

Formalismo Termodinâmico e Dimensão de
Repulsores Conformes

por

Sérgio Gonçalves de Sousa

UFRJ

30 de Julho de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Formalismo Termodinâmico e Dimensão de Repulsores Conformes

Sérgio Gonçalves de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-graduação do In-
stituto de Matemática, da Univer-
sidade Federal do Rio de Janeiro,
como parte dos requisitos necessários
à obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Rio de Janeiro

30 Julho de 2013

Formalismo Termodinâmico e Dimensão de Repulsores Conformes

por

Sérgio Gonçalves de Sousa

Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Dissertação de Mestrado submetida, em 30 de Julho de 2013, ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Katrin Grit Gelfert

IM - UFRJ - Orientadora.

Isabel Lugão Rios

IM - UFF.

Nuno Alexandre Martins de Matos Luzia

IM - UFRJ.

Agradecimentos

Aos meus pais, Edvar Soares de Sousa e Leonete Gonçalves Inês, que apesar de todas as dificuldades e da pouca leitura, sempre me apoiaram nessa jornada.

Aos meus colegas de curso, pelas conversas animadoras, pela troca de experiências e pelos incentivos nos momentos difíceis dessa caminhada. Em particular, aos meus colegas Raquel Ribeiro Portela, Daniel Reis, Diego Barros, Renan Assimos e Jennyffer Smith pela ajuda que me deram durante este período da minha vida. Aos meus poucos, porém, importantíssimos amigos, que compreenderam o meu silêncio e a minha ausência necessária para a conclusão desta etapa da minha vida. Em especial, aos meus amigos, William Vieira e Rodrigo de Souza.

À minha orientadora, Katrin Grit Gelfert, através de quem aprendi o sentido e a importância da seriedade, da responsabilidade e, sobretudo, da honestidade intelectual.

Aos professores do programa de pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRJ, em particular à professora Marianty Ionel e ao professor Samuel Senti que, embora não tenham participado, de perto, da execução deste trabalho, contribuíram, e muito, para que eu pudesse concluí-lo.

Aos professores da banca examinadora pela leitura da dissertação e pela disponibilidade.

Aos meus queridos professores de graduação Hamilton Simões da Silva Filho e Rosa García Maria Marquês que me iniciaram na pesquisa.

A Deus. Ao Cnpq.

Resumo

Estudamos a dimensão de Hausdorff de um repulsor de uma aplicação conforme f de classe $C^{1+\epsilon}$ e, em particular, do conjunto de Julia de um polinômio complexo. Investigamos as principais propriedades destes conjuntos, tais como: caracterizações, propriedades topológicas, partição de Markov, propriedade de distorção, dentre outras. Vimos de que forma a dinâmica simbólica pode ser usada para modelar o sistema dinâmico de um repulsor conforme. Mostramos, seguindo as idéias de Bowen e Ruelle, usando o Formalismo Termodinâmico, que a dimensão de Hausdorff, neste caso, é dado pela raiz da equação de Bowen-Ruelle $P(-t \log |f'|) = 0$.

Palavras-Chave: sistemas dinâmicos, dimensão de Hausdorff, conjunto de Julia, repulsores conforme, partição de Markov, pressão topológica, Formalismo Termodinâmico.

Abstract

We study the Hausdorff dimension of a repeller for a conformal map f of class $C^{1+\epsilon}$ and, in particular, of a Julia set of a complex polynomial. We analyzed some important properties of such sets such as: characterizations, topological properties, Markov partitions, distortion properties, among others. We investigate how symbolic dynamics can be used to model the dynamical system for a conformal repeller. We proved, following ideas of Bowen and Ruelle using Thermodynamical Formalism, that the Hausdorff dimension in this case is given by Bowen-Ruelle's formula $P(-t \log |f'|) = 0$.

Key words: dynamical systems, Hausdorff dimension, Julia set, conformal repellers, Markov partition, topological Pressure, Thermodynamical Formalism.

Sumário

1	Medida e Dimensão de Hausdorff	4
1.1	Medida de Hausdorff	4
1.2	Dimensão de Hausdorff	9
1.3	Exemplos	13
2	O Conjunto de Julia de um Polinômio Complexo	15
2.1	Considerações Gerais	15
2.2	O Conjunto de Julia	17
3	Repulsores Conformes	32
3.1	Definição e Propriedades Gerais	32
3.2	Transformações que expandem distâncias	35
4	O Formalismo Termodinâmico	40
4.1	Partições de Markov	40
4.2	Dinâmica Simbólica	42
4.3	Pressão Topológica	51
4.4	Medida de Gibbs	58
4.5	A Equação de Bowen-Ruelle	60

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar o Formalismo Termodinâmico e sua relação com a Teoria da Dimensão. Como principal resultado, iremos determinar a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Julia de um polinômio complexo, usando técnicas do Formalismo Termodinâmico e alguns resultados sobre Dinâmica Simbólica. Sabendo-se que o Conjunto de Julia pode ser visto tal qual uma classe particular de objetos matemáticos mais gerais, conhecidos como repulsores conformes, iremos nos basear no trabalho de Ruelle em [11] para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1. *Se (J, V, f) é um repulsor conforme com $f : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $C^{1+\epsilon}$ e topologicamente misturadora, J compacto, $J \subset V$ e V aberto, então a dimensão de Hausdorff de J é dada pela solução da equação de Bowen-Ruelle $P(-t \log |f'|) = 0$.*

Atualmente, a Teoria da Dimensão para repulsores conformes poderia ser considerada completamente entendida. Por exemplo, as monografias [8], [1] ou [10] apresentam uma coleção dos principais resultados desta área. Neste caso particular, o termo *conforme* significa assumir que a derivada da aplicação é um múltiplo de uma isometria, em cada ponto. Enquanto o termo *repulsor* significa afirmar que o módulo da derivada da aplicação (ou de um iterado) é maior que um, em cada ponto. Estas propriedades permitiram a Bowen [2], em 1979, (no caso particular dos Quase-círculos) e, em seguida, a Ruelle [11] (na questão da generalização completa) desenvolver uma teoria bastante sólida para a dimensão de repulsores conformes.

Por outro lado, no que se refere aos repulsores de aplicações não-conformes, o estudo da Teoria da Dimensão tem revelado muitos novos fatos, e por apresentar um alto nível de complexidade, ainda falta-lhe uma teoria geral satisfatória. Nessa direção, existem extensões de resultados do caso conforme para o não-conforme, como pode ser visto em trabalhos de Pesin [8], Barreira [1] e Falconer [5].

No entanto, todas as equações conhecidas usadas para calcular ou estimar a dimensão de Hausdorff, tanto na situação conforme quanto na não-conforme, são variações apropriadas de uma equação introduzida por Bowen em [2], envolvendo *pressão topológica*, que é o conceito mais fundamental do Formalismo Termodinâmico. Isso também ocorre quando temos um conjunto invariante, ao invés de um repulsor, de uma transformação não-expansora, como pode ser verificado em [10] e [14].

