) = \overline{\bigcup_{g\in G} gX}$.*

2.3 A topologia do espaço de Ações: Conjugação e Estabilidade

Como de costume, denotamos por $A^r(G,M)$ o conjunto de ações de classe $C^r, r \geq 1$ de G numa variedade compacta suave M. $A^r(G,M)$ tem uma topologia C^r (no qual $A^r(G,M)$ é um espaço de Baire) definida como segue. Cada ação de classe C^r é um certo tipo de mapa contínua $G \to Dif^r(M)$, assim podemos considerar $A^r(G,M) \subset C^0(G, Dif^r(M))$.

O último espaço tem a topologia natural e dota assim o espaço $A^r(G,M)$ com a topologia natural C^r por restrição (ou C^r-uniforme). Isto é seja $\varphi, \psi \in A^r(G,M)$ e $S \subset G$ compacto

$$\begin{aligned}
d_{C^0}(\varphi(g), \psi(g)) &= sup\{d(\varphi(g)(x), \psi(g)(x)) : x \in M\}. \\
d_{C^0}(\varphi, \psi) &= sup\{d_{C^0}(\varphi(g), \psi(g)) | \, g \in S\}. \\
d_{C^r}(\varphi, \psi) &= sup\{d_{C^0}(\varphi(g), \psi(g)), \cdots, d_{C^0}(D^r\varphi(g), D^r\psi(g)) | \, g \in S\}.
\end{aligned}$$

2.3.1 Definição. *Diz-se que uma sequência de G-ações $\varphi_n : G \times M \to M$ converge para uma G-ação $\varphi : G \times M \to M$. Se para cada subconjunto compacto $S \subset G$, $\varphi_n(g) \to \varphi(g)$ quando $n \to \infty$ no sentido C^r uniformemente sobre $g \in S$.*

Isto é $\varphi_n \to \varphi$ converge em $A^r(G,M)$ significa que: para qualquer $\epsilon > 0$ dado, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d_{C^r}(\varphi_n, \varphi) < \epsilon$.

$d_{C^0}(\varphi_n(g), \varphi(g)) \to 0$ quando $n \to \infty$ se, e só se $\varphi_n(g) \to \varphi(g)$ quando $n \to \infty$ no sentido C^r-uniforme sobre $g \in S$.

Em seguida discutimos quando duas ações são conjugados, e definir o que queremos dizer que uma ação é estruturalmente estável e Ω-etável. Vamos definir várias noções de estabilidade tentando imitar as noções correspondentes em caso de difeomorfismos, fluxos e folheações.

Muitas vezes, usamos ferramentas para colocar um determinado problema em um ambiente mais fácil de compreender. Uma dessas ferramentas em dinâmica são conjugados parametricamente e orbitalmente conjugados.

2.3.2 Definição. *As ações $\varphi, \psi \in A^r(G,M)$ são conjugados parametricamente se, e só se existe um homeomorfismo $h : M \to M$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi(g)"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "\psi(g)"] & M
\end{tikzcd}$$

comuta para cada $g \in G$. Ou seja $\psi(g) \equiv h \circ \varphi(g) \circ h^{-1}$.

No caso de fluxo quando $G = \mathbb{R}$, tal conjugação preserva o parâmetro $t \in \mathbb{R}$ das trajetórias, daí o nome. Isto é, se φ, ψ são $\mathbb{R}$-ações. Então $h\varphi(t)(p) = \psi(t)(h(p))$ para todo $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$.

2.3.3 Definição. *As ações $\varphi, \psi \in A^r(G,M)$ são orbitalmente conjugados se existe um homeomorfismo $h : M \to M$, que envia cada φ-órbita em uma ψ-órbita.*

As imagens das órbitas (ou retratos de fase) de ψ e φ são os mesmos, ou seja $\{\mathcal{O}_\varphi(x)\}_{x\in M} = \{\mathcal{O}_\psi(x)\}_{x\in M}$ embora as parametrizações das órbitas correspondentes podem ser diferentes. Claramente conjugados parametricamente implica orbitalmente conjugados, mas é demasiado restritiva.

2.3.4 Definição. *Dizemos que uma ação $\varphi \in A^r(G,M)$ é C^r-estruturalmente estável, se existir um C^r-vizinhança de φ de tal forma que qualquer ação nessa vizinhança é orbitalmente conjugado com φ.*

2.3.5 Definição. *Uma ação $\varphi \in A^r(G,M)$ é Ω-estável, se para cada $\psi \in A^r(G,M)$ suficientemente perto de φ, temos as restrições $\varphi|_{\Omega_\varphi}$ e $\psi|_{\Omega_\psi}$ são orbitalmente conjugados.*

As restrições $\varphi|_{\Omega_\varphi}$ e $\psi|_{\Omega_\psi}$ são orbitalmente conjugados. Se existe um homeomorfismo $h : \Omega_\varphi \to \Omega_\psi$, que leva φ-órbita em ψ-órbita.

Nós escrevemos $\varphi \sim \psi$ para denotar as ações $\varphi, \psi \in A^r(G,M)$ são orbitalmente conjugados. A relação $\sim$ define uma relação de equivalência de orbitalmente conjugados está bem adaptado ao sistemas dinâmicos.

Capítulo 3

Fins de um Grupo

Este capítulo destina-se a estabelecer conceitos e definições da teoria de fins, que são fatos necessários à compreensão de estabilidade para ações.

De início, enunciamos noções básicas da teoria de fins num grupo de Lie G. Em seguida, definimos uma nova topologia em G diferente da topologia natural de G, para definir a classe fim.

Na seção seguinte é dedicada ao teorema compactificação de Freudenthal e o lema principal de fins, que utilizaremos com freqüência, na prova dos quatro teoremas de fins.

Terminamos o capítulo definindo grupo hiperbólico e estabelecendo o resultado que diz-se há uma ordem em um grupo hiperbólico que o torna parecido com $\mathbb{Z}$. Em [6] Hans Freudenthal define o conceito de fins para um grupo ou espaço topologico. Veja também [4].

3.1 Idéias e Exemplos

3.1.1 Exemplo. *A noção de um fim de um grupo topológico foi introduzido por Hans Freudenthal*

1. *Na reta $\mathbb{R}$ há dois direções levando a ∞, quando $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$, isto é $\mathbb{R}$ tem dois fins. A prova será feito na seguinte seção.*

2. *Em $\mathbb{R}^2$ existe apenas uma direção que leva a ∞, isto é todas as direções são equivalentes e $\mathbb{R}^2$ só tem um fim. O mesmo ocorre com $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

3. *O cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ tem dois fins.*

4. *Um grupo compacto não tem fins, porque não há nenhuma maneira de ir em direção a ∞.*

5. *O grupo livre com dois geradores tem $\mathfrak{c}$ fins.*

6. *Acontece que os grupos têm exatamente 0, 1, 2 ou $\mathfrak{c}$ fins [6]. Este é o primeiro resultado da teoria de fins, ele responde quantos fins pode ter um grupo.*

3.1.2 Notação. $\mathfrak{c}$ *denota o número continuum de fins.*

Em [6], Freudenthal desenvolve principalmente a teoria de fins para grupos discretos finitamente gerados, enquanto nós estamos interessados em grupos de Lie gerais. Em [13] Hopf desenvolve teoria de fins para seus grupos, mas geralmente assume que os grupos são conexos.

Apresentamos a teoria fins para grupos topológicos compactamente gerados uma vez que queremos estudar dinâmicas tanto a tempo discreto quanto a tempo contínuo.

3.1.3 Observação. *Observamos que na teoria de fins original de Freudenthal, os fins são obtidos por multiplicação a direita. Porém, como é usual na notação para ações de grupos a multiplicação que usamos é a esquerda. Mesmo assim isto não interfere uma vez que as duas teorias tanto a direita quanto a esquerda são equivalentes.*

Primeiro, é necessário fazer alguma topologia em G, apesar de que G pode ser discreto.

3.2 Envoltórias e Bordo

3.2.1 Definição. *Seja S um subconjunto de G e U gerador de G então:*

(i) *A U-envoltoria de S é $\mathscr{H}_U(S) = \{x \in G : x = us$ para algum $u \in U, s \in S\}$. Assim $\mathscr{H}_U S = US$.*

(ii) *U-bordo de S é $\partial_U(S) = \mathscr{H}_U(S) \cap \mathscr{H}_U(S^c)$ onde $S^c = G - S$.*

(iii) *O conjunto S é U-limitado se, e só se, $S \subset U^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Embora estas noções de **envoltoria** e **bordo** é uma reminiscência de noções topológicas correspondentes, eles não surgem de alguma topologia de G.

3.2.2 Notação. *$\partial_U(S)$ é o U-bordo esquerda ou simplesmente U-bordo.*

3.2.3 Proposição. *Seja G gerado compactamente com geradores U, U'. Um conjunto S é U-limitado se, e só se U'-limitado também. $\partial_U(S)$ é limitada se, e só se $\partial_{U'}(S)$ é limitado. Se S é fechado então $\mathscr{H}_U(S)$ é fechado. Finalmente um conjunto é fechado e limitado se, e só se é compacto.*

Demonstração. Os conjuntos $(Int(U))^n$ são abertos, cresce monotonamente com n, e forma uma cobertura de G. Como U' é compacto, $U' \subset (Int(U))^n \subset U^n$ para algum n. Simetricamente, $U \subset (U')^{n'}$ para algum n'. Isso prova as duas primeiras afirmações de (3.2.3).
A U-envoltoria de S é apenas o produto US. Como U é compacto, US é fechado sempre que S é fechado (um fato geral). Seja S um conjunto limitado fechado em G. Sendo limitado, S está contido em algum U^n. Como U^n é compacto e S é um subconjunto fechado U^n, S é compacto. Seja S um subconjunto compacto de G. Como $\{(Int(U))^n\}$ forma uma cobertura aberta ascendente de G, $S \subset (Int(U))^n \subset U^n$ para algum n. Portanto, S é limitado. Qualquer conjunto compacto é fechado. Isso completa a prova de (3.2.3). ∎

3.2.4 Definição. *Um conjunto S é U-conexo se, e só se S não pode ser dividido, $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1, S_2 são não vazio e $S_1 \cap \mathscr{H}_U(S_2) = \emptyset = S_2 \cap \mathscr{H}_U(S_1)$. É fácil ver que S é U-conexo se, e só se cada par de seus pontos g, g' pode ser unidos por uma cadeia em S, g, $u_1 g$, $u_1 u_2 g$,. . . ,$u_1 ... u_k g = g'$ onde u_1, . . . , $u_k \in U$.*

Em particular, o grupo G é U-conexo. De fato seja $g, g' \in G$, logo $g'g^{-1} = u_1 \cdots u_k \in U^k$ para algum k, portanto g, $u_1 g$, $u_1 u_2 g$,. . . ,$u_1 ... u_k g = g'$ é uma cadeia em G. Assim G é U-conexo.

3.2.5 Definição. *Uma vizinhança do infinito em G é um conjunto ilimitado $Q \subset G$ tal que $\partial_U Q$ limitado.*

3.3 Fins

Intuitivamente, um fim é uma forma de ir ao infinito, ou uma noção sobre direções que levam a ∞. Quando o grupo topologico é conexo as fins são, grosso modo, as componentes conexos do infinito do grupo.

3.3.1 Definição. *Se G é um grupo compactamente gerado então um fim de G é uma classe $\mathfrak{e}$ de subconjuntos $Q \subset G$ tal que*

(a) cada $Q \in \mathfrak{e}$ é uma vizinhança do infinito,

(b) se Q, $Q' \in \mathfrak{e}$ então $Q \cap Q' \in \mathfrak{e}$,

(c) $\mathfrak{e}$ é maximal respeitando $(a), (b)$.

3.3.2 Notação. *O conjunto de fins de G é denotado por $\mathcal{E}_G$.*

Pela proposição (3.2.3), não importa qual gerador U é usado na definição. Se G é compacto, então $(a), (b)$ são incompatíveis e G não tem fins. Inversamente, qualquer G não compacto tem, pelo menos, um fim:

3.3.3 Exemplo. *Seja $\mathfrak{e}_0$ composto por todos os complementos de conjuntos limitados. Pelo Lema de Zorn (6.1.1), estender $\mathfrak{e}_0$, tanto quanto possível, sem contradizer $(a), (b)$. O resultado é um fim $\mathfrak{e}$ de G. Com efeito*

$$\Gamma = \{\mathfrak{e} : \mathfrak{e} \text{ é uma classe de subconjuntos que satisfaz } (a), (b) \text{ tal que } \mathfrak{e}_0 \subset \mathfrak{e}\}.$$

Temos que $\Gamma \neq \emptyset$ já que $\mathfrak{e}_0 \in \Gamma$. Sejam $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \in \Gamma$ defino

$$\mathfrak{e}_1 \preceq \mathfrak{e}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{e}_2 \subset \mathfrak{e}_1.$$

É facil ver que $(\Gamma, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Seja $\mathcal{C} \subset \Gamma$ um conjunto totalmente ordenado, provaremos que $\mathcal{C}$ admite um limite superior. Como $\mathfrak{e}_0 \subset \mathfrak{e}$ para cada $\mathfrak{e} \in \Gamma$, então $\mathfrak{e}' = \bigcap_{\mathfrak{e} \in \Gamma} \mathfrak{e} \neq \emptyset$ daí $\mathfrak{e}' \in \Gamma$ e $\mathfrak{e} \preceq \mathfrak{e}'$ para cada $\mathfrak{e} \in \mathcal{C}$, logo $\mathfrak{e}'$ é um limite superior de $\mathcal{C}$. Pelo Lema de Zorn, Γ admite elemento maximal $\mathfrak{e}$ que é um fim de G.

Note que $\mathfrak{e}_0$ esta contida em cada fim por (c) porém se é um fim de G, então $\mathfrak{e}_0$ é o único fim de G.

3.3.4 Observação.

1). Seja $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ e $P \subset G$ tal que $P \cap Q$ é uma vizinhança do infinito para todo $Q \in \mathfrak{e}$, então (c) implica $P \in \mathfrak{e}$. Para $\tilde{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e} \cup \{P \cap Q\}_{Q \in \mathfrak{e}}$ satisfaça os item $(a), (b)$, e $\tilde{\mathfrak{e}} \supset \mathfrak{e}$.

2). Da mesma forma, se $P\Delta Q_0 = (P - Q_0) \cup (Q_0 - P))$ é limitado para algum $Q_0 \in \mathfrak{e}$ então $P \in \mathfrak{e}$. De fato, se $Q \in \mathfrak{e}$ então.

$$\partial_U(P \cap Q) \subset \mathscr{H}_U(Q\Delta Q_0) \cup \partial_U(Q \cap Q_0)$$

o qual é limitado, e assim $\tilde{\mathfrak{e}} = \{P \cap Q\}_{Q\in\mathfrak{e}}$ satisfaz $(a), (b)$, e $\tilde{\mathfrak{e}} \subseteq \mathfrak{e}$.

3). Em particular a U-envoltoria de qualquer $Q \in \mathfrak{e}$ temos $\mathscr{H}_U Q - Q \subset \partial_U Q$. Logo $\mathscr{H}_U Q \in \mathfrak{e}$.

3.4 Compactificação para grupos de Lie

Seja G um grupo localmente compacto e compactamente gerado, se U é um gerador de G, então $G = \cup_{n\geq 1} U^n$ e $U^n \subset U^{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como o grupo é localmente compacto temos que $U^n \subset Int(U^{n+1})$.

Como as ações que estamos interessados são por grupos de Lie temos que o grupo é topológico. Neste caso, adicionaremos uma hipótese extra na definição de fins. Isto é iremos pedir que a as vizinhanças do infinito que geram o fim sejam conexas. Porém é possível demonstrar fatos análogos no caso de grupos gerais.

Um fim $\mathfrak{e}$, é uma familia decrescente $\{C_n\}_{n\geq 1}$ de subespaços tal que C_n é uma componente conexa ilimitado de $G \setminus U^n$.
Se $\mathfrak{e} = \{C_n\}_{n\geq 1}$ é um fim e $V \subset G$ é um aberto, $\mathfrak{e} < V$ significará que $C_n \subset V$ para algum $n \geq 1$.

A compactificação de Freudenthal de G é definido como $\overline{G}$ dotado com a topologia gerada por

$$\tau_{\overline{G}} = \{V \cup \{\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G | \, \mathfrak{e} < V\} : V \subset G \, aberto\}.$$

Assim $\tau_{\overline{G}}$ é a topologia que gera $\overline{G}$. Se $\overline{Q}$ é uma vizinhança de algum fim, então $\overline{Q} \cap G$ é um aberto de G, porque $G \cap \mathcal{E}_G = \emptyset$.
De uma forma natural, as fins de G podem ser unido a G, formando um espaço compacto $\overline{G} := G \cup \mathcal{E}_G$. De facto, o conjunto de fins de qualquer espaço X é o máximal, conjunto totalmente disconexo compactificado X [6].
Freudenthal atinge um universal compactificação $\overline{G}$ de G por unir a G seus pontos fins. Mais precisamente:

3.4.1 Teorema (Freudenthal [6]). *Existe um espaço compacto Hausdorff $\overline{G}$ e um mapa $i : G \to \overline{G}$ tal que*

(i) G é homeomorficamente imerso como um subconjunto aberto denso de $\overline{G}$;

(ii) $\overline{G} - G$ é totalmente disconexo;

(iii) cada mapa $j : G \to \widehat{G}$ que satisfaça os items (i) e (ii), então $\widehat{G} = \overline{G}$. unicamente determinado

O espaço $\overline{G}$ é chamado a compactificação de Freudenthal de G e o complemento de G em $\overline{G}$ é o espaço de fins de G, denotado por $\mathcal{E}_G$. Tanto $\overline{G}$ e $\mathcal{E}_G$, são unicamente determinado, até homeomorfismo, por a propriedade universal (3.4.1.*iii*). Por exemplo a reta real $\mathbb{R}$ tem dois fins. Assim, a compactificação de Freudenthal do $\mathbb{R}$ é homeomorfo ao intervalo $[-1, 1]$.
As seguintes definições são de seqüencias convergêntes em $\overline{G}$.

3.4.2 Definição. *Uma seqüência a_n em G converge para um fim $\mathfrak{e}$ se, e só se para cada $Q \in \mathfrak{e}$, $a_n \in Q$ para todo n grande.*

3.4.3 Definição. *Uma seqüência $\mathfrak{e}_n$, de G converge para um fim $\mathfrak{e}$ se, e só se para cada $Q \in \mathfrak{e}$ e para todo n grande existe $Q_n \in \mathfrak{e}_n$ com $Q_n \subset Q$.*

Produtos entre fins não estão definidos, mas os produtos $a\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{e}a$ para $a \in G$ fazer sentido:

$$a\mathfrak{e} = \{aQ\}_{Q\in\mathfrak{e}} \qquad \mathfrak{e}a = \{Qa\}_{Q\in\mathfrak{e}}.$$

Primeiro note que aQ é ilimitado. Se $a \in U^m$ então $Ua \subset U^{m+1}$ logo $\partial_U(aQ) \subset \partial_{U^{m+1}}(Q)$ é limitada. Também Qa é ilimitado e $\partial_U(Qa) = (\partial_U Q)a$. Claramente $\{aQ\}_{Q\in\mathfrak{e}}$ e $\{Qa\}_{Q\in\mathfrak{e}}$, satisfazem (b), (c), de modo que $a\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}a$ são fins .

3.4.4 Notação. *Seja $a \in G$ e $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$. Denotamos por $a\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{e}$ se $a\mathfrak{e} \subset \mathfrak{e}$.*

3.4.5 Lema. *Se G é um grupo compactamente gerado e $\mathcal{E}_G$ o conjunto de fins.*

(i) Seja $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$, então $a\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{e}$ para cada $a \in G$.

(ii) Se $x_n \to \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ com $x_n \in G$, então $ax_n \to \mathfrak{e}$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. (i) Basta mostrar que $(aQ)\Delta Q$ é limitado, com $Q \in \mathfrak{e}$. Seja $a \in U^m$, se $x \in Q - aQ$, então $(aQ)^c \subset aQ^c$ e $Q - aQ \subset \partial_{U^m}(Q)$. Assim $a^{-1}x \in \mathscr{H}_{U^m}(Q^c)$, $1x \in \mathscr{H}_{U^m}(Q)$ implica $x \in \partial_{U^m}(Q)$. Portanto $(aQ)\Delta Q \subset \partial_{U^m}(Q))$, é limitada e pela obsevação (3.3.4(2)) $aQ \in \mathfrak{e}$.

(ii) Se $a \in G$ é fixo e $x_n \to \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ então $ax_n \to \mathfrak{e}$ quando $n \to \infty$ já que $a\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{e}$. Então (ax_n), (x_n) têm os mesmos pontos limite em $\mathcal{E}_G$.

■

Cada $a \in G$ define um homeomorfismo $r_a : \overline{G} \to \overline{G}$ definido por $x \mapsto xa$ cuja inversa é $r_{a^{-1}}$. Alguns fins podem se mover sub a ação de r_a. Seja

$$\mathfrak{e}^{-1} := \{Q^{-1}\}_{Q\in\mathfrak{e}} \qquad Q^{-1} := \{q^{-1}\}_{q\in Q}$$

A menos que G é Abeliano, $\mathfrak{e}^{-1}$ não é um fim esquerda, este é um fim direita. Porque se $Q \in \mathfrak{e}$ então,

$$(\partial_U Q)^{-1} = (\mathscr{H}_U Q)^{-1} \cap (\mathscr{H}_U(Q^c))^{-1} = (UQ)^{-1} \cap (U(Q^c)^{-1})$$

$$= (Q^{-1}U^{-1}) \cap (Q^{-1})^c U^{-1} = \partial^r_U(Q^{-1})$$

onde ∂^r_U denota o bordo direita (convenção de Freudenthal). Assim inversão induz uma bijeção natural $\mathcal{E}^l_G \leftrightarrow \mathcal{E}^r_G$ onde $\mathcal{E}^l_G := \mathcal{E}_G$.
A proposição seguinte diz que U-conexidade não é séria restrição, especialmente para as fins.

3.4.6 Proposição. *(i) Qualquer $S \subset G$ com $\partial_U S$ limitada tem apenas um número finito de U-componentes.*

(ii) Qualquer $Q \in \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ contém um único máximal, U-conexo $Q' \in \mathfrak{e}$.

Demonstração. (i) Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo, o conjunto $\partial_{U^k} S$ tem apenas um número finito de componentes $K_1, \cdots, K_m$, porque $\partial_{U^k} S$ está contido em um conjunto compacto e pontos em distintos U-componentes de um conjunto claramente não pode acumular-se. Seja $S_1, \cdots, S_m$ o maior U-conexo subconjuntos de S contendo K_1,..., K_m. Se $\partial_{U^k} S = \emptyset$ então $S = \emptyset$ ou $S = G$, porque G é U-conexo logo (3.4.6 i) é verdade. Assim, podemos supor $\partial_{U^k} S \neq \emptyset$. Escolha qualquer $s \in S$ e $s' \in \partial_U S$. Como G é U-conexo Considere uma U-cadeia desde s a s'. Por definição, de $\partial_{U^k} S$, temos $s \in \partial_{U^k} S$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, cada $s \in S$ pertence a $S_1 \cup \cdots \cup S_m$, isto é (3.4.6(i)) é provada

(ii) Seja $Q \in \mathfrak{e}$ e seja $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$ as distintas componentes U-conexas de Q resultantes de (i). Por maximalidade, $\mathscr{H}_U(Q_i) \cap Q_j$ para cada $i \neq j$. Assim $\partial_U Q_i \subset \partial_U Q$ e é limitado. Afirmamos para algum $i = 1, \cdots, n$ $Q_i \in \mathfrak{e}$. De fato Q é ilimitado então algum Q_i é ilimitado, logo Q_i é uma vizinhança do infinito, como $\partial_U(P \cap Q_i) \subset \partial_U P \cap \partial_U Q_i$ para cada $P \in \mathfrak{e}$. Então pela observação (3.3.4(1)) $Q_i \in \mathfrak{e}$. Ora apenas um Q_i pode estar em $\mathfrak{e}$ já que os Q_i são disjuntos. Isso completa a prova de (3.4.6(ii)). ∎

3.4.1 Lema Principal sobre Fins

3.4.7 Lema. *Seja $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ fins de G e $a_n \to \mathfrak{e}_1$ com $a_n \in G$. Então ou a_n^{-1} se acumula no $\mathfrak{e}_2$ ou senão $\mathfrak{e}_2 a_n \to \mathfrak{e}_1$.*

Demonstração. Suponha que a_n^{-1} não se acumula no $\mathfrak{c}_2$. Então $\mathfrak{c}_2$ tem uma vizinhaça compacta $\overline{Q}_2$ em $\overline{G}$ tal que a_n^{-1} não se acumula em nenhum ponto de $\overline{Q}_2$. Seja $\overline{Q}_1$ qualquer vizinhança de $\mathfrak{c}_1$ e $Q_i = \overline{Q}_i \cap G$, i=1,2. Como $\partial_U(Q_2)$ é limitado

$$\partial_U(Q_2)a_n = \partial_U(Q_2 a_n) \subset Q_1 \text{ para } n \text{ grande.}$$

Seja S um conjunto limitado, pelo lema (3.4.5), $s\mathfrak{e}_1 \equiv e_1$ para cada $s \in S$. Então qualquer conjunto limitado S é enviado dentro de Q_1 por $S \mapsto Sa_n$, para n grande.

