Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

**José Luis Arrué Reyes**


# Controlabilidade exata das trajetórias da equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado

Dissertação

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro
Novembro de 2014

# Controlabilidade exata das trajetórias da equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado

**José Luis Arrué Reyes**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro
Novembro de 2014

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Controlabilidade exata das trajetórias da equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado**

**José Luis Arrué Reyes**

**Ademir Fernando Pazoto**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. Hugo Danilo Fernández Sare - UFRJ

Prof. Juan Bautista Limaco Ferrel - UFF

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Aos meus pais Julio e Blanca, pelo amor, incentivo, apoio incondicional e que, nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

Ao meu irmão Julio, por seu apoio constante e que, apesar de todas as dificultades, me fortaleceu e se tornou algo muito importante durante o período que passei na UFRJ.

À minha irmã Caroll pelo apoio, conselhos e incentivo.

Meus agradecimentos aos amigos George, Victor e Leonardo, irmãos na amizade, que fizeram parte da minha formação e que, certamente, vão continuar presentes em minha vida.

Aos meus companheiros do IM-UFRJ.

À UFRJ pela oportunidade e criação de novas perspectivas.

Agradeço a todos os meus professores por terem me proporcionado o conhecimento não apenas racional, mas também por terem feito despertar em mim o interesse pela educação no processo de formação profissional.

À Capes pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador Ademir Fernando Pazoto, pela orientação, confiança, paciência e apoio na elaboração deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

## Resumo

Neste trabalho, estudamos a controlabilidade exata local da equação Korteweg-de Vries, em um intervalo limitado, com controles que atuam sobre a condição de contorno de Dirichlet. Em uma primeira etapa, provamos a desigualdade de Carleman para o sistema linearizado, o que nos permite provar a controlabilidade nula interna. Então, usamos o teorema do ponto fixo de Kakutani, para obter a controlabilidade exata local das trajetórias do sistema.

Palavras-chave: controlabilidade, equação KdV, estimativa de Carleman.

## Abstract

In this work we study the local exact controllability of the Korteweg-de Vries equation, on a bounded interval, with controls acting on the Dirichlet boundary condition. In a first step, we prove a Carleman inequality for the linearized system, which leads to null internal controllability problem. Then, the Kakutani's fixed point theorem gives us the local exact controllability to the trajectories of the system.

Key words: controllability, KdV equation, Carleman estimate.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 Um Pouco da História das Ondas Solitárias

As equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não lineares, tem suas raízes na descoberta de uma *"Onda Solitária"* por John Scott Russell, um engenheiro naval Escocês. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem modificar sua de forma. Russell realizou vários experimentos deste fenômeno que ele chamou de *"Ondas de Translação"("wave of translation")*, que mais tarde ficaria conhecida como *"Ondas Solitárias"*[25]. Naquele dia, Russell observeu uma onda muito particular, tal onda viajava através de um canal, sem perder a sua forma ou velocidade. A fascinação tomou conta de Russell, que concentrou sua atenção sobre os estudos deste tipo de ondas por anos.

Com a sua descoberta, fez inúmeros experimentos conhecidos como *"o sistema de linha de ondas para construção de cascos"*, que consistiu em criar uma área na forma de um canal na qual se colocava um obstáculo. Atrás do obstáculo se introduzia o fluido e, em seguida, se removeria tal obstáculo para que uma onda longa se formasse e se propagasse ao longo do canal. Tais experimentos revolucionaram a arquitetura naval no século XIX, e ele foi condecorado com a medalha de ouro da "Royal Society of Edinburgh"por seu trabalho em 1837.

Os experimentos de Russell contradisseram várias conjecturas físicas, tais como a teoria de G. B. Airy [1], no qual a onda viajante não poderia existir, pelo motivo que a mesma acabaria mudando sua velocidade ou a sua forma, ou a teoria de G. G. Stokes [26], em que as ondas de amplitude finita e forma fixa são possíveis, mas apenas em águas profundas e somente na forma periódica. No entanto, Stokes estava ciente do estado inacabado da teoria de Russell:

*"É a opinião do Sr. Russell que a onda solitária é um fenômeno sui generis. Seus experimentos parecem tornar esta conclusão provável. Caso esteja correto, o caráter analítico de uma onda solitária contínua pode vir a ser descoberto."*

Consequentemente, a fim de convencer a comunidade física, Scott Russell desafiou a comunidade matemática para provar teoricamente a existência do fenômeno que ele testemunhou:

*"Tendo verificado que ninguém tenha conseguido prever o fenômeno que eu me aventurei a chamar de ondas de translação... não era de se supor que, depois que sua existência tenha sido descoberta e seus fenômenos determinados, esforços não seriam feitos... para mostrar como ela deveria ter sido previsto a partir de conhecidas equações gerais do movimento de fluido. Em outras palavras, agora ficou para os matemáticos a descoberta, ou seja, para dar uma à priori demonstração à posteriori ".*

Uma grande quantidade de pesquisadores enfrentou o desafio proposto por Russell. Os próprios George Airy e George Stokes se interessaram pelo assunto desenvolvendo e analisando principalmente os modelos matemáticos dos fenômemos observados anteriormente em laboratórios.

Uma das primeiras grandes contribuições e respostas para o Russell foi dada pelo matemático Francês Joseph Boussinesq por volta de 1871 [8]. Em 1876, o físico Inglês Lord Rayleigh obteve um resultado diferente [22], e em 1895 os matemáticos holandeses D. J. Korteweg e seu aluno G. de Vries deram o último resultado importante do século 19 [16]. Na verdade, Boussinesq considerou um modelo de ondas longas incompressíveis e de rotação livre em um canal raso com seção retangular desprezando o atrito ao longo da fronteira (paredes do canal). Ele obteve a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{2h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right), \tag{1.1}$$

onde $(t, x)$ são as coordenadas de uma partícula do fluido no tempo $t$, $h$ é a amplitude da onda, $H$ é altura da água em equilíbrio e $g$ é a constante gravitacional.

Enquanto isso, Rayleigh considerou independentemente o mesmo fenômeno e acrescentou a hipótese da existência de uma onda estacionária "desaparecendo" no infinito. Ele considerou apenas a dependência espacial e observou o comportamento da equação

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{3}{H^3}h^2\left(h - h_0\right) = 0, \tag{1.2}$$

com $h_0$ sendo a "crista" da onda e os outros parâmetros definidos da mesma forma que Boussinesq. Esta equação possui uma forma explicita de solução dado por

$$h\left(x\right) = h_0 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3h_0}{4H^3}}x\right).$$

Em 1876, Rayleigh escreveu em seu artigo [22]:

*"Eu recentemente vi um livro de memórias de Boussinesq, Rendus, vol. LXXII, no qual está contido uma teoria de ondas solitárias muito semelhante ao do presente trabalho. Então, na medida em que nossos resultados são comuns, o crédito de prioridade pertence, naturalmente, à J. Boussinesq"*

Finalmente, em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, que relata uma modelagem matemática sobre ondas solitárias observado por Russell. A forma original da equação principal do artigo é

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right), \tag{1.3}$$

onde $\eta$ é a elevação da superfície do líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propução linear) do líquido, $g > 0$ é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor $T$ e da densidade $\rho$, constante e positiva. Eliminando as constantes fisícas pelas mudanças de variáveis

$$t \to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\beta}}t, \quad x \to -\frac{x}{\beta} \quad \text{e} \quad u \to -\left(\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{3}\alpha\right)$$

obtem-se a equação de Korteweg-de Vries (KdV) padrão

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.4}$$

que é um modelo que descreve a propagação em pequena amplitude de ondas de águas rasas em um canal de seção transversal retangular.

Existem inúmeras aplicações físicas e matemáticas deste modelo, por exemplo, C.S. Gardner e G.K. Morikawa [12] encontraram uma nova aplicação deste modelo no estudo de ondas livres de colisão hidro-magnéticos na esperança de descrever a propagação unidirecional de ondas pequenas mas de aplitude finita em um meio dispersivo não linear. Além disso, M. Kruskal e N. Zabusky [28] mostraram que os modelos de equações KdV para o problema de Fermi-Pasta-Ulam é descrito por ondas longitudinais que se propagam em uma rede unidimensional de massas iguais acoplados por meio de molas não lineares. Outras aplicações têm sido encontrados após o desafio de Russell, tais modelos resultantes são focos de estudos até o dia de hoje.

### 1.1.1 Controlabilidade para EDPs - Principais Métodos Utilizados

Estamos interessados em obter controlabilidade e estabilização para sistemas dispersivos governados por EDPs. Vamos começar tratando de dois importantes problemas relativos a controlabilidade são eles: *a controlabilidade interna e controlabilidade na fronteira para EDPs.*

Os vários conceitos de controlabilidade, que concordam em dimensão finita, mas não de um modo geral para as EDPs, são introduzidas e caracterizadas por uma abordagem de dualidade clássica (ver por exemplo [11, 17]). Nesta abordagem a controlabilidade exata de um sistema é provada ser equivalente a prova de uma *desigualdade de observabilidade* para o sistema adjunto. Tal fato é baseado no método *HUM – Hilbert Uniqueness Method* devido à J.-L. Lions (para mais detalhes ver [17, 18, 19]). Os métodos de controlabilidade dados aqui podem ser vistos como extensões naturais do critério de Kalman para sistemas de dimensão finita como mostrado em [9].

Quanto à questão da estabilização, vamos introduzir conceitos de estabilidade em dimensão infinita. Para isso, mostraremos alguns métodos que comprovam a estabilização exponencial para EDPs. A estabilização de uma EDP está relacionada fortemente com a controlabilidade anteriormente definida. Uma atenção especial é dada a EDPs com um gerador infinitesimal anti-adjunto (*skew-adjoint*) para quem os conceitos de controlabilidade e estabilidade, considerados aqui, concordem.

Precisamos inicialmente introduzir algumas notações. Vamos denotar por $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ o operador diferencial com $\mathcal{P} \in \mathbb{C}[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ e $\mathcal{D} = (-i\partial_t, -i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_n})$. Por exemplo, se considerarmos $\mathcal{P} = -\tau^2 + |\xi|^2$ teremos o operador da equação de ondas $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \partial_t^2 - \Delta$. De agora em diante, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será um subconjunto aberto suficientemente suave, cuja fronteira $\partial\Omega$ é denotada por $\Gamma$.

#### Problema de Controlabilidade Interna

Dados um subconjunto $\omega \subset \Omega$ com fronteira suave $\Gamma$ e um conjunto de condições de contorno, que escreveremos como $\mathcal{B}(\mathcal{D})z = 0$, vamos considerar o problema de controle

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}(\mathcal{D})z = 0 & t > 0, x \in \Gamma, \\ z(0,x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Aqui, $f = f(t,x)$ é o controle interno, $z = z(t,x)$ é a função procurada que satisfaz o sistema acima e $\mathcal{X}$ representa uma função característica. Sejam $H$ e $U$ dois espaços funcionais normados, dados $z_0$ e $z_1$ em $H$, buscamos um controle $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução $z$ do sistema (1.5) satisfaz $z(T,x) = z_1(x)$.

**Problema de Controlabilidade na Fronteira**

Dados um subconjunto $\gamma \subset \Gamma$ e dois conjuntos de condições de contorno, que escreveremos como $\mathcal{B}_1(\mathcal{D})\,z = \mathcal{X}_\omega f$, $\mathcal{B}_2(\mathcal{D})\,z = 0$, vamos considerar o problema de controle

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{D})\,z = 0 & t > 0, x \in \Omega, \\ \mathcal{B}_1(\mathcal{D})\,z = \mathcal{X}_\omega f & t > 0, x \in \Gamma, \\ \mathcal{B}_2(\mathcal{D})\,z = 0 & x \in \Omega, \\ z(0,x) = z_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Aqui, $f = f(t,x)$ é o controle de fronteira, $z = z(t,x)$ é a função procurada que satisfaz o sistema acima e $\mathcal{X}$ é uma função característica. Dados $z_0$ e $z_1$ em $H$, buscamos um controle $f \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução $z$ do sistema (1.6) satisfaz $z(T,x) = z_1(x)$.

### 1.1.2 Controlabilidade e Observabilidade

**Conceitos de Controlabilidade**

Dados $z_0 \in H$, $u \in L^2(0,T;U)$, consideremos a solução $z : [0,T] \to H$ do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Relembremos que para qualquer $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $u \in W^{1,1}(0,T;U)$, o problema de Cauchy (1.7) admite uma única soluão $z \in C([0,T];\mathcal{D}(A)) \cap C^1(0,T;H)$ dada pela fórmula de Duhamel

$$z(t) = S(t)\,z_0 + \int_0^t S(t-s)\,Bu(s)\,ds, \; \forall t \in [0,T].$$

Para $z_0 \in H$ e $u \in L^1(0,T;U)$, a fórmula anterior define uma solução suave (*mild solution*) de (1.7).

**Definição 1.1.1.** *Dizemos que o sistema (1.7) é exatamente controlável no tempo $T$ se para qualquer $z_0, z_T \in H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução do sistema (1.7) satisfaz $z(T) = z_T$.*

**Definição 1.1.2.** *Dizemos que o sistema (1.7) é nulamente controlável no tempo $T$ se para qualquer $z_0 \in H$, existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que a solução do sistema (1.7) satisfaz $z(T) = 0$.*

Introduziremos agora o seguinte operador $\mathcal{L}_T : L^2(0,T;U) \longrightarrow H$ definido por

$$\mathcal{L}_T u = \int_0^T S(T-t)\,Bu(s)\,ds.$$

Assim, as seguintes definições de controlabilidade, acima mencionadas, são equivalentes à:

$$\text{Controlabilidade Exata em } T \Leftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{L}_T = H; \tag{1.8}$$

$$\text{Controlabilidade Nula em } T \Leftrightarrow S(T)\,H \subset \operatorname{Im}\mathcal{L}_T. \tag{1.9}$$

Em dimensão finita, i.é., quando $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, os dois conceitos são equivalentes, e a equivalência é uma condição puramente algébrica, a famosa condição das filas de Kalman: $rank\,(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$. Como uma consequência, o tempo $T$ não desempenha nenhum papel, para mais detalhes podemos citar [9, 27].

Para EDPs as situações são mais complicadas do que para dimensão finita. Por exemplo:
– não existe nenhuma condição algébrica para a controlabilidade;
– o controle no tempo desempenha um papel para a EDPs hiperbólicas;
– a recíproca abaixo não é natural em geral

$$\text{Controlabilidade Exata} \Rightarrow \text{Controlabilidade a Zero.}$$

**Métodos para Controlabilidade**

As provas dos resultados aqui citadas são clássicas, e eles podem ser encontrados, por exemplo em [9, 17, 27, 29]. Tais provas são baseadas no método H.U.M. devido a J.-L. Lions (ver [17]). Um primeiro resultado que garante a controlabilidade pode ser dado da seguinte maneira:
**Resultado A:** Diremos que o sitema (1.7) é **exatamente controlável** no tempo $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^* (t) y_0\|_U^2 \, dt \geq c \|y_0\|_H^2 , \forall y_0 \in H. \tag{1.10}$$

A desigualdade (1.10) é chamada de *desigualdade de observabilidade.* Tal desigualdade significa que a aplicação

$$\Upsilon : y_0 \longmapsto B^* S^* (\cdot) y_0,$$

é limitada e inversível, ou seja, temos a chamada *propriedade de observabilidade,* isto quer dizer que é possível recuperar completamente as informações sobre o estado inicial $y_0$, sobre uma medida em $[0, T]$, na saída dos dados $B^* [S^* (t) y_0]$.

Um outro resultado relacionada com uma desigualdade de observabilidade, porém em um sentido mais fraco, e assim será chamada de *desigualdade de observabilidade fraca,* nos garantirá a controlabilidade nula do sistema (1.7) e pode ser formulado como segue.
**Resultado B:** O sistema (1.7) é **controlável a zero ou nulamente controlável** no tempo $T > 0$ se, e somente se, existe alguma constante $c > 0$ tal que

$$\int_0^T \|B^* S^* (t) y_0\|_U^2 \, dt \geq c \|S^* (T) y_0\|_H^2 , \forall y_0 \in H. \tag{1.11}$$

A desigualdade (1.11) tem um sentido fraco pelo fato de que a mesma nos dá somente que as informações de $S^* (T) y_0$ podem ser recuperadas, não podendo recuperar informações sobre o estado inicial do sistema $y_0$.

**O método H. U. M.** O método H.U.M. desenvolvido por J.-L. Lions é uma ferramenta de suma importância para o estudo de controlabilidade de sistemas governados por EDPs. Se considerarmos um problema de valor inicial e de contorno

$$\Sigma \qquad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

e seu problema adjunto, obtido tomando a distribuição do operador adjunto $\partial_t - A$, à saber, $-\partial_t - A^*$:

$$\Sigma^* \qquad \begin{cases} \dot{y} = -A^* y, \\ y(T) = y_T, \end{cases}$$

podemos assumir a seguinte *Identidade Chave:* $(z(t), y_T)_H = \int_0^T (u, B^*y)_U \, dt$ e garantir a equivalência entre desigualdade de observabilidade e controlabilidade do sistema $\Sigma$. Além disso, podemos concluir que:

– A equação de evolução no *problema adjunto* $\dot{y} = -A^*y$ difere de um *operador adjunto* $\dot{y} = A^*y$ por um sinal de menos. Uma simples tranformação $t \to T - t$ faz com que a soluções do operador adjunto sejam soluções do problema adjunto;

– O método prova que o operador $\Lambda : z_T \longmapsto u$ nos dar um controle;

– Em geral, não precisamos explicitar $B$ e $B^*$. Os ingredientes importantes para o método são: a *identidade chave* e a *desigualdade de observabilidade.*

## 1.2 Problemas e Resultados Principais

Vamos investigar as propriedades de controlabilidade para a equação de Korteweg-de Vries. Mais precisamente, vamos investigar propriedades do seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t + (\xi u)_x + u_{xxx} = f & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = u(t,L) = u_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L), \end{cases} \tag{1.12}$$

onde

- $\xi = \xi(t,x)$ é um coeficiente de transporte (constante em alguns problemas) e
- $f$ é um controle que atua internamente suportada em um conjunto aberto $\omega \subset (0,L)$.

Observe que a equação KdV clássica corresponde a $\xi = 1 + \frac{u}{2}$.

Como mencionado na primeira parte desta introdução, a KdV teve seu desenvolvimento a partir das descobertas do engenheiro escocês John Scott Russell [25] no qual observou a criação de ondas a partir de um experimento em um canal de superfície rasa. A ideia deste trabalho é investigar a controlabilidade (nula e exata) desse sistema que modela ondas em superfícies rasas.

Mais precisamente, para o problema de controlabilidade nula o estudo foi feito como segue:

1. estudo do problema de Cauchy para a equação KdV linear;
2. utilização de estimativas do tipo "*Carleman*"para encontrar uma *desigualdade de observabilidade* interna apropriada para o estudo da controlabilidade do sistema linear associado a (1.12);
3. a controlabilidade da equação KdV (não linear) será provada através um *argumento de ponto fixo.*

Em relação a controlabilidade exata o estudo foi feito da seguinte maneira:

1. estudo do problema de Cauchy para a equação KdV linear;
2. estimativas a priori obtidas por *métodos dos multiplicadores* (ver [15]) e provas de *desigualdades de observabilidade* adequadas;
3. a controlabilidade da equação KdV (não linear) será provada através de um *argumento de ponto fixo.*

**A Equação KdV em um Intervalo Finito** $(0, L)$

Inicialmente vamos dar atenção à equação KdV em um intervalo finito $(0, L)$ com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann, mais precisamente vamos mencionar os primeiros resultados relativo a controlabilidade exata na fronteira da equação

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(t,0) = h_1(t) & \text{em } (0,T), \\ u(t,L) = h_2(t) & \text{em } (0,T), \\ u_x(t,L) = h_3(t) & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{1.13}$$

A controlabilidade na fronteira da KdV foi primeiramente estudada por Rosier [23] quando considerou o sistema (1.13) com somente um controle $h_3$ ($h_1 = h_2 \equiv 0$) em ação. Ele provou que o sistema (1.13) é localmente exatamente controlável no espaço $L^2(0, L)$.

**Teorema 1.2.1.** *[23] Sejam $T > 0$ e*

$$L \notin \mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}} : j, l \in \mathbb{N}^* \right\}. \tag{1.14}$$

*Considere $\delta > 0$ tal que $u_0$, $u_T \in L^2(0, L)$ satisfazem*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_T\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

*então encontra-se um controle interno $h_3 \in L^2(0, T)$ tal que o sistema (1.13) com $h_1 = h_2 \equiv 0$ admite uma única solução*

$$u \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(0,L)\right)$$

*satisfazendo*

$$u(0,x) = u_0(x) \text{ e } u(T,x) = u_T(x).$$

O teorema foi primeiro provado para o sistema linear usando o método H. U. M com a afirmação que os dados devem ser suficientemente pequenos. Com o resultado linear em mãos, foi estendido o resultado de controlabilidade exata para o sistema não linear obtendo o Teorema 1.2.1, utilizando o princípio da contração. Neste mesmo trabalho Rosier prova que se $L \in \mathcal{N}$ o sistema linear associado a (1.13) com $h_1 = h_2 \equiv 0$ não é exatamente controlável; isto é ; existe um subespaço de dimensão finita $M$ de $L^2(0, L)$ para o qual as soluções do sistema não são levadas da origem a um determinado tempo final $T$. Mais precisamente, para qualquer $0 \neq u_T \in M$, a solução $u$ de (1.13) satisfaz

$$u(0,x) = 0, \quad u(T,x) \neq u_T,$$

para qualquer controle interno $h_3 \in L^2(0, L)$. De agora em diante um domínio $(0, L)$ é chamado de crítico se seu comprimento $L \in \mathcal{N}$.

No que diz respeito a controlabilidade nos comprimentos críticos, Coron e Crépeau, em [10], provam que o sistema (1.13) com $h_1 = h_2 \equiv 0$ e $L = 2k\pi \in \mathcal{N}$ é localmente exatamente controlável no espaço $L^2(0, L)$ embora o seu sistema linear associado **não é exatamente controlável.** Para obter tal resultado os autores fazem uso de um método denominado *método do retorno* devido a Coron em [9].

**Teorema 1.2.2.** [10]*Seja $T > 0$ e $L = 2k\pi \in \mathcal{N}$ para algum inteiro $k$. Existe um $\delta > 0$ tal que para $u_0, u_T \in L^2(0,L)$ satisfazendo*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_T\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

*pode-se encontrar um controle $h_3 \in L^2(0,T)$ onde o sistema (1.13), com $h_1 = h_2 \equiv 0$, admite uma única solução*

$$u \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(0,L)\right)$$

*satisfazendo*

$$u(0,x) = u_0(x) \ \text{ e } u(T,x) = u_T(x).$$

Outros resultados relativos a controlabilidade do sitema (1.13) foram provados. Por exemplo, em Glass-Guerrero [13] e Rosier [24], os autores garantem que o sistema (1.13) é controlável a zero quando considera-se $h_3 \equiv 0$.

Em [24], o autor esclarece de forma sucinta o motivo físico pelo qual se deve considerar o controle atuando do lado direito do domínio espacial na equação KdV, além disso, ele considera o sistema (1.13) com apenas um controle atuando na fronteira, a saber $h_1$. Usando uma estimativa do tipo Carleman, ele prova que o sistema (1.13), com $h_2 = h_3 \equiv 0$, é localmente controlável por trajetórias e, em particular, é localmente controlável a zero.

**Teorema 1.2.3.** [24]*Sejam $T > 0$ e $L > 0$ . Considere*

$$v \in C\left([0,T]; H^2(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap H^1\left(0,T; H^1(0,L)\right),$$

*sendo uma função que satisfaz*

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ v(t,L) = v_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ v(0,x) = v_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{1.15}$$

*Então, existe um $\delta > 0$ tal que para $u_0 \in H^3(0,L)$ com $u_0(L) = u_0'(L) = 0$ e*

$$\|u_0 - v_0\|_{H^3(0,L)} \leq \delta,$$

*existe uma função*

$$u \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(0,L)\right)$$

*o qual é solução de*

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{em } (0,T) \times (0,L), \\ u(t,L) = u_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x) \quad u(T,x) = v(T,x) & \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{1.16}$$

Observe que em (1.16) o autor especifica somente duas condições de contorno. Para tal sistema ser considerado compatível é necessário acrescentar uma terceira condição de contorno envolvendo o controle, por exemplo

$$u(t,0) = h_1(t).$$

Neste caso, Rosier considera o $h_1$ na classe $H^1(0,T)$. Porém, alguns anos depois, Glass e Guerrero, em [13], nos diz que é possível tornar esse controle mais regular através do seguinte resultado.

**Teorema 1.2.4.** [13]*Sejam* $T > 0$ *e* $L > 0$. *Considere* $v \in C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L))$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} v_t + v_x + vv_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0,T)\times(0,L), \\ v(t,0) = v(t,L) = v_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T), \\ v(0,x) = v_0(x) & \text{em } (0,L). \end{cases}$$

*Então, existe um* $\delta > 0$ *tal que para* $u_0 \in L^2(0,L)$ *com*

$$\|u_0 - v_0\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

*existe* $h_1 \in H^{1/2-\epsilon}$ *tal que o sistema (1.13) com* $h_2 = h_3 \equiv 0$ *admite uma única solução*

$$u \in C\left([0,T];L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;H^1(0,L)\right)$$

*satisfazendo*

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(T,x) = v(T,x).$$

Glass e Guerrero também consideram neste mesmo trabalho o sistema (1.13) com $h_3 \equiv 0$. Eles provam que este sistema é localmente exatamente controlável em $L^2(0,L)$ mesmo se o domínio espacial é crítico.

**Teorema 1.2.5.** [13]*Sejam* $L > 0$ *e* $T > 0$. *Existe um* $\delta > 0$ *tal que para qualquer* $u_0, u_T \in L^2(0,L)$ *com*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_T\|_{L^2(0,L)} \leq \delta,$$

*existem controles* $h_1, h_2 \in L^2(0,T)$ *tal que a solução do sistema (1.13) com* $h_3 \equiv 0$ *admite uma única solução*

$$u \in C\left([0,T];H^{-1}(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right)$$

*satisfazendo*

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(T,x) = u_T.$$

Recentemente, Glass e Guerrero, em [14], consideraram o sistema (1.13) com apenas um controle $h_2$ agindo do lado direito do domínio. Assim como em Rosier [23], os autores provam a existência de um conjunto critíco para valores de $L$ da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^* = \big\{L \in \mathbb{R}^*_+ : (a,b) \in \mathbb{C}^2 \text{ t.q. } & ae^a = be^b = -(a+b) \\ & \text{e } L = -(a^2+ab+b^2)\big\}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ou seja, o sistema (1.13), com $h_1 = h_3 \equiv 0$, é localmente exatamente controlável em $L^2(0,L)$ se, e somente se, $L \notin \mathcal{N}^*$.