No Capítulo 1, apresentaremos alguns resultados importantes sobre medida e dimensão de Hausdorff, necessários para a compreensão deste trabalho. Nele, também faremos uma estimativa sobre a dimensão de Hausdorff do Conjunto de Cantor clássico.

No Capítulo 2, trataremos do Conjunto de Julia de um polinômio complexo, bem como veremos as duas formas clássicas de caracterização de conjuntos de Julia: usando famílias normais e pontos periódicos repulsores. Abordaremos, paralelamente, alguns resultados relevantes sobre suas propriedades topológicas, assim como alguns exemplos clássicos de conjuntos de Julia. Aqui, optamos por trabalhar apenas com polinômios por razões puramente técnicas. Entretanto, a mesma teoria pode ser estendida para funções racionais complexas, bastando fazer as devidas

modificações. Note que o Teorema 1 se aplica para repulsores de transformações conformes gerais. Neste trabalho, em contra partida, enfocaremos o estudo das funções polinomiais complexas, sob o pretexto de discutir, com mais detalhes, as propriedades dos conjuntos de Julia das mesmas.

No Capítulo 3, introduziremos, de uma maneira bem geral, o conceito de repulsor conforme e de transformações que expandem distâncias. Apresentaremos os resultados mais relevantes sobre os mesmos, com o objetivo de provar uma importante propriedade sobre os repulsores conformes de classe $C^{1+\epsilon}$, conhecida como distorção limitada.

A primeira parte do Capítulo 4 é dedicada à partição de Markov e à dinâmica simbólica para repulsores conformes, com o intuito de preparar as ferramentas necessárias para a aplicação de certas técnicas do Formalismo Termodinâmico. Nessa parte, também serão provadas mais duas novas propriedades de distorção, que juntamente com as idéias do capítulo anterior, nos permitirão verificar resultados essenciais sobre a geometria dos elementos da partição de Markov. Esses resultados serão utilizados na segunda parte deste capítulo.

Por fim, na segunda parte do Capítulo 4, usaremos as ferramentas do Formalismo Termodinâmico e as técnicas desenvolvidas, nos capítulos precedentes, a fim de mostrar que a s -medida de Hausdorff de J de um repulsor conforme (J, V, f) , sob certas condições, é equivalente a uma medida de Gibbs associada a um determinado potencial, concluindo assim o objetivo do nosso trabalho.

Capítulo 1

Medida e Dimensão de Hausdorff

Neste capítulo, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados relevantes sobre medida e dimensão de Hausdorff que serão úteis posteriormente.

Seguimos as exposições em [3], [8] e [9].

1.1 Medida de Hausdorff

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ e $U \neq \emptyset$. O *diâmetro de U* será representado por $|U|$ e é definido como $|U| = \sup \{|x - y|; x, y \in U\}$.

Se $E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ e $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada $i \in \mathbb{N}$, dizemos que $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de E .

Definição: Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e s um número real positivo. Dado $\delta > 0$, definimos

$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, U_i \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$. O limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \mathcal{H}^s(F) \quad (1.1)$$

é chamado de s -medida de Hausdorff de F .

Note que o limite acima existe, pois a definição garante que $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ cresce quando δ decresce, logo $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ é monotóna em relação à δ .

Pode-se mostrar que a *s-medida de Hausdorff* é uma *medida exterior* no \mathbb{R}^n , ou seja, com s e n fixos e denotando por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das partes de \mathbb{R}^n , a função $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ satisfaz as propriedades:

1. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$;
2. $A \subset B \implies \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$;
3. $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$, para toda sequência de conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$.

Para qualquer sequência disjunta de borelianos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ tem-se $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$, ou seja, \mathcal{H}^s é uma medida sobre a σ -álgebra de Borel.

Para provar esta afirmação, vamos primeiro mostrar que \mathcal{H}^s é uma *medida exterior métrica* em \mathbb{R}^n , ou seja, $\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$, sempre que $d(E, F) = \inf \{d(x, y); x \in E, y \in F\} > 0$ com $E, F \subset \mathbb{R}^n$.

De fato, sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $d(A, B) > 0$. Da propriedade 3. da medida exterior temos $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Agora vamos obter a desigualdade inversa. Seja $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ -cobertura de $A \cup B$ com $\delta < d(A, B)/4$. Com esse δ , se $K_i \cap A \neq \emptyset$ e $K_j \cap B \neq \emptyset$ então $K_i \cap K_j = \emptyset$, e com isso podemos definir os conjuntos $\mathcal{A} = \{i; K_i \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{B} = \{i; K_i \cap B \neq \emptyset\}$. Logo, $\{K_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ e $\{K_i\}_{i \in \mathcal{B}}$ são δ -coberturas de A e B respectivamente. Assim, $\sum_{i=1}^{\infty} |K_i|^s \geq \sum_{i \in \mathcal{A}} |K_i|^s + \sum_{i \in \mathcal{B}} |K_i|^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$. Como $\{K_i\}$ foi tomado arbitrariamente segue que $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$, donde obtemos $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ fazendo $\delta \rightarrow 0$. Portanto, as duas desigualdades acima nos dão $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$.

Para concluir a prova da afirmação anterior precisaremos do Teorema abaixo, cuja demonstração envolve basicamente o Critério de Caratheodory e pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.1.1. *Se μ é uma medida exterior métrica sobre um espaço métrico (X, d) então qualquer conjunto de Borel de X é μ -mensurável.*

Assim, a prova de que \mathcal{H}^s é uma medida sobre os borelianos de \mathbb{R}^n é uma consequência direta do Teorema 1.1.1 visto que \mathcal{H}^s é uma medida exterior métrica sobre \mathbb{R}^n .

Vejam algumas propriedades importantes e úteis da s -medida de Hausdorff.