Como $\partial_U(Q_1) = \partial_U(Q_1^c)$ é limitado, Q_1^c tem apenas um número finito de U-componentes conexas por (3.4.6). Suponha $Q_2 a_n \nsubseteq Q_1$ para um número infinito de valores de n. Para cada um desses n, $Q_2 a_n$ contém todo U-componentes conexas de Q_1^c porque U-cadeias em Q_1^c não estão em $\partial_U(Q_2 a_n) \subset Q_1$. Como Q_1^c tem apenas um número finito muitos deles, obtém-se contida em um $Q_2 a_n$, infinitas vezes, e podemos escolher um x fixo

$$x \in Q_1^c \cap Q_2 a_n \text{ infinitas vezes.}$$

Em outras palavras, $xa_n^{-1} \in Q_2$, e assim alguns pontos de acumulação de a_n^{-1} estão em $\overline{Q}_2$. Mas xa_n^{-1} e a_n^{-1} têm os mesmos pontos de acumulação. Isto contradiz a escolha de $\overline{Q}_2$. Portanto $\overline{Q}_2 a_n \subset Q_1$ para todo n grande ,isto é $\mathfrak{c}_2 a_n \to \mathfrak{c}_1$. Isso completa a prova do lema. ∎

No seguente exemplo provaremos que $\mathbb{R}$ têm dois fins, usando o lema (3.4.7).

3.4.8 Exemplo. *O grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ é compactamente gerado, defino $\mathfrak{e}_1 = \{(n, \infty) : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathfrak{e}_2 = \{(-\infty, -n) : n \in \mathbb{N}\}$. Logo $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ satisfaz $(a), (b)$ da definição. Pelo Lema de Zorn's, estender $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$, sem contradizer $(a), (b)$. O resultado são as fins $\tilde{\mathfrak{e}}_1, \tilde{\mathfrak{e}}_2$ de $\mathbb{R}$. Isto é $\{\tilde{\mathfrak{e}}_1, \tilde{\mathfrak{e}}_2\} \subset \mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ temos $\mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2 = \emptyset$, então $\tilde{\mathfrak{e}}_1 \neq \tilde{\mathfrak{e}}_2$. Afirmativa $\mathbb{R}$ tem dois fins. Suponha que não te dois fins, então existe $\mathfrak{e}_3$ com $\tilde{\mathfrak{e}}_1 \neq \mathfrak{e}_3$, $\tilde{\mathfrak{e}}_2 \neq \mathfrak{e}_3$. Pelo lema (3.4.7) seja $\{a_n = n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $a_n \to \tilde{\mathfrak{e}}_1$, então a_n^{-1} se acumula em $\mathfrak{e}_3$ ou $\mathfrak{e}_3 a_n \to \tilde{\mathfrak{e}}_1$ como $a_n^{-1} \to \tilde{\mathfrak{e}}_2$ temos que $\mathfrak{e}_3 a_n \to \tilde{\mathfrak{e}}_1$, portanto $\mathfrak{e}_3 = \tilde{\mathfrak{e}}_1$ já que $\mathfrak{e}_3 n = \mathfrak{e}_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ uma contradição.*

- *Se $n > 1$, então o espaço Euclideano tem só um fim. Este é porque $\mathbb{R}^n - K$ tem só uma componente ilimitada para qualquer conjunto compacto K.*

Os quatro teoremas seguintes são o que nós exigimos da teoria de fins. Eles respondem as perguntas: Quantos fins pode ter um grupo.? Como são as fins de grupos, subgrupos e grupos de fatores relacionados? Como podemos reconhecer um grupo com um-fins? Como que um grupo de dois fins se assemelham quase a $\mathbb{Z}$?

3.4.9 Teorema. *Se G é um grupo localmente compacto gerado compactamente então G tem 0,1, 2, ou $\mathfrak{c}$ fins*

3.4.10 Teorema. *Seja G um grupo localmente compacto compactamente gerado e H um subgrupo normal fechado compactamente gerado de G.*

(i) *Se H é compacto então existe uma bijeção natural entre $\mathcal{E}_G$ e $\mathcal{E}_{G/H}$.*

(ii) *Se G/H é limitado, então existe uma bijeção natural entre $\mathcal{E}_G$ e $\mathcal{E}_H$*

3.4.11 Exemplo. *$\mathbb{Z}$ é um subgrupo normal fechado compactamente gerado de $\mathbb{R}$, o espaço $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é limitado, já que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv [0, 1]$. Pelo teorema (3.4.10), então existe uma bijeção natural entre $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{E}_{\mathbb{Z}}$. Portanto $\mathbb{Z}$ tem dois fins.*

3.4.12 Teorema. *Seja G um grupo localmente compacto compactamente gerado e H um subgrupo normal, fechado compactamente gerado de G. Se H e G/H são ilimitados então G é um fim.*

3.4.13 Teorema. *Qualquer grupo de dois fins G com fins $\mathfrak{e}_-$, $\mathfrak{e}_+$ contém um subgrupo cíclico fechado, infinito $H = \{h^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $h^n \to \mathfrak{e}_\pm$ quando $n \to \pm\infty$ e G/H, $H \setminus G$ são limitados.*

3.4.14 Observação. *Quando H não é normal G/H não é um grupo, mas se G/H é limitado queremos dizer que cada classe gH estam contido em $\pi_l U^m$ para algum m fixo. O mapa π_l é a projeção $G \to G/H$. Similarmente para $H \setminus G = \{Hg : g \in G\}$. Observe que G/H é limitado se, e só se $H \setminus G$ é limitado. Para inversão em G induz um homeomorfismo $H \setminus G \leftrightarrow G/H$ que as troca $\pi_r(U)^m$ e $\pi_l(U)^m$. Usando idéias como esta, versões de (4.4, 5) pode ser provado quando H não é normal. Por exemplo (3.4.10 i) torna-se $\mathcal{E}_G \leftrightarrow \mathcal{E}_{H\setminus G}$.*

Aqui aplicamos o Lema principal de fins (3.4.7) para provar o teorema (3.4.9), que responde à pergunta, quantos fins pode ter um grupo.

Demostração do Teorema (3.4.9). Se G tem pelo menos três fins. Temos de mostrar que têm $\mathfrak{c}$ fins, de modo que basta provar que o conjunto $\mathcal{E}_G$ de fins é perfeito.

Escolha qualquer fins $\mathfrak{e}$ e uma sequência $a_n \to \mathfrak{e}$, $a_n \in G$. A sequência a_n^{-1} é ilimitado e assim podemos assumir a_n^{-1} converge algum fim de G, isto é $a_n^{-1} \to \mathfrak{e}' \in \mathcal{E}_G$. Escolha dois fins do G, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$. distintos de $\mathfrak{e}'$ uns dos outros. Por Lema (3.4.7), $\mathfrak{e}''a_n \to \mathfrak{e}$ e $\mathfrak{e}'''a_n \to \mathfrak{e}$, porque a_n^{-1} não se acumula em $\mathfrak{e}''$ ou $\mathfrak{e}'''$. Disto se segue que $\mathfrak{e}$ é um ponto de acumulação de outros fins ou de $\mathfrak{e}''a_n$, $\mathfrak{e}'''a_n$, ou de ambos. (Note-se que a multiplicação direito por um elemento $a \in G$ dá uma bijeção de $\mathcal{E}_G$ em si, assim $\mathfrak{e}''a_n$ e $\mathfrak{e}'''a_n$ não pode ser ambos iguais a $\mathfrak{e}$. Como $\mathcal{E}_G$ é compacto pela construção, isso mostra que ele é perfeito e (3.4.9) está provada. ■

Seja H um subgrupo normal de G e

$$\begin{aligned} \pi : \quad G &\to G/H \\ g &\mapsto \pi(g) = gH \end{aligned}$$

é a projeção canônica continua. Seja $Q \subset G$, $\pi(Q) = \{y \in G/H : y = \pi(q), q \in Q\}$ e a imagem inversa de $T \subset G/H$ pela função π é $\pi^{-1}(T) = \{g \in G : \pi(g) \in T\}$ denotemos $\pi Q := \pi(Q)$ e $\pi^{-1}T := \pi^{-1}(T)$.

Demostração de (3.4.10i). Pela hipótese H é um subgrupo normal, compacto de G e

$$\begin{aligned} \pi : \quad G &\to G/H \\ g &\mapsto \pi(g) = gH \end{aligned}$$

é a projeção canônica continua. Define como acima

$$\begin{aligned} \pi\mathfrak{e} \quad &:= \{\pi Q\}_{Q\in\mathfrak{e}} \quad \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G \\ \pi^{-1}\overline{\mathfrak{e}} \quad &:= \{\pi^{-1}T\}_{T\in\overline{\mathfrak{e}}} \quad \overline{\mathfrak{e}} \in \mathcal{E}_{G/H}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Afirmamos que $\pi\mathfrak{e}$, $\pi^{-1}\overline{\mathfrak{e}}$ estão em um único fim de G/H, G, e eles são $\pi_\#\mathfrak{e}$, $\pi_\#^{-1}\overline{\mathfrak{e}}$ respectivamente. Onde os mapas são definido por

$$\begin{aligned} \pi_\#^{-1} : \mathcal{E}_{G/H} &\to \mathcal{E}_G \\ \overline{\mathfrak{e}} &\mapsto \pi^{-1}\overline{\mathfrak{e}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_\# : \mathcal{E}_G &\to \mathcal{E}_{G/H} \\ \mathfrak{e} &\mapsto \pi\mathfrak{e} \end{aligned}$$

são inversas umas das outras. Isso não é surpreendente uma vez que o efeito de H é a engrossar as coisas por uma quantidade limitada e isso não afeta as fins.

Como π é contínua, as π-imagem de cada conjunto compacto é compacto. Como H é compacto o π^{-1}-imagem de cada conjunto compacto é compacto. Assim, π e π^{-1} preservar limitação.

Dado $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ queremos mostrar $\pi\mathfrak{e}$ esta em um único fim de G/H. Basta provar que $\pi\mathfrak{e} = \{\pi Q\}_{Q\in\mathfrak{e}}$ satisfaz propriedades (a), (b) na definição de fins desde Lema de Zorn's nos permite estender $\pi\mathfrak{e}$ para satisfazer (c).

(1) Seja $Q \in \mathfrak{e}$, seja V um gerador de $H \setminus G = G/H$ e seja $U = \pi^{-1}(V)$. Então U é um gerador de G e $U \supset H$. Afirmamos

$$\partial_V(\pi Q) \subset \pi\partial_{U^3}(Q).$$

Seja $Hg \in \partial_V(\pi Q)$. Então $Hg = v_1 Hg_1$ para algum $Hg \in \pi Q$ e algum $v_1 \in V$. também $Hg = v_2 Hg_2$ para algum Hg_2 em $(\pi Q)^c$ e algum $v_2 \in V$. Assim

$$v_2 h_2 g_2 = g = v_1 h_1 g_1 \qquad \begin{aligned} x_1 &= h_1' g_1 \in Q \\ x_2 &= h_2' g_2 \in Q^c \end{aligned}$$

para algum $h_1, h_1', h_2, h_2' \in H$, $v_1, v_2 \in V$. Assim

$$x_1 = h_i' g_i = h_i' h_i^{-1} v_i^{-1} g \in \mathscr{H}_{U^3}(g)$$

$i = 1, 2$. Isto prova que $g \in \partial_{U^3}(Q)$. Como $\partial_{U^3}(Q)$ limitado por isso $\partial_V(\pi Q)$ também é. Claramente πQ é ilimitado já que Q é ilimitada. Este prova (a) para $\pi\mathfrak{e}$.

(2) Se $Q, Q' \in \mathfrak{e}$ e U é como acima, então, pelo item (c) para $\mathfrak{e}$, $\pi^{-1}\pi Q, \pi^{-1}Q' \in \mathfrak{e}$. Por (b) da definição de fins para $\pi^{-1}\pi Q \cap \pi^{-1}\pi Q' \in \mathfrak{e}$ e como $\pi Q \cap \pi Q' = \pi(\pi^{-1}\pi Q \cap \pi^{-1}\pi Q' \in \pi\mathfrak{e})$ provando (b) para $\pi\mathfrak{e}$.

Por isso $\pi_\# : \mathcal{E}_G \to \mathcal{E}_{G/H}$ é bem definida.

A prova de que $\pi_\#^{-1} : \mathcal{E}_{G/H} \to \mathcal{E}_G$ é bem definido é ligeiramente mais fácil. Dado $\overline{\mathfrak{e}} \in \mathcal{E}_{G/H}$ queremos mostrar que $\{\pi^{-1}T\}_{T\in\overline{\mathfrak{e}}} = \pi^{-1}\overline{\mathfrak{e}}$ satisfaça os requisitos $(a), (b)$ na definição de fins. Seja U, V como acima. Observa-se que

$$\partial_U(\pi^{-1}T) \subset \partial_V(T)$$

é limitada. $\pi^{-1}T$ é ilimitada desde que T é . Isto prova (a) para $\pi^{-1}\overline{\mathfrak{e}}$,$(b)$ É claro desde $\pi^{-1}(T \cap T') = \pi^{-1}T \cap \pi^{-1}T'$. Portanto $\pi_\#^{-1} : \mathcal{E}_{G/H} \to \mathcal{E}_G$ é bem definido.

Como $\pi^{-1}\pi(Q) \in \mathfrak{e}$ para todo $Q \in \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$, temos $\pi_\#^{-1} \circ \pi_\# = \mathit{identidade}$ em $\mathcal{E}_G$. Desde $\pi^{-1} \circ \pi = \mathit{identidade}$ em G/H, temos $\pi_\# \circ \pi_\#^{-1} = \mathit{identidade}$ em $\mathcal{E}_{G/H}$. Portanto, ${\pi_\#}^{-1} = \pi_\#^{-1}$ completando a prova de (3.4.10i). ■

Demostração de (3.4.10ii). H é um subgrupo normal fechado, gerado compactamente de G e G/H é limitado. Seja U um gerador de G e H tão grande que $G/H \subset \pi U$ onde $\pi : G \to G/H$ é a projeção. Para $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$, $\overline{\mathfrak{e}} \in \mathcal{E}_H$ definimos

$$i\mathfrak{e} = \{Q \cap H\}_{Q\in\mathfrak{e}} \qquad j\overline{\mathfrak{e}} = \{\mathscr{H}_U T\}_{T\in\overline{\mathfrak{e}}}$$

e afirmação i, j induzir bijeções inversas entre $\mathcal{E}_G$, $\mathcal{E}_H$.

Como $\pi U = G/H$, todos os pontos de G estãn na U-envoltoria de H, $\mathscr{H}_U H = G$. Seja $Q \in \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$. Claramente $Q \cap H$ tem fronteira limitada ,$\partial_{Q\cap H}(Q \cap H)$ Também $Q \cap H$ é ilimitado já que Q é ilimitado e pontos de Q longe de $\partial_{U\cap H}(Q \cap H)$ têm toda a sua U-envoltoria (incluindo assim alguns pontos de H) no conjunto Q. Este prova (a) para $i\mathfrak{e}$; (b) é claro desde $(Q \cap H) \cap (Q' \cap H) = (Q \cap Q' \cap H$. Assim $i_\# : \mathcal{E}_G \to \mathcal{E}_H$ é bem definido por $i\mathfrak{e} \subset i_\#\mathfrak{e}$.

Seja $T \in \overline{\mathfrak{e}} \in \mathcal{E}_H$. Afirmamos que

$$\partial_U(\mathscr{H}_U T) \subset \mathscr{H}_U(\partial_{U^3\cap H}(T)).$$

Seja $h \in \partial_U(\mathscr{H}_U T)$. Então

$$g = u_1 g_1 \qquad g_1 = u_1' t_1$$
$$g = u_2 g_2$$

para algum $g_1 \in \mathscr{H}_U T$, $g_2 \in (\mathscr{H}_U T)^c$, $u_1, u_2, u_1' \in U$, $t_1 \in T$. Mas $G = \mathscr{H}_U H$ assim $g = uh$ e $g_2 = u_2' h_2$ para algum $h, h_2 \in H$, $u, u_2 \in U$. Como g_2 não esta em $\mathscr{H}_U T$, $h_2 \in H - T$. Assim

$$u^{-1}u_2u_2'h_2 = u^{-1}u_2g_2 = h = u^{-1}g = u^{-1}u_1u_1't_1$$

para $h_2 \in H - T$, $t_1 \in T$. Este prova que $h \in \partial_{U^3\cap H}(T)$ e $g \in \mathscr{H}_U(\partial_{U^3\cap H}(T))$ como afirmado. Uma vez que o último é limitado, assim é o anterior. Claramente $\partial_{U^3\cap H}(T)$ é ilimitado como T é. Este prova (a) para $j\overline{\mathfrak{e}} = \{\mathscr{H}_U T\}_{T\in\overline{\mathfrak{e}}}$; (b) é claro desde $\mathscr{H}_U(T \cap T') = \mathscr{H}_U(T) \cap \mathscr{H}_U(T')$. Portanto $j_\# : \mathcal{E}_H \to \mathcal{E}_G$ é bem definido por $j\overline{\mathfrak{e}} \subset j_\#\overline{\mathfrak{e}}$.

A composição $i_\# j_\#$ é a identidade em $\mathcal{E}_H$ porque $ij(T)$ é apenas a $U \cap H$-envoltoria de $T \in \overline{\mathfrak{e}}$, e a envoltoria de qualquer $T \in \overline{\mathfrak{e}}$ esta em $\overline{\mathfrak{e}}$. A composição $j\#i_\#$ é a identidade em $\mathcal{E}_G$ como a diferencia entre $ij(Q)$ e Q é limitado, $Q \in \mathfrak{e}$, e como $ij(Q) \in \mathfrak{e}$. Assim $j_\# = i_\#^{-1}$ e (3.4.10ii) é provada.

■

Demostração de (3.4.12). H é subgrupo fechado normal, compactamente gerado de G e H, G/H são ilimitados. Temos de provar G tem um fim. Como G contém o subconjunto ilimitada H, é, ilimitado não compacto, e portanto, tem ≥ 1 fins.

Seja U um gerador de G e H. Seja $Q \in \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$. Mostraremos Q^c é limitado, o qual implica G é um fim.

Seja $U^n \supset \partial_U Q$. Como $G/H = H \setminus G$ é ilimitado existem muitas classes Hg. Assim, muitos pontos de cada classe não estão em U^n e muitas classes não estão em U^n completamente.

Como vimos antes, H é U-conexo e por conseguinte, é por isso cada classe lateral Hg. Assim se Hg é uma classe lateral que falta U^n então $(Q \cap Hg) \cup (Q^c \cap Hg)$ seria uma divisão de Hg com a U-envoltoria de uma peça disjunta do U-envoltoria do outro. Assim, se ele perder U^n então ou $Hg \subset Q$ ou senão $Hg \subset Q^c$.

Considere qualquer classe Hg e escrever $g = u_1 \cdots u_k$, $u_i \in U$. Esacolhe qualquer $h \in H \cap (U^{n+k})^c$, isto é escolher um elemento de H longe de $\partial_U Q$. Posto que H não é limitado, isso é possível.
Então

$$h, u_k h, \cdots, u_1 \cdots u_k h = gh$$

é uma U-cadeia de h a gh evitando $\partial_U Q$. Como H é normal, $gh \in gH = Hg$. Assim, h e algum elemento de Hg estão ambos em Q ou em ambos Q^c.

Suponha $H \cap Q$ é limitada, logo $H \cap Q \subset U^m$. Claramente $m = n - 1$. Cada classe Hg contém um elemento de Q^c pela cadeia de construção anterior. Assim, a classe Hg .?falta de U^n são todos em Q^c. Por outro lado, se $g = u_1 \cdots u_k$, $k \leq n$, então cada ponto de $Hg \cap (U^{2n})^c$ pode ser unida a algum $h \in H \cap (U^n)^c$ por uma U-cadeia evitando $\partial_U Q$, e uma vez que tal h encontra-se em Q^c,nós temos

$$Hg \cap (U^{2n})^c \subset Q^c$$

que mostra que Q é limitada, na verdade $Q \subset U^{2n}$. Isto contradiz (a) na definição de fins, de modo que $H \cap Q$ não pode ser limitado.
Como $H \cap Q$ é ilimitado, a cadeia de construção mostra que cada classe Hg contém um elemento de Q. Assim, todas as classes laterais ausentes U^n são totalmente contido em Q.

Como $H \setminus G$ é ilimitado, existe alguma classe. Seja Hg_1 com $g_1 = u_{11} \cdots u_{1k}$. $k \geq n+1$, U^n; $Hg_1 \subset Q$. Seja $g = u_1 \cdots u_l$, $l \leq n$. Usando a construção da cadeia dois vezes podemos encontrar uma U-cadeia a partir de qualquer $x \in Hg \cap (U^{2n+k})^c$ a $Hg_1 = g_1 H$, evitando $\partial_U Q$:

$$\begin{aligned} Hg &= gH \ni x \\ &= gh \\ &= u_1 \cdots u_l h, u_2 \cdots u_l h, \cdots, h, u_{1k} h, \cdots, u_{11} \cdots u_{1k} h \\ &= g_1 H \in g_1 H \\ &= Hg_1. \end{aligned}$$

Assim, $Hg \cap (U^{2n+k})^c \subset Q$ e assim por

$$Q^c \subset U^{2n+k}.$$

Este prova que cada $Q \in \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ é o complemento de um conjunto limitado, pelo exemplo (3.3.3) $\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{e}_0$ e G tem um fim. ■

Para provar (3.4.13) usamos três lemas. Seja γ um mapa continuo injetiva definido por:

$$\begin{aligned} \gamma:\ \overline{G} &\to Homeo(\overline{G}) \\ a &\mapsto r_a : \overline{G} \to \overline{G} \\ &\qquad\quad x \mapsto xa. \end{aligned}$$

r_a denota multiplicação direita em $\overline{G}$

3.4.15 Lema. *Cada $r_a \in Homeo(\overline{G})$ e $a \mapsto r_a$ é um monomorfismo contínua $G \to Homeo(\overline{G})$.*

Demonstração. Continuidade de r_a em pontos de G é conseqüência que G é um grupo topologico. Se $\mathfrak{e}$ é um fim de G então a definição $\mathfrak{e}a = \{Qa\}_{Q \in \mathfrak{e}}$ deixa claro que r_a é continuo em $\mathfrak{e}$. Como $r_{a^{-1}} = r_a^{-1}$, $r_a \in Homeo(\overline{G})$. Continuidade de $a \mapsto r_a$ só precisa ser verificada em $a = 1$, a identidade de G, e em algum fim $\mathfrak{e}$ de G. Seja $a_n \to 1$. (se G é discreto então $a_n \equiv 1$.) Seja $\overline{Q}$ um vizinhança de $\mathfrak{e}$ em $\overline{G}$, $Q = \overline{Q} \cap G$. Então $r_{a_n}(\mathfrak{e}) = \{Qa_n\}_{Q \in \mathfrak{e}}$. Claramente $Q'a_n \subset Q$ para n grande, $Q' = Q - \partial_U Q$, e qualquer gerador fixo U de G. portanto $r_{a_n}(\mathfrak{e}) \to \mathfrak{e}$ e (3.4.15) é provado. ∎

3.4.16 Lema. *Seja S o subgrupo de isotropia das fins de G,*

$S = \{s \in G : \mathfrak{e}s = \mathfrak{e}$ para todo fins $\mathfrak{e}$ de $G\}$. Então S é um subgrupo fechado, normal do G. Se G é de dois-fins então ou, $G = S$ ou $G/S \approx \mathbb{Z}_2$.

Demonstração. S é claramente um subgrupo normal desde que gsg^{-1} fixa as fins do G, $g \in G$. Por (3.4.15) ela é fechado. Se G é de dois-fins então, cada $g, g' \in G - S$ alternar as fins de G. Assim, o mesmo acontece g^{-1} e $g^{-1}g' \in S$ como $g' \in gS$. Isto mostra H/S tem apenas duas classes laterais, assim $G/S \approx \mathbb{Z}_2$. ∎

3.4.2 Grupo Hiperbólico

Um grupo G é hiperbólico se tem dois fins e que são invariantes sob a multiplicação direito por todos os elementos de G equivalentemente.