No que diz respeito a controlabilidade interna para a equação KdV em domínio limitado pouco resultado existe na literatura. Um dos resultados é devido a Glass e Guerrero. Eles provam, em [13], que o sistema é controlável nulamente por trajatórias, mais especificamente eles consideram o intervalo $(0,1)$ para provar que o sistema (1.12), com um controle atuando na faixa esquerda do domínio, é internamente controlável a zero por trajetórias. Para isto, eles derivam uma nova Carleman para a KdV com observabilidade interna. Ou seja, eles provam o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.6.** [13] *Seja* $\nu > 0$ *fixado. Para* $\bar{u}_0 \in L^2(0,1)$, *considere* $\bar{u} \in C^0([0,T];L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1_0(0,1))$ *a solução do sistema*

$$\begin{cases} \bar{u}_t + \bar{u}_x + \bar{u}\,\bar{u}_x + \nu\bar{u}_{xxx} = 0 & \text{em } (0,T)\times(0,1), \\ \bar{u}(t,0) = \bar{u}(t,1) = \bar{u}_x(t,1) = 0 & \text{em } (0,T), \\ \bar{u}(0,x) = \bar{u}_0(x) & \text{em } (0,1). \end{cases}$$

*Então, existe* $\delta > 0$ *tal que para qualquer* $u_0 \in L^2(0,1)$ *satisfazendo* $\|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(0,1)} \leq \delta$*, existe* $v \in L^2(0,T)$*, tal que a solução* $u \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \cap C^0([0,T];L^2(0,1))$ *de*

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + \nu u_{xxx} = 0 & \text{em } (0,T) \times (0,1)\,, \\ u(t,0) = v, u(t,L) = u_x(t,L) = 0 & \text{em } (0,T)\,, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } (0,1)\,, \end{cases}$$

*satisfaz* $u(T,\cdot) = \bar{u}(T,\cdot)$ *em* $(0,1)$.

Nesse trabalho, faremos uma análise do Teorema 1.2.6. Utilizaremos o Teorema de Kakutani e o método H.U.M, descrito na seção 1.1.2, para obter resultados associados ao sistema linear correspondente. Esses resultados obtidos para o problema linear representam parte substancial desse trabalho.

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Os resultados que enunciaremos nesta seção, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [2] e [20]

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em $\Omega$ com valores em $K$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em $\Omega$.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

**Proposição 2.1.1.** *Se $u \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de $u$ são funções absolutamente contínuas.*

**Proposição 2.1.2. (Desigualdade de Young)** - *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Proposição 2.1.3. (Desigualdade de Minkowski)** - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g$ em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Proposição 2.1.4. (Desigualdade de Hölder)** - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Segue como corolário da Proposição anterior o seguinte resultado:

**Corolário 2.1.1. (Desigualdade de Hölder generalizada)** - *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ *e* $\dfrac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Além dos resultados acima, temos que:

**i)** $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

**ii)** $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

**iii)** $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

**iv)** Se $(f_n)$ é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subsequência $(f_{n_k})$ tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em $\Omega$.

**Teorema 2.1.1. (Teorema da Representação de Riesz)** - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Quando $p = \infty$, temos:

**Proposição 2.1.5.** *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to K$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K$ de $\Omega$ munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão $u_\nu$ converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto $K$ de $\Omega$ tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left( \int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

**Lema 2.1.1. (Lema de Du Bois Raymond)** - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* $\Omega$, *onde* $T_u$ *é a distribuição definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Deste Lema tem-se que $T_u$ fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em $\Omega$.

**Proposição 2.1.6.** *Seja* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$, *então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Lema 2.1.2. (Lema de J-L. Lions)** - *Seja* $(u_\nu)$ *uma sucessão de funções pertencentes à* $L^q(Q)$ *com* $1 < q < \infty$. *Se*

*i)* $u_\nu \to u$ *quase sempre em* $Q$, *ii)* $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

*então,* $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$.

**Teorema 2.1.2.** *Sejam* $A_0$, $A_1$ *espaços de Banach,* $1 \leq p_0 < \infty$, $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$. *Então:*

$$[L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1)]_\theta = L^p([A_0, A_1]_\theta)$$

*onde* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *e se* $1 \leq p_0 < \infty$ *tem-se*

$$[L^{p_0}(A_0), L^\infty(A_1)]_\theta = L^p([A_0, A_1]_\theta)$$

*com* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$.

### 2.1.1 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ que são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

**Proposição 2.1.7.** *Sejam* $\Omega$ *um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$, *de classe* $C^m$, *com fronteira limitada e* $m$ *um inteiro tal que* $m \geq 1$, *e* $1 \leq p < \infty$. *Então temos as seguintes imersões contínuas:*

*se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

*se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

*se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

**Teorema 2.1.3. (Teorema de Rellich Kondrachov)** - *Seja $\Omega$ um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $\Omega$ de classe $C^1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*
*se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,*

*se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,*

*se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,*
*com imersões compactas.*

**Proposição 2.1.8.** *Sejam $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e inteiros $m > n$. Então,*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||^{1-a}_{L^q(\Omega)}||u||^a_{W^{1,m}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega),$$

*onde*

$$a = \frac{\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}},$$

*para alguma constante $C > 0$.*

**Proposição 2.1.9. (Desigualdade de Poincaré)** *-Seja $I$ um intervalo limitado. Logo, existe uma constante $C$ positiva (depende só de $|I| < \infty$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}_0(I).$$

Para todo número real $s > 0$ definimos o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); (1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^2\}.$$

Este espaço coincide com os espaços $H^m(\mathbb{R}^n)$ quando $s$ é o número inteiro m. De forma análoga ao caso $W^{m,p}(\mathbb{R}^2)$ se mostra que as funçoes $C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ são densas em $H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $\mathbb{R}^n$. Definimos $H^s(\mathbb{R}^n)$ para valores negativos de $s$ como sendo o espaço dual de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.
No caso em que $\Omega$ seja de classe $C^m$, podemos definir os espaços fracionários

$$H^s(\Omega) = \{v\,|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Se munimos a este espaço com a norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, v = u \text{ em } \Omega\},$$

se tem que $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

**Proposição 2.1.10.** *$D(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$ para todo $s \geq 0$ real.*

**Proposição 2.1.11.** *Seja $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular, não necessariamente limitado, e $0 \leq s_1 \leq s_2$. Então, $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$, $\quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.*

**Proposição 2.1.12.** *Seja $s > \dfrac{n}{2}$. Então $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.*

## 2.2 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução. Sejam $X$ um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das (classes de) funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em $X$, ou seja as funções $u : (a, b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das (classes de) funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em $X$, limitadas quase sempre em $(a, b)$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \inf \left\{ c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s. \right\}.$$

O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \ldots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem $m$ sobre $[a, b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Vejamos algumas propriedades desses espaços.

**Proposição 2.2.1.** *Sejam $m = 0, 1, \ldots$; $1 \leq p < +\infty$; $X$ e $Y$ espaços de Banach sobre o corpo $K$, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Então:*

*i) $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre $K$.*

*ii) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a, b; X)$, são espaços de Banach sobre $K$.*

*iii) $C([a, b]; X)$ é denso em $L^p(a, b; X)$ e a imersão $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$ é contínua.*

*iv) Se $X$ é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_X$, então $L^2(a, b; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar*

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

*v) $L^p(a, b; X)$ é separável, se $X$ for separável e $1 \leq p < +\infty$.*

*vi) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.*

Denotaremos por $D(a, b; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (a, b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(a, b)$. Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $D(a, b; X)$ se:

**i)** $\exists\, K$ compacto de $(a, b)$ tal que *supp* $(\varphi_\nu)$ e *supp* $(\varphi)$ estão contidos em $K$, $\forall \nu$;

**ii)** Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em $X$ uniformemente em $t \in (a, b)$.

## 2.3 O Adjunto de um operador linear não limitado

Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear não limitado com domínio denso. Definamos o conjunto

$$D(A^*) = \{v \in Y'; \quad \exists\, c > 0 \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Para cada $v \in D(A^*)$, definimos a aplicação $g_v : D(A) \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_v(u) = \langle v, Au\rangle, \quad \forall u \in D(A),$$

que satisfaz

$$|g_v(u)| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Observe que $g_v$ é um operador linear limitado, com domínio denso. Então existe uma única extensão linear limitada $f_v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de $g_v$, que satisfaz

$$|f_v(u)| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in X.$$

Assim, definimos

$$\begin{array}{rccl} A^* : & D(A^*) \subset Y' & \rightarrow & X' \\ & v & \mapsto & A^*v = f_v \end{array} \tag{2.1}$$

que é denominado o operador adjunto de A. Como $f_v$ estende $g_v$, então eles coincidem em $D(A)$ e com (2.1) resulta a relação de adjunção:

$$\langle A^*v, u\rangle = \langle v, Au\rangle, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Um resultado que será utilizado, sobre adjunto de um operador linear não limitado, é o seguinte:

**Teorema 2.3.1.** *O adjunto de um operador é um operador fechado.*

## 2.4 $C_0$ - Semigrupos

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [21].

Durante esta seção, $X$ denotará um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de $X$ em $X$. Uma família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominada um Semigrupo de Operadores Lineares quando satisfaz:

**i)** $S(0) = I$, onde $I$ denota o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;

**ii)** $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}_+$.

O semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado de classe $C_0$, ou $C_0-$semigrupo, quando satisfaz:

**iii)** $\lim\limits_{t\to 0_+} ||S(t)x - x||_X = 0, \quad \forall\, x \in X.$

**Proposição 2.4.1.** *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um $C_0-$semigrupo, então $t \mapsto ||S(t)||_X$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Resulta, da Proposição anterior, que existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$||S(t)||_X \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

No caso em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado $C_0-$**semigrupo de contrações**.

**Definição 2.4.1.** *O operador $A$ definido por*

$$D(A) = \left\{x \in X; \quad \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h}x \quad existe\right\};$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h}x, \quad \forall x \in D(A),$$

*é dito gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.*

**Proposição 2.4.2.** *$D(A)$ é um subespaço vetorial de $X$ e $A$ é um operador linear.*

**Proposição 2.4.3.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $C_0$ e $A$ seu gerador infinitesimal.*

*i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\quad \forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax; \tag{2.2}$$

*ii) Se $x \in D(A)$ então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau; \tag{2.3}$$

*iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A)$ e*

$$S(t)x - x = A\int_0^t S(\tau)xd\tau. \tag{2.4}$$

*iv) Para todo $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x. \tag{2.5}$$

**Proposição 2.4.4.** *i) O gerador infinitesimal de um $C_0-$semigrupo é um operador linear fechado e seu domínio é denso em $X$;*

*ii) Um operador linear $A$, fechado e com domínio denso em $X$, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um $C_0-$semigrupo .*

**Definição 2.4.2.** *i) Diz-se que um operador linear $A : D(A) \subset X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade $j$,*

$$Re\langle j(x), Ax\rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A). \tag{2.6}$$

*No caso em que $X$ é um espaço de Hilbert, equivalentemente, $A : D(A) \subset X$ é dissipativo quando*

$$(Ax, x)_X \leq 0, \quad \forall x \in D(A);$$

*ii) Diz-se que $A$ é m-dissipativo se for dissipativo e $Im(I\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$;*

*iii) Diz-se que $A$ é acretivo (m-acretivo) se $-A$ for dissipativo (m-dissipativo).*

**Teorema 2.4.1 (Lumer-Phillips).** *Um operador $A$ é gerador de um $C_0-$semigrupo de contrações se, e somente se, $A$ é m-dissipativo e densamente definido.*

**Corolário 2.4.1.** *Seja $A$ um operador linear fechado densamente definido. Se $A$ e seu adjunto $A^*$ são dissipativos, então $A$ é gerador infinitesimal de um $C_0-$semigrupo de contrações.*

## 2.5 Interpolação de Espaços de Sobolev

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [19].

Sejam $X$ e $Y$ dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa, $X \hookrightarrow Y$. Sejam $(,)_X$ e $(,)_Y$ os produtos internos de $X$ e $Y$, respectivamente.

Indicaremos por $D(S)$, o conjunto de todas as funções $u's$ definidas em $X$, tal que a aplicação $v \longrightarrow (u,v)_X, v \in X$ é continua na topologia induzida por Y. Então, $(u,v)_X = (Su,v)_Y$ define $S$, como sendo um operador ilimitado em $Y$ como domínio $D(S)$, denso em $Y$.

$S$ é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir $S^\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular usaremos $A = S^{1/2}$.

O operador $A$ é auto-adjunto, positivo definido em Y, com domínio $X$ e

$$(u,v)_X = (Au, Av)_Y, \qquad \forall u, v \in X.$$

**Definição 2.5.1.** *Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário*

$$[X,Y]_\theta = D(A^{1-\theta}) \qquad (\textit{domínio de } A^{1-\theta}),\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

*com norma*

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \left(\|u\|_Y^2 + \|A^{1-\theta}u\|_Y^2\right)^{1/2}.$$

**Observação 2.5.1.**

1. $X \hookrightarrow [X,Y]_\theta \hookrightarrow Y.$

2. $\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta.$

3. $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ então $[X,Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X,Y]_{\theta_1}.$

4. $[[X,Y]_{\theta_0}, [X,Y]_{\theta_1}]_\theta = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}.$

**Teorema 2.5.1.** *Seja $\Omega$ um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular e $s > \dfrac{1}{2}$. Então,*

$$H_0^s(\Omega) = \{u| \quad u \in H^s(\Omega), \quad \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = 0, \quad 0 \leq j < s - \frac{1}{2}\}.$$

**Teorema 2.5.2.** *Seja $\Omega$ um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular e $s_1 > s_2 \geq 0$, $s_1$ e $s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, então*

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega)$$

*e*

$$[H_0^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega), \ \textit{com} \quad s = (1-\theta)m \neq k + \frac{1}{2}$$

*com normas equivalentes.*

**Proposição 2.5.1.** *Seja $u \in X$. Logo existe $\tilde{c} > 0$, tal que*

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq \tilde{c}\|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_Y^\theta.$$

**Teorema 2.5.3.** *Seja $\Omega$ um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular e $s_1$ e $s_2 \geq 0$, $s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $s = (1-\theta)s_1 - \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, então*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{-s_2}(\Omega)]_\theta = H^s(\Omega).$$

*e*

$$H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta, \ \textit{com} \quad s = (1-\theta)m \neq k + \frac{1}{2}$$

*com normas equivalentes.*

**Teorema 2.5.4.** *Seja $\Omega$ um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular. Então,*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega) \qquad \forall s_1,\ s_2 > 0.$$

## 2.6 Interpolação de Espaços $L^p(0,T;X)$

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [3] e [19].

**Definição 2.6.1.** *Dizemos que dois espaços vetoriais topológicos normados $X, Y$ são compatíveis se existe um espaço topológico separável $U$, tal que $X$ e $Y$ são subespaços de $U$.*

Consideremos o par $(X,Y)$ de espaços compatíveis. Podemos então definir sua soma, denotada por

$$\Sigma(X,Y) = X + Y = \{u| \quad u \in U, \quad u = x + y,\ x \in X \text{ e } y \in Y\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{\Sigma(X,Y)} = \inf\{\|x\|_X + \|y\|_Y, \quad u = x + y\}$$

e

$$\triangle(X,Y) = X \cap Y$$

munido da norma

$$\|u\|_{\triangle(X,Y)} = \max\{\|u\|_X, \|u\|_Y\}.$$

Sejam $S = \{z | z \in \mathbb{C}, 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ e $S_0 = \{z | z \in \mathbb{C}, 0 < Re(z) < 1\}$. Definimos $\mathbb{F}(X,Y)$ como sendo o conjunto das funções contínuas em $S$ que satisfazem

1. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \Sigma(X,Y)$, analitica em $S_0$;

2. $\|f(z)\|_{\sum(X,Y)} \leq M, \ \forall\, z \in S$;

3. $t \longrightarrow f(it) \in X$, sendo contínua e nula no infinito;

4, $t \longrightarrow f(1+it) \in Y$, sendo contínua e nula no infinito,

munido da norma

$$\|f\|_{\mathbb{F}(X,Y)} = \max(\sup_t \|f(it)\|_X, \sup_t \|f(1+it)\|_Y).$$

**Lema 2.6.1.** *O espaço $\mathbb{F}$ é um espaço de Banach.*

**Definição 2.6.2.** *Definimos $[X,Y]_\theta$ como sendo*

$$[X,Y]_\theta = \{u| \quad u \in \Sigma(X,Y),\ u = f(\theta),\ \textit{para algum;}\ f \in \mathbb{F}(X,Y)\}$$

*munido da norma*

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} = \inf\{\|f(\theta)\|_{\mathbb{F}}(X,Y)| \quad u = f(\theta),\ \ f \in \mathbb{F}(X,Y)\}.$$

**Observação 2.6.1.**

1. O espaço $[X,Y]_\theta$ é um espaço de Banach.

2. $\triangle\,(X,Y) \subset [X,Y]_\theta \subset \Sigma(X,Y)$.

**Teorema 2.6.1.** *Sejam $X, Y$ dois espaços de Banach, $1 \leq p_0, p_1 < \infty,\ 0 < \theta < 1$. Então,*

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{p_1}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta),$$

*onde $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\dfrac{1}{p_0} + \theta\dfrac{1}{p_1}$ com normas equivalentes. Se $1 \leq p_0 < \infty$, temos*

$$[L^{p_0}(0,T;X), L^{\infty}(0,T;Y)]_\theta = L^p(0,T;[X,Y]_\theta),$$

*onde $\dfrac{1}{p} = (1-\theta)\dfrac{1}{p_0}$ com normas equivalentes.*

# Capítulo 3

# Estimativas de Carleman

Nessa seção provaremos uma estimativa de Carleman para o sistema adjunto associado a

$$\begin{cases} y_t + \nu y_{xxx} + (My)_x = 0 & \text{em} \quad (0,T) \times (0,1) \\ y \mid_{x=0} = v_1, y \mid_{x=1} = 0, y_x \mid_{x=1} = 0 & \text{em} \quad (0,T) \\ y \mid_{t=o} = y_0 & \text{em} \quad (0,1), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\nu$ é um coeficiente de dispersão positiva, $M = M(t,x)$ é um coeficiente de transporte e $v_1$ é a função dependente do tempo, que constitui o controle de nosso sistema.

## 3.1 Estimativa de Carleman para M constante

Consideremos o seguinte sistema, chamado **sistema adjunto associado a** (3.1),

$$\begin{cases} -\varphi_t - \nu\varphi_{xxx} - M\varphi_x = 0 & \text{em} \quad (0,T) \times (0,1) \\ \varphi \mid_{x=0} = \varphi \mid_{x=1} = \varphi_x \mid_{x=0} = 0 & \text{em} \quad (0,T) \\ \varphi \mid_{t=T} = \varphi_0 & \text{em} \quad (0,1). \end{cases} \tag{3.2}$$

Nosso objetivo é provar uma estimativa de Carleman para as soluções do sistema (3.2). Para facilitar nosso trabalho, introduzimos a mudança de escala $T_0 = \nu T$ e provamos a estimava de Calerman para o sistema

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xxx} - \frac{M}{\nu}\varphi_x = 0 & \text{em} \quad (0,T_0) \times (0,1) = Q_0 \\ \varphi \mid_{x=0} = \varphi \mid_{x=1} = \varphi_x \mid_{x=0} = 0 & \text{em} \quad (0,T_0) \\ \varphi \mid_{t=T_0} = \varphi_0 & \text{em} \quad (0,1). \end{cases} \tag{3.3}$$

Inicialmente, introduzimos a função

$$\alpha(t,x) = \frac{100 + 4x - x^2}{t^{1/2}(T_0 - t)^{1/2}}, \quad \text{para todo } (t,x) \in Q_0, \tag{3.4}$$

e consideramos as funções peso introduzidas pela primeira vez por Fursikov e Imanuvilov [5]:

$$\tilde{\alpha}(t) := \min_{x \in [0,1]} \{\alpha(t,x)\} = \alpha(t,0) \;\text{ e }\; \hat{\alpha}(t) := \max_{x \in [0,1]} \{\alpha(t,x)\} = \alpha(t,1).$$

Observe que a função $\alpha$ satisfaz as seguintes desigualdades:

$$C \le T_0\alpha, \qquad C_0\alpha \le \alpha_x \le C_1\alpha, \qquad C_0\alpha \le -\alpha_{xx} \le C_1\alpha \qquad \text{em } (0,T_0) \times (0,1) \tag{3.5}$$

$$|\alpha_t| + |\alpha_{xt}| + |\alpha_{xxt}| \le CT_0\alpha^3, \quad |\alpha_{tt}| \le C(T_0^2\alpha^5 + \alpha^3) \le CT_0^2\alpha^5 \;\text{ em } (0,T_0) \times (0,1)$$

e

$$64\tilde{\alpha} - 62\hat{\alpha} = \frac{14}{(t(T_0 - t))^{1/2}} > 0,$$

onde $C$, $C_0$ e $C_1$ são constantes positivas independentes de $T_0$. Com essa notação, provaremos a seguinte proposição:

**Proposição 3.1.1.** *Existe uma constante positiva $K$, independente de $T_0$, $\nu$ e $M$, tal que, para qualquer $\varphi_0 \in L^2(0,1)$, temos*

$$\iint_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2 |\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4 |\varphi|^2) dxdt \leq K \int_0^{T_0} \alpha \,|_{x=0} \, e^{-2s\alpha|_{x=0}} \, |\varphi_{xx} \,|_{x=0}|^2 \, dt,$$

*para qualquer $s \geq K(T_0 + T_0^{\frac{1}{2}} + T_0 |M|^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}})$, onde $\varphi$ é solução de* (3.3).

*Demonstração.* Seja $\Psi := e^{-s\alpha}\varphi$, onde $\alpha$ é dado em (3.5), e $P$ o operador definido por

$$P = -\partial_t - \partial_{xxx} - \frac{M}{\nu}\partial_x.$$

**Afirmação:** $L_1\Psi + L_2\Psi = L_3\Psi$, com

$$L_1\Psi = -\Psi_{xxx} - \Psi t - 3s^2\alpha_x^2\Psi_x - \frac{M}{\nu}\Psi_x,$$

$$L_2\Psi = -s^3\alpha_x^3\Psi - 3s\alpha_x\Psi xx - s\alpha_t\Psi - 3s\alpha_{xx}\Psi_x - s\frac{M}{\nu}\alpha_x\Psi,$$

$$L_3\Psi = s\alpha_{xxx}\Psi + 3s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi.$$

De fato, seja $\omega = e^{-s\alpha}P(e^{s\alpha}\Psi)$, onde $s > 0$. Então

$$\begin{aligned}
P(e^{s\alpha}\Psi) &= \left(-\partial_t - \partial_{xxx} - \frac{M}{\nu}\partial_x\right)(e^{s\alpha}\Psi) \\
&= -\partial_t(e^{s\alpha}\Psi) - \partial_{xxx}(e^{s\alpha}\Psi) - \frac{M}{\nu}\partial_x(e^{s\alpha}) \\
&= -s\alpha_t e^{s\alpha}\Psi - e^{s\alpha}\Psi_t - \frac{M}{\nu}(s\alpha_x e^{s\alpha})\Psi + e^{s\alpha}\Psi_x) - \partial_{xx}(s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi + e^{s\alpha}\Psi_x) \\
&= -s\alpha_t e^{s\alpha}\Psi - e^{s\alpha}\Psi_t - \frac{M}{\nu}s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi - \frac{M}{\nu}e^{s\alpha}\Psi_x \\
&\quad - \partial_x(s\alpha_{xx}e^{s\alpha}\Psi + s\alpha_x\partial_x(e^{s\alpha}\Psi)) - \partial_x(s\partial_x(e^{s\alpha})\Psi_x + e^{s\alpha}\Psi_{xx}) \\
&= -s\alpha_t e^{s\alpha}\Psi - e^{s\alpha}\Psi_t - \frac{M}{\nu}s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi - \frac{M}{\nu}e^{s\alpha}\Psi_x - s\alpha_{xxx}e^{s\alpha}\Psi \\
&\quad - s\alpha_{xx}(s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi + e^{s\alpha}\Psi_x) - 2s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi e^{s\alpha} - s^2\alpha_x^2(s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi + e^{s\alpha}\Psi_x) \\
&\quad - s\alpha_{xx}e^{s\alpha}\Psi_x - s\alpha_x(s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi_x + e^{s\alpha}\Psi_{xx}) - s\alpha_{xx}e^{s\alpha}\Psi_x \\
&\quad - s\alpha_x(s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi_x + e^{s\alpha}\Psi_{xx}) - s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi_{xx} - e^{s\alpha}\Psi_{xxx} \\
&= -s\alpha_t e^{s\alpha}\Psi - e^{s\alpha}\Psi_t - \frac{M}{\nu}s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi - \frac{M}{\nu}e^{s\alpha}\Psi_x - s\alpha_{xxx}e^{s\alpha}\Psi - 3s^2\alpha_x\alpha_{xx}e^{s\alpha}\Psi \\
&\quad - 3s\alpha_{xx}e^{s\alpha}\Psi_x - s^3\alpha_x^3 e^{s\alpha}\Psi - 3s^2\alpha_x^2 e^{s\alpha}\Psi_x - e^{s\alpha}\Psi_{xxx} - 3s\alpha_x e^{s\alpha}\Psi_{xx}.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados da identidade acima por $e^{-s\alpha}$ na última igualdade obtém-se

$$\begin{aligned}\omega =& -s\alpha_t\Psi - \Psi_t - \frac{M}{\nu}s\alpha_x\Psi - \frac{M}{\nu}\Psi_x - s\alpha_{xxx}\Psi - 3s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi - 3s\alpha_{xx}\Psi_x - s^3\alpha_x^3\Psi \\ & - 3s^2\alpha_x^2\Psi_x - \Psi_{xxx} - 3s\alpha_x\Psi_{xx} \\ \omega =&(-\Psi_{xxx} - \Psi_t - 3s^2\alpha_x^2\Psi_x - \frac{M}{\nu}\Psi_x) + (-s^3\alpha_x^3\Psi - 3s\alpha_x\Psi_{xx} - s\alpha_t\Psi - 3s\alpha_{xx}\Psi_x \\ & - \frac{M}{\nu}s\alpha_x\Psi) - (s\alpha_{xxx}\Psi + 3s^2\alpha_{xxx}\Psi + 3s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi).\end{aligned}$$

Logo, tomando

$$L_1\Psi = -\Psi_{xxx} - \Psi_t - 3s^2\alpha_x^2\Psi_x - \frac{M}{\nu}\Psi_x,$$

$$L_2\Psi = -s^3\alpha_x^3\Psi - 3s\alpha_x\Psi xx - s\alpha_t\Psi - 3s\alpha_{xx}\Psi_x - s\frac{M}{\nu}\alpha_x\Psi$$

e

$$L_3\Psi = s\alpha_{xxx}\Psi + 3s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi,$$

temos que $L_1\Psi + L_2\Psi = \omega + L_3\Psi$. Mas como $\omega = e^{-s\alpha}P(e^{s\alpha}\Psi)$ e $\varphi$ é solução de (3.3), então

$$\|\omega\|^2_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0} |\omega|^2\, dxdt = \int_0^{T_0}\int_0^1 |P(e^{s\alpha}\Psi)e^{-s\alpha}|^2\, dxdt = \int_0^{T_0}\int_0^1 |P(\varphi)e^{-s\alpha}|^2\, dxdt = 0,$$

ou seja, $\omega = 0$. Daí, segue que $L_1\Psi + L_2\Psi = L_3\Psi$, o que mostra a afirmação.