Proposição 1.1.2. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ e $\lambda F = \{\lambda x; x \in F\}$, ou seja, o conjunto F é ampliado por um fator λ . Então $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$.*

Demonstração: Seja $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ -cobertura de F . Então para cada i temos $|\lambda U_i| = \sup_{x,y \in U_i} |\lambda x - \lambda y| = \lambda \sup_{x,y \in U_i} |x - y| = \lambda |U_i|$. Assim, $\{\lambda U_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma $\lambda \delta$ -cobertura de λF . Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda \delta}^s(\lambda F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |K_i|^s, K_i \text{ é uma } \lambda \delta \text{-cobertura de } \lambda F \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como a desigualdade em (1.2) vale para qualquer δ -cobertura de F segue que $\lambda^{-s} \mathcal{H}_{\lambda \delta}^s(\lambda F)$ é uma cota inferior para $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, U_i \text{ é uma } \delta \text{-cobertura de } F \right\}$. Desse modo temos $\lambda^{-s} \mathcal{H}_{\lambda \delta}^s(\lambda F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$, ou seja, $\mathcal{H}_{\lambda \delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \quad (1.3)$$

Trocando F por λF e λ por $1/\lambda$, e repetindo os mesmos argumentos, teremos a desigualdade inversa, ou seja,

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \geq \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \quad (1.4)$$

De (1.3) e (1.4) temos $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$. ■

Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é *Hölder contínua* se existem constantes $c > 0$ e $\alpha > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in F. \quad (1.5)$$

Proposição 1.1.3. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ α -Hölder contínua. Então $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$.*

Demonstração: Seja $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ uma δ -cobertura de F . Sendo f Hölder contínua, para cada i , temos $|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$. Assim, $\{f(F \cap U_i)\}_{i=1}^\infty$ é uma $c\delta^\alpha$ -cobertura de $f(F)$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(F)) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |K_i|^{s/\alpha}, K_i \text{ é uma } c\delta^\alpha \text{ - cobertura de } f(F) \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq \sum_{i=1}^\infty (c|U_i|^\alpha)^{s/\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^\infty c^{s/\alpha} |U_i|^s = c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Como a desigualdade em (1.6) vale para qualquer δ -cobertura de F segue que

$c^{-s/\alpha} \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(F))$ é uma cota inferior de $\left\{ \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s, U_i \text{ é uma } \delta \text{ - cobertura de } F \right\}$.

Desse modo temos $c^{-s/\alpha} \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(F)) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$, ou seja, $\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F)$.

Como $\alpha > 0$, quando $\delta \rightarrow 0$ tem-se $c\delta^\alpha \rightarrow 0$. Logo, $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$. ■

Corolário 1.1.4. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação lipshitziana. Então*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demonstração: Basta aplicar o Teorema anterior com $\alpha = 1$. ■

Corolário 1.1.5. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se f é uma isometria então $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$.*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema anterior com $\alpha = 1$ e $c = 1$. ■

Proposição 1.1.6. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. A aplicação $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ é não crescente. Além disso, se $r < s < t$ e $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ então $\mathcal{H}^t(F) = 0$ e $\mathcal{H}^r(F) = \infty$.*

Demonstração: Sejam $r < s < t$ e $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ -cobertura de F . Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta}^t(F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t, U_i \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s. \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, U_i \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{s-r} |U_i|^r \leq \delta^{s-r} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^r. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como as desigualdades em (1.7) e (1.8) valem para toda δ -cobertura de F segue que $\delta^{s-t} \mathcal{H}_{\delta}^t(F)$ é uma cota inferior de $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, U_i \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$ e $\delta^{r-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ é uma cota inferior de $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^r, U_i \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\}$ respectivamente. Desse modo temos $\delta^{s-t} \mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ e $\delta^{r-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^r(F)$, ou seja, $\mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ e $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) \leq \delta^{s-r} \mathcal{H}_{\delta}^r(F)$ respectivamente.

Agora, como $t - s > 0$, $s - r > 0$ e $\delta < 1$ por hipótese concluímos que $\delta^{t-s} < 1$ e que $\delta^{s-r} < 1$. Com isso, $\mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ e $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^r(F)$, ou seja, $\mathcal{H}_{\delta}^t(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta}^r(F)$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos $\mathcal{H}^t(F) \leq \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^r(F)$.

Além disso, se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ então

$$\mathcal{H}^t(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \mathcal{H}^s(F) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^r(F) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{r-s} \mathcal{H}^s(F) = \infty.$$

Portanto, $\mathcal{H}^t(F) = 0$ e $\mathcal{H}^r(F) = \infty$. ■

1.2 Dimensão de Hausdorff

Se fizermos o gráfico de $s \mapsto \mathcal{H}^s(F)$, a Proposição 1.1.6 nos diz que existe um único valor crítico s em que $\mathcal{H}^s(F)$ dá um salto de ∞ para 0. Este comportamento nos permite definir a *dimensão de Hausdorff* da seguinte maneira:

Definição: Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. A dimensão de Hausdorff de F é:

$$\dim_H(F) = \inf \{s; \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s; \mathcal{H}^s(F) = \infty\}. \quad (1.9)$$

Segue, diretamente da definição (1.9), que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 < s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{se } s > \dim_H(F). \end{cases} \quad (1.10)$$

Note que, se $\dim_H(F) = s$, nada podemos afirmar a respeito de $\mathcal{H}^s(F)$. Esta por sua vez pode ser *zero* ou *infinita* ou pode satisfazer $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Um conjunto de Borel $F \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim_H(F) = s$ e $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ é chamado de *s - conjunto*.

Vejamos algumas propriedades importantes da dimensão de Hausdorff que serão úteis mais na frente.

Proposição 1.2.1. *Se $E \subset F$ então $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.*

Demonstração: Se $E \subset F$, pelo Teorema 1.1.6., temos $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para cada s . Suponha, por absurdo, que $\dim_H(F) < \dim_H(E)$. Tome um s tal que $\dim_H(F) < s < \dim_H(E)$. Daí, $\infty = \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F) = 0$, que nos leva a uma contradição. Portanto, $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$. ■

Proposição 1.2.2. *Se F_1, F_2, \dots é uma sequência enumerável de conjuntos então*

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \}.$$

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{N}$ temos $F_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Pela Proposição 1.2.1, $\dim_H(F_j) \leq \dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right)$ é uma cota superior para $\{ \dim_H(F_j) \}$. Logo,

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \geq \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \}. \quad (1.11)$$

Se $\sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \} = \infty$, da desigualdade (1.11) temos $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \infty = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \}$.

Se $\sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \} = s < \infty$, dado $\epsilon > 0$, $\mathcal{H}^{s+\epsilon} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s+\epsilon}(F_i) = 0$ que implica em $\mathcal{H}^{s+\epsilon} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = 0$. Assim, $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq s + \epsilon$. Como ϵ foi arbitrário, concluímos que

$$s \geq \dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right). \quad (1.12)$$

Portanto, de (1.11) e (1.12) obtemos $\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \}$. ■

Proposição 1.2.3. *Se F é um conjunto enumerável então $\dim_H(F) = 0$.*

Demonstração: Como F é enumerável, podemos escrever $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ onde $x_i \in F$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, para qualquer $\delta < 1$, $\left\{ B(x_i, \frac{\delta^i}{2}) \right\}_{i=1}^{\infty}$ é uma

δ -cobertura de F . Daí, $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\delta^i|^s = \frac{\delta}{1-\delta}$ para todo $s > 0$. Fazendo $\delta \rightarrow 0$ obtemos $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s > 0$. Portanto, $\dim_H(F) = 0$. ■

Proposição 1.2.4. *Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então $\dim_H(F) = n$.*

Demonstração: Sabemos que se B é uma bola não degenerada do \mathbb{R}^n então $0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty$ e $\dim_H(B) = n$.

Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então existe uma bola B tal que $B \subset F \subset \mathbb{R}^n$. Pela Proposição 1.2.1 segue que $n = \dim_H(B) \leq \dim_H(F)$. Por outro lado, como F é um aberto de \mathbb{R}^n existe uma família enumerável de bolas $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. É fácil ver que $\dim_H(B_i) = n$ para cada i . Pelo Teorema 1.2.2, $\dim_H(F) \leq n$. Portanto, $\dim_H(F) = n$. ■

Proposição 1.2.5. *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Hölder contínua. Então $\dim_H(f(F)) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_H(F)$.*

Demonstração: Seja $s > \dim_H(F)$. Como f é Hölder contínua, pela Proposição 1.1.3, $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0$. Com isso, $\dim_H(f(F)) \leq \frac{s}{\alpha}$ para todo $s > \dim_H(F)$. Portanto, $\dim_H(f(F)) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \dim_H(F)$. ■

Corolário 1.2.6. *Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação Lipschitziana então $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$.*

Demonstração: Basta aplicar a Proposição anterior com $\alpha = 1$. ■

Uma função $f : F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *bi-Lipschitz* se existem constantes reais c_1 e c_2 com $0 < c_1 < c_2$ tais que $c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$ para todo $x, y \in F$.

Corolário 1.2.7. *Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação bi-Lipschitz então $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in F$ tais que $f(x) = f(y)$. Como f é bi-Lipschitz, $c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| = 0$ e com isso $x = y$. Logo, f é injetora.

Considere a função $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$. f^{-1} é Lipschitziana. De fato, para $x, y \in F$ tem-se $|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| = |x - y| \leq 1/c_1|f(x) - f(y)|$.

Pelo Corolário 1.2.6, $\dim_H(f(F)) = \dim_H(f^{-1}(f(F))) \leq \dim_H(f(F))$. Por outro lado, como f é Lipschitz, $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$. Dessas duas desigualdades concluímos que $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$. ■

O Corolário 1.2.7 acima nos diz que se dois conjuntos possuem dimensão de Hausdorff diferentes então não pode existir uma função bi-Lipschitz entre eles.

Em geral, a dimensão de Hausdorff de um conjunto nos dá pouco informação sobre propriedades topológicas desse conjunto. Entretanto, qualquer conjunto com dimensão de Hausdorff menor que 1 é tão esparsos que é totalmente desconexo, isto é, quaisquer dois de seus pontos nunca pertencem a mesma componente conexa.

Proposição 1.2.8. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Se $\dim_H(F) < 1$ então F é totalmente desconexo.*

Demonstração: Sejam $x, y \in F$ com $x \neq y$. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ definida por $f(z) = |z - x|$. Claramente f é Lipschitz. Pelo Corolário 1.2.6, $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F) < 1$. Como $f(F) \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{H}^1(f(F)) = 0$ segue que $f(F)$ tem complementar denso em \mathbb{R} .

Seja r tal que $r \notin f(F)$ e $f(x) < r < f(y)$. Daí, $F = \{z \in F, |z - x| < r\} \cup \{z \in F, |z - x| > r\}$, ou seja, F está contido em dois conjuntos abertos conexos com x em um conjunto e y em outro conjunto. Logo, x e y pertencem a diferentes componentes conexas de F . Portanto, F é totalmente desconexo. ■

1.3 Exemplos

Vejamos algumas técnicas para calcular a dimensão de Hausdorff de alguns conjuntos no \mathbb{R}^n . Seguimos as ideias em Capítulo 2 em [9].

Exemplo 1.3.1. $\dim_H[0, 1] = 1$.

Seja $A = [0, 1]$ o intervalo unitário em \mathbb{R} . Vamos mostrar que $\dim_H A \leq 1$ e $\dim_H A \geq 1$ para obter o resultado desejado.

Seja $\epsilon > 0$ e escolha um inteiro positivo n tal que $1/n \leq \epsilon$. Considere os intervalos abertos $(\frac{i}{3n}, \frac{i+1}{3n})$ para $i = 0, \dots, 3n - 1$. Esses intervalos cobrem todos os pontos de A exceto os extremos $i/3n$. Aumentando o comprimento dos intervalos de modo a incluir os extremos, obtemos os intervalos $U_i = (\frac{i-1}{3n}, \frac{i+2}{3n})$, cada U_i tem comprimento $1/n \leq \epsilon$, e daí $\mathcal{U} = \{U_i\}$ é uma ϵ -cobertura de A que possui $3n$ elementos. Com isso temos $\sum_i |U_i| = 3n \cdot \frac{1}{n} = 3$ donde concluímos que $\mathcal{H}_\epsilon^1(A) \leq 3$, ou seja, que $\mathcal{H}^1(A) < \infty$. Portanto $\dim_H A \leq 1$.

Seja $\alpha < 1$. Queremos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $\sum_i |U_i|^\alpha > 1$ para toda ϵ -cobertura \mathcal{U} de $A = [0, 1]$. Então, para tal \mathcal{U} temos

$$\sum_i |U_i|^\alpha = \sum_i |U_i| |U_i|^{\alpha-1} \geq \epsilon^{\alpha-1} \sum_i |U_i|.$$

Escrevendo $a_i = \inf U_i$ e $b_i = \sup U_i$ temos $U_i \subset (a_i, b_i)$ com $|U_i| = b_i - a_i$. Pela compacidade de $[0, 1]$, podemos encontrar i_1, \dots, i_n tal que $a_{i_1} = 0$ e $b_{i_n} = 1$ e

$a_{i_{k+1}} < b_{i_k}$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_i |U_i| &= \sum_i (b_i - a_i) \geq \sum_{k=1}^n (b_{i_k} - a_{i_k}) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_{i_k} - a_{i_k}) + b_{i_n} - a_{i_n} \\
 &> \sum_{k=1}^{n-1} (a_{i_{k+1}} - a_{i_k}) + b_{i_n} - a_{i_n} \\
 &= b_{i_n} - a_{i_1} = 1,
 \end{aligned}$$

e com isso, $\sum_i |U_i|^\alpha \geq \epsilon^{\alpha-1}$. Como $\alpha < 1$ temos $\epsilon^{\alpha-1} > 1$ para ϵ suficientemente pequeno. Segue daí que, $\mathcal{H}_\epsilon^\alpha(A) \geq 1$ para algum $\epsilon > 0$, ou seja, $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$ para $\alpha < 1$. Portanto $\dim_H A \geq \alpha$. Como $\alpha < 1$ é arbitrário, segue que $\dim_H A \geq 1$.

Capítulo 2

O Conjunto de Julia de um Polinômio Complexo

Neste capítulo, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados relevantes sobre o Conjunto de Julia de um polinômio complexo e suas propriedades topológicas.