3.4.17 Definição. *Seja G um grupo compactamete gerado, localmente compacto. G é elíptica, parabólica, ou* ***hiperbólico*** *se, e somente se, G tem exatamente $0, 1,$ ou 2 fins $\mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G$ respectivamente, isto é que são fixados sob a multiplicação por todos os elementos do grupo (isto é $g\mathfrak{e} = \mathfrak{e} = \mathfrak{e}g$ para cada $g \in G$).*

Não é difícil ver que um grupo com um número infinito de fins não podem ser hiperbólico. Porque se $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ são as fins invariantes direita e $\mathfrak{e}_3$ é uma terceira fins então, podemos encontrar uma seqüência em G, $a_n \to \mathfrak{e}_3$ tal que $a_n^{-1} \to \mathfrak{e}_4$, usar (3.4.7) para concluir (por-invariância direito de $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$) que a_n^{-1} se acumula em $\mathfrak{e}_1$ e em $\mathfrak{e}_2$, como $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_4 = \mathfrak{e}_2$. Portanto, por (3.4.9), cada grupo compactamente gerado é hiperbólico, parabólica ou elíptica.

3.4.18 Lema. *Seja H um grupo hiperbólico e U um gerador de H. Se a_n tende para um fim de H, então $a_n^{-1}U$ tende para outro fim.*

Demonstração. Seja os fins $\mathfrak{e}_-, \mathfrak{e}_+$ e suponha que $a_n \to \mathfrak{e}_+$ mas $a_n^{-1}u_n$ não se acumula em $\mathfrak{e}_-$ pra alguma sequência $u_n \in U$. Por lema (3.4.7) $\mathfrak{e}_-(a_n^{-1}u_n) \to \mathfrak{e}_+$ já que

$$(a_n^{-1}u_n)^{-1} = u_n^{-1}a_n \in \mathscr{H}_U(a_n) \to \mathfrak{e}_+.$$

Como H é de dois-fins, a convergência significa igualdade: $\mathfrak{e}_-(a_n^{-1}u_n) = \mathfrak{e}_+$, para n grande, contradizendo hiperbolicidade. ■

3.4.19 Observação. *Se hiperbolicidade é enfraquecido a dois-fins que (3.4.18) tornam-se false. Por exemplo, seja $G = \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}$ onde-significa semi-produto direto em relação ao $\mathbb{Z}_2$-ação em $\mathbb{Z}$, $m \to -m$. (Assim, o produto semi-direto escrita $\mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{Z}$ é o conjunto de pares $(a, n), a \in \mathbb{Z}_2, n \in \mathbb{Z}$, com a seguinte operação $(a, n) \cdot (b, m) = (ab, n + am)$). Então G têm dois fins, mas $(-1, n) = (-1, n)^{-1}$ ambos tendem ao mesmo fins quando $n \to \infty$.*

Demostraçã o do teorema (3.4.13). Podemos assumir as fins do G são invariante direito. Caso contrário substituir G pelo subgrupo S do índice de dois construído em (3.4.16). Seja U um gerador de G. Seja $Q_\pm \in \mathfrak{e}_\pm$ tal que

$$\mathscr{H}_U Q_- \cap \mathscr{H}_U Q_+ = \emptyset = U \cap \mathscr{H}_U Q_\pm.$$

Seja V um conjunto grande limitada tal que $Q_- \cup V \cup Q_+ = G$ com $V \supset U$.

Existe um $Q'_+ \in \mathfrak{e}_+$, $Q'_+ \subset Q_+$, de tal modo que qualquer $a \in Q'_+$ tem $a^{-1} \in Q_-$. Isso está implícito por (3.4.18). Existe uma $Q''_+ \in \mathfrak{e}_+$, $Q''_+ \subset Q'_+ \subset Q_+$, tal que $Q_+a \subset Q_+$ para todo $a \in Q_+$. Caso contrário, existe uma seqüência $a_n \to \mathfrak{e}_+$ tal que $Q_+a_n \not\subseteq Q_+$. Como $\partial_U Q_+$ é limitado $(\partial_U Q_+)a_n \subset Q_+$, n grande. Como na prova de (3.4.7), isso implica que Q_+a_n contém um dos componentes de um número finito de U-conexos de Q_+^c infinitamente muitas vezes, isto é $x \in Q_+a_n$ para alguma constante $x \in Q_+^c$. Isto diz $xa_n^{-1} \in Q_+^c$, para algum x fixo. Mas por (3.4.18), $a_n^{-1} \to \mathfrak{e}_-$ e multiplicação izquerda por x não afeta tal convergência. Por isso Q''_+ existe como afirmado. Simetricamente, existem $Q''_- \subset Q'_- \subset Q_-$, Q'_-, $Q''_- \in \mathfrak{e}_-$, de tal modo que qualquer $a \in Q'_-$ tem $a^{-1} \in Q'_+$ e qualquer $a \in Q''_-$ tem $Q_-a \subset Q_-$.

Escolha qualquer $h \in Q''_+$ com $h^{-1} \in Q''_-$. Como $h \in Q''_+$, $Q_+h \subset Q_+$. Em particular, $h^2, h^3, \cdots$ todos pertencem a Q_+. Afirmamos $h^n \to \mathfrak{e}_+$. Caso contrário, há uma sequência infinita de potencias h^k ocorrendo em algum subconjunto limitado de G. Por compacidade local, (3.2.3), uma subsequência de estes convergem para algum $x \in G$. Mas h^n, h^m estar perto x significa $h^n(h^m)^{-1}$ e $h^m(h^n)^{-1}$ estão perto de 1, em particular, eles estão em U. Podemos supor $n < m$. Então

$$h^m(h^n)^{-1} = h^{m-n} = h^k h = u \in U \Rightarrow h^- = u^{-1}h^k$$

com $k = m - n - 1 \geq 0$. Já vimos que $h, h^2, h^3, \cdots, \in Q_+$. Assim,

$$h^{-1} = u^{-1}h^k \in U \cup \mathscr{H}_U Q_+$$

que está disjunto de Q_- por nossa escolha original de $Q_\pm$. Isto contradiz $h^{-1} \in Q_-$. Alem disso $h^n \to \mathfrak{e}_+$ quando $n \to \infty$. Por (3.4.18), $h^n \to \mathfrak{e}_-$ quando $n \to -\infty$. Assim, $H = \{h^n\}$ é um subgrupo cíclico infinito fechado de G. Falta mostrar G/H e $H \setminus G$ são limitadas.

Se H é normal, então por (3.4.12), $H \setminus G = G/H$ é limitado, pois de outra forma G seria de um-fins. Então H não é normal. Em vez disso, considere novamente os conjuntos $Q_\pm \in \mathfrak{e}_\pm$ utilizado acima. Como $Q_+h \subset Q_+$ obtemos uma sequência decrescente

$Q_+ \supset Q_+h \supset Q_+h^2 \cdots$. Como $h^n \to \mathfrak{e}_+$, $(\partial_U Q_+)h^n \to \mathfrak{e}_+$, $\partial_U Q_+$ sendo limitado. Daqui $\cap_{n\geq 0} Q_+h^n = \emptyset$. Além disso, uma vez $Q_+, Q_+h \in \mathfrak{e}_+$, a diferença $Q_+ - Q_+h$ é um conjunto limitado. Seja W um gerador de G contendo V e $Q_+ - Q_+h$. Então

$$Wh \supset (Q_+ - Q_+h)h = Q_+h - Q_+h^2$$

e em geral $Wh^k \supset Q_+h^k - Q_+h^{k+1}$. Por isso $W \cup Wh \cup Wh^2 \cup \cdots \supset Q_+ \cup V$. Isto diz que $\mathscr{H}_W(H) \supset Q_+ \cup V$.

Nós escolhemos h para que $h^{-1} \in Q''_-$. Assim, tudo o que acontece com h a relação Q_+ é verdadeiro para h^{-1} em relação a Q_- . Isto significa (ampliando W para incluir também o conjunto limitado $Q_- - Q_-h^{-1}$) $\mathscr{H}_W(H) = G$ e de modo que cada $g \in G$ pode ser expresso $g = wh$ para algum $h \in H$, $w \in W$. Assim, G/H é limitada. Para cada $g \in G$, $g^{-1} = w'h'$ para algum $h' \in H$, $w' \in W$. Assim, cada $g = (h')^{-1}(w')^{-1}$ e assim $H \setminus G$ é também limitado. ∎

O próximo resultado tem como consequência que há uma ordem em um grupo hiperbólico que o torna parecido com $\mathbb{Z}$ modulo conjunto limitado.

3.4.20 Proposição. *Seja G um grupo hiperbólico com fins $\mathfrak{e}_\pm$. Então G tem um gerador U e existe um mapa $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\tau(1) = 0$ e*

(1) Existem contantes positivas c_k , $C_k \to \infty$ tal que se $k \geq 3$ então

$$a'a^{-1} \in U^k \Rightarrow |\tau a - \tau a'| \leq C_k$$

e

$$|\tau a - \tau a'| \leq c_k \Rightarrow a'a^{-1} \in U^k.$$

(2) Existe uma constante K positivo tal que para todo $a \in G$

$$\tau(a') \geq K \Rightarrow \tau(a'a) > \tau(a)$$
$$\tau(a') \leq -K \Rightarrow \tau(a'a) < \tau(a).$$

(3) $\mathscr{H}_U(x) \cap \mathscr{H}_U(\tau^{-1}(n+1)) \neq \emptyset$ para cada $x \in \tau^{-1}(n), n \in \mathbb{Z}$

(4)

$$a_n \to \mathfrak{e}_\pm \Leftrightarrow \tau(a_n) \to \pm\infty.$$

3.4.21 Observação. *(1) afirma bi-continuidade de τ modulo U,(2) é um tipo fraco de traslação invariância, (3) é uma Lei de Arquimedes modulo U. por 1 entendemos o elemento identidade de G. Lembre-se que hiperbolicidade do G significa G é dois fins com fins direita-invariante.*

Demostração de (3.4.20). G têm dois fins por (3.4.13), contém um subgrupo cíclico fechado, infinito $H = \{h^n\}$ tal que $h^n \to \mathfrak{e}_\pm$ quando $n \to \pm\infty$ e G/H ,$H \setminus G$ são limitados. Seja U um gerador para G com $h \in U$ e $\mathscr{H}_U H = G = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{H}_U(h^k)$. Seja

$$H_n = \{h^k, -\infty < k \leq n\} \qquad T_n = \mathscr{H}_U(h^n) - \mathscr{H}_U(H_{n-1}).$$

Claramente $G = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T_n$ disjuntos e T_n são conjuntos limitados. Afirmamos

$$(*) h^{N+n} \in T_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

onde h^N é a maior potencia positivo de h que esta em U. Observamos

$$h^N \in U \Rightarrow h^{N+n} \in Uh^n = \mathscr{H}_U(h^n) \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Mas se $h^{N+n} \in \mathscr{H}_U(h^m)$, $m < n$, então $h^{N+n} = uh^m$ para algum $u \in U$, e assim $h^{N+n-m} \in U$, a contradição de h^N sendo a última potencia de h em U. Assim $h^{N+n} \notin \mathscr{H}_U(H_{n-1})$ provando (*).

Define $\tau : G \to \mathbb{Z}$ por

$$\tau(g) = n + N \Leftrightarrow g \in T_n.$$

Por (*) $h^0 = 1 \in T_{-N}$ assim $\tau(1) = 0$.

(1) Fixa qualquer $k \geq 3$. Seja $c_k + 1$ a primeira potência positiva de h em $G - U^{k-2}$. Seja C_k a última potência positiva de h em U^{k+2}. Se $a \in T_n$ e $a' \in T_m$ então $n - m = \tau a - \tau a'$ e $a = uh^n$, $a' = u'h^m$ para algum $u, u' \in U$, assim

$$a'a^{-1} = u'h^{m-n}u^{-1} \quad \text{isto é} \quad (u')^{-1}(a'a^{-1})u = h^{m-n}.$$

Se $|m - n| \leq c_k$ então $h^{m-n} \in U^{k-2}$ assim $a'a^{-1} \in U^k$. Se $a'a^{-1} \in U^k$ então $h^{m-n} \in U^{k+2}$ assim $|m - n| \leq C_k$. Isto prova (1).

(2) Como $h^k \to \mathfrak{e}_\pm$ quando $k \to \pm\infty$ existe uma constante K tal que

$$\{h^k : k \geq K\} \cap (U^2H^-U) = \emptyset$$
$$\{h^k : k \leq -K\} \cap (U^2H^+U) = \emptyset$$

onde $H^\pm = \{h^{\pm k} : k \geq 0\}$. Se $a \in T_m, a' \in T_n, a'a \in T_s$ então $a = uh^m$, $a' = u'h^n$, $a'a = u''h^s$ assim $a'a = u'h^nuh^m$ implica

$$h^n = (u')^{-1}u''h^{s-m}u^{-1} \in U^2h^{s-m}U.$$

Mas $s - m = \tau(a'a) - \tau(a)$. Se $n \leq -K$ então $s - m \leq -1$, isto é $\tau(a'a) < \tau(a)$ tal como afirmado. se $n \geq K$ então $s - m \geq 1$, isto é $\tau(a'a) > \tau(a)$ tal como afirmado, provando (2).

(3) Seja $x \in \tau^{-1}(n)$. Então $x \in T_{n-N}$ e como $x = uh^{n-N}$ para algum $u \in U$. Portanto

$$\mathscr{H}_U(x) \ni u^{-1}x = h^{n-N} = h^{-1}h^{n+1-N} \in \mathscr{H}_U(h^{n+1-N}) \subset \mathscr{H}_U(\tau^{-1}(n+1))$$

por (*) provando (3).

(4) Como $T_n \subset \mathscr{H}_U(h^n) = Uh^n$ e $\tau^{-1}(n + N) = T_n$, (4) resulta desde $h^n \to \mathfrak{e}_\pm$ quando $n \to \pm\infty$.

∎

Capítulo 4

Ações Anosov e Axioma A: Definições e Preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições de k-laminação, hiperbolicidade normal com respeito à uma laminação e algumas propridades envolvendo ações Anosov. Na seção seguinte vamos estender naturalmente a noção de Axioma A.

4.1 Laminações

Começamos definindo laminação de um subconjunto $\Lambda \subset M$ sobre o conjunto de partes 2^{Λ} de Λ:

4.1.1 Definição. *Uma k-laminação de classe C^r $(r \geq 0)$ de um subconjunto $\Lambda \subset M$ é uma função $\mathscr{L}$ definida por:*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}: \ \Lambda &\to 2^{\Lambda} \\ x &\mapsto \mathscr{L}_x. \end{aligned}$$

Onde $\mathscr{L}_x$ é dito a folha passando por x. Além disso $\forall x, y \in \Lambda$:

(1) $x \in \mathscr{L}_x$.

(2) Existe uma k-variedade conexa V_x e uma C^r imersão injetiva $i_x : V_x \to M$ com $i_x(V_x) = \mathscr{L}_x$.

(3) $\mathscr{L}_x = \mathscr{L}_y$ ou $\mathscr{L}_x \cap \mathscr{L}_y = \emptyset$.

(4) Existe uma vizinhança $U \subset \Lambda$ de x e uma aplicação contínua $\phi : U \to C^r(D^k, M)$ tal que $\phi_x : (D^k, 0) \to (\mathscr{L}_x, x)$, onde $D^k \subset \mathbb{R}^k$ é o disco unidade fechado, e ϕ_x é um mergulho suave. A aplicação ϕ é chamado carta local para $\mathscr{L}$.

Seja $P_k(M)$ o fibrado de k-planos tangentes em M. O mapa definido por

$$\begin{aligned} T\mathscr{L}: \ \Lambda &\to P_k(M) \\ x &\mapsto T\mathscr{L}_x. \end{aligned}$$

Esta bem definido e é continuo, onde $T\mathscr{L}_x$ é o k-plano tangente à folha $\mathscr{L}_x$ em x.
A união de planos é um fibrado em $T_\Lambda M$ também denotado por

$$T\mathscr{L} = \bigcup_{x\in\Lambda} T\mathscr{L}_x \subset T_\Lambda M$$

Quando $\Lambda = M$ então $\mathscr{L}$ é uma folhação $\mathscr{F}$ no sentido clássico [1]. Isto é.

4.1.2 Definição. *Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞. Uma folheação de classe C^r e dimensão n de M, é um atlas máximo $\mathscr{F}$ de classe C^r em M com as seguintes propriedades:*

a) Se $(U,\varphi) \in \mathscr{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente

b) Se (U,φ) e $(V,\psi)\mathscr{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \to \psi(U \cap V)$ é da forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y))$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.

Dizemos também que M é folheada por $\mathscr{F}$, ou ainda que $\mathscr{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r.

Dizemos que $\varphi : G \times M \to M$ é uma ***ação folheada*** se para todo $x \in M$ o espaço tangente à órbita de φ passando por x tem dimensão k fixa.

4.1.3 Proposição ([1] Prova, Pag 26.). *As órbitas de uma ação folheada formam uma folheação.*

Portanto as φ-órbitas de uma G-ação localmente livre de classe C^r, são as folhas de uma folheação $\mathscr{F}$ de classe C^r e codimensão $dim(M) - dim(G)$ de M.

4.1.4 Observação. *A partir de agora toda G-ação é localmente livre. Portanto $dim(\mathcal{O}_x) = dim(G)$, para cada $x \in M$ e $\{\mathcal{O}_x\}_{x\in M} = \mathscr{F}$ forma uma folheação de M.*

- As φ-órbitas da G-ação, localmente livre definem uma folhação $\mathscr{F}$. Denotamos por $T\mathscr{F}$ o conjunto de k-planos tangentes as folhas e por $T\mathscr{F}_x$ o espaço tangente à folha de $\mathscr{F}$ que passa por x.
$$T\mathscr{F} = \bigcup_{x\in M} T\mathscr{F}_x \subset TM.$$

4.1.5 Notação. *Seja $\mathscr{L}$ uma laminação de $\Lambda \subset M$ e $\mathscr{F}$ uma folheação de M, os conjuntos $\Lambda/\mathscr{L}$, $M/\mathscr{F}$ são espaço das lâminas e espaço das folhas respectivamente.*

4.1.1 Hiperbolicidade Normal

Hiperbolicidade no caso de difeomorfismos e fluxos é fundamental estudar este tipo de conjuntos porque possuem muitas propriedades importantes que permitem desenvolver uma vasta teoria para descrever a sua dinâmica. Aqui generalizamos esse fato, começamos definindo a noção de difeomorfismo normalmente hiperbólico com respeito à laminação.

4.1.6 Definição. *Seja $\mathscr{L}$ uma laminação suave do subconjunto fechado f-invariante $\Lambda \subset M$. Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é normalmente hiperbólico com respeito à $\mathscr{L}$, se para todo $x \in \Lambda$ existem subespaços $N^u_x, T\mathscr{L}_x$ e N^s_x de $T_\Lambda M$ satisfazendo:*

(i) *Para todo $x \in \Lambda$, temos uma decomposição $T_xM = N^u_x \oplus T\mathscr{L}_x \oplus N^s_x$, que depende continuamente de x.*

(ii) *Os subespaços são invariantes pelo mapa linear $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$. Isto é $Df_x(N^u_x) = N^u_{f(x)}$, $Df_x(T\mathscr{L}_x) = T\mathscr{L}_{f(x)}$ e $Df_x(N^s_x) = N^s_{f(x)}$.*

(iii) *Temos*

$$inf\{m(N^u_x f) : x \in \Lambda\} > 1 \qquad sup\{\|N^s_x f\| : x \in \Lambda\} < 1$$

$$inf\{m(N^u_x f)\|\mathscr{L}_x f\|^{-1} : x \in \Lambda\} > 1 \qquad sup\{\|\mathscr{L}_x f\| m(\mathscr{L}_x f)^{-1} : x \in \Lambda\} < 1$$

Onde $N^u_x f = Df_x|_{N^u_x}$, $\mathscr{L}_x f = Df_x|_{T\mathscr{L}_x}$, $N^s_x f = Df_x|_{N^s_x}$ e $Df_x = N^u_x f \oplus \mathscr{L}_x f \oplus N^s_x f$.

4.1.7 Notação. *Por $m(A)$ significa a norma mínima do mapa linear A: $m(A) = inf\{\|Av\| : \|v\| = 1\}$ e a norma do mapa linear é $\|A\| = sup\{\|Av\| : \|v\| = 1\}$*
f é ***elemento hiperbólico*** *se $f \in Z(G)$ e é normalmente hiperbólico à $\mathscr{L}$.*

4.1.8 Observação. *Quando Λ é fechado do item (iii) existe uma métrica Riemanniana em M e constantes $0 < \lambda < 1 < \mu$. Tal que para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ e $v \in T_\Lambda M$ com $v \neq 0$, temos*

$$\begin{array}{rlll} & \|Df^n v\| & < \lambda^n \|v\| & se \ \ v \in N^s; \\ \mu^n \|v\| < & \|Df^n v\| & & se \ \ v \in N^u; \\ \mu^n \|v\| > & \|Df^n v\| & > \lambda^n \|v\| & se \ \ v \in T\mathscr{L}. \end{array} \tag{4.1}$$

A existência de um elemento $f \in Z(G)$ que é normalmente hiperbólico já coloca certas limitações em G. Ou variedade M é uma única órbita ou senão $\{f^n\}$ não tem ponto de acumulação em G. Com efeito de (4.1) temos se o espaço N^u é diferente de zero, então $m(N^u f^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $\|N^u f^n\| \to 0$ quando $n \to -\infty$, enquanto que para cada $g \in G$, a derivada $D\varphi(g)$ tem norma e norma minima limitada, isto é $m(D\varphi(g))$ e $\|D\varphi(g)\|$ são finitos. Também se $N^s \neq 0$ então f^n não tem ponto de acumulação em G já que a sequência $\|Df^n|_{N^s}\|$ é limitado .

Por outro lado, se $N^u = 0 = N^s$ então $T_xM = T_xO_x$ para cada $x \in \Lambda$. Já que M é conexo, isto implica que M é única órbita. Assim: ou G contém no centro um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}$ imerso nele, ou então M é uma única órbita. Este último tipo de ação é sempre estruturalmente estável. (Isso é fácil de verificar e não tem nada a ver com a Axioma A) e nós podemos ignorá-lo em tudo o que se segue.

4.1.2 Conjugações e Equivalências

O próximo definição generaliza algumas idéias de sistema dinamico contínuo a laminações invariantes.

4.1.9 Definição. *Um difeomorfismo f de M preserva a laminacão $\mathscr{L}$ se, e somente se, ele envia a lâmina que passa por p , em uma lâmina que passa por $f(p)$. Diremos também $f(\mathscr{L}) = \mathscr{L}$ ou $\mathscr{L}$ é f-invariante. Isto é o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ M/\mathscr{L} \arrow[r, "f"] & M/\mathscr{L} \end{tikzcd}$$

comuta. π *é a projeção do ponto* $p \in M$ *na lâmina* $\mathscr{L}_p$

4.1.10 Definição. *Se* f, g *são difeomorfismos de* M *preservando as laminações* $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ *então* $(f, \mathscr{L})$ *é conjugado módulo folhas a* $(g, \mathscr{L}')$ *se, e somente se, existe um homeomorfismo* $h : M \to M$ *levando* $\mathscr{L}$*-lâminas em* $\mathscr{L}'$*-lâminas. Equivalentemente o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M/\mathscr{L} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M/\mathscr{L} \arrow[d, "h"] \\ M/\mathscr{L}' \arrow[r, "g"] & M/\mathscr{L}' \end{tikzcd}$$

comuta. Em outras palavras $h(f(\mathscr{L}_p)) = g(h(\mathscr{L}_p))$. *Onde* $\mathscr{L}_p$ *lâmina de* $\mathscr{L}$.

A seguinte definição de estabilidade estrutural para laminações é uma extensão natural da nocão classica de estabilide estrutural de campo de vetores.

4.1.11 Definição. *Se* f *preserva* $\mathscr{L}$ *então* $(f, \mathscr{L})$ *é estruturalmente estavel se, e somente se, existe uma vizinhança* $\mathcal{N}$ *de* f *em* $Dif^1(M)$ *tal que cada* $f' \in \mathcal{N}$ *preserva alguma* $\mathscr{L}'$ *e* $(f, \mathscr{L})$ *é conjugado módulo folhas a* $(f', \mathscr{L}')$.

