

Decaimento de correlações para produto cruzado e aplicações

Diego da Silva Barros

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação do instituto de matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Orientadora: Maria José Pacífico

Rio de Janeiro
26 de Abril de 2013

Decaimento de correlações para produto cruzado e aplicações

Diego da Silva Barros

Orientadora: Maria José Pacífico

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de pós-graduação do instituto de matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof^a. Maria José Pacífico - IM/UFRJ

Prof^a. Katrin Grit Gelfert - IM/UFRJ

Prof. José Ferreira Alves - Universidade do Porto

Rio de Janeiro
26 de Abril de 2013

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a meus pais Paulo Cezar de Barros e Rosmari da Silva Barros e a meus irmãos Lucas da Silva Barros e Natália da Silva Barros, pelo apoio e incentivo dedicados a mim durante todos esses anos. Gostaria de agradecer também a todos os colegas de curso por me apoiar e transformar essa difícil empreitada em uma jornada tão agradável e inspiradora. Em particular, aos amigos Renan Assimos Martins, Sara Cristina Campos Borges, Jennyffer Smith Bohorquez Barrera e Marcelo Leite Wanderley pela paciência infinita e injeções de ânimo que me deram durante esses dois anos. Agradeço também a minha orientadora Maria José Pacífico pela sugestão do tema deste trabalho, pelo apoio e simpatia. Como não poderia deixar de dizer, fico grato à Capes, pelo auxílio financeiro que permitiu com que eu pudesse prosseguir meus estudos. Não agradeço a deus.

Resumo

Consideramos aplicações 2-dimensionais preservando uma fibração uniformemente contra-tora e cuja aplicação 1-dimensional associada é tipo Lorenz. Provamos que estas aplicações tem decaimento exponencial de correlações para observáveis Lipschitz.

Usamos este resultado para deduzir decaimento exponencial de correlações para a aplicação de Poincaré de um fluxo geométrico de Lorenz. Disto deduzimos uma lei logarítmica para este fluxo.

Palavras chave: Fluxos singulares, Atrator singular-hiperbólico, decaimento de correlações exponencial, dimensão exata e lei logarítmica.

Abstract

We consider 2-dimensional maps preserving the uniform contracting fibration and whose 1-dimensional application associated is like Lorenz. We proved that this maps has exponential decay of correlations with respect to Lipschitz observables.

We use this results to conclud exponential decay of correlations to the Poincaré map application from geometric flow like Lorenz. From this we conclud one logarithmic law for the flow.

Keywords: singular flows, singular-hyperbolic attractor, exponential decay of correlations, exact dimensionality and logarithm law.

Sumário

1	Preliminares	12
2	Dimensão e tempo de batida em sistemas rapidamente misturadores	20
2.1	Tempo de batida e dimensão local	20
2.1.1	Dimensão local	23
2.1.2	Função correlação	26
3	Decaimento de correlações para mapas com fibras contratoras	36
3.1	Medida invariante para o sistema (3)	37
3.2	Decaimento de Correlações para o sistema (3)	40
4	Medida física para fluxos com mapas de Poincaré que são fibras contratoras	52
4.1	Suspensão para o mapa de Poincaré	53
4.2	Medida física para o fluxo (X^t)	59
5	Tempo de Batida: Fluxo e seção	60
6	O modelo Geométrico de Lorenz	65
6.1	Construção do modelo geométrico perto do ponto de equilíbrio	66
6.1.1	Propriedades do mapa G	71
6.1.2	Propriedades do mapa unidimensional T	71

Introdução

O termo propriedades estatísticas de um sistema dinâmico $F : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico e F uma função mensurável se refere ao comportamento estatístico de trajetórias típicas. É conhecido que isto está relacionado as propriedades da evolução de medidas pela dinâmica.

Frequentemente é melhor estudar as propriedades estatísticas do que aquelas pontuais. De fato, o comportamento futuro de uma órbita pode ser imprevisível, mas as propriedades estatísticas são mais regulares e sua descrição é mais simples. Resultados interessantes podem ser estabelecidos a partir do conhecimento da evolução de medidas, como teoremas ergódicos, grandes desvios, lei logarítmica e etc.

Neste trabalho consideramos aplicações 2-dimensionais que preservam uma fibração que é uniformemente contratada e tal que a transformação induzida pela projeção ao longo das fibras é expansora por partes. Com mais algumas hipóteses adicionais provamos que estes mapas tem decaimento exponencial de correlações.

Este resultado permite deduzir várias consequências do ponto de vista estatístico da dinâmica, como a lei logarítmica para tempos de alcance em pequenos alvos introduzida abaixo.

Usamos estes resultados para a aplicação de Poincaré associada a um fluxo geométrico de Lorenz.

Lembramos que um fluxo geométrico de Lorenz é um modelo construído simultaneamente por Guckenheimer e Williams [12], e Afraimovich and Bykov [1] para modelar o fluxo originado pelas famosas equações de Lorenz. Este fluxo possui um atrator contendo um equilíbrio acumulado por órbitas regulares. A propriedade que exploramos destes fluxos para obter decaimento de correlações para a transformação de Poincaré associada é a existência de uma fibração contratada invariante. Podemos desintegrar uma medida ao longo da folheação, e estimar convergência de seus iterados separadamente, ao longo da direção estável e instável.

Como mencionado anteriormente, do decaimento exponencial de correlações deduzimos uma lei logarítmica para o tempo de primeira batida em alvos pequenos na seção transversal global para o fluxo geométrico de Lorenz. Depois, explorando o fato que o fluxo pode ser visto como uma suspensão sobre a transformação de Poincaré, obtemos uma lei logarítmica para o

tempo de alcance em pequenos alvos para o fluxo. Observamos que a dinâmica quantitativa destes fluxos ainda está por ser entendida, constituindo um ramo de pesquisa relevante na área de sistemas dinâmicos.

A lei logarítmica é obtida para o tempo que uma órbita típica leva para bater em uma sequência decrescente de alvos, a qual está estritamente relacionada a versão dinâmica do famoso Lema de Borel-Cantelli [6].

Em termos coloquiais, um sistema tem uma lei logarítmica para atingir uma sequência decrescente de alvos se o tempo necessário para uma órbita típica atingir o i -ésimo alvo é, em algum sentido, inversamente proporcional a medida do alvo. Então, é formulado um quantitativo indicando quão rápido uma órbita preenche o espaço. Leis logarítmicas deste tipo foram provadas para outros tipos de fluxos de interesse geométrico, como fluxos geodésicos, fluxos onipotentes, espaços homogêneos e etc. [11]

A lei logarítmica vale automaticamente para sistemas misturadores rápidos. Mas existem sistemas misturadores para os quais a lei logarítmica não é válida [11]. Aqui observamos que foi provado que os fluxos geométricos de Lorenz são misturadores, mas a velocidade de mistura ainda permanece desconhecida.

1. Enunciados dos resultados. O resultado principal desta dissertação é a prova do decaimento exponencial de correlações para aplicações definidas em um quadrado unitário do plano possuindo uma folheação invariante uniformemente contratora e satisfazendo algumas condições extras. Para enunciá-lo precisamente, denotamos o quadrado unitário por $\Sigma = I \times I$, onde $I = [-1/2, 1/2]$. Para uma função $g : \Sigma \rightarrow \Sigma$ denotamos por $L(g)$ a melhor constante de Lipschitz de g , i.e., $L(g) = \sup_{p,q \in \Sigma} \frac{|g(p) - g(q)|}{|p - q|}$ onde $|\cdot|$ é a distância Euclidiana. Definimos a norma de Lipschitz colocando $\|g\|_{lip} = \|g\|_{\infty} + L(g)$ onde, como usual, $\|g\|_{\infty} = \sup_{p \in \Sigma} |g(p)|$ e coloque $\text{Lip}(\Sigma) = \{g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} : \|g\|_{lip} < \infty\}$.

Teorema 1. *Considere uma mapa $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ do quadrado unitário nele mesmo tal que:*

(1.a) *Existe um $c \in I$ e $k \geq 0$ tal que, se x_1, x_2 são tais que $c \notin [x_1, x_2]$, então $\forall y \in I$:*
 $|G(x_1, y) - G(x_2, y)| \leq k|x_1 - x_2|.$

(1.b) *$F|_{\gamma}$ é λ -Lipschitz com $\lambda < 1$ (por isso é uniformemente contratora) em cada folha vertical γ : $|G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq \lambda|y_1 - y_2|.$*

(1.c) $T : I \rightarrow I$ é sobrejetiva e monótona por partes, com dois ramos crescentes e C^1 nos intervalos $[-\frac{1}{2}, c)$, $(c, \frac{1}{2}]$ e $T' > 1$ onde for definido. Além disso $\lim_{x \rightarrow c^-} T(x) = \frac{1}{2}$, $T(c) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} T'(x) = \infty$.

(1.d) $\frac{1}{|T'|}$ possui variação limitada.

Então a única medida física μ_F em Σ invariante por F tem decaimento exponencial de correlações com respeito a observáveis Lipschitz, i.é, existem $C, \Lambda \in \mathbb{R}^+$, $\Lambda < 1$, tais que

$$\left| \int f \cdot (g \circ F^n) d\mu_F - \int g d\mu_F \int f d\mu_F \right| \leq C\Lambda^n \|g\|_{Lip} \|f\|_{Lip}, \quad f, g \in Lip(Q).$$

A noção de medida física é central em Teoria Ergódica Diferencial. Dizemos que uma medida de probabilidade F -invariante μ_F é física se a bacia ergódica de μ_F

$$B(\mu_F) = \left\{ p \in \Sigma : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(F^j(p)) = \int \varphi d\mu_F, \quad \text{for all continuous } \varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \right\}$$

tem área positiva em Σ .

A seguir estabelecemos uma lei logarítmica para a dinâmica do fluxo. Esta é uma relação entre o tempo de primeira batida em alvos pequenos e a dimensão local da medida invariante que estamos considerando. Considere uma família de alvos $B_r(x_0)$, onde x_0 é um ponto dado, indexado por um parâmetro real r , e denotamos o tempo necessário para que a órbita de um ponto x leva para entrar em $B_r(x_0)$ por

$$\tau_F(x, B_r(x_0)) = \min\{n \in \mathbb{N}^+ : F^n(x) \in B_r(x_0)\}.$$

Uma lei logarítmica é dada pelo fato que quando $r \rightarrow 0$ o tempo de primeira batida tem escala da ordem $1/\mu(B_r)$.

Agora consideramos a dimensão local da medida μ

$$\bar{d}_\mu(x_0) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_r(x_0))}{\log(r)} \quad \text{and} \quad \underline{d}_\mu(x_0) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B_r(x_0))}{\log(r)} \quad (1)$$

representando a escala da taxa da medida de bolas pequenas quando o raio vai a 0. Quando os limites acima existem e coincidem para μ -quase todo ponto, dizemos que μ é *exata dimensional* e escrevemos $d_\mu = \underline{d}_\mu(x) = \bar{d}_\mu(x)$. Pelos resultados principais de [8, 9, 20] segue que nos

sistemas mencionados acima (com algumas condições extras na segunda coordenada G de F) μ_F é exata dimensional, e a lei logarítmica para o tempo de primeira batida em alvos pequenos vale para o sistema discreto F como acima. Isto é, vale, para μ_F -quase todo ponto $x_0 \in \Sigma$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_F(x, B_{r, \Sigma}(x_0))}{-\log r} = d_{\mu_F}(x_0).$$

Em seguida aplicamos estes resultados para o fluxo geométrico de Lorenz. Seja Σ a seção transversal para o fluxo geométrico de Lorenz e F a aplicação de Poincaré associada. Observe que por construção, F satisfaz as propriedades listadas no Teorema 1 depois de uma mudança conveniente de coordenadas.

Para isso, introduzimos o tempo de primeira batida em alvos pequenos para o fluxo. Seja $x, x_0 \in \Lambda$ e

$$\tau_r^{X_t}(x, x_0) = \inf\{t \geq 0 | X_t(x) \in B_r(x_0)\} \quad (2)$$

o tempo necessário para que a X -órbita do ponto entre pela *primeira vez* na bola $B_r(x_0)$. O número $\tau_r^{X_t}(x, x_0)$ é o *hitting time* ou tempo de batida associado ao fluxo X_t e alvo $B_r(x_0)$.

Usamos o fato que o tempo de primeiro retorno a Σ é integrável para construir uma medida física para o fluxo μ_X suportada no atrator de Lorenz. Seja $d_{\mu_X}(x)$ a dimensão local desta medida. Obtemos que $d_{\mu_X}(x) = d_{\mu_F}(x) + 1$.

Usamos o Teorema de Birkhoff para relacionar o tempo de primeira batida em pequenos alvos contidos em Σ e em alvos fora de Σ como

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{X_t}(x, x_0)}{-\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_F(x, B_{r, \Sigma}(x_0))}{-\log r}.$$

Finalmente, juntando os resultados acima obtemos

Corolário 1. *Se X_t é o fluxo geométrico de Lorenz então para cada ponto regular $x_0 \in \Lambda$ tal que $d_{\mu_X}(x_0)$ existe, temos*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{X_t}(x, x_0)}{-\log r} = d_{\mu_X}(x_0) - 1$$

para μ_X -quase todo $x \in \Lambda$.

2. Organização do texto. Começaremos a seção (1) com uma revisão sobre alguns resultados básicos. É necessário que o leitor já tenha alguma familiaridade com os resultados

básicos abordados num curso de teoria da medida e integração e também que conheça as definições básicas sobre sistemas dinâmicos.

No capítulo (2), abordaremos o tempo de batida e a dimensão local de uma medida. Estudaremos a relação entre eles o caso geral e mais tarde com a hipótese de decaimento de correlações superpolinomial desse sistema.

No capítulo (3) estudaremos funções F com fibras contratoras definidas num quadrado. Estudaremos propriedades da função T definida na primeira coordenada do mapa F , a partir da existência de uma medida invariante μ_x para T (ver [15]). Na seção (3.1) usaremos a existência da medida μ_x para construir uma medida μ_F invariante para o mapa F . Na seção (3.2) mostraremos decaimento de correlações exponencial para μ_F comparando a desintegração de medidas tipo “push-forward” ao longo das fibras usando a distância de Wasserstein-Kantorovich.

No capítulo (4) consideraremos os fluxos que geram aplicações de Poincaré numa seção transversal Σ satisfazendo as mesmas propriedades da aplicação F definida no capítulo (3). Usaremos a existência da medida invariante μ_F para essa aplicação de Poincaré para definir uma medida invariante para o fluxo de suspensão associado ao mapa F . A partir disso obteremos uma medida μ_X para o fluxo original usando o fato de que X^t e seu fluxo de suspensão são conjugados [3].

No capítulo (5) vamos considerar uma bola $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^3$ e tomar o tempo de batida de um ponto x pelo fluxo X^t , o qual denotaremos $\tau_r^{X^t}(x, x_0)$. Considerando os pontos $\pi(x)$ e $\pi(x_0)$ que são as projeções de x e x_0 pelo fluxo X^t na seção transversal, podemos tomar $\tau_r^\Sigma(\pi(x), \pi(x_0))$ o tempo que o mapa de Poincaré F alcança o disco $B_r(\pi(x_0)) \cap \Sigma$ pela primeira vez e relacionar esses tempos. Através disso, usaremos os resultados sobre dimensão local obtidos para μ_F no capítulo (1) para o estudo do tempo de batida de fluxos em \mathbb{R}^3 deduzindo assim uma fórmula para a dimensão local da medida μ_X .

No capítulo (6) analisaremos a aplicação de Poincaré associada ao Fluxo geométrico de Lorenz e mostraremos que ela satisfaz as condições necessárias para deduzir decaimento exponencial de correlações para observáveis Lipschitz e L^1 .

Capítulo 1

Preliminares

Iniciamos esse capítulo introduzindo conceitos e resultados que serão utilizados na prova dos teoremas principais. Nesse trabalho, X sempre denotará um conjunto, \mathcal{X} uma σ -álgebra associada a esse conjunto e μ uma medida definida em \mathcal{X} . A medida de Lebesgue será denotada por m .

Definição 1.0.1. *Dadas duas medidas μ e ν definidas num espaço mensurável (X, \mathcal{X}) , dizemos que a medida μ é absolutamente contínua com respeito a medida ν , se para todo $E \in \mathcal{X}$ tal que $\nu(E) = 0$ também tem-se $\mu(E) = 0$, nesse caso denotamos $\mu \ll \nu$.*

Definição 1.0.2. *Um funcional linear em $L^p = (X, \mathcal{X}, \mu)$ é um mapa $\Phi : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$$\Phi(af + bg) = a\Phi(f) + b(\Phi(g))$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in L^p$. O funcional linear Φ é limitado, se existe uma constante M tal que:

$$|\Phi(f)| \leq M\|f\|_p$$

para toda $f \in L^p$, a norma de Φ é definida como $\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)| : f \in L^p, \|f\| \leq 1\}$

A seguir, listaremos uma série de resultados básicos de funções em L^p , a demonstração de todos esses resultados também podem ser encontrados em [4].

1. (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym) Sejam μ e ν medidas σ -finitas definidas em (X, \mathcal{X}) . Então existem únicas medidas σ -finitas ν_1, ν_2 tais que $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \ll \mu$ e $\nu =$

$\nu_1 + \nu_2$. Além disso, existe uma função μ -integrável f tal que

$$\nu_2(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{X}. \quad (1.1)$$

Mais ainda, qualquer outra função que satisfaça (1.1) coincide com f em μ -quase todo ponto.

A função f que satisfaz (1.1) é chamada a de derivada de Radon-Nikodym de ν_2 com respeito a μ (ou ainda a densidade de ν_2 com respeito a μ) e é indicadas por $\frac{d\nu_2}{d\mu}$.

2. (Desigualdade de Holder) Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$ onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

3. (Desigualdade de Minkowsky) Se f e g pertencem a L^p , $p \geq 1$, então $f + g$ pertence a L^p e:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

4. (Teorema da Representação de Riesz) Seja (X, \mathcal{X}, μ) um espaço de medida σ -finito e Φ um funcional linear positivo em $L_1(X, \mathcal{X}, \mu)$, então existe uma função $g \in L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ satisfazendo:

$$\Phi(f) = \int fg d\mu.$$

E mais, $\|G\| = \|g\|_\infty$ e $g \geq 0$ se G é um funcional linear positivo.

Seja (X, \mathcal{X}, μ) um espaço de medida. Dizemos que uma função mensurável $f : X \rightarrow X$ preserva a medida (ou que μ é invariante por f), se $\forall E \in \mathcal{X}$ tem-se $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$.

A proposição abaixo caracteriza as medidas invariantes por uma transformação f .

Proposição 1.0.1. *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida em X . Então f preserva a medida μ se, e somente se, $\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu$ para toda função μ integrável $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

O ômega limite de um ponto $p \in M$, é o conjunto dos pontos $x \in X$ tal que existe uma sequência n_k de números naturais satisfazendo $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = p$. Denotaremos esse conjunto por $\omega(p)$. Um ponto $p \in X$ é chamado recorrente, se $p \in \omega(p)$.

O teorema da recorrência de Poincaré que enunciaremos abaixo, afirma que , dada qualquer

medida invariante finita, quase todo ponto de qualquer conjunto mensurável E regressa a E um número infinito de vezes.

Teorema 1.0.1. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por f . Seja $E \subset X$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ -quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ também está em E .*

Dado um conjunto mensurável $E \subset X$ com medida μ positiva e uma função mensurável $f : X \rightarrow X$, tome um ponto $x \in E$. Queremos analisar o conjunto dos iterados de x que visitam o conjunto E . Ou seja, queremos analisar o conjunto $\{j \in \mathbb{N} | f^j(x) \in E\}$.

Observe que a razão

$$\frac{\#\{j \in \mathbb{N} | f^j(x) \in E\}}{n}$$

nos dá uma média de vezes que a órbita de $x \in X$ visita o conjunto E . Queremos saber o que acontece com esse quociente a medida que n aumenta, ou seja, queremos saber se o seguinte limite existe:

$$\tau_E(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{j \in \mathbb{N} | f^j(x) \in E\}}{n}.$$

Os próximos resultados vão na direção de estudar a função $\tau_E(x)$.

Teorema 1.0.2 (Birkhoff). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f . Dado qualquer conjunto mensurável $E \subset X$, o tempo médio de visita*

$$\tau_E(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{j \in \mathbb{N} | f^j(x) \in E\}}{n}$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in X$. Além disso, $\int \tau_E(x) d\mu(x) = \mu(E)$.