2.1 Considerações Gerais

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio de grau $n \geq 2$ com coeficientes complexos, ou seja, $f(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, para $i = 0, \dots, n$.

Como de costume, escreveremos f^k para representar a k -ésima composição de f , ou seja,

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-vezes}}$$

e $f^k(w)$ para representar o k -ésimo iterado de w , ou seja,

$$f^k(w) = f(f(\dots(f(w)))) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-vezes}}(w).$$

Quando $f(w) = w$, dizemos que w é um *ponto fixo* de f . Quando existir um inteiro $p \geq 1$ tal que $f^p(w) = w$, dizemos que w é um *ponto periódico* de f . O menor número inteiro $p > 0$ tal que $f^p(w) = w$ é chamado de *período* de w .

A sequência $w = f^0(w), f(w), f^2(w), \dots, f^{p-1}(w)$ é chamado de *p -órbita* de w .

Definição: Seja w um ponto periódico de f , de período p , com $(f^p)'(w) = \lambda$.

Dizemos que:

1. w é *superatrator* se $\lambda = 0$;
2. w é *atrator* se $|\lambda| < 1$;
3. w é *repulsor* se $|\lambda| > 1$;
4. w é *indiferente* se $|\lambda| = 1$;
5. w é *parabólico* se w é *indiferente* e λ é uma raiz da unidade.

Para estabelecer as propriedades básicas do conjunto de Julia de um polinômio complexo, temos que fazer uso da teoria das funções analíticas complexas, mais especificamente, sobre o estudo das famílias normais de funções analíticas e do Teorema de Montel [6].

Definição: Sejam U aberto, $U \subset \mathbb{C}$ e $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma família de funções complexas analíticas. Dizemos que $\{g_k\}$ é uma *família normal* sobre U se toda sequência de funções de $\{g_k\}$ tem uma subsequência que converge uniformemente sobre cada conjunto compacto de U , ou para uma função analítica limitada ou para ∞ .

Note que, pelo padrão da teoria de variáveis complexas, isso significa que, sobre cada componente conexa de U , a subsequência converge ou para uma função analítica limitada ou para ∞ . No primeiro caso, a subsequência das derivadas deve convergir para a função limite.

Definição: Sejam U aberto, $U \subset \mathbb{C}$ e $g_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma família de funções complexas analíticas. Dizemos que $\{g_k\}$ é uma *família normal num ponto w de U* se existe algum subconjunto aberto V de U contendo w tal que $\{g_k\}$ é uma família normal em V .

Observe que a definição acima é equivalente a existir uma vizinhança V de w na qual toda sequência de $\{g_k\}$ tem um subsequência que converge uniformemente em cada compacto de V para uma função analítica limitada ou para ∞ .

O Teorema a seguir é de fundamental importância na teoria dos conjuntos de Julia e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [6] e [4].

Teorema 2.1.1. (Teorema de Montel)

Seja $\{g_k\}$ uma família de funções complexas analíticas sobre um aberto $U \subset \mathbb{C}$. Se $\{g_k\}$ não é uma família normal, então para todo $w \in \mathbb{C}$, com no máximo uma exceção, temos $g_k(z) = w$ para algum $z \in U$ e algum k .

2.2 O Conjunto de Julia

Vamos começar, analisando os iterados de uma função polinomial complexa, de grau $n \geq 2$, do tipo $f(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i = 0, \dots, n$.

Definição: Seja f uma função polinomial complexa de grau $n \geq 2$. Definimos o

conjunto:

$$J_0 = J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{a família } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ não é normal em } z\}. \quad (2.1)$$

O complementar de $J_0(f)$ em \mathbb{C} é o conjunto $F_0(f)$ definido por

$$F_0 = F_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{existe um aberto } V \text{ contendo } z \text{ e } \{f^k\} \text{ é normal em } V\}. \quad (2.2)$$

Note que $F_0(f)$ é *aberto*, pois é união de conjuntos abertos.

Proposição 2.2.1. $J_0(f)$ é *compacto*.

Demonstração: $J_0(f)$ é fechado, pois seu complementar $F_0(f)$ é aberto. Como f é um polinômio de grau $n \geq 2$, podemos achar um r tal que $|f(z)| \geq 2|z|$, se $|z| \geq r$. Daí, $|f^k(z)| > 2^k r$, se $|z| > r$. Assim, $f^k(z) \rightarrow \infty$ uniformemente no aberto $V = \{z, |z| > r\}$. Logo, $\{f^k\}$ é normal em V . Com isso, $V \subset F_0(f)$. Desse modo, $J_0(f)$ é limitado e portanto, um conjunto compacto. ■

Proposição 2.2.2. $J_0(f)$ é *não-vazio*.

Demonstração: Suponha que $J_0(f) = \emptyset$. Então, para cada $r > 0$ a família $\{f^k\}$ é normal no disco aberto $B_r(0)$ com centro na origem e raio r . Como f é uma função polinomial, podemos tomar r suficientemente grande para garantir que em $B_r(0)$ há um ponto z tal que $|f^k(z)| \rightarrow \infty$. Além do mais, resolvendo a equação $f(w) = w$ e tomando $R = |w|$, então para $r > R$, existe $w \in B_r(0)$ tal que $f^k(w) = w$. Portanto é impossível que qualquer subsequência de $\{f^k\}$ convirja uniformemente para uma função analítica limitada ou para o infinito em qualquer subconjunto compacto de $B_r(0)$ que contenha os pontos z e w , o que contradiz a normalidade de $\{f^k\}$. ■

Proposição 2.2.3. $J_0(f)$ é completamente invariante, isto é, $J_0(f) = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$.

Demonstração: Vamos mostrar equivalentemente que $F_0(f) = f(F_0) = f^{-1}(F_0)$. Sejam $z \in F_0(f)$ e V uma vizinhança aberta de w com $\{f^k\}$ normal em V . Como f é contínua, $f^{-1}(V)$ é aberto. Seja $\{f^{k_i}\}$ uma subsequência de $\{f^k\}$. Daí, $\{f^{k_i+1}\}$ tem uma subsequência $\{f^{k'_i+1}\}$ que converge uniformemente sobre os subconjuntos compactos de V . Logo, se D é um subconjunto compacto de $f^{-1}(V)$ então $f(D)$ é um subconjunto compacto de V . Com isso, temos que $\{f^{k'_i+1}\}$ converge uniformemente em $f(D)$ e daí, $\{f^{k'_i}\}$ converge uniformemente em D . Assim, $\{f^k\}$ é normal em $f^{-1}(V)$ e portanto $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$. As outras inclusões podem ser obtidas de maneira análoga, usando o fato de que toda função polinomial é uma aplicação aberta. ■

Proposição 2.2.4. $J_0(f^p) = J_0(f)$ para qualquer inteiro positivo p .