Da afirmação, segue que $\|L_1\Psi + L_2\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} = \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)}$, donde

$$\|L_1\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + \|L_2\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + 2\left(L_1\Psi, L_2\Psi\right)_{L^2(Q_0)} = \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)}. \tag{3.6}$$

Na sequência, vamos calcular o termo que envolve o produto interno. Por simplicidade, vamos denotar por $(L_i\Psi)_j$ $(1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 5)$ o $j$-ésimo termo na expressão de $L_i\Psi$. Inicialmente, integrando por partes em relação a $x$ temos:

$$\begin{aligned}\left((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_1\right)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} s^3\alpha_x^3\Psi\Psi_{xxx}\, dxdt = s^3\int_0^{T_0}\int_0^1 \left(\alpha_x^3\Psi\right)\Psi_{xxx}\, dxdt \\ &= -s^3\int_0^{T_0}\int_0^1 \left(\Psi_{xx}3\alpha_x^2\alpha_{xx}\Psi + \Psi_{xx}\alpha_x^3\Psi_x\right)dxdt \\ &= -3s^3 I_1 - s^3 I_2\end{aligned}$$

onde $I_1 = \int_0^{T_0}\int_0^1 \left(\Psi_{xx}\alpha_x^2\alpha_{xx}\Psi\right)dxdt$ e $I_2 = \int_0^{T_0}\int_0^1 \left(\Psi_{xx}\alpha_x^3\Psi_x\right)dxdt$. Agora, fazemos integração por partes em $I_1$ e reescrevendo $I_2$, temos

$$I_1 = \int_0^{T_0}\int_0^1 \left(\Psi_{xx}\alpha_x^2\alpha_{xx}\Psi\right)dxdt = -\int_0^{T_0}\int_0^1 \left(2\Psi_x\alpha_x\alpha_{xx}^2\Psi + \alpha_x^2\alpha_{xxx}\Psi\Psi_x + \alpha_x^2\alpha_{xx}\Psi_x^2\right)dxdt$$

e

$$I_2 = \int_0^{T_0}\int_0^1 \left(\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)\alpha_x^3\right)dxdt.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} &= -3s^3I_1 - s^3I_2\\
&= 3s^3\iint\limits_{Q_0}\left(2\Psi_x\alpha_x\alpha_{xx}^2\Psi + \alpha_x^2\alpha_{xxx}\Psi\Psi_x + \alpha_x^2\alpha_{xx}\Psi_x^2\right)dxdt\\
&- s^3\iint\limits_{Q_0}\left(\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)\alpha_x^3\right)dxdt\\
&= 3s^3\iint\limits_{Q_0}\left(\left(2\alpha_x\alpha_{xx}^2 + \alpha_x^2\alpha_{xxx}\right)\Psi\Psi_x + \alpha_x^2\alpha_{xx}\Psi_x^2\right)dxdt\\
&- s^3\iint\limits_{Q_0}\left(\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)\alpha_x^3\right)dxdt\\
&= 3s^3\iint\limits_{Q_0}\left(\left(2\alpha_x\alpha_{xx}^2 + \alpha_x^2\alpha_{xxx}\right)\partial_x\left(\frac{|\Psi|^2}{2}\right) + \alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2\right)dxdt\\
&- s^3\iint\limits_{Q_0}\left(\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)\alpha_x^3\right)dxdt\\
&= -\frac{s^3}{2}I_3 + \frac{3s^3}{2}I_4 + 3s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt,
\end{aligned}
$$

onde $I_3 = \iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\partial_x(|\Psi_x|^2)dxdt$ e $I_4 = \iint\limits_{Q_0}\left(2\alpha_x\alpha_{xx}^2 + \alpha_x^2\alpha_{xxx}\right)\partial_x(|\Psi|^2)dxdt$. Por outro lado, fazendo integração por partes em $I_3$ e $I_4$, temos

$$
I_3 = \int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt - 3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt
$$

e

$$
I_4 = -\iint\limits_{Q_0}\left(2\alpha_{xx}^3 + 6\alpha_x\alpha_{xx}\alpha_{xxx} + \alpha_x^2\alpha_{xxxx}\right)|\Psi|^2dxdt = -2\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}^3|\Psi|^2dxdt,
$$

pois $\alpha_{xxx} = \alpha_{xxxx} = 0$ para todo $(t,x)\in Q_0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} &= -\frac{s^3}{2}I_3 + \frac{3s^3}{2}I_4 + 3s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt\\
&= \frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt - \frac{s^3}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\\
&- 3s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}^3|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\alpha_{xx}^3 = \left(\frac{-2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}}\right)^3 = \frac{-8}{t^{3/2}(T_0-t)^{3/2}},
$$

e

$$-3\alpha_{xx}^3 = \frac{24}{t^{3/2}(T_0-t)^{3/2}} \geq -\mathcal{C}_1 T_0^2 s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt,$$

onde $\mathcal{C}_1$ é uma constante positiva. Logo,

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} \geq & \frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt - \frac{s^3}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt \\ & - \mathcal{C}_1T_0^2s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt,\end{aligned}$$

o que conclui a primeira estimativa.

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}(\Psi_{xxx})(3s\alpha_x\Psi_{xx})dxdt = 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\Psi_{xx}\Psi_{xxx}dxdt \\ &= 3s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x\partial_x\left(\frac{|\Psi_{xx}|^2}{2}\right)dxdt.\end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= 3s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x\partial_x\left(\frac{|\Psi_{xx}|^2}{2}\right)dxdt \\ &= \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt - \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt \\ &- \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt.\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= 3s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x\partial_x\left(\frac{|\Psi_{xx}|^2}{2}\right)dxdt \\ &= \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt - \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt \\ &- \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt.\end{aligned}$$

Como $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$, temos que $-C_1\alpha \leq -\alpha_x \leq -C_0\alpha$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt - \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt \\
&- \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt \\
&\geq -\frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt + \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt \\
&+ \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(-C_1\alpha|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt \\
&\geq -\frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt + \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt \\
&- \mathcal{C}_2 s\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_2$ é uma constante positiva ($\mathcal{C}_2 = \dfrac{3C_1}{2}$). Com esse cálculo, obtemos a segunda estimativa.

$$((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0}(-\Psi_{xxx})(-s\alpha_t\Psi)dxdt = s\int_0^{T_0}\int_0^1(\alpha_t\Psi)(\Psi_{xxx})dxdt,$$

e, por integração por partes,

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &= -s\int_0^{T_0}\int_0^1\Psi_{xx}\left(\alpha_{xt}\Psi + \alpha_t\Psi_x\right)dxdt \\
&= -s\int_0^{T_0}\int_0^1\left(\alpha_{xt}\Psi\right)\Psi_{xx}dxdt - s\int_0^{T_0}\int_0^1\left(\alpha_t\right)\Psi_x\Psi_{xx}dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, integrando por partes o primeiro termo e reescrevendo o segundo, temos

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &= s\int_0^{T_0}\int_0^1\Psi_x\left(\alpha_{xxt}\Psi + \alpha_{xt}\Psi_x\right)dxdt \\
&- s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_t\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)dxdt \\
&= s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_{xxt}\left(\Psi_x\Psi\right)dxdt + s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_{xt}|\Psi_x|^2dxdt \\
&- s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_t\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)dxdt \\
&= \frac{s}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_{xxt}\partial_x\left(|\Psi|^2\right)dxdt + s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_{xt}|\Psi_x|^2dxdt \\
&- \frac{s}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_t\partial_x\left(|\Psi_x|^2\right)dxdt.
\end{aligned}$$

Novamente, integrando por partes o primeiro e terceiro obtém-se

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &= \frac{s}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_{xxt}\partial_x\left(|\Psi|^2\right)dxdt + s\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_{xt}|\Psi_x|^2dxdt \\
&- \frac{s}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_t\partial_x\left(|\Psi_x|^2\right)dxdt \\
&= -\frac{s}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1 |\Psi|^2\alpha_{xxxt}dxdt + s\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_{xt}|\Psi_x|^2dxdt \\
&- \frac{s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_t|_{x=1})|\Psi_x|_{x=1}|^2dt + \frac{s}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha_{xt}dxdt \\
&= \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xt}|\Psi_x|^2dxdt - \frac{s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_t|_{x=1})|\Psi_x|_{x=1}|^2dt,
\end{aligned}
$$

pois $\alpha_{xxxt} = 0$. Como $|\alpha_t| + |\alpha_{xt}| + |\alpha_{xxt}| \leq CT_0\alpha^3$, temos que $\alpha_{xt} \geq -CT_0\alpha^3$ e $-\alpha_t \geq -CT_0\alpha^3$, donde

$$
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} \geq -\frac{3s}{2}CT_0\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt - \frac{s}{2}CT_0\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt.
$$

Tomando $\mathcal{C}_3 = \dfrac{3C}{2}$, obtemos

$$
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} \geq -\mathcal{C}_3 sT_0\left(\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + \int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\right),
$$

o que nos dá a terceira estimativa.

$$
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0}(-\Psi_{xxx})(-3s\alpha_{xx}\Psi_x)dxdt = 3s\int_0^{T_0}\int_0^1(\alpha_{xx}\Psi_x)\Psi_{xxx}dxdt,
$$

e como $\Psi_x|_{x=0} = 0$, integrando por partes, segue que

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} &= 3s\int_0^{T_0}(\alpha_{xx}|_{x=1})(\Psi_{xx}|_{x=1})(\Psi_x|_{x=1})dt \\
&- 3s\int_0^{T_0}\int_0^1(\Psi_{xx})(\alpha_{xxx}\Psi_x + \alpha_{xx}\Psi_{xx})dxdt \\
&= 3s\int_0^{T_0}(\alpha_{xx}|_{x=1})(\Psi_{xx}|_{x=1})(\Psi_x|_{x=1})dt \\
&- 3s\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_{xxx}\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)dxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Novamente, integrando por partes e usando que $\alpha_{xxx} = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} &= 3s \int_0^{T_0} (\alpha_{xx}|_{x=1})(\Psi_{xx}|_{x=1})(\Psi_x|_{x=1})dt \\
&- \frac{3s}{2} \int_0^{T_0} \int_0^1 \alpha_{xxx}\partial_x(|\Psi_x|^2)dxdt - 3s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt \\
&= 3s \int_0^{T_0} (\alpha_{xx}|_{x=1})(\Psi_{xx}|_{x=1})(\Psi_x|_{x=1})dt - 3s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a desigualdade $|ab| \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ com $a = |\Psi_{xx}|_{x=1}|$ e $b = |\Psi_x|_{x=1}|$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} &\geq -3s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt \\
&- \frac{3s}{2} \int_0^{T_0} (\alpha_{xx}|_{x=1}) \left[ |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + |\Psi_x|_{x=1}|^2 \right] dt \\
&\geq -3s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt - \frac{3s}{2} \int_0^{T_0} (\alpha_{xx}|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
&- \frac{3s}{2} \int_0^{T_0} (\alpha_{xx}|_{x=1})|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
-3\alpha_{xx}|_{x=1} = \frac{6}{t^{1/2}(T_0 - t)^{1/2}} \geq -\mathcal{C}_4 T_0^2 \alpha^3|_{x=1},
$$

onde $\mathcal{C}_4$ é uma constante positiva. Assim, a desigualdade anterior é reduzida a

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} \geq -3s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt - \frac{s}{2} \int_0^{T_0} (\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 \\
- \mathcal{C}_4 s T_0^2 \int_0^{T_0} (\alpha|_{x=1})^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt,
\end{aligned}
$$

concluindo assim a quarta estimativa.

$$
((L_1\Psi)_1, (L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0} (\Psi_{xxx}) \left( \frac{sM}{\nu} \alpha_x \Psi \right) dxdt = \frac{sM}{\nu} \iint\limits_{Q_0} (\alpha_x \Psi)\, \Psi_{xxx} dxdt,
$$

e, por integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= \frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}(\alpha_x\Psi)\,\Psi_{xxx}dxdt = -\frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\Psi_{xx}\left(\alpha_{xx}\Psi+\alpha_x\Psi_x\right)dxdt\\
&= -\frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_{xx}\Psi dxdt - \frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\partial_x\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)dxdt\\
&= -\frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_{xx}\Psi dxdt - \frac{sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x\partial_x\left(|\Psi_x|^2\right)dxdt\\
&= -\frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_{xx}\Psi dxdt - \frac{sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x|_{x=1}\right)|\Psi_x|_{x=1}|^2dxdt\\
&+\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt,
\end{aligned}
$$

pois $\Psi_x|_{x=0}=0$. Usando a desigualdade $-\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{b^2}{2}\le -ab$ com $a=\sqrt{s}\Psi_{xx}$ e $b=-\dfrac{\sqrt{s}M}{\nu}\Psi$, segue que

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= -\frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_{xx}\Psi dxdt - \frac{sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x|_{x=1}\right)|\Psi_x|_{x=1}|^2dxdt\\
&+\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt\\
&= \iint\limits_{Q_0}(-\alpha_{xx})(-\sqrt{s}\Psi_{xx})\left(-\frac{\sqrt{s}M}{\nu}\Psi\right)dxdt\\
&-\frac{sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x|_{x=1}\right)|\Psi_x|_{x=1}|^2dxdt+\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt\\
&\ge \iint\limits_{Q_0}(-\alpha_{xx})\left[-\frac{s|\Psi_{xx}|^2}{2}-\frac{sM^2}{2\nu^2}|\Psi|^2\right]dxdt\\
&-\frac{sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x|_{x=1}\right)|\Psi_x|_{x=1}|^2dxdt+\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt\\
&= \frac{s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt+\frac{sM^2}{2\nu^2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi|^2dxdt\\
&-\frac{sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x|_{x=1}\right)|\Psi_x|_{x=1}|^2dxdt+\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\alpha_{xx}=\frac{-2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}}=\frac{-2\alpha^5t^2(T_0-t)^2}{(100+4x-x^2)^5}\quad\text{em}\quad(0,T_0)\times(0,1)
$$

e

$$
100<100+4x-x^2<103\quad\text{para } x\in(0,1)\quad\text{e}\quad 0<t(T_0-t)<T_0^2\quad\text{para } t\in(0,T_0) \tag{3.7}
$$

temos

$$\frac{sM^2}{2\nu^2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi|^2dxdt \geq -\frac{sM^2T_0^4}{\nu^2(103)^5}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt \geq -\frac{sM^2T_0^4}{\nu^2(103)^3}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt. \quad (3.8)$$

Por outro lado,

$$\alpha_x|_{x=1} = \frac{2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}} = \frac{2\left(\alpha|_{x=1}\right)^3 t(T_0-t)}{(103)^3} > 0 \ \text{ em } \ (0,T_0)\times(0,1),$$

e como $-M \geq -|M|$, por (3.7) segue que

$$\begin{aligned}\frac{-sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\alpha_x|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt &\geq \frac{-s|M|}{2\nu}\int_0^{T_0}\alpha_x|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\\ &\geq -\frac{s|M|T_0^2}{\nu 103^3}\int_0^{T_0}\left(\alpha|_{x=1}\right)^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt. \quad (3.9)\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\alpha_{xx} = \frac{-2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}} = \frac{-2\alpha^3 t(T_0-t)}{(100+4x-x^2)^3} < 0 \text{ em } (0,T_0)\times(0,1)$$

e

$$\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt \geq -\frac{s|M|T_0^2}{\nu 103^3}\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt. \quad (3.10)$$

De (3.8), (3.9) e (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}\left((L_1\Psi)_1,(L_2\Psi)_5\right)_{L^2(Q_0)} &\geq -\frac{s|M|T_0^2}{\nu 103^3}\left(\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + \int_0^{T_0}\left(\alpha|_{x=1}\right)^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\right)\\ &+\frac{s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt - \frac{sM^2T_0^4}{\nu^2(103)^3}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt\\ &\geq -\mathcal{C}_5\frac{s|M|T_0^2}{\nu}\left(\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + \int_0^{T_0}\left(\alpha|_{x=1}\right)^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\right)\\ &+\frac{s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt - \mathcal{C}_5\frac{sM^2T_0^4}{\nu^2}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt,\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_5$ é uma constante positiva, concluindo assim a quinta estimativa.

Combinando todas as estimativas obtém-se

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & \frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2 dxdt - \frac{s^3}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_1 T_0^2 s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_2 s\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_3 sT_0\left(\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt + \int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt\right) \\
& - 3s\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt - \frac{s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 \\
& - \mathcal{C}_4 sT_0^2\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_5\frac{s|M|T_0^2}{\nu}\left(\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt + \int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt\right) \\
& + \frac{s}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt - \mathcal{C}_5\frac{sM^2T_0^4}{\nu^2}\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Considerando $\mathcal{C}_{11} = \max\ \{\mathcal{C}_i;\ i = 1,2,3,4,5\}$, mostra-se que

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & \frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2 dxdt - 4s\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C}_{11} sT_0^2\left(s^2 + \frac{M^2T_0^2}{\nu^2}\right)\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C}_{11} sT_0\left(1 + \frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
& - \frac{s^3}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt + s\int_0^{T_0}\alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_{11} sT_0\left(1 + T_0 + \frac{|M|T_0}{\nu}\right)\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_{11} s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Agora, faremos a mesma análise para o segundo termo $L_1\Psi$. Começamos integrando por partes em relação a $t$:

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_2,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} (-\Psi_t)(-s^3\alpha_x^3\Psi)dxdt = s^3\iint\limits_{Q_0} \alpha_x^3\Psi\Psi_t dxdt \\
&= \frac{s^3}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x^3\partial_t(|\Psi|^2)dxdt = \frac{s^3}{2}\int_0^1\int_0^{T_0}\alpha_x^3\partial_t(|\Psi|^2)dtdx \\
&= -\frac{3s^3}{2}\int_0^1\left(\int_0^{T_0}\alpha_x^2\alpha_{tx}|\Psi|^2dt\right)dx = -\frac{3s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{tx}|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Como $-\dfrac{3}{2}\alpha_x^2\alpha_{tx} \geq -CT_0\alpha^5$, temos

$$
((L_1\Psi)_2,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} \geq -Cs^3T_0\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt,
$$

o que conclui a primeira estimativa.

Para a segunda estimativa, inicialmente usamos integração por partes e as condições de fronteira:

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_2,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}\Psi_t(3s\alpha_x\Psi_{xx})dxdt = 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\Psi_t\Psi_{xx}dxdt \\
&= 3s\int_0^{T_0}\left[(\alpha_x\Psi_t\Psi_x)_0^1 - \int_0^1\Psi_x(\alpha_{xx}\Psi_t+\alpha_x\Psi_{xt})dx\right]dt \\
&= -3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_x\Psi_tdxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\Psi_x\Psi_{xt}dxdt \\
&= -3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_x\Psi_tdxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\partial_t\left(\frac{|\Psi_x|^2}{2}\right)dxdt \\
&= -\frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\partial_t\left(|\Psi_x|^2\right)dxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_x\Psi_tdxdt \\
&= \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}|\Psi_x|^2\alpha_{tx}dxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_x\Psi_tdxdt,
\end{aligned}
$$

pois $\Psi_x|_{t=0} = \Psi_x|_{t=T_0} = 0$. Como $\alpha_{tx} \geq -CT_0\alpha^3$, por (3.5) obtemos

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_2,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &\geq -\frac{3CT_0s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_x\Psi_tdxdt \\
&\geq -\mathcal{C}_1sT_0\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}\Psi_x\Psi_tdxdt,
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{C}_1 = \dfrac{3C}{2}$, concluindo a segunda estimativa.

Para a terceira estimativa, procedemos de maneira análoga, usamos integração por partes, (3.5) e observamos que $\alpha_{tt} \geq -CT_0^2\alpha^5$:

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_2, (L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} (-\Psi_t)(-s\alpha_t\Psi)dxdt = s\iint\limits_{Q_0} \alpha_t\Psi\Psi_t dxdt \\ &= \frac{s}{2}\int_0^1\int_0^{T_0} \alpha_t\partial_t(|\Psi|^2)dtdx \\ &= -\frac{s}{2}\iint\limits_{Q_0} |\Psi|^2\alpha_{tt}dxdt \geq -\frac{CT_0^2 s}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\ &\geq -\mathcal{C}_2 sT_0^2\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt,\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_2 = C/2$ o que conclui a terceira estimativa.

Para o quarto termo temos uma igualdade, como segue

$$((L_1\Psi)_2, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0} \Psi_t(3s\alpha_{xx}\Psi_x)dxdt = 3s\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}\Psi_t\Psi_x dxdt.$$

Finalmente, obtemos a quinta estimativa. Inicialmente, usamos integração por partes:

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_2, (L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} (-\Psi_t)\left(-\frac{sM}{\nu}\alpha_x\Psi\right)dxdt = \frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x\Psi_t\Psi dxdt \\ &= \frac{sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x\partial_t\left(\frac{|\Psi|^2}{2}\right)dxdt = \frac{sM}{2\nu}\int_0^1\int_0^{T_0} \alpha_x\partial_t\left(|\Psi|^2\right)dtdx \\ &= -\frac{sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xt}|\Psi|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Por (3.5), temos que $\alpha_{xt} \geq -CT_0\alpha^3 \geq -CT_0^3\alpha^5$. Como $-M \leq |M|$ e $\alpha_{tx} < 0$, tem-se

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_2, (L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= \frac{s}{2\nu}\iint\limits_{Q_0} (-M\alpha_{xt})|\Psi|^2 dxdt \geq \frac{s}{2\nu}\iint\limits_{Q_0} (|M|\alpha_{xt})|\Psi|^2 dxdt \\ &\geq -\frac{C|M|T_0^3 s}{2\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\ &\geq -\mathcal{C}_2\frac{|M|T_0^3 s}{\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt,\end{aligned}$$

o que conclui a última estimativa.

Combinando todas as estimativas e considerando $\mathcal{C}_{12} = \max\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, C\}$, mostra-se que

$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_2, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq &-\mathcal{C}_{12}sT_0\left(s^2 + T_0 + \frac{T_0^2|M|}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\ &- \mathcal{C}_{12}sT_0\int_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Calculemos agora o terceiro termo $L_1\Psi$. Integrando por partes em relação a $x$ e usando que $\Psi|_{x=0} = \Psi_{x=1} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_3, (L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} (-3s^2\alpha_x^2\Psi_x)(-s^3\alpha_x^3\Psi)dxdt = 3s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^5\Psi_x\Psi dxdt \\
&= \frac{3s^5}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^5\partial_x(|\Psi|^2)dxdt = \frac{3s^5}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_x^5\partial_x(|\Psi|^2)dxdt \\
&= \frac{3s^5}{2}\int_0^{T_0}\left(-\int_0^1 |\Psi|^2 5\alpha_x^4\alpha_{xx}dx\right)dt = -\frac{15s^5}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^4\alpha_{xx}|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Como $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$ e $C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha$ (veja (3.5)), temos que

$$-\alpha_x^4\alpha_{xx} \geq C_0^5\alpha^5.$$

Assim,

$$((L_1\Psi)_3, (L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} \geq \mathcal{C}_1 s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2dxdt \tag{3.14}$$

onde $\mathcal{C}_1 = \dfrac{15C_0^2}{2}$, o que conclui a primeira estimativa.

Para o segundo termo temos uma igualdade que é obtida usando integração por partes em relação a $x$ e a condição de fronteira $\Psi_x|_{x=0} = 0$:

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_3, (L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} (-3s^2\alpha_x^2\Psi_x)(-3s\alpha_x\Psi_{xx})dxdt = 9s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\Psi_x\Psi_{xx}dxdt \\
&= \frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\partial_x(|\Psi_x|^2)dxdt = \frac{9s^3}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_x^3\partial_x(|\Psi_x|^2)dxdt \\
&= \frac{9s^3}{2}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2 - \int_0^1 |\Psi_x|^2 3\alpha_x^2\alpha_{xx}dx\right)dt \\
&= -\frac{27s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt + \frac{9s^3}{2}\int_0^{T_0}\alpha_x^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt.
\end{aligned}$$

Para a terceira estimativa procedemos de maneira análoga lembrando que $\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1} = 0$ :

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_3,(L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}(-3s^2\alpha_x^2\Psi_x)(-s\alpha_t\Psi)dxdt = 3s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_t\Psi_x\Psi dxdt\\
&= \frac{3s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_t\partial_x(|\Psi|^2)dxdt = \frac{3s^3}{2}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x^2\alpha_t\partial_x(|\Psi|^2)dxdt\\
&= \frac{3s^3}{2}\int_0^{T_0}\left(-\int_0^1|\Psi|^2(2\alpha_x\alpha_{xx}\alpha_t+\alpha_x^2\alpha_{xt})dx\right)dt\\
&= -\frac{3s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}(2\alpha_x\alpha_{xx}\alpha_t+\alpha_x^2\alpha_{xt})|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Por (3.5) temos que

$$
-C_0^2CT_0\alpha^5 \leq -\alpha_{xt}\alpha_x^2 \text{ e } -C_1^2CT_0\alpha^5 \leq -\alpha_t\alpha_x\alpha_{xx}.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_3,(L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &\geq -\frac{3S^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\left(2C_1^2CT_0+C_0^2CT_0\right)\alpha^5|\Psi|^2dxdt\\
&\geq -\mathcal{C}_2s^3T_0\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dx,
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{C}_2 = \dfrac{3C(2C_1^2+C_0^2)}{2}$, o que conclui a estimativa.

Para o quarto termo temos uma igualdade:

$$
((L_1\Psi)_3,(L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0}(-3s^2\alpha_x^2\Psi_x)(-3s\alpha_{xx}\Psi_x)dxdt = 9s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt.
$$

Para a quinta estimativa integramos por partes em relação a $x$ e usamos as condições de fronteira $\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1} = 0$ :

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_3,(L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}(-3s^2\alpha_x^2\Psi_x)\left(\frac{-sM}{\nu}\right)\alpha_x\Psi dxdt = \frac{3Ms^3}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\Psi_x\Psi dxdt\\
&= \frac{3Ms^3}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\partial_x(|\Psi|^2)dxdt = \frac{3Ms^3}{2\nu}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x^3\partial_x(|\Psi|^2)dxdt\\
&= \frac{3Ms^3}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(-\int_0^1|\Psi|^2(3\alpha_x^2\alpha_{xx})dx\right)dt\\
&= -\frac{9Ms^3}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}(\alpha_x^2\alpha_{xx})|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Como $-M \leq |M|$ e $\alpha_x^2\alpha_{xx} \leq 0$ (por (3.5)), temos que

$$
-M\alpha_x^2\alpha_{xx} \geq |M|\alpha_x^2\alpha_{xx},
$$

onde
$$\alpha_x^2\alpha_{xx} = \left(\frac{(4-2x)^2}{t(T_0-t)}\right)\left(\frac{-2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}}\right) = \frac{-8(x-2)^2t(T_0-t)\alpha^5}{(100+4x-x^2)^5}.$$
Como
$$100 < 100+4x-x^2 < 103,\ (x-2)^2 > 1 \quad \text{para } x \in (0,1)$$
e
$$0 < t(T_0-t) < T_0^2 \quad \text{para } t \in (0,T_0),$$
temos
$$-M\alpha_x^2\alpha_{xx} \geq -\frac{8}{(103)^5}T_0^2|M|\alpha^5.$$
Assim,
$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_3,(L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= -\frac{9Ms^3}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}(\alpha_x^2\alpha_{xx})|\Psi|^2dxdt \\ &\geq -\frac{36|M|T_0^2s^3}{(103)^5\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt \ \geq -\mathcal{C}_3s^3\frac{|M|T_0^2}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt,\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_3 = \dfrac{36}{(103)^5}$o que conclui esta última estimativa.