Teorema 1.0.3. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f . Dada qualquer função integrável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \varphi(f^j(x)) \tag{1.2}$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in X$, além disso a função $\tilde{\varphi}$ definida dessa forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu = \int \varphi(x) d\mu.$$

Definição 1.0.3. *Seja (X, Ω, μ) espaço mensurável. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ diz-se ergódica, se dado qualquer conjunto mensurável $E \subset X$, temos que:*

$$\tau_E(x) = \mu(E) \quad \mu - \text{quase todo ponto } x \in X.$$

Proposição 1.0.2. *Seja μ uma medida de probabilidade invariante de uma transformação mensurável $f : X \rightarrow X$. As condições seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para todo conjunto mensurável $E \subset X$, tem-se $\tau_E(x) = \mu(E)$.*
2. *Para todo conjunto mensurável $E \subset X$ a função τ_E é constante em μ -quase todo ponto $x \in X$.*
3. *Para toda função integrável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu$ para μ -quase todo ponto.*
4. *Para todo conjunto mensurável $B \subset X$ a média temporal $\tilde{\varphi} \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em μ -quase todo ponto.*
5. *Para toda função integrável invariante $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em μ -quase todo ponto.*
6. *Para todo subconjunto invariante A tem-se $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

Abaixo damos algumas equivalências para que uma medida seja ergódica.

Proposição 1.0.3. *Seja μ uma probabilidade invariante para uma transformação mensurável $f : X \rightarrow X$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *(f, μ) é ergódico.*
2. *Para qualquer par de conjuntos mensuráveis A e B vale:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^j(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B). \quad (1.3)$$

3. *Para quaisquer funções $\varphi \in L^p(\mu)$ e $\psi \in L^q(\mu)$, com p, q conjugados, vale:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (\varphi(f^j))\psi d\mu = \int \varphi d\mu \int \psi d\mu.$$

Proposição 1.0.4. *Seja μ uma medida de probabilidade invariante para aplicação $f : X \rightarrow X$ e suponha também que a condição (1.3) da proposição (1.0.3) seja satisfeita para toda φ e ψ em subconjuntos densos de $L^p(\mu)$ e $L^q(\mu)$ respectivamente. Então (f, μ) é ergódico.*

Definição 1.0.4. *Suponha μ uma medida de probabilidade invariante para uma transformação mensurável $f : X \rightarrow X$, considere o conjunto $B \subset X$ para o qual vale:*

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \quad (1.4)$$

para toda $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $m(B) > 0$, dizemos que μ é uma medida física ou SRB.

Proposição 1.0.5. *Seja (X, \mathcal{X}, μ) espaço mensurável. Uma função $f : X \rightarrow X$ é chamada de misturadora, se para todo subconjunto mensurável $A, B \subset X$, tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Observação: Se f for invariante e misturadora então f é ergódica.

Definição 1.0.5. *Seja, (X, d) um espaço métrico, e considere uma família de difeomorfismos $(X^t)_{t \in \mathbb{R}} : X \rightarrow X$ de classe C^r ($r \geq 1$), dizemos que essa família é um fluxo se:*

- 1) $X^0 = Id : X \rightarrow X$ é o mapa identidade.
- 2) $X^{t+s} = X^t \circ X^s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Dizemos que o fluxo é gerado pelo campo vetorial X se:

- 3) $\frac{d}{dt} X^t(q) |_{t=t_0} = X(X_{t_0}(q))$ para todo $q \in X$ e $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definição 1.0.6. *Um ponto $p \in X$ é chamado de singular para o fluxo (X^t) , se $(X^t)(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, um ponto que não é singular é chamado regular.*

Os resultados anteriores podem ser estendidos para fluxos bastando trocar f por X^t , dessa forma temos os seguintes resultados:

Um fluxo X^t é invariante para medida μ se para cada t fixo, X^t é uma função invariante.

No caso de um fluxo $(X^t)_t$, definimos o tempo médio de visita como:

$$\tau_E(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(\{0 \leq t \leq T : X^t \in E\})}{T}.$$

onde m denota a medida de Lebesgue.

No caso de fluxos invariantes, o teorema de Birkhoff ainda continua válido, bastando para isso manter as hipóteses do teorema com o fluxo (X^t) no lugar de f . Nesse caso a equação (1.2) fica reescrita como:

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \varphi \circ X^t(x) dt$$

O limite $\tilde{\varphi}$ é chamado média temporal de φ .

No caso de fluxos invariantes, a definição para medidas físicas fica sendo basicamente a mesma, bastando para isso manter as hipóteses da definição (1.0.4) e trocar a função f pelo fluxo (X^t) . Nesse caso a equação (1.4) fica reescrita como:

$$\tau(\varphi)(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X^t(x)) dt. \quad (1.5)$$

A seguir, definiremos o conceito de desintegração de uma medida e enunciaremos alguns teoremas importantes a respeito desse assunto.

Definição 1.0.7. *Uma coleção de subconjuntos mensuráveis $\mathcal{P} = \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X é chamada de partição, caso tenhamos*

1. $P_\lambda \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
2. $\cup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = X$.
3. $P_{\lambda_i} \cap P_{\lambda_j} = \emptyset$ sempre que $\lambda_i \neq \lambda_j$.

De agora em diante, \mathcal{P} denotará uma partição de X . Denotaremos $\pi : X \rightarrow \mathcal{P}$ a projeção natural que associa a cada ponto $x \in M$ o elemento $P(x)$ da partição que o contém. Esta projeção permite munir \mathcal{P} de uma certa estrutura de espaço de probabilidade da seguinte forma: primeiramente dizemos que um subconjunto \mathcal{Q} de \mathcal{P} é mensurável se, e somente se, a pré-imagem

$$\pi^{-1}(\mathcal{Q}) = \text{união dos elementos } P \text{ de } \mathcal{P} \text{ que pertencem a } \mathcal{Q}$$

é um subconjunto mensurável de X . A família $\widehat{\mathcal{B}}$ dos subconjuntos mensuráveis é uma σ -álgebra de \mathcal{P} . Em seguida, definimos a *medida quociente* $\widehat{\mu}$ por

$$\widehat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})) \quad \text{para cada } \mathcal{Q} \in \widehat{\mathcal{B}}.$$

Definição 1.0.8. *Seja (X, \mathcal{X}, μ) um espaço de probabilidade, uma desintegração de μ relativamente a uma partição \mathcal{P} do conjunto X , é uma família de probabilidades $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ em X tal que, para todo conjunto mensurável $E \subset X$ vale:*

- $\mu_P(P) = 1$ para $\widehat{\mu}$ -quase todo $P \in \mathcal{P}$.
- a aplicação $P \rightarrow \mathbb{R}, P \rightarrow \mu_P$ é mensurável.
- $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\widehat{\mu}(P)$.

O próximo teorema é uma das principais ferramentas em teoria ergódica, ele nos fornece condições para desintegrarmos uma medida.

Teorema 1.0.4. *Seja X um espaço completo separável, $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante. Então existe um conjunto mensurável $M_0 \subset M$ com $\mu(M_0) = 1$, uma partição \mathcal{P} de M_0 em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ em M , satisfazendo:*

1. $\mu_P(P) = 1$ para $\widehat{\mu}$ -quase todo ponto $P \in \mathcal{P}$.
2. $P \rightarrow \mu_P(E)$ é mensurável, para todo conjunto mensurável $E \subset X$.
3. μ_P é invariante e ergódica para $\widehat{\mu}$ -quase todo ponto $P \in \mathcal{P}$.
4. $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\widehat{\mu}(P)$ para todo conjunto mensurável $E \subset X$.

Definição 1.0.9. *Dizemos que uma partição é mensurável, se restrita a algum subconjunto de X com medida total, ela é o limite de uma sequência não-decrescente de partições enumeráveis.*

Teorema 1.0.5 (Teorema da desintegração de Rokhlin). *Suponha que o espaço métrico X é completo separável e que \mathcal{P} é partição mensurável. Então a probabilidade μ admite alguma desintegração relativa a \mathcal{P} .*

Definição 1.0.10. Dado um mapa $F : X \rightarrow X$ e uma função $t : X \rightarrow \mathbb{R}$ que é limitada longe do zero, existe uma maneira de construirmos um fluxo através do mapa f . Considere o espaço quociente:

$$X_t = \{(x, c) \in X \times \mathbb{R}^+ : 0 \leq c \leq t(x)\} / \sim$$

onde \sim é a relação de equivalência $(x, c(x)) \sim (f(x), 0)$. A suspensão de F com teto em t é o semi-fluxo $\Phi^t : X_t \rightarrow X_c$ dado por $\Phi^t(t, s) = (F^n(x), s')$, onde n e s' satisfazem:

$$\sum_{i=0}^{n-1} t(f^i(x)) + s' = t + s, \quad 0 \leq s' \leq c(f^n(x)).$$

Definição 1.0.11. Uma seção transversal para um fluxo ou semi-fluxo $\Psi^t : Y \rightarrow Y$ é um subconjunto $A \subset Y$ com a propriedade de que o conjunto $T_y = \{t \in \mathbb{R}^+ : \Psi^t(y) \in A\}$ é um subconjunto enumerável e não-vazio de \mathbb{R}^+ .

Definição 1.0.12. Sejam X e Y espaços métricos, uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de homeomorfismo bi-lipschitz se existe uma constante $K \geq 0$, tal que para todo $x_1, x_2 \in X$ vale

$$\frac{1}{K} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2).$$

A função f é chamada localmente bi-lipschitz se a propriedade acima vale localmente para pontos $x_1, x_2 \in X$.

Capítulo 2

Dimensão e tempo de batida em sistemas rapidamente misturadores

2.1 Tempo de batida e dimensão local

Neste capítulo vamos discutir os problemas de dimensão local de uma medida, estudados em [9, 6, 19].

Vamos considerar o seguinte sistema ergódico (X, T, μ) , onde X é um espaço métrico. Sejam $x, x_0 \in X$, fixe uma vizinhança $B_r \subset X$ de x_0 , onde $\mu(B_r) > 0$, pelo teorema da recorrência de Poincaré, para $\mu - m.q.t.p$ $x \in X$ a órbita de x intercepta B_r alguma vez. Em diversas aplicações, é útil quantificar a velocidade de aproximação com a qual a órbita de x se aproxima de x_0 . Uma maneira de se abordar esse fato, é considerando uma família de conjuntos S_r indexados por um parâmetro real r contendo x_0 e dar uma estimativa do tempo necessário para a órbita de um ponto x entrar em S_r :

$$\tau(x, S_r) = \min\{n \in \mathbb{N}^+ : T^n(x) \in S_r\}.$$

O número acima definido é chamado "tempo de batida em S_r ".

No caso de X ser um espaço métrico, a escolha mais natural é tomar $S_r = B(x_0, r)$, nesse caso escreveremos:

$$\tau_r(x, x_0) = \min\{n \in \mathbb{N}, n > 0, T^n(x) \in B(x_0, r)\}.$$

Observe agora que $\tau_r(x, x_0) \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow 0$, logo faz sentido considerar:

$$\frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)},$$

e estudar o comportamento da fração acima quando $r \rightarrow 0$.

Para isto, defina:

$$\bar{R}(x, x_0) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} \quad \text{e} \quad \underline{R}(x, x_0) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)}.$$

Proposição 2.1.1. *Valem as seguintes propriedades:*

$$(a) \quad \bar{R}(x, x_0) = \bar{R}(T(x), x_0), \quad \underline{R}(x, x_0) = \underline{R}(T(x), x_0).$$

$$(b) \quad \text{Se } T \text{ é } \alpha\text{-holder, então } \bar{R}(x, x_0) \geq \alpha \bar{R}(x, T(x_0)), \quad \underline{R}(x, x_0) \geq \alpha \underline{R}(x, T(x_0)).$$

Demonstração. Vamos demonstrar (a).

Dado $r > 0$, existe $n_r > 0$ tal que $n_r = \inf\{n \in \mathbb{N}, n > 0 \mid T^n(x) \in B(x_0, r)\}$, suponha por simplicidade que $n_r > 1 \forall r$, nesse caso $n_r - 1 = \inf\{n \in \mathbb{N}, n > 0 \mid T^n(T(x)) \in B(x_0, r)\} = \tau_r(T(x), x_0)$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{\log(\tau_r(T(x), x_0))}{-\log(r)} &= \frac{\log(n_r - 1)}{-\log(r)} \\ &= \frac{\log(n_r(1 - 1/n_r))}{-\log(r)} \\ &= \frac{\log(n_r) + \log(1 - 1/n_r)}{-\log(r)} \\ &= \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} + \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r)}. \end{aligned}$$

Como $r \rightarrow 0$ implica $n_r \rightarrow +\infty$ segue que $\frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r)} \rightarrow 0$ quando $n_r \rightarrow \infty$, e lembrando que o limite superior da soma de duas sequências é menor ou igual a soma dos limites superiores de cada uma das sequências, segue que:

$$\begin{aligned} \bar{R}(T(x), x_0) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(T(x), x_0))}{-\log(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r)} \\ &= \bar{R}(x, x_0). \end{aligned}$$

Reciprocamente, supondo $n_r = \inf\{n \in \mathbb{N}, n > 0 \mid T^n(T(x)) \in B(x_0, r)\}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} &= \frac{\log(n_r + 1)}{-\log(r)} \\ &= \frac{\log(n_r(1 + 1/n_r))}{-\log(r)} \\ &= \frac{\log(n_r) + \log(1 + 1/n_r)}{-\log(r)} \\ &= \frac{\log(\tau_r(T(x), x_0))}{-\log(r)} + \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r)}. \end{aligned}$$

E da mesma forma, como foi feito anteriormente, vemos que:

$$\begin{aligned} \overline{R}(x, x_0) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(T(x), x_0))}{-\log(r)} + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r)} \\ &= \overline{R}(T(x), x_0). \end{aligned}$$

O cálculo para $\underline{R}(T(x), x_0) = \underline{R}(T(x), x_0)$ é análogo, o que conclui (a)

Para provar (b), observe que sendo T aplicação α -holder, então para todo k vale: $\|T^k(x) - T(x_0)\| \leq \|T^{k-1}(x) - x_0\|^\alpha$, assim, dado $r_n = \frac{1}{n}$, se $n_r = \tau_r(x, x_0)$ então $n_r - 1 = \tau_{r_n^\alpha}(x, T(x_0))$, considere assim a sequência r_n , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\log(\tau_{r_n^\alpha}(x, T(x_0)))}{-\log(r_n^\alpha)} &= \frac{\log(n_r - 1)}{-\log(r_n^\alpha)} \\ &= \frac{\log(n_r(1 - 1/n_r))}{-\log(r_n^\alpha)} \\ &= \frac{\log(n_r) + \log(1 - 1/n_r)}{-\log(r_n^\alpha)} \\ &= \frac{\log(n_r)}{-\log(r_n^\alpha)} + \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r_n^\alpha)} \\ &= \frac{\log(n_r)}{-\alpha \log(r_n)} + \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\alpha \log(r_n)}. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \overline{R}(x, T(x_0)) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\tau_{r_n^\alpha}(x, T(x_0)))}{-\log(r_n^\alpha)} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(n_r)}{-\log(r_n^\alpha)} + \frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\log(r_n^\alpha)} \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(n_r)}{-\alpha \log(r_n)} \right) + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(1 - 1/n_r)}{-\alpha \log(r_n)} \right) \\ &= \frac{\overline{R}(x, x_0)}{\alpha}. \end{aligned}$$

De maneira exatamente equivalente, mostra-se que $\underline{R}(x, T(x_0)) \leq \frac{R(x, x_0)}{\alpha}$, o que prova o corolário. \square

2.1.1 Dimensão local

Introduziremos nesse momento a noção de dimensão local de uma medida e provaremos alguns resultados de [19].

Como anteriormente, μ denotará uma medida no espaço métrico X . Defina os números:

$$\bar{d}_\mu(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)} \quad \text{e} \quad \underline{d}_\mu(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)}.$$

$\bar{d}_\mu(x)$ é chamado dimensão local superior enquanto que $\underline{d}_\mu(x)$ é chamado de dimensão local inferior. Quando os limites acima existem e se tem $\bar{d}_\mu(x) = \underline{d}_\mu(x)$, chamamos o limite

$$d_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)}$$

de dimensão local da medida μ .

Lema 2.1.1 (borel cantelli). *Seja $\{I_n\}$ uma seqüência de conjuntos mensuráveis em X . Se $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(I_n) < \infty$ então $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} I_m) = 0$.*

Demonstração. Consultar [13] página 74. \square

Lema 2.1.2. *Seja (X, T, μ) sistema dinâmico sobre um espaço métrico separável, com medida invariante μ e $x_0 \in X$. Se $\alpha > \underline{d}_\mu(x_0)^{-1}$ então para quase todo ponto $x \in X$ $\mu - q.t.p$ vale:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha d(x_0, T^n(x)) = \infty.$$

Demonstração. Escrevendo $d = \underline{d}_\mu(x_0)$, como vale $d \leq \frac{\log(\mu(B(x_0, r)))}{\log(r)}$ para todo $r > 0$ e

suficientemente pequeno, temos que

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{-\log(\mu(B(x_0, r)))}{-\log(r)} \\
d &\leq \frac{\log(\mu(B(x_0, r))^{-1})}{\log(r^{-1})} \\
d \cdot \log(r^{-1}) &\leq \log(\mu(B(x_0, r))^{-1}) \\
\log(r^{-d}) &\leq \log(\mu(B(x_0, r))^{-1}) \\
r^{-d} &\leq \mu(B(x_0, r))^{-1} \\
r^d &\geq \mu(B(x_0, r)).
\end{aligned}$$

Defina $I_n = T^{-n}(B(x_0, n^{-\alpha}))$, pela última desigualdade, notando que $\alpha d > 1$, ficamos com $\mu(B(x_0, n^{-\alpha})) < n^{-\alpha d}$. Como T preserva medida, $\mu(I_n) = \mu(B(x_0, n^{-\alpha}))$ e portanto:

$$\mu(T^{-n}(B(x_0, n^{-\alpha}))) = \mu(B(x_0, n^{-\alpha})) < n^{-\alpha d} < \infty. \text{ Pelo lema (2.1.1), } \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} I_m) = 0.$$

Suponha que $x \in X$ seja um elemento tal que: $\liminf n^\alpha d(x_0, T^n(x))$ seja limitado, como $\lim n^\alpha = +\infty$ segue que $\liminf d(x_0, T^n(x)) \rightarrow 0$ e portanto $x \in I_n$ para uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ e conseqüentemente $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} I_m$. Mas o conjunto desses elementos tem medida nula, e portanto para $\mu - q.t.p$ vale $\liminf n^\alpha d(x_0, T^n(x)) \rightarrow +\infty$, provando o lemma. \square

Teorema 2.1.1. *Se (X, T, μ) é um sistema dinâmico sobre um espaço métrico separável, com medida invariante μ . Para cada x_0 e μ -quase todo ponto vale:*

$$\underline{R}(x, x_0) \geq \underline{d}_\mu(x_0) \quad e \quad \overline{R}(x, x_0) \geq \overline{d}_\mu(x_0).$$

Demonstração. Vamos provar primeiramente que $\underline{R}(x, x_0) \geq \underline{d}_\mu(x_0)$. Lembrando que a função $\tau_r(x, x_0)$ é decrescente em r , para cada r tome $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo: $n^{-\alpha} \geq r \geq (n+1)^{-\alpha}$, teremos:

$$\frac{\log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0))}{-\log(n^{-\alpha})} \leq \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} \leq \frac{\log(\tau_{(n+1)^{-\alpha}}(x, x_0))}{-\log((n+1)^{-\alpha})}.$$

Isto mostra que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\tau_r(x, x_0))}{-\log(r)} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0))}{-\log(n^{-\alpha})}.$$

Note agora que o lema (2.1.2) nos diz que para n suficientemente grande, $\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0) \geq n$ sempre que $\alpha^{-1} < \underline{d}_\mu(x_0)$, portanto:

$$\log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0)) \geq \log(n) \Rightarrow \log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0)) \geq \frac{1}{\alpha} \log(n^\alpha).$$

O que nos dá: $\frac{\log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0))}{\log(n^\alpha)} \geq \frac{1}{\alpha}$ e conseqüentemente: $\liminf \frac{\log(\tau_{n^{-\alpha}}(x, x_0))}{-\log(n^{-\alpha})} \geq \frac{1}{\alpha}$.

Como $\frac{1}{\alpha}$ pode ser tomado tão próximo quanto se queira de $\underline{d}_\mu(x_0)$, segue que $\underline{R}(x, x_0) \geq \underline{d}_\mu(x_0)$.

Vamos agora provar a desigualdade $\overline{R}(x, x_0) \geq \overline{d}_\mu(x_0)$. Para isso, suponha $c' < \overline{d}_\mu(x_0)$ e considere o conjunto $A(c', x_0) = \{x \in X \mid \overline{R}(x, y) < c'\}$.

Por hipótese, segue que $c' < d = \overline{d}_\mu(x_0) < \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x_0, r)))}{\log(r)}$. Logo existe uma seqüência $\{n_k\}$ de números naturais com $n_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ de forma que

$$\begin{aligned} d &< \frac{\log(\mu(B(x_0, 2^{-n_k})))}{\log(2^{-n_k})} \\ d \cdot \log(2^{-n_k}) &\geq \log(\mu(B(x_0, 2^{-n_k}))) \\ \log(2^{-d \cdot n_k}) &\geq \log(\mu(B(x_0, 2^{-n_k}))) \\ 2^{-d \cdot n_k} &\geq \mu(B(x_0, 2^{-n_k})) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por outro lado, tome $x \in A(c', x_0)$, por definição, existem infinitos números naturais n satisfazendo

$\tau_{2^{-n}}(x, x_0) < 2^{c' \cdot n}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $C(m) = \{x \in A(c', x_0) \mid \forall n \geq m, \tau_{2^{-n}}(x, x_0) < 2^{c' \cdot n}\}$. Observe que $C(1) \subset C(2) \subset \dots \subset C(m) \subset \dots$, logo $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} C(n)) = \lim \mu(C(m))$.