4.1.3 Propiedades Dinâmicas: Sombreamento e Expansividade

4.1.12 Definição. *Se* $\epsilon > 0$, *uma* ϵ*-pseudo órbita de* $f \in Dif(M)$ *é uma sequencia infinita* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *tal que*

$$d_M(f(p_n), p_{n+1}) \leq \epsilon \qquad \text{para cada} \, n \in \mathbb{Z}.$$

4.1.13 Definição. *Se* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *é um* ϵ*-pseudo órbita de* $f \in Dif(M)$, *diz-se que* $\{p_n\}$ *é* δ*-sombreado pela órbita* $\mathcal{O}(y)$ *de* $y \in M$ *se* $d_M(f^n(y), p_n) < \delta$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Um conjunto em um espaço métrico é **pre-compacto**, se pode ser coberta por um número finito de bolas abertas de qualquer diâmetro. Também conhecido como conjunto totalmente limitado.

Agora definimos plaquação, intuitivamente uma plaquação $\mathcal{P}$ é uma coleção de k-dimensional discos centrado em cada ponto $x \in M$ e de tal modo que elas variam continuamente com respeito ao seu centro: esta é uma noção de plaquação.

4.1.14 Definição. *Uma placa* C^r *em uma variedade* n*-dimensional* W *é um* C^r *mergulho* $\rho : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \to W$ *onde* $\mathbb{D}$ *é a bola fechada de raio um. Se* $w : W \to M$ *é um* C^r *imersão, então dizemos que uma família de placas* $\mathcal{P} = \{\rho\}$ *é plaquação de* w *se*

1. $W = \bigcup_{\rho\in\mathcal{P}} \rho(Int(\mathbb{D}))$
2. $\{w \circ \rho\}_{\rho\in\mathcal{P}}$ *é pre-compacto em* $Emb^r(\mathbb{D}, M)$.

Por abuso de notação, nos referimos igualmente para ρ, $w \circ \rho$, $\rho(\mathbb{D})$ e $w \circ \rho(\mathbb{D})$ como placas. O centro de ρ é $\rho(0)$. Uma definição equivalente para lâminas é o seguinte:

4.1.15 Definição. *Seja $\mathscr{L}$ um C^1-laminação de X com folhas de dimensão k. Uma placa é um C^1-mergulho $\rho : \mathbb{B}_1 \to X$ da bola fechada unidade $\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{R}^k$ sobre uma das folhas de $\mathscr{L}$.Uma plaquação $\mathcal{P}$ é uma familia $\{\rho\}$ de placas tal que cada folha de $\mathscr{L}$ é a união das imagens do interior de $\mathbb{B}_1$ através, de alguma placa e $\{\rho\}$ é pre-compacto em $Emb^1(\mathbb{B}_1, X)$.*

4.1.16 Definição. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo que preserva $\mathscr{L}$. Então a pseudo órbita $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ respeita $\mathcal{P}$ se, e somente se, para cada n, $f(p_n), p_{n+1}$ estão em uma placa comum de $\mathcal{P}$.*

A definicão de **placa expansiva**, em primeiro lugar generaliza o conceito de difeomorfismo expansivo.

4.1.17 Definição. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo que preserva uma laminação $\mathscr{L}$. Dizemos que f é placa expansiva se existe um $\epsilon > 0$ tal que se $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ são ϵ-pseudo órbita que respeita $\mathcal{P}$ e $d_M(p_n, q_n) \le \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então para cada n , p_n e q_n estão em uma placa comum de $\mathcal{P}$.*

A definicão é independente da metrica d_M e plaquação $\mathcal{P}$ (com pequenas placas).

4.1.18 Observação. *Seja $\mathscr{L}$ uma φ-órbita laminação de $\Lambda \subset M$. Seja η um C^∞ subfibrado de $T_\Lambda M$ tal que $T_\Lambda M = T\mathscr{L} \oplus \eta$. Se $\epsilon > 0$ é pequeno o suficiente, mais precisamente denotemos por $\eta(\epsilon)$ o subfibrado de bolas de raio ϵ de $\eta \subset T_\Lambda M$.*
Se f' é C^1 perto de f e $p \in \Lambda$ então existe um único ponto $p' \in exp_p\eta(\epsilon)$ cuja f'-órbita $\{(f')^n(p')\}$ pode ser ϵ-sombreado por uma f-pseudo órbita que respeita $\mathcal{P}$. Chamamos o mapa $h_{f'} : \Lambda \to M$ canônico candidato para a folha conjugação $h_{f'}(p) = p'$.

$$\begin{aligned} h_{f'} : \Lambda \;&\to\; M \\ p \;&\mapsto\; p'. \end{aligned}$$

Por $\{x_n\}$ ϵ-sombreado $\{y_n\}$ significa que $d_M(x_n, y_n) \le \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$

4.2 Resultados de HPS

Nesta seção iremos enunciar algumas propriedades de placa expansiva e estrutura de produto local. As suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [12].

4.2.1 Teorema (HPS[12] prova (7.2))**.** *Se f é um difeomorfismo C^1 de M que é normalmente hiperbólico à folheação $\mathscr{F}$ C^1, então f é placa expansiva.*

4.2.2 Teorema (HPS[12] (7.4))**.** *Seja f normalmente hiperbólico à laminação $\mathscr{L}$ de Λ,*

(i) Se $\mathscr{L}$ é C^1 suave então $(f, \mathscr{L})$ é placa expansiva.

(ii) Suponha $r \ge 1$, $(f, \mathscr{L})$ é placa expansiva, e f' é C^r perto f. Então o canônico candidato para a folha conjugação $h_{f'} : \Lambda \to M$, é uma folha conjugação verdadeira $\mathscr{L}' = h_{f'}\mathscr{L}$ é um C^r laminação, f' é normalmente hiperbólico a $\mathscr{L}'$, e $(f', \mathscr{L}')$ é placa expansiva.

Um fibrado de Banach é um fibrado em que cada fibra é um espaço de Banach.

4.2.3 Corolário (HPS [12]). *Seja E um fibrado de Banach sobre uma base compacta X. Seja $F : E \to E$ um automorfismo de E que leva invariante a decomposição contínua $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^k$ tal que*

$$m(F_x^j) > \|F_x^{j+1}\| \quad 1 \leq j \leq k-1 \quad x \in X \quad \textit{onde} \quad F_x^j = F|_{E_x^j}.$$

Se $\overline{F}$ é um fibrado de Banach, automorfismo perto de F então existe um $\overline{F}$-invariante decomposição contínua $E = \overline{E}^1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}^k$ perto de $E^1 \oplus \cdots \oplus E^k$. Além de $\overline{E}_j$ é o único $\overline{F}$-invariante subfibrado de E perto de E_j, $1 \leq j \leq k$

Pela teoria de variedade invariantes, desenvolvida por Hirsch, Pugh e Shub (ver HPS[12]), se f é um elemento Anosov da G-ação φ, então, para cada ponto $x \in M$, existe uma variedade suave $W^{ss}(x)$ tangente à N_x^u, a qual denominamos variedade estável forte de f em x. As variedades estáveis forte definem uma folheação contínua sobre M. Analogamente, definimos a variedade instável forte de f em x.
Pela teoria de variedade invariantes (HPS[12]), temos que

$$W^{ss}(x) = \{y \in M; d(f^n(y), f^n(x))\xi^{-n} \to 0, \, quando \, n \to \infty\},$$

onde $\xi = sup\|Df|_{N^s}\|$. Em particular, se f é um elemento Anosov central de φ e $g \in G$, então

$$g(W^{ss}(x)) = W^{ss}(g(x))$$

De fato, se $y \in W^{ss}(x)$, temos que

$$d(f^n(g(y)), f^n(g(x)))\xi^{-n} = d(g(f^n(y)), g(f^n(x))) \leq Lip(g)d(f^n(y), f^n(x))\xi^{-n} \to 0.$$

Analogamente $g(W^{uu}(x)) = W^{uu}(g(x))$ para cada $g \in G$. Em resumo, se $\mathscr{F}$ denota a folheação definida pelas φ-órbitas e f é um elemento Anosov central, então cada elemento $g \in G$ preserva a decomposição

$$TM = N^u \oplus T\mathscr{F} \oplus N^s$$

definida por f.

4.2.4 Teorema. *Seja φ uma G-ação e Λ subvariedade, C^1 e compacto de M que é invariante pelo difeomorfismo $f := \varphi(f) \in Dif^r(M)$ $(r \geq 1)$. Seja $\mathscr{L}$ a φ-órbita laminação de Λ, se f é normalmente hiperbólico à $\mathscr{L}$, respeitando $T_\Lambda M = N^u \oplus T\mathscr{L} \oplus N^s$. Então para algum $\epsilon > 0$ e para cada $p \in \Lambda$ existem $W_\epsilon^{ss}(p)$, $W_\epsilon^{uu}(p)$ chamados respectivamente a variedade estável forte e variedade instável forte de p, tangentes C^1 a N_p^s, N_p^u em p e eles são caracterizados por:*

- $W_\epsilon^{ss}(p) = \{x \in M : d_M(f^n x, f^n p) \leq \epsilon \; \forall n \geq 0$ *e* $d_M(f^n x, f^n p) \to 0$, *quando* $n \to \infty\}$.
- $W_\epsilon^{uu}(p) = \{x \in M : d_M(f^{-n} x, f^{-n} p) \leq \epsilon \; \forall n \geq 0$ *e* $d_M(f^{-n} x, f^{-n} p) \to 0$, *quando* $n \to \infty\}$.
- f*-invariantes, isto é* $fW_\epsilon^{ss}(p) \subset W_\epsilon^{ss}(fp)$, $W_\epsilon^{uu}(p) \subset fW_\epsilon^{uu}(f^{-1}p)$

4.2.5 Observação.

- *A variedade* $W_\epsilon^{ss}(x)$ *varia continuamente com* $x \in \Lambda$. *Mais precisamente, se* f *é* C^r *e* $n = dim(N^s)$ *existe uma vizinhança* V *de* x *e uma aplicação contínua* $\Phi : V \to Emb^r(D^n, M)$ *tal que*

$$\Phi(x)(0) = x \text{ e } \Phi(x)(D^n) = W_\epsilon^{ss}(x).$$

  $D^n \subset \mathbb{R}^n$ *é o disco unidade fechado e* $Emb^r(D^n, M)$ *familia de mergulhos.*

- *Do teorema acima temos para cada* $p \in \Lambda$, $T_pW_\epsilon^{ss}(p) = N_p^s$ *e* $T_pW_\epsilon^{uu}(p) = N_p^u$ *onde* $T_pM = N_p^u \oplus T\mathscr{L}_p \oplus N_p^s$

Claro, substituindo f por f^{-1}, obtemos a teoria de variedade instável correspondente.

4.2.1 A Teoria Local da Variedade Invariante

Pela teoria de variedade invariantes, desenvolvida por Hirsch, Pugh e shub (ver HPS[12]), Para cada elemento hiperbólico são associados estruturas de variedades. Através de cada órbita $\mathcal{O}(x)$ em Ω_φ, passam variedades únicas f-invariantes $W^u(x)$ e $W^s(x)$, intersectando-se transversalmente em $\mathcal{O}(x)$.

4.2.6 Teorema. *Seja* φ *uma* G*-ação e* f *um elemento hiperbólico, seja* $\mathcal{O}$ *qualquer órbita fixo em* Ω_φ *e* $f := \varphi(f) \in Dif^r(M)$ *normalmente hiperbólico à* $\mathcal{O}$ *respeitando* $T_{\mathcal{O}}M = N^u \oplus T\mathcal{O} \oplus N^s$. *Então existe* $\epsilon > 0$ *e para cada* $x \in \mathcal{O}$ *temos:*

(a) ***Existencia:*** *Existe localmente variedades* f*-invariantes* $W_\epsilon^u(x)$ *e* $W_\epsilon^s(x)$, *tal que para cada* $p \in \mathcal{O}(x)$ *temos.* $T_pW_\epsilon^u(x) = N_p^u \oplus T_p\mathcal{O}(x)$ *e* $T_pW_\epsilon^s(x) = T_p\mathcal{O}(x) \oplus N_p^s$.

(b) ***Caracterização:*** *Local da variedade* ϵ*-estavel e variedade* ϵ*-instavel respectivamente:*

$$W_\epsilon^s(x) := W_\epsilon^s\mathcal{O}(x) = \bigcup_{x' \in \mathcal{O}(x)} W_\epsilon^{ss}(x')$$

$$W_\epsilon^u(x) := W_\epsilon^u\mathcal{O}(x) = \bigcup_{x' \in \mathcal{O}(x)} W_\epsilon^{uu}(x')$$

(c) ***Suavidade:*** $W_\epsilon^u(x)$, $W_\epsilon^s(x)$ *e* $\mathcal{O}(x)$ *são de classe* C^r.

(d) ***Laminação:*** *Existem variedade estavel forte* $W_\epsilon^{ss}(x)$ *e variedade instavel forte* $W_\epsilon^{uu}(x)$ *de* x. *As fibras* $W^{ss}(x)$, $W^{uu}(x)$ *são caracterizados por*

$$W^{ss}(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}W_\epsilon^{ss}(f^n x) \quad \text{e} \quad W^{uu}(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_\epsilon^{ss}(f^{-n}x)$$

(e) ***Caracterização:*** *Global da variedade estavel e variedade instavel respectivamente:*

$$W^s(x) := W^s\mathcal{O}(x) = \bigcup_{x' \in \mathcal{O}(x)} W^{ss}(x') = \bigcup_{g \in G} gW^{ss}(x).$$

$$W^u(x) := W^u\mathcal{O}(x) = \bigcup_{x' \in \mathcal{O}(x)} W^{uu}(x') = \bigcup_{g \in G} gW^{uu}(x).$$

Como $W^{ss}(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n} W^{ss}_{\epsilon}(f^n x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n} W^{ss}_{\alpha}(f^n x)$ para cada $\alpha > 0$, então $gW^{ss}(p) = W^{ss}(gp)$ para cada $g \in G$.

Pelo fato de que φ é uma ação localmemte livre, as órbitas $\mathcal{O} \subset \Omega_{\varphi}$ são subvariedades imersa de M e φ-invariante. As variedades $W^{\sigma}(x)$ são f-invariantes significa que $fW^{\sigma}(x) = W^{\sigma}(fx)$, para $\sigma = s, u$ já que $gW^{ss}(p) = W^{ss}(gp)$ para cada $g \in G$ e $p \in \mathcal{O}(x)$. No caso local, f-invariante significa $fW^s_{\epsilon}(x) \subset W^s_{\epsilon}(fx)$, $f^{-1}W^u_{\epsilon}(x) \subset W^u_{\epsilon}(f^{-1}x)$, do item (d) se deduz $W^{ss}_{\epsilon}(x) \subset W^{ss}(x)$ e $W^{uu}_{\epsilon}(x) \subset W^{uu}(x)$.

Mas quando φ é hiperbólico a Λ, então a centralidade de f e a caracterização de $W^{ss}_{\epsilon}(p)$ implica que as fibrações estáveis fortes e instáveis fortes são invariantes por todo a G-ação, não apenas por f. Isto é, $\varphi(g)(W^{ss}x) = W^{ss}(\varphi(g,x))$ $\forall g \in G$. Da mesma forma para W^{uu}. Já que $W^s(x)$ consiste das fibras $W^{ss}(x')$ com x' no conjunto invariante $\mathcal{O}(x)$, $W^s(x)$ e $W^u(x)$ são também φ-invariantes.

A partir da caracterização de variedades estaveis fortes é evidente que qualquer $W^{ss}(x_1)$, $W^{ss}(x_2)$ são iguais ou disjuntos.

4.2.2 Estrutura de Produto Local

Aqui generalizamos alguns resultados de HPS[12] para laminação de dimensão ≥ 2, usando crucialmente uma ideia de Rufus Bowen [19]. Nesta seção assumimos que f é um difeomorfismo de M, normalmente hiperbólico à laminação $\mathscr{L}$ do subconjunto compacto Λ. Denotamos por $W^u_{\epsilon} = W^u_{\epsilon}\Lambda = \cup_{p\in\Lambda} W^{uu}_{\epsilon}(p)$ e $W^s_{\epsilon} = W^s_{\epsilon}\Lambda = \cup_{p\in\Lambda} W^{ss}_{\epsilon}(p)$.

4.2.7 Definição. *$\mathscr{L}$ é subordinada a W^u se, e somente se, cada $W^u(\mathscr{L}_p)$ intersecta a lâmina $\mathscr{L}_q$ em um subconjunto relativamente aberto de $\mathscr{L}_q$ para $p, q \in \Lambda$. Similarmente para W^s.*

Seja f elemento hiperbólico de uma ação de grupo. Por a teoria local da variedade invariante, temos para cada $x \in \Lambda$, $W^u_{\epsilon}(x) \pitchfork W^s_{\epsilon}(x) \neq \emptyset$. Logo como a decomposição $T_{\Lambda}M = N^u \oplus T\mathfrak{L} \oplus N^s$ é contínua, é claro que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \Lambda, \quad d(x,y) < \delta \Rightarrow W^u_{\epsilon}(x) \pitchfork W^s_{\epsilon}(y) \neq \emptyset.$$

4.2.8 Definição. *Seja f normalmente hiperbólico à laminação $\mathscr{L}$ de Λ. Então, (f, Λ) tem ϵ-estrutura de produto local se, e somente se,*

$$W^u_{\epsilon}(\Lambda) \cap W^s_{\epsilon}(\Lambda) = \Lambda \text{ para algum } \epsilon > 0.$$

Equivalentemente, $W^u_{\epsilon}(\Lambda) \cap W^s_{\epsilon}(\Lambda) \subset \Lambda$ se, e só se para cada $x, y \in \Lambda$ com x perto de y, temos que $W^u_{\epsilon}(x) \pitchfork W^s_{\epsilon}(y) \subset \Lambda$.

O importante da definição acima é que o conjunto ou ponto de interseção das variedades fracas pertencem a Λ.

4.2.9 Definição. *$(f, \mathscr{L})$ tem ϵ-estrutura de produto local se,e somente se, (f, Λ) tem ϵ-estrutura de produto local e $\mathscr{L}$ é subordinada a W^u,W^s.*

4.2.10 Definição. *Λ é localmente maximal se ele tem uma vizinhança em que é o maior conjunto f-invariante.*

Claramente se $(f, \mathscr{L})$ é normalmente hiperbólico e Λ é localmente maximal então (f, Λ) tem estrutura de produto local. O seguinte teorema é um tipo reverso a este

4.2.11 Teorema (HPS[12] (7A.1)). *Se $(f, \mathscr{L})$ tem estrutura de produto local e $h_{f'} : \Lambda \to M$ é o canônica candidato para uma folha conjugação (ver observação 4.1.18), f' perto de f, então $\Lambda' = h_{f'}\Lambda$ é uniformemente localmente f'-maximal. Isto é, existem vizinhanças U de Λ e $\mathcal{U}$ de f tal que Λ' é o maximal invariante de U com respeito a $f' \in \mathcal{U}$.*

De fato, pode-se mostrar que se um ponto $x \in U$ pertence a alguma δ-pseudo órbita para frente para f' que esta totalmente em U então x pertence a $W^s_\epsilon \Lambda'$.

4.3 Ações Hiperbólicas e Axioma A

Nesta seção apresentamos definições e algumas propriedades envolvendo ações Anosov, ações hiperbólicas e Axioma A.

4.3.1 Definição. *Seja G um grupo de Lie conexo e φ uma ação de classe C^1 localmente livre de G sobre uma variedade diferenciável M. Dizemos que φ é uma **ação Anosov** se existe $f \in Z(G)$ tal que $f : M \to M$ é um difeomorfismo normalmente hiperbolico com respeito à φ-órbita folheação $\mathscr{F}$. Neste caso, dizemos que f é um **elemento Anosov** de φ.*

4.3.1 Exemplos de Ações Anosov

A seguir daremos alguns exemplos de ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ [2]. Enquanto que no caso de fluxos e difeomorfismos existe uma abundância de exemplos, no contexto de ações de $\mathbb{Z}^k$ e $\mathbb{R}^k$, muito pocos exemplos são conhecidos, além dos padrões (que iremos mencionar logo en seguida). Faremos aqui a apresentação de alguns exemplos.

4.3.2 Exemplo (Suspensão de uma acão de $\mathbb{R}^{k-1}$ por um difeomorfimo). *Seja M uma $(k+1)$-variedade C^∞ e $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico, de classe C^r $(r > 0)$ e $\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \times M \to M$ uma ação C^r $(r > 0)$, localmente livre que comuta com f, (isto é, $f \circ \varphi(v) = \varphi(v) \circ f$, $\forall v \in \mathbb{R}^{k-1}$).*
A suspensão de φ por f é a ação Φ de $\mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{k-1} \oplus \mathbb{R}$ sobre $M \times \mathbb{R}$ dada por

$$(a, b) \cdot [x, t] = [\varphi(a)(x), t + b].$$

A variedade M_f quociente de $M \times \mathbb{R}$ pela relação de equivalência: $\sim$ tal que $(x, t) \sim (f^m(x), t + m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, munida dessa ação de $\mathbb{R}^k$ é chamada 1-suspensão Anosov. Claramente, é uma ação Anosov de $\mathbb{R}^k$, para o qual o elemento de coordenada $(0, 1)$ em $\mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{k-1} \oplus \mathbb{R}$ é Anosov.

4.3.3 Exemplo (Suspensão de uma acão de $\mathbb{Z}^k$). *Seja $\varphi : \mathbb{Z}^k \times M \to M$ uma ação C^r $(r > 0)$. Considero a ação C^r de $\mathbb{Z}^k$ em $\mathbb{R}^k \times M$ definida por : $\psi(x, p) = (x - z, \varphi(z, p))$. Tome o espaço das órbitas dessa ação*

$$N = \mathbb{R}^k \times M/\mathbb{Z}^k.$$

Note que a ação de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^k \times M$ por $\phi(y, n) = (\phi + y, n)$ comuta com $\mathbb{Z}^k$-ações e então induz em M uma $\mathbb{R}^k$-ação C^r, que é chamada de suspensão de φ. Agora, suponha que pelo menos um elemento $a \in \mathbb{Z}^k$ age como um difeomorfismo de Anosov em M. Então a suspensão é uma $\mathbb{R}^k$-ação Anosov.

Note que nas seguintes definições (4.3.4), (4.3.5) e (4.3.6) não estamos assumindo conexidade do grupo. Neste cenário, pode-se obter uma decomposição espectral do conjunto não-errante definido.

4.3.4 Definição. *φ é uma G-ação hiperbólico se M é folheada pelas φ-órbitas e algum $f \in Z(G)$ é normalmente hiperbólico à φ-órbita folheação de M.*

Por exemplo, ações Anosov são G-ações hiperbólicos. A centralidade de f em G é uma grande hipótese, porque ações hiperbólicos incluem $\mathbb{Z}$-ação de um difeomorfismo Anosov, $\mathbb{R}$-ação de um fluxo Anosov, e de fato todas as ações Anosov de grupos abelianos.

4.3.5 Definição. *Uma G-ação φ de classe C^1 é hiperbólica sobre $\Lambda \subset M$ se, e somente se, Λ é laminado pelas φ-órbitas e existe $f \in Z(G)$ tal que $f := \varphi(f)$ é normalmente hiperbólico à φ-órbita laminação de Λ.*

Agora vamos estender naturalmente a noção de Axioma A determinada por Smale para G-ações.

4.3.6 Definição (Axioma A). *Uma G-ação φ satisfaz o Axioma A se, e somente se, Ω_φ é laminado pelas φ-órbitas e*

$A(i)$ *Algum $f \in Z(G)$ é normalmente hiperbólica à φ-órbita laminação de Ω_φ,*

$A(ii)$ *as órbitas compactas são densos em Ω_φ.*

Se φ é uma G-ação hiperbólica, então, ele satisfaz Axioma $A(i)$. Se $\Omega = M$ e φ satisfaz Axiom $A(i)$, então, φ é hiperbólico. Mesmo para $\mathbb{Z}$-ações ainda não se sabe se $A(i) \Rightarrow A(ii)$.

4.3.7 Notação. *O elemento f do item $A(i)$ da definição (4.3.6) é chamado* ***elemento hiperbólico****. Axioma $A(i)$ poderia ser chamado de* **Ω*-hiperbolicidade de*** *φ e hiperbolicidade de φ poderia ser consistentemente chamado* **M*-hiperbolicidade de*** *φ.*

Para provar o seguinte resultado aplicamos os teoremas de fins (3.4.10) e (3.4.12).