Combinando todas as estimativas e tomando $\mathcal{C}_{13} = \max\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3\}$, mostra-se que
$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_3,(L_2\Psi))_{L^2(Q_0)} \geq\ & \mathcal{C}_{13}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt \\ & -\frac{27s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt + \frac{9s^3}{2}\int_0^{T_0}\alpha_x^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt \\ & -\mathcal{C}_{13}s^3T_0\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi^2|dxdt + 9s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt \\ & -\mathcal{C}_{13}s^3\frac{|M|T_0^2}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt.\end{aligned}$$

Reescrevendo, temos
$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_3,L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq\ & \mathcal{C}_{13}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt \\ & -\frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt + \frac{9s^3}{2}\int_0^{T_0}\alpha_x^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt \\ & -\mathcal{C}_{13}s^3T_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi^2|dxdt. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Calculemos agora o quarto e último termo de $L_1\Psi$. Integrando por partes em relação a $x$ e usando que $\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1} = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}\left(\frac{-M}{\nu}\Psi_x\right)(-s^3\alpha_x^3\Psi)dxdt = \frac{Ms^3}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\Psi_x\Psi dxdt\\
&= \frac{Ms^3}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x^3\partial_x(|\Psi|^2)dxdt = \frac{Ms^3}{2\nu}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x^3\partial_x(|\Psi|^2)dxdt\\
&= \frac{Ms^3}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(-\int_0^1|\Psi|^2(3\alpha_x^2\alpha_{xx})dx\right)dt\\
&= -\frac{3Ms^3}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}(\alpha_x^2\alpha_{xx})|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Como $-M \leq |M|$ e $\alpha_x^2\alpha_{xx} \leq 0$, por (3.5), temos que

$$
-M\alpha_x^2\alpha_{xx} \geq |M|\alpha_x^2\alpha_{xx}
$$

e (como antes)

$$
-M\alpha_x^2\alpha_{xx} \geq -\frac{8}{(103)^5}T_0^2|M|\alpha^5.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4,(L_2\Psi)_1)_{L^2(Q_0)} &= -\frac{3Ms^3}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}(\alpha_x^2\alpha_{xx})|\Psi|^2dxdt\\
&\geq -\frac{12|M|T_0^2s^3}{(103)^5\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt\\
&\geq -\mathcal{C}_1s^3\frac{|M|T_0^2}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{C}_1 = \dfrac{12}{(103)^5}$, o que conclui a primeira estimativa.

Para a segunda estimativa usamos integração por partes em relação a $x$ e $\Psi_x|_{x=0} = 0$ :

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}\left(\frac{-M}{\nu}\Psi_x\right)(-3s\alpha_x\Psi_{xx})dxdt = \frac{3sM}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\Psi_x\Psi_{xx}dxdt\\
&= \frac{3sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_x\partial_x(|\Psi_x|^2)dxdt = \frac{3sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_x\partial_x(|\Psi_x|^2)dxdt\\
&= \frac{3sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(\alpha_x|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2 - \int_0^1|\Psi_x|^2\alpha_{xx}dx\right)dt\\
&= -\frac{3sM}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt + \frac{3sM}{2\nu}\int_0^{T_0}\alpha_x|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt.
\end{aligned}
$$

Como $M \geq -|M|$, $\alpha_x \geq 0$ e $\alpha_{xx} \leq 0$ (por (3.5)), temos que

$$
M\alpha_x|_{x=1} \geq -|M|\alpha_x|_{x=1} \quad \text{e} \quad -M\alpha_{xx} \geq |M|\alpha_{xx}.
$$

Note que

$$\alpha_x|_{x=1} = \frac{2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}} = \frac{2t(T_0-t)\alpha^3|_{x=1}}{(103)^3}$$

e

$$\alpha_{xx} = \frac{-2}{t^{1/2}(T_0-t)^{1/2}} = \frac{-2t(T_0-t)\alpha^3}{(100+4x-x^2)^3}.$$

Por outro lado,

$$100 < 100+4x-x^2 < 103, \quad \text{para } x \in (0,1) \quad \text{e} \quad 0 < t(T_0-t) < T_0^2, \quad \text{para } t \in (0,T_0).$$

Logo,

$$M\alpha_x|_{x=1} \geq -\frac{2}{(103)^3}T_0^2|M|\alpha^3|_{x=1},$$

$$-M\alpha_{xx} \geq -\frac{2}{(103)^3}T_0^2|M|\alpha^3,$$

e

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4,(L_2\Psi)_2)_{L^2(Q_0)} &\geq -\frac{3s|M|T_0^2}{(103)^3\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt - \frac{3s|M|T_0^2}{103^3\nu}\int_0^{T_0}\alpha^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt \\
&= -\frac{3s|M|T_0^2}{(103)^3\nu}\left(\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + \int_0^{T_0}\alpha^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\right) \\
&\geq -\mathcal{C}_2 s\frac{|M|T_0^2}{\nu}\left(\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + \int_0^{T_0}\alpha^3|_{x=1}|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\right),
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_2 = \dfrac{3}{(103)^3}$, o que conclui a segunda estimativa.

Para a terceira estimativa, procedemos como na segunda:

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4,(L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0}\left(\frac{-M}{\nu}\Psi_x\right)(-s\alpha_t\Psi)dxdt = \frac{Ms}{\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_t\Psi_x\Psi dxdt \\
&= \frac{Ms}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_t\partial_x(|\Psi|^2)dxdt = \frac{Ms}{2\nu}\int_0^{T_0}\int_0^1\alpha_t\partial_x(|\Psi|^2)dxdt \\
&= \frac{Ms}{2\nu}\int_0^{T_0}\left(-\int_0^1|\Psi|^2\alpha_{xt}dx\right)dt = -\frac{Ms}{2\nu}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xt}|\Psi|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_x = (4-2x)\left[t(T_0-t)\right]^{-1/2}$, temos que

$$\alpha_{xt} = -\frac{4-2x}{2}\left(tT_0-t^2\right)^{-3/2}(T_0-2t) = -\frac{(2-x)(T_0-2t)}{t^{3/2}(T_0-t)^{3/2}},$$

ou seja,

$$-\alpha_{xt} = -\frac{(2-x)(2t-T_0)\left[t(T_0-t)\right]\alpha^5}{(100+4x-x^2)^5}.$$

Por outro lado,

$$1 < 2-x < 2, \;\; 100 < 100+4x-x^2 < 103, \;\; \text{para } x \in (0,1)$$

e

$$2t - T_0 < T_0, \;\; 0 < t(T_0 - t) < T_0^2, \;\text{ para } t \in (0, T_0).$$

Assim, obtemos a seguinte desigualdade

$$-M\alpha_{xt} \geq -\frac{2T_0^3|M|}{103^5}\alpha^5.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4, (L_2\Psi)_3)_{L^2(Q_0)} &\geq -\frac{s|M|T_0^3}{(103)^5\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
&\geq -\mathcal{C}_3 s\frac{|M|T_0^3}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_3 = \dfrac{1}{(103)^5}$, o que conclui a terceira estimativa.

Para a quarta estimativa temos

$$((L_1\Psi)_4, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0} \left(\frac{-M}{\nu}\Psi_x\right)(-3s\alpha_{xx}\Psi_x)dxdt = \frac{3Ms}{\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_x|^2 dxdt.$$

Como $M \leq |M|$ e $\alpha_{xx} \leq 0$, obtém-se

$$M\alpha_{xx} \geq |M|\alpha_{xx},$$

onde

$$\alpha_{xx} = \frac{-2t(T_0 - t)\alpha^3}{(100 + 4x - x^2)^3}.$$

Por outro lado,

$$100 < 100 + 4x - x^2 < 103 \quad \text{para } x \in (0,1) \quad \text{e} \quad 0 < t(T_0 - t) < T_0^2 \quad \text{para } t \in (0, T_0),$$

donde

$$M\alpha_{xx} \geq -\frac{2}{(103)^3}T_0^2|M|\alpha^3.$$

Portanto,

$$((L_1\Psi)_4, (L_2\Psi)_4)_{L^2(Q_0)} \geq -\frac{6T_0^2|M|s}{\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \;\; \geq -\mathcal{C}_4 s\frac{|M|T_0^2}{\nu}\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt,$$

onde $\mathcal{C}_4 = \dfrac{6}{(103)^3}$, o que conclui a quarta estimativa.

Finalmente, obtemos a quinta e última estimativa. Usando integração por partes em relação a $x$ e as condições de fronteira $\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_4, (L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} &= \iint\limits_{Q_0} \left(\frac{-M}{\nu}\Psi_x\right)\left(\frac{-sM}{\nu}\alpha_x\Psi\right)dxdt = \frac{sM^2}{\nu^2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x\Psi\Psi_x dxdt \\
&= \frac{sM^2}{2\nu^2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x\partial_x(|\Psi|^2)dxdt = \frac{sM^2}{2\nu^2}\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha_x\partial_x(|\Psi|^2)dxdt \\
&= \frac{sM^2}{2\nu^2}\int_0^{T_0}\left(-\int_0^1 |\Psi|^2\alpha_{xx}dx\right)dt = -\frac{sM^2}{2\nu^2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_{xx} \geq 0$, obtém-se
$$-M^2\alpha_{xx} \geq -T_0^4 M^2 \alpha^5,$$
e
$$((L_1\Psi)_4, (L_2\Psi)_5)_{L^2(Q_0)} \geq -\frac{T_0^4 M^2 s}{2\nu^2} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \quad \geq -\mathcal{C}_5 s \frac{M^2 T_0^4}{\nu^2} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt,$$

onde $\mathcal{C}_5 = \dfrac{1}{2}$, o que conclui a última estimativa.

Combinando todas as estimativas e tomando $\mathcal{C}_{14} = \max\{\mathcal{C}_i;\ 1 \leq i \leq 5\}$, mostra-se que
$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_4, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq &-\mathcal{C}_{14} s^3 \frac{|M| T_0^2}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\ &- \mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \left( \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt + \int_0^{T_0} \alpha^3|_{x=1} |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \right) \\ &- \mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^3}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt - \mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\ &- \mathcal{C}_{14} s \frac{M^2 T_0^4}{\nu^2} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt\end{aligned}$$

Reescrevendo, temos
$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_4, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq &-\mathcal{C}_{14} \frac{|M| s T_0^2}{\nu} \left( s^2 + T_0 + \frac{T_0^2 |M|}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\ &- 2\mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt - \mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \int_0^{T_0} \alpha^3|_{x=1} |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt,\end{aligned}$$

que por sua vez pode ser majorado por
$$\begin{aligned}((L_1\Psi)_4, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq &-\mathcal{C}_{14} \frac{|M| s T_0^2}{\nu} \left( s^2 + T_0 + \frac{T_0^2 |M|}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\ &- \mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt - \mathcal{C}_{14} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \int_0^{T_0} \alpha^3|_{x=1} |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Combinando todos os produtos $(L_1\psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)}$ que vem de (3.12), (3.13), (3.15) e (3.16). A medida que nos referimos aos termos de ordem zero, obtemos informação do termo obtido em (3.14) (ou (3.15))
$$s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt.$$

Tomando $\mathcal{C} = \max\{\mathcal{C}_{1i};\ 1 \leq i \leq 4\}$, temos

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq\ & \frac{9s^3}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2 \alpha_{xx} |\Psi_x|^2 dxdt - 4s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx} |\Psi_{xx}|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C} s T_0^2 \left( s^2 + \frac{M^2 T_0^2}{\nu^2} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C} s T_0 \left( 1 + \frac{|M| T_0}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\
& - \frac{s^3}{2} \int_0^{T_0} \left( \alpha_x|_{x=1} \right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1} |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C} s T_0 \left( 1 + T_0 + \frac{|M| T_0}{\nu} \right) \int_0^{T_0} \left( \alpha|_{x=1} \right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C} s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt - \mathcal{C} s T_0 \left( s^2 + T_0 + \frac{T_0^2 |M|}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C} s T_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt + \mathcal{C} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
& - \frac{9s^3}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2 \alpha_{xx} |\Psi_x|^2 dxdt + \frac{9s^3}{2} \int_0^{T_0} \alpha_x^3|_{x=1} |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C} s^3 T_0 \left( 1 + \frac{|M| T_0}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi^2| dxdt \\
& - \mathcal{C} \frac{|M| s T_0^2}{\nu} \left( s^2 + T_0 + \frac{T_0^2 |M|}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt - \mathcal{C} s \frac{|M| T_0^2}{\nu} \int_0^{T_0} \alpha^3|_{x=1} |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt,
\end{aligned}
$$

que se reduz a

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & -4s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt + 4s^3 \int_0^{T_0} \left(\alpha_x|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt - \mathcal{C}s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\
& + \mathcal{C}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt - \mathcal{C}s^3 \left(T_0^2 + 2T_0 + \frac{2|M|T_0^2}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2| dxdt \\
& - \mathcal{C}s \left(T_0^2 + \frac{2|M|T_0^3}{\nu} + \frac{2M^2T_0^4}{\nu^2}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}s \left(T_0 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C}s \left(T_0 + T_0^2 + \frac{2|M|T_0^2}{\nu}\right) \int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Observe que podemos majorar o termo $(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)}$, obtendo

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & -4s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt + 4s^3 \int_0^{T_0} \left(\alpha_x|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt - \mathcal{C}s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\
& + \mathcal{C}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt - 2\mathcal{C}s^3 \left(T_0^2 + T_0 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2| dxdt \\
& - 2\mathcal{C}s \left(T_0^2 + \frac{|M|T_0^3}{\nu} + \frac{M^2T_0^4}{\nu^2}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}s \left(T_0 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}s \left(T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Como $C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha$ e $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$, a desigualdade acima nos garante que

$$\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq 4C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + 4C_0^3 s^3 \int_0^{T_0} (\alpha|_{x=1})^3 \, |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
+ s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt - \mathcal{C}s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\
+ \mathcal{C}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt - 2\mathcal{C}s^3 \left(T_0^2 + T_0 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2| dxdt \\
- 2\mathcal{C}s \left(T_0^2 + \frac{|M|T_0^3}{\nu} + \frac{M^2T_0^4}{\nu^2}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
- 2\mathcal{C}s \left(T_0 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
- 2\mathcal{C}s \left(T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \int_0^{T_0} (\alpha|_{x=1})^3 \, |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt,
\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq 4C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
- \mathcal{C}s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \mathcal{C}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
- 2\mathcal{C} \left[ s \left(T_0^2 + \frac{|M|T_0^3}{\nu} + \frac{M^2T_0^4}{\nu^2}\right) + s^3 \left(T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \right] \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2| dxdt \\
- 2\mathcal{C}sT_0 \left(1 + \frac{|M|T_0}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
+ \left[ 4C_0^3 s^3 - 2\mathcal{C}s \left(T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \right] \int_0^{T_0} (\alpha|_{x=1})^3 \, |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$4C_0^3 s^3 - 2\mathcal{C}s \left(T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \geq 3C_0^3 s^3$$

se somente se

$$C_0^3 s^3 - 2\mathcal{C}s \left(T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}\right) \geq 0,$$

ou seja,

$$s \geq \sqrt{\frac{2\mathcal{C}}{C_0^3}} \sqrt{T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}}.$$

Como $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, para qualquer $a, b \geq 0$, temos

$$\sqrt{T_0 + T_0^2 + \frac{|M|T_0^2}{\nu}} \leq T_0^{1/2} + T_0 + \frac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}.$$

Considerando $\mathfrak{C}_1 = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{C}}{C_0^3}}$ tomaremos $s$ satisfazendo

$$s \geq \mathfrak{C}_1 \left( T_0^{1/2} + T_0 + \frac{|M|^{1/2} T_0}{\nu^{1/2}} \right).$$

Com essa escolha de s, segue que

$$\begin{aligned}(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq{}& 4C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha |\Psi_{xx}|^2 dxdt + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1} |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\ &- \mathcal{C}s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \mathcal{C}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\ &- 2\mathcal{C} \left[ s \left( T_0^2 + \frac{|M| T_0^3}{\nu} + \frac{M^2 T_0^4}{\nu^2} \right) + s^3 \left( T_0 + T_0^2 + \frac{|M| T_0^2}{\nu} \right) \right] \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi^2| dxdt \\ &- 2\mathcal{C} s T_0 \left( 1 + \frac{|M| T_0}{\nu} \right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt + 3C_0^3 s^3 \int_0^{T_0} (\alpha|_{x=1})^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.\end{aligned}$$

Note também que

$$\mathcal{C}s^5 - 2\mathcal{C} \left[ s \left( T_0^2 + \frac{|M| T_0^3}{\nu} + \frac{M^2 T_0^4}{\nu^2} \right) + s^3 \left( T_0 + T_0^2 + \frac{|M| T_0^2}{\nu} \right) \right] \geq \frac{\mathcal{C}}{2} s^5$$

se somente se $\dfrac{\mathcal{C}}{2} s^5 - 2\mathcal{C} \left[ s \left( T_0^2 + \dfrac{|M| T_0^3}{\nu} + \dfrac{M^2 T_0^4}{\nu^2} \right) + s^3 \left( T_0 + T_0^2 + \dfrac{|M| T_0^2}{\nu} \right) \right] \geq 0.$

A desigualdade acima se verifica se $s^4 - b_1 s^2 - b_2 \geq 0$, ou seja, se

$$s \geq \sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}},$$

onde $b_1 = 4\left( T_0 + T_0^2 + \dfrac{|M| T_0^2}{\nu} \right)$ e $b_2 = 4\left( T_0^2 + \dfrac{|M| T_0^3}{\nu} + \dfrac{M^2 T_0^4}{\nu^2} \right)$. Agora, queremos encontrar uma constante $\mathfrak{C}_2 > 0$, independente de $T_0$, satisfazendo

$$\mathfrak{C}_2 \left( T_0^{1/2} + T_0 + \frac{|M|^{1/2} T_0}{\nu^{1/2}} \right) \geq \sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}}.$$

Inicialmente, note que

$$\mathfrak{C}_2 \left( T_0^{1/2} + T_0 + \frac{|M|^{1/2} T_0}{\nu^{1/2}} \right) \geq \mathfrak{C}_2 \sqrt{T_0 + T_0^2 + \frac{|M| T_0^2}{\nu}} = \mathfrak{C}_2 \sqrt{\frac{b_1}{4}},$$

o que nos leva a obter $\mathfrak{C}_2 > 0$, tal que

$$\mathfrak{C}_2 \sqrt{\frac{b_1}{4}} \geq \sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}},$$

ou então,

$$(\mathfrak{C}_2^2 - 2) b_1 \geq 2\sqrt{b_1^2 + 4b_2}.$$

Note que $\mathfrak{C}_2 > \sqrt{2}$, além disso

$$\mathfrak{C}_2\sqrt{\frac{b_1}{4}} \geq \sqrt{\frac{b_1+\sqrt{b_1^2+4b_2}}{2}}$$

se e somente se

$$\left(T_0+T_0^2+\frac{|M|T_0^2}{\nu}\right)^2 \geq T_0^2+\frac{|M|T_0^3}{\nu}+\frac{M^2T_0^4}{\nu^2},$$

onde $\mathfrak{C}_2=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$. Nesse caso,

$$\mathcal{C}s^5-2\mathcal{C}\left[s\left(T_0^2+\frac{|M|T_0^3}{\nu}+\frac{M^2T_0^4}{\nu^2}\right)+s^3\left(T_0+T_0^2+\frac{|M|T_0^2}{\nu}\right)\right] \geq \frac{\mathcal{C}}{2}s^5.$$

Tomando $\mathfrak{C}=\max\{\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2\}$, constante independente de $T_0$, e

$$s \geq \mathfrak{C}\left(T_0^{1/2}+T_0+\frac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}(L_1\Psi,L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq{}& 4C_0s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt+s\int_0^{T_0}\alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt\\ &-\mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt+\frac{\mathcal{C}}{2}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt\\ &-2\mathcal{C}sT_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt\\ &+3C_0^3s^3\int_0^{T_0}\left(\alpha|_{x=1}\right)^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt.\end{aligned}$$

Além disso, como $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$, temos que

$$\begin{aligned}(L_1\Psi,L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq{}& 4C_0s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt+C_0s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt\\ &-\mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt+\frac{\mathcal{C}}{2}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt\\ &-2\mathcal{C}sT_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt\\ &+3C_0^3s^3\int_0^{T_0}\left(\alpha|_{x=1}\right)^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt.\end{aligned}$$

Tomando $\hat{\mathcal{C}}=\min\{3C_0^3,C_0\}$ a desigualdade acima se reduz a

$$\begin{aligned}(L_1\Psi,L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq{}& 4C_0s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt-\mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt\\ &+\frac{\mathcal{C}}{2}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt-2\mathcal{C}sT_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt\\ &+\hat{\mathcal{C}}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2+s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt.\end{aligned}$$

Daí, obtemos a seguinte

$$
\begin{aligned}
&4C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}}{2} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
&+\hat{\mathcal{C}} s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=1} \left[ |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2 \left(\alpha|_{x=1}\right)^2 |\Psi_x|_{x=1}|^2 \right] dt \\
&\le (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C} s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + 2\mathcal{C} s T_0 \left(1 + \frac{|M|T_0}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Note também que temos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&4C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}}{2} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
&\le (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C} s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + 2\mathcal{C} s T_0 \left(1 + \frac{|M|T_0}{\nu}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Por outro lado, por integração por partes e usando que $\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt &= s^3 \int_0^{T_0} \int_0^1 \alpha^3 \Psi_x \Psi_x dxdt \\
&= s^3 \int_0^{T_0} \left( - \int_0^1 \Psi (3\alpha^2 \alpha_x \Psi_x + \alpha^3 \Psi_{xx}) dx \right) dt \\
&= -3s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^2 \alpha_x \Psi_x \Psi dxdt - s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 \Psi_{xx} \Psi dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
-s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 \Psi_{xx} \Psi dxdt &= - \iint\limits_{Q_0} (s^{1/2}\alpha^{1/2}\Psi_{xx})(s^{5/2}\alpha^{5/2}\Psi) dxdt \\
&\le \iint\limits_{Q_0} \left[ \frac{s\alpha|\Psi_{xx}|^2}{2} + \frac{s^5\alpha^5|\Psi|^2}{2} \right] dxdt \\
&\le \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_0} s\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_0} s^5 \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Analogamente, dado $a > 0$ (a escolher), temos

$$
\begin{aligned}
-3s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^2 \alpha_x \Psi_x \Psi dxdt &= -3 \iint\limits_{Q_0} \left(as^{3/2}\alpha^{3/2}\Psi_x\right)\left(\frac{1}{a}s^{3/2}\alpha^{1/2}\Psi\alpha_x\right) dxdt \\
&\leq 3 \iint\limits_{Q_0} \left[\frac{a^2 s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2}{2} + \frac{s^3 \alpha |\Psi|^2 \alpha_x^2}{2a^2}\right] dxdt \\
&\leq \frac{3a^2}{2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt + \frac{3}{2a^2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha |\Psi|^2 \alpha_x^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

e como $C_0 \alpha \leq \alpha_x \leq C_1 \alpha$, segue que

$$
-3s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^2 \alpha_x \Psi_x \Psi dxdt \leq \frac{3a^2}{2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt + \frac{3C_1^2}{2a^2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi|^2 dxdt. \tag{3.21}
$$

Assim, de (3.20) e (3.21) em (3.19), temos

$$
\begin{aligned}
s^3 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt &\leq \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_0} s\alpha |\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_0} s^5 \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
&+ \frac{3a^2}{2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt + \frac{3C_1^2}{2a^2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{3a^2}{2}\right) \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt &\leq \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_0} s\alpha |\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{3C_1^2}{2a^2} \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi|^2 dxdt \\
&+ \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_0} s^5 \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Tomando $a^2 = \dfrac{1}{3}$, temos

$$
\iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \leq \iint\limits_{Q_0} s\alpha |\Psi_{xx}|^2 dxdt + 9C_1^2 \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi|^2 dxdt + \iint\limits_{Q_0} s^5 \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt. \tag{3.22}
$$

Como

$$
s^2 \geq \mathfrak{C}^2 \left(T_0^{1/2} + T_0 + \frac{|M|^{1/2} T_0}{\nu^{1/2}}\right)^2 \geq \mathfrak{C}^2 T_0^2 \tag{3.23}
$$

e

$$
\alpha^3 = \frac{\alpha^5 (t(T_0 - t))}{(100 + 4x - x^2)^2} \leq \frac{T_0^2}{(103)^2} \alpha^5, \quad \text{para } x \in (0,1) \text{ e } t \in (0, T_0), \tag{3.24}
$$

retornando a (3.22) com (3.23) e (3.24), segue que

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{Q_0} s^3\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \; &\leq \iint\limits_{Q_0} s\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \left(\frac{9C_1^2}{103^2\mathfrak{C}^2}+1\right)\iint\limits_{Q_0} s^5\alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
&= \frac{1}{4C_0}\left[4C_0\iint\limits_{Q_0} s\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt\right] \\
&+\frac{2}{\mathcal{C}}\left(\frac{9C_1^2}{103^2\mathfrak{C}^2}+1\right)\left[\frac{\mathcal{C}}{2}\iint\limits_{Q_0} s^5\alpha^5|\Psi|^2 dxdt\right] \\
&\leq \hat{\mathfrak{C}}\left[4C_0\iint\limits_{Q_0} s\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}}{2}\iint\limits_{Q_0} s^5\alpha^5|\Psi|^2 dxdt\right],
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

onde $\hat{\mathfrak{C}} = \max\left\{\frac{1}{4C_0}, \frac{2}{\mathcal{C}}\left(\frac{9C_1^2}{103^2\mathfrak{C}^2}+1\right)\right\}$. Combinando (3.18) e (3.25), temos

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_0} s^3\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \leq \\
&\hat{\mathfrak{C}}\left[(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + 2\mathcal{C}sT_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt\right].
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Finalmente, retornando a (3.17) e usando (3.26), obtemos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&4C_0 s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}}{2}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
&+\hat{\mathcal{C}}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt + \iint\limits_{Q_0} s^3\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
&\leq (\hat{\mathfrak{C}}+1)\left[(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt\right] \\
&+(\hat{\mathfrak{C}}+1)\left[2\mathcal{C}sT_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt\right],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&4C_0 s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}}{2}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
&+\hat{\mathcal{C}}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt \\
&+\left[s^3 - 2(\hat{\mathfrak{C}}+1)\mathcal{C}T_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)s\right]\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
&\leq (\hat{\mathfrak{C}}+1)\left[(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt\right].
\end{aligned}
$$

Note também que

$$s^3 - 2(\hat{\mathfrak{C}}+1)\mathcal{C}T_0\left(1+\frac{|M|T_0}{\nu}\right)s \geq \frac{s^3}{2} \text{ se, e somente , se } s \geq 2\sqrt{(\hat{\mathfrak{C}}+1)\mathcal{C}}\sqrt{T_0+\frac{|M|T_0^2}{\nu}}.$$

Procedendo como nas estimativas anteriores, obtemos uma constante positiva independente de $T_0$, $\tilde{\mathfrak{C}} = \max\{\mathfrak{C}, 2\sqrt{\mathcal{C}(\hat{\mathfrak{C}}+1)}\}$ tal que, se

$$s \geq \tilde{\mathfrak{C}}\left(T_0^{1/2}+T_0+\frac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right)$$

temos

$$\begin{aligned}
&4C_0 s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt + \frac{\mathcal{C}}{2}s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt \\
&+\hat{\mathcal{C}}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2+s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt + \frac{s^3}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt \\
&\leq (\hat{\mathfrak{C}}+1)\left[(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt\right].
\end{aligned}$$

Considerando $\mathsf{C}_1 = \dfrac{4C_0}{\hat{\mathfrak{C}}+1}$, $\mathsf{C}_2 = \dfrac{\mathcal{C}}{2(\hat{\mathfrak{C}}+1)}$,$\mathsf{C}_3 = \dfrac{1}{2(\hat{\mathfrak{C}}+1)}$ e $\mathsf{C}_4 = \dfrac{\hat{\mathcal{C}}}{\hat{\mathfrak{C}}+1}$ a desigualdade acima nos garante que

$$\begin{aligned}
&(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq \mathsf{C}_1 s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt + \mathsf{C}_2 s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt + \mathsf{C}_3 s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt \\
&+\mathsf{C}_4 s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2+s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt - \mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt.
\end{aligned}$$

Voltando à identidade

$$\|L_1\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + \|L_2\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + 2\left(L_1\Psi, L_2\Psi\right)_{L^2(Q_0)} = \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} \geq \mathsf{C}_5 s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt + \mathsf{C}_5 s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt + \mathsf{C}_5 s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt \\
&+\mathsf{C}_5 s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2+s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt - 2\mathcal{C}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt,
\end{aligned}$$

onde $\mathsf{C}_5 = \min\{2\mathsf{C}_i;\ 1\leq i\leq 4\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
&s\iint\limits_{Q_0}\alpha\left(|\Psi_{xx}|^2+s^2\alpha^2|\Psi_x|^2+s^4\alpha^4|\Psi|^2\right)dxdt \\
&+ s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2+s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt \\
&\leq \mathsf{C}_6\left(s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt + \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)}\right),
\end{aligned}$$

onde $\mathsf{C}_6 = \max\left\{\dfrac{1}{\mathsf{C}_5}, \dfrac{2\mathcal{C}}{\mathsf{C}_5}\right\}$. Como

$$\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} = 9s^4 \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2\alpha_{xx}^2|\Psi|^2 dxdt$$

e

$$C \leq T_0\alpha, \;\; C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha \quad \text{e} \quad C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha, \quad \text{para } x \in (0,1), t \in (0,T_0),$$

temos que

$$\begin{aligned} C\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} &= 9s^4 \iint\limits_{Q_0} (C\alpha_x^2\alpha_{xx}^2|\Psi|^2) dxdt \\ &\leq 9s^4C_1^4T_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &s\iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2\right) dxdt + s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt \\ &+\left(s^5 - \frac{9\mathsf{C}_6C_1^4}{C}T_0s^4\right)\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \leq \mathsf{C}_6 s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt, \end{aligned}$$

para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}}\left(T_0^{1/2} + T_0 + \dfrac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right)$. Note que como $s > 0$, temos que

$$s^5 - \frac{9\mathsf{C}_6C_1^4}{C}T_0s^4 \geq \frac{s^5}{2} \;\text{ se somente se }\; s^4\left(s - \frac{18\mathsf{C}_6C_1^4}{C}T_0\right) \geq 0,$$

ou seja, $s \geq \dfrac{18\mathsf{C}_6C_1^4}{C}T_0$. Assim, existe uma constante positiva $\bar{\mathfrak{C}} = \max\left\{\tilde{\mathfrak{C}}, \dfrac{18\mathsf{C}_6C_1^4}{C}\right\}$, tal que se $s \geq \bar{\mathfrak{C}}\left(T_0^{1/2} + T_0 + \dfrac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right)$, obtém-se

$$\begin{aligned} &s\iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2\right) dxdt + s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt \\ &+\frac{s^5}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \leq \mathsf{C}_6 s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt, \end{aligned}$$

ou então

$$\begin{aligned} &s\iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right) dxdt \\ &+ s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt \\ &\leq 2\mathsf{C}_6 s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha \left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right) dxdt \leq 2\mathsf{C}_6 \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \tag{3.27}$$

para $s \geq \bar{\mathfrak{C}}\left(T_0^{1/2} + T_0 + \dfrac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right)$.