Demonstração: Novamente iremos trabalhar com o complementar de $J_0(f)$: $J_0(f^p) = J_0(f)$ se e somente se $F_0(f^p) = F_0(f)$. Então provaremos a segunda parte.

Observemos que, se toda sequência de $\{f^k\}$ tem uma subsequência uniformemente convergente num conjunto D , então toda subsequência de $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ também possui uma subsequência uniformemente convergente em D . Assim, isso nos dá que $F_0(f) \subset F_0(f^p)$.

Se D é um compacto e $\{g_k\}$ uma família de funções que converge uniformemente em D para uma função analítica ou para infinito, então o mesmo é verdade para a família $\{h \circ f^k\}$ onde h é um polinômio qualquer. Assim, se $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ num conjunto

aberto V , então é normal em V a família $\{f^{p^k+r}\}_{k \geq 1} = \{f^r \circ f^{pk}\}_{k \geq 1}$ para $r \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Por outro lado, qualquer subsequência de $\{f^k\}_{k \geq 1}$ deve conter alguma subsequência infinita de $\{f^{p^k+r}\}_{k \geq 1}$ para algum $r \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, que por sua vez contém uma subsequência que converge uniformemente para uma função limitada ou para o infinito em subconjuntos compactos de V . Portanto, $\{f^k\}$ é normal. Logo, $F_0(f^p) \subset F_0(f)$. \blacksquare

Proposição 2.2.5. *Sejam $w \in J_0(f)$ e U uma vizinhança de w . Então $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ é todo \mathbb{C} , exceto possivelmente um único ponto. Esse ponto excepcional não está em $J_0(f)$ e não depende de U .*

Demonstração: Seja $w \in J_0(f)$. Como a família $\{f^k\}$ não é normal em w , o Teorema de Montel garante que $W = \mathbb{C}$ exceto possivelmente um único ponto.

Seja $v \notin W$. Se $v = f(z)$, como $f(W) \subset W$, segue que $z \notin W$. Sabendo $\mathbb{C} \setminus W$ consiste de no máximo um ponto, temos que $z = v$. Daí, f é um polinômio de grau n tal que a única solução de $f(z) - v = 0$ é v . Assim, $f(z) - v = c(z - v)^n$ para alguma constante c .

Seja $V = \left\{ z; |z - v| < (2c)^{\frac{-1}{n-1}} \right\}$. Para $z \in V$ tem-se:

$$\begin{aligned} |f^k(z) - v| &= |f(f^{k-1}(z)) - v| \\ &= |c(f^{k-1}(z) - v)^n| \\ &= c^{n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n + 1} |z - v|^{n^k} \\ &< c^{\frac{n^k - 1}{n-1}} (2c)^{\frac{-n^k}{n-1}} = c^{\frac{-1}{n-1}} 2^{\frac{-n^k}{n-1}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $(f^k(z) - v) \rightarrow 0$ uniformemente em V quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $\{f^k\}$ é normal em v e com isso, $v \notin J_0(f)$. Note que v depende somente do

polinômio f . ■

Corolário 2.2.6. *Seja $U \subset \mathbb{C}$, U aberto. Se $U \cap J_0(f) \neq \emptyset$, então para todo $z \in \mathbb{C}$ com no máximo uma exceção, $f^{-k}(z)$ intersecta U para infinitos valores de k .*

Demonstração: Se z não é o ponto excepcional da Proposição 2.2.5, então $z \in f^k(U)$ e portanto, $f^{-k}(z)$ intersecta U para algum k . Usando esse argumento repetidas vezes, obtemos uma sequência infinita de valores de k tal que $f^{-k}(z)$ intercepta U . ■

Corolário 2.2.7. *Se $z \in J_0(f)$ então $J_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$.*

Demonstração: Seja $z \in J_0(f)$. Então, pela Proposição 2.2.3. $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$. Portanto, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset J_0(f)$. Daí, $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset \overline{J_0(f)} = J_0(f)$. Por outro lado, se U é um conjunto aberto contendo $w \in J_0(f)$ então pelo Corolário 2.2.6. acima, $f^{-k}(z)$ intersecta U para algum k . (Pela Proposição 2.2.5, z não pode ser o ponto excepcional). ■

Corolário 2.2.8. *$J_0(f)$ tem interior vazio.*

Demonstração: Suponha que $J_0(f)$ contem um conjunto aberto U . Então pela Proposição 2.2.3, $f^k(U) \subset J_0(f)$ para todo k . Daí, $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \subset J_0(f)$. Agora, pela Proposição 2.2.5, $J_0(f)$ é todo \mathbb{C} exceto possivelmente um ponto. Assim, $J_0(f)$ é ilimitado. No entanto, isso contradiz o fato de $J_0(f)$ ser compacto. ■

Proposição 2.2.9. *$J_0(f)$ não tem pontos isolados.*

Demonstração: Seja $v \in J_0(f)$ e U uma vizinhança de v . Devemos mostrar que U contem pontos de $J_0(f)$ diferentes de v . Vamos considerar três casos separadamente.

- i) v não é ponto fixo ou periódico de f . Pelo Corolário 2.2.7. e pela Proposição 2.2.3, temos que U contém um ponto de $f^{-k}(v) \subset J_0(f)$ para algum $k \geq 1$ e esse ponto é distinto de v já que v não é ponto fixo e nem periódico.
- ii) v é ponto fixo de f . Se $f(z) = v$ não tem outra solução exceto v , então como na demonstração da Proposição 2.2.5, $v \notin J_0(f)$. Daí, existe $w \neq v$ tal que $f(w) = v$. Agora, pelo Corolário 2.2.6, U contém um ponto de $f^{-k}(w)$ para algum $k \neq 1$. Com isso, segue da Proposição 2.2.3. que esse ponto está em $J_0(f)$ e é diferente de v já que $v = f^k(v)$.
- iii) v é um ponto periódico de f , de período $p > 1$. Pela Proposição 2.2.4, $J_0(f) = J_0(f^p)$. Portanto podemos repetir o método usado no item ii), trocando f por f^p , para chegar ao resultado que queremos.

Assim, $J_0(f)$ não tem pontos isolados. ■

Observação: A Proposição 2.2.9 acima diz que $J_0(f)$ é um conjunto perfeito, ou seja, um conjunto fechado sem pontos isolados.

Agora estamos prontos para definir e caracterizar o Conjunto de Julia de um polinômio complexo de grau n .

Definição: Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau n com coeficientes complexos, isto é, $f(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$. O *Conjunto de Julia* de f é o conjunto $J(f)$ definido por

$$J(f) = \overline{\{z \in \mathbb{C}; z = f^p(z) \text{ e } |(f^p)'(z)| > 1 \text{ para algum } p\}}. \quad (2.3)$$

Em outras palavras, $J(f)$ é o fecho do conjunto dos pontos periódicos repulsores de f .