Agora, considere $z \in C(n_{k_0})$, isso significa que para todo $m > n_{k_0}$ (e em particular para os termos da seqüência $\{n_k\}$ com $k > k_0$), temos $n_z^k = \tau_{2^{-n_k}}(z, x_0) < 2^{c' \cdot n_k}$. Logo $T^{n_z^k}(z) \in B(x_0, 2^{-n_k})$ e portanto $z \in T^{-n_z^k}(B(x_0, 2^{-n_k}))$ para qualquer outro $w \in C(n_{k_0})$. A última igualdade se verifica com o iterado n_w^k onde $0 < n_w^k < 2^{c' \cdot n_k}$, como a quantidade desses iterados é finita (menor do que $2^{c' \cdot n_k}$) segue que: $C(n_k) \subset \cup_{i \geq 2^{c' \cdot n_k}} T^{-i}(B(x_0, 2^{-n_k}))$, e assim:

$$\mu(C(n_k)) \leq \mu(\cup_{i \geq 2^{c' \cdot n_k}} T^{-i}(B(x_0, 2^{-n_k}))) = \mu(B(x_0, 2^{-n_k})) \cdot 2^{c' \cdot n_k} \leq 2^{-d \cdot n_k} \cdot 2^{c' \cdot n_k}$$

e conseqüentemente $\lim \mu(C(n_k)) \rightarrow 0$. Concluimos então que $\mu(A(c', x_0)) = 0 \forall c' < c$, provando o resultado. \square

2.1.2 Função correlação

Dados uma função $f : X \rightarrow X$ e uma medida de probabilidade invariante μ invariante por essa função, dizemos que o sistema (X, f, μ) é misturador se para quaisquer conjuntos mensuráveis A, B :

$$\mu(A \cap f^{-n}(B)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)\mu(B)$$

ou equivalentemente

$$\int \phi \cdot (\psi \circ f^n) d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int \phi d\mu \int \psi d\mu$$

para quaisquer par $\phi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ de funções contínuas. Definimos a função correlação por:

$$\mathcal{C}_n(\phi, \psi) = \left| \int \phi \cdot (\psi \circ f^n) d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu \right|,$$

no caso de sistemas misturadores temos $\mathcal{C}_n(\phi, \psi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, a taxa de convergência com a qual a função de correlação se aproxima de zero é chamada taxa de decaimento de correlações para os observáveis ϕ e ψ do sistema (f, μ) , assim podemos formular a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Sejam $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz observáveis em X . Um sistema (X, f, μ) possui decaimento de correlações superpolinomial se:*

$$\mathcal{C}_n(\phi, \psi) = \left| \int \phi(\psi \circ f^n) d\mu - \int \phi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq \|\phi\|_{lip} \|\psi\|_{lip} \Phi(n)$$

com Φ possuindo decaimento superpolinomial, isto é, $\lim n^\alpha \Phi(n) = 0, \forall \alpha > 0$.

Objetivo principal dessa seção é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.2. *Se (X, T, μ) possui decaimento de correlações superpolinomial e $d_\mu(x_0)$ existe, então para μ -quase todo ponto tem-se:*

$$\overline{R}(x, x_0) = \underline{R}(x, x_0) = d_\mu(x_0).$$

Para provar o teorema acima, faremos uso de mais algumas definições e provaremos mais alguns lemas auxiliares.

Definição 2.1.2. *Seja 1_S a função indicadora do conjunto $S \subset X$. Dizemos que a sequência de conjuntos $S_n \subset X$ é fortemente Borel-Cantelli (SBC), se $\sum_n \mu(S_n) = \infty$ e para μ -quase todo $x \in X$ temos*

$$\frac{\sum_{n=1}^N 1_{T^{-n}(S_n)}(x)}{\sum_{n=1}^N \mu(S_n)} \rightarrow 1.$$

Lema 2.1.3. *Seja $B(x_0, r_k)$ uma sequência centradas de bolas centradas em x_0 com raio decrescente, seja $A_k = T^{-k}(B(x_0, r_k))$ e escreva $A_{-1} = X$. Se (X, T, μ) é um sistema satisfazendo a definição 2.1.1, então quando $k > j > 0$, vale*

$$\mu(A_k \cap A_j) \leq \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) = \frac{\Phi(k-j)}{(r_{k-1} - r_k)(r_{j-1} - r_j)}.$$

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere as funções Lipschitz $\phi_k(x)$ satisfazendo as propriedades abaixo:

- $\phi_k(x) = 1 \quad \forall x \in B(x_0, r_k)$.
- $\phi_k(x) = 0$ se $x \notin B(x_0, r_{k-1})$.
- $\|\phi_k\| \leq \frac{1}{r_{k-1} - r_k}$.

Como μ preserva medida, temos:

$$\begin{aligned} \mu(A_k \cap A_j) &= \mu(T^{-k}(B(x_0, r_k)) \cap T^{-j}(B(x_0, r_j))) \\ &= \mu(T^{-j}(T^{-k+j}(B(x_0, r_k)) \cap (B(x_0, r_j)))) \\ &= \mu(T^{-k+j}(B(x_0, r_k)) \cap (B(x_0, r_j))) \\ &= \int \chi_{T^{-k+j}(B(x_0, r_k)) \cap (B(x_0, r_j))} d\mu \\ &= \int \chi_{T^{-k+j}(B(x_0, r_k))} \cdot \chi_{B(x_0, r_j)} d\mu \\ &\leq \int \phi_k(T^{k-j}) \cdot \phi_j d\mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $\phi_s \leq 1_{B(x_0, r_{s-1})} \quad \forall s \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\int \phi_k d\mu \int \phi_j d\mu \leq \int 1_{B(x_0, r_{k-1})} d\mu \int 1_{B(x_0, r_{j-1})} d\mu. \tag{2.2}$$

E novamente, como μ é invariante por T :

$$\int 1_{B(x_0, r_{k-1})} d\mu \int 1_{B(x_0, r_{j-1})} d\mu = \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}). \tag{2.3}$$

Juntando (2.2) e (2.3), temos:

$$\int \phi_k d\mu \int \phi_j d\mu \leq \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}). \tag{2.4}$$

Como o sistema (X, T, μ) tem decaimento de correlações polinomial e as integrais são positivas, podemos escrever:

$$\int \phi_k(T^{k-j}) \cdot \phi_j d\mu \leq \int \phi_k d\mu \int \phi_j d\mu + \|\psi_k\| \|\psi_j\| \Phi(k-j). \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) e (2.4) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \mu(A_k \cap A_j) &\leq \int \phi_k(T^{k-j}) \cdot \phi_j d\mu \\ &\leq \int \phi_k d\mu \int \phi_j d\mu + \|\psi_k\| \|\psi_j\| \Phi(k-j) \\ &\leq \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) + \frac{\Phi(k-j)}{(r_{k-1} - r_k)(r_{j-1} - r_j)}. \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. \square

Antes de prosseguir, vamos fazer algumas definições de teoria da probabilidade.

Definição 2.1.3. Dada uma função mensurável discreta $T : X \rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ e uma medida de probabilidade $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a esperança matemática de T por

$$E(T) = \sum_{i=0}^n x_i \mu(T^{-1}\{x_i\})$$

Lema 2.1.4. Seja S_k uma seqüência decrescente de conjuntos mensuráveis tal que:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_0^k \mu(S_k)}{\log(k)} = z > 0.$$

Seja $A_k = T^{-k}(S_k)$ e suponha que quando $k > j$ o sistema seja tal que:

$$\mu(A_k \cap A_j) \leq \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) + k^{c_1} j^{c_2} \Phi(k-j), \quad (2.6)$$

com Φ possuindo decaimento superpolinomial e $c_1, c_2 > 0$. Então pondo $Z_k(x) = \sum_0^k 1_{A_i}(x)$, temos $\frac{Z_k}{E(Z_k)} \rightarrow 1$ na norma L^2 em μ -quase todo ponto.

Demonstração.

$$\begin{aligned} (Z_n)^2 &= \left(\sum_{k=0}^n 1_{A_i}(x) \right)^2 \\ &= \sum_0^n 1_{A_i}(x) + 2 \sum_{j,k \leq n; j < k} 1_{A_i}(x) 1_{A_j}(x) \\ &= \sum_0^n 1_{A_i}(x) + 2 \sum_{j,k \leq n; j < k} 1_{A_i \cap A_j}(x). \end{aligned}$$

Como $E(Z_n) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$, segue que:

$$E((Z_n)^2) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + 2 \sum_{k,j \leq n; k > j} \mu(A_k \cap A_j). \quad (2.7)$$

Lembrando que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_0^k \mu(S_k)}{\log(k)} = z$, tome α satisfazendo $0 < \alpha < \frac{z}{2}$, podemos escrever:

$$\sum_{j,k \leq n, k > j} \mu(A_k \cap A_j) \leq \sum_{k,j \leq n, k > j, k < j + n^\alpha} \mu(A_k \cap A_j) + \sum_{k,j \leq n, k \geq j + n^\alpha} \mu(A_k \cap A_j). \quad (2.8)$$

O primeiro somatório a direita da desigualdade em (2.8) pode portanto ser majorado por:

$$\sum_{k,j \leq n, k > j, k < j + n^\alpha} \mu(A_k \cap A_j) \leq n^\alpha E(Z_n).$$

Para o segundo somatório a direita da desigualdade em (2.8), usaremos a igualdade (2.6) de forma a obter:

$$\begin{aligned} \sum_{k,j \leq n, k < j + n^\alpha} \mu(A_k \cap A_j) &\leq \sum_{k,j \leq n, k \geq j + n^\alpha} \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) + n^{c_1+c_2}\Phi(n^\alpha) \\ &\leq \frac{1}{2}(E(Z_n))^2 + n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha). \end{aligned}$$

Segue portanto que podemos estimar o primeiro somatório em (2.8) por:

$$\sum_{j,k \leq n, k > j} \mu(A_k \cap A_j) \leq n^\alpha E(Z_n) + \frac{1}{2}(E(Z_n))^2 + n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha).$$

Dessa forma, (2.7) pode ser majorado por:

$$\begin{aligned} E((Z_n)^2) &\leq E(Z_n) + 2n^\alpha E(Z_n) + (E(Z_n))^2 + 2n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha) \\ &\leq (2n^\alpha + 1)E(Z_n) + (E(Z_n))^2 + 2n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha). \end{aligned}$$

Lembrando que para a esperança, vale $E((Z_n - E((Z_n)^2))) = E((Z_n)^2) - (E(Z_n))^2$, a desigualdade acima nos permite escrever:

$$E((Z_n - E((Z_n)^2))) \leq (2n^\alpha + 1)E((Z_n)^2) + 2n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha). \quad (2.9)$$

Defina $Y_n = \frac{Z_n}{E(Z_n)} - 1 = \frac{Z_n - E(Z_n)}{E(Z_n)}$, pela equação (2.9), obtemos

$$E((Y_n)^2) = E\left(\frac{Z_n - E(Z_n)}{E(Z_n)}\right) \leq \frac{(2n^\alpha + 1)E(Z_n) + 2n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha)}{(E(Z_n))^2}.$$

Como $\alpha < \frac{z}{2}$ e $2n^{2+c_1+c_2}\Phi(n^\alpha) \rightarrow 0$, segue que $\lim_{n \rightarrow 0} E((Y_n)^2) = 0$, ou seja, $\frac{Z_n}{E(Z_n)} \rightarrow 1$ em L^2 .

As contas acima mostram que existe uma subsequência de Y_n que converge a 0, mas queremos mostrar que toda a sequência converge a zero. Para isso, consideramos

$$n_k = \inf \{n : E(Z_n) \geq k^2\}$$

e mostraremos que $Y_{n_k} \rightarrow 0$.

Desde que Φ possua decaimento superpolinomial

$$\sum_n n^{2+c_1+c_2} \frac{\Phi(n^\alpha)}{(E(Z_n))^2} < \infty.$$

Considerando $\varepsilon > 0$, por definição de z e pelo fato de que $\mu(A_i) < 1$, temos que se k é grande o suficiente vale $(k+1)^2 \geq E(Z_{n_k}) \geq (n_k)^{z-\varepsilon}$. Desde que $n_k \leq (k+1)^{\frac{2}{z-\varepsilon}} \leq (2k)^{\frac{2}{z-\varepsilon}}$ segue:

$$\frac{(2n_k^\alpha + 1)(E(Z_{n_k}))}{(E(Z_{n_k}))^2} = \frac{(2n_k^\alpha + 1)}{(E(Z_{n_k}))} \leq \frac{2(2k)^{\frac{2\alpha}{z-\varepsilon}} + 1}{k^2}.$$

Como $\alpha < \frac{z}{2}$, podemos supor ε tão pequeno de modo que $2\alpha < z - \varepsilon$ e então, obtemos:

$$\frac{2\alpha}{z-\varepsilon} - 2 < -1.$$

Isto implica que $\sum E((Y_n)^2) < +\infty$, o que por sua vez nos fornece $Y_{n_k} \rightarrow 0$ e portanto

$$\frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_k})} \rightarrow 1.$$

Agora, se $n_k < n < n_{k+1}$, vale:

$$\frac{Z_n}{E(Z_n)} \leq \frac{Z_{n_{k+1}}}{E(Z_{n_k})} = \frac{Z_{n_{k+1}}}{E(Z_{n_{k+1}})} \frac{E(Z_{n_{k+1}})}{E(Z_{n_k})} \leq \frac{Z_{n_{k+1}}}{E(Z_{n_{k+1}})} \frac{(k+2)^2}{k^2}.$$

E também:

$$\frac{Z_n}{E(Z_n)} \geq \frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_{k+1}})} = \frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_k})} \frac{E(Z_{n_k})}{E(Z_{n_{k+1}})} \geq \frac{Z_{n_k}}{E(Z_{n_k})} \frac{k^2}{(k+2)^2}.$$

Portanto, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Z_n}{E(Z_n)} = 1$ em μ -quase todo ponto, provando o teorema. □

Lema 2.1.5. *Seja S_n uma sequência decrescente de conjuntos mensuráveis de um espaço métrico X com $\lim \mu(S_n) = 0$. Então:*

$$\liminf \frac{\log(\tau(x, S_n))}{-\log(\mu(S_n))} \geq 1.$$

Demonstração. Escolha uma sequência $n_i \in \mathbb{N}$, onde $n_i = \min\{n \geq 1 \mid \mu(S_n) < 2^{-n}\}$. Se $n_i < n < n_{i+1}$, então $\tau(x, S_n) \geq \tau(x, S_{n_i})$ para todo x e também $2^{-i} > \mu(S_{n_i}) \geq \mu(S_n) \geq 2^{-i-1}$.

Portanto, para todo n satisfazendo $n_i < n < n_{i+1}$ e para todo x :

$$\frac{\log(\tau(x, S_n))}{-\log(\mu(S_n))} \geq \frac{\log(\tau(x, S_{n_i}))}{-\log(\mu(S_{n_i}))} \cdot \frac{-\log(\mu(S_{n_i}))}{-\log(\mu(S_n))} > \frac{\log(\tau(x, S_{n_i}))}{-\log(\mu(S_{n_i}))} \cdot \frac{i}{i+1}.$$

O que implica que:

$$\liminf \frac{\log(\tau(x, S_n))}{-\log(\mu(S_n))} = \liminf \frac{\log(\tau(x, S_{n_i}))}{-\log(\mu(S_{n_i}))}.$$

Usando a desigualdade acima, podemos assumir $\mu(S_n) \leq 2^{-n}$, dado $\delta > 0$ defina o conjunto $E_n = \left\{ x : \frac{\log(\tau(x, S_n))}{-\log(\mu(S_n))} < 1 - \delta \right\}$. Temos

$$\begin{aligned} \mu(E_n) &= \mu(\{x : \tau(x, S_n) < \mu(S_n)^{-1+\delta}\}) \\ &= \mu\left(\sum_{i=1}^{\mu(S_n)^{-1+\delta}} \{x : \tau(x, S_n) = i\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\mu(S_n)^{-1+\delta}} \mu(\{x : \tau(x, S_n) = i\}). \end{aligned}$$

Observe que se $\{x \in \tau(x, S_n) = i\}$ então $x \in T^{-i}(S_n)$, assim

$$\sum_{i=1}^{\mu(S_n)^{-1+\delta}} \mu(\{x : \tau(x, S_n) = i\}) \leq \sum_{i=1}^{\mu(S_n)^{-1+\delta}} \mu(T^{-i}(S_n)) \leq \mu(S_n)^{-1+\delta} \mu(S_n) < 2^{-n\delta}.$$

Isso mostra que $\sum \mu(E_n) < +\infty$, pelo teorema de Borel-Cantelli obtemos $\mu(\limsup E_n) = 0$.

Como δ pode ser tomado tão pequeno quando se queira, obtemos para μ -quase todo ponto x

$$\liminf \frac{\log(\tau(x, S_n))}{-\log(\mu(S_n))} \geq 1.$$

□

Lema 2.1.6. *Suponha (X, T, μ) sistema dinâmico, onde $\mu(C) = 0$ para qualquer subconjunto discreto mensurável C , se cada sequência decrescente de bolas em X com o mesmo centro é fortemente Borel-Cantelli, então para μ -quase todo ponto, temos*

$$\liminf \frac{\log(\tau(x, S_n))}{-\log(\mu(S_n))} = 1.$$

Demonstração. Seja $y \in S_r$ o centro das bolas, como $\mu(C) = 0$, segue que $\mu(S_r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Para cada inteiro positivo i , defina $m(i)$ como o menor inteiro positivo satisfazendo:

$$\left\{ r > 0 : \frac{1}{m(i) + 1} \leq \mu(S_r) < \frac{1}{i} \right\}.$$

Essa sequência satisfaz $m(1) < m(2) < \dots$, e mais, para cada par $m(i), m(i+1)$, podemos escolher r'_i satisfazendo:

$$\frac{1}{m(i) + 1} \leq \mu(S_{r'_i}) < \frac{1}{m(i)}.$$

Existe uma sequência i'_k satisfazendo $m(i'_k) = i'_k$ e $i'_k \geq 2i'_{k-1}$, para essa sequência, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_{r'_i}) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m(i) + 1} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i'_k}{m(i'_k) + 1} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i'_k}{i'_k + 1} = +\infty. \end{aligned}$$

Como a sequência é fortemente Borel-Cantelli e $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(S_{r'_i}) = +\infty$, obrigatoriamente $\sum_{n=1}^{+\infty} 1_{T^{-1}S_n} \rightarrow +\infty$, ou seja, para μ -quase todo x , temos $T^i(x) \in S_{r'_i}$ para uma infinidade de índices i temos $T^i(x) \in S_{r'_i}$, logo $\tau(x, S_{r'_i}) \leq i$ e $i \leq \frac{1}{\mu(S_{r'_i})}$ para uma infinidade de índices i , o que nos dá:

$$\tau(x, S_{r'_i}) \leq i \leq \frac{1}{\mu(S_{r'_i})}.$$

Aplicando log e tomando liminf, temos:

$$\liminf \frac{\log(\tau(x, S_r))}{-\log(\mu(S_r))} \leq 1.$$

Aplicando o lema (2.1.5) temos a igualdade. □

Finalmente, vamos demonstrar o teorema (2.1.2).