Agora, voltando à variável original temos $\varphi = e^{s\alpha}\Psi$ e

$$\varphi_x = e^{s\alpha}(s\alpha_x)\Psi + e^{s\alpha}\Psi_x = e^{s\alpha}(s\alpha_x\Psi + \Psi_x),$$

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= e^{s\alpha}(s^2\alpha_x^2\Psi) + e^{s\alpha}(s\alpha_{xx}\Psi + s\alpha_x\Psi_x) + e^{s\alpha}(s\alpha_x)\Psi_x + e^{s\alpha}\Psi_{xx}\\ &= e^{s\alpha}\left[(s^2\alpha_x^2 + s\alpha_{xx})\Psi + 2s\alpha_x\Psi_x + \Psi_{xx}\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\iint\limits_{Q_0} e^{-2s\alpha}s^4\alpha^5|\varphi|^2 dxdt = \iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^5|\Psi|^2 dxdt \tag{3.28}$$

e

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_0} e^{-2s\alpha}s^2\alpha^3|\varphi_x|^2 dxdt &= \iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|s\alpha_x\Psi + \Psi_x|^2 dxdt\\ &\leq 2\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3\left[s^2\alpha_x^2|\Psi|^2 + |\Psi_x|^2\right] dxdt\\ &= 2\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^3\alpha_x^2|\Psi|^2 dxdt + 2\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Como $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$, temos

$$\iint\limits_{Q_0} e^{-2s\alpha}s^2\alpha^3|\varphi_x|^2 dxdt \leq 2C_1^2\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^5|\Psi|^2 dxdt + 2\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \tag{3.29}$$

e

$$\iint\limits_{Q_0} e^{-2s\alpha}\alpha|\varphi_{xx}|^2 dxdt = \iint\limits_{Q_0} \alpha|(s^2\alpha_x^2 + s\alpha_{xx})\Psi + (2s\alpha_x\Psi_x + \Psi_{xx})|^2 dxdt.$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{Q_0} e^{-2s\alpha}\alpha|\varphi_{xx}|^2 dxdt &\leq 2\iint\limits_{Q_0} \alpha\left[(s^2\alpha_x^2 + s\alpha_{xx})^2|\Psi|^2 + |2s\alpha_x\Psi_x + \Psi_{xx}|^2\right] dxdt \\
&= 2\iint\limits_{Q_0} \alpha(s^2\alpha_x^2 + s\alpha_{xx})^2|\Psi|^2 dxdt + 2\iint\limits_{Q_0} \alpha|2s\alpha_x\Psi_x + \Psi_{xx}|^2 dxdt \\
&\leq 4\iint\limits_{Q_0} \alpha\left[s^4\alpha_x^4 + s^2\alpha_{xx}^2\right]|\Psi|^2 dxdt \\
&+ 4\iint\limits_{Q_0} \alpha\left[4s^2\alpha_x^2|\Psi_x|^2 + |\Psi_{xx}|^2\right] dxdt \\
&\leq 4\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha\alpha_x^4|\Psi|^2 dxdt + 4\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha\alpha_{xx}^2|\Psi|^2 dxdt \\
&+ 16\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha\alpha_x^2|\Psi_x|^2 dxdt + 4\iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

e como $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$ e $C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha$, segue que

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{Q_0} e^{-2s\alpha}\alpha|\varphi_{xx}|^2 dxdt \quad &\leq 4C_1^4\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^5|\Psi|^2 dxdt + 4C_1^2\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi|^2 dxdt \\
&+16C_1^2\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt + 4\iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

Combinando (3.28), (3.29) e (3.30), temos

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2) dxdt \leq 4\iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt \\
&+(2+16C_1^2)\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt + (1+2C_1^2+4C_1^4)\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
&+4C_1^2\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Observe que a escolha de $s \geq \bar{\mathfrak{C}}\left(T_0^{1/2} + T_0 + \dfrac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right)$ nos garante que $s \geq \bar{\mathfrak{C}}T_0$, e como

$$
\alpha^3 = \frac{\alpha^5(t(T_0 - t))}{(100 + 4x - x^2)^2} \leq \frac{T_0^2}{(103)^2}\alpha^5, \quad \text{para } x \in (0,1) \text{ e } t \in (0, T_0),
$$

temos

$$
s^2\alpha^3 \leq \frac{s^2T_0^2}{(103)^2}\alpha^5 \leq \frac{1}{\bar{\mathfrak{C}}^2(103)^2}s^4\alpha^5. \tag{3.32}
$$

Portanto, de (3.32) em (3.31), obtém-se

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \leq 4 \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt$$
$$+(2+16C_1^2)\iint\limits_{Q_0} s^2\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + (1+2C_1^2+4C_1^4)\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^5|\Psi|^2dxdt$$
$$+\frac{4C_1^2}{\bar{\mathfrak{C}}^2 103^2}\iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^5|\Psi|^2dxdt,$$

ou então

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt$$
$$\leq \mathsf{C}_7 \iint\limits_{Q_0} \alpha\left[|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right]dxdt,$$

onde

$$\mathsf{C}_7 = \max\left\{4, 2+16C_1^2, 1+2C_1^2+4C_1^4+\frac{4C_1^2}{\bar{\mathfrak{C}}^2 103^2}\right\},$$

e por (3.27), concluímos que

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \leq 2\mathsf{C}_7\mathsf{C}_6\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt\ . \quad (3.33)$$

Por outro lado, como

$$\varphi_{xx}|_{x=0} = e^{s\alpha|_{x=0}}\left[(s^2\alpha_x^2|_{x=0} + s\alpha_{xx}|_{x=0})\Psi|_{x=0} + (2s\alpha_x|_{x=0}\Psi_x|_{x=0} + \Psi_{xx}|_{x=0})\right]$$

e $\Psi|_{x=0} = \Psi_x|_{x=0} = 0$, temos

$$\varphi_{xx}|_{x=0} = e^{s\alpha|_{x=0}}\Psi_{xx}|_{x=0}. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.33), temos

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \leq 2\mathsf{C}_7\mathsf{C}_6\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}e^{-2s\alpha|_{x=0}}|\varphi_{xx}|_{x=0}|^2dt.$$

Finalmente, considerando $K = \max\{\bar{\mathfrak{C}}, 2\mathsf{C}_7\mathsf{C}_6\}$, obtemos

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \leq K\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}e^{-2s\alpha|_{x=0}}|\varphi_{xx}|_{x=0}|^2dt,$$

para $s \geq K\left(T_0^{1/2} + T_0 + \frac{|M|^{1/2}T_0}{\nu^{1/2}}\right)$, o que mostra a proposição.

$\square$

## 3.2 Estimativa de Carleman modificada

Observamos que a Proposição anterior se mantém válida quando $M = M(t,x)$ tem a regularidade $L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))$ e $\phi$ é solução do modelo

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varphi_{xxx} - \frac{M(t,x)}{\nu}\varphi_x = 0 & \text{em} \quad (0,T_0)\times(0,1) \\ \varphi\mid_{x=0} = \varphi\mid_{x=1} = \varphi_x\mid_{x=0} = 0 & \text{em} \quad (0,T_0) \\ \varphi\mid_{t=T_0} = \varphi_0 & \text{em} \quad (0,1). \end{cases} \tag{3.35}$$

Lembramos que nesse caso, $T_0 := \nu T$.

**Proposição 3.2.1.** *Existem duas constantes positivas $D$ e $K(T_0,\nu,\|M\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))})$, tal que, para qualquer $\varphi_0 \in L^2(0,1)$, temos*

$$\iint_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \le D\int_0^{T_0} \alpha\mid_{x=0} e^{-2s\alpha|_{x=0}}\,|\varphi_{xx}\mid_{x=0}|^2\,dt, \tag{3.36}$$

*para qualquer $s \ge K$, onde $\varphi$ é solução de* (3.35).

*Demonstração.* Procederemos como no caso anterior mudando $L_1\Psi, L_2\Psi$ e $L_3\Psi$ da seguinte maneira:

$$L_1\Psi = -\Psi_{xxx} - \Psi_t - 3s^2\alpha_x^2\Psi_x, \quad L_2\Psi = -s^3\alpha_x^3\Psi - 3s\alpha_x\Psi xx - s\alpha_t\Psi - 3s\alpha_{xx}\Psi_x,$$

$$L_3\Psi = s\alpha_{xxx}\Psi + 3s^2\alpha_x\alpha_{xx} + \frac{M}{\nu}\Psi + s\frac{M}{\nu}\alpha_x\Psi.$$

Também sabemos que

$$\|L_1\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + \|L_2\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + 2(L_1\Psi, L_2\Psi) = \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)}.$$

De forma similar, calculamos o termo que envolve o produto interno. Por simplicidade, vamos denotar por $(L_i\Psi)_j$ $(1 \le i \le 2, 1 \le j \le 5)$ o $j$-ésimo termo na expressão de $L_i\Psi$. De (3.11) da seção anterior, temos

$$\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \ge\; & \frac{9s^3}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2\alpha_{xx}|\Psi_x|^2dxdt - \frac{s^3}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt \\
& - \mathcal{C}_1T_0^2s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt \\
& - \frac{3s}{2}\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt + \frac{3s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2dt \\
& - \mathcal{C}_2s\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=0})|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt \\
& - \mathcal{C}_3sT_0\left(\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt + \int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt\right) \\
& - 3s\iint\limits_{Q_0}\alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2dxdt - \frac{s}{2}\int_0^{T_0}(\alpha_x|_{x=1})|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 \\
& - \mathcal{C}_4sT_0^2\int_0^{T_0}(\alpha|_{x=1})^3|\Psi_x|_{x=1}|^2dt.
\end{aligned}$$

Tomando $\mathcal{C}_{20} = \max\{\mathcal{C}_i;\ 1 \leq i \leq 4\}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_1, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq\ & \frac{9s^3}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2 \alpha_{xx} |\Psi_x|^2 dxdt - \frac{9}{2} s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx} |\Psi_{xx}|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C}_{20} s^3 T_0^2 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt - \mathcal{C}_{20} s T_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\
& - \frac{s^3}{2} \int_0^{T_0} \left(\alpha_x|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1} |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_{20} s (T_0 + {T_0}^2) \int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_{20} s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt
\end{aligned}
$$

Analogamente, de (3.13) e (3.15) temos

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_2, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & -\mathcal{C}_{12} s T_0 (s^2 + T_0) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C}_{12} s T_0 \int_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
((L_1\Psi)_3, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq\ & \mathcal{C}_{13} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
& - \frac{9s^3}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha_x^2 \alpha_{xx} |\Psi_x|^2 dxdt + \frac{9s^3}{2} \int_0^{T_0} \alpha_x^3|_{x=1} |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}_{13} s^3 T_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi^2| dxdt,
\end{aligned}
$$

respectivamente. Tomando $\mathcal{C}' = \max\{\mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}_{13}\}$ as desigualdades acima nos garantem que

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & -\frac{9}{2} s \iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx} |\Psi_{xx}|^2 dxdt + 4s^3 \int_0^{T_0} \left(\alpha_x|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& + s \int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1} |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt - \mathcal{C}' s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\
& + \mathcal{C}' s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt - \mathcal{C}' s^3 \left(T_0^2 + 2T_0\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi^2| dxdt \\
& - \mathcal{C}' s T_0^2 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt - 2\mathcal{C}' s {T_0}^2 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\
& - \mathcal{C}' s \left(T_0 + T_0^2\right) \int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt,
\end{aligned}
$$

ou então

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & -\frac{9}{2}s\iint\limits_{Q_0} \alpha_{xx}|\Psi_{xx}|^2 dxdt + 4s^3\int_0^{T_0} \left(\alpha_x|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt \\
& + s\int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt - \mathcal{C}'s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\
& + \mathcal{C}'s^5\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt - 2\mathcal{C}'s^3\left(T_0^2+T_0\right)\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2|dxdt \\
& - 2\mathcal{C}'sT_0^2\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt - 2\mathcal{C}'sT_0\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}'s\left(T_0+T_0^2\right)\int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Como $C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha$ e $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$, a desigualdade acima pode ser reescrita como segue

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq & \frac{9}{2}C_0 s\iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + s\int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}'s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \mathcal{C}'s^5\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}'\left[sT_0^2 + s^3\left(T_0+T_0^2\right)\right]\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2|dxdt - 2\mathcal{C}'sT_0\iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
& + \left[4C_0^3s^3 - 2\mathcal{C}'s\left(T_0+T_0^2\right)\right]\int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt
\end{aligned}
$$

Agora, note que

$$
4C_0^3s^3 - 2\mathcal{C}'s\left(T_0+T_0^2\right) \geq 3C_0^3s^3 \text{ se somente se } s\left(C_0^3s^2 - 2\mathcal{C}'\left(T_0+T_0^2\right)\right) \geq 0,
$$

ou seja,

$$
s \geq \sqrt{\frac{2\mathcal{C}'}{C_0^3}}\sqrt{T_0+T_0^2}.
$$

Como $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, para qualquer $a, b \geq 0$, temos que

$$
\sqrt{T_0+T_0^2} \leq T_0^{1/2} + T_0.
$$

Então, considerando $\tilde{\mathfrak{C}}_1 = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{C}'}{C_0^3}}$, tomamos

$$
s \geq \tilde{\mathfrak{C}}_1\left(T_0^{1/2} + T_0\right).
$$

Com essas considerações, obtemos

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq \; & \frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + s\int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}' s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \mathcal{C}' s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}' \left[sT_0^2 + s^3\left(T_0 + T_0^2\right)\right] \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi^2| dxdt - 2\mathcal{C}' sT_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\
& + 3{C_0}^3 s^3 \int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt,
\end{aligned}
$$

para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}}_1 \left(T_0^{1/2} + T_0\right)$. Note também que

$$\mathcal{C}' s^5 - 2\mathcal{C}' \left[sT_0^2 + s^3\left(T_0 + T_0^2\right)\right] \geq \frac{\mathcal{C}'}{2} s^5$$

$$\text{se somente se} \quad \frac{\mathcal{C}'}{2} s^5 - 2\mathcal{C}' \left[sT_0^2 + s^3\left(T_0 + T_0^2\right)\right] \geq 0,$$

ou seja,

$$s \geq \sqrt{\frac{\tilde{b}_1 + \sqrt{\tilde{b}_1^2 + 4\tilde{b}_2}}{2}},$$

onde $\tilde{b}_1 = 4(T_0 + T_0^2)$ e $\tilde{b}_2 = 4T_0^2$. Logo, existe uma constante positiva independente de $T_0$, $\tilde{\mathfrak{C}}_2 = \sqrt{2\sqrt{2} + 2}$, tal que para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}}_2 \left(T_0^{1/2} + T_0\right)$ temos que $s \geq \sqrt{\dfrac{\tilde{b}_1 + \sqrt{\tilde{b}_1^2 + 4\tilde{b}_2}}{2}}$ e

$$\mathcal{C}' s^5 - 2\mathcal{C}' \left[sT_0^2 + s^3\left(T_0 + T_0^2\right)\right] \geq \frac{\mathcal{C}'}{2} s^5.$$

Tomando $\tilde{\mathfrak{C}}^* = \max\{\tilde{\mathfrak{C}}_1, \tilde{\mathfrak{C}}_2\}$, constante independente de $T_0$, e

$$s \geq \tilde{\mathfrak{C}}^* \left(T_0^{1/2} + T_0\right)$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq \; & \frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + s\int_0^{T_0} \alpha_x|_{x=1}|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 dt \\
& - \mathcal{C}' s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \frac{\mathcal{C}'}{2} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& - 2\mathcal{C}' sT_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt + 3C_0^3 s^3 \int_0^{T_0} \left(\alpha|_{x=1}\right)^3 |\Psi_x|_{x=1}|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Como $C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha$, tomando $\mathcal{C}^* = \min\{3C_0^3, C_0\}$ e procedendo como nas estimativas anteriores, o produto interno acima pode ser estimado como segue

$$\begin{aligned}(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} \geq{}& \frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt - \mathcal{C}'s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \\ &+ \frac{\mathcal{C}'}{2}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt - 2\mathcal{C}'sT_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\ &+ \mathcal{C}^* s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2(\alpha|_{x=1})^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}'}{2}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\ &+\mathcal{C}^* s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt \\ &\leq (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}'s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + 2\mathcal{C}'sT_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt,\end{aligned} \tag{3.37}$$

para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}}^* \left(T_0^{1/2} + T_0\right)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}&\frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}'}{2}s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\ &\leq (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}'s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + 2\mathcal{C}'sT_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Por outro lado, procedendo como na demonstração da Proposição 3.1.1 e tomando $\hat{\mathfrak{C}}^* = \max\left\{\frac{1}{4C_0}, \frac{2}{\mathcal{C}'}\left(\frac{9C_1^2}{(103)^2\tilde{\mathfrak{C}}^{*2}} + 1\right)\right\}$, temos a seguinte desigualdade

$$\iint\limits_{Q_0} s^3\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \quad \leq \hat{\mathfrak{C}}^* \left[4C_0 \iint\limits_{Q_0} s\alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}'}{2} \iint\limits_{Q_0} s^5\alpha^5|\Psi|^2 dxdt\right] \tag{3.39}$$

para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}}^* \left(T_0^{1/2} + T_0\right)$. Aplicando (3.38) a (3.39) segue que

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{Q_0} s^3\alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \\ &\leq \hat{\mathfrak{C}}^* \left[(L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}'s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + 2\mathcal{C}'sT_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt\right].\end{aligned} \tag{3.40}$$

Combinando (3.40) com (3.37), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}' 2^5}{s} \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
&+\mathcal{C}^* s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=1} \left[ |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2 \left(\alpha|_{x=1}\right)^2 |\Psi_x|_{x=1}|^2 \right] dt \\
&+ \iint\limits_{Q_0} s^3 \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt - 2(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)\mathcal{C}' s T_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\
&\leq (\hat{\mathfrak{C}}^* + 1) \left[ (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}' s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \right].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}'}{2} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
&+\mathcal{C}^* s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=1} \left[ |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2 \left(\alpha|_{x=1}\right)^2 |\Psi_x|_{x=1}|^2 \right] dt \\
&+ \left[ s^3 - 2(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)\mathcal{C}' T_0 s \right] \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\
&\leq (\hat{\mathfrak{C}}^* + 1) \left[ (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}' s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \right].
\end{aligned}
$$

Note também que

$$
s^3 - 2(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)\mathcal{C}' T_0 s \geq \frac{s^3}{2} \text{ se, e somente, se } \frac{s^3}{2} - 2(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)\mathcal{C}' T_0 s \geq 0,
$$

ou seja,

$$
s \geq 2\sqrt{(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)\mathcal{C}'}\sqrt{T_0}.
$$

Tomando $\tilde{\mathfrak{C}}^{**} = \max\{\tilde{\mathfrak{C}}^*, 2\sqrt{\mathcal{C}'(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)}\}$ e

$$
s \geq \tilde{\mathfrak{C}}^{**} \left( T_0^{1/2} + T_0 \right),
$$

temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{9}{2}C_0 s \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt + \frac{\mathcal{C}'}{2} s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5 |\Psi|^2 dxdt \\
&+\mathcal{C}^* s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=1} \left[ |\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2 \left(\alpha|_{x=1}\right)^2 |\Psi_x|_{x=1}|^2 \right] dt + \frac{s^3}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha^3 |\Psi_x|^2 dxdt \\
&\leq (\hat{\mathfrak{C}}^* + 1) \left[ (L_1\Psi, L_2\Psi)_{L^2(Q_0)} + \mathcal{C}' s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt \right].
\end{aligned}
$$

Considerando $\tilde{\mathsf{C}}_1 = \dfrac{4C_0}{\hat{\mathfrak{C}}^* + 1}$, $\tilde{\mathsf{C}}_2 = \dfrac{\mathcal{C}'}{2(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)}$,$\tilde{\mathsf{C}}_3 = \dfrac{1}{2(\hat{\mathfrak{C}}^* + 1)}$ e $\tilde{\mathsf{C}}_4 = \dfrac{\mathcal{C}^*}{\hat{\mathfrak{C}}^* + 1}$ e lembrando que

$$
\|L_1\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + \|L_2\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + 2\left(L_1\Psi, L_2\Psi\right)_{L^2(Q_0)} = \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} \geq 2\left(L_1\Psi, L_2\Psi\right)_{L^2(Q_0)}\\
&\geq 2\tilde{\mathsf{C}}_1 s\iint\limits_{Q_0}\alpha|\Psi_{xx}|^2dxdt + 2\tilde{\mathsf{C}}_2 s^5\iint\limits_{Q_0}\alpha^5|\Psi|^2dxdt + 2\tilde{\mathsf{C}}_3 s^3\iint\limits_{Q_0}\alpha^3|\Psi_x|^2dxdt\\
&+2\tilde{\mathsf{C}}_4 s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt - 2\mathcal{C}'s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt,
\end{aligned}
$$

ou então,

$$
\begin{aligned}
&\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} \geq \tilde{\mathsf{C}}_5 s\iint\limits_{Q_0}\alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right)dxdt\\
&+\tilde{\mathsf{C}}_5 s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt - 2\mathcal{C}'s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt,
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{\mathsf{C}}_5 = \min\{2\tilde{\mathsf{C}}_i;\ 1 \leq i \leq 4\}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tilde{\mathsf{C}}_5}\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} + \frac{2\mathcal{C}'}{\tilde{\mathsf{C}}_5}s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt\\
&\geq s\iint\limits_{Q_0}\alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right)dxdt\\
&+ s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt.
\end{aligned}
$$

Tomando $\tilde{\mathsf{C}}_6 = \max\left\{\dfrac{1}{\tilde{\mathsf{C}}_5}, \dfrac{2\mathcal{C}'}{\tilde{\mathsf{C}}_5}\right\}$, temos a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
&s\iint\limits_{Q_0}\alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right)dxdt\\
&+s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2|\Psi_x|_{x=1}|^2\right]dt\\
&\leq \tilde{\mathsf{C}}_6\left(s\int_0^{T_0}\alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2dt + \|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)}\right),
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}^{**}}\left(T_0^{1/2} + T_0\right)$. Como $\alpha_{xxx} = 0$,

$$
L_3\Psi = s\alpha_{xxx}\Psi + 3s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi + \frac{M}{\nu}\Psi_x + s\frac{M}{\nu}\alpha_x\Psi
$$

e

$$
\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} = \iint\limits_{Q_0}|3s^2\alpha_x\alpha_{xx}\Psi + \frac{M}{\nu}\Psi_x + s\frac{M}{\nu}\alpha_x\Psi|^2dxdt.
$$

Por outro lado,

$$
C \leq T_0\alpha,\ \ C_0\alpha \leq \alpha_x \leq C_1\alpha \quad \text{e} \quad C_0\alpha \leq -\alpha_{xx} \leq C_1\alpha, \quad \text{para } x \in (0,1), t \in (0,T_0),
$$

donde

$$\begin{aligned}
\|L_3\Psi\|^2_{L^2(Q_0)} &\leq 15{C_1}^4 \iint\limits_{Q_0} s^4\alpha^4|\Psi|^2 dxdt + 5\iint\limits_{Q_0} \frac{|M|^2}{\nu^2}|\Psi_x|^2 dxdt \\
&+ 5{C_1}^2 \iint\limits_{Q_0} s^2\frac{|M|^2}{\nu^2}\alpha^2|\Psi|^2 dxdt \\
&\leq \frac{15{C_1}^4}{C} s^4 T_0 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt + 5\iint\limits_{Q_0} \frac{|M|^2}{\nu^2}|\Psi_x|^2 dxdt \\
&+ 5{C_1}^2 \iint\limits_{Q_0} s^2\frac{|M|^2}{\nu^2}\alpha^2|\Psi|^2 dxdt. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.42) em (3.41) segue que

$$\begin{aligned}
& s\iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2\right) dxdt + s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2 |\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt \\
& + \left(s^5 - \frac{15\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^4}{C} T_0 s^4\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& \leq \tilde{\mathsf{C}}_7 \left( s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \iint\limits_{Q_0} \frac{|M|^2}{\nu^2}|\Psi_x|^2 dxdt + \iint\limits_{Q_0} s^2\frac{|M|^2}{\nu^2}\alpha^2|\Psi|^2 dxdt \right)
\end{aligned}$$

para $s \geq \tilde{\mathfrak{C}^{**}}\left(T_0^{1/2} + T_0\right)$, onde $\tilde{\mathsf{C}}_7 = \max\left\{\tilde{\mathsf{C}}_6, 5\tilde{\mathsf{C}}_6, 5\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^2\right\}$. Note também que, como $s > 0$, temos

$$s^5 - \frac{15\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^4}{C} T_0 s^4 \geq \frac{s^5}{2} \text{ se, e somente, se } \frac{s^5}{2} - \frac{15\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^4}{C} T_0 s^4 \geq 0,$$

ou seja,

$$s \geq \frac{30\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^4}{C} T_0.$$

Tomando $\bar{\bar{\mathfrak{C}}} = \max\left\{\tilde{\mathfrak{C}^{**}}, \frac{30\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^4}{C}\right\}$ e $s \geq \bar{\bar{\mathfrak{C}}}\left(T_0^{1/2} + T_0\right)$, obtemos

$$s \geq \frac{30\tilde{\mathsf{C}}_6 C_1^4}{C} T_0$$

e

$$\begin{aligned}
& s\iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2\right) dxdt \\
& + s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=1}\left[|\Psi_{xx}|_{x=1}|^2 + s^2\left(\alpha|_{x=1}\right)^2 |\Psi_x|_{x=1}|^2\right] dt + \frac{s^5}{2}\iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt \\
& \leq \tilde{\mathsf{C}}_7 \left( s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \iint\limits_{Q_0} \frac{|M|^2}{\nu^2}|\Psi_x|^2 dxdt + \iint\limits_{Q_0} s^2\frac{|M|^2}{\nu^2}\alpha^2|\Psi|^2 dxdt \right),
\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
& s \iint\limits_{Q_0} \alpha \left( |\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2 |\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2 \right) dxdt \\
& \leq 2\tilde{\mathsf{C}}_7 \left( s\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0} |\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \iint\limits_{Q_0} \frac{|M|^2}{\nu^2} \left( |\Psi_x|^2 + s^2\alpha^2|\Psi|^2 \right) dxdt \right)
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

para $s \geq \bar{\bar{\mathfrak{C}}} \left( T_0^{1/2} + T_0 \right)$.