4.3.8 Teorema. *Se φ é G-ação e satisfaz Axioma A em M com mais de uma órbita, então G tem um ou dois fins.*

Demonstração. Seja H subgrupo de G gerado por um elemento hiperbólico f. Como M têm mais de uma órbita então $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ não tem ponto de acumulação em G. Logo H é um subgrupo cíclico fechado não-compacto de G isomorfo a $\mathbb{Z}$. Como f é central, H é normal em G. Se G/H é limitado, então por (3.4.10ii) o grupo G têm dois fins, porque H têm dois fins. Se G/H é ilimitado, então por (3.4.12) G tem um fim. ∎

Capítulo 5

Decomposição Espectral Axioma A e Classe Homoclínica

Aqui estudamos um resultado básico da Teoria de Smale [21] generalizada para ações. Também generalizamos o teorema de estrutura do produto local HPS[12] para laminação de dimensão ≥ 2. Como consequência da estrutura do produto local, temos a prova do teorema da Decomposição espectral. Logo, podemos definir a noção de ciclos, para provar que toda ação que satisfaz Axioma A, não tem auto-ciclo e o não errante é todo M, ou G é hiperbólico, ou seja tem dois fins invariantes. Finalmente apresentamos um resultado particular para $\mathbb{Z}$-ações decomposição da classe homoclínica.

Iniciamos aqui com um resultado básico da Teoria de Smale [21] generalizada para ações.

§ **Teorema Ω-Decomposição.** *Seja φ uma G-ação C^1 satisfazendo o Axioma A. Então, existe uma única decomposição:*

$$\Omega_\varphi = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k,$$

onde Ω_i são compactos, disjuntos, φ- invariantes e indecomponível. Em cada Ω_i, φ é topologicamente transitiva.

A prova do teorema Ω-Decomposição ocorre depois. Várias preliminares são necessárias para provar este teorema. Como consequência do teorema de estrutura do produto local, obtemos Ω-decomposição, assim como para os fluxos. Os Ω_i são chamados conjuntos básicos para φ.

5.0.9 Teorema (*Estrutura de produto local*)**.** *Se f é um elemento hiperbólico de uma ação φ que satisfaz o axioma A. Então $(f, \mathscr{L})$ tem estrutura de produto local quando $\mathscr{L}$ é a φ-órbita laminação de Ω_φ.*

Dois lemas preliminares são necessários para provar o teorema de *Estrutura de produto local.* Primeiro vamos provar um simples

5.0.2 Lema de Interseção

Lembre-se que uma ação φ é hiperbólico a $\Lambda \subset M$ se Λ é laminado pelas φ-órbitas e existe $f \in Z(G)$ que é normalmente hiperbólico à φ-órbita laminação de Λ.
Pelo teorema (1.2.6) um subgrupo fechado de um grupo de Lie, é um subgrupo de Lie, e da teoria local da variedade invariante temos $\mathcal{O}(x) \pitchfork W^{uu}_\epsilon(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in \Lambda$.

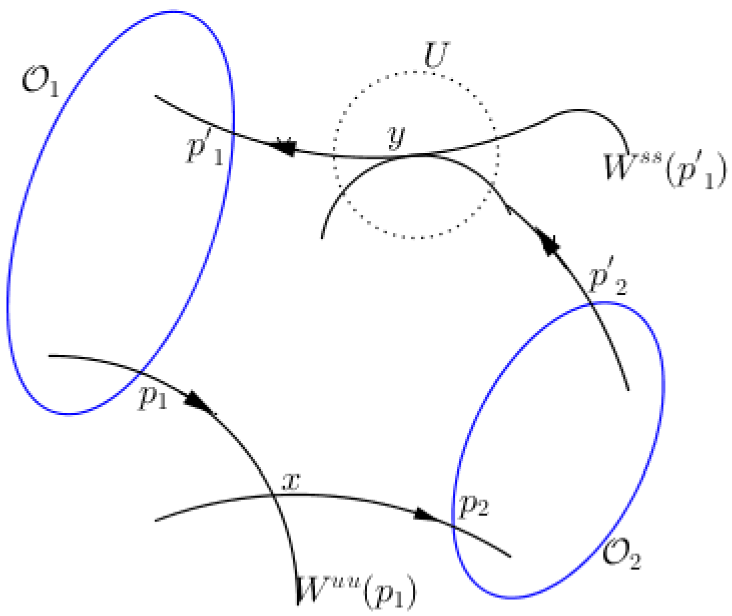
5.0.10 Lema (Lema de interseção). *Seja φ hiperbólico a Λ com elemento hiperbólico f. Sejam $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ órbitas em Λ. Se $x \in W^u\mathcal{O}_1 \pitchfork W^s\mathcal{O}_2$ então $x \in W^{uu}(x) \pitchfork W^s\mathcal{O}_2$.*

Demonstração. Por hipótese f elemento hiperbólico, então pela f-invariância da variedade instável forte e variedade estável, é suficiente provar quando $x \in W^u_\varepsilon\mathcal{O}_1$ e $\epsilon > 0$ pequeno. Seja $x \in W^{uu}_\varepsilon(p) \subset W^{uu}(p)$, $p \in \mathcal{O}_1$. Seja G_1 a componente conexa de 1, a identidade, em G pela obsevação (1.2.2) G_1 é um subgrupo fechado. Assim, o subgrupo de isotropia local $I_p = \{g \in G_1 : \varphi(g, p) = p\}$ é fechado, então pelo teorema (1.2.6) é uma subvariedade C^1 de G. A restrição $\varphi : G \times \{p\} \to \mathcal{O}_1(p)$ é imersão e $dim(G) = dim(\mathcal{O}_1(p))$, então $\varphi|_{G\times\{p\}}$ é um difeomorfismo local de classe C^1 em $1 \in G$.

Logo seja D um pequeno disco suave em G intersectando transversalmente a subvariedade I_p em 1. Então $\varphi|_{D\times p}$ é um difeomorfismo de uma vizinhança de $\varphi(1, p) = p$ em $\mathcal{O}_1$ e, pela teoria local da variedade invariante $\mathcal{O}_1(p)$ intersecta $W^{uu}(p)$ transversalmente em p, $\varphi(D, x)$ intersecta $W^{uu}(p) = W^{uu}(x)$ transversalmente em x onde $d_M(x, p) \leq \epsilon$. Como $\varphi(D, x) \subset \mathcal{O}(x)$. Logo $\mathcal{O}(x)$ também intersecta $W^{uu}(p)$ transversalmente em x, ou seja $T_x(W^u\mathcal{O}_x) = T_x\mathcal{O}(x) + T_xW^{uu}(p) \subset T_x(W^u\mathcal{O}_1)$. Pela hipótese $W^s\mathcal{O}_2$ intersecta $W^u\mathcal{O}_1$ transversalmente em x, isto é $T_xM = T_x(W^s\mathcal{O}_2) + T_x(W^u\mathcal{O}_1)$. Assim, $T_xM = T_x(W^s\mathcal{O}_2) + T_x\mathcal{O}(x) + T_xW^{uu}(p)$, e como $T_x\mathcal{O}(x) \subset T_x(W^s\mathcal{O}_2)$. Portanto $x \in W^{uu}(x) \pitchfork W^s\mathcal{O}_2$.

■

O próximo lema é a chave para muitos problemas. Diz-se que se $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ são órbitas compactas em Λ e $W^u\mathcal{O}_1 \pitchfork W^s\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. Então $W^s\mathcal{O}_1 \cap W^u\mathcal{O}_2 \subset \Omega_\varphi$.



5.0.11 Lema (Cloud Lemma). *Seja φ hiperbólico em Λ com elemento hiperbólico f. Seja $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ φ-órbitas compactas em Λ. Se $W^u\mathcal{O}_1$, e $W^s\mathcal{O}_2$ tem pelo menos um ponto de intersecção transversal então $W^s\mathcal{O}_1 \cap W^u\mathcal{O}_2 \subset \Omega_\varphi$.*

Demonstração. Ver Figura acima. Seja $y \in W^s\mathcal{O}_1 \cap W^u\mathcal{O}_2$, pela caracteização $y \in W^{uu}(p'_2) \cap W^{ss}(p'_1)$ onde $p'_1 \in \mathcal{O}_1$, $p'_2 \in \mathcal{O}_2$. Por hipotese $\exists x \in W^s\mathcal{O}_1 \pitchfork W^u\mathcal{O}_2$, então $x \in W^{uu}(p_1) \cap W^{ss}(p_2)$ para $p_1 \in \mathcal{O}_1$, $p_2 \in \mathcal{O}_2$. Pelo Lema de interseão (5.0.10), $x \in$

$W^{uu}(p_1) \pitchfork W^s\mathcal{O}_2$. Seja U qualquer vizinhança de y em M e S um conjunto compacto em G. Temos de mostrar que $gU \cap U \neq \emptyset$ para algum $g \in G - S$.

Posto que $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ são compactos e G é compactamente gerado, então existe um subconjunto compacto $Q \subset G$ tal que

$$Qp_1 = \mathcal{O}_1 \quad Qp_2 = \mathcal{O}_2, \text{ para cada } p_1 \in \mathcal{O}_1 \text{ e } p_2 \in \mathcal{O}_2. \tag{5.1}$$

Onde $Qz = \{\varphi(q, z) = qz : q \in Q\}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n(p_1') \in \mathcal{O}_1$, por (5.1) temos $Qf^n(p_1') = \mathcal{O}_1$, então escolha $q_n \in Q$ tal que

$$f_n(p_1') = p_1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ onde } f_n = q_n f^n.$$

Como $\{\varphi(g) \in Dif(M) : g \in Q\}$ é um subconjunto compacto do $Dif(M)$ e $y \in W^{ss}(p_1')$, logo

$$d(q_n f^n(y), q_n f^n(p_1')) = d(q_n f^n(y), p_1) \to 0, \text{ daí } f_n(y) \to p_1 \text{ quando } n \to \infty \tag{5.2}$$

seja $g_n = q_n f q_{n-1}^{-1}$ implica que $g_n(p_1) = p_1$ para cada n e $g_n g_{n-1} \cdots g_1 q_0(y) = f_n(y) \to p_1$, pelo usual λ-Lema mais a φ-invariância de $W^u\mathcal{O}_2$, $W^s\mathcal{O}_1$, mais a comutatividade das f^n e q_n segue-se que f_nU contém um disco D_n quase igual à $W^{uu}p_1$. Temos $x \in W^{uu}(p_1) \pitchfork W^s\mathcal{O}_2$ daí em particular, para n grande, D_n intersecta $W^s\mathcal{O}_2$ perto de x, como $D_n \subset f_nU$, então existe $x_n \in f_nU \cap W_a^{ss}(p_{2n})$ tal que $x_n \to x$, $p_{2n} \to p_2$, com $a > 0$ fixo (grande).

Mais uma vez, $Qf^n(p_{2n}) = \mathcal{O}_2$ daí existe $q_n' \in Q$ tal que

$$q_n' f^n(p_{2n}) = p_2'.$$

O λ-Lema aplicado novamente produz discos D_n' em $q_n' \circ f^n \circ f_n(U)$ quase igual à $W^{uu}p_2'$. Assim,

$$g_nU \cap U \neq \emptyset$$

onde $g_n = q_n' f^n q_n f^n = q_n' q_n f^{2n}$. Como $\{f^n\}$ não tem ponto de acumulação no G e uma vez que os $q_n, q_n' \in Q$ que é compacto, $\{g_n\}$ não tem nenhum ponto de acumulação em G assim a maioria dos g_n estão fora do determinado conjunto compacto S. Isto prova que $gU \cap U \neq \emptyset$ para algum $g \in G - S$ e completa a prova da Cloud Lemma. ■

Demostração *(Do Teorema Estrutura de Produto Local).* Por hipótese φ é uma ação que satifaz Axioma A, assim Ω_φ é um conjunto hiperbólico para φ, então existe $\epsilon >$ pequeno tal que $W_\epsilon^u(x) \pitchfork W_\epsilon^s(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in \Omega_\varphi$. Como a decomposição $T_{\Omega_\varphi}M = N^u \oplus T\mathfrak{L} \oplus N^s$ é contínua, é claro que para cada $p, q \in \Omega_\varphi$ com p perto de q temos

$$\begin{array}{ccc} d(p,q) \leq \epsilon & & W_\epsilon^{uu}(p) \pitchfork W_\epsilon^s(\mathcal{O}_q) \neq \emptyset \\ & \Rightarrow & \\ p, q \in \Omega_\varphi & & W_\epsilon^{uu}(q) \pitchfork W_\epsilon^s(\mathcal{O}_p) \neq \emptyset. \end{array} \tag{5.3}$$

Por Axioma A, as órbitas compactas são densas em Ω_φ e p, q podem ser aproximado por p', q' em Ω_φ com $\mathcal{O}_{p'}, \mathcal{O}_{q'}$ compacto.

Pela persistência da transversalidade, as correspondente interseções para p', q' perto de p, q respectivamente são não vazios, isto é

$$\begin{array}{ccc} d(p',q') \leq 2\epsilon & & W_{2\epsilon}^{uu}(p') \cap W_{2\epsilon}^s(\mathcal{O}_{q'}) \neq \emptyset \\ & \Rightarrow & \\ p', q' \in \Omega_\varphi & & W_{2\epsilon}^{uu}(q') \cap W_{2\epsilon}^s(\mathcal{O}_{p'}) \neq \emptyset \end{array} \tag{5.4}$$

pelo Cloud Lemma, os pontos da interseão de (5.4) estão em Ω_φ. Como Ω_φ é um subconjunto fechado de M, assim, o conjuntos de pontos da interseção transversal de (5.3) estão em Ω_φ. Isto prova que (f, Ω_φ) tem estrutura do produto local. Por teoria local da variedade invariante (4.2.1), as variedades estáveis e instáveis das órbitas são φ-invariantes, ou seja $gW^u(x) = W^u(gx)$ e $gW^s(x) = W^s(gx)$ para cada $g \in G$. Assim, a órbita laminação de Ω_φ é subordinado ao $\mathscr{W}^u$, $\mathscr{W}^u$ então $(f, \mathscr{L})$ também tem estrutura do produto local. ■

Como consequência da estrutura do produto local, obtemos Ω-decomposição, assim como para os fluxos.

5.0.3 Prova do Teorema Decomposição Espectral

Decomposição espectral mostra que o conjunto não-errante de uma ação de grupo Axioma A se divide num número finito de componentes tal que em cada uma destas componentes a ação é topologicamente transiva.

5.0.12 Teorema. *Seja φ uma G-ação C^1 satisfazendo o Axioma A. Então, existe uma única decomposição*

$$\Omega_\varphi = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k.$$

Tal que os Ω_i são compactos, disjuntos, φ-invariantes e indecomponíveis. Em cada Ω_i, φ é topologicamente transitiva.

Demonstração. Seja φ uma G-ação que satisfaz Axioma A em M com elemento hiperbolico f. Seja ϵ suficientemente pequeno tal que (f, Ω_φ) tem 2ϵ- estrutura do produto local. Seja $p \in \Omega_\varphi$. Considere qualquer vizinhança V, V' de p tendo diâmetro $\leq \epsilon$. Então

$$Sat(V \cap \Omega) = Sat(V' \cap \Omega). \tag{5.5}$$

Para verificar (5.5) basta provar $V' \cap \Omega \subset Sat(V \cap \Omega)$ pela invariança de Ω. Com efeito seja $z \in V' \cap \Omega$ então Axioma A diz que p e z podem ser aproximados por p' e z' tal que $\mathcal{O}(p')$ e $\mathcal{O}(z')$ são compactos e $p' \in V \cap \Omega$. Por 2ϵ- estrutura do produto local,

$$\begin{array}{ccc} d(p', z') \leq 2\epsilon & & W^{uu}_{2\epsilon}(p') \pitchfork W^s_{2\epsilon}(\mathcal{O}_{z'}) \neq \emptyset \\ & \Rightarrow & \\ p', z' \in \Omega_\varphi & & W^{uu}_{2\epsilon}(z') \pitchfork W^s_{2\epsilon}(\mathcal{O}_{p'}) \neq \emptyset \end{array}$$

pela prova do Cloud Lemma, existe $Q \subset G$ compacto tal que para cada $w \in \mathcal{O}_{z'}$, temos por (5.2) $Qw = \mathcal{O}_{z'}$ e como existe $x \in W^{uu}_{2\epsilon}(p') \pitchfork W^s_{2\epsilon}(\mathcal{O}_{z'})$ tal que $f_n(x) \to z'$ e $d(f^n x, f^n p') \to 0$, então $q_m f^m(p') \to z'$ onde $(q_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset Q$, portanto $z' \in Sat(V \cap \Omega)$. Já que z' é arbitrariamente perto de z e $Sat(V \cap \Omega)$ é fechado, z esta também em $Sat(V \cap \Omega)$ completando a prova de (5.5).

Agora defino $\Omega(p) = Sat(V \cap \Omega)$ para qualquer vizinhança V de p tendo diâmetro $\leq \epsilon$. Então $\Omega(p)$ é compacto, não vazio, e φ-invariante. De (5.5) vemos que tanto $\Omega(p) = \Omega(p')$ ou $\Omega(p) \cap \Omega(p') = \emptyset$, $p, p' \in \Omega$. Seja U_p uma vizinhança aberta de $\Omega(p)$ tal que $d(\Omega(p), M \setminus U_p) < \frac{\epsilon}{3}$, implica que $U_p = U_{p'}$ ou $U_p \cap U_{p'} = \emptyset$. Neste sentido, a família $\{U_p\}_{p \in \Omega}$ é um cubrimento não sobrepostos de Ω por vizinhanças abertas . Sendo Ω compacto existe um cubrimento finito por vizinhanças $U_p^{'}s$, daí um número finito de os $\Omega(p)'s$ cobrem Ω e eles formam o Ω-decomposição $\Omega_\varphi = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m$.
Seja V, V' vizinhanças abertas de $p, p' \in \Omega_i$. Então $\Omega(p) = \Omega(p') = \Omega_i$ comprova que

$g(V \cap \Omega_i) \cap (V' \cap \Omega_i) \neq \emptyset$ para algum $g \in G$, isto é $\varphi|_{\Omega_i}$ é topologicamente transitiva. Claramente, transitividade topológico implica indecomponibilidade.

Unicidade da decomposição suponha que $\Omega_\varphi = \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_m$ e $\Omega_\varphi = \Omega_1' \cup ... \cup \Omega_n'$ onde Ω_i e Ω_j' são disjuntos, compactos, φ-invariates, indescomponivel respectivamente: dai temos $\Omega_\varphi = \cup_{i,j}\Omega_i \cap \Omega_j'$ é uma contradição indecomponibilidade a menos que os Ω_i são os Ω_j'. ■

Note que cada φ-órbita $\mathcal{O} \subset \Omega_\varphi$, sendo conexo, está em apenas uma peça Ω_i.

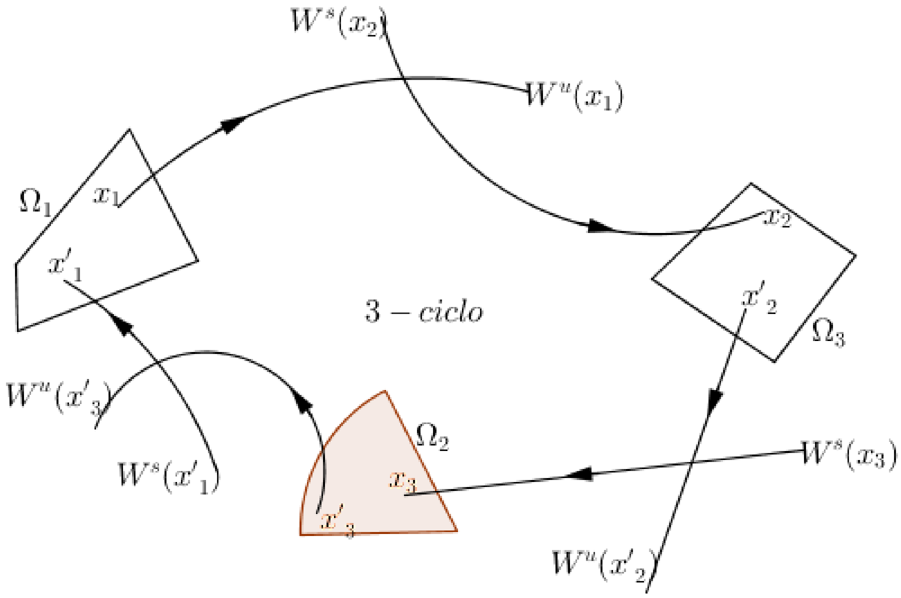
5.0.4 Ciclos

Há um ordem parcial ($\prec$) sobre os conjuntos básicos de uma ação de grupo Axioma A. Isto é

$\Omega_{i_j} \prec \Omega_{i_{j+1}}$ se, e somente se, $\emptyset \neq W^u(x) \cap W^s(y) \subsetneq \Omega$ para algum $x \in \Omega_{i_j}$, $y \in \Omega_{i_{j+1}}$ $1 \leq j \leq n-1$

- ▶ Com esta propriedade, podemos definir a noção de ciclos. dizemos que a ação φ Axioma A tem um n-ciclo se existe uma seqüência de peças básicas tal que $\Omega_{i_1} \prec ... \prec \Omega_{i_n} = \Omega_{i_1}$, $n \geq 2$.
- ▶ Um auto ciclo (ou 1-ciclo) ocorre quando $n = 2$. $\Omega_i \prec \Omega_i$ se, e somente se, existe $z \in W^u(x) \cap W^s(y) \subsetneq \Omega$ com $z \notin \Omega_i$, para algum $x, y \in \Omega_i$.

Por exemplo na figura temos um 3-ciclo sobre as peças básicas $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.



Em (5.0.18) mostra-se que a existência de ciclos é independente de qualquer elemento hiperbólico f que nós escolhemos em G.

Aqui está outro resultado qualitativo sobre o conjunto não-errante para uma ação de grupo Axioma A.

5.0.13 Teorema. *Uma G-ação que satifaz o Axioma A não tem auto ciclos.*

Demonstração. Seja $\Omega = \Omega_i \cup \cdots \cup \Omega_n$ por decomposição espectral de Ω. Suponha que Ω_i tem um auto ciclo, isto é existe $z \in W^u\Omega_i \cap W^s\Omega_i$ para algum ponto $z \in M - \Omega_i$. Como $W^u\Omega_i = \bigcup_{y\in\Omega_i} W^{uu}(y)$, então $z \in W^{uu}(p) \cap W^{ss}(p')$ para algum $p, p' \in \Omega_i$. Seja U uma vizinhança de z e dado um subconjunto compacto S de G. Por transitividade topológica em Ω_i, qualquer vizinhança pequena de p intersecta uma φ-órbita em Ω_i passando arbitrariamente perto de p'. Por Axioma A ele pode ser aproximada por uma órbita compacta $\mathcal{O}$ passando arbitrariamente perto de p e p'. Em particular, $U \cap W^u\mathcal{O}$ e $U \cap W^s\mathcal{O}$ será não vazio. Fixa a órbita $\mathcal{O}$ e existe um conjunto compacto $Q \subset G$ tal que $Qx = \mathcal{O}$ para cada $x \in \mathcal{O}$. Pelo λ-lema como na prova do Cloud Lemma, há um elemento f_n em G da forma.

$$g_n = f^n \circ q_n \circ f^n = f^{2n} \circ q_n$$

tal que $g_n U \cap U \neq \emptyset$, $q_n \in Q$, e n é arbitrariamente grande. Comohj $\{f^n\}$ não tem nenhum ponto de acumulação no G, também a seqüência $\{g_n\}$ não tem. Assim, a maioria dos g_n estão fora de S logo z é um ponto não-errante, isto é $z \in \Omega_j$ para algum j. Se $j \neq i$, então Ω_j é compacto, invariante, e disjuntos com Ω e $d(f^n z, f^n p') \to 0$ daí $f^n z$ não poderia tender a Ω_i porque $d(\Omega_i, \Omega_j) > 0$. Assim $z \in \Omega_i$ uma contradição. Isto prova (5.0.13). ■

Por estrutura do produto local, o próximo teorema aplica-se quando $\Omega_\varphi = \Lambda$ e φ é uma ação de grupo Axioma A.