Demonstração. Vamos começar mostrando que $\bar{R}(x, x_0) \leq d_\mu(x_0)$. Escolha $\frac{1}{\beta} > d_\mu(x_0)$ e considere a sequência $r_k = k^{-\beta}$. Tomando $\varepsilon < \beta^{-1} - d_\mu(x_0)$, como $d_\mu(x_0)$ existe, para k suficientemente grande obtemos

$$0 < \frac{\log(\mu(B(x_0, r_k)))}{\log(r_k)} - d_\mu(x_0) < \varepsilon.$$

O que nos permite escrever:

$$\mu(B(x_0, r_k)) > k^{-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))}.$$

Conseqüentemente:

$$\sum_0^k \mu(B(x_0, r_k)) > \sum_0^k k^{-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))}.$$

Como

$$\sum_0^n k^{-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))} = \frac{n^{1-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))}}{1 - \beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))} = Cn^{1-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))},$$

segue que:

$$\begin{aligned} \log \left(\sum_0^n k^{-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))} \right) &\geq \log (Cn^{1-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))}) \\ &\geq \log C + (1 - \beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))) \log(n). \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\log \left(\sum_0^n k^{-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))} \right)}{\log(n)} &\geq \frac{\log C}{\log(n)} + 1 - \beta(\varepsilon + d_\mu(x_0)) \\ &\geq 1 - \beta(\varepsilon + d_\mu(x_0)). \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, segue que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\sum_0^n k^{-\beta(\varepsilon + d_\mu(x_0))} \right)}{\log(n)} \geq 1 - \beta d_\mu(x_0) > 0.$$

Aplicando agora o lema (2.1.3), vemos que

$$\mu(A_k \cap A_j) \leq \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) + \frac{\Phi(k-j)}{(r_{k-1} - r_k)(r_{j-1} - r_j)}.$$

Desde que $r_i - r_{i-1} = i^{-\beta-1}$, a desigualdade acima pode ser escrita como

$$\mu(A_k \cap A_j) \leq \mu(A_{k-1})\mu(A_{j-1}) + k^{\beta+1}j^{\beta+1}\Phi(k-j),$$

onde Φ possui decaimento de correlações superpolinomial. Pelo lema (2.1.4), pondo $Z_k(x) = \sum_0^k 1_{A_i}(x)$, obtemos para μ -quase todo ponto

$$\frac{Z_k}{E(Z_k)} \rightarrow 1.$$

Vamos tomar $\varepsilon' > 0$ e β como acima, de forma que β^{-1} esteja próximo de $d_\mu(x_0)$ e de forma a ter $\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon') > 1$. Escolha $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente de forma a ter $\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon) < 1$

e $\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon') - \frac{1 - \beta(d_\mu(x_0) - \varepsilon)}{1 - \beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon)} > 0$. Considere x tal que $\bar{R}(x, x_0) > d_\mu(x_0) + \varepsilon'$, então existe uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\frac{\log(\tau_{n^{-\beta}})(x, x_0)}{\log n^{-\beta}} > d_\mu(x_0) + \varepsilon'$$

e conseqüentemente $\tau_{n^{-\beta}}(x, x_0) > n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}$.

Por definição, $\tau_{n^{-\beta}}(x, x_0)$ é o primeiro tempo onde $T^n(x)$ entra pela primeira vez na bola $B(x_0, n^{-\beta})$, ou equivalentemente, $\tau_{n^{-\beta}}(x, x_0)$ é o primeiro tempo onde $x \in T^{-n}(B(x_0, n^{-\beta}))$. Portanto para todo $0 \leq i < \tau_{n^{-\beta}}(x, x_0)$ segue que $x \notin T^i(B(x_0, n^{-\alpha}))$ o que implica $x \notin \bigcup_0^{\tau_{n^{-\beta}}(x, x_0)} T^{-i}(B(x, n^{-\alpha}))$. Como $\tau_{n^{-\beta}}(x, x_0) > n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}$ segue que

$$x \notin \bigcup_0^{n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}} T^{-i}(B(x, n^{-\alpha})).$$

Em particular

$$x \notin \bigcup_n^{n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}} T^{-i}(B(x_0, n^{-\beta})) \supset \bigcup_n^{n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}} T^{-i}(B(x_0, i^{-\beta})).$$

Observe então que para x e n como acima, temos $Z_n(x) = Z_{n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}}(x)$.

Relembrando que se n satisfaz: $\tau_{n^{-\beta}}(x, x_0) > n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}$ (*) então $Z_n(x) = Z_{n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}}(x)$, como existem uma infinidade de índices n para o qual vale (*), existem também uma infinidade de índices n para o qual vale $Z_n(x) = Z_{n^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}}(x)$, seja n_i uma seqüência tal que valha essa propriedade, então $Z_{n_i}(x) = Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}}(x) \forall i \in \mathbb{N}$.

Agora, pela definição de $d_\mu(x_0)$, dado $\varepsilon > 0$ (o mesmo anteriormente), existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $-\varepsilon < \frac{\log(\mu(B(x_0, i^{-\beta})))}{\log(i^\alpha)} - d_\mu(x_0) < \varepsilon$ para $i > i_0$. Essa desigualdade pode ser escrita como

$$i^{-\beta(-\varepsilon + d_\mu(x_0))} < \mu(B(x_0, i^{-\beta})) < i^{-\beta(-\varepsilon + d_\mu(x_0))}.$$

Para n_i suficiente grande existem constantes k_1 e k_2 satisfazendo:

$$k_1 n_i^{1 - \beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon)} < E(Z_{n_i}) < k_2 n_i^{1 - \beta(d_\mu(x_0) - \varepsilon)}.$$

Da mesma forma, trocando n_i por $n_i^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}$ temos

$$k_1 n_i^{(1 - \beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon))(\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon'))} < E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}})) < k_2 n_i^{(1 - \beta(d_\mu(x_0) - \varepsilon))(\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon'))},$$

o que nos dá:

$$\frac{1}{k_2 n_i^{(1 - \beta(d_\mu(x_0) - \varepsilon))(\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon'))}} < \frac{1}{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon')}}))} < \frac{1}{k_1 n_i^{(1 - \beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon))(\beta(d_\mu(x_0) + \varepsilon'))}}.$$

Finalmente ficamos com a seguinte desigualdade:

$$\frac{E(Z_{n_i})}{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})} < \frac{k_2 n_i^{1-\beta(d_\mu(x_0)-\varepsilon)}}{k_2 n_i^{(1-\beta(d_\mu(x_0)-\varepsilon))(\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon'))}} = \frac{k_2}{k_1} n_i^{(1-\beta(d_\mu(x_0)-\varepsilon))-\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')(1-\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon))}.$$

Lembrando que a hipótese sobre $\varepsilon, \varepsilon'$, era $\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon') - \frac{1-\beta(d_\mu(x_0)-\varepsilon)}{1-\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon)} > 0$, ficamos com:

$$\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')(1-\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon)) - (1-\beta(d_\mu(x_0)-\varepsilon)) > 0$$

e portanto:

$$-\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')(1-\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon)) + 1 - \beta(d_\mu(x_0)-\varepsilon) < 0.$$

Assim, $\frac{E(Z_{n_i})}{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Pelo lema (2.1.4), devemos ter:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{Z_{n_i}}{E(Z_{n_i})} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}}}{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})} = 1.$$

Lembrado que a sequência n_i foi escolhida de forma a ter $Z_{n_i}(x) = Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}}(x) \forall i \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{Z_{n_i}}{E(Z_{n_i})} \cdot \frac{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})}{Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}}} = \frac{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})}{E(Z_{n_i})}$$

e conseqüentemente

$$1 = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{Z_{n_i}}{E(Z_{n_i})} \cdot \frac{Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}}}{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})} = \frac{E(Z_{n_i})}{E(Z_{n_i^{\beta(d_\mu(x_0)+\varepsilon')}})} = +\infty,$$

um absurdo. Logo $\bar{R}(x, x_0) > d_\mu(x_0) + \varepsilon'$ apenas num conjunto de medida nula. Como ε' é arbitrário, temos $\bar{R}(x, x_0) \leq d_\mu(x_0)$ em μ -quase todo ponto. Por outro lado, o lema (2.1.6) nos dá $\underline{R}(x, x_0) = \underline{d}_\mu(x_0)$ e portanto $\bar{R}(x, x_0) \leq \underline{R}(x, x_0) = \underline{d}_\mu(x_0)$ provando o teorema. \square

Capítulo 3

Decaimento de correlações para mapas com fibras contratoras

Neste capítulo vamos construir uma medida invariante para mapas que possuem folheação invariante contratora e provar que esses mapas possuem decaimento exponencial de correlações. Seja $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ um intervalo unitário, definindo $\Sigma = I \times I$, podemos folhear o quadrado por folhas verticais, denotaremos a folha de coordenada x por γ_x , ou seja, $\Sigma = \cup_{x \in I} \gamma_x$, onde $\gamma_x = \{(x, y) \mid y \in I\}$. Vamos considerar uma aplicação $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ da forma $F(x, y) = (T(x), G(x, y))$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1.a) Existe um $c \in I$ e $k \geq 0$ tal que, se x_1, x_2 são tais que $c \notin [x_1, x_2]$, então $\forall y \in I$:
$$|G(x_1, y) - G(x_2, y)| \leq k|x_1 - x_2|.$$
- (1.b) $F|_{\gamma}$ é λ -Lipschitz com $\lambda < 1$ (por isso é uniformemente contratora) em cada folha vertical γ : $|G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq \lambda|y_1 - y_2|.$
- (1.c) $T : I \rightarrow I$ é sobrejetiva e monótona por partes, com dois ramos crescentes e C^1 nos intervalos $[-\frac{1}{2}, c)$, $(c, \frac{1}{2}]$ e $T' > 1$ onde for definido. Além disso $\lim_{x \rightarrow c^-} T(x) = \frac{1}{2}$, $T(c) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} T'(x) = \infty.$
- (1.d) $\frac{1}{|T'|}$ possui variação limitada.

Chamaremos o sistema de hipóteses acima de sistema (3), de agora em diante, F , T e G e Σ serão sempre os objetos definidos em (3). No restante desse capítulo nos dedicaremos

a provar que existe uma medida ergódica para a função F tal que (3) possui decaimento de correlações exponencial.

3.1 Medida invariante para o sistema (3)

Nessa seção construiremos uma medida invariante para a aplicação F satisfazendo as propriedades do sistema (3). Para isso, vamos começar com a existência de uma medida em I que é invariante pela aplicação unidimensional T . Sua existência é garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *A função $T : I \rightarrow I$ satisfazendo as condições (1.c) e (1.d) do sistema (3) admite uma única probabilidade invariante μ_x o qual é absolutamente contínua com respeito a medida de lebesgue m . Esta medida é ergódica e física para T . Além disso, $\frac{d\mu_x}{dm}$ possui variação limitada e em particular é limitada. Segue ainda que T possui decaimento de correlações exponencial para observáveis de variação limitada e L^1 . Além do mais, existem constantes $C > 0$ e $\lambda > 0$ dependendo do sistema tal que para cada n e observáveis f e g :*

$$\left| \int g(T^n(x))f(x)dm - \int g(x)d\mu_x \int f(x)dm \right| \leq C \cdot \|g\|_{L^1} \cdot \|f\|_{BV} \cdot e^{-\lambda n}.$$

A demonstração do teorema (3.1.1) não será feita nesse trabalho pois é extremamente laboriosa e pode ser encontrada em [21].

A partir da medida μ_x cuja existência é garantida por (3.1.1), vamos construir uma medida que seja ergódica para a aplicação F . Considere $\pi_x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção em x . Considerando a distância do supremo no conjunto Σ , temos $\text{diâmetro}(\Sigma) = 1$. Repare que F preserva as folhas γ_x ou seja, $F(\gamma_{x_1}) = \gamma_{x_2}$.

Definição 3.1.1. *Dada uma função contínua $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, defina as funções $\psi_- : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi_+ : I \rightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\psi_-(x) = \inf_{(x,y) \in \pi_x^{-1}(x)} \psi(x,y) \quad e \quad \psi_+(x) = \sup_{(x,y) \in \pi_x^{-1}(x)} \psi(x,y).$$

Lema 3.1.1. *Dada qualquer função contínua $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, ambos os limites existem e são iguais:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ P^n)_- d\mu_x \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ P^n)_+ d\mu_x$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x_1 - x_2\| < \delta$ implica $\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| < \varepsilon$. A hipótese (1.a) em (3) nos diz que as folhas γ_x são uniformemente contraídas por F , logo existe um natural n_0 tal que para todo $n > n_0$ e qualquer folha γ_x em Σ , vale

$$\text{diam}(F^n(\gamma_x)) < \delta.$$

Por outro lado,

$$(\psi \circ P^{n+k})_-(x) - (\psi \circ P^n)_-(P^k(x)) = \inf\{\psi|_{F^{n+k}(\gamma_x)}\} - \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\}.$$

Notando que $F(\gamma_x) \subset \gamma_{f(x)}$ para qualquer $x \in I$ isso implica $F^n(\gamma_x) \subset \gamma_{f^n(x)}$ para qualquer $x \in I$, assim obtemos

$$\sup\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\} \geq \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\}.$$

Portanto,

$$\inf\{\psi|_{F^{n+k}(\gamma_x)}\} - \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\} \leq \sup\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\} - \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\}$$

e para $n > n_0$ segue que

$$|\inf\{\psi|_{F^{n+k}(\gamma_x)}\} - \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\}| \leq |\sup\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\} - \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\}| < \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\left| \int (\psi \circ P^{n+k})_-(x) d\mu_x - \int (\psi \circ P^n)_-(P^k(x)) d\mu_x \right| < \varepsilon.$$

Como μ_x é invariante por T , podemos escrever $\int (\psi \circ P^n)_-(P^k(x)) d\mu_x = \int (\psi \circ P^n)_-(x) d\mu_x$, ficando com a seguinte desigualdade:

$\left| \int (\psi \circ P^{n+k})_-(x) d\mu_x - \int (\psi \circ P^n)_-(x) d\mu_x \right| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$, o que implica que a sequência $\int (\psi \circ P^n)_- d\mu_x$ é de Cauchy em \mathbb{R} e portanto convergente.

Um cálculo análogo mostra que $\int (\psi \circ P^n)_+ d\mu_x$ também converge, e mais, a desigualdade $|\sup\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\} - \inf\{\psi|_{F^n(\gamma_{f^k(x)})}\}| < \varepsilon$ nos diz que essas duas sequências possuem o mesmo limite, o que conclui a prova. \square

Lema 3.1.2. *Existe uma única probabilidade μ_F invariante por F definida em Σ tal que*

$$\int \psi d\mu_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ F^n)_+ d\mu_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ F^n)_- d\mu_x.$$

Demonstração. Defina $\Psi : C^0(\Sigma, \mathbb{R})$ por: $\Psi(\psi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ F^n)_+ d\mu_x$.

Segue das propriedades do supremo e do ínfimo e usando a definição 3.2, que se $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^0(\Sigma, \mathbb{R})$, então

$$(\psi_1)_- + (\psi_2)_- \leq (\psi_1 + \psi_2)_- \quad e \quad (\psi_1)_+ + (\psi_2)_+ \geq (\psi_1 + \psi_2)_+.$$

Em particular

$$(\psi_1 \circ F^n)_- + (\psi_2 \circ F^n)_- \leq ((\psi_1 + \psi_2) \circ F^n)_- \quad e \quad (\psi_1 \circ F^n)_+ + (\psi_2 \circ F^n)_+ \geq ((\psi_1 + \psi_2) \circ F^n)_+.$$

Passando o limite, obtemos

$\Psi(\psi_1) + \Psi(\psi_2) \geq \Psi(\psi_1 + \psi_2)$ e $\Psi(\psi_1) + \Psi(\psi_2) \leq \Psi(\psi_1 + \psi_2)$ e concluímos que

$$\Psi(\psi_1) + \Psi(\psi_2) = \Psi(\psi_1 + \psi_2).$$

Pela linearidade da integral, segue que $\Psi(\lambda\psi) = \lambda\Psi(\psi)$. Assim, Ψ é um funcional linear.

Para terminar, note que definindo $\tilde{\psi} = \left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right)$, segue que

$$(\tilde{\psi} \circ F^n)_+ \leq 1 \Rightarrow \int (\tilde{\psi} \circ F^n)_+ d\mu_x \leq \mu_x(I).$$

Passando ao limite, obtemos

$$\Psi\left(\frac{\psi}{\|\psi\|}\right) = \Psi(\tilde{\psi}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\tilde{\psi} \circ F^n)_+ d\mu_T \leq \mu_T(I) \Rightarrow \Psi(\psi) \leq \|\psi\| \mu_x(I).$$

Assim, Ψ é limitado e obviamente positivo, logo, pelo teorema da representação de Riesz, existe uma única medida μ_F em Σ satisfazendo: $\Psi(\psi) = \int \psi d\mu_F$.

Para finalizar, precisamos mostrar que μ_F é invariante por F . Para isso, basta notar que

$$\Psi(\psi \circ F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int (\psi \circ F^{n+1})_+ d\mu_x = \Psi(\psi)$$

e portanto $\int \psi \circ F d\mu_F = \Psi(\psi \circ F) = \Psi(\psi) = \int \psi d\mu_F$. □

Teorema 3.1.2. μ_F é uma medida física e ergódica para F .

Demonstração. Consultar [3] página 185 corolário 2.25. □

3.2 Decaimento de Correlações para o sistema (3)

Seja $f d\mu$ a medida μ_1 tal que $d\mu_1 = f d\mu$, as vezes denotaremos a integral $\int f d\mu$ por $\mu(f)$. Supondo agora que μ seja uma medida em Σ , podemos desintegrar essa medida da seguinte maneira: para cada boleano A , escrevemos

$$\mu(A) = \int_{\gamma \in I} \mu_{\gamma_x}(A \cap \gamma_x) d\mu_x.$$

Onde μ_γ é medida de probabilidade nas folhas γ_x e μ_x medida é medida de probabilidade na direção do eixo x , o qual será medida de probabilidade invariante e absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue. Observe que pelo teorema de Radon-Nikodin, existe uma função $\phi_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu_x = \int \phi_x dm$ onde m é a medida de Lebesgue.

Considere agora, a projeção $\pi_x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ na coordenada x , ou seja, $\pi_x(x, y) = (x, 0)$.

Fixada uma folha γ_x , defina:

$$\mu|_{\gamma_x} = \pi_x^*(\phi_x(\gamma_x)\mu_{\gamma_x}).$$

A definição acima faz sentido, uma vez que ϕ_x é uma função que só depende de x , e μ_{γ_x} é uma medida em Σ suportada apenas na folha γ_x , ou seja $\mu_{\gamma_x}(\gamma_x) = 1$.

Observe que:

$$\begin{aligned} \mu|_{\gamma_x}(I) &= \pi_x^*(\phi_x(\gamma_x)\mu_{\gamma_x})(I) = \int_{\pi_x^{-1}(I)} \phi_x(\gamma_x) d\mu_{\gamma_x} \\ &= \int \phi_x(\gamma_x) d\mu_{\gamma_x} \\ &= \phi_x(\gamma_x) \int d\mu_{\gamma_x} = \phi_x(\gamma_x). \end{aligned}$$

Isso mostra que em geral, $\mu|_{\gamma_x}$ não é uma medida de probabilidade, pois seu valor depende de ϕ_x . Se X é um espaço métrico, denotaremos por $PM(X)$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade em X . Denotaremos por $L(g)$ a melhor constante de Lipschitz da função g , ou seja, $L(g) = \sup_{x, u \in Y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}$ e denotaremos também $\|g\|_{lip} = \|g\|_\infty + L(g)$.

Definição 3.2.1 (A distância de Wasserstein-Kantorovich). *Vamos considerar um espaço métrico limitado Y e vamos considerar a seguinte noção de distância entre medidas: dadas duas medidas de probabilidade μ_1 e μ_2 em Y , defina*

$$W_1(\mu_1, \mu_2) = \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left(\left| \int_Y g d\mu_1 - \int_Y g d\mu_2 \right| \right)$$

onde $1\text{-Lip}(Y)$ é o espaço das funções 1-Lipschitz em X .

Da maneira definida acima, W_1 possui as seguintes propriedades:

Proposição 3.2.1. 1. W_1 é uma distância e se X é separável e completo, então $PM(X)$ munido dessa distância é um espaço métrico separável e completo.

2. Um seqüência é convergente para a métrica W_1 , se e somente se, é convergente na topologia fraca.

Demonstração. Ver [2] proposição 7.1.5. □

Observação 1: Se $a + b = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, então

$$W_1(a\mu_1 + b\mu_2, a\mu_3 + b\mu_4) = aW(\mu_1, \mu_3) + bW(\mu_2, \mu_4).$$

De fato,

$$\begin{aligned} W_1(a\mu_1 + b\mu_2, a\mu_3 + b\mu_4) &= \\ & \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(\left| \int g d(a \cdot \mu_1 + b \cdot \mu_2) - \int g d(a \cdot \mu_3 + b \cdot \mu_4) \right| \right) \\ &= \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(\left| a \cdot \int g d\mu_1 + b \cdot \int g d\mu_2 - a \int g d\mu_3 - b \cdot \int g d\mu_4 \right| \right) \\ &= \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(\left| a \cdot \int g d\mu_1 - a \cdot \int g d\mu_3 + b \int g d\mu_2 - b \cdot \int g d\mu_4 \right| \right) \\ &\leq \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(\left| a \cdot \int g d\mu_1 - a \cdot \int g d\mu_3 \right| + \left| b \int g d\mu_2 - b \cdot \int g d\mu_4 \right| \right) \\ &= \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(a \left| \int g d\mu_1 - \int g d\mu_3 \right| + b \left| \int g d\mu_2 - \int g d\mu_4 \right| \right) \\ &\leq \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(a \left| \int g d\mu_1 - \int g d\mu_3 \right| \right) + \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left(b \left| \int g d\mu_2 - \int g d\mu_4 \right| \right) \\ &= a \cdot W_1(\mu_1, \mu_3) + b \cdot W_1(\mu_2, \mu_4). \end{aligned}$$

Observação 2: Se g é l -Lipschitz e μ_1, μ_2 são medidas de probabilidade então

$$\left| \int_X g d\mu_1 - \int_X g d\mu_2 \right| \leq l \cdot W(\mu_1, \mu_2).$$

De fato, se uma função g é l -Lipschitz, então $\frac{g}{l}$ é 1-Lipschitz, e portanto:

$$\left| \int_X g d\mu_1 - \int_X g d\mu_2 \right| = l \cdot \left| \int_X \frac{g}{l} d\mu_1 - \int_X \frac{g}{l} d\mu_2 \right| \leq l \cdot W_1(\mu_1, \mu_2).$$

Daremos uma panorama geral sobre a distância W_1 e decaimento de correlações. Seja (X, F, μ) um sistema dinâmico num espaço métrico com medidade de probabilidade invariante μ . Definimos o operador de transferência F^* de F por $F^*(A) = \mu(F^{-1}(A))$ onde A é um boleano qualquer.