Portanto, para concluir o resultado devemos estimar os dois últimos termos do lado direito de (3.43) quando $M \in L^\infty(0, T_0; L^2(0,1))$. Estimemos o primeiro termo:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{Q_0} |M|^2|\Psi_x|^2 dxdt &= \int_0^{T_0} \int_0^1 |M|^2 |\Psi_x|^2 dxdt \leq \int_0^{T_0} \|\Psi_x\|^2_{L^\infty(0,1)} \left( \int_0^1 |M|^2 dx \right) dt \\
&= \int_0^{T_0} \|\Psi_x\|^2_{L^\infty(0,1)} \|M\|^2_{L^2(0,1)} dt \\
&\leq \sup_{0<t<T_0} \|M\|^2_{L^2(0,1)} \int_0^{T_0} \|\Psi_x(t)\|^2_{L^\infty(0,1)} dt.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\iint\limits_{Q_0} |M|^2|\Psi_x|^2 dxdt \leq \|M\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} \int_0^{T_0} \|\Psi_x(t)\|^2_{L^\infty(0,1)} dt. \tag{3.44}
$$

Como $\Psi \in H^2(0,1)$, então $\Psi_x \in H^1(0,1)$ e $H^1(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$. Além disso, como $\Psi_x(0) = 0$, pela desigualdade de Poincaré existe $C_p > 0$, tal que

$$
\int_0^1 |\Psi_x|^2 dx \leq C_p \int_0^1 |\Psi_{xx}|^2 dx.
$$

As considerações acima nos garantem que existe uma constante $k_1 > 0$ satisfazendo

$$
\|\Psi_x(t)\|_{L^\infty(0,1)} \leq k_1 \|\Psi_{xx}(t)\|_{L^2(0,1)}.
$$

Assim, como $\alpha \geq \frac{2}{T_0}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \|\Psi_x(t)\|^2_{L^\infty(0,1)} dt = \int_0^{T_0} \frac{\alpha}{\alpha} \|\Psi_x(t)\|^2_{L^\infty(0,1)} dt &\leq \int_0^{T_0} \frac{T_0}{2} \alpha \|\Psi_x(t)\|^2_{L^\infty(0,1)} dt \\
&\leq \frac{T_0}{2} k_1^2 \int_0^{T_0} \alpha \|\Psi_{xx}(t)\|^2_{L^2(0,1)} dt \\
&\leq k_2 \iint\limits_{Q_0} \alpha |\Psi_{xx}|^2 dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

com $k_2 = \dfrac{T_0}{2} k_1^2$. Substituindo (3.45) em (3.44) obtemos

$$
\iint\limits_{Q_0} |M|^2|\Psi_x|^2 dxdt \leq k_2 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} \iint\limits_{Q_0} \alpha |\Psi_{xx}|^2 dxdt. \tag{3.46}
$$

Analogamente, estimamos a última integral do lado dereito de (3.43):

$$\begin{aligned}
s^2 \iint\limits_{Q_0} |M|^2\alpha^2|\Psi|^2 dxdt = s^2 \int_0^{T_0}\int_0^1 |M|^2\alpha^2|\Psi|^2 dxdt &\le \int_0^{T_0} \|\Psi\alpha\|^2_{L^\infty(0,1)}\|M\|^2_{L^2(0,1)}dt \\
&\le \|M\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}\int_0^{T_0} \|\Psi\alpha\|^2_{L^\infty(0,1)}dt \\
&\le C_{1p}\|M\|_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}\int_0^{T_0} \|(\Psi\alpha)_x\|^2_{L^2(0,1)}dt, \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

onde no último passo se usou uma desigualdade do tipo Poincaré com constante $C_{1p} > 0$. Agora, analizemos o seguinte termo:

$$\begin{aligned}
\|(\Psi\alpha)_x\|^2_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 |\Psi_x\alpha + \Psi\alpha_x|^2 dx \le 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + 2\int_0^1 (\Psi\alpha_x)^2 dx \\
&\le 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + 2C_{2p}\int_0^1 [(\Psi\alpha_x)_x]^2 dx \\
&= 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + 2C_{2p}\int_0^1 [\Psi_x\alpha_x + \Psi\alpha_{xx}]^2 dx \\
&\le 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha_x^2 dx + 4C_{2p}\int_0^1 [\Psi_x^2\alpha_x^2 + \Psi^2\alpha_{xx}^2] dx \\
&= 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + 4C_{2p}\int_0^1 |\Psi_x|\alpha_x^2 dx + 4C_{2p}\int_0^1 (\Psi\alpha_{xx})^2 dx \\
&\le 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + 4C_{2p}\int_0^1 |\Psi_x|\alpha_x^2 dx + 4C_{2p}C_{3p}\int_0^1 [(\Psi\alpha_{xx})_x]^2 dx \\
&= 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + 4C_{2p}\int_0^1 |\Psi_x|\alpha_x^2 dx + 4C_{2p}C_{3p}\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha_{xx}^2 dx,
\end{aligned}$$

onde usamos desigualdades do tipo Poincaré com constantes $C_{2p}$, $C_{3p} > 0$ e o fato de que $\alpha_{xxx} = 0$. Logo, como

$$C_0\alpha \le \alpha_x \le C_1\alpha \quad \text{e} \quad C_0\alpha \le -\alpha_{xx} \le C_1\alpha, \quad \text{para } x \in (0,1), t \in (0,T_0),$$

tem-se

$$\|(\Psi\alpha)_x\|^2_{L^2(0,1)} \le 2\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx + k_3\int_0^1 |\Psi_x|\alpha^2 dx + k_4\int_0^1 |\Psi_x|^2\alpha^2 dx,$$

onde $k_3 = 4C_{2p}C_1^2$ e $k_4 = 4C_{2p}C_{3p}C_1^2$. Portanto,

$$\|(\Psi\alpha)_x\|^2_{L^2(0,1)} \le k_5\int_0^1 \alpha^2|\Psi_x|^2 dx$$

com $k_5 = 2+k_3+k_4 > 0$. Substituindo a desigualdade acima em (3.47), a hipótese $\alpha \ge \dfrac{2}{T_0}$ nos garante que existe uma constante positiva $k_6 = \dfrac{k_5 C_{1_p} T_0}{2}$ satisfazendo

$$s^2 \iint\limits_{Q_0} |M|^2\alpha^2|\Psi|^2 dxdt \le k_6\|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} s^2\int_0^{T_0}\int_0^1 \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt. \qquad (3.48)$$

Usando (3.46) e (3.48) em (3.43) e tomando $k_7 = \max\{k_2, k_6\}$, temos

$$s \iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right) dxdt \leq$$
$$2\tilde{\mathsf{C}}_7 s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt + \frac{2\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt$$
$$+\frac{2\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} s^2 \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt,$$

ou seja,

$$s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt + \left(s - \frac{2\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt$$
$$+\left(s^3 - s^2\frac{2\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}\right) \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt \leq 2\tilde{\mathsf{C}}_7 s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt,$$

para $s \geq \bar{\bar{\mathfrak{C}}}\left(T_0^{1/2} + T_0\right)$. Note também que, como $s > 0$, temos

$$s^3 - s^2\frac{2\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} \geq \frac{s^3}{2}$$

e

$$s - \frac{2\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))} \geq \frac{s}{2}$$

se, e somente se,

$$s \geq \frac{4\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}.$$

Tomando $K = \max\left\{\bar{\bar{\mathfrak{C}}}(T_0^{1/2} + T_0), \frac{4\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}\right\}$ e $s \geq K$, segue que

$$s \geq \frac{4\tilde{\mathsf{C}}_7}{\nu^2} k_7 \|M\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(0,1))}$$

e, consequentemente,

$$s^5 \iint\limits_{Q_0} \alpha^5|\Psi|^2 dxdt + \frac{s^3}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha^3|\Psi_x|^2 dxdt + \frac{s}{2} \iint\limits_{Q_0} \alpha|\Psi_{xx}|^2 dxdt$$
$$\leq 2\tilde{\mathsf{C}}_7 s \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt.$$

Assim, notamos claramente que

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha\left(|\Psi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\Psi_x|^2 + s^4\alpha^4|\Psi|^2\right) dxdt \leq 4\tilde{\mathsf{C}}_7 \int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}|\Psi_{xx}|_{x=0}|^2 dt\ ,$$

para $s \geq K$. Voltando à variável original $\varphi = e^{s\alpha}\Psi$ tomando

$$\tilde{\mathsf{C}}_8 = \max\left\{4, 2 + 16C_1^2, 1 + 2C_1^2 + 4C_1^4 + \frac{4C_1^2}{\bar{\bar{\mathfrak{C}}}^2(103)^2}\right\}$$

temos que

$$\iint\limits_{Q_0} \alpha e^{-2s\alpha}(|\varphi_{xx}|^2 + s^2\alpha^2|\varphi_x|^2 + s^4\alpha^4|\varphi|^2)dxdt \leq D\int_0^{T_0} \alpha|_{x=0}e^{-2s\alpha|_{x=0}}|\varphi_{xx}|_{x=0}|^2 dt$$

para $s \geq K$ e $D = 4\tilde{\mathsf{C}}_7\tilde{\mathsf{C}}_8$, o que mostra o resultado.

$\square$

# Capítulo 4

# Controlabilidade do sistema não linear

Nesse capítulo, demostraremos o resultado principal do nosso trabalho:

**Teorema 4.0.1.** *Seja $\nu > 0$ fixado. Para $\overline{y}_0 \in L^2(0,1)$, considere $\overline{y} \in C^0([0,T];L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,1))$ solução de*

$$\begin{cases} \overline{y}_t + \overline{y}_x + \overline{y}\,\overline{y}_x + \nu \overline{y}_{xxx} = 0 & em \quad (0,T)\times(0,1) \\ \overline{y}\mid_{x=0} = 0, \overline{y}\mid_{x=1} = 0, \overline{y}_x\mid_{x=1} = 0 & em \quad (0,T) \\ \overline{y}\mid_{t=0} = \overline{y}_0 & em \quad (0,1) \end{cases} \tag{4.1}$$

*Então, existe $\delta > 0$, tal que para qualquer $y_0 \in L^2(0,1)$ satisfazendo $\|y_0 - \overline{y}_0\|_{L^2(0,1)} \leq \delta$, existe $v_1 \in L^2(0,T)$, tal que a solução $y \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \cap C^0([0,T];L^2(0,1))$ de*

$$\begin{cases} y_t + y_x + y\,y_x + \nu y_{xxx} = 0 & em \quad (0,T)\times(0,1) \\ y\mid_{x=0} = v_1, y\mid_{x=1} = 0, y_x\mid_{x=1} = 0 & em \quad (0,T) \\ y\mid_{t=0} = y_0 & em \quad (0,1) \end{cases} \tag{4.2}$$

*satisfaz $y\mid_{t=T} = \overline{y}\mid_{t=T}$ em $(0,1)$.*

Para demostrar o teorema acima, precisaremos de um resultado de controle para o sistema linearizado que será dado na próxima seção.

## 4.1 Controlabilidade linear com mais controles regulares

Seja $z \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \cap C^0([0,T];L^2(0,1))$

$$\begin{cases} \omega_t + ((1+\overline{y}+\frac{z}{2})\omega)_x + \nu\omega_{xxx} = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times(0,1) \\ \omega\mid_{x=0} = v_1, \omega\mid_{x=1} = 0, \omega_x\mid_{x=1} = 0 & \text{em} \quad (0,T) \\ \omega\mid_{t=0} = \omega_0 & \text{em} \quad (0,1) \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $\omega_0$ é algum estado em $H^1(0,1)$ satisfazendo $\omega_0(1) = 0$.

### 4.1.1 Desigualdade de observabilidade

Aplicando a estimativa de Carleman (3.36) com $M(t.x) = 1 + \overline{y}(t,x) + z(t,x)/2$ obtém-se a existência de uma constante positiva $G$, tal que

$$\int_0^1 |\varphi(0,.)|^2 dx \leq G(T_0,\nu,\|M\|_{Z^*}) \int_0^T |\varphi_{xx}\mid_{x=0}|^2 dt.$$

Da desigualdade de observabilidade acima deduziremos que o sistema (4.3) é controlável a zero com um controle $v_1 \in L^2(0,T)$.

### 4.1.2 Um problema de controle interior

Vamos introduzir um operador de extensão linear $\pi_1$, que associa funções de $[0,1]$ a funções de $[-1,1]$ com suporte em $[-1/2,1]$, e que é contínuo de $L^2(0,1)$ em $L^2(-1,1)$ e de $H^1(0,1)$ a $H^1(-1,1)$. Definimos

$$\tilde{\omega}_0 := \pi_1(\omega_0) \text{ em } H^1(-1,1) \tag{4.4}$$

e

$$\tilde{\overline{y}} := \pi_1(\overline{y}) \text{ e } \tilde{z} := \pi_1(z) \text{ em } L^2(0,T;H^1(-1,1)) \cap L^\infty(0,T;L^2(-1,1)). \tag{4.5}$$

Seja $\mathcal{O}$ um subintervalo de $(-1,-1+a)$, para algum $0 < a < 1$. O problema de controlabilidade e o seguinte:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_t + ((1+\tilde{\overline{y}}+\frac{\tilde{z}}{2})\tilde{\omega})_x + \nu\tilde{\omega}_{xxx} = v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x) & \text{em} \quad (0,T)\times(-1,1) \\ \tilde{\omega}\mid_{x=-1}=0, \tilde{\omega}\mid_{x=1}=0, \tilde{\omega}_x\mid_{x=1}=0 & \text{em} \quad (0,T) \\ \tilde{\omega}\mid_{t=0}=\tilde{\omega}_0 & \text{em} \quad (-1,1). \end{cases} \tag{4.6}$$

Vamos a provar que $\exists\ v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$, tal que a solução de (4.6) satisfaz: $\tilde{\omega}\mid_{t=T}= 0$ em $(-1,1)$. Esse resultado será provado usando método HUM (Hilbert Uniqueness Method), descrito na introdução. Portanto, o problema se reduz a provar uma desigualdade de observabilidade para as soluções do problema adjunto definido a seguir. Seja

$$1+\tilde{\overline{y}}+\frac{\tilde{z}}{2} = f(t,x) := f.$$

Então, tem-se

$$\tilde{\omega}_t + (f\tilde{\omega})_x + \nu\tilde{\omega}_{xxx} = v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x).$$

Multiplicando a equação por $\phi$ e integrando em $(0,T)\times(-1,1)$, obtemos

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \phi[\tilde{\omega}_t + (f\tilde{\omega})_x + \nu\tilde{\omega}_{xxx}]dxdt = \int_0^T\int_{-1}^1 \phi v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)dxdt. \tag{4.7}$$

Observe que

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \phi\tilde{\omega}_t dxdt = \int_{-1}^1 [\phi(T,x)\tilde{\omega}(T,x) - \phi(0,x)\tilde{\omega}(0,x)]dx - \int_0^T\int_{-1}^1 \tilde{\omega}\phi_t dxdt$$

e

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \phi(f\tilde{\omega})_x dxdt = -\int_0^T\int_{-1}^1 (f\phi_x)\tilde{\omega}dxdt,$$

pois $\tilde{\omega}\mid_{x=-1}= 0$ e $\tilde{\omega}\mid_{x=1}= 0$. Para a terceira integral do lado esquerdo, temos

$$\int_0^T\int_{-1}^1 \nu\tilde{\omega}_{xxx}\phi dxdt = -\int_0^T\int_{-1}^1 \nu\tilde{\omega}\phi_{xxx}dxdt$$

pois $\tilde{\omega}_x \mid_{x=1}= 0$ e tomando as condições $\phi \mid_{x=-1}= 0, \phi \mid_{x=1}= 0, \phi_x \mid_{x=-1}= 0$. Desta forma, a identidade (4.7) pode ser reescrita como

$$\int_{-1}^{1} \phi(T,x)\tilde{\omega}(T,x)dx - \int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega}(0,x)dx - \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1} \tilde{\omega}\phi_t dxdt$$

$$-\int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}(f\phi_x)\tilde{\omega}dxdt - \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}\nu\tilde{\omega}\phi_{xxx}dxdt = \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}\phi v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)dxdt,$$

ou então,

$$\int_{-1}^{1} \phi(T,x)\tilde{\omega}(T,x)dx - \int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega}(0,x)dx - \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1} \tilde{\omega}(-\phi_t - \nu\phi_{xxx} - f\phi_x)dxdt$$

$$= \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}\phi v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)dxdt.$$

Logo, tomando $\phi$ solução da equação

$$-\phi_t - \nu\phi_{xxx} - f\phi_x = 0,$$

obtém-se:

$$\int_{-1}^{1} \phi(T,x)\tilde{\omega}(T,x)dx - \int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega}_0 dx = \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}\phi v\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)dxdt, \tag{4.8}$$

pois $\tilde{\omega}(0,x) = \tilde{\omega}_0$. Portanto, o nosso sistema adjunto é definido por

$$\begin{cases} -\phi_t - \nu\phi_{xxx} - f\phi_x = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times(-1,1) \\ \phi \mid_{x=-1}= \phi \mid_{x=1}= \phi_x \mid_{x=-1}= 0 & \text{em} \quad (0,T) \\ \phi(T,x) = \phi_0(x) & \text{em} \quad (-1,1). \end{cases} \tag{4.9}$$

Logo uma condição de optimalidade em (4.8) :

$$\int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega}_0 dx + \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}\phi v\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)dxdt = 0$$

e, consequentemente,

$$\int_{-1}^{1} \phi(T,x)\tilde{\omega}(T,x)dx = 0 \ \text{ então } \ \tilde{\omega}(T,x) = 0.$$

Se $v$ é um controle, tem se que $\tilde{\omega}(T,x) = 0$. Logo,

$$\int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega}_0 dx + \int_{0}^{T}\int_{-1}^{1}\phi v\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)dxdt = 0.$$

Assim, temos o seguinte resultado:

**Lema 4.1.1.** *A equação é controlável a zero no tempo $T > 0$ se, e somente se, para qualquer $\tilde{\omega}_0 \in H^1(-1,1)$ existe $v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$ que satisfaz-se a seguinte relação*

$$\int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega}_0 dx + \int_{0}^{T}\int_{\mathcal{O}}\phi v dxdt = 0, \tag{4.10}$$

*para qualquer $\phi_0 \in L^2(-1,1)$, onde $\phi$ é solução do sistema adjunto.*

Logo, a desigualdade de observabilidade a ser provada é

$$\int_{-1}^{1} |\phi(0,.)|^2 dx \leq C_* \int_0^T \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} dt,$$

para alguma constante $C_* > 0$.

Fazendo a mudança de variável $T_0 = \nu T$ em (4.9) e lembrando que $f = 1 + \tilde{\bar{y}} + \dfrac{\tilde{\bar{z}}}{2}$ temos que

$$\begin{cases} -\phi_t - \phi_{xxx} - \left(\left(1 + \tilde{\bar{y}} + \dfrac{\tilde{\bar{z}}}{2}\right)/\nu\right)\phi_x = 0 & \text{em} \quad (0,T_0) \times (-1,1) \\ \phi\mid_{x=-1} = \phi\mid_{x=1} = \phi_x\mid_{x=-1} = 0 & \text{em} \quad (0,T_0) \\ \phi(T_0,x) = \phi_0(x) & \text{em} \quad (-1,1). \end{cases} \tag{4.11}$$

Usando a mudança de variável $x \longrightarrow 2x-1$ e aplicando a desigualdade de Carleman provada na Proposição 3.2.1, tem-se

$$\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \alpha\left(t, \frac{1+x}{2}\right) e^{-2s\alpha(t,(1+x)/2)} (|\phi_{xx}|^2 + s^2 \alpha\left(t, \frac{1+x}{2}\right)^2 |\phi_x|^2$$
$$+ s^4 \alpha\left(t, \frac{1+x}{2}\right)^4 |\phi|^2) dxdt \leq D \int_0^{T_0} \alpha\mid_{x=0} e^{-2s\alpha|_{x=0}} |\phi_{xx}\mid_{x=-1}|^2 dt,$$

para alguma $D > 0$. Como

$$\tilde{\alpha}(t) := \min_{x\in[0,1]} \{\alpha(t,x)\} = \alpha(t,0) \text{ e } \hat{\alpha}(t) := \max_{x\in[0,1]} \{\alpha(t,x)\} = \alpha(t,1),$$

segue que

$$\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}} (|\phi_{xx}|^2 + s^2 \tilde{\alpha}^2 |\phi_x|^2 + s^4 \tilde{\alpha}^4 |\phi|^2) dxdt \leq D \int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} |\phi_{xx}\mid_{x=-1}|^2 dt. \tag{4.12}$$

Agora, estudaremos esta desigualdade em dois passos. Primeiro modificaremos o lado direito e logo o lado esquerdo.

Lado Direito:

Pela Proposição 2.1.10, obtem-se $\tilde{C} > 0$, tal que

$$\int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} |\phi_{xx}\mid_{x=-1}|^2 dt \leq \tilde{C} \int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} \|\phi(t,.)\|^2_{H^{31/12}(\mathcal{O})} dt. \tag{4.13}$$

Logo, aplicando resultados de interpolação temos : $[H^{8/3}(\mathcal{O}), H^{-0}(\mathcal{O})]_{1/32} = H^{31/12}(\mathcal{O})$ e

$$\|\phi(t,.)\|_{H^{31/12}(\mathcal{O})} \leq C_1 \|\phi(t,.)\|^{31/32}_{H^{8/3}(\mathcal{O})} \|\phi(t,.)\|^{1/32}_{H^0(\mathcal{O})},$$

ou seja,

$$\|\phi(t,.)\|^2_{H^{31/12}(\mathcal{O})} \leq C_2 \|\phi(t,.)\|^{31/16}_{H^{8/3}(\mathcal{O})} \|\phi(t,.)\|^{1/16}_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Substituindo em (4.13) segue que

$$\int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} \left|\phi_{xx}\ |_{x=-1}\right|^2 dt \leq C_3 \int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} \|\phi(t,.)\|_{H^{8/3}(\mathcal{O})}^{31/16} \|\phi(t,.)\|_{L^2(\mathcal{O})}^{1/16}$$

$$= C_3 \int_0^{T_0} e^{-(31/16)s\hat{\alpha}} \tilde{\alpha}^{-279/32} \|\phi(t,.)\|_{H^{8/3}(\mathcal{O})}^{31/16} e^{-2s\tilde{\alpha}} e^{(31/16)s\hat{\alpha}} \tilde{\alpha}^{311/32} \|\phi(t,.)\|_{L^2(\mathcal{O})}^{1/16} dt.$$

Aplicando a desigualdade de Young com $p = \dfrac{32}{31}$ e $q = 32$ obtemos

$$\int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} \left|\phi_{xx}\ |_{x=-1}\right|^2 dt$$

$$\leq \epsilon \int_0^{T_0} \frac{e^{-2s\hat{\alpha}}}{32/31} \tilde{\alpha}^{-9} \|\phi(t,.)\|_{H^{8/3}(\mathcal{O})}^2 dt + \frac{1}{\epsilon^{31}} \int_0^{T_0} \frac{e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})}}{32} \tilde{\alpha}^{311} \|\phi(t,.)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dt \tag{4.14}$$

$$\leq \epsilon \int_0^{T_0} e^{-2s\hat{\alpha}} \tilde{\alpha}^{-9} \|\phi(t,.)\|_{H^{8/3}(\mathcal{O})}^2 dt + C_\epsilon \int_0^{T_0} e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})} \tilde{\alpha}^{311} \|\phi(t,.)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dt,$$

onde $\epsilon$ é arbitrario.

Lado Esquerdo:

Seja $\phi_1(t,x) := \theta_1(t)\phi(t,x)$ com $\theta_1(t) = e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-1/2}$. Agora afirmamos que $\phi_1$ satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\phi_{1t} - \phi_{1xxx} = g_1 \\ \phi_1\ |_{x=-1} = \phi_1\ |_{x=1} = \phi_{1x}\ |_{x=-1} = 0 \\ \phi_1(T_0, x) = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

onde $g_1 = \left(\left(1 + \tilde{\bar{y}} + \dfrac{\tilde{\bar{z}}}{2}\right)/\nu\right)\theta_1\phi_x - \theta_{1t}\phi$. De fato:

$$\phi_{1t} = \theta_{1t}\phi(t,x) + \theta_1\phi_t(t,x) \quad \text{e} \quad \phi_{1xxx} = \theta_1\phi_{xxx}$$

Como

$$-\phi_t - \phi_{xxx} = \left(\left(1 + \tilde{\bar{y}} + \frac{\tilde{\bar{z}}}{2}\right)/\nu\right)\phi_x,$$

tem-se

$$-\phi_{1t} - \phi_{1xxx} = \left(\left(1 + \tilde{\bar{y}} + \frac{\tilde{\bar{z}}}{2}\right)/\nu\right)\theta_1\phi_x - \theta_{1t}\phi = g_1.$$

Além disso, temos que $\phi_1\ |_{x=-1} = \phi_1\ |_{x=1} = \phi_{1x}\ |_{x=-1} = 0$ e $\phi_1(T_0, x) = 0$. Por outro lado, como $g_1 \in L^2((0,T_0) \times (-1,1))$,

$$\phi_1 \in Y_{1/2} = L^2(0,T_0; H^2(-1,1)) \cap C^0([0,T_0]; H^1(-1,1))$$

e

$$\|\phi_1\|_{Y_{1/2}} \leq \hat{C}\|g_1\|_{L^2((0,T_0)\times(-1,1))},$$

onde $\hat{C}$ é alguma constante positiva. Consequentemente, existe $\tilde{C}_1 > 0$, tal que

$$\|\phi_1\|_{L^2(0,T_0;H^2(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^1(-1,1))} \leq \tilde{C}_1\|\phi_1\|_{Y_{1/2}}.$$

Usando interpolação temos que

$$[L^2(0,T_0;H^2(-1,1));L^\infty(0,T_0;H^1(-1,1))]_\theta = L^p(0,T_0;[H^2(-1,1),H^1(-1,1)]_\theta)$$

onde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}$. Em nosso caso, $p_0 = 2$, $p = 4$ e $\theta = \dfrac{1}{2}$, e novamente, usando interpolação, temos que

$$[H^2(-1,1),H^1(-1,1)]_{1/2=\theta} = H^{((1-\theta).2+\theta.1)}(-1,1) = H^{(1-1/2).2+1/2}(-1,1) = H^{3/2}(-1,1).$$

Portanto,

$$[L^2(0,T_0;H^2(-1,1));L^\infty(0,T_0;H^1(-1,1))] = L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))$$

e, consequentemente, existe $\tilde{C}_2 > 0$, tal que

$$\|\phi_1\|_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))} \leq \tilde{C}_2 \|g_1\|_{L^2((0,T_0)\times(-1,1))}. \tag{4.16}$$

Como $\tilde{\tilde{y}}, \tilde{z} \in L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))$ e como $\theta_1(t) = e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-1/2} = e^{-s\alpha(t,1)}\alpha(t,0)^{-1/2}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
|\theta_{1t}(t)| &= e^{-s\hat{\alpha}}|s\alpha_t(t,1)\alpha(t,0)^{-1/2} + \frac{1}{2}\alpha(t,0)^{-3/2}\alpha_t(t,0)| \\
&\leq e^{-s\hat{\alpha}}|s\alpha_t(t,1)\alpha(t,0)^{-1/2}[1+\alpha(t,0)^{-1}]| \\
&\leq se^{-s\alpha}C|\alpha_t(t,1)\alpha(t,0)^{-1/2}|,
\end{aligned}$$

por (3.5). Então,

$$|\theta_{1t}(t)| \leq \tilde{c}s^2\tilde{\alpha}^{5/2}e^{-s\hat{\alpha}} \tag{4.17}$$

Por tanto usando (4.17) temos

$$\begin{aligned}
\|g_1\|^2_{L^2((0,T_0))\times(-1,1)} &= \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} |\left(\frac{1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{z}}{2}}{\nu}\right)\theta_1\phi_x - \theta_{1t}\phi|^2 dxdt \\
&\leq 2\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} |\left(\frac{1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{z}}{2}}{\nu}\right)\theta_1\phi_x|^2 dxdt + 2\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} |\theta_{1t}\phi|^2 dxdt \\
&\leq 2\int_0^{T_0} \|\theta_1\phi_x\|^2_{L^\infty(-1,1)} \int_{-1}^1 |\frac{1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{z}}{2}}{\nu}|^2 dxdt \\
&+ \tilde{c}_1 \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} s^4\tilde{\alpha}^5 e^{-2s\hat{\alpha}}|\phi|^2 dxdt \\
&\leq \tilde{c}_2 \int_0^{T_0} \|\theta_1\phi_x\|^2_{L^\infty(-1,1)} dt + \tilde{c}_1 \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} s^4\tilde{\alpha}^5 e^{-2s\hat{\alpha}}|\phi|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $\tilde{c}_2 = 2\|\frac{1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{z}}{2}}{\nu}\|^2_{L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))}$. Logo de (4.18) e como $\phi_x(t,-1) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\|g_1\|^2_{L^2((0,T_0))\times(-1,1)} &\leq \tilde{c}_2 \int_0^{T_0} \|\theta_1\phi_{xx}\|^2_{L^2(-1,1)} dt + \tilde{c}_1 \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} s^4\tilde{\alpha}^5 e^{-2s\hat{\alpha}}|\phi|^2 dxdt \\
&\leq C^{**} \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha}e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4|\phi|^2) dxdt
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $C^{**} = \max\{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\}$.