O complementar do Conjunto de Julia de f é chamado de *Conjunto de Fatou de f* , que será representado por $F(f)$.

Vamos agora apresentar um primeiro exemplo de conjunto de Julia.

Exemplo 2.2.1. *Considere $f(z) = z^2$. Logo, $f^k(z) = z^{2^k}$ e 0 é um ponto fixo superatrator, pois $f'(0) = 0$. Os pontos periódicos de f são os pontos z que satisfazem $z = f^p(z)$ para algum $p \in \mathbb{N}^*$, isto é, $z = z^{2^p}$, $z \neq 0$. Com isso, temos que $z^{2^p-1} = 1$, ou seja, z é uma raiz da unidade. Portanto os pontos periódicos de f são $\left\{ e^{\frac{2\pi qi}{2^p-1}}; 0 \leq q < 2^p - 2, q \in \mathbb{N}^* \right\}$, os quais todos são repulsores, já que, $|(f^p)'(z)| = 2^p |z|^{2^p-1} = 2^p > 1$. Assim, o Conjunto de Julia de f , $J(f)$, é o círculo unitário $|z| = 1$. Neste caso, $f^k(z) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ se $|z| < 1$ e $f^k(z) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ se $|z| > 1$. Quando $|z| = 1$, $f^k(z)$ permanece em $J(f)$ para todo k . O Conjunto de Julia de f é a fronteira entre os conjuntos dos pontos que iteram para 0 e ∞ . Esse é um caso simples e especial em que $J(f)$ não é um fractal.*

O próximo teorema nos mostra que o conjunto de Julia coincide com o conjunto definido em (2.1). Sendo assim, todas as propriedades mostradas para $J_0(f)$ permanecerão válidas para $J(f)$.

Teorema 2.2.10. $J(f) = J_0(f)$.

Demonstração: Seja w um ponto periódico repulsor de f de período p . Daí, w é um ponto fixo repulsor de $g := f^p$. Suponha que $\{g^k\}$ é normal em w . Então, w tem uma vizinhança V na qual a subsequência $\{g^{k_i}\}$ converge uniformemente para uma função analítica g_0 ou para o infinito. Como, $g^k(w) = w$ para todo k , a subsequência $\{g^{k_i}\}$ não pode convergir para o infinito. Sabemos, da teoria das funções complexas,

que a sequência das derivadas também converge e $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g'_0(z)$ para todo $z \in V$ uniformemente. Agora, usando a regra da cadeia, $|(g^{k_i})'(w)| = |(g'(w))^{k_i}| \rightarrow \infty$ pois w é um ponto fixo repulsor e $|g'(w)| > 1$. Isto é uma contradição já que g'_0 é finito. Logo, $\{g^k\}$ não é normal em V . Com isso, $w \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$. Como $J_0(f)$ é fechado, segue que $J(f) \subset J_0(f)$.

Considere o conjunto $K = \{w \in J_0(f); \exists z \neq w, f(z) = w \text{ e } f'(z) \neq 0\}$. Suponha que $w \in K$. Então existe uma vizinhança aberta V de w na qual podemos encontrar um ramo inverso analítica local $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ tal que $f(f^{-1}(z)) = z$ para todo $z \in V$. Agora considere a família de funções analíticas $\{h_k\}$ em V definida por:

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}. \quad (2.4)$$

Seja U uma vizinhança aberta de w com $U \subset V$. Como $w \in J_0(f)$, a família $\{f^k\}$ e portanto $\{h_k\}$ não é normal em U . Pelo Teorema de Montel, $h_k(z) \in \{0, 1\}$ para algum k e algum $z \in U$. Se $h_k(z) = 0$ então $f^k(z) = z$ para algum $z \in U$. Se $h_k(z) = 1$ então $f^k(z) = f^{-1}(z)$ e com isso, $f^{k+1}(z) = z$ para algum $z \in U$. Dessa forma, U contem um ponto periódico de período k ou $k + 1$ de f . Logo, $w \in J(f)$.

Com isso, mostramos que $K \subset J(f)$. Portanto, todo $w \in J_0(f)$ pode ser aproximado por pontos periódicos. Como esses pontos periódicos, exceto no máximo um número finito deles, são repulsores temos que $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$.

Portanto, $J_0(f) = J(f)$. ■

Definição: Seja w um ponto fixo atrator de f . O conjunto $A(w)$ definido por:

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C}; f^k(z) \rightarrow w \text{ quando } k \rightarrow \infty\} \quad (2.5)$$

é chamado a *bacia de atração de w* . Quando $w = \infty$ definimos a bacia de atração

de ∞ da mesma maneira.

Como w é um ponto fixo atrator, existe um conjunto aberto $V \subset A(w)$ tal que $w \in V$ (se $w = \infty$ então podemos tomar $\{z; |z| > r\}$ para r suficientemente grande). Isto garante que $A(w)$ é aberto, pois se $f^k(z) \in V$ para algum k então $z \in f^{-k}(V)$, o qual é aberto.

A caracterização de $J(f)$ como a fronteira da bacia de atração de um ponto atrator é extremamente útil para determinar o Conjunto de Julia de f .

Teorema 2.2.11. *Seja w um ponto fixo atrator de f . Então $\partial A(w) = J(f)$. A igualdade continua válida se $w = \infty$.*

Demonstração: Seja $z \in J(f)$. Então $f^k(z) \in J(f)$ para todo k . Logo, $f^k(z)$ não pode convergir para um ponto fixo atrator, e com isso, $z \notin A(w)$. Porém, pela Proposição 2.2.5, se U é uma vizinhança qualquer de z , o conjunto $f^k(U)$ contem pontos de $A(w)$ para algum k . Dessa forma, existem pontos arbitrariamente próximos de z os quais são iterados até $A(w)$. Daí, $z \in \overline{A(w)}$ e portanto $z \in \partial A(w)$.

Seja $z \in \partial A(w)$ mas $z \notin J(f)$. Então z tem uma vizinhança aberta conexa V na qual $\{f^k\}$ tem uma subsequência que converge ou para uma função analítica ou para ∞ . A subsequência converge para w em $V \cap A(w)$, o qual é aberto e não-vazio e, por isso converge em V , já que uma função analítica que é constante num conjunto conexo ela é também constante em qualquer subconjunto aberto. Agora, todos os pontos de V são levados em $A(w)$ por iterados de f . Com isso, $V \subset A(w)$. Porém, isto nos leva a uma contradição com o fato de que $z \in \partial A(w)$. Assim, $\partial A(w) \subset J(f)$. ■

Exemplo 2.2.2. *Considere $f(z) = z^d$, $d \geq 2$. Temos que $0 \in \mathbb{C}$ e $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ são*

pontos fixos atratores de f . Como $f^n(z) = z^{dn}$, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty$ para $|z| > 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0$ para $|z| < 1$. Com isso temos que $A(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $A(\infty) = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$. Logo, nenhuma subsequência de $\{f^n\}$ pode convergir em algum disco centrado em um ponto de \mathbb{S}^1 . Desse modo, $J(f) = \partial A(0) = \partial A(\infty) = \mathbb{S}^1$. Note que $|f'(z)| = d \geq 2 \quad \forall z \in \mathbb{S}^1$, em particular, as órbitas periódicas em $J(f)$ são todas repulsoras.