Proposição 3.2.2. *Seja $g \in lip(X)$ e $f \in L^1(X, \mu)$, $f \geq 0$. Seja μ_1 a medida de probabilidade o qual é absolutamente contínua com respeito a μ e $d\mu_1 = \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}} d\mu$. Então vale*

$$\left| \int g(F^n(x)) f(x) d\mu - \int f(x) d\mu \int g(x) d\mu \right| \leq L(g) \cdot \|f\|_{L^1} \cdot W_1((F^*)^n(\mu_1), \mu).$$

Demonstração. Suponha $g \in 1$ -Lipschitz, como $f(X) \geq 0$, segue que $\|f\|_{L^1} = \int f(x) d\mu$, logo $\int \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}} d\mu = 1$. Assim

$$\begin{aligned} & \left| \int g(F^n(x)) f(x) d\mu - \int f(x) d\mu \int g(x) d\mu \right| = \\ & \|f\|_{L^1} \left| \int g(F^n(x)) \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}} d\mu - \int \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}} d\mu \int g(x) d\mu \right| = \\ & \|f\|_{L^1} \left| \int g(F^n(x)) \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}} d\mu - \int g(x) d\mu \right|. \end{aligned}$$

Usando o fato de: $\int g(F) d\mu_1 = \int g d(F^*(d\mu_1))$, temos:

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L^1} \left| \int g(F^n(x)) \frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}} d\mu - \int g(x) d\mu \right| = \\ & \|f\|_{L^1} \left| \int g(x) d(F^{*n}(d\mu_1)) - \int g(x) d\mu \right| = \\ & \leq \|f\|_{L^1} \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left(\left| \int g d(F^{*n}(d\mu_1)) - \int g d\mu \right| \right) = \\ & \|f\|_{L^1} W_1((F^*)^n(\mu_1), \mu). \end{aligned}$$

Para o caso geral (onde $L(g) \neq 1$), basta aplicar a observação 2 feita anteriormente, obtendo

$$\sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left(\left| \int g d(F^{*n}(d\mu_1)) - \int g d\mu \right| \right) \leq L(g) \cdot W((F^*)^n, \mu).$$

E portanto

$$\left| \int g(F^n(x)) f(x) d\mu - \int f(x) d\mu \int g(x) d\mu \right| \leq L(g) \cdot \|f\|_{L^1} \cdot W((F^*)^n, \mu).$$

□

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.3. *Se para cada $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$ e $g \in Lip(X)$ vale*

$$\left| \int g(F^n(x)) f(x) d\mu - \int f(x) d\mu \int g(x) d\mu \right| \leq C \cdot L(g) \cdot \|f\|_{L^1} \cdot \Phi(n)$$

tomando $d\mu_1 = \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{L^1}}\right) d\mu$ então

$$W_1((F^*)^n(\mu_1), \mu) \leq C \cdot \Phi(n).$$

Demonstração. Considere $g \in 1\text{-Lip}$, dividindo a desigualdade acima por $\|f\|_{L^1}$, temos

$$\frac{C \cdot L(g) \cdot \|f\|_{L^1} \cdot \Phi(n)}{\|f\|_{L^1}} \geq \frac{\left| \int g(F^n(x)) f(x) d\mu - \int f(x) d\mu \int g(x) d\mu \right|}{\|f\|_{L^1}} = \left| \int g(x) d(F^{*n}(d\mu_1)) - \int g(x) d\mu \right|.$$

Sendo $W_1(F^{*n}(\mu_1), \mu) = L(g) \sup_{g \in 1\text{-Lip}(Y)} \left| \int g(x) d(F^{*n}(d\mu_1)) - \int g(x) d\mu \right|$, segue que

$$L(g) \cdot W_1(F^{*n}(\mu_1), \mu) \leq C \cdot L(g) \cdot \Phi(n).$$

E portanto obtemos o resultado. □

Seja $f\mu$ a medida μ_1 tal que $d\mu_1 = f d\mu$. Vamos considerar aplicações que possuem uma folheação invariante, ou seja, aplicações F que enviam uma folha γ_{x_1} em uma folha γ_{x_2} (situação descrita em 3). A medida invariante será desintegrada na forma $\mu(A) = \int_{\gamma \in I} \mu_\gamma(A \cap \gamma) d\mu_x$ em uma família de medidas μ_γ em cada folha estável γ e numa medida absolutamente contínua μ_x na direção instável.

Se μ_1 e μ_2 são duas medidas desintegradas como acima, suas distâncias podem ser estimadas em função de suas direções marginais no eixo x e medidas nas folhas, como nos mostra o próximo teorema.

Proposição 3.2.4. *Sejam μ_1, μ_2 medidas em Σ como acima, tais que para cada boleano A , tenhamos*

- $\mu^1(A) = \int_{\gamma \in I} \mu_\gamma^1(A \cap \gamma) d\mu_x^1.$
- $\mu^2(A) = \int_{\gamma \in I} \mu_\gamma^2(A \cap \gamma) d\mu_x^2.$

com μ_x^i absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue. Além disso, vamos supor que:

1. para quase toda folha vertical γ , tenhamos $W_1(\mu_\gamma^1, \mu_\gamma^2) \leq \varepsilon$.
2. $\sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \left| \int h d\mu_x^1 - \int h d\mu_x^2 \right| \leq \delta$.

Então $W_1(\mu^1, \mu^2) \leq \varepsilon + \delta$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_1, \mu_2) &= \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int \mu^1(g) - \mu^2(g) \right| = \\
& \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^1 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 \right| = \\
& \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^1 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 + \right. \\
& + \left. \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 \right| \leq \\
& \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^1 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 \right| + \\
& + \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 \right| = \\
& \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \left(\int_{\gamma} g d\mu_\gamma^1 - \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 \right) d\mu_x^1 \right| + \\
& + \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 \right|.
\end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que $W_1(\mu_\gamma^1, \mu_\gamma^2) \leq \varepsilon$, segue que:

$$\sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \left(\int_{\gamma} g d\mu_\gamma^1 - \int_{\gamma} g \right) d\mu_\gamma^2 \right| \leq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Assim, ficamos com:

$$W_1(\mu_1, \mu_2) \leq \varepsilon + \sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 \right|.$$

Sendo g uma função Lipchitziana, e X um espaço métrico limitado, segue que g é limitada.

Portanto existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|g\|_\infty \leq c$, sendo μ_γ^i e μ_x^i medidas nas folhas, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 = \\ & \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 + (-c + 1) - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 - (-c + 1) = \\ & \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 + \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} (-c + 1) d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} (-c + 1) d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 = \\ & \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g + (-c + 1) d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g + (-c + 1) d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2. \end{aligned}$$

Mas $\|g + (-c + 1)\| \leq 1$, logo $\left| \int_{\gamma} g + (-c + 1) d\mu_\gamma^2 \right| \leq 1$.

Assim a função $h = \int_{\gamma} g + (-c + 1) d\mu_\gamma^2$ satisfaz $\|h\|_\infty \leq 1$ e temos

$$\sup_{g \in 1-Lip(Y)} \left| \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^1 - \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\mu_\gamma^2 d\mu_x^2 \right| < \delta.$$

O que nos dá:

$$W_1(\mu^1, \mu^2) \leq \varepsilon + \delta.$$

□

Teorema 3.2.1. *Seja $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ uma função borel-mensurável tal que $F(x, y) = (T(x), G(x, y))$.*

Seja μ uma medida invariante para F com uma medida marginal μ_x no eixo x o qual seja invariante para $T : I \rightarrow I$. Vamos supor também que as seguintes condições são válidas:

1. (T, μ_x) satisfaça a desigualdade anterior e $T^{-1}(x)$ é finito para cada $x \in I$.
2. F é contração em cada folha vertical: G é λ -Lipschitz em y com $\lambda < 1$ para cada x .
3. μ é regular o suficiente para que em cada função l -Lipschitz $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_x^*(f\mu)$ possua densidade \bar{f} de variação limitada, com $\text{var}(\bar{f}) \leq Kl$, onde K não depende de f .

Então (F, μ) possui decaimento de correlações exponencial (com respeito as observáveis Lipschitz).

Demonstração. Dados f, g onde $f, g \in L^1$ e de variação limitada, podemos definir a medida $\nu = \int f d\mu$, onde $f \geq 0$ e $\int f d\mu = 1$. Observe que $l \geq 1$, pois $l = \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ o que

implica $l \geq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$.

De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que f se anula em algum ponto $a \in \Sigma$, logo: $l \geq \frac{|f(x)|}{|x - a|}$. Como $a, x \in \Sigma[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, segue que $0 < |x - a| \leq 1$ e então $\frac{1}{|x - a|} > 1$ e portanto $l \geq \frac{|f(x)|}{|x - a|} \geq |f(x)|$. Integrando, obtemos $\int l d\mu \geq \int |f(x)| d\mu \Rightarrow l \geq 1$.

Agora, considerando a função densidade \bar{f} , sabemos que ela possui variação limitada e $\|\bar{f}\|_{BV} \leq kl + 1 \leq (k + 1)l$.

Observe que ν_x pode ser escrito como $\nu_x = \int \bar{f} dm$ onde $\bar{f} = \int f(x, y) d\mu|_{\gamma_x}$, pois:

$$\begin{aligned} \pi_x^*(f\mu)(E) &= \int_{\pi_x^{-1}(E)} f d\mu \\ &= \int_E \int_{\gamma} f d\mu_{\gamma_x} d\mu_x \\ &= \int_I \int_{\gamma} f \phi_x(\gamma_x) d\mu_{\gamma_x} dm = \int_I \bar{f} dm. \end{aligned}$$

Agora, considere o mapa T e uma função $g \in L^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$.

Como $|\int g d(T^{*n}(\nu_x)) - \int g d\mu_x| = |g(T^n(x))\bar{f}(x)dm - \int g(x)d\mu_x|$, pelo teorema (3.1.1) temos:

$$|g(T^n(x))\bar{f}(x)dm - \int g(x)d\mu_x| \leq C \cdot \|\bar{f}\|_{BV} \cdot \|g\|_{L^1} \cdot e^{-\lambda n}.$$

E isso implica portanto que:

$$\sup_{\|h\|_{\infty} \leq 1} \left| \int g d(T^{*n}(\nu_x)) - \int g d\mu_x \right| \leq C \cdot \|\bar{f}\|_{BV} \cdot \|g\|_{L^1} \cdot e^{-\lambda n} < \|g\|_{L^1} \cdot (K + 1)l \cdot e^{-\lambda n}. \quad (3.2)$$

Vamos considerar novamente $\nu^n = F^{*n}\nu$. Como foi dito anteriormente, F envia folhas verticais em folhas verticais, então existe uma família de probabilidades ν_{γ}^n nas folhas verticais satisfazendo:

$$(F^{*n}\nu)(g) = \int_{\gamma \in I} \int_{\gamma} g d\nu_{\gamma}^n d((T^{*n}(\nu_x))). \quad (3.3)$$

Agora vamos considerar o caso em que γ_x possui no máximo n pré-imagens, ou seja, $F^{-1}(\gamma_x) = \gamma_{x_1} \cup \gamma_{x_2} \cup \dots \cup \gamma_{x_k}$.

Sendo μ uma medida invariante para $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$, o operador de Perron-Frobenius nos permite escrever a densidade de uma medida em função da pré-imagem dessas medidas e do Jacobiano

dessa aplicação, pela forma como μ e ν^n se desintegram (3.3), podemos escrever:

$$\phi(x_0)\mu_\gamma = \sum_{i=1}^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} F^*(\mu_{\gamma_i}). \quad (3.4)$$

$$\phi^n(x_0)\nu_\gamma^n = \sum_{i=1}^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{T'(x_i)} F^*(\nu_{\gamma_i}^{n-1}). \quad (3.5)$$

onde $\{x_1, \dots, x_{n(x_0)}\}$ são as pré-imagens de x_0 pela aplicação T , ϕ a densidade de μ_x e ϕ^n a densidade de ν_x^n . Note também que vale $\sum_{i=1}^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{T'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} = 1$.

As equações (3.4) e (3.5) implicam que $\phi^n(x_0) = 0$ se todos os $\phi^{n-1}(x_i)$ também são nulos. Queremos estender de alguma maneira ν_γ^n de forma que ela esteja definida Lebesgue quase todo ponto e também num conjunto onde ϕ^n é nulo mas ϕ positiva. Para isso defina uma extensão $\tilde{\nu}_\gamma^n$ por:

$\tilde{\nu}_{\gamma_x}^0 = m$ (onde m denota na medida de Lebesgue unidimensional na folha) caso ϕ seja nulo e $\tilde{\nu}_\gamma = \nu_\gamma$ caso $\phi \neq 0$. Podemos então definir $\tilde{\nu}^n$ pondo:

$$\tilde{\nu}_\gamma^n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\nu_{\gamma_i}^{n-1}) & \text{se } \phi^n(x_0) > 0 \\ \sum_{i=1}^{n'(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\nu_{\gamma_i}^{n-1}) & \text{se } \phi^n(x_0) = 0 \end{cases}$$

Aqui $n'(x)$ é o número de folhas $\gamma_1, \dots, \gamma_{n'(x)}$ onde $\nu_{\gamma_i}^{n-1}$ está definido.

Considerando a distância de Wasserstein-Kantorovich W_1 , temos:

$$W_1(\nu^n, \mu) \leq \sup_{g \in \text{lip}} |\nu^n(g) - \mu(g)| = \sup_{g \in \text{lip}} \left| \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\nu_x^n - \int_I \int_\gamma g d\mu_\gamma d\mu_x \right|. \quad (3.6)$$

Adicionando e subtraindo $\int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n$, a última expressão é equivalente a:

$$\sup_{g \in \text{lip}} \left| \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\nu_x^n - \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n + \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n - \int_I \int_\gamma g d\mu_\gamma d\mu_x \right|.$$

Portanto (3.6) pode ser escrita como

$$W_1(\nu^n, \mu) \leq \sup_{g \in \text{lip}} \left| \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\nu_x^n - \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n \right| + \left| \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n - \int_I \int_\gamma g d\mu_\gamma d\mu_x \right|. \quad (3.7)$$

Como $\int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\mu_x^n = \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n$, o primeiro somatório de (3.7) pode ser estimado por:

$$\begin{aligned} \left| \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\mu_x - \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\nu_x^\gamma \right| &= \left| \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\mu_x - \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n d\nu_x^n \right| \\ &= \left| \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n \phi^n(x) dm - \int_I \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n \phi(x) dm \right| \\ &\leq \left\| \int_\gamma g d\tilde{\nu}_\gamma^n \right\|_\infty \left| \int_I \phi^n(x) dm - \int_I \phi(x) dm \right|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como a densidade ϕ^0 tem variação limitada onde $\|\phi^0\|_{BV} \leq (K+1)l$, segue que para toda função $h \in L^1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ vale:

$$\left| \int h d(T^{*n}(\nu_x)) - \int h d\mu_x \right| \leq \|h\|_{L^1} \cdot \|\phi^0\| \cdot Ce^{-\lambda n}.$$

Fazendo $h = 1$ e usando a igualdade acima, (3.8) fica

$$\left| \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\mu_x - \int_I \int_\gamma g d\nu_\gamma^n d\nu_x^\gamma \right| \leq (K+1)l \cdot \|g\|_{L^1} \cdot Ce^{-\lambda n}.$$

Agora vamos estimar a segunda integral em (3.7) e mostrar que ele converge exponencialmente. Lembrando que (T, μ_x) é expansora por partes e com um número finito de ramos, como consequência do *spectral gap* para observáveis de variação limitada, existem constantes $C, \lambda > 0$, tal que sendo ϕ de variação limitada, temos $\|\phi^n - \phi\|_\infty \leq C \cdot l \cdot e^{-\lambda n}$ [16]. Segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_I \left(\int_\gamma g d\mu_\gamma - g d\tilde{\nu}_\gamma^n \right) d\mu_x \right| &\leq \int_I \left| \int_\gamma g d\mu_\gamma - g d\tilde{\nu}_\gamma^n \right| d\mu_x \\ &= \int_I \left| \int_\gamma g d\mu_\gamma - g \tilde{\nu}_\gamma^n \right| \phi(\gamma) dm. \end{aligned}$$

Denotando $\mu[g] = \int g d\mu$ e usando (3.4) e (3.5), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma g d\mu_\gamma - g d\tilde{\nu}_\gamma^n \right| &\leq \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g]) \right| \\ &\quad + \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\mu_\gamma)[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right|. \end{aligned}$$

Integrando com relação a μ_x , obtemos

$$\int_I \left| \int_\gamma g d\mu_\gamma - g d\tilde{\nu}_\gamma^n \right| d\mu_x \leq A_1 + A_2 + A_3 \quad (3.9)$$

onde as constantes acima são definidas por:

$$A_1 = \int_{[\phi \leq C \cdot l \cdot e^{-\frac{\lambda n}{3}}]} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g]) \right| d\mu_x.$$

$$A_2 = \int_{[\phi > C \cdot l \cdot e^{-\frac{\lambda n}{3}}]} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g]) \right| d\mu_x.$$

$$A_3 = \int_I \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\mu_{\gamma_i})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right| d\mu_x.$$

Vamos agora, estimar o valor das constantes acima. Para a Constante A_1 , escrevendo $S_- = [\phi \leq C \cdot l \cdot e^{-\frac{\lambda n}{3}}]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{S_-} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g]) \right| d\mu_x \\ &= \int_{S_-} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g]) \right| \phi(x) dm \\ &\leq \int_{S_-} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} \int_{\gamma_i} g dF^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}) - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \int_{\gamma_i} g dF^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}) \right| \phi(x) dm \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{S_-} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} \int_{\gamma_i} dF^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}) + \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \int_{\gamma_i} dF^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}) \right| \phi(x) dm \\ &\leq \|g\|_\infty N \int_{S_-} 2\phi(x) dm \\ &\leq 2\|g\|_\infty N C l \cdot e^{-\frac{\lambda}{3}n}. \end{aligned}$$

Vamos agora, estimar a constante A_2 , escrevendo $S_+ = [\phi > \cdot l \cdot e^{-\frac{\lambda n}{3}}]$, temos:

$$A_2 = \int_{S_+} \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g]) \right| d\mu_x.$$

Para isso, devemos observar que:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] - \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right| = \\ &= \left| \sum_1^{n(x_0)} \left(\frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} - \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \right) F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right| \\ &\leq \|g\|_\infty \sum_1^{n(x_0)} \left| \left(\frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} - \frac{\phi^{n-1}(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \right) \right|. \end{aligned}$$

Podemos estimar cada um dos termos do somatório acima por:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} - \frac{\phi^n(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \right| \\ & \leq \left| \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} \left(\frac{1}{\phi(x_0)} - \frac{1}{\phi^n(x_0)} \right) \right| + \left| \frac{1}{T'(x_i)\phi^n(x_0)} (\phi(x_i) - \phi^{n-1}(x_i)) \right| \\ & = \left| \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} \left(\frac{\phi^n(x_0) - \phi(x_0)}{\phi^n(x_0)\phi(x_0)} \right) \right| + \left| \frac{1}{T'(x_i)\phi^n(x_0)} (\phi(x_i) - \phi^{n-1}(x_i)) \right|. \end{aligned}$$

Como, $\|\phi - \phi^n\|_\infty \leq Cle^{-\lambda n}$ a desigualdade triângular aliada ao fato de que $\phi \geq Cle^{-\frac{\lambda}{3}n}$, podemos escrever

$$\|\phi^n\|_\infty \leq -Cle^{-\lambda n} + Cle^{-\frac{\lambda}{3}n}.$$

Essas estimativas nos dão:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} - \frac{\phi^n(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \right| \\ & \leq \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)\phi(x_0)} \frac{Cle^{-\lambda n}}{-Cle^{-\lambda n} + Cle^{-\frac{\lambda}{3}n}} + \frac{Cle^{\lambda(n-1)}}{T'(x_i) \left(-Cle^{-\lambda n} + Cle^{-\frac{\lambda}{3}n} \right)}. \end{aligned}$$

Fazendo o somatório e lembrando que $T' > 1$, temos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_1^{n(x_0)} \left(\frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} - \frac{\phi^n(x_i)}{\phi^n(x_0)T'(x_i)} \right) \right| \\ & \leq e^{-\frac{2\lambda}{3}n}(N+1). \end{aligned}$$

E finalmente, temos a seguinte estimativa para A_2 :

$$A_2 < \|g\|_\infty e^{-\frac{2\lambda}{3}n}(N+1).$$

A seguir estimaremos A_3 :

$$\begin{aligned} A_3 & = \int_I \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\mu_{\gamma_i})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right| d\mu_x \\ & = \int_I \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\mu_{\gamma_i})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_0)T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right| \phi(x_0) dm(x_0) \\ & = \int_I \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} F^*(\mu_{\gamma_i})[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} F^*(\tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1})[g] \right| dm(x_0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\leq \lambda \int_I \left| \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} \mu_{\gamma_i}[g] - \sum_1^{n(x_0)} \frac{\phi(x_i)}{T'(x_i)} \tilde{\nu}_{\gamma_i}^{n-1}[g] \right| dm(x_0) \quad (3.11)$$

$$= \lambda \int_I |\phi(x_0)\mu_\gamma[g] - \phi(x_0)\tilde{\nu}_\gamma^{n-1}[g]| dm(x_0). \quad (3.12)$$

□

Onde (3.10) \Rightarrow (3.11) foi obtida usando o fato de F ser contração nas folhas e (3.11) \Rightarrow (3.12) foi obtida com as igualdades (3.4) e (3.5). Observando que (3.12) pode ser escrito como

$$\lambda \int_I \left| \int_{\gamma} g d\mu_{\gamma} - g d\tilde{\nu}_{\gamma}^{n-1} \right| d\mu_x,$$

podemos escrever (3.9) como

$$\int_I \left| \int_{\gamma} g d\mu_{\gamma} - g d\tilde{\nu}_{\gamma}^n \right| d\mu_x \leq 2\|g\|_{\infty} N C l e^{-\frac{\lambda}{3}n} + \|g\|_{\infty} e^{-\frac{2\lambda}{3}n} (N+1) + \lambda \int_I \left| \int_{\gamma} g d\mu_{\gamma} - g d\tilde{\nu}_{\gamma}^{n-1} \right| d\mu_x.$$

Considere duas sequências a_n e b_n , satisfazendo as seguintes propriedades: (i) $a_n < \lambda a_{n-1} + b_n$ e (ii) b_n converge exponencialmente. Então a_n converge exponencialmente.