5.0.14 Teorema. *Seja φ uma G-ação hiperbólico a Λ com elemento hiperbólico f. suponha $(f, \mathscr{L})$ tem estrutura de produto local, onde $\mathscr{L}$ é a φ-órbita laminação de Λ. Então existe uma vizinhança U de Λ tal que qualquer ponto x cuja f-iterada para frente permanecem em U, encontra-se em $W^{ss}_\epsilon(x')$ para algum $x' \in \Lambda$. Da mesma forma f-iterada para trás e W^{uu}.*

Demonstração. Este é um caso especial do teorema (4.2.11). ■

5.0.15 Corolário. *Se φ é uma G-ação que satisfaz o Axioma A com elemento hiperbolico f e Ω decomposição $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m$ então $\partial\mathcal{O}_x$ intercepta pelo menos dois peças básicos $\Omega_i's$, $x \in M - \Omega$.*

Demonstração. Por (2.2.2) o bordo de qualquer órbita está em Ω. Isto é $\partial\mathcal{O}_x \subset \Omega$. Se $\partial\mathcal{O}_x \subset \Omega_i$ para algum único i então os pontos de acumulação de $(f^n x)$ estão em Ω_i. Isto é $f^n x \to \Omega_i$ quando $n \to \infty$. Dai as f-iteradas estão em alguma vizinhança de Ω por (5.0.14), $x \in W^{uu}(x') \cap W^{ss}(x'')$ para algum $x', x'' \in \Omega_i$, isto é Ω_i tem um auto ciclo, isso contradiz porque uma ação Axioma A não tem auto ciclos. ■

5.0.5 Aplicações de Axioma A e Fins

Chegamos a um dos resultados principais. Isto é, se φ é uma ação de grupo Axioma A e $\Omega_\varphi \neq M$ então G é hiperbólico (ver [18]). Para provar aplicamos propriedades de fins e decomposição espectral.

5.0.16 Teorema. *Se φ é G-ação e satisfaz Axioma A em M então ou $\Omega_\varphi = M$ ou senão G é hiperbólico.*

Demonstração. Suponha $\Omega_\varphi \neq M$. Então M têm mais de uma órbita logo pelo teorema (4.3.8) G tem um ou dois fins; devemos mostrar que ele não tem apenas um fim e que os fins são direita-invariante.

Por Decomposição Espectral, (5.0.12) $\Omega_\varphi = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m$ onde os Ω_i são disjuntos. Como φ é topologicamente transitivo em cada Ω_i. Seja $x \in M - \Omega_\varphi$ e considero a órbita de x, $\mathcal{O}_x$. Por (5.0.15) $\partial\mathcal{O}_x$ não pode estar inteiramente em um conjunto básico, ele deve estar em pelo menos dois, isto é

$$\partial\mathcal{O}_x \subset \Lambda_- \cup \Lambda_+ \qquad \Lambda_+ = \Omega_i \qquad \Lambda_- = \bigcup_{j\neq i} \Omega_j$$

e $f^{n_k}x \to x_\pm \in \Lambda_\pm$ para alguma sequência $n_k \to \pm\infty$ quando $k \to \pm\infty$.

Seja U um gerador fixo de G. Sejam $N_\pm$ pequenas vizinhanças disjuntos de $\Lambda_\pm$. Então $G = L_- \cup S \cup L_+$ onde

$$S = \{g \in G : gx \in M - (N_- \cup N_+)\}$$

$$L_\pm = \{g \in G : gx \in N_\pm\}.$$

Claramente S é compacto. Como $\Lambda_\pm$ são φ-invariantes $\varphi(U, \Lambda_\pm) = \Lambda_\pm$. Por isso $\varphi(U, N_-) \cap \varphi(U, N_+) = \emptyset$ para as pequenas vizinhanças $N_\pm$ por continuidade de φ.

Para cada $ug_\pm \in \mathscr{H}_U(L_\pm)$, $g_\pm \in L_\pm$,

$$\varphi(ug_\pm, x) = \varphi(u, \varphi(g_\pm, x)) \in \varphi(U, N_\pm)$$

$\mathscr{H}_U(L_-) \cap \mathscr{H}_U(L_+) = \emptyset$. Daí, $\partial_U(L_\pm) \subset \mathscr{H}_U S$ portanto $\partial_U(L_\pm)$ é limitado. Desde que $L_\pm$ contém um número infinito de potencias de f e una vez que $\mathbb{Z} \approx \{f^n\}$ é um subgrupo não compacto fechado de $G, L_\pm$ é ilimitado. Pelo Lema de Zorn's, existem fins $\mathfrak{e}_\pm$ contendo $L_\pm$. Já que $L_- \cap L_+ = \emptyset$, $\mathfrak{e}_- \neq \mathfrak{e}_+$, isto é G tem ≥ 2 fins. Como G tem um ou dois fins então, ele tem exatamente dois fins, $\mathfrak{e}_-$ e $\mathfrak{e}_+$.

Resta mostrar $\mathfrak{e}_\pm$ são direita-invariante. Suponha que G têm dois fins, mas não hiperbólico. Considere o subgrupo isotropico $H = \{h \in G : \mathfrak{e}h = \mathfrak{e}, \forall\, \mathfrak{e} \in \mathcal{E}_G\}$ das fins como em (3.4.16). Escolha qualquer $g \in U \cap (G - H)$. Então g comuta as fins: $\mathfrak{e}_+ g = \mathfrak{e}_-$, $\mathfrak{e}_- g = \mathfrak{e}_+$. Por isso, se $f^{n_k} \in L_+$ e k é muito grande, então $f^{n_k} \in L_-$. (Nós ainda não estabelecemos que $f^{n_k} \to \mathfrak{e}_\pm$ quando $n \to \pm\infty$ apenas que isso vale para uma subsequência.) Como f está no centro de G,

$$\varphi(f^{n_k} g, x) = \varphi(g f^{n_k}, x) = \varphi(g, \varphi(f^{n_k}, x)) \in \varphi(U, N_+).$$

Mas $\varphi(U, N_+) \cap N_- = \emptyset$, como $f^{n_k} g$ não pode pertencer a L_-. Assim, não existe tal g e a prova de (5.0.16) está completa. ■

5.0.17 Corolário. *Se φ é uma G-ação que satisfaz o Axioma A com elemento hipebólico f e se $\Omega_\varphi \neq M$ então f^n converge a um fim de G quando $n \to \infty$ e para o outro quando $n \to -\infty$.*

Demonstração. Sejam $\Lambda_\pm$, $N_\pm$, $L_\pm$, S, n_k como em (5.0.16). Podemos supor $f \in U$, o gerador de G. Como S é compacto e $\{f^n\}$ é fechado não compactos porque M têm mais de uma órbita, logo existe um inteiro n_0 tal que $n \geq n_0$ implica f^n não esta em S. Como $\varphi(U, N_+) \cap N_- = \emptyset$, $f^{n+1} \in L_+$ para qualquer $n \geq n_0$ tal que $f^n \in L_+$. Visto que $n_k \to \infty$ quando $k \to \infty$ podemos começar em qualquer $f^{n_k} \in L_+$ com $n_k \geq n_0$ e ter a certeza de ficar em L_+ para todo f^n, $n \geq n_k$. Por isso $f^n \to \mathfrak{e}_+$ quando $n \to \infty$. Por (3.4.18), $f^{-n}u_n$ tende para outro fim, $u_n \in U$ isto é $f^{-n} \to \mathfrak{e}_-$ quando $n \to -\infty$. ■

Voltemos ao problema da definição intrinsecamente quando uma ação tem ciclos. Se φ é uma G-ação que satisfaz o Axioma A com Ω-decomposição $M \neq \Omega_\varphi = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m$. Por (5.0.16) G é um grupo hiperbólico, seja $\mathfrak{e}_\pm$ as fins de G, e U um gerador de G e sejam $N_1, \cdots, N_m$ as pequenas vizinhanças abertas de $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$. Para qualquer $x \in M - \Omega$ seja

$$L_i = \{g \in G : gx \in N_i\} \qquad i = 1, \cdots, m.$$

Como Ω_i é φ-invariante, os $\mathscr{H}_U L_i$ são disjuntos, assim como na prova de (5.0.16), pelo menos se os N_i são pequenos o suficiente. Além disso, como em (5.0.16), cada L_i pertence a um fim $\mathfrak{e}_i$ de G. Como G é de dois-fins concluimos que $\partial\mathcal{O}_x$ interseca no máximo dois peças $\Omega_i's$. Por (5.0.15), $\partial\mathcal{O}_x$ interseca pelo menos dois $\Omega_i's$, sejam eles $\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}$. Define

$$\partial_\pm\mathcal{O}_x = \bigcap_{Q \in \mathfrak{e}_\pm} \overline{\varphi(Q, x)} = limit_{g \to \mathfrak{e}_\pm}\text{pontos de } gx$$

onde $limit_{g \to \mathfrak{e}_\pm}$pontos de $gx = \{p \in M : g_n x \to p \text{ quando } g_n \to \mathfrak{e}_\pm\}$.

Então $\partial\mathcal{O}_x = \partial_-\mathcal{O}_x \cup \partial_+\mathcal{O}_x \subset \Omega_{i_1} \cup \Omega_{i_2}$. Observa-se que $\partial_+\mathcal{O}_x$ encontra-se em um conjunto básico e $\partial_-\mathcal{O}_x$ no outro. Porque L_{i_1}, L_{i_2} são disjuntos, não vazios , um contendo $\mathfrak{e}_-$, o outro a $\mathfrak{e}_+$, seja $L_{i_1} \in \mathfrak{e}_-$, $L_{i_2} \in \mathfrak{e}_+$, então

$$\partial_-\mathcal{O}_x = \bigcap_{\substack{Q \in \mathfrak{e}_- \\ Q \subset L_{i_1}}} \overline{\varphi(Q, x)} \qquad \partial_+\mathcal{O}_x = \bigcap_{\substack{Q \in \mathfrak{e}_+ \\ Q \subset L_{i_2}}} \overline{\varphi(Q, x)}$$

mostra que $\partial_-\mathcal{O}_x \subset \Omega_{i_1}$, $\partial_+\mathcal{O}_x \subset \Omega_{i_2}$.

Sem referência a um elemento hiperbólico particular de φ define

$$\Omega_i \prec \Omega_j \Leftrightarrow \partial_-\mathcal{O}_x \subset \Omega_i,\ \partial_+\mathcal{O}_x \subset \Omega_j \text{ para algum } \mathcal{O}_x \subset M - \Omega.$$

Isto dá uma ordem parcial em $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$, única até a reversão causada pelo intercâmbio $\mathfrak{e}_-$ e $\mathfrak{e}_+$. Se f é um elemento hiperbólico de φ, seja $\underset{f}{\prec}$ que denota a ordem parcial dos Ω_i definido em (5.0.4) por

$$\Omega_i \underset{f}{\prec} \Omega_j \Leftrightarrow W^u\Omega_i \cap W^s\Omega_j \nsubseteq \Omega$$

onde as variedades estáveis e instáveis foram construídos utilizando f. Por (5.0.17), ou $f^n \to \mathfrak{e}_+$ ou então $f^n \to \mathfrak{e}_-$ quando $n \to \infty$. Se $f^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{e}_+$ então $\prec = \underset{f}{\prec}$. Se $f^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{e}_-$ então $\prec = \underset{f^{-1}}{\prec}$. Somando-se isso, afirmamos

5.0.18 Proposição. *Se φ é uma ação que satisfaz o Axioma A então os ciclos de quaisquer dois elementos hiperbólicos são iguais até reversão. Em particular, o pressuposto ciclo é independente do elemento hiperbólico que é escolhido.*

Finalmente, discutimos perturbações de φ quando φ é uma G-ação C^1 com conjunto hiperbólico Λ e $\mathscr{L}$ é a φ-órbita laminação de Λ. A teoria de perturbação de HPS[12] exige que $(f, \mathscr{L})$ seja placa expansiva. A laminação $\mathscr{L}$ de Λ é chamada C^1-suavizavel se, e só se, $\mathscr{L}$ estende-se a um C^1 folheação local perto de cada $p \in \Lambda$.

5.0.19 Proposição. *Se φ é uma G-ação e o conjunto compacto Λ é φ-órbita laminada então esta laminação de Λ é C^1-suavizavel.*

Demonstração. A construção na prova do lema de interseção (5.0.10) dá a estas folheações locais C^1. ∎

5.0.20 Corolário. *Se φ é um axioma A G-ação com elemento hiperbólico f e se $\mathscr{L}$ é a φ-órbita laminação de Ω_φ, então $(f, \mathscr{L})$ é placa expansiva.*

Demonstração. Por (5.0.19), $\mathscr{L}$ é C^1-suavizavel. Por (4.2.2(i) de HPS[12]), $(f, \mathscr{L})$ é a placa expansiva. ■

O próximo resultado diz que a teoria de perturbação canônica [HPS[12], cap:7] é natural respeitando G-ações. Isto é persistência de conjuntos hiperbólicos para ações hiperbólicos ele é uma das principal propriedades para provar o teorema de estabilidade.

5.0.6 Teorema Persistência

5.0.21 Teorema (Persistência [18]). *Se φ é uma G-ação com conjunto hiperbólico $\Lambda \subset M$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de φ em $A^1(G, M)$ tal que para cada $\varphi' \in \mathcal{U}$ existe uma órbita conjugação*

$$h_{\varphi'} : (\varphi, \Lambda) \to (\varphi', \Lambda')$$

onde Λ' é um conjunto compacto φ'-invariante determinado canonicamente perto de Λ. Além disso, h está perto da inclusão $i : \Lambda \to M$ quando φ' é suficientemente perto de φ.

Demonstração. Seja $\mathscr{L}$ a φ-órbita laminação de Λ. Seja $f_0 \in G$ um elemento hiperbólico para φ e seja $f = \varphi(f_0)$, $f' = \varphi'(f_0)$. Por (5.0.20) $(f, \mathscr{L})$ é uma placa expansiva e claramente f' é uma perturbação C^1 de f. Por (4.2.2(ii)) existe um f'-invariante laminação $\mathscr{L}'$ perto de $\mathscr{L}$ e uma folha conjugação canônica $h_{f'} : (f, \mathscr{L}) \to (f', \mathscr{L}')$ perto da inclusão $\Lambda \hookrightarrow M$. Devemos mostrar que $\mathscr{L}'$ é a φ'-órbita laminação de $\Lambda' = h_{f'}\Lambda$ e que $h_{f'}$ transporta φ-órbitas em φ'-órbitas.

$h_{f'}$ é caracterizado como segue: fixando um subfibrado suave η em $T_\Lambda M$, complementar a $T\mathscr{L}$, e fixado uma pequena plaquação $\mathscr{P}$ de $\mathscr{L}$. Dado $x \in \Lambda$, $h_{f'}(x)$ é o único ponto de $exp_x\eta(\varepsilon)$ e f'-órbita de x' é sombreada por uma f-pseudo órbita que respeite a plaquação $\mathscr{P}$.

Seja W um gerador de G, isto é um conjunto compacto de geradores com $W^{-1} = W$. Seja $\{x_m\}$ uma f-pseudo órbita através x que respeite $\mathscr{P}$ e perto da sombra $\{f'^n(x')\}$, $x' = h_{f'}x$. Isto é $x_{n+1} = \varphi(g_n, f x_n)$, g_n perto de $1 \in G$, e $x_0 = x$. Seja $g \in W$. Então provaremos que existem g', g'' perto de g, de modo que

$$\begin{aligned} z' &= \varphi'(g', x') \in exp_{\varphi(g,x)}\eta(\varepsilon) \quad x' = h_{f'}(x) \\ z'' &= \varphi'(g, x') \in exp_{\varphi(g'',x)}\eta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Para encontrar g', g'' reconsiderar a prova de (5.0.10): seja D um disco suave em G transversal a 1 para o subgrupo de isotropia G_x e considerar o mapa

$$\begin{aligned} D \times exp_x\eta(\varepsilon) &\to M \\ (d, z) &\to \varphi(gd, z) \end{aligned}$$

que é um difeomorfismo local para uma vizinhança de $\varphi(g, x)$ em M. Uma vez que envia $D \times 0$ a uma vizinhança de $\varphi(g, x)$ em $\mathscr{L}_{\varphi(g,x)}$, como φ' é perto de φ, e desde que $h_{f'}$ perto da *inclusão* podemos encontrar $d, d'' \in D$ tal que $g' = gd$, $g'' = gd''$.

Afirmamos que $\{\varphi(g, x_n)\}$ e $\{\varphi(g'', x_n)\}$ são f-pseudo órbitas que respeita a plaquação $\mathscr{P}$. Por centralidade do f_0 podemos escrever

$$\begin{aligned}\varphi(g,x_{n+1}) &= \varphi(g,\varphi(g_n,fx_n))\\ &= \varphi(gg_ng^{-1}f_0g,x_n)\\ &= \varphi(gg_ng^{-1},f\varphi(g,x_n)).\end{aligned}$$

Quando os g_n estão muito perto de 1, os gg_ng^{-1} estão perto de 1 e portanto $\{\varphi(g,x_n)\}$ é um f-pseudo órbita que respeita $\mathscr{P}$. Como g'' perto de g, e por isso também se limita a um conjunto compacto, logo $\{\varphi(g'',x_n)\}$ é f-pseudo órbita que respeita $\mathscr{P}$.

Também afirmamos que $\{\varphi(g,x_n)\}$ sombreia $\{f'^n(z')\}$ enquanto $\{\varphi(g'',x_n)$ sombrea $\{f'^n(z'')\}$. Novamente pela centralidade do f_0

$$f'^n(z') = \varphi'(f_0^n,\varphi'(g',x')) = \varphi'(g',f'^(x')).$$

Como φ' perto de φ, x_n é próximo de $f'^n(x'), g'$ é próximo g, e g limita-se a conjunto compacto de G, este $\varphi(g',f'^n(x'))$ é perto a $\varphi(g,x_n)$. Similarmente

$$f'^n(z'') = \varphi'(f_0^n,\varphi'(g,x')) = \varphi'(g,f'^n(x'))$$

é próximo de $\varphi(g'',x_n)$. Por isso, as pseudo-órbitas estão perto da sombra $\{f'^n(z')\}$ e $\{f'^n(z'')\}$. Pela caracteização de $h_{f'}$ conclui-se $h_{f'}(\varphi(g,x)) = z'$, $h_{f'}(\varphi(g'',x)) = z''$. Isto é para qualquer $g\in W$ e todo $x\in\Lambda$

$$h_{f'}(\varphi(g,x)) = \varphi'(g',h_{f'}x) \tag{5.6}$$
$$h_{f'}(\varphi(g'',x)) = \varphi'(g,h_{f'}x) \tag{5.7}$$

para algum g',g'' perto de g. Em seguida estendemos estas equações a todo $g\in G$. Afirmamos que para cada $g\in G$. e todo $x\in\Lambda$

$$h_{f'}(\varphi(g,x)) = \varphi'(g',h_{f'}x) \tag{5.8}$$
$$h_{f'}(\varphi(g'',x)) = \varphi'(g,h_{f'}x) \tag{5.9}$$

para algum g',g'' em alguma componente conexa de g em G. Por (5.6), (5.7) basta a prova de (5.8), (5.9) para g da forma g_1g_2 porque $g\in W^k$ onde (5.8), (5.9) são conhecidos por g_1 e g_2. Então

$$\begin{aligned}h_{f'}(\varphi(g_1g_2,x)) &= h_{f'}(\varphi(g_1,\varphi(g_2,x)))\\ &= \varphi'(g_1',h_{f'}\varphi(g_2,x))\\ &= \varphi'(g_1'g_2',h_{f'}x)\end{aligned}$$

para algum g_1',g_2' em alguma componente conexa de g_1,g_2 respectivamente. O produto $g_1'g_2'$ esta em alguma componente conexa de g_1g_2., porque G_1, é a componente de 1, que é um subgrupo normal de G. Este prova (5.8) para $g=g_1g_2$. A demostração de (5.9) é semelhante:

$$\begin{aligned}\varphi'(g_1g_2,h_{f'}x)) &= \varphi'(g_1,\varphi'(g_2,x))\\ &= \varphi'(g_1,h_{f'}\varphi(g_2'',x))\\ &= h_{f'}(\varphi'(g_1'',\varphi(g_2'',x)))\\ &= h_{f'}(\varphi'(g_1''g_2'',x))\end{aligned}$$

para algum g_1'', g_2'' em alguma componente conexa de g_1, g_2 em G. O produto $g_1''g_2''$ esta em alguma componente de g_1g_2, provando (5.9) para $g = g_1g_2$.

Desde (5.9) deduzimos que cada $\mathscr{L}'_x$ é invariante por $\varphi'(g, .)$, $g \in G_1$. Para

$$\varphi'(g, x') = \varphi'(g, h_{f'}(x)) = h_{f'}(\varphi(g'', x)) \in h_{f'}(\mathscr{L}_x) = \mathscr{L}'_{x'}$$

desde que $g'' \in G_1$ onde $g \in G_1$. Por (5.8) e o fato que $\mathscr{L}_x = \varphi(G_1, x)$, temos também

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_{x'} &= h_{f'}(\mathscr{L}_x) \\ &= h_{f'}(\bigcup_{g \in G_1} \varphi(g, x)) \subset \bigcup_{g' \in G_1} \varphi'(g', h_{f'}x) \\ &= \varphi'(G_1, x'). \end{aligned}$$

Assim, a componente conexa da φ'-órbita que passa por $x' \in \Lambda'$ é exatamente $\mathscr{L}'_{x'}$, isto é a φ'-órbitas são as lâminas de Λ' e $\mathscr{L}' = h_{f'}\mathscr{L}$ é a laminação. Também, desde (5.8), (5.9) deduzimos

$$h_{f'}(\mathscr{L}_{\varphi(g,x)}) = \mathscr{L}'_{h_{f'}(\varphi(g,x))} = \mathscr{L}'_{\varphi'(g, h_{f'}x)}$$

o qual mostra que $h_{f'}$ é uma órbita conjugação. Este completa a demostraçaõ de (5.0.21). ■

5.1 Decomposição Classe Homoclínica.

Seja f um C^1-difeomorfismo que gera uma $\mathbb{Z}$-ação e $\mathcal{O}$ uma órbita periódica hiperbólico. Denotemos por $W \pitchfork W'$ o conjunto de pontos de interseção transversal entre duas subvariedades $W, W' \subset M$.

Seja p um ponto fixo hiperbólico, se $x \in W^s(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}$ então x é um **ponto homoclínico** de p.

5.1.1 Definição. *Sejam $p \neq q$ pontos fixo hiperbólicos de M, se $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ então x é um ponto heteroclínico de p, q*

Se $x \in M$ é um ponto homoclínico de p, então as iteradas de x também são pontos homoclínicos, pois os conjuntos estável e instável de p são conjuntos invariantes. Portanto, chamaremos a órbita de x a órbita homoclínica e a denotaremos por $\mathcal{O}(x)$. Além disso, todo ponto homoclínico converge para o ponto fixo hiperbólico p sob as iteradas de f e sob as iteradas de f^{-1}, implicando que o fecho da órbita de x é dado pela união da órbita de x e de p, ou seja $\overline{\mathcal{O}(x)} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(x) \cup \{p\}$. Assim temos que, o fecho da órbita homoclínica é um conjunto compacto e invariante por f. Alem disso se $x \in M$ é um ponto homoclínico transversal p, entaõ $\overline{\mathcal{O}(x)}$ é hiperbólico.

5.1.2 Definição. *Seja p um ponto fixo hiperbólico, dizemos que um ponto homoclínico x é transversal, se os conjuntos $W^s(p)$ e $W^u(p)$ se intersectam transversalmente em x, isto é*

$$T_xM = T_xW^s(p) \oplus T_xW^u(p).$$

5.1.3 Definição. *Seja $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ órbitas periódicas hiperbólicos, dizemos que x é ponto de interseção transversal, entre o estável $W^s(\mathcal{O})$ e o instável variedade $W^u(\mathcal{O}')$ se*

$$T_xM = T_xW^s(\mathcal{O}) + T_xW^u(\mathcal{O}').$$

5.1.1 Classe homoclínica.

A Classe homoclínica $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ é o fecho do conjunto de pontos de intersecção transversais entre as variedades estáveis e instáveis $W^s(\mathcal{O})$ e $W^u(\mathcal{O})$. Denotemos por

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) = \overline{W^s(\mathcal{O}) \pitchfork W^u(\mathcal{O})}.$$

$x \in W^s(\mathcal{O}) \pitchfork W^u(\mathcal{O})$ se e só se $T_xM = T_xW^s(\mathcal{O}) + T_xW^u(\mathcal{O}')$ com $x \in W^s(\mathcal{O}) \cap W^u(\mathcal{O})$.

Referimo-nos [23] por suas propriedades básicas, que agora Lembramos:

5.1.4 Teorema (Prova [23])**.** *1. Dois órbita periódica hiperbólico $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ são homoclinicamente relacionadas se $W^s(\mathcal{O}_1)$ intersecta transversalmente $W^u(\mathcal{O}_2)$ e $W^u(\mathcal{O}_1)$ intersecta transversalmente $W^s(\mathcal{O}_2)$. Isto define uma relação de equivalência no conjunto de órbitas periódicas hiperbólicos.*

$$\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow W^s(\mathcal{O}_1) \pitchfork W^u(\mathcal{O}_2) \neq \emptyset \neq W^s(\mathcal{O}_2) \pitchfork W^u(\mathcal{O}_1).$$

2. $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ é o fecho da união das órbitas periódicas homoclinicamente relacionadas com $\mathcal{O}$.