Agora, definimos $\phi_2(t,x) := \theta_2(t)\phi(t,x)$, com $\theta_2(t) = e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-5/2}$. Analogamente ao caso anterior, temos que $\phi_2$ satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\phi_{2t} - \phi_{2xxx} = g_2 \\ \phi_2 \mid_{x=-1} = \phi_2 \mid_{x=1} = \phi_{2x} \mid_{x=-1} = 0 \\ \phi_2(T_0, x) = 0, \end{cases}$$

onde $g_2 = \left(\left(1 + \tilde{\tilde{y}} + \frac{\tilde{\tilde{z}}}{2}\right)/\nu\right)\theta_2{\theta_1}^{-1}\phi_{1x} - \theta_{2t}{\theta_1}^{-1}\phi_1$. Se $g_2 \in L^2(0,T_0;H_0^2(-1,1)) \cup L^1(0,T_0;H^3 \cap H_0^2(-1,1))$,

$$\phi_2 \in L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap C^0([0,T_0];H^3(-1,1))$$

e existe uma constante $\tilde{C}_3 > 0$, tal que

$$\|\phi_2\|_{L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^3(-1,1))} \leq \tilde{C}_3 \|g_2\|_{L^2(0,T_0;H^2(-1,1))}. \tag{4.20}$$

Se $g_2 \in L^2(0,T_0;H^{-1}(-1,1))$,

$$\phi_2 \in L^2(0,T_0;H^1(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))$$

e existe uma constante $\tilde{C}_4 > 0$, tal que

$$\|\phi_2\|_{L^2(0,T_0;H^1(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))} \leq \tilde{C}_4 \|g_2\|_{L^2(0,T_0;H^{-1}(-1,1))}. \tag{4.21}$$

**Afirmação 1**: $g_2 \in L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))$.

De fato, tem-se

$$[L^2(0,T_0;H^2(-1,1)), L^2(0,T_0;H^{-1}(-1,1))]_{[\theta]} = L^2(0,T_0;[H^2(-1,1), H^{-1}(-1,1)]_{[\theta]}),$$

onde $1/2 = (1-\theta)/2 + \theta/2$, e pelo Teorema 2.5.3 com $s_1 = 2$ e $s_2 = 1$,

$$[H^2(-1,1), H^{-1}(-1,1)]_{[\theta]} = H^{(1-\theta)2-\theta.1}(-1,1) = H^{1/3}(-1,1),$$

onde $\theta = 5/9$, o que mostra a Afirmação 1.

**Afirmação 2**: $\phi_2 \in L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))$ e existe $\tilde{C}_7 > 0$, tal que $\|\phi_2\|_{L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))} \leq \|g_2\|_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}$.

Das estimativas (4.20) e (4.21), consideremos os espaços

$$[L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap L^2(0,T_0;H^1(-1,1))]_\theta$$

e

$$[L^\infty(0,T_0;H^3(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))]_\theta$$

Tomando $\theta = 5/9$, por resultados de interpolação temos

$$[L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap L^2(0,T_0;H^1(-1,1))]_{5/9} = L^2(0,T_0;[H^4(-1,1), H^1(-1,1)]_{5/9}),$$

onde

$$[H^4(-1,1), H^1(-1,1)]_{5/9} = H^{(1-5/9)4+5/9.1}(-1,1) = H^{7/3}(-1,1).$$

Analogamente,

$$[L^\infty(0,T_0;H^3(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))]_{5/9}=L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1)).$$

Logo, de (4.20) e (4.21) existem constantes positivas $\tilde{C}_5$ e $\tilde{C}_6$, tais que

$$\|\phi_2\|_{L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1))}\le \tilde{C}_5\|g_2\|_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}$$

e

$$\|\phi_2\|_{L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))}\le \tilde{C}_6\|g_2\|_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}.$$

Portanto, $\phi_2\in L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))$ e

$$\|\phi_2\|_{L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))}\le \tilde{C}_7\|g_2\|_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}, \tag{4.22}$$

onde $\tilde{C}_7>0$.

**Afirmação 3**: $\theta_2\cdot\theta_1^{-1}$ e $\theta_{2t}\cdot\theta_1^{-1}$ são funções limitadas e $\tilde{\tilde{y}}\,,\tilde{z}\in L^4(0,T_0;H^{1/2}(-1,1))$.

Lembrando que $\theta_2(t)=e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-5/2}$ e $\theta_1(t)=e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-1/2}$, temos

$$\left|\theta_2{\theta_1}^{-1}\right|=\left|\tilde{\alpha}^{-2}\right|=\left|\alpha(t,0)^{-2}\right|=t(T_0-t)/(100)^2<T_0^2/(100)^2,$$

pois $t\in(0,T_0)$. De forma similar $\theta_{2t}\theta_1^{-1}$ é limitada. Por outro lado, sabemos que

$$\tilde{\tilde{y}},\tilde{z}\in L^2(0,T_0;H^1(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1)).$$

Logo, aplicando novamente um resultado de interpolação para $\theta=1/2$ temos que

$$[L^2(0,T_0;H^1(-1,1)),L^\infty(0,T_0;H^0(-1,1))]_{1/2}=L^p(0,T_0;[H^1(-1,1),H^0(-1,1)]_{1/2}),$$

onde $1/p=(1-1/2)/2=(1-\theta)/2=1/4$. Portanto, $p=4$ e

$$[H^1(-1,1),H^0(-1,1)]_{1/2}=H^{1/2}(-1,1).$$

Substituindo acima obtém-se

$$[L^2(0,T_0;H^1(-1,1)),L^\infty(0,T_0;H^0(-1,1))]_{1/2}=L^4(0,T_0;H^{1/2}(-1,1)),$$

ou seja, $\tilde{\tilde{y}},\tilde{z}\in L^4(0,T_0;H^{1/2}(-1,1))$.

**Afirmação 4**: Existe $\tilde{C}_{14}>0$, tal que $\|g_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}\le \tilde{C}_{13}\|\phi_1\|^2_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))}$.

De fato,

$$\|g_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}=\int_0^{T_0}\|\sigma\theta_2{\theta_1}^{-1}\phi_{1x}-\theta_{2t}{\theta_1}^{-1}\phi_1\|^2_{H^{1/3}(-1,1)}dt,$$

onde $\sigma:=(1+\tilde{\tilde{y}}+\tilde{z}/2)/\nu=M(x,t)/\nu$. Então, pela afirmação 3,

$$\begin{aligned}\|g_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))}&\le 2\int_0^{T_0}\|\sigma\theta_2{\theta_1}^{-1}\phi_{1x}\|^2_{H^{1/3}(-1,1)}dt+2\int_0^{T_0}\|\theta_{2t}{\theta_1}^{-1}\phi_1\|^2_{H^{1/3}(-1,1)}dt\\&\le \tilde{C}_8\int_0^{T_0}\|\sigma\phi_{1x}\|^2_{H^{1/3}(-1,1)}dt+\tilde{C}_9\int_0^{T_0}\|\phi_1\|^2_{H^{1/3}(-1,1)}dt.\end{aligned}$$

Agora, estudaremos separadamente cada uma de as dos integrais acima. Usando a imersão $H^{3/2}(-1,1) \hookrightarrow H^{1/3}(-1,1)$, obtemos $\tilde{C}_{10} > 0$, tal que

$$\|\phi_1\|_{H^{1/3}(-1,1)} \leq \tilde{C}_{10}\|\phi_1\|_{H^{3/2}(-1,1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \|\phi_1\|^2_{H^{1/3}(-1,1)} dt &\leq \tilde{C}^2_{10} \int_0^{T_0} \|\phi_1\|^2_{H^{3/2}(-1,1)} \\
&\leq \tilde{C}^2_{10} \left( \int_0^{T_0} (1)^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^{T_0} \|\phi_1\|^4_{H^{3/2}(-1,1)} dt \right)^{1/2} \\
&= \tilde{C}^2_{10} \cdot {T_0}^{1/2} \cdot \|\phi_1\|^2_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{T_0} \|\phi_1\|^2_{H^{1/3}(-1,1)} dt \leq \tilde{C}_{11} \|\phi_1\|^2_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))},$$

onde $\tilde{C}_{11} = \tilde{C}^2_{10} \cdot {T_0}^{1/2}$. Para a primeira integral usamos a afirmação 3 e que o produto de dos funções em $H^{1/2}$ pertence a $H^{1/3}$. Dessa forma, obtemos $\tilde{C}_{12} > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \|\sigma\phi_{1x}\|^2_{H^{1/3}(-1,1)} dt &\leq \int_0^{T_0} \|\sigma\|^2_{H^{1/2}(-1,1)} \|\phi_{1x}\|^2_{H^{1/2}(-1,1)} dt \\
&\leq \tilde{C}_{12} \int_0^{T_0} \|\sigma\|^2_{H^{1/2}(-1,1)} \|\phi_1\|^2_{H^{3/2}(-1,1)} dt \\
&\leq \tilde{C}_{12} \left( \int_0^{T_0} \|\sigma\|^4_{H^{1/2}(-1,1)} dt \right)^{1/2} \left( \int_0^{T_0} \|\phi_1\|^4_{H^{3/2}(-1,1)} dt \right)^{1/2} \\
&= \tilde{C}_{12} \left( \|\sigma\|^4_{L^4(0,T_0;H^{1/2}(-1,1))} \right)^{1/2} \left( \|\phi_1\|^4_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{T_0} \|\sigma\phi_{1x}\|^2_{H^{1/3}(-1,1)} dt \leq \tilde{C}_{13} \|\phi_1\|^2_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))},$$

onde $\tilde{C}_{13} = \tilde{C}_{12} \left( \|\sigma\|^4_{L^4(0,T_0;H^{1/2}(-1,1))} \right)^{1/2}$. Finalmente, das duas estimativas temos

$$\|g_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))} \leq \tilde{C}_{14} \|\phi_1\|^2_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))}, \tag{4.23}$$

onde $\tilde{C}_{14} = \tilde{C}_8 \cdot \tilde{C}_{13} + \tilde{C}_9 \cdot \tilde{C}_{11}$.

Para concluir o resultado, introduzimos

$$\phi_3(t,x) := \theta_3(t)\phi(t,x),$$

com $\theta_3(t) = e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-9/2}$. De maneira análoga, consideremos $\phi_3$ solução do seguinte sistema

$$\begin{cases}
-\phi_{3t} - \phi_{3xxx} = g_3 \\
\phi_3 \mid_{x=-1} = \phi_3 \mid_{x=1} = \phi_{3x} \mid_{x=-1} = 0. \\
\phi_3(T_0, x) = 0
\end{cases}$$

onde $g_3 = \left( \left( 1 + \tilde{\bar{y}} + \frac{\tilde{\bar{z}}}{2} \right) / \nu \right) \theta_3 {\theta_2}^{-1} \phi_{2x} - \theta_{3t} {\theta_2}^{-1} \phi_2$. Se $g_3 \in L^2(0,T_0;{H_0}^2(-1,1)) \cup L^1(0,T_0;H^3 \cap {H_0}^2(-1,1))$,

$$\phi_3 \in L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap C^0([0,T_0];H^3(-1,1))$$

e existe uma constante $\tilde{C}_{15} > 0$, tal que

$$\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^4(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^3(-1,1))} \leq \tilde{C}_{15}\|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^2(-1,1))}. \tag{4.24}$$

Se $g_3 \in L^2(0,T_0;H^{-1}(-1,1))$,

$$\phi_3 \in L^2(0,T_0;H^1(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))$$

e

$$\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^1(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))} \leq \tilde{C}_{16}\|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^{-1}(-1,1))}. \tag{4.25}$$

**Afirmação 5**: $g_3 \in L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))$.

De fato, tem-se

$$L^2(0,T_0;[H^2(-1,1),H^{-1}(-1,1)]_{[\hat{\theta}]})$$

onde $1/2 = (1-\hat{\theta})/2 + \hat{\theta}/2$, e pelo Teorema 2.5.3 com $s_1 = 2$ e $s_2 = 1$,

$$[H^2(-1,1),H^{-1}(-1,1)]_{[\hat{\theta}]} = H^{(1-\hat{\theta})2-\hat{\theta}.1}(-1,1) = H^{2/3}(-1,1),$$

onde $\hat{\theta} = 4/9$, o que mostra a Afirmação 5.

**Afirmação 6**: $\phi_3 \in L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))$ e existe $\tilde{C}_{19} > 0$, tal que $\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} \leq \|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))}$.

Das estimativas (4.24) e (4.25), consideremos os espaços

$$[L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap L^2(0,T_0;H^1(-1,1))]_{\hat{\theta}}$$

e

$$[L^\infty(0,T_0;H^3(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))]_{\hat{\theta}}$$

Tomando $\hat{\theta} = 4/9$, por resultados de interpolação temos

$$[L^2(0,T_0;H^4(-1,1)) \cap L^2(0,T_0;H^1(-1,1))]_{4/9} = L^2(0,T_0;[H^4(-1,1),H^1(-1,1)]_{4/9}),$$

onde

$$[H^4(-1,1),H^1(-1,1)]_{4/9} = H^{(1-4/9)4+4/9.1}(-1,1) = H^{8/3}(-1,1).$$

Analogamente,

$$[L^\infty(0,T_0;H^3(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1))]_{\hat{4/9}} = L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1)).$$

Logo, de (4.24) e (4.25) existem constantes positivas $\tilde{C}_{17}$ e $\tilde{C}_{18}$, tais que

$$\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))} \leq \tilde{C}_{17}\|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))}$$

e

$$\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} \leq \tilde{C}_{18}\|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))}.$$

Portanto, $\phi_3 \in L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))$ e

$$\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} \leq \tilde{C}_{19}\|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1.1))}, \tag{4.26}$$

onde $\tilde{C}_{19} > 0$.

**Afirmação 7**: $\theta_3 \cdot \theta_2^{-1}$ e $\theta_{3t} \cdot \theta_2^{-1}$ são funções limitadas e $\tilde{\tilde{y}}\,, \tilde{z} \in L^3(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))$.

Lembrando que $\theta_3(t) = e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-9/2}$ e $\theta_2(t) = e^{-s\hat{\alpha}}\tilde{\alpha}^{-5/2}$, temos

$$\left|\theta_3{\theta_2}^{-1}\right| = \left|\tilde{\alpha}^{-2}\right| = \left|\alpha(t,0)^{-2}\right| = t(T_0-t)/(100)^2 < T_0^2/(100)^2,$$

pois $t \in (0,T_0)$.
De forma similar $\theta_{3t}\theta_2^{-1}$ é limitada. Por outro lado, sabemos que

$$\tilde{\tilde{y}}, \tilde{z} \in L^2(0,T_0;H^1(-1,1)) \cap L^\infty(0,T_0;L^2(-1,1)).$$

Logo, aplicando novamente um resultado de interpolação para $\theta = 1/3$ temos que

$$[L^2(0,T_0;H^1(-1,1)), L^\infty(0,T_0;H^0(-1,1))]_{1/3} = L^p(0,T_0;[H^1(-1,1),H^0(-1,1)]_{1/3}),$$

onde $1/p = (1-1/3)/2 = (1-\theta)/2 = 1/3$. Portanto, $p=3$ e

$$[H^1(-1,1),H^0(-1,1)]_{1/3} = H^{1/3}(-1,1).$$

Substituindo acima obtém-se

$$[L^2(0,T_0;H^1(-1,1)), L^\infty(0,T_0;H^0(-1,1))]_{1/3} = L^3(0,T_0;H^{2/3}(-1,1)),$$

ou seja, $\tilde{\tilde{y}}, \tilde{z} \in L^3(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))$.

**Afirmação 8**: Existe $\tilde{C}_{28} > 0$, tal que $\|g_3\|_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))} \leq \tilde{C_{28}}\|\phi_2\|_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))}$.

De fato,

$$\|g_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))} = \int_0^{T_0} \|\sigma\theta_3{\theta_2}^{-1}\phi_{2x} - \theta_{3t}{\theta_2}^{-1}\phi_2\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt$$

onde $\sigma := (1+\tilde{\tilde{y}}+\tilde{z}/2)/\nu = M(x,t)/\nu$. Então, pela afirmação 7,

$$\begin{aligned}
\|g_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))} &\leq 2\int_0^{T_0} \|\sigma\theta_3{\theta_2}^{-1}\phi_{2x}\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt + 2\int_0^{T_0} \|\theta_{3t}{\theta_2}^{-1}\phi_2\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt \\
&\leq \tilde{C}_{20}\int_0^{T_0} \|\sigma\phi_{2x}\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt + \tilde{C}_{21}\int_0^{T_0} \|\phi_2\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt.
\end{aligned}$$

Agora, estudaremos separadamente cada uma das integrais acima. Usando a imersão $H^{5/3}(-1,1) \hookrightarrow H^{2/3}(-1,1)$, obtemos $\tilde{C}_{21} > 0$, tal que

$$\|\phi_2\|_{H^{2/3}(-1,1)} \leq \tilde{C}_{21}\|\phi_2\|_{H^{5/3}(-1,1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \|\phi_2\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt &\leq \tilde{C}_{21}^2\int_0^{T_0} \|\phi_2\|^2_{H^{5/3}(-1,1)} \\
&= \tilde{C}_{21}^2\|\phi_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} \\
&\leq \tilde{C}_{21}^2\tilde{C}_{22}\|\phi_2\|^2_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{T_0} \|\phi_2\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt \leq \tilde{C}_{23}\|\phi_2\|^2_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))},$$

onde $\tilde{C}_{23} = \tilde{C}_{21}^2\tilde{C}_{22}$. Para a primeira integral, usamos a desigualdade de Hölder com $p = 3/2$ e $q = 3$, a afirmação 7 e a Proposição 2.1.11. Dessa forma obtém-se $\tilde{C}_{24} > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \|\sigma\phi_{2x}\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt &\le \int_0^{T_0} \|\sigma\|^2_{L^\infty(-1,1)}\|\phi_{2x}\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt \\
&\le \left(\int_0^{T_0} \|\sigma\|^3_{L^\infty(-1,1)}dt\right)^{2/3}\left(\int_0^{T_0} \|\phi_{2x}\|^6_{H^{2/3}(-1,1)}dt\right)^{1/3} \\
&= \tilde{C}_{24}^2\left(\int_0^{T_0} \|\sigma\|^3_{H^{2/3}(-1,1)}dt\right)^{2/3}\left(\int_0^{T_0} \|\phi_2\|^6_{H^{5/3}(-1,1)}dt\right)^{1/3} \\
&= \tilde{C}_{24}^2\|\sigma\|^2_{L^3(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))}\|\phi_2\|^2_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{T_0} \|\sigma\phi_{2x}\|^2_{H^{2/3}(-1,1)}dt \le \tilde{C}_{25}\|\phi_2\|^2_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))},$$

onde $\tilde{C}_{25} = \tilde{C}_{24}^2\|\sigma\|^2_{L^3(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))}$. Finalmente, das duas estimativas que obtivemos obtém-se:

$$\|g_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))} \le \tilde{C}_{26}\|\phi_2\|^2_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} \tag{4.27}$$

onde $\tilde{C}_{26} = \tilde{C}_{20}\cdot\tilde{C}_{25} + \tilde{C}_{21}\cdot\tilde{C}_{23}$. Combinando (4.26) e (4.27) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} &\le \tilde{C}_{19}^2\|g_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{2/3}(-1,1))} \\
&\le \tilde{C}_{19}^2\tilde{C}_{26}\|\phi_2\|^2_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por outro lado, existe $\tilde{C}_{27} > 0$, tal que

$$\|\phi_2\|_{L^6(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} \le \tilde{C}_{27}\|\phi_2\|_{L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))}. \tag{4.29}$$

Combinando (4.28), (4.29), (4.22), (4.23), (4.16), (4.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))} &\le \tilde{C}_{19}^2\tilde{C}_{26}\tilde{C}_{27}^2\|\phi_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{7/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{4/3}(-1,1))} \\
&\le \tilde{C}_{19}^2\tilde{C}_{26}\tilde{C}_{27}^2\tilde{C}_7^2\|g_2\|^2_{L^2(0,T_0;H^{1/3}(-1,1))} \\
&\le \tilde{C}_{19}^2\tilde{C}_{26}\tilde{C}_{27}^2\tilde{C}_7^2\tilde{C}_{14}\|\phi_1\|^2_{L^4(0,T_0;H^{3/2}(-1,1))} \\
&\le \tilde{C}_{19}^2\tilde{C}_{26}\tilde{C}_{27}^2\tilde{C}_7^2\tilde{C}_{14}\tilde{C}_2^2\|g_1\|^2_{L^2((0,T_0)\times(-1,1))} \\
&\le \tilde{C}_{28}C^{**}\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha}e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4|\phi|^2)dxdt
\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde $\tilde{C}_{28} = \tilde{C}_{19}^2\tilde{C}_{26}\tilde{C}_{27}^2\tilde{C}_7^2\tilde{C}_{14}\tilde{C}_2^2$. Além disso tem-se

$$\|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))} \le \|\phi_3\|_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))\cap L^\infty(0,T_0;H^{5/3}(-1,1))}. \tag{4.31}$$

Finalmente, combinando (4.30) e (4.31) tem-se

$$\|\phi_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))} \leq \tilde{C}_{29} \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4 |\phi|^2)dxdt \tag{4.32}$$

onde $\tilde{C}_{29} = \tilde{C}_{28} C^{**}$.

Para retornar à estimativa (4.14), expressaremos a estimativa anterior em termos de $\phi$:

$$\|\phi_3\|^2_{L^2(0,T_0;H^{8/3}(-1,1))} = \int_0^{T_0} \|\theta_3(t)\phi(t,x)\|^2_{H^{8/3}(-1,1)} dt = \int_0^{T_0} e^{-2s\hat{\alpha}} \tilde{\alpha}^{-9} \|\phi(t,.)\|^2_{H^{8/3}(-1,1)} dt.$$

Portanto, de (4.32) tem-se

$$\int_0^{T_0} e^{-2s\hat{\alpha}} \tilde{\alpha}^{-9} \|\phi(t,.)\|^2_{H^{8/3}(-1,1)} dt \leq \tilde{C}_{29} \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4 |\phi|^2)dxdt \tag{4.33}$$

Logo, combinando (4.12) e (4.14) segue que

$$\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^2\tilde{\alpha}^2 |\phi_x|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4 |\phi|^2)dxdt \leq D \int_0^{T_0} \tilde{\alpha} e^{-2s\tilde{\alpha}} \left|\phi_{xx}\,|_{x=-1}\right|^2 dt$$

$$\leq D \cdot \epsilon \int_0^{T_0} e^{-2s\tilde{\alpha}} \tilde{\alpha}^{-9} \|\phi(t,.)\|^2_{H^{8/3}(\mathcal{O})} dt + D \cdot C_\epsilon \int_0^{T_0} e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})} \tilde{\alpha}^{311} \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} dt.$$

Usando (4.33), fixando $\epsilon = (2D \cdot \tilde{C}_{29})^{-1}$ e tendo em conta que $C_\epsilon = 1/(\epsilon^{31} \cdot 32)$, temos

$$\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^2\tilde{\alpha}^2 |\phi_x|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4 |\phi|^2)dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2} \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4 |\phi|^2)dxdt + \tilde{C}_{30} \int_0^{T_0} e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})} \tilde{\alpha}^{311} \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} dt,$$

onde $\tilde{C}_{30} = 2^{26} \cdot D^{32} \cdot \tilde{C}_{29}^{31}$. Então,

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}} |\phi_{xx}|^2 dxdt + \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} s^2\tilde{\alpha}^3 e^{-2s\hat{\alpha}} |\phi_x|^2 dxdt$$

$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} s^4\tilde{\alpha}^5 e^{-2s\hat{\alpha}} |\phi|^2 dxdt \leq \tilde{C}_{30} \int_0^{T_0} e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})} \tilde{\alpha}^{311} \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} dt,$$

ou seja,

$$\iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha} e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^2\tilde{\alpha}^2 |\phi_x|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4 |\phi|^2)dxdt$$

$$\leq \tilde{C}_{31} \int_0^{T_0} e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})} \tilde{\alpha}^{311} \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} dt, \tag{4.34}$$

onde $\tilde{C}_{31} = 2 \cdot \tilde{C}_{30}$.