Usando esse fato, podemos tomar $a_n = \int_I \left| \int_{\gamma} g d\mu_{\gamma} - g d\tilde{\nu}_{\gamma}^n \right| d\mu_x$ e $b_n = 2\|g\|_{\infty} N C l e^{-\frac{\lambda}{3}n} + \|g\|_{\infty} e^{-\frac{2\lambda}{3}n} (N+1)$, e pela observação acima:

$$\int_I \left| \int_{\gamma} g d\mu_{\gamma} - g d\tilde{\nu}_{\gamma}^n \right| d\mu_x \leq K e^{-nK_2}.$$

E por (3.6) finalmente, temos:

$$W_1(\nu^n, \mu) < (K+1) \cdot l \cdot C e^{-\lambda n} + \|g\|_{\infty} N C l \cdot e^{-\frac{\lambda}{3}n} + \|g\|_{\infty} e^{-\frac{2\lambda}{3}n} (N+1) + K e^{-nK_2}.$$

Aplicando a proposição (3.2.2), temos os resultado.

Capítulo 4

Medida física para fluxos com mapas de Poincaré que são fibras contratoras

Vamos considerar um fluxo X^t em \mathbb{R}^3 que possui uma seção de Poincaré no quadrado $\Sigma = I \times I$ da forma $F(x, y) = (T(x), G(x, y))$ e que satisfaz as propriedades do sistema (3), ou seja, satisfazendo

(1.a) Existe um $c \in I$ e $k \geq 0$ tal que, se x_1, x_2 são tais que $c \notin [x_1, x_2]$, então $\forall y \in I$:
 $|G(x_1, y) - G(x_2, y)| \leq k|x_1 - x_2|$.

(1.b) $F|_\gamma$ é λ -Lipschitz com $\lambda < 1$ (por isso é uniformemente contratora) em cada folha vertical γ : $|G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq \lambda|y_1 - y_2|$.

(1.c) $T : I \rightarrow I$ é sobrejetiva e monótona por partes, com dois ramos crescentes e C^1 nos intervalos $[-\frac{1}{2}, c)$, $(c, \frac{1}{2}]$ e $T' > 1$ onde for definido. Além disso $\lim_{x \rightarrow c^-} T(x) = \frac{1}{2}$, $T(c) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} T'(x) = \infty$.

(1.d) $\frac{1}{|T'|}$ possui variação limitada.

O objetivo desse capítulo é construir uma medida invariante μ_X para o fluxo X^t com as propriedades acima. Vamos lembrar que o mapa de Poincaré definido por esse fluxo possui as mesmas propriedades do mapa estudado no capítulo 3, logo pelo lema (3.1.2) existe uma medida invariante μ_F para o mapa bidimensional F . Além disso, o teorema (3.1.2) nos permite concluir que μ_F é física e ergódica para F .

4.1 Suspensão para o mapa de Poincaré

Observando a situação descrita pelo sistema (3), vemos que o fluxo X^t é recorrente para a seção Σ , logo dado $x_0 \in \Sigma$, podemos olhar para o menor tempo $t_0 \in (0, +\infty)$ para o qual $X^{t_0}(x_0) \in \Sigma$, supondo que exista um subconjunto mensurável $\Gamma \subset \Sigma$ para o qual esse tempo de retorno em Γ é infinito, podemos definir uma função $\tau : \Sigma \rightarrow (0, +\infty]$ chamada função tempo de retorno. Vamos supor que $\inf \tau > 0$, observe que $\tau|_{\Gamma} = +\infty$

Através da função tempo de retorno, podemos definir uma relação de equivalência em $\Sigma \times [0, +\infty)$ por: $(x, s) \sim (\tilde{x}, \tilde{s})$ se, e somente se, existem:

$$(x, s) = (x_0, s_0), (x_1, s_1), \dots, (x_{N-1}, s_{N-1}), (x_N, s_N) = (\tilde{x}, \tilde{s})$$

em $\Sigma \times (0, +\infty)$, tal que para todo $1 \leq i \leq N$ apenas uma das condições abaixo acontece:

$$x_i = F(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad s_i = s_{i-1} - \tau(x_{i-1})$$

ou

$$x_{i-1} = F(x_i) \quad \text{e} \quad s_{i-1} = s_i - \tau(x_i).$$

Denotaremos essa classe de equivalência por $V = \Sigma \times [0, +\infty) / \sim$ e consideraremos a projeção canônica $\pi : \Sigma \times (0, +\infty) \rightarrow V$.

Definição 4.1.1. *A suspensão de F com teto τ é o semi-fluxo $(X_\tau^t)_{t \geq 0}$ definido em V por: $X_\tau^t(\pi(x, s)) = \pi(x, s + t)$ para todo $(x, s) \in \Sigma \times (0, +\infty)$ e $t > 0$.*

Seja μ_F a medida em Σ dada pelo lema (3.1.2), e considere a medida de Lebesgue dt em $[0, +\infty)$. O produto $\mu_F \times dt$ é uma medida infinita em $\Sigma \times (0, +\infty)$. Suponha que o tempo de retorno τ seja integrável com respeito a medida μ_F , ou seja

$$\mu_F(\tau) = \int \tau d\mu_F < +\infty. \quad (4.1)$$

Vamos introduzir uma medida de probabilidade $\bar{\mu}_X$ em V por:

$$\int \varphi d\bar{\mu}_X = \frac{1}{\mu_F(\tau)} \int \int_0^{\tau(x)} \varphi(\pi(x, t)) dt d\mu_F(x) \quad (4.2)$$

para cada função mensurável e limitada $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Observe que não existe outra medida μ'_F satisfazendo a relação acima, ou seja, a aplicação $\mu_F \rightarrow \mu_X$ é injetora. De fato, vamos mostrar que para toda função mensurável $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se $\mu_F(\Psi) = \mu'_F(\Psi)$ o que nos dá $\mu_F = \mu'_F$. Dada Ψ , podemos definir uma aplicação $\varphi : \{\{x\} \times [0, \tau(x)), x \in \Sigma\}$, por $\varphi(x, s) = \mu_F(\tau) \cdot \frac{\Psi(x)}{\tau(x)}$. Como $\inf \tau > 0$, φ é limitada e obviamente mensurável. E mais:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_X(\varphi) &= \frac{1}{\mu_F(\tau)} \int \int_0^{\tau(x)} \mu_F(\tau) \cdot \frac{\Psi(x)}{\tau(x)} dt d\mu_F \\ &= \int \int_0^{\tau(x)} \frac{\Psi(x)}{\tau(x)} dt d\mu_F \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$= \int \Psi(x) d\mu_F = \mu_F(\Psi). \quad (4.4)$$

Onde (4.3) \Rightarrow (4.4) segue do fato de $\frac{\Psi(x)}{\tau(x)}$ não depender de t . Repetindo o mesmo argumento para μ'_F , temos: $\bar{\mu}_X(\varphi) = \mu'_F(\Psi)$, o que implica $\mu_F(\Psi) = \mu'_F(\Psi)$ e daí o resultado.

Lema 4.1.1. *A medida $\bar{\mu}_X$ é invariante pelo semi-fluxo $(X_\tau^t)_{t \geq 0}$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\bar{\mu}_X((X_\tau^t)^{-1}(B)) = \bar{\mu}_X(B)$ para todo conjunto mensurável $B \subset V$ e $0 < t < \inf \tau$. Podemos supor também, que B seja da forma $B = \pi(A \times J)$ para algum $A \subset \Sigma$ e J um intervalo limitado em $[0, \inf \tau|_A]$, pois esses conjuntos formam a base para σ -álgebra de V .

Seja B um conjunto como acima, seja $(x, s) \in B$ um ponto em $\Sigma \times [0, +\infty)$, com $0 < s < \tau(x)$. Então $X_\tau^t(x, s) \in B$ se, e somente se, $\pi(x, s + t) = \pi(\tilde{x}, \tilde{s})$ para algum $(\tilde{x}, \tilde{s}) \in A \times J$, ou seja, $(x, s) \in (X_\tau^t)^{-1}(B)$ se, e somente se, existe algum $n \geq 0$ satisfazendo

$$\tilde{x} = F^n(x) \quad \text{e} \quad \tilde{s} = s + t - \tau(x) - \dots - \tau(F^{n-1}(x)).$$

Como $s < \tau(x)$, $t < \inf \tau$ e $\tilde{s} \geq 0$, a igualdade acima nos mostra que não se pode ter $n \geq 2$, logo há somente duas possibilidades (ambas excludentes)

- $\tilde{x} = x$ e $\tilde{s} = s + t$ (que corresponde ao caso $n=0$).
- $\tilde{x} = F(x)$ e $\tilde{s} = s + t - \tau(x)$ (que corresponde ao caso $n = 1$).

No primeiro caso, temos $s + t < \tau(x)$ enquanto que no segundo $s + t \geq \tau(x)$. Isso permite escrever a pré-imagem $(X_\tau^t)^{-1}(B)$ como a união disjunta de dois conjuntos mensuráveis B_1 e

B_2 onde valem as duas propriedades acima, especificamente:

$$B_1 = \pi\{(x, s) : x \in A \text{ e } s \in (J - t) \cap [0, \tau(x)]\} \text{ e}$$

$$B_2 = \pi\{(x, s) : F(x) \in A \text{ e } s \in (J + \tau(x) - t) \cap [0, \tau(x)]\}.$$

Como $t > 0$ e $\sup J < \tau(x)$, temos $(J - t) \cap [0, \tau(x)] = (J - t) \cap [0, +\infty)$ para todo $x \in A$. Então, por definição

$$\bar{\mu}_X(B_1) = \int_A \ell((J - t) \cap [0, \tau(x)]) d\mu_F = \ell((J - t) \cap [0, \tau(x)]) \cdot \mu_F(A).$$

Similarmente, sendo J um intervalo em $[0, \inf \tau|_A)$, segue que $\inf J \geq 0$ e $t < \tau(x)$, logo $(J + \tau(x) - t) \cap [0, \tau(x)] = \tau(x) + (J - t) \cap (-\infty, 0)$, por definição

$$\bar{\mu}_X(B_2) = \int_{F^{-1}(A)} \ell(\tau(x) + (J - t) \cap (-\infty, 0)) d\mu_F = \mu_F(F^{-1}(A)) \cdot \tau(x) + (J - t) \cap (-\infty, 0).$$

Como μ_F é invariante por F , segue que $\mu_F(F^{-1}(A)) = \mu_F(A)$, portanto

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_X((X_\tau^t)^{-1}(B)) &= \bar{\mu}_X(B_1) + \bar{\mu}_X(B_2) \\ &= \ell((J - t) \cap [0, \tau(x)]) \cdot \mu_F(A) + \mu_F(F^{-1}(A)) \cdot \tau(x) + (J - t) \cap (-\infty, 0) \\ &= \mu_F(A) \ell(J - t) \\ &= \mu_F(A) \cdot \ell(J). \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.2. *Seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada, defina $\hat{\varphi}(x) = \int_0^{\tau(x)} \varphi(\pi(x, t)) dt$.*

Vamos assumir que $x \in \Sigma$ é tal que $\tau(F^j(x))$ e $\hat{\varphi}(F^j(x))$ são finitos para todo $j \geq 0$, e também que as seguintes condições sejam válidas:

$$\text{a) } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tau(F^j(x)) = \int \tau d\mu_F,$$

$$\text{b) } \lim_n \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\varphi}(F^j(x)) = \int \hat{\varphi} d\mu_F.$$

$$\text{Então } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\pi(x, s+t)) dt = \int \varphi d\bar{\mu}_X \quad \forall \pi(x, s) \in V.$$

Demonstração. Tome $x \in \Sigma$ satisfzendo as hipóteses (a) e (b) acima. Dado $T > 0$ defina $N = N(T)$ por

$$T_{N-1} \leq T < T_N \text{ onde } T_j = \tau(x) + \dots + \tau(F^j(x)) \text{ para } j \geq 0.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\pi(x, s+t)) dt &= \\ \frac{1}{T} \int_s^{T+s} \varphi(\pi(x, t)) dt &= \\ \frac{1}{T} \int_s^0 \varphi(\pi(x, t)) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T_{N-1}} \varphi(\pi(x, t)) dt + \frac{1}{T} \int_{T_{N-1}}^{T_{N-1}+s} \varphi(\pi(x, t)) dt &= \\ -\frac{1}{T} \int_0^s \varphi(\pi(x, t)) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T_{N-1}} \varphi(\pi(x, t)) dt + \frac{1}{T} \int_{T_{N-1}}^{T_{N-1}+s} \varphi(\pi(x, t)) dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considere o termo $\int_0^{T_{N-1}} \varphi(\pi(x, t)) dt$, podemos reescrevê-lo como

$$\int_0^{T_{N-1}} \varphi(\pi(x, t)) dt = \int_0^{\tau(x)} \varphi(\pi(x, t)) dt + \int_{\tau(x)}^{\tau(x)+\tau(F(x))} \varphi(\pi(x, t)) dt + \dots + \int_{\sum_{j=0}^{N-2} \tau(F^j(x))}^{\sum_{j=0}^{N-1} \tau(F^j(x))} \varphi(\pi(x, t)) dt.$$

Seja G uma função tal que $G(\pi(c, n)) - G(\pi(c, m)) = \int_m^n \varphi(\pi(c, t)) dt$, logo a igualdade acima pode ser escrita como

$$[G(\pi(x, \tau(x))) - G(\pi(x, 0))] + \dots + \left[G(\pi(x, \sum_{i=0}^{N-1} \tau(F^i(x)))) - G(\pi(x, \sum_{i=0}^{N-2} \tau(F^i(x)))) \right].$$

Usando a relação de equivalência em V , temos:

$$\begin{aligned} G(\pi(x, \tau(x) + \tau(F(x)))) - G(\pi(x, \tau(x))) &= G(\pi(F^2(x), 0)) - G(\pi(F(x), 0)) \\ &= G(\pi(F(x), \tau(x))) - G(\pi(F(x), 0)) \\ &= \int_0^{\tau(F(x))} \varphi(\pi(F(x), t)) dt. \\ &\vdots \\ G(\pi(x, \sum_{i=0}^{N-1} \tau(F^i(x)))) - G(\pi(x, \sum_{i=0}^{N-2} \tau(F^i(x)))) &= G(\pi(F^N(x), 0)) - G(\pi(F^{N-1}(x), 0)) \\ &= G(\pi(F^{N-1}(x), \tau(F^{N-1}(x)))) - G(\pi(F^{N-1}(x), 0)) \\ &= \int_0^{\tau(F^{N-1}(x))} \varphi(\pi(F^{N-1}(x), t)) dt. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que a igualdade em (3.5) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\pi(x, s+t)) dt = \\ \frac{1}{T} \left[\int_0^s \varphi(\pi(x, t)) dt + \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{\tau(F^j(x))} \varphi(\pi(F^j(x), t)) dt + \int_{T_{N-1}}^{T_{N-1}+s} \varphi(\pi(x, t)) dt \right]. \end{aligned}$$

De maneira exatamente análoga, concluímos que:

$$\int_{T_{N-1}}^{T_{N-1}+s} \varphi(\pi(x, t)) dt = \int_0^{s+T-T_{N-1}} \varphi(\pi(F^n(x), t)) dt.$$

E finalmente, a igualdade (4.5), fica sendo expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\pi(x, s+t)) dt = \\ \frac{1}{T} \left[\int_0^s \varphi(\pi(x, t)) dt + \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{\tau(F^j(x))} \varphi(\pi(F^j(x), t)) dt + \int_0^{s+T-T_{N-1}} \varphi(\pi(F^n(x), t)) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando a definição de $\widehat{\varphi}$, podemos reescrever o primeiro termo a direita de (4.6), como

$$\frac{N}{T} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\varphi}(F^j(x)).$$

Fixando ε , a hipótese (a) e a definição de N fornecem

$$N \cdot \left(\int \tau d\mu_F - \varepsilon \right) \leq T_{N-1} \leq T \leq T_N \leq (N+1) \cdot \left(\int \tau d\mu_F + \varepsilon \right) \quad (4.7)$$

para N suficientemente grande. Observe que N vai ao infinito quando T vai ao infinito (desde que $\tau(F^j(x)) < +\infty \quad \forall j$).

Observando que para N suficientemente grande vale $\frac{N+1}{N} < 1 + \frac{\varepsilon}{\mu_F(\tau)}$, dividindo (4.7) por N , obtemos

$$\mu_F(\tau) - \varepsilon \leq \frac{T}{N} \leq \frac{N+1}{N} \mu_F(\tau) + \varepsilon < \mu_F(\tau) + 2\varepsilon.$$

Isso mostra que $\frac{T}{N} \rightarrow \mu_F(\tau)$ quando $T \rightarrow +\infty$ e conseqüentemente a hipótese (b) nos dá

$$\frac{N}{T} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{\varphi}(F^j(x)) \rightarrow \int \varphi d\bar{\mu}_X.$$

Para terminar a prova do teorema, devemos verificar que os demais termos em (4.5) convergem a zero quando $T \rightarrow +\infty$. Para isso, observe que como φ é uma função limitada, podemos escrever

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^{s+T-T_{N-1}} \varphi(\pi(F^n(x), t)) dt \right| \leq \frac{T+s-T_{N-1}}{T} \|\varphi\|_\infty.$$

Usando a definição de N e as desigualdades em (4.7), obtemos

$$T - T_{N-1} \leq T_N - T_{N-1} \leq (N+1) \left(\int \tau d\mu_F + \varepsilon \right) - N \left(\int \tau d\mu_F - \varepsilon \right).$$

Dividindo por T , ficamos com

$$\frac{T - T_{N-1}}{T} \leq \frac{\mu_F(\tau) + (2N+1)\varepsilon}{N(\mu_F(\tau) - \varepsilon)} < \frac{4\varepsilon}{\int \tau d\mu_F - \varepsilon}.$$

Isso mostra que

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^{s+T-T_{N-1}} \varphi(\pi(F^n(x), t)) dt \right| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

Para finalizar, sendo s fixo, $\int_0^s \varphi(\pi(x, s)) dt$ também é um número fixo, e portanto

$$\frac{1}{T} \int_0^s \varphi(\pi(x, s)) dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0,$$

o que conclui a prova do teorema. \square

Corolário 4.1.1. *Se μ_F é ergódica então $\bar{\mu}_X$ é ergódica.*

Demonstração. Seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada e integrável. Considere $\hat{\varphi}(x) = \int_0^{\tau(x)} \varphi(\pi(x, t)) dt$. Como já foi dito anteriormente, $\hat{\varphi}$ é μ_F -integrável, isso significa que $\hat{\varphi}(x) < +\infty$ μ_F -quase todo ponto e consequentemente $\hat{\varphi}(F^j(x)) < +\infty$ para todo $j \geq 0$ em μ_F -quase todo ponto. Logo o teorema (1.0.3) implica que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\varphi}(F^j(x)) = \tilde{\varphi}(x)$ existe μ_F -quase todo ponto. Por sua vez o item (3) da proposição (1.0.2) nos dá $\tilde{\varphi}(x) = \int \hat{\varphi} d\mu_F$, e portanto a hipótese (b) do lema (4.1) vale μ_F -quase todo ponto. Por outro lado, pelas mesmas razões $\tau(F^j(x)) < +\infty$ para todo $j \geq 0$ e da mesma forma concluímos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tau(F^j(x)) = \int \tau d\mu_F$, ou seja, a hipótese (a) do lema vale μ_F -quase todo ponto. Aplicando lema (4.1), obtemos

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\pi(x, s+t)) dt = \int \varphi d\bar{\mu}_X \quad (4.8)$$

para todo ponto $z \in B = \pi(A \times [0, +\infty))$. Como $\bar{\mu}_X(B) = 1$, o teorema (1.0.2) nos diz que a igualdade (4.8) vale $\bar{\mu}_X$ -quase todo ponto e para o conjunto de funções mensuráveis limitadas e integráveis, como esse conjunto é denso em $L^1(\mu_X)$ a proposição (1.0.4) nos dá o resultado. \square

Corolário 4.1.2. *A medida $\bar{\mu}_X$ é física.*

Demonstração. Ver [3] página 189, seção 2.6. \square

4.2 Medida física para o fluxo (X^t)

Vamos agora estender as conclusões anteriores para o fluxo original (X^t) . Vamos relacionar o fluxo suspensão $(X_\tau^t)_{t \geq 0}$ de F com o tempo de retorno τ de (X^t) em U da seguinte maneira:

$$\Phi : \Sigma \times [0, +\infty) \rightarrow U \text{ por } (x, t) \mapsto X^t(x)$$

e desde que $\Phi(x, \tau(x)) = (R(x), 0) \in \Sigma \times \{0\}$, este mapa define naturalmente um mapa quociente

$$\phi : V \rightarrow U \text{ tal que } \phi \circ X_\tau^t = X^t \circ \phi, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.9)$$

através da identificação $(x, \tau(x)) \sim (R(x), 0)$.