3. Se $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ são homoclinicamente relacionadas, $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ coincide com o fecho do conjunto de interseção transversais entre $W^u(\mathcal{O})$ e $W^s(\mathcal{O}')$. Isto é

$$\overline{W^s(\mathcal{O}) \pitchfork W^u(\mathcal{O})} = \overline{W^s(\mathcal{O}) \pitchfork W^u(\mathcal{O}')}.$$

4. A classe homoclínica é um conjunto invariante transitivo.

5.1.2 Período de uma classe homoclínica.

O período $\ell(\mathcal{O}) \geq 1$ da classe homoclínica $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ é o máximo divisor comum dos períodos dos pontos periódicos hiperbólicos homoclinicamente relacionadas com $\mathcal{O}$. O grupo $\ell(\mathcal{O})\cdot\mathbb{Z}$ é chamado o conjunto de períodos de $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Temos a seguinte caracterização: para$p \in \mathcal{O}$, e $n \in \mathbb{Z}$, as variedades $W^s(f^n(p))$ e $W^s(p)$ têm uma interseção transversal se e somente se $n \in \ell(\mathcal{O}) \cdot \mathbb{Z}$. Mais geralmente :

5.1.5 Proposição. *Considere um ponto q periódica hiperbólico cuja órbita é homoclinicamente relacionada com $\mathcal{O}$ e tal que $W^u(p) \pitchfork W^s(q) \neq \emptyset$. Então $W^u(f^n(q)) \pitchfork W^s(p) \neq \emptyset$. se e somente se $n \in \ell(\mathcal{O}) \cdot \mathbb{Z}$. Em particular $W^u(q)$ intersecta transversalmente $W^s(p)$.*

Essa proposição é uma consequência do teorema de Smale em pontos homoclínicas transversais [24] e de Palis' λ-lema).

5.1.6 Teorema (**Homoclínica de Smale's**)**.** *Considere um difeomorfismo local f, um ponto fixo hiperbólico p e uma intersecção homoclínica transversal $x \in W^u(p) \pitchfork W^s(q)$. Então, em qualquer vizinhança de $\{p\} \cup \{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, existe, para alguma iteração f^n, um conjunto hiperbólico K contendo p e x.*

Demostração proposição (5.1.5) . Seja p, q dois pontos periódicos hiperbólicos cujas órbitas estão homoclinicamente relacionados e suponha que $W^u(p) \pitchfork W^s(q) \neq \emptyset$. Seja $G_{p,q}$ o conjunto de inteiros n tal que $W^u(f^n(q)) \pitchfork W^s(p) \neq \emptyset$. O conjunto $G_{p,q}$ é invariante pela adição. De fato, se $n \in G_{p,q}$, então $W^u(f^n(q)) \pitchfork W^s(p)$ e $W^u(f^n(p)) \pitchfork W^s(f^n(q))$ são não-vazio. O lema de inclinação implica que $W^s(p)$ acumula sobre $W^s(f^n(q))$ de modo que ele intersecta transversalmente $W^u(f^n(p))$. Se, além disso, $m \in G_{p,q}$, temos $W^u(f^{n+m}(q)) \pitchfork W^s(f^n(p)) \neq \emptyset$, de modo que $W^s(p)$ intersecta transversalmente $W^u(f^{n+m}(q))$ e $m+n \in G_{p,q}$.

O conjunto $G_{p,q}$ é invariante por subtração pelo período r de p. Já que para $n \in G_{p,q}$, o oposto $-n = (r-1)n - rn$. Também pertence a $G_{p,q}$. como $G_{p,q}$ coencide com $G_{q,p}$ e é um grupo.

Se q' é outro ponto periódico hiperbólico cuja órbita é homoclinicamente relacionados com os de p, q e satisfaz $W^u(q') \pitchfork W^s(p) \neq \emptyset$, $G_{p,q} = G_{p,q'}$. Na verdade, a variedade estável e instável de q, q' se intersectam transversalmente, e as variedades instáveis de $f^n(q)$, $f^n(q')$ intersectam as mesmas variedades estáveis. Consequentemente, o grupo $G = G_{p,q}$ contém todos os períodos das órbitas periódicas hiperbólicos homoclinicamente relacionado à órbita $\mathcal{O}$ de p. Em particular, G contém $\ell(\mathcal{O}) \cdot \mathbb{Z}$.

Por outro lado, vamos considerar $n \in G$ e um ponto de interseção $x \in W^u(f^n(p)) \pitchfork W^s(p)$. Define um difeomorfismo local g, que coincide com f^r em uma vizinhança (fixa) de p e que envia um iterado $x^u = f^{-n-k_u r}(x) \in W^u(p)$ para um iterado $x^s = f^{k_s r}(x) \in W^s(p)$. Pelo teorema homoclínica de Smale as órbitas de x^u, x^s, p para g estão contidos em um conjunto hiperbólico, pode-se sombrear uma pseudo órbita

$$p, g^{-m}(x^s), g^{-m+1}(x^s), \cdots, g^{m-1}(x^s), p$$

por uma órbita periódica hiperbólico que é homoclinicamente relacionado com p. Por construção desta órbita está contido em uma órbita periódica hiperbólico $\mathcal{O}'$ de f que está relacionada homoclinicamente a $\mathcal{O}$ e cujo período tem a forma $n + k.r$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, onde r é o período de p. Isto implica que n pertence $\ell(\mathcal{O}) \cdot \mathbb{Z}$, de modo que $G = \ell(\mathcal{O}) \cdot \mathbb{Z}$. ■

5.1.3 Classe homoclínica Pontual.

Se p é um ponto da órbita periódica hiperbólico $\mathcal{O}$, a classe homoclínica pontual $h(p)$ é o fecho do conjunto de pontos de interseção transversais entre as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$. Isto é $h(p) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}$, este conjunto é, em geral, não invariante por f.

5.1.7 Lema. *Se a órbita de um ponto periódico hiperbólico q é homoclinicamente relacionada com $\mathcal{O} = \mathcal{O}_p$ e $W^u(p)$ e $W^s(q)$ tem um ponto de interseção transversal, então, $h(p)$ coincida com o fecho do conjunto de interseção transversais entre $W^u(p)$ e $W^s(q)$. Em particular $h(p) = h(q)$.*

Demonstração. Pela proposição (5.1.5) $W^u(q)$ e $W^s(p)$ tem um ponto de interseção transversal. Se n, m são os períodos de p e de q, então para f^{nm}, os pontos p, q são fixos, homoclinicamente relacionados e seus classes homoclínica coincidem com $h(p), h(q)$ e com o conjunto de interseção transversais entre $W^u(p)$ e $W^s(q)$. ■

A proposição seguinte decompõe as classes homoclínicas na forma $\Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_\ell$ tal que f^ℓ é topologicamente mixing em cada peça Λ_i. (isto é para qualquer aberto não vazio U, V de Λ_i, existe $n_0 \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$.) No entanto, a priori, as peças não são disjuntos.

5.1.8 Proposição. *Seja $\mathcal{O}$ uma órbita periódica hiperbólico, $p \in \mathcal{O}$ e $\ell = \ell(\mathcal{O})$ o período da classe homoclínica. Então:*

1. *$\mathcal{H}(\mathcal{O})$ é a união dos iterados $f^k(h(p))$;*

2. *$h(p)$ é invariante por f^ℓ;*

3. *a restrição de f^ℓ a $h(p)$ é topologicamente mixing;*

4. *se $f^j(h(p)) \cap f^k(h(p))$ tem interior não vazio em $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, então $f^j(h(p)) = f^k(h(p))$.*

Demonstração. Sejam m, n, k três números inteiros. Afirmamos que o fecho de $W^u(f^k(p)) \pitchfork W^s(f^m(p))$ é ou vazio ou coincide com $f^{m+n\ell}(h(p))$. Na verdade, o primeiro conjunto coincide com a imagem por $f^{m+n.\ell}$ do fecho de $W^u(f^{k-m-n.\ell}(p)) \pitchfork W^s(f^{-n\ell}(p))$, porque W^s, W^u são invariantes. Se este conjunto é não vazio, deduz-se que $k-m-n.\ell$ pertence a $\ell \cdot \mathbb{Z}$, por isso $W^u(f^{k-m-n.\ell}(p))$ e $W^u(p)$ acumular-se uns sobre os outros. Da Mesma Forma, $W^s(f^{-n\ell}(p))$ e $W^s(p)$ acumular-se uns sobre os outros. Consequentemente, o fecho de $W^u(f^{k-m-n.\ell}(p)) \pitchfork W^s(f^{-n\ell}(p))$. coincide com $h(p)$, assim prova a afirmação.

A afirmação implica imediatamente que $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ coincide com a união das iterações de $h(p)$ e que $f^\ell(h(p))$ coincide com $h(p)$. Assim, os dois primeiros itens segurar.

Seja $U, V \subset M$ dois conjuntos abertos que intersectam $h(p)$. Temos de mostrar que para qualquer n grande, a interseção $f^{n.\ell}(U) \cap V$ intersecta $h(p)$. Nós primeiro introduzimos dois pontos $x \in U \cap W^u(p) \pitchfork W^s(p)$ e $y \in V \cap W^u(p) \pitchfork W^s(p)$. Vamos considerar um disco $D \subset W^u(p) \cap U$ contendo x. A inclinação lema mostra que, para n grande $f^{n.\ell}(D)$ se acumula em qualquer disco de $W^u(p)$, e, consequentemente, sobre a variedade instável local do y. Como consequência, para n grande $f^{n.\ell}$ interceptar transversalmente em V a variedade estável local do y, o que prova o terceiro item na declaração.

Seja A_k denotam o interior de $f^k(h(p))$ em $\mathcal{H}(\mathcal{O})$: é não-vazia e densa em $f^k(h(p))$. O subconjunto aberto e denso $A_0 \cup \cdots \cup A_{\ell-1}$ de $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ é a união disjunta de elementos da forma $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_s}$. Por construção esta partição é invariante por f. Uma vez que a restrição de f^ℓ para cada conjunto A_k é topologicamente misturador, deduz-se que A_k não é subdividida por partição. Isto significa que tanto $A_j = A_k$ ou $A_j \cap A_k = \emptyset$. No último caso, obtém-se $f^j(h(p)) = f^k(h(p))$ provando o último item. ∎

Capítulo 6

Estabilidade

Neste capítulo demostraremos o teorema principal de estabilidade aplicando resultados da teoria de fins. Se o grupo de Lie é compacto, qualquer perturbação C^1 de uma ação é parametricamente conjugado à ação. Quando o grupo é conexo então qualquer C^1-ação Anosov é estruturalmente estável.

Finalmente dividiremos a demostração em dois: Primeiro quando o conjunto não-errante é todo M, então uma ação hiperbólica é estruturalmente estável, segundo se o não errante é diferente de M, então uma ação que satisfaze Axioma A e não tem ciclos, é Ω-estável. Neste contexto, cabe ressaltar a importância do elemento hiperbólico para provar estabilidade estrutural.

Iniciamos para $\mathbb{Z}$-ações além de sua importância intrínseca, o estudo dos difeomorfismos tem sido da maior relevância para a compreensão dos espaços de fase de fluxos e ações

Naquela época, no fim do ano 60, tendo provado que sistemas estruturalmente estáveis não são densos para $\mathbb{Z}$-ações, Smale estava procurando um tipo mais geral de sistemas, que possuísse alguma estrutura boa e tivesse a possibilidade de formar um subconjunto denso no espaço de todos os sistemas dinâmicos. Ele formulou aquilo que foi chamado de teorema da Ω-estabilidade.

Nosso sistema é Ω-estável se quando você faz uma perturbação C^1 dele você tem uma conjugação do conjunto não-errante do primeiro sistema com o conjunto não-errante do segundo (não uma uma conjugação global em toda a variedade como na definição de estabilidade estrutural). Ele estuda sistemas muito especiais, os chamados difeomorfismos Axioma A, também assumiu uma propriedade adicional, a propriedade de não ter ciclos implicavam que o difeomorfismo era Ω-estável. Nesta mesma época Jacob provou que se você tem um sistema Axioma A e ele tem um ciclo, então não é Ω-estável.

6.0.9 Teorema (Palais [15] prova)**.** *Se G é um grupo de Lie compacto, então qualquer ação φ é parametricamente estruturalmente estável.*

Isto é, qualquer perturbação C^1 de φ é parametricamente conjugado a φ. Por esta razão, o nosso interesse é G não-compacto, com destaque para o comportamento final das órbitas.
Quando for $\mathbb{Z}$-ações e $\mathbb{R}$-ações, hiperbolicidade é uma idéia fundamental no estudo da estabilidade estrutural e Ω-estabilidade. Uma versão deste é apresentado em [9].

6.0.10 Teorema (HPS[12] prova (7.1)). *Seja f normalmente hiperbolico à laminação $\mathscr{L}$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Se f é placa expansiva então $(f, \mathscr{L})$ é estruturalmente estavel. O canônico candidato para a folha conjugação $h_{f'}$, é uma folha conjugação. Além disso f' é normalmente hiperbolico e placa expansiva a $\mathscr{L}' = h_{f'}\mathscr{L}$.*

6.0.4 Estabilidade Para Ação Anosov

Lembre-se que uma ação $\varphi \in A^1(G, M)$ é estruturalmente estável, se existir um C^1-vizinhança de φ de tal forma que qualquer ação nessa vizinhança é orbitalmente conjugado com φ.

6.0.11 Teorema. *Se φ é uma Ação Anosov então φ é estruturalmente estável.*

Demonstração. Pela hipótese, φ é localmente livre, seja φ' uma C^1-ação perto de φ, então φ' também é localmente livre, o que implica que as φ-óbitas formam uma folheação $\mathscr{F}$ e as φ'-óbitas formam uma folheação $\mathscr{F}'$ em M. Como φ é C^1 também $\mathscr{F}$ é C^1. Seja $f_0 \in G$ um elemento Anosov então $f = \varphi(f_0) \in Dif^1(M)$ é normalmente hiperbólico à $\mathscr{F}$. Logo por (4.2.1), $(f, \mathscr{F})$ é a placa expansiva. Seja $f' = \varphi'(f_0)$, então f' está perto de f porque φ' perto φ. Por (6.0.10), $(f, \mathscr{F})$ é estruturalmente estável e o canônico candidato $h_{f'} : (f, \mathscr{F}) \to (f', \mathscr{L}')$, é uma folha conjugação. Onde $h_{f'}(\mathscr{F}) = \mathscr{L}'$ é uma laminação f'-invariante com $T\mathscr{L}'$ perto $T\mathscr{F}$.

Afirmativa: $\mathscr{L}'$ é a φ'-órbita folheação. De fato como Df deixa $T\mathscr{F}'$ e $T\mathscr{L}'$ invariantes e uma vez que ambos estão perto de $T\mathscr{F}$, por (4.2.3) implica $T\mathscr{F}' = T\mathscr{L}'$. Já que $T\mathscr{F}'$ é C^1 por Frobenius (6.1.3), implica que as lâminas de $\mathscr{L}'$ estão contidas em φ'-órbitas. Como G é conexo e lâmina são Riemann-completas, então as lâminas coincidem com as φ'-órbitas e (6.0.11) é provado. ■

6.0.12 Observação. *Em [9] um resultado mais forte é dado: se φ é C^2, então a φ-órbita folheação é estruturalmente estável como uma folheação. Além disso, é suficiente assumir que o elemento Anosov encontra-se na componente conexa da identidade, G_1, ou que G/G_1 é finito.*

Apesar do teomera (6.0.11) ser importante, ele não inclui o caso de um difeomorfismo Anosov f, considerando como um $\mathbb{Z}$-action, $n \mapsto f^n$. Devido a que $\mathbb{Z}$ é desconexo. Também, a suposição de que φ ser localmente livre proíbe singularidades para $\mathbb{R}$-ações pontos fixos não são permitidos. As definições (4.3.4) e (4.3.5) respondem essas objeções.

6.0.13 Observação. *Precisamos de f no centro de G para provar estabilidade estrutural, no teorema (5.0.9) vimos, o teorema de estrutura de produto local sobre o conjunto não errante é dada para um elemento hiperbólico. Se G não é conexa e a centralidade de f é descartado, estabilidade estrutural falha. Veja exemplo (6.0.17).*

6.0.5 Estabilidade Para Ações Axioma A: o caso $(M = \Omega)$

Se φ é uma G-ação hiperbólica, então, a ação φ satisfaz Axioma $A(i)$. Se $\Omega_\varphi = M$ e φ satisfaz Axiom $A(i)$, então, φ é hiperbólico. O próximo teorema estabelece estabilidade estrutural para ações Axioma $A(i)$ com $\Omega_\varphi = M$. Neste caso o grupo não necessariamente é conexo como em (6.0.11).

6.0.14 Teorema. *Se φ é uma G-ação hiperbólica então é estruturalmente estável. Em particular, se φ satisfaz Axioma A e se $\Omega_\varphi = M$ então φ é Ω-stable.*

Demonstração. Pela hipótese φ é uma ação hiperbólica em M. Então por persintência (5.0.21), existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de φ em $A^1(G, M)$ tal que para cada $\varphi' \in \mathcal{U}$ existe uma órbita conjugação

$$h_{\varphi'} : (\varphi, M) \to (\varphi', M)$$

Desde que $h_{\varphi'}$ é próximo da identidade e é continua, $h_{\varphi'}(M) = M$. Assim φ', φ são orbitalmente conjugados. Portanto φ é estruturalmente estável. Pela hipotese φ satisfaz Axioma A, dai φ satisfaz Axioma $A(i)$ e $\Omega_\varphi = M$, então a ação φ é hiperbólica. A estabilidade estrutural implica sempre Ω-estabilidade. ∎

Nosso principal Teorema ação de grupo Axioma A sem ciclos implica Ω-estabilidade, já foi provado quando $G = \mathbb{Z}$ [21], $G = \mathbb{R}$ [17], ou $\Omega = M$ e G é conexo [9] ou (6.0.11) Acontece que, para nossa surpresa, todas as ações Axioma A são essencialmente um desses tipos. Precisamente, existe uma alternativa: quando uma ação satisfaze Axioma A em M. Então pelo teorema (5.0.16) ou $\Omega_\varphi = M$ ou senão G é hyperbolico (isto é tem dois fins que são invariantes sob a multiplicação direito).

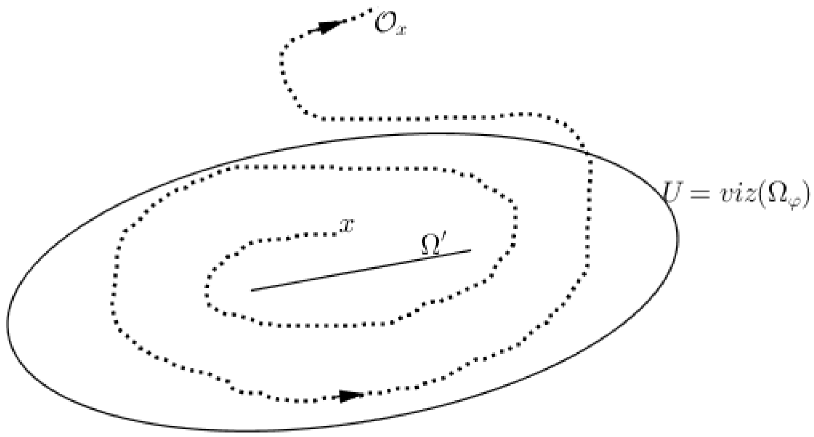
Uma ação $\varphi \in A^r(G, M)$ é Ω-estável, se para cada $\psi \in A^r(G, M)$ suficientemente perto de φ, existe um homeomorfismo $h : \Omega_\varphi \to \Omega_\psi$, que leva φ-órbita em ψ-órbita.

6.0.6 Estabilidade para Ações Axioma A: o caso $(M \neq \Omega)$

Em (6.0.14) dá o resultado quando $\Omega = M$ e ação de grupo Axioma A implica Ω-estavel. Aqui provamos nosso teorema principal quando $\Omega \neq M$.

6.0.15 Teorema (**Ω-Estabilidade**). *Uma ação de grupos Axioma A sem ciclos é Ω-estável.*

Demonstração. Seja φ a ação de grupo e suponha $\Omega_\varphi \neq M$. Por Axioma A φ é hiperbólico sobre Ω_φ, então existe $f_0 \in Z(G)$ com $f = \varphi(f_0)$ normalmente hiperbólico à φ-órbita laminação $\mathscr{L}$ de Ω_φ. Por (5.0.9), (f, Ω_φ) tem estrutura do produto local dada por o elemento hiperbólico f. Pelo elemento central e as caracterizações assintóticas das laminações estáveis e instáveis fortes, W^u e W^s são φ-invariantes, isto é $g(W^u\mathcal{O}(x)) = W^u\mathcal{O}(gx)$ e $g(W^s\mathcal{O}(x)) = W^s\mathcal{O}(gx)$ para cada $g \in G$. Seja $p, q \in \Omega_\varphi$, logo ou $W^{uu}(p)$ é igual a $W^{uu}(q)$ ou eles são disjuntos. Por isso, $\mathscr{L}$ está subordinada ao $\mathscr{W}^u_\epsilon$, $\mathscr{W}^s_\epsilon$ e assim por estrutura do produto local para (f, Ω_φ) implica estrutura do produto local para $(f, \mathscr{L})$. Por (4.2.11) f tem uma vizinhança $\mathcal{U}$ em $Dif^1(M)$ e Ω_φ tem uma vizinhança U em M tal que se $f' \in \mathcal{U}$, então $h_{f'}(\Omega)$ é o maior subconjunto f'-invariante de U quando $h_{f'}$ é o candidato canônico para a conjugação da folha (4.2.2) de [HPS]. Seja φ' uma G-ação perto de φ em $A^1(G, M)$ e seja $f' = \varphi'(f_0)$.
Por persistência (5.0.21) a φ'-órbita laminada de $\Omega' = h_{f'}(\Omega_\varphi)$ e $h_{f'}$ é uma órbita conjugação $(\varphi, \Omega_\varphi) \to (\varphi', \Omega')$. Como as φ-órbitas compactas são denso em Ω, as φ'-órbitas compactas são denso em Ω' portanto $\Omega' \subset \Omega_{\varphi'}$. Visto que Ω' é o maior conjunto f'-invariante perto de Ω_φ. Resta para descartar que a φ'-órbita de qualquer ponto $x \in \Omega_{\varphi'} - \Omega'$ não pode explodir de U ver figura abaixo



Por decomposição espectral (5.0.12), Ω decompõe-se em conjuntos básicos $\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_m = \Omega$. Da hipótese φ satisfaze Axioma A e $\Omega \neq M$ logo por (5.0.16) G é hiperbólico e existe um ordem parcial natural $\prec$ no Ω. Pela hipótese do teorema principal estamos assumindo, a partir de agora, que neste ordem não existem ciclos. Como em [17] Ω-estabilidade global modulo Ω-estabilidade local é verdade em mais generalidade que ações Axioma A. Isto é, seja $\Lambda_0, \cdots, \Lambda_m$ conjuntos compactos, disjunto e φ-invariantes de M tal que

$$\Omega_\varphi \subset \Lambda_0 \cup \cdots \cup \Lambda_m$$

onde φ é uma G-ação continua no espaço metrico compacto M e G é hiperbólico. Denotemos as fins-invariantes de G por $\mathfrak{e}_-, \mathfrak{e}_+$ e definir as fins de uma órbita $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x)$ como

$$\partial_\pm \mathcal{O}(x) = \bigcap_{Q \in \mathfrak{e}_\pm} \overline{\{qx : q \in Q\}}.$$

Desde que $\mathfrak{e}_\pm$ são fixadas por multiplicação-direita, $\partial_\pm \mathcal{O}$ é independende de $x \in \mathcal{O}$ e $\partial_\pm \mathcal{O}$ é φ-invariante. Claramente $\partial_\pm \mathcal{O}$ é compacto, não vazio. Equivalentemente, $\partial_\pm(\mathcal{O}_x)$ é o conjunto de pontos limites de $g_n x$ quando $g_n \to \mathfrak{e}_\pm$. Seja $W^u\Lambda_i$ denote o conjunto instável de Λ_i, $\{x \in M : \partial_-(\mathcal{O}_x) \subset \Lambda_i\}$ e seja $W^s\Lambda_i$ denote o conjunto estável $W^s\Lambda_i = \{x \in M : \partial_+(\mathcal{O}_x) \subset \Lambda_i\}$. Afirmamos que se $\partial_\pm(\mathcal{O}_x)$ intersecta Λ_i então, ele está contido em Λ_i. Pois suponhamos $\partial_+(\mathcal{O}_x)$ intersecta Λ_1,Λ_2.Tome vizinhanças disjuntos abertos N_1, N_2 de Λ_1,Λ_2 como na prova de (5.0.16). Os conjuntos $\{g \in G : gx \in N_1\}$,$\{g \in G : gx \in N_2\}$ são elementos de diferentes fins. Mas, está contida em cada $\mathfrak{e}_+$, contradizendo o fato de que G tem exatamente duas fins. Similarmente ∂_-. Assim, existem decomposições disjuntos

$$\bigcup_{i=0}^{m} W^u\Lambda_i = M = \bigcup_{i=0}^{m} W^s\Lambda_i.$$

Lembre-se que $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ se,e somente se, $W^u\Lambda_i$ intersecta $W^s\Lambda_j$ em algum ponto de $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_m$. Um ciclo é uma cadeia $\Lambda_{i_1} \prec \cdots \prec \Lambda_{i_1} = \Lambda_{i_1}$, $n \geq 2$.