**Afirmação 9**: Existe $C_*$, tal que

$$\int_{-1}^{1} |\phi(0,.)|^2\, dx \leq C_* \int_0^T \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} dt.$$

Seja $\chi(t) = e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})}\tilde{\alpha}^{311} = \alpha(t,0)^{311} e^{\frac{-14s}{(t(T_0-t))^{1/2}}}$. Como $T_0/2$ é um ponto de máximo de $\chi$ temos que

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{31}\int_0^{T_0} e^{s(-64\tilde{\alpha}+62\hat{\alpha})}\tilde{\alpha}^{311}\|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})}dt &\leq \tilde{C}_{31}\chi(T_0/2)\int_0^{T_0} \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})}dt \\ &= \tilde{C}_{31}\left(\frac{200}{T_0}\right)^{311} e^{\frac{-28s}{T_0}} \int_0^{\nu T} \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})}dt.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Tomando o intervalo compacto $[T_0/4, 3T_0/4]$ e usando propriedades da função $\alpha$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{s^4C^5}{{T_0}^5}\int_{T_0/4}^{3T_0/4}\int_{-1}^{1} e^{-2s\alpha(t,1)}|\phi|^2dxdt &\leq s^4 \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \alpha(t,0)^5 e^{-2s\alpha(t,1)}|\phi|^2dxdt \\ &\leq \iint\limits_{(0,T_0)\times(-1,1)} \tilde{\alpha}e^{-2s\hat{\alpha}}(|\phi_{xx}|^2 + s^2\tilde{\alpha}^2\,|\phi_x|^2 + s^4\tilde{\alpha}^4\,|\phi|^2)dxdt.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Como $\alpha(t,1)$ atinge sua valor máximo em $3T_0/4$ e $\alpha(T_0/4,1) = \alpha(3T_0/4,1)$, temos

$$\frac{s^4C^5}{2{T_0}^4}e^{-2s\alpha(T_0/4,1)}\int_{-1}^{1}|\phi|^2dx \leq \frac{s^4C^5}{{T_0}^5}\int_{T_0/4}^{3T_0/4}\int_{-1}^{1} e^{-2s\alpha(t,1)}|\phi|^2dxdt. \tag{4.37}$$

Combinando (4.35), (4.36), (4.37) e (4.34) segue a seguinte estimativa:

$$\int_{-1}^{1}|\phi|^2dx \leq \tilde{C}_{32}\int_0^T \|\phi(t,.)\|^2_{L^2(\mathcal{O})}dt. \tag{4.38}$$

Por outro lado, como $\phi$ é soluçao de (3.35) obtém-se

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(e^{\tilde{C}_{33}t}\int_{-1}^{1}(2-x)\phi^2dx\right) \leq 0,$$

onde $\tilde{C}_{33}$ é uma constante positiva. Integrando a desigualdade acima de $t_1$ a $t_2$ deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|\phi(t_1,x)|^2dx &\leq e^{\tilde{C}_{33}t_1}\int_{-1}^{1}(2-x)\phi^2(t_1,x)dx \leq e^{\tilde{C}_{33}t_2}\int_{-1}^{1}(2-x)\phi^2(t_2,x)dx \\ &\leq 2e^{\tilde{C}_{33}T}\int_{-1}^{1}\phi^2(t_2,x)dx \leq \tilde{C}_{34}\int_{-1}^{1}|\phi(t_2,x)|^2dx,\end{aligned}$$

onde $0 \leq t_1, t_2 \leq T$. Consequentemente,

$$\int_0^1|\phi(0,x)|^2dx \leq \tilde{C}_{34}\int_{-1}^{1}|\phi(t,x)|^2dx. \tag{4.39}$$

A afirmação é obtida combinando (4.38) e (4.39).

Agora podemos voltar ao problema de controle. Definimos o espaço $F$ como sendo o espaço $L^2(-1,1)$ munido da norma

$$\|\phi_0\|_F = \|\phi\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}.$$

Em seguida definimos o seguinte funcional em $F$ :

$$\begin{aligned} J(\phi_0) &= \frac{1}{2}\|\phi_0\|_F^2 + \int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega_0}(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\phi(t,x)|^2 \, dxdt + \int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega_0}(x)dx, \end{aligned}$$

onde $\phi$ é solução de (4.11) associada ao dado $\phi_0$. Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{J(\phi_0+h\psi_0)-J(\phi_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\phi(t,x)+h\psi(t,x)|^2 \, dxdt}{h} \\ &+ \lim_{h\to 0}\frac{\int_{-1}^{1} (\phi(0,x)+h\psi(0,x))\tilde{\omega_0}(x)dx}{h} \\ &+ \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\phi(t,x)|^2 \, dxdt - \int_{-1}^{1} \phi(0,x)\tilde{\omega_0}(x)dx}{h} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \phi_(t,x)\psi(t,x)dxdt + \int_{-1}^{1} \psi(0,x)\tilde{\omega_0}(x)dx, \end{aligned}$$

para toda $\psi$ solução do problema adjunto associado a $\hat{\psi}_0$. Como a última afirmação garante que $J$ é coercivo (pela desigualdade de observabilidade), contínuo e estrictamente convexo, então $J$ admite um único ponto de minimo ${\phi_0}^* \in F$, tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{J(\phi^*(T)+h\psi(T))-J(\phi^*(T))}{h} = 0,$$

então,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \psi\phi^* dxdt + \int_{-1}^{1} \psi(0,x)\tilde{\omega_0}(x)dx = 0, \;\; \forall\, \psi_0 \in F, \tag{4.40}$$

onde $\psi$ e $\phi^*$ são as soluções de (4.9) associadas aos dados $\psi_0$ e ${\phi_0}^*$, respectivamente. Tomando $v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$ por

$$v := \mathbf{1}_{\mathcal{O}}\phi^* \tag{4.41}$$

temos que a identidade (4.10) é satisfeita e, consequentemente, o sistema é controlável.

Para estimar a norma de $v$ em $L^2((0,T)\times\mathcal{O})$, tomamos $\psi=\phi^*$ em (4.40) e usamos a desigualdade de observabilidade provada na última afirmação. Temos então

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}=\|\phi^*\|^2_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} &= \int_0^T\int_{\mathcal{O}}|\phi^*(t,x)|^2\,dxdt\\
&= -\int_{-1}^1\phi^*(0,x)\tilde{\omega}_0(x)dx\\
&\le \left(\int_{-1}^1|\phi^*(0,x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{-1}^1|\tilde{\omega}_0(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\\
&\le C_*^{1/2}\left(\int_0^T\|\phi(t,x)\|^2_{L^2(\mathcal{O})}dt\right)^{1/2}\|\tilde{\omega}_0\|_{L^2(-1,1)}\\
&= C_*^{1/2}\|\phi^*\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))}\|\tilde{\omega}_0\|_{L^2(-1,1)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|v\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}\le\tilde{C}_{35}.\|\tilde{\omega}_0\|_{L^2(-1,1)}$$

onde $\tilde{C}_{35}=C_*^{1/2}$. Por outro lado, como $\pi_1$ é um operador de extenção linear e contínuo de $L^2(0,1)$ em $L^2(-1,1)$, existe $\tilde{C}_{36}>0$, tal que

$$\|\tilde{\omega}_0\|_{L^2(-1,1)}=\|\pi_1(\omega_0)\|_{L^2(-1,1)}\le\tilde{C}_{36}\|\omega_0\|_{L^2(0,1)}.$$

Portanto,

$$\|v\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}\le\tilde{C}_{35}.\|\tilde{\omega}_0\|_{L^2(-1,1)}\le\tilde{C}_{37}\|\omega_0\|_{L^2(0,1)},\tag{4.42}$$

onde $\tilde{C}_{37}=\tilde{C}_{35}\tilde{C}_{36}$.

Além disso, decompomos a solução do problema em $\tilde{\omega}=\overline{\omega}+\hat{\omega}$, onde

$$\begin{cases}\overline{\omega_t}+\nu\overline{\omega}_{xxx}=v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x)\\ \overline{\omega}\,|_{x=-1}=0,\overline{\omega}\,|_{x=1}=0,\overline{\omega}_x\,|_{x=1}=0\\ \overline{\omega}(0,x)=0\end{cases}\tag{4.43}$$

e

$$\begin{cases}\widehat{\omega}_t+\nu\widehat{\omega}_{xxx}+(f\widehat{\omega})_x=0\\ \widehat{\omega}\,|_{x=-1}=0,\widehat{\omega}\,|_{x=1}=0,\widehat{\omega}_x\,|_{x=1}=0\\ \widehat{\omega}(0,x)=\tilde{\omega}_0(x).\end{cases}\tag{4.44}$$

Como $v\mathbf{1}_{\mathcal{O}}\in L^2((0,T)\times(-1,1))$ temos que $\overline{\omega}\in Y_{1/2}=L^2(0,T;H^2(-1,1))\cap C^0([0,T];H^1(-1,1))$ e

$$\|\overline{\omega}\|_{Y_{1/2}}\le\frac{\tilde{C}_{38}}{\nu^{1/2}}\|v\mathbf{1}_{\mathcal{O}}\|_{L^2((0,T)\times(-1,1))}.$$

Analogamente,

$$\|\widehat{\omega}\|_{Y_{1/2}}\le\tilde{C}_{39}\|\tilde{\omega}_0\|_{H^1(-1,1)}.$$

Como $\tilde{\omega}=\overline{\omega}+\widehat{\omega}$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\omega}\|_{Y_{1/2}} &\le \|\overline{\omega}\|_{Y_{1/2}}+\|\widehat{\omega}\|_{Y_{1/2}}\\
&\le \frac{\tilde{C}_{38}}{\nu^{1/2}}\|v\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}+\tilde{C}_{39}\|\tilde{\omega}_0\|_{H^1(-1,1)}\\
&\le \tilde{C}_{40}\left(\|v\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}+\|\tilde{\omega}_0\|_{H^1(-1,1)}\right),
\end{aligned}\tag{4.45}$$

onde $\tilde{C}_{40} = max\left\{\frac{\tilde{C}_{38}}{\nu^{1/2}}, \tilde{C}_{39}\right\}$.

Agora podemos voltar ao problema de controle para o sistema (4.6), tomando

$$\omega := \tilde{\omega} \mid_{(0,T)\times[0,1]} \tag{4.46}$$

temos que $\omega$ é solução do sistema (4.3) com $v_1 := \tilde{\omega} \mid_{x=0}$ . Além disso, $\omega(T,.) = 0$ em $(0,1)$.
Logo, usando (4.42), (4.45) e o fato de que $\pi_1$ é a extensão contínua de $H^1(0,1)$ em $H^1(-1,1)$ tem-se, que existe $\tilde{C}_{41} > 0$ tal que,

$$\|\tilde{\omega}\|_{Y_{1/2}} \leq \tilde{C}_{41}\|\omega_0\|_{H^1(0,1)}. \tag{4.47}$$

## 4.2 Demonstração do teorema principal

Utilizaremos um argumento de ponto fixo. Inicialmente, observe que se $y$ e $\overline{y}$ são soluções dos sistemas (4.1) e (4.2) com condições iniciais $y_0$ e $\overline{y}_0$, respectivamente, então $p = y - \overline{y}$ satisfaz

$$\begin{cases} p_t + p_x + pp_x + (\overline{y}p)_x + \nu p_{xxx} = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times(0,1) \\ p \mid_{x=0}= v_1, p \mid_{x=1}= 0, p_x \mid_{x=1}= 0 & \text{em} \quad (0,T) \\ p \mid_{t=0}= p_0 = y_0 - \overline{y}_0 & \text{em} \quad (0,1). \end{cases} \tag{4.48}$$

Na sequência, vamos supor que $p_0 \in H^1(0,1)$ e que $\|p_0\|_{H^1(0,1)}$ é suficientemente pequena.

De fato, para qualquer $\gamma \in (0,T)$, assumindo que $v_1 = 0$ em $(0,\gamma)$, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, o sistema (4.48) admite uma única solução $p \in C^0([0,\gamma]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,\gamma; H^1(0,1))$, e se $\|p_0\|_{L^2(0,1)}$ é suficientemente pequeno, temos

$$\|p\|_{C^0([0,\gamma];L^2(0,1))\cap L^2(0,\gamma;H^1(0,1))} \leq \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Em particular, podemos encontrar uma constante $\gamma_0 \in (0,\gamma)$, tal que $p(\gamma_0,.) \in H^1(0,1)$ e que $\|p(\gamma_0,.)\|_{H^1(0,1)}$ é suficientemente pequena. Então, consideramos o sistema (4.48) em $(\gamma_0,T)\times(0,1)$.

Introduzimos o espaço

$$E_0 := C^0([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1(0,1)) \cap H^1(0,T; H^{-2}(0,1))$$

e consideramos em $L^2((0,T)\times(0,1))$ o seguinte subconjunto convexo

$$B := \{z \in E_0 / \|z\|_{E_0} \leq 1\}.$$

$B$ é compacto em $L^2((0,T)\times(0,1))$, pelo Lema de Aubin-Lions. Para qualquer $z \in B$, associamos o conjunto de soluções $\omega$ de (4.3) com condição inicial $\omega_0 = p_0$ dada antes. Mais precisamente definimos o conjunto de controles

$$\Lambda(z) := \left\{v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O}) / \ \tilde{\omega} \text{ solução de (4.6) satisfaz } \tilde{\omega} \mid_{t=T}= 0 \text{ e v satisfaz (4.42)}\right\}.$$

Também definimos

$$T(z) = \left\{\omega \in B \ , \ \omega := \tilde{\omega} \mid_{(0,T)\times[0,1]} / \ \tilde{\omega} \text{ satisfaz o sistema (4.6) para algum controle } v \in \Lambda(z)\right\}.$$

Com a definição anterior, a função $\tilde{\omega}$ satisfaz (4.6), com as funções $\tilde{\omega}_0$, $\tilde{\overline{y}}$ e $\tilde{z}$ que aparecem em (4.6), definidas por (4.4) e (4.5).

Usaremos a seguinte versão do teorema de Ponto Fixo de Kakutani

**Teorema 4.2.1.** *Seja $Z$ um espaço locamente convexo, seja $B \subset Z$ e seja $T : B \longrightarrow 2^B$ uma aplicação de $B$ no conjunto de partes satisfazendo as seguintes condições:*

(1) *$B$ é um conjunto convexo, compacto e não vazio;*

(2) *$T(z)$ é não vazio, fechado, convexo para todo $z \in B$;*

(3) *Para cada subconjunto $A$ de $Z$, $T^{-1}(A) = \{z \in B;\ T(z) \cap A \neq \varnothing\}$ é fechado.*

*Então, $T$ possui um ponto fixo no conjunto $B$, ou seja, existe $z \in B$, tal que $z \in T(z)$.*

Vamos verificar que o Teorema 4.2.1 pode ser aplicado a $T$ e $Z = L^2((0,T) \times (0,1))$.

**Afirmação 10**: $T(z)$ é um conjunto não vazio, fechado e convexo para cada $z \in B$.

Observe que o resultado da seção anterior garante que $T(z) \neq \varnothing$, uma vez que existe uma constante positiva $\tilde{C}_{42}$ (de (4.47)) tal que

$$\|\omega\|_{E_0} \leq \tilde{C}_{42}\|\omega_0\|_{H^1(0,1)} = \tilde{C}_{42}\|p_0\|_{H^1(0,1)} \leq 1,$$

pois $\|p_0\|_{H^1(0,1)}$ é suficientemente pequeno.

Agora vejamos que $T$ é convexo. Sejam $\omega_1$, $\omega_2 \in T(z)$ e mostremos que $(1-s)\omega_1 + s\omega_2 \in T(z)$, $\forall\, s \in [0,1]$. Como $\omega_1$, $\omega_2 \in T(z)$, então $\omega_1 := \tilde{\omega}_1 \mid_{(0,T)\times[0,1]}$, onde $\tilde{\omega}_1$ satisfaz o sistema (4.6) para algum controle $v_1 \in \Lambda(z)$ e $\omega_2 := \tilde{\omega}_2 \mid_{(0,T)\times[0,1]}$, onde $\tilde{\omega}_2$ satisfaz o sistema (4.6) para algum controle $v_2 \in \Lambda(z)$. Então,

$$\begin{aligned}
\omega_3 = (1-s)\omega_1 + s\omega_2 &= (1-s)\tilde{\omega}_1 \mid_{(0,T)\times[0,1]} + s\tilde{\omega}_2 \mid_{(0,T)\times[0,1]} \\
&= (1-s)\tilde{\omega}_1 + s\tilde{\omega}_2 \mid_{(0,T)\times[0,1]}, \quad \forall\, s \in [0,1],
\end{aligned}$$

satisfaz o sistema (4.6) com o controle $v^* = (1-s)v_1 + sv_2$, $\forall s \in [0,1]$. Nos falta verificar que $v^* \in \Lambda(z)$. De fato, $v^* \in L^2((0,T) \times \omega)$, $\tilde{\omega}_3 \mid_{t=T} = (1-s)\tilde{\omega}_1 \mid_{t=T} + s\tilde{\omega}_2 \mid_{t=T} = 0$ e, usando a estimativa (4.42),

$$\begin{aligned}
\|v^*\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} &= \|(1-s)v_1 + sv_2\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} \\
&\leq (1-s)\|v_1\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} + s\|v_2\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} \\
&\leq (1-s)\tilde{C}_{37}\|\omega_1^0\|_{L^2(0,1)} + s\tilde{C}_{37}\|\omega_2^0\|_{L^2(0,1)} \\
&= \tilde{C}_{37}\|(1-s)\omega_1^0 + s\omega_2^0\|_{L^2(0,1)} = \tilde{C}_{37}\|\omega_3^0\|_{L^2(0,1)},
\end{aligned}$$

com o qual obtém-se o resultado.

Agora vejamos que $T(z)$ é fechado para todo $z \in B$. Tome qualquer $z \in B$ e uma seqüência $\{p^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $T(z)$ que converge em $Z$ para alguma função $p \in B$. Logo, $p^k \in B$, $p^k = \tilde{p^k} \mid_{(0,T)\times[0,1]}$ , $k \in \mathbb{N}$ e $\tilde{p^k}$ satisfaz (4.6) para algum controle $v \in \Lambda(z)$. Para cada $k$, podemos escolher controles $v^k \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$, onde $v^k \in \Lambda(z)$. Extraindo subseqüências, se necessário, obtém-se

$$v^k \to v \ \text{ em } \ L^2((0,T) \times \mathcal{O}) \text{ fracamente},$$

$$\tilde{p^k} \to \tilde{p} \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^1(-1,1)) \cap H^1(0,T;H^{-2}(-1,1)) \text{ fracamente}. \tag{4.49}$$

Por (4.49), pela limitação de $\|\tilde{p^k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(-1,1))}$ e pelo Lema de Aubin-Lions, tem se que $\{\tilde{p^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto em $C^0([0,T];H^{-1}(-1,1))$. Extraindo uma subseqüência, se necessário, obtém-se

$$\tilde{p^k} \to \tilde{p} \ \ fortemente \text{ em } C^0([0,T];H^{-1}(-1,1)).$$

Em particular, $\tilde{p}(0,x) = \tilde{p}_0(x)$ e $\tilde{p}(T,x) = 0$. Por outro lado, tem-se de (4.49) que

$$\left(1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{\tilde{z}}}{2}\right)\tilde{p^k} \to \left(1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{\tilde{z}}}{2}\right)\tilde{p} \text{ em } L^2((0,T)\times(-1,1)) \text{ fracamente.}$$

Assim, $\left(\left(1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{\tilde{z}}}{2}\right)\tilde{p^k}\right)_x \to \left(\left(1+\tilde{\tilde{y}}+\frac{\tilde{\tilde{z}}}{2}\right)\tilde{p}\right)_x$ em $\mathcal{D}'((0,T)\times(-1,1))$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} &\le \liminf \|v^k\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})}\\ &\le \tilde{C}_{35}\|\tilde{p}_0\|_{L^2(-1,1)} \le \tilde{C}_{37}\|p_0\|_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

e $\tilde{p}$ satisfaz (4.6) e $\tilde{p}(T,.) = 0$. Tomando $p = \tilde{p}\mid_{(0,T)\times[0,1]}$, temos que $p \in T(z)$ e $T(z)$ é fechado.

**Afirmação 11**: Para cada subconjunto fechado $A$ de $Z$, $T^{-1}(A)$ é fechado.

Consideremos qualquer subconjunto fechado $A$ de $Z$ e qualquer sequência $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $B$ tal que

$$z^k \in T^{-1}(A), \quad \forall\, k \ge 0, \tag{4.50}$$

e

$$z^k \to z \text{ em } Z$$

para algum $z \in B$. Vejamos que $z \in T^{-1}(A)$. De (4.50), podemos escolher uma sequência $\{p^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $B$, tal que $p^k = \tilde{p^k}\mid_{(0,T)\times[0,1]}$ com $p^k \in T(z^k)\cap A$ para todo $k$, e uma sequência $\{v^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^2((0,T)\times\mathcal{O})$, tal que

$$\left\{\begin{array}{lll} \tilde{p^k_t} + ((1+\tilde{\tilde{y}}+\dfrac{\tilde{z^k}}{2})\tilde{p^k})_x + \nu\tilde{p^k_{xxx}} = v^k(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x) & \text{em} & (0,T)\times(-1,1)\\ \tilde{p^k}\mid_{x=-1}=0, \tilde{p^k}\mid_{x=1}=0, \tilde{p^k_x}\mid_{x=1}=0 & \text{em} & (0,T)\\ \tilde{p^k}\mid_{t=0}=\tilde{p}_0 & \text{em} & (-1,1),\end{array}\right. \tag{4.51}$$

$$\tilde{p^k}(T,x) = 0 \quad \text{em } (-1,1)$$

e

$$\|v^k\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{O})} \le \tilde{C}_{35}\|\tilde{p}_0\|_{L^2(-1,1)} \le \tilde{C}_{37}\|p_0\|_{L^2(0,1)}. \tag{4.52}$$

De (4.52) e da compacidade de $B$, podemos extraer uma subsequência se necessário, obtendo, quando $k\to\infty$,

$$\begin{array}{lll} v^k \to v & \text{em } L^2((0,T)\times\mathcal{O}) & \text{fracamente,}\\ \tilde{p^k} \to \tilde{p} & \text{em } L^2(0,T;H^1(-1,1))\cap H^1(0,T;H^{-2}(-1,1)) & \text{fracamente,}\\ \tilde{p^k} \to \tilde{p} & \text{em } C^0([0,T],H^{-1}(-1,1)) & \text{fortemente,}\\ \tilde{p^k} \to \tilde{p} & \text{em } L^2((0,T)\times(-1,1)) & \text{fortemente,}\\ \tilde{z^k} \to \tilde{z} & \text{em } L^2((0,T)\times(-1,1)) & \text{fortemente,}\end{array}$$

onde $v \in L^2((0,T)\times\mathcal{O})$ e $\tilde{p} \in B$. Novamente, $\tilde{p}(0,x) = \tilde{p}_0(x)$, $\tilde{p}(T,x) = 0$, as condições de contorno do sistema (4.6) e (4.42) são satisfeitas. Resta verificar que

$$\tilde{p}_t + ((1 + \tilde{\tilde{y}} + \frac{\tilde{\tilde{z}}}{2})p)_x + \nu p_{xxx} = v(t,x)\mathbf{1}_{\mathcal{O}}(x). \tag{4.53}$$

Observe que a convergência não trivial em (4.51) é a do termo não linear $(\tilde{z^k}\tilde{p^k})_x$. Note primeiro que

$$\|\tilde{z^k}\tilde{p^k}\|_{L^2((0,T)\times(-1,1))} \leq \|\tilde{z^k}\|_{L^\infty(0,T;L^2(-1,1))}\|\tilde{p^k}\|_{L^2(0,T;L^\infty(-1,1))} \leq \tilde{C}_{**}.$$

Assim, extraindo uma subsequência, obtém-se que $\tilde{z^k}\tilde{p^k} \to g$, fracamente em $L^2((0,T)\times(-1,1))$. Para provar que $g = zp$, é suficiente observar que para qualquer $\Psi \in \mathcal{D}((0,T)\times(-1,1))$,

$$\int_0^T\int_1^{-1}\tilde{z^k}\tilde{p^k}\Psi dxdt \to \int_0^T\int_1^{-1}\tilde{z}\tilde{p}\Psi dxdt,$$

para $\tilde{z^k} \to \tilde{z}$ e $\tilde{p^k}\Psi \to \tilde{p}\Psi$ em $L^2((0,T)\times(-1,1))$. Logo,

$$\tilde{z^k}\tilde{p^k} \to \tilde{z}\tilde{p} \quad \text{em} \quad L^2((0,T)\times(-1,1)) \text{ fracamente.}$$

Portanto, tem-se $(\tilde{z^k}\tilde{p^k})_x \to (\tilde{z}\tilde{p})_x$ em $\mathcal{D}'((0,T)\times(-1,1))$. Além disso, tem-se (4.53) e tomando $p = \tilde{p}\mid_{(0,T)\times[0,1]}$, o que garante que $p \in T(z)$. Por outro lado, $p \in A$, pois $p^k \to p$ em $L^2((0,T)\times(0,1))$ e $A$ é fechado. Obtemos então que $z \in T^{-1}(A)$, e logo $T^{-1}(A)$ é fechado.

Portanto, aplicando o Teorema 4.2.1 temos que existe $p \in T(p)$. Isso garante que encontramos um controle $v_1 \in L^2(0,T)$, tal que a solução de (4.48) satisfaz $p(T,.) = 0$ em $(0,1)$, o que mostra o teorema principal.

# Bibliografia


[1] G. B. Airy, *Tides and waves.* Encyclopedia Metropolitana 5 1841.

[2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer New York Dordrecht Heidelberg London 2010.

[3] J. Lofstrom, Interpolation Spaces. An Introduction, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No 223. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[4] J.-M. Coron and S. Guerrero, Singular optimal control: A linear 1-D parabolic-hyperbolic example, Asymp. Anal. 44(3/4)(2005), 237-257.

[5] A. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, Controllability of evolution equations, Lecture Notes, No. 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[6] J. Holmer, the initial-boundary valeu problem for the Korteweg- de Vries equation, Comm. Partial Differential Equations 31(7-9)(2006), 1151–1190.

[7] D. R. Smart, Fixed Point theorems, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66, Cambridge University Press, London, 1974.

[8] J. V. Boussinesq, *Théorie de lintumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire.*

[9] J.-M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society 136, 2007.

[10] J.-M. Coron and E. Crépeau, *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with a critical length.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), 367–398.

[11] S. Dolecki and D. L. Russell, *A general theory of observation and control.* SIAM J. Control Optim. 15 (1977), 185–220.

[12] C. S. Gardner and G. K. Morikawa, *Technical report. Courant Institute of Mathematical Sciences.* New York University. Report No. NYU 9082, 1960.

[13] O. Glass and S. Guerrero, *Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit.* Asymptot. Anal. 60 (2008), 61–100.

[14] O. Glass and S. Guerrero, *Controllability of the Korteweg-de Vries equation from the right Dirichlet boundary condition.* Systems Control Lett. 59 (2010), 390–395.

[15] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method.* Collection RMA, vol. 36, Masson–John Wiley, Paris–Chicester, 1994.

[16] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.* Philos. Mag. 39 (1895), 422–443.

[17] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, vol. 8 of Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson, Paris, 1988.

[18] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems.* SIAM Rev. 30 (1988), 1–68.

[19] J.-L. Lions and E. Magenes, *Probléms aux limites non homogènes et applications.* Vol 1, Travaux et Recherches Mathemátiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.

[20] L.A. Medeiros and M. Milla Miranda. Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos) Texto do I.M. da UFRJ, 2011.

[21] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations¿* vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] Rayleigh, (Strutt. J.W.) *On waves.* Phil. Mag. 1 (1976), 257-271.

[23] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain.* ESAIM Control Optim. Cal. Var. 2 (1997), 33–55.

[24] L. Rosier, *Control of the surface of a fluid by a wavemaker.* ESAIM Control Optim. Cal. Var. 10 (2004), 346–380.

[25] J. S. Russell, *Report on waves.* Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.

[26] G. G. Stokes, *On the theory of oscillatiory waves.* Trans. Camb. Philos. Soc 1 (1847), 441–55.

[27] J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction.* Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[28] N, J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.* Phys. Rev. Lett. 15 (1965), 240–243.

[29] E. Zuazua, *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods.* SIAM Rev. 47 (2000), 197–243.