Podemos considerar então a medida $\mu_X = \phi_*(\bar{\mu}_X)$ que é física e ergódica para o fluxo (X^t) (ver demonstração em [3]) página 190.

Capítulo 5

Tempo de Batida: Fluxo e seção

Vamos retornar a situação descrita no início da seção (3.2), ou seja, vamos considerar um fluxo X^t contendo uma seção de Poincaré Σ . Dado um elemento $x \in \Sigma$, vamos considerar o menor tempo positivo $t(x) \in \mathbb{R}$ tal que $X^{t(x)}(x) \in \Sigma$ e vamos considerar a função tempo de retorno $\tau : \Sigma \rightarrow (0, +\infty]$. Como anteriormente, iremos supor $\inf \tau > 0$ e que existe um conjunto mensurável $\Gamma \subset \Sigma$ tal que $\tau|_{\Gamma} = +\infty$.

Considere $\Sigma^* = \Sigma \setminus \Gamma$, dados $x, x_0 \in \mathbb{R}^3$ defina:

$$\tau_r^{X^t}(x, x_0) = \inf\{t \geq 0 : X^t(x) \in B_r(x_0)\}.$$

Se $x, x_0 \in \Sigma$ e colocando $B_r^\Sigma(x_0) = B_r(x_0) \cap \Sigma$, definimos:

$$\tau_r^\Sigma(x, x_0) = \min\{n \in \mathbb{N}^+ : F^n(x) \in B_r^\Sigma(x_0)\}.$$

Este tempo é chamado de hitting time do sistema discreto F .

Lema 5.0.1. *Sobre as hipóteses anteriores, se $\int_\Sigma t(x) d\mu_F < \infty$ então existe $K \geq 0$ e um conjunto $A \subset \Sigma$ contendo medida μ_F total tal que para cada $x_0 \in \Sigma$, $x \in A$ tem-se*

$$d(x, r) \cdot \tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_\Sigma t(x) d\mu_F \leq \tau_r^{X^t}(x, x_0) \leq c(x, x_0) \cdot \tau_r^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_\Sigma t(x) d\mu_F$$

onde $c(x, r), d(x, r) \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow 0$.

Demonstração. Assuma que $x, x_0 \in \Sigma$, $x \neq x_0$ e $r \leq d(x, x_0)$. Observe que para atravessar

$\Sigma \cap B_r(x_0)$ é necessário que o fluxo atravessasse a bola $B_r(x_0)$ primeiro, logo

$$\tau_r^{X^t}(x, x_0) \leq \sum_{i=0}^{\tau_r^\Sigma(x, x_0) - 1} t(F^i(x)).$$

Considere $0 < K < 1$ de forma que o fluxo atinja o disco $\Sigma \cap B_{Kr}(x_0)$ logo depois de atingir a bola $B_r(x_0)$, onde K é uma constante que depende do ângulo com o qual o fluxo atinge a seção transversal, como exemplificado na figura a seguir

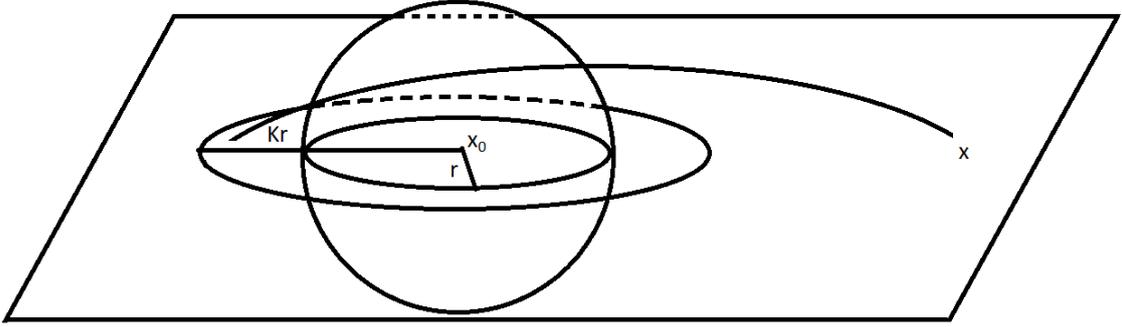


Figura 5.1: fluxo atingindo $B_r(x_0)$ e $B_{Kr}^\Sigma(x_0)$

Considere a função $e(x, r)$ que dá o tempo gasto do ponto onde o fluxo atinge a bola $B_r(x_0)$ até o ponto onde ele atinge a seção transversal. Note que $e(x, r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, logo vale a seguinte desigualdade:

$$\tau_r^{X^t}(x, x_0) \geq \sum_{i=0}^{\tau_{Kr}^\Sigma(x, x_0) - 1} t(F^i(x)) - e(x, r).$$

Considere agora $\frac{1}{\tau_r^{X^t}(x, x_0)} \sum_{i=0}^{\tau_r^\Sigma(x, x_0) - 1} t(F^i(x))$.

A soma acima é uma soma de Birkhoff para o observável $t(x)$ na F-órbita de x . Como μ_F é uma medida ergódica, existe um subconjunto $A \subset \Sigma$ de medida total tal que para todo $x \in A$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_r^{X^t}(x, x_0)} \sum_{i=0}^{\tau_r^\Sigma(x, x_0) - 1} t(F^i(x)) = \int_\Sigma t(x) \mu_F.$$

quando $r \rightarrow 0$ para todo $x \in A$.

Definindo

$$c(x, r) = \left(\frac{1}{\tau_r^{X^t}(x, x_0)} \sum_{i=0}^{\tau_r^\Sigma(x, x_0) - 1} t(F^i(x)) \right) \frac{1}{\int_\Sigma t(x) \mu_F},$$

segue que:

$$\sum_{i=0}^{\tau_r^\Sigma(x, x_0)-1} t(F^i(x)) = c(x, r) \cdot \tau_r^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_{\Sigma} t(x) d\mu_F$$

onde $c(x, r) \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow 0$.

E portanto, obtemos

$$\tau_r^{X^t}(x, x_0) \leq c(x, r) \cdot \tau_r^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_{\Sigma} t(x) d\mu_F.$$

Para concluir, considere a diferença

$$\frac{1}{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)} \sum_{i=0}^{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)-1} t(F^i(x)) - \frac{e(x, r)}{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)}.$$

Observe que

$$\frac{1}{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)} \sum_{i=0}^{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)-1} t(F^i(x)) - \frac{e(x, r)}{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)} \longrightarrow \int_{\Sigma} t(x) d\mu_F.$$

Definindo

$$d(x, r) = \left(\frac{1}{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)} \sum_{i=0}^{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)-1} t(F^i(x)) - \frac{e(x, r)}{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)} \right) \frac{1}{\int_{\Sigma} f(x) d\mu_F},$$

segue que $d(x, r) \rightarrow 1$ e mais, $c(x, r) - d(x, r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$

Temos portanto que

$$d(x, r) \cdot \tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_{\Sigma} t(x) d\mu_F = \sum_{i=0}^{\tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0)-1} t(F^i(x)) - e(x, r).$$

Logo:

$$d(x, r) \cdot \tau_{K_r}^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_{\Sigma} t(x) d\mu_F \leq \tau_r^{X^t}(x, x_0) \leq c(x, r) \cdot \tau_r^\Sigma(x, x_0) \cdot \int_{\Sigma} t(x) d\mu_F,$$

provando o resultado. □

Proposição 5.0.1. *Seja $x \in \mathbb{R}^3$ e $\pi(x)$ a projeção em Σ dada por $\pi(x) = y$ se y é o primeiro ponto da órbita de x que atravessa a seção transversal Σ (se $x \in \Sigma$ então $\pi(x) = x$). Para todos os pontos regulares $x \in \mathbb{R}^3$, vale*

$$\bar{d}_{\mu_X}(x) = \bar{d}_{\mu_F}(\pi(x)) + 1 \quad e \quad \underline{d}_{\mu_X}(x) = \underline{d}_{\mu_F}(\pi(x)) + 1.$$

Demonstração. Considere primeiramente $\bar{\mu}_X = \mu_F \times dt$. Seja $x \in \mathbb{R}^3$, considerando uma bola aberta da forma $B = A \times J$ contendo x onde J é um intervalo de raio r , segue que

$$\bar{\mu}_X(A \times J) = \mu_F(A) \cdot r.$$

E portanto

$$\log(\bar{\mu}_X(A \times J)) = \log(\mu_F(A) \cdot r) = \log(\mu_F(A)) + \log(r)$$

Dividindo por $\log r$ e tomando \liminf segue o resultado. Agora, observe que a medida física μ_X foi definida como $\mu_X = \phi_* \bar{\mu}_X$, (consultar seção 3.4), sendo ϕ localmente bi-lipschitz ϕ preserva a dimensão local da medida, logo

$$\bar{d}_{\mu_X}(x) = \bar{d}_{\mu_F} \pi(x) + 1.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\underline{d}_{\mu_X}(x) = \underline{d}_{\mu_F} \pi(x) + 1.$$

□

Proposição 5.0.2. *Considerando a medida μ_X , existe um conjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ de medida total tal que se $x_0 \in \mathbb{R}^3$ é regular e $x \in B$, as seguintes igualdades ocorrem (desde que os limites existam):*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{X^t}(x, x_0)}{-\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\Sigma(\pi(x), \pi(x_0))}{-\log r}.$$

Demonstração. O Lema (5.0.1) nos diz que, se $x_0, x \in \Sigma$ e $x \in A$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{X^t}(x, x_0)}{-\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\Sigma(\pi(x), \pi(x_0))}{-\log r}$$

Sendo $x \in \mathbb{R}^3$ um ponto regular, o fluxo (X^t) induz um homeomorfismo bi-lipschitz de uma vizinhança de $\pi(x_0) \in \Sigma$ numa vizinhança de x_0 . Logo existe $K \geq 1$ (constante de lipschitz desse homeomorfismo), tal que

$$\tau_{K^{-1}r}^X(x, \pi(x_0)) + Const \leq \tau_r^X(x, x_0) \leq \tau_{Kr}^X(x, \pi(x_0)) + Const$$

onde $Const$ representa o tempo necessário para o fluxo vindo do ponto $\pi(x_0)$ alcançar x_0 . Isto também é verdade para cada $x \in \pi^{-1}(A)$, extraindo \log e tomando os limites o resultado segue. □

Teorema 5.0.1. *Seja (Σ, F, μ_F) um sistema satisfazendo as condições (3), então para μ_F -quase todo ponto vale*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{X^t}(x, x_0)}{-\log r} = d_{\mu_X}(x_0) - 1. \quad (5.1)$$

Demonstração. Pelo teorema (3.2.1), o sistema (Σ, F, μ_F) possui decaimento de correlações exponencial, logo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\Sigma(\pi(x), \pi(x_0))}{-\log r} = d_{\mu_F}(\pi(x_0)).$$

A proposição (5.0.2) implica

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^\Sigma(\pi(x), \pi(x_0))}{-\log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r^{X^t}(x, x_0)}{-\log r}.$$

Pelo teorema (5.0.1) temos

$$d_{\mu_F}(\pi(x_0)) = d_{\mu_X}(x_0) - 1.$$

Pelas igualdades acima, temos o resultado. □

Capítulo 6

O modelo Geométrico de Lorenz

Nessa seção vamos introduzir o chamado sistema geométrico de Lorenz. Em 1963 o meteorologista Edward Lorenz publicou em *Journal of Atmospheric Sciences*, um exemplo de um sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), a = 10, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, r = 28, \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{6.1}$$

como um modelo muito simplificado para convecção térmica num fluido, motivado pela tentativa de entender os fundamentos da previsão do tempo.

As simulações numéricas realizadas por Lorenz para uma vizinhança aberta dos parâmetros escolhidos sugeriam que em quase todos os pontos do espaço de fase tendiam a um "comportamento caótico".

As equações de Lorenz provaram ser extremamente resistentes a uma análise matemática rigorosa e também a um estudo numérico rigoroso. Com o intuito de construir uma classe de fluxos contendo propriedades similares ao sistema de Lorenz e uma estrutura mais fácil de ser estudada, Afraimovich [1], Guckenheimer e Williams [12] independentemente construíram o então chamado *modelo geométrico de Lorenz*. Estes modelos são fluxos em 3 dimensões para os quais podemos provar rigorosamente a existência de atratores caóticos que contêm algum ponto de equilíbrio para o fluxo, o qual é um ponto de acumulação para as soluções regulares.

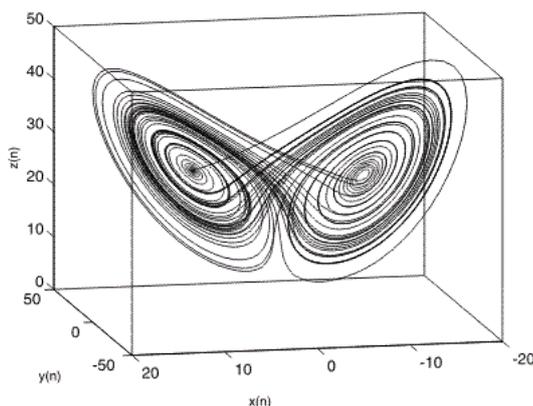


Figura 6.1: Atrator de Lorenz

6.1 Construção do modelo geométrico perto do ponto de equilíbrio

Para construir um modelo para as equações de Lorenz em (6.1), consideramos o campo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x, y, z) = \left(10(y - x), 28x - y - xz, xy - \frac{8}{3}z \right).$$

O ponto $p = (0, 0, 0)$ é fixo para F , e mais, como

$$dF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -z \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix},$$

segue que

$$dF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Observando que os autovalores de $dF(0, 0, 0)$ são $\lambda_1 \approx 11.83$, $\lambda_2 \approx -22.83$ e $\lambda_3 = -\frac{8}{3}$, pelo teorema de Hartman-Grobman, F é topologicamente conjugado a $dF(0, 0, 0)$ numa vizinhança da origem. Logo podemos considerar o sistema $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ e tomar esse campo de vetores definido em $[-1, 1]^3$.

Para o campo de vetores acima, o fluxo linear é dado por

$$Y^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t}).$$

Considere os conjuntos

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x, y, 1) : |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\} \\ \Sigma^- &= \{(x, y, 1) \in \Sigma : x < 0\} \\ \Sigma^+ &= \{(x, y, 1) \in \Sigma : x > 0\} \\ \Sigma^* &= \Sigma^- \cup \Sigma^+ = \Sigma \setminus \Gamma \quad \text{onde } \Gamma = \{(x, y, 1) \in \Sigma : x = 0\}\end{aligned}$$

Note que Σ é uma secção transversal ao fluxo e toda órbita que cruza Σ , segue na direção negativa do eixo z . Considere também $\tilde{\Sigma} = \{(x, y, z) : |x| = 1\} = \tilde{\Sigma}^+ \cup \tilde{\Sigma}^-$ onde $\tilde{\Sigma}^\pm = \{(x, y, z) : x = \pm 1\}$. Para cada $(x_0, y_0, 1) \in \Sigma^*$, o tempo t gasto para que $X^t(x_0, y_0, 1) \in \tilde{\Sigma}$ é dado por:

$$t(x_0) = -\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0| \quad (6.2)$$

e depende somente de $x_0 \in \Sigma^*$.

Dessa forma, usando (6.2) obtemos

$$\begin{aligned}Y^{t(x_0)}(x_0, y_0, 1) &= \left(x_0 e^{\lambda_1 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|\right)}, y_0 e^{\lambda_2 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|\right)}, e^{\lambda_3 \left(-\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|\right)} \right) \\ &= \left(x_0^{\log |x_0|^{-1}}, y_0 e^{\log |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}, e^{\log |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}} \right) \\ &= \left(\frac{x_0}{|x_0|}, y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right) \\ &= \left(\text{sgn}(x_0), y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \right).\end{aligned}$$

Defina $\alpha = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ e $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ e considere a aplicação $L : \Sigma^* \rightarrow \tilde{\Sigma}$ definida por

$$L(x, y, 1) = (\text{sgn}(x), y|x|^\beta, |x|^\alpha). \quad (6.3)$$

, onde $\text{sgn}(x)$ é a função sinal de x . $L(\Sigma^\pm)$ tem a forma de um triângulo sem os vértices $(\pm 1, 0, 0)$ (que possuem o formato de cúspide). Observe também que a desigualdade $0 < \frac{\lambda_1}{2} \leq -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$ é equivalente a $0 < \alpha < 1 < \beta$. Logo a segunda coordenada da imagem de L é comprimida por um fator $|x|^\beta < 1$, portanto $L(\Sigma^\pm)$ é uniformemente comprimida na direção de y . Outra observação importante, é que fixado $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$ o segmento $x_0 \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times 1 \subset \Sigma^*$ é levado em outro segmento horizontal em $L(\Sigma^*)$, a situação é descrita na figura 5.2.

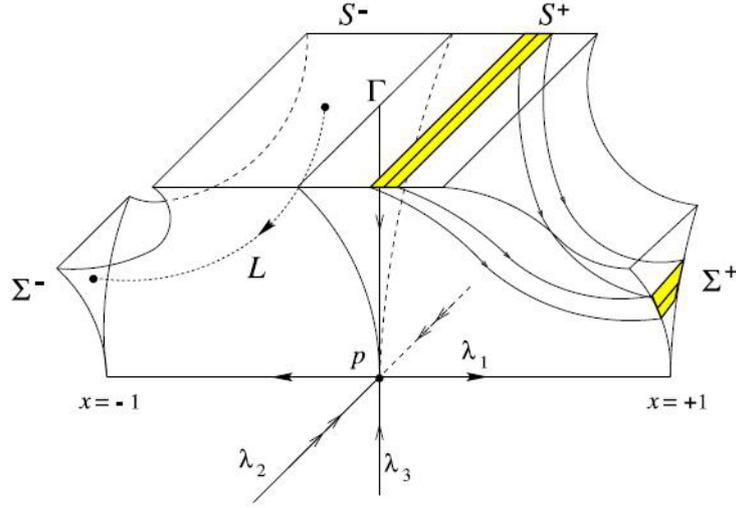


Figura 6.2: Comportamento perto da origem

Para imitar as voltas aleatórias de uma órbita regular em torno da origem e obter a forma de uma borboleta para nosso fluxo, como no caso do fluxo original de Lorenz, procederemos da seguinte maneira: os conjuntos $L(\Sigma^\pm)$ devem retornar a secção Σ através de um fluxo descrito pela composição de uma rotação R_\pm , uma expansão $E_{\pm\theta}$ e uma translação T_\pm .