O seguinte resultado completa a prova do nosso Teorema Principal de Ω-estabilidade. Já que este implica Ω-explosão não existem, então Ω-estabilidade local (isto é sobre as peças básicas por teorema de persitência) implica Ω-estabilidade global. Nós daremos uma demostração da afirmação.

$\blacksquare$

6.0.16 Teorema. *Seja $V_1, \cdots, V_m$ qualquer vizinhança de $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m$ Se não houver ciclos entre os Λ_i então qualquer G-ação C^0 perto de φ tem conjunto não errante contida no $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$.*

Demonstração. A idéia da prova é o mesmo que aquele em [17]. Os detalhes são consideravelmente mais difícil devido à utilização que um grupo hiperbólico se torna parecido a $\mathbb{Z}$ (3.4.20), em vez de propriedades óbvias de $\mathbb{R}$. Vamos assumir nosso teorema (6.0.16) é falsa e produzir uma cadeia arbitrariamente longa de irrepetível $\Lambda_i's$.

Seja U um gerador de G, $\tau : G \to \mathbb{Z}$ é um mapa, e c_k, C_k, K as constantes construídos em (3.4.20). Pensamos em τ como tempo ao longo G desde $\mathfrak{e}_-$ em direção a $\mathfrak{e}_+$. Nós escrever $\varphi(g)(x) = \varphi(g, x)$ quando é conveniente.
Seja $V_1, \cdots, V_m$ as vizinhanças de $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m$ em M. Seja W_i uma vizinhanças pequena de $\varphi(U^4, \overline{V_i}) = \{\varphi(g, x) : g \in U^4, x \in \overline{V}_i\}$ e seja X_i a pequena vizinhança de $\overline{W}_i$. Sem perda de generalidade assumimos o que V_i são abertos, o W_i é compacto, o X_i é aberto, disjunto, e provar que o conjunto não errante da ação nas proximidades encontra-se em $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$. Para $\varphi(U^4, \overline{V}_i)$ encolhe para Λ_i como V_i faz desde $\varphi(G, \Lambda_i) = \Lambda_i$.
Seja $N_i = W_i - V_i$, um conjunto compacto disjunto de Λ. Afirmamos que N_i atua como uma espécie de vizinhança fundamental para Λ_i. Precisamente, afirmamos que,se φ' é uma G-ação perto de φ e $x \in M$ então

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(a, x) \in V_i \\ \varphi(a, x) \in M - W_i \\ \tau(a) < \tau(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi'(a, x) \in N_i \text{ para algum } g \in G \text{ com } \tau(a) < \tau(g) \leq \tau(b) \\ \textit{e } \varphi'(g', x) \in \varphi(U^3, V_i) \text{ para todo } g' \\ \textit{com } \tau(a) < \tau(g') \leq \tau(g). \end{array}\right. \tag{6.1}$$

Quando $G = \mathbb{R}$ (6.1) diz que uma trajetória deixando V_i deve atravessar N_i no seu caminho para fora. A prova de (6.1) é uma espécie de argumento extremo superior, usando (3.4.20(3)). para quaisquer φ', a, b, x como em (6.1) considerar

$$T_x = \{t \in G : \tau(a) \leq \tau(t) \leq \tau(b) \,\text{e se}\, \tau(a) \leq \tau(t') \leq \tau(t) \,\text{então}\, \varphi'(t', x) \in \varphi'(U^3, V_i)\}.$$

Observa-se que $a \in T_x$ uma vez que qualquer t' com $\tau(a) \leq \tau(t') \leq \tau(b)$ tem $\tau(t') = \tau(a)$ e, portanto, por (3.4.20) $t'a^{-1} \in U^3$. (Esta é a desigualdade $|\tau a - \tau a'| \leq c_3 \Rightarrow a'a^{-1} \in U^3$.) Assim

$$\varphi'(t', x) = \varphi'(t'a^{-1}a, x) = \varphi'(t'a^{-1}, \varphi'(a, x)) \in \varphi'(U^3, V_i).$$

Assim $a \in T_x$. Em particular $T_x \neq \emptyset$ e é τ-limitada por acima $\tau(b)$, para que possamos escolher algum $t_1 \in T_x$ tal que $\tau(t_1) \geq \tau(t)$ para todo $t \in T_x$. Por (3.4.20) existe um $g \in \mathscr{H}_U(t_1)$ tal que $\tau(g) = \tau(t_1) + 1$. Isto diz $g \notin T_x$, $g = ut_1$ para algum $u \in U$, e como

$$\varphi'(g, x) = \varphi'(ut_1, x) = \varphi'(u, \varphi'(t_1, x)) \in \varphi'(U, \varphi'(U^3, V_i)) \subset \varphi'(U^4, \overline{V_i}).$$

Desde que $\overline{V}_i$ e U^4 são compactos, este último conjunto, $\varphi'(U^4, \overline{V}_i)$ consistirá em W_i para φ' perto de φ. Assim, $\varphi'(g, x) \in W_i$ mas uma vez $g \notin T_x$, $\varphi'(g, x) \notin V_i$. Isto diz $\varphi'(g, x) \in N_i$ e prova (6.1). [Nota quão importante é que g ser ut_1, e não $t_1 u$. Ou seja, temos de utilizar uma teoria fins-esquerda aqui.]
Suponha que (6.0.16) é falsa. Então existem G-ações φ_n convergindo para φ em $A^0(G, M)$ quando $n \to \infty$, tal que Ω_{φ_n} intersecta $M - X$. Por compacidade de $M - X$ existe um ponto limite $x \in M - X$ do Ω_{φ_n}. Usando um processo de diagonal, uma sequência $g_n \in G$ pode ser seleccionado de modo que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não tem nenhum ponto limite em G e

$$\varphi_n(g_n, x_n) = y_n \to x \leftarrow x_n \text{ quando } n \to \infty$$
$$x_n, y_n, x \in M - W.$$

Desde que G tem apenas dois fins $\mathfrak{e}_\pm$, g_n deve ficar perto de uma ou ambas quando $n \to \infty$. Ao escolher uma subsequência e possivelmente trocando x_n com y_n podemos assumir $g_n \to \mathfrak{e}_+$. A seguir, escolha subsequências livremente sem nova rotulagem eles.

Já que $x \in \Lambda$ e não existem ciclos, $\partial_-\mathcal{O}_x \subset \Lambda_{i_1}$, $\partial_+\mathcal{O}_x \subset \Lambda_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$. Desde que $\varphi_n \to \varphi$ em $A(G, M)$ e $x_n \to x$ em M podemos encontrar uma seqüência $g_n \in G$ tal que

$$0 < \tau(g'_n) < \tau(g_n) \qquad \varphi_n(g'_n, x_n) = x'_n \to \lambda_{i_2} \in \Lambda_{i_2}.$$

Para ver isto, escolher qualquer sequência $a_k \to \mathfrak{e}_+$ em G. Para k fixo, $\varphi_n(a_k, x_n) \underset{n}{\longrightarrow} \varphi(a_k, x)$. Quando $k \to \infty$, $\varphi(a_k, x) \to \lambda_{i_2} \in \Lambda_{i_2}$ (para uma subsequência). Assim $g'_n = a_{k(n)}$, $n \gg k \to \infty$ suficiente.

Em particular, $x'_n \in V_{i_2}$, n grande. Já que $y_n = \varphi_n(g_n, x_n) \in M - W$, (6.1) dado algum $g''_n \in G$

$$\begin{array}{lll} \varphi_n(g''_n, x_n) \in N_{i_2} & \text{com} & \tau(g'_n) \leq \tau(g''_n) \leq \tau(g_n) \\ \varphi_n(g, x_n) \in \varphi_n(U^3, V_{i_2}) & \text{se} & g \in \tau^{-1}[\tau g'_n, \tau g''_n). \end{array} \tag{6.2}$$

Observa-se que

$$\tau(g''_n) - \tau(g'_n) \to \infty. \tag{6.3}$$

Outra forma poderíamos aplicar (3.4.20) e obter uma subsequência com $g''_n(g'_n)^{-1} \to g_* \in G$. mas, então

$$\begin{aligned} \varphi_n(g''_n, x_n) &= \varphi_n(g''_n(g'_n)^{-1}g'_n, x_n) \\ &= \varphi_n(g''_n(g'_n)^{-1}, \varphi_n(g'_n, x_n)) \\ &= \varphi_n(g''_n(g'_n)^{-1}, x'_n) \to \varphi_n(g_n, \lambda_{i_2}) \in \Lambda_{i_2} \end{aligned}$$

contradizendo o fato de que $\varphi_n(g''_n, x_n) \in N_{i_2}$, um conjunto compacto disjunto de Λ.

Desde que $\in N_{i_2}$ é compacto podemos assumir $x''_n = \varphi_n(g''_n, x_n) \to x^2 \in N_{i_2}$. Afirmamos que $\varphi(Q_-, x^2) \subset W_{i_2}$ para algum $Q_- \subset \mathfrak{e}_-$. Na verdade considerar $Q_- = \{g \in G : \tau(g) \leq -K\}$ onde K é a constante de traslação (3.4.20) (2)). Suponhamos que $\varphi(g, x^2) \in M - W_{i_2}$ para alguns g com $\tau(g) \leq -K$. Então

$$\varphi_n(g, x''_n) \to \varphi(g, x^2).$$

Por $\varphi_n(g, x''_n) = \varphi_n(gg''_n, x_n)$ e por (3.4.20(2)),

$$\tau(gg'') < \tau(g''_n).$$

por (3.4.20(1)) $|\tau(g'') - \tau(gg''_n)| \leq C_k$ onde $gg''_n(g''_n)^{-1} \in U^k$. Este k é fixo e assim

$$\tau(g''_n) - C_k \leq \tau(gg''_n) < \tau(g''_n).$$

por (6.3)

$$\tau(g'_n) < \tau(gg''_n) < \tau(g''_n)$$

para n grande . Isto diz que $x''_n = \varphi_n(gg''_n, x_n) \in \varphi_n(U^3, V_i)$ uma vez que todo $a \in G$ com $\tau(g'_n) < \tau(a) < \tau(g''_n)$ tem essa propriedade de acordo com (6.2). Mas isso contradiz

$\varphi_n(g, x''_n) \to \varphi(g, x^2) \in M - W_{i_2}$. Daí tal g não existe e $\varphi(Q_-, x^2) \subset W_{i_2}$ portanto $\partial_-(\mathcal{O}_{x^2}) \subset \Lambda_{i_3}$.
Seja $\partial_+(\mathcal{O}_{x^2}) \subset \Lambda_{i_3}$. Como não existem ciclos, i_1, i_2, i_3 são distintos. Vamos proceder com x^2 como fizemos com x. Nós não afirmamos $x^2 \in \lim\limits_n \Omega_{\varphi_n}$. Em vez disso, deve usar o mesmo x_n, y_n foi utilizado acima, $x_n, y_n \to x$. Isso o torna um pouco mais difícil de encontrar x^3 e i_4.
Primeiro observamos que

$$\tau(g_n) - \tau(g''_n) \to \infty \tag{6.4}$$

Caso contrário, por (3.4.20)(2) e uma subsequência podemos supor $g_n(g''_n)^{-1} \to g \in G$. Então

$$\begin{aligned} x \leftarrow y_n = \varphi_n(g_n, x_n) &= \varphi_n(g_n(g''_n)^{-1}g''_n, x_n) \\ &= \varphi_n(g_n(g''_n)^{-1}, x''_n) \to \varphi_n(g_*, x^2). \end{aligned}$$

Daí x e x^2 estão na mesma órbita assim $\partial_-\mathcal{O}_x = \partial_-\mathcal{O}_{x^2}$,contradizendo $i_1 \neq i_2$.
Desde que $x''_n \to x^2$ em M e $\varphi_n \to \varphi$ em $A(G, M)$, podemos encontrar uma seqüência $g'''_n \to \mathfrak{e}_+$ tal que

$$\begin{aligned} &\tau(g''_n) < \tau(g'''_n) < \tau(g'_n) \\ &\varphi_n(g'''_n, x_n) = x'''_n \to \lambda_{i_3} \in \Lambda_{i_3}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Para ver isto, escolhe qualquer sequência $a_k \to \mathfrak{e}_+$ em G, seja $a_k \in U^k$. Para k fixo

$$\varphi_n(a_k, x''_n) \xrightarrow[n]{} \varphi(a_k, x^2).$$

Quando $k \to \infty$, $\varphi(a_k, x_2)$ tende a algum $\lambda_{i_3} \in \Lambda_{i_3}$ (para uma subsequência). Considerar $g'''_n = a_k g''_n$ onde $k = k(n)$, $n \gg k \to \infty$. Claramente podemos assumir $\varphi_n(g'''_n, x_n) = \varphi_n(a_k, x''_n) \to \lambda_{i_3}$. por (3.4.20(2)), $\tau(g'''_n) > \tau(g''_n)$ assim que $\tau(a_k) \geq K$. Por (3.4.20(1))

$$|\tau(g''_n) - \tau(g'''_n)| \leq C_k$$

onde $g'''_n(g''_n)_{-1} \in U^k$. Mas $g'''_n(g''_n)_{-1} = a_k \in U^k$. Assim, $n \gg k(n) \to \infty$ e (6.4) façamos $\tau(g_n) > \tau(g'''_n)$, completando a prova de (6.5).
Em particular, $x'''_n = \varphi_n(g'''_n, x_n) \in V_{i_3}$, n grande, e (6.1) implica o análogo de (6.2)

$$\begin{array}{lll} \varphi_n(g''''_n, x_n) \in N_{i_3} & \text{com} & \tau(g'''_n) \leq \tau(g''''_n) \leq \tau(g_n) \\ \varphi_n(g, x_n) \in \varphi_n(U^3, V_{i_3}) & \text{se} & g \in \tau^{-1}[\tau(g'''_n), \tau(g''''_n)). \end{array} \tag{6.6}$$

Por exatamente o mesmo raciocínio acima obtemos $\varphi_n(g''''_n, x_n) = x''''_n \to x^3 \in N_{i_3}$ com $\partial_-(\mathcal{O}_{x^3}) \subset \Lambda_{i_3}$ A suposição não implica ciclos $\partial_+(\mathcal{O}_{x^3}) \subset \Lambda_{i_4}$ com i_1, i_2, i_3, i_4 distinta. Continuando esta era (passos subsequentes são exactamente os mesmos quando $i_3 \to i_4$) nós produzimos um arbitrariamente longa cadeia de irrepetível $\Lambda'_i s$ o que é absurdo uma vez que existem apenas m deles. Daí (6.0.16) e o Teorema Principal estão provadas. ■

6.0.7 Exemplos

Os próximos exemplos mostram que quando o grupo não é compactamente gerado ou f não é um elemento central, então estabilidade estrutural falha.

6.0.17 Exemplo. *É Razoável supor que G é compactamente gerado. Seja A o difeomorfismo linear de Anosov de $\mathbb{T}^2$, isto é* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Seja G a soma direta infinita $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots$ com a topología discreta. Os elementos de G são seqüências infinitas $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} = (n_1, n_2, \cdots)$ isto é*

$$G = \{(n_k) \subseteq \mathbb{Z};\, \exists k_0 \in \mathbb{N}\, tal\, que\;\; n_k = 0, \forall k \geq k_0\}.$$

G não é compactamente gerado mas é um grupo de Lie. Seja φ uma G-ação em $\mathbb{T}^2$ definida por

$$\varphi(n_1, n_2, \cdots) : x \mapsto A^{2(n_1+n_2+\cdots)}(x).$$

As φ-órbitas são claramente a A^2-órbitas e a união de A^2-órbitas compactos (= finitos) é denso em $\mathbb{T}^2$, e $f = A^2$ é hiperbólico para a φ-órbita laminação. As lâminas são os pontos e as órbitas são conjuntos finitos ou contáveis de pontos. Assim φ é uma G-ação que satisfaz Axioma A com elementos hiperbólicos de $f = (1, 0, 0, \cdots) = A^2$. Desde que $\Omega_\varphi = M$, φ satisfaça a condição de não tem ciclo.
No entanto, φ não é Ω-estável. Qualquer dado vizinhança $\mathcal{U}$ de φ em $A^r(G, M)$ contém uma vizinhança menor da forma
$\{\psi \in A^r(G, M) : d_r(\psi(n_1, n_2, \cdots), \varphi(n_1, n_2, \cdots)) < \epsilon$ *para todo* $(n_1, n_2, \cdots)$
com $n_l = 0\ \forall\ l \geq k\}$.
Os números ϵ e k dependem de $\mathcal{U}$. A metrica d_r é em $Dif^r(\mathbb{T}^2)$ em particular podemos escolher ψ seja

$$\psi(n_1, n_2, \cdots) = A^{2(n_1+\cdots+n_{k-1})+n_k}$$

e ψ estará em $\mathcal{U}$. As ψ-órbitas são as A-órbitas. Desde que A^2 tem mais órbitas de um ponto do que A tem, A^2 e A não são orbitas-conjugado. daqui ψ não é orbitalmente conjugado com φ portanto φ não é Ω-estável.

6.0.18 Exemplo. *Por que nós assumimos o Elemento hiperbólico f central ? Seja F_2 o grupo livre com dois geradores, a e b. Dar F_2 a topología discreta. F_2 é compactamente gerado. Seja A um difeomorfismo de Anosov de M. Então*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : F_2 & \to & Dif^r(M) \\ a & \mapsto & A \\ b & \mapsto & id \end{array}$$

dado um F_2-ação em M e $f = \varphi(a)$ é normalmente hiperbólico para a órbita laminação. (As φ-órbitas são as A-órbitas.) Mas $\psi : F_2 \to Dif(M)$ definida por $a \mapsto A$, $b \mapsto g$, onde g é um difeomorfismo perto de id. Então ψ é uma ação perto de φ cujas órbitas, com toda a probabilidade, são totalmente diferentes do que o φ-órbits. Daí φ não é Ω estável. O mesmo exemplo mostra por M.

6.1 Apêndice

6.1.1 Lema ([16] **Palis' λ-Lema**). *Seja p um ponto fixo hiperbólico e $N \subset M$ uma subvariedade o qual intercepta $W^s(p)$ transversalmente. Então para qualquer disco compacto $D \subset W^u(p)$ existe uma seqüência (D_k) de discos de N e uma seqüência crescente (n_k) de enteros positivos tal que $f^{n_k}(D_k)$ converge a D em a C^1-topologia.*

Um campo de k-planos numa variedade M é uma aplicação P que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de T_qM.

6.1.2 Definição. *Diz-se que um campo de planos P é involutivo, se dados dois campos de vetores X e Y tais que, para todo $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q) \in P(q)$, então $[X,Y](q) = DX(q) \cdot Y(q) - DY(q) \cdot X(q) \in P(q)$.*

6.1.3 Teorema (Teorema de Frobenius, [1])**.** *Seja P um campo de k-planos de classe C^r, $r \geq 1$, em M. Se P é involutivo, então existe uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão k e classe C^r em M tal que $T_q(\mathscr{F}) = P(q)$ para todo $q \in M$. Reciprocamente, se $\mathscr{F}$ é uma folheação de classe C^r, $r \geq 2$ e P é o campo de planos tangentes a $\mathscr{F}$, então P é involutivo.*

6.1.1 Lema de Max Zorn

6.1.4 Definição. *Uma ordenação parcial num conjunto X é uma relação binaria $\preceq$ em X que é reflexiva ($\xi \preceq \xi, \forall \xi \in X$), transitiva ($\xi \preceq \eta$ e $\eta \preceq \zeta \Rightarrow \xi \preceq \zeta$) e antisimétrica ($\xi \preceq \eta$ e $\eta \preceq \xi \Rightarrow \xi = \eta$).*

Observação: a) O termo *parcial* aparece porque pode haver elementos que não são comparáveis de acordo com a ordenação $\preceq$ dada.
b) Se $\preceq$ é uma ordenação parcial em X, então $(X, \preceq)$ é dito ser um conjunto parcialmente ordenado.

6.1.5 Definição. *Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado no qual qualquer dois elementos são comparáveis de acordo com a ordenação parcial dada.*

6.1.6 Definição. *Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. $\zeta \in X$ é um elemento maximal em X se para todo $\xi \in X$ com $\zeta \preceq \xi$, segue-se que $\xi = \zeta$. Um elemento $\eta \in X$ é um limite superior de $\mathcal{C} \subset X$ se $\xi \preceq \eta$, para todo $\xi \in \mathcal{C}$.*

6.1.7 Lema (**Lema de Zorn**)**.** *Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

Bibliografia

[1] Camacho, César; Lins Neto, Alcides. Geometry theory of foliations. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[2] C. Maquera, T. Barbot, Transitivity of codimension-one Anosov Actions of $\mathbb{R}^k$. on closed manifolds. Ergod. Th. and Dynam. Sys. **31**:1-22, 2011.

[3] D. V. Anosov, geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, Trudy Mat. Inst. Steklov **90** (1967)=Proc. Steklov Inst. Math. 90 (1967). MR 36 7157.

[4] Epstein, D.: ends, the topology of 3-manifolds. pp. 110-117. M. Fort, ed. Prentice Hall, N.J., 1962

[5] Field, M.: Equivariant Dynamical Systems. Thesis. University of Warwick, Coventry, U.K.

[6] Freudenthal, H.: Über die enden diskreter Räume und Gruppen. Comm. Math. Helv. **17**, 1-38(44-45)

[7] Frank W. Warner, Foundations of differentible manifolds and Lie groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag New York, Inc., 1983.

[8] F. Abdenur, S. Crovisier, Transitivity and topological mixing for C^1 diffeomorphisms 2011

[9] Hirsch, M.: Foliations and noncompact transformation groups. Bull. A.M.S. **76**, 1020-1023 (1970)

[10] Hirsch, M., Pugh, C.: Stable Manifolds and hyperbolic sets. Proc. Symp. Pure Math. of A.M.S.**14**, 133-165 (1970)

[11] Hirsch, M., Palis, J., Pugh, C., Shub, M.: Neighborhoods of hyperbolic sets. Inventiones math.9, 121-134 (1970)

[12] HPS., Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M.: Invariant Manifolds. To appear

[13] Hopf, H.: enden oftener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. Comm. Math. Helv. **16**, 81-100 (1943-44)

[14] Kupka, I.: On two notions of structural stability. Preprint

[15] Palais, R.S.: Equivalence of nearly differentiable actions of a compact group. Bull. Amer. Math.Soc. **67**, 362-364 (1961)

[16] Palis, J.: On Morse Smale Dynamical Systems, Topology **8**, 385-405 (1969)

[17] Pugh, C., Shub, M.: The Ω Stability theorem for flows. Inventiones math. **11**, 150-158 (1970)

[18] Pugh, C., Shub, M., Axiom A actions. Invent. Math. 29 (1975), 7–38.

[19] R. Bowen, Periodic Orbits for Hyperbolic Flows, Amer. J. Math. 94 (1972), 1-37.

[20] Smale, S.: Differentiable Dynamical Systems. Bull. AMS 73, 747-817 (1967)

[21] Smale, S.: The Ω-stability theorem. Proc. Symp. of Pure Math of A.M.S. **14**, 289-297 (1970)

[22] Spanier, E.: Algebraic Topology. p. 235. New York: McGraw-Hill 1966

[23] S. Newhouse, Hyperbolic limit sets. Trans. Amer. Math. Soc. **167** (1972), 125–150.

[24] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press (1965), 63–80.

[25] Zeeman, E.C.: The topology of the brain and visual perception. Topology of 3-manifolds, pp. 240-256. M. Fort, ed. Englewood Cliffs, N,J.: Prentice-Hall 1962

[26] Zippin, L.: Two ended topological groups. Proc. A.M.S. 1, 309-315 (1950)