O eixo da rotação de R_\pm é paralelo ao eixo y , logo a rotação tem a forma:

$$R_\pm\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \pm \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Como o ângulo entre $L(\Sigma^\pm)$ é de $\frac{3\pi}{2}$ rad, segue que

$$R_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A expansão ocorre somente na direção do eixo x e a matriz dessa transformação é dada por

$$E_\pm(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos que a imagem de $L(\Sigma^\pm)$ pela composição $R_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ T_\pm$ esteja contida dentro do quadrado Σ de forma que essa imagem ocupe mais da metade do quadrado. Como $L(\Sigma^\pm)$ é um triângulo, a imagem desse conjunto por $R_\pm \circ E_{\pm\theta} \circ T_\pm$ continua sendo um triângulo, logo basta pedir que a distância do vértice até a base do triângulo seja maior do que $\frac{1}{2}$ e menor do que 1. Como a imagem do triângulo pela rotação R é da forma $(|x|^\alpha, y|x|^\beta, \text{sgn}(x))$, segue que a base do triângulo é da forma $\left(1, y \left(\frac{1}{2}\right)^\beta, \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha\right)$ e o vértice oposto a base é $(1, 0, 0)$. Assim a distância entre o vértice e a base é $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ e portanto após a expansão devemos ter:

$$\theta \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha > \frac{1}{2} \text{ e } \theta \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha < 1.$$

Por fim, a translação T_\pm é escolhida de forma que as imagens $L(\tilde{\Sigma}^+)$ e $L(\tilde{\Sigma}^-)$ sejam disjuntas e que a direção instável começando na origem seja mandada na fronteira de σ .

A composição $T_\pm \circ E_\pm \circ R_\pm$ descreve um campo vetorial na região fora de $[-1, 1]^3$. Para finalizar, definimos o fluxo X^t da seguinte maneira: a órbita de um ponto $(x_0, y_0, 1)$ em Σ pelo X^t é a órbita do mesmo ponto pelo fluxo Y^t , até $t(x_0) = -\frac{1}{\lambda_1} \log |x_0|$, depois a trajetória desse ponto segue pelo fluxo definido pela composição $T_\pm \circ E_\pm \circ R_\pm$ até chegar em Σ e assim por diante. A construção do fluxo X^t é descrita na ilustração abaixo

Vamos denotar por $\mathcal{B} = \{X^t(x), x \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^+\}$ o conjunto onde o fluxo X^t age. O modelo geométrico de Lorenz é o par (\mathcal{B}, X^t) .

O mapa de primeiro retorno de Poincaré $F : \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ é definido como:

$$F(x, y) = \begin{cases} T_+ \circ E_{+\theta} \circ R_+ \circ L(x, y, 1) & \text{para } x > 0 \\ T_- \circ E_{-\theta} \circ R_- \circ L(x, y, 1) & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Os efeitos combinados de $T_\pm \circ R_\pm$ e L implicam que a folheação \mathcal{F}^s de Σ dadas pelas linhas $\Sigma \cap \{x = x_0\}$ são invariantes pelo mapa de retorno, ou seja, se γ é uma folha em \mathcal{F}^s então $F(\gamma)$ é ainda outra folha de \mathcal{F}^s .

Tome $(x, y, 1) \in \Sigma^*$, e suponha $x > 0$. Pela equação (6.3), temos $L(x, y, 1) = (1, |y|x^\beta, x^\alpha)$. Como $R_+(L(x, y, 1)) = (x^\alpha, yx^\beta, 1)$ e $E_{+\theta}(R_+(L(x, y, 1))) = (\theta x^\alpha, yx^\beta, 1)$ e aplicando a translação T_+ , finalmente obtemos:

$$T_+(E_{+\theta}(R_+(L(x, y, 1)))) = (-\theta x^\alpha + b_0, yx^\beta, 1),$$

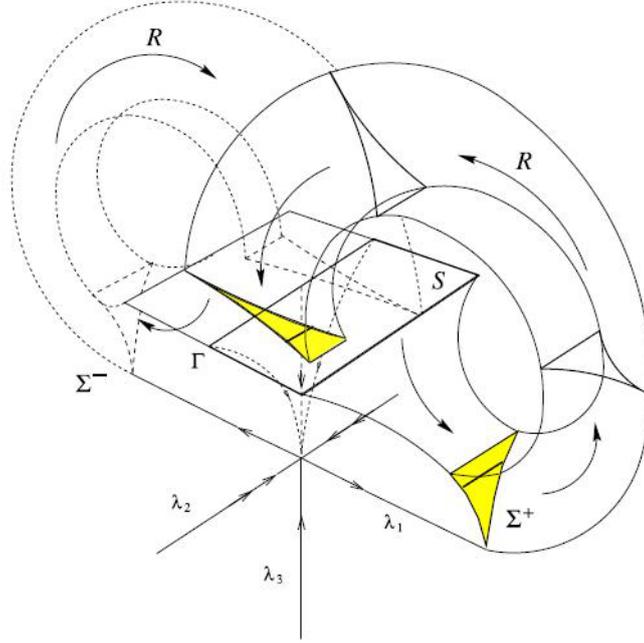


Figura 6.3: Comportamento perto da origem

onde b_0 é uma constante escolhida da forma já especificada anteriormente. Tomando $x < 0$ e procedendo de forma exatamente análoga, obtemos:

$$T_-(E_{-\theta}(R_-(L(x, y, 1)))) = (\theta(-x)^\alpha + b_1, y(-x)^\beta, 1).$$

Vemos então que o mapa F é da forma

$$F(x, y) = (T(x), G(x, y)), \quad (6.5)$$

onde $T : I \setminus \{0\} \rightarrow I$ e $G : I \setminus \{0\} \times I \rightarrow I$ são dados por:

$$T(x) = \begin{cases} -\theta x^\alpha + b_0 & , x > 0 \\ \theta(-x)^\alpha + b_1 & , x < 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

$$G(x, y) = \begin{cases} y(x)^\beta & , x > 0 \\ y(-x)^\beta & , x < 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Com base nas equações (6.5), (6.6) e (6.7), a expressão para a diferencial de F derivadas quando $x < 0$ e $x > 0$ são dadas por:

$$dF(x, y) = \begin{pmatrix} -\theta\alpha x^{\alpha-1} & 0 \\ \beta y x^{\beta-1} & x^\beta \end{pmatrix} \quad x > 0 \quad (6.8)$$

$$dF(x, y) = \begin{pmatrix} -\theta\alpha x^{\alpha-1} & 0 \\ -\beta y x^{\beta-1} & x^\beta \end{pmatrix} \quad x < 0. \quad (6.9)$$

6.1.1 Propriedades do mapa G

Observe que o mapa G é suave por partes, e mais, as equações (6.8) e (6.9) nos permitem deduzir as seguinte propriedades

- a) $\left| \frac{\partial}{\partial y} G(x, y) \right| = |x|^\beta \leq \left| \frac{1}{2} \right|^\beta < \frac{1}{2} < \lambda.$
- b) $\left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) \right| \leq \beta |y| |x|^{\beta-1} \leq \beta \left(\frac{1}{2} \right)^{\beta-1} < +\infty,$ (pois $\beta - 1 > 0$ e $|x| \leq \frac{1}{2}$)

O item a) implica que F é uniformemente contratora nas folhas γ , ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que se $\gamma \in \mathcal{F}^s$ e $x, y \in \gamma$, então $\text{dist}(F^n(x) - F^n(y)) \leq \lambda^n \cdot C \cdot \text{dist}(x, y).$

6.1.2 Propriedades do mapa unidimensional T

Agora, vamos esboçar algumas propriedades da função T, lembremos que θ foi escolhido de forma a termos $\theta \cdot \alpha \cdot 2^{1-\alpha} > 1.$

- Da maneira que o fluxo foi construído, $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} T(x) = \frac{1}{2}.$
- T é C^2 em $I \setminus \{0\}$, e mais $\left| T'(\frac{1}{2}) \right| = \theta \cdot \alpha \left| \frac{1}{2} \right|^{\alpha-1} = \theta \cdot \alpha \cdot 2^{1-\alpha} > 1.$ Além disso, se $\frac{1}{2} > x > 0$ segue que $2 < \frac{1}{x} \Rightarrow 2^{\alpha-1} < \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ portanto $\theta \cdot \alpha \cdot 2^{\alpha-1} < \frac{\theta\alpha}{x^{\alpha-1}},$ ou seja, $T'(x) > 1.$
- Os limites laterais de $T'(x)$ em $x = 0$ são $+\infty.$

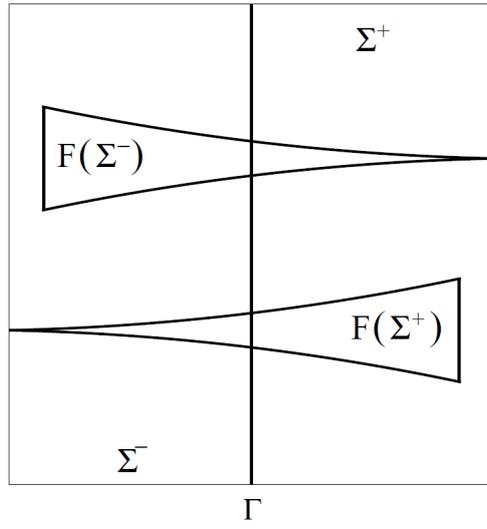


Figura 6.4: $F(\Sigma^*)$

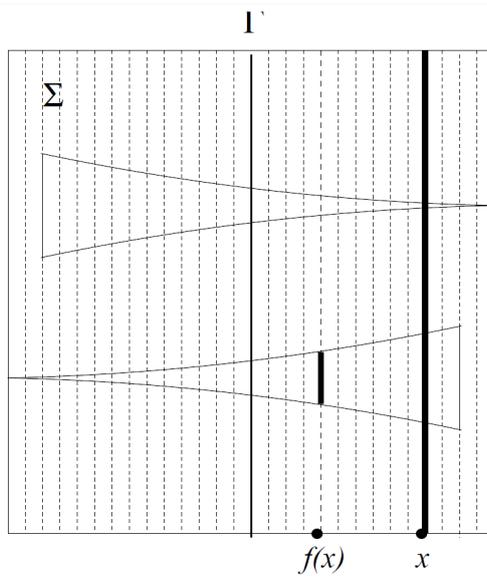


Figura 6.5: Projeção em I

Lema 6.1.1. *Seja X^t um C^2 fluxo geométrico de Lorenz como o descrito pelo sistema (3) e T o mapa unidimensional associado a X^t . Então $\frac{1}{T'}$ possui variação limitada.*

Demonstração. Escrevendo $I_+ = [0, \frac{1}{2}]$ e $I_- = [-\frac{1}{2}, 0]$, segue que $T'|_{I_-}$ e $T'|_{I_+}$ são monótonas, logo $\frac{1}{T'|_{I_{\pm}}}$ também são funções monótonas. Agora, como $|T'(x)| > 1$ segue que $\frac{1}{|T'(x)|} < 1$, e portanto limitada, assim $T'|_{I_-}$ e $T'|_{I_+}$ são monótonas e limitadas e portanto possuem variação limitada e concluímos que $\frac{1}{T'}$ possui variação limitada. \square

Resumindo tudo o que vimos até agora, o fluxo geométrico de Lorenz (X^t) induz um mapa de Poincaré na seção transversal Σ com as mesmas propriedades descritas pelo sistema (3) descrito no início do capítulo 3. Dessa forma, pelo teorema (3.1.1) existe uma medida μ_T invariante pela aplicação T que é física e ergódica e que possui decaimento de correlações exponencial com relação as observáveis de variação limitada e em L^1 . Através do lema (3.1.2) e do teorema (3.1.2) podemos concluir a existência de uma medida física e ergódica para o mapa de Poincaré $F(x, y) = (T(x), G(x, y))$ induzido pelo fluxo geométrico de Lorenz. Temos ainda a existência de uma medida μ_X física e ergódica para o fluxo geométrico de Lorenz que é construída na seção (3.4). Por fim temos a seguinte propriedade para o tempo de retorno:

Proposição 6.1.1. *A função tempo de retorno $\tau : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

$$\int_{\Sigma^*} \tau(x) d\mu_F < +\infty.$$

Demonstração. Considere a função $t(x)$ (dada pela equação (6.2)) que dá o tempo gasto para que a órbita de um ponto $x \in \Sigma$ encontre pela primeira vez a seção Σ^+ . Obviamente temos $\tau(x) > t(x)$. Pela construção do fluxo X^t , o tempo gasto para que a órbita de um ponto $X^{t(x)}(x) \in \Sigma^+$ chegue a Σ é "razoavelmente uniforme", ou seja, esse tempo não varia muito entre os pontos de Σ^+ o que permite concluir que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$t(x) - C \leq \tau(x) \leq t(x) + C.$$

Integrando as desigualdades acima obtemos

$$\int_{\Sigma^*} t(x) d\mu_F - \int_{\Sigma^*} C d\mu_F \leq \int_{\Sigma^*} \tau(x) d\mu_F \leq \int_{\Sigma^*} t(x) d\mu_F + \int_{\Sigma^*} C d\mu_F.$$

Usando a desintegração da medida μ_F , temos

$$\int_{\Sigma^*} \tau(x) d\mu_F = \int_{I \setminus \{0\}} \int_{\gamma_x} \tau(x) \phi(x) d\mu_{\gamma} dm.$$

Como τ e ϕ só dependem da primeira coordenada, podemos escrever

$$\int_{\Sigma^*} \tau(x) d\mu_F = \int_{I \setminus \{0\}} \tau(x) \phi(x) dm.$$

Sendo ϕ de variação limitada, existe uma constante $K > 0$ satisfazendo

$$\|\phi\| < K$$

E portanto, ficamos com:

$$-K \int_{I \setminus \{0\}} -\frac{1}{\lambda_1} \log(d(\Gamma, x)) dm - C \leq \int_{\Sigma^*} \tau(x) d\mu_F < K \int_{I \setminus \{0\}} -\frac{1}{\lambda_1} \log(d(\Gamma, x)) dm + C$$

Como $\int_{I \setminus \{0\}} -\frac{1}{\lambda_1} \log(d(\Gamma, x)) dm$ existe e é finita, segue que τ é integrável concluindo o teorema. \square

Proposição 6.1.2. *Considere o mapa $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$ induzido pelo fluxo geométrico de Lorenz e a medida física μ_F construída para F satisfazendo as hipóteses da seção 3. A medida μ_F é regular o suficiente de forma que para cada função l -Lipschitz $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, tenhamos $\pi_x^*(f\mu)$ possua densidade \bar{f} com variação limitada, com $\text{var}(\bar{f}) \leq Kl$.*

Demonstração. Ver [8] \square

Através do teorema (3.2.1) concluímos que a medida μ_F possui decaimento de correlações exponencial e conseqüentemente decaimento de correlações superpolinomial, dessa forma podemos aplicar o teorema (2.1.2) para concluir que $R(x, x_0) = d_{\mu_F}(x_0)$ desde que $d_{\mu_F}(x_0)$ exista. A proposição (6.1.1) nos permite concluir o teorema (5.0.1) obtendo assim, uma expressão para a dimensão local da medida μ_X num ponto regular do fluxo descrito pelo modelo geométrico de Lorenz, obtendo assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(x, x_0)}{-\log r} = d\mu_X(x_0) - 1$$

sempre que $d\mu_X(x_0)$ existir.

Podemos fazer um comentário importante com relação a igualdade cima: ela só vale quando $d\mu_X(x_0)$ existe. Sobre algumas hipóteses adicionais podemos garantir a existência da dimensão local. Isso foi feito de maneira bem geral em [20]. Usando esses resultados, Pacífico e Galátolo provaram o seguinte resultado

Proposição 6.1.3. *Se $F(x, y) = (T(x), G(x, y))$ satisfaz as hipóteses do sistema (3) e mais*

- F é injetiva;
- G é C^1 em $J \times I$, onde J é um intervalo de monotonicidade de T ;
- $|\partial G/\partial y| > 0$ sempre que definida, $\sup |\partial G/\partial x| < \infty$ e $\sup |\partial G/\partial y| < 1$;

então a medida física μ_F é exata dimensional e para μ_F -quase todo x vale

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \tau_F(x, B_r(x_0))}{-\log r} = d_{\mu_F}(x_0).$$

Demonstração. Ver [11] □

As hipóteses acima são facilmente verificáveis para o caso do fluxo geométrico de Lorenz descrito nesse capítulo, portanto para μ_X -quase todo ponto temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \tau_r(x, x_0)}{-\log r} = d_{\mu_X}(x_0) - 1.$$

Uma observação muito pertinente que pode ser feita é a seguinte, o que acontece quando consideramos o tempo de batida no caso $\tau(x, x)$? Ou seja, queremos considerar o menor tempo n para o qual $F^n(x)$ retorna a bola $B_r(x)$. Em geral temos a situação contrária à descrita pelo teorema (2.1.1), ou seja, temos o seguinte resultado

Teorema 6.1.1. *Seja T uma aplicação mensurável e μ medida invariante por T , então para μ -quase todo ponto vale*

$$\liminf \frac{\tau_r(x, x)}{-\log r} \leq \underline{d}_\mu(x) \quad e \quad \limsup \frac{\tau_r(x, x)}{-\log r} \leq \bar{d}_\mu(x).$$

Demonstração. [19] □

Em [19], Saussol fornece condições suficientes para que ocorra a igualdade entre R e d_μ , que serão dadas pelo seguinte teorema:

Teorema 6.1.2. *Seja (X, T, μ) um sistema dinâmico preservando medida. Se $h_\mu T > 0$ e se T for Lipschitz (ou Lipschitz por partes com média exponencial de Lipschitz finita) e μ possuindo decaimento de correlações superpolinomial, então*

$$\liminf \frac{\tau_r(x, x)}{-\log r} = \underline{d}_\mu(x) \quad e \quad \limsup \frac{\tau_r(x, x)}{-\log r} = \bar{d}_\mu(x).$$

Pode-se mostrar ainda se o sistema (F, Σ, μ) é o mapa de Poncaré definido fluxo X^t descrito pelo modelo geométrico de Lorenz, então (F, Σ, μ) cumpre as hipóteses do teorema (6.1.2) e por fim, usando o teorema (6.1.3) temos o seguinte resultado:

Teorema 6.1.3. *Para o fluxo geométrico de Lorenz vale μ_X -quase todo ponto*

$$\liminf \frac{\log \tau_r(x, x)}{-\log r} = \underline{d}_{\mu_X}(x) - 1 \quad e \quad \limsup \frac{\log \tau_r(x, x)}{-\log r} = \bar{d}_{\mu_X}(x) - 1.$$

Referências

- [1] Afraimovich B.S., Bykov V.V and Shil'nikov L.P. On the appearance and structure of the Lorenz attractor, Dokl. Acad. Sci. USSR, 234, 336-339, 1977.
- [2] Ambrosio L., Gigli N., Savaré Gradient Flows: in Metric Apaces and in the Space of Probability Measures, Birkhauser, 2005.
- [3] Araújo V. and Pacífico M. J. Three Dimensional Flows, XXV Brazilian Mathematical Colloquium. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [4] Bartle, R. G. The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley, 1995.
- [5] Bonanno, C., Galatolo, S., Isola, I. Recurrence and algorithmic information, Nonlinearity, vol. 17,num. 3,pp 1057-1074, 18,2003.
- [6] Galatolo, S. Dimension and hitting time in rapidly mixing systems, Mathematical Research Letters, vol 14 (2007), no. 5,pp 797, tot. pag 8,2007.
- [7] Galatolo, S. Dimension via waiting time recurrence, Mathematical Research Letters. 12,num. 2-3,pp 377-386,tot.pag 10,2005.
- [8] Galatolo, S. Hitting time in regular sets and logarithm law for rapidly mixing dynamical systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(7):2477–2487, 2010.
- [9] Galatolo, S., Kim, D. H. The dynamical Borel-cantelli lemma and the waiting time problems, *Indagationes Mathematicae*, vol. 18 (2007), no. 3,pp 421,tot.pag 14,tot. autori 2,2007.

- [10] Galatolo, S., Pacifico, M. J, Lorenz Like flows: exponential decay of correlations for the poincaré map, logarithm law, quantitative recurrence, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 30, p.1703-1737,2010.
- [11] Galatolo S., Peterlongo P. Long hitting time, slow decay of correlations and arithmetical properties. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 27(1):185–204, 2010.
- [12] Guckenheimer J., Williams R. F. Structural stability of Lorenz attractors, *Publ. Math. IHES*, 50, 59-72, 1979.
- [13] Heinz Bauer *Probability Theory*
- [14] Hofbauer, F., Keller, G. Ergodic Properties of Invariant Measures for Piecewise Transformations, *Mathematische Zeitschrift*, 180 (1982), 119-140.
- [15] Keller G. Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(3):461–478, 1985.
- [16] Keller G., Liverani C. A spectral Gap for a One-dimensional Lattice of Coupled Piecewise Expanding Interval Maps, *Lecture Notes Phys.* 115-151 (2005).
- [17] Krieger, O., Viana, M. *Teoria ergódica, um curso introdutório*
- [18] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmosph. Sci.*, 20, 130-141, 1963.
- [19] Saussol B., Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 15 (2006), no. 1, 259-267.
- [20] Steinberger T. Local dimension of ergodic measures for two-dimensional Lorenz transformations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 20(3):911–923, 2000.
- [21] Viana M. Stochastic dynamics of deterministic systems, *Brazilian Math. Colloquium*, Publicações do IMPA, 1997.