Exemplo 2.2.3. Considere $f(z) = z^2 - 6$. Os pontos fixos de f são os pontos z que satisfazem a equação $f(z) = z$, ou seja, $z^2 - 6 = z$. Com isso, temos que $z = 3$ e $z = -2$ são pontos fixos repulsores de f , pois $|f'(3)| = |2 \cdot 3| = 6 > 1$ e $|f'(-2)| = |2 \cdot (-2)| = 4 > 1$. Logo, $3 \in J(f)$ e $-2 \in J(f)$. Considere $V = [-3, 3]$ e sejam $f_1^{-1}(z) = \sqrt{z+6}$ e $f_2^{-1}(z) = -\sqrt{z+6}$ os ramos inversos de f . Se $z \in V$ então $\sqrt{3} \leq \sqrt{z+6} \leq 3$ e com isso $f_1^{-1}(z) \in [\sqrt{3}, 3] \subset [-3, 3]$. Repetindo o mesmo argumento com $f_1^{-1}(z)$ no lugar de z temos $f_1^{-2}(z) \in [\sqrt{\sqrt{z+6}+6}, 3] \subset [\sqrt{3}, 3] \subset [-3, 3]$. Logo, para qualquer $z \in V$ tem-se $f_1^{-k}(z) \in [\sqrt{3}, 3]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De maneira análoga, para qualquer $z \in V$ tem-se $f_2^{-k}(z) \in [-3, -\sqrt{3}]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $f^{-k}(z) \in [-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$ para qualquer $z \in V$. Como $3 \in J(f)$ e $3 \in V$, pelo Teorema 2.2.10, pelo Corolário 2.2.7 e pela argumentação acima, $J(f) = J_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(3)} \subset [-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$.

Seja $z \in V$. Daí, $|z+6| \geq 6 - |z| \geq 6 - 3 = 3$, donde concluímos que, $|(f^{-1})'(z)| = \frac{1}{2}(z+6)^{-1/2} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,288 < 1$. Portanto f_1^{-1} e f_2^{-1} são contrações sobre V .

Vamos mostrar que $J(f)$ é totalmente desconexo. Suponha, por absurdo, que $J(f)$ não seja totalmente desconexo. Então existem $x, y \in J(f)$ com $I = [x, y] \subset$

$J(f)$. Como f^{-1} é uma contração sobre V , existe $0 < \lambda < 1$ tal que $|(f^{-k})'(z)| \leq \lambda^k < 1$ para todo $z \in V$ e com isso, $|(f^k)'(w)| \geq \lambda^{-k} > 1$ para todo $w, \dots, f^k(w) \in [-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$. Tomando um número natural n tal que $\lambda^{-n}|x - y| > 3$, pelo Teorema do Valor Médio, $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \lambda^{-n}|x - y| > 3$, e isso é uma contradição, pois $f^k(I) \subset f^k(J) = J \subset [-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3]$. Logo, $J(f)$ é totalmente desconexo.

$J(f)$ é um conjunto compacto, sem pontos isolados e totalmente desconexo, ou seja, $J(f)$ é um Conjunto de Cantor.

Exemplo 2.2.4. Considere $f_c(z) = z^2 + c$ com $|c|$ suficientemente pequeno. Os pontos fixos de f são os pontos z que satisfazem a equação $f_c(z) = z$, ou seja, $z^2 + c = z$. Com isso, $w_c = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ é um ponto fixo atrator de f próximo de 0, pois $|f'(w_c)| = |2w_c| = |1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$ quando $|c|$ é pequeno. Assim temos que, se $|z - w_c|$ é pequeno então $f^k(z) \rightarrow w_c$ quando $k \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $|z - w_c|$ é grande, $f^k(z) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Com isso, é razoável esperar por uma curva simples e fechada separando estes dois tipos de comportamento quando $|c|$ está próximo de 0.

Fixemos dois discos $D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \frac{1}{2}\}$ e $D_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq 2\}$. w_c é um ponto fixo atrator próximo de $0 \in \mathbb{C}$. Além disso, $\overline{f(D_1)} \subset \text{int } D_1$ e $\overline{f(D_2)} \subset \text{int } D_2$. Logo, D_1 e D_2 estão contidos, respectivamente, nas bacias de atração de w_c e ∞ . Como $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ e $f^{-1}(w_c)$ não possuem pontos em $D_2 - D_1$, vemos que essas bacias são invariantes (diminuindo $|c|$ se necessário). Os pontos críticos de f são $0 \in A(w_c)$ e $\infty \in A(\infty)$ de modo que $\overline{\mathbb{C}} = A(w_c) \cup J(f) \cup A(\infty)$. Como, $D_1 \subset f^{-1}(D_1) \subset \dots \subset f^{-k}(D_1) \dots$ e $D_2 \subset f^{-1}(D_2) \subset \dots \subset f^{-k}(D_2) \dots$ e todos esses

conjuntos ainda são discos fechados, segue que $A(w_c) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(D_1)$ e $A(\infty) = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(D_2)$ são simplesmente conexos, portanto analiticamente equivalentes ao disco \mathbb{D} . Quanto ao conjunto $J(f)$, trata-se de uma curva de Jordan, ou seja, uma curva simples e fechada.

Proposição 2.2.12. *Seja $f_c(z) = z^2 + c$ com $|c| < \frac{1}{4}$. $J(f)$ é uma curva de Jordan.*

Demonstração: Sejam $C_0 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = \frac{1}{2}\}$ e $D_0 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \frac{1}{2}\}$. Sabemos que $z_c = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$ é um ponto fixo atrator de f_c e $|z_c| < \frac{1}{2}$. Logo, c e z_c pertencem a D_0 . Agora, tome $w \in f^{-1}(C_0)$. Então, $f(w) \in C_0$ e com isso, $\frac{1}{2} = |w^2 + c| \leq |w^2| + |c| < |w^2| + \frac{1}{4} \implies |w| > \frac{1}{2}$, donde concluímos que $f^{-1}(C_0) = \{w \in \mathbb{C}; f(w) = w^2 + c \in C_0\} := C_1$ é uma curva fechada ao redor de C_0 . Assim, podemos mapear conformemente a região $D_1 = f^{-1}(D_0) \setminus D_0$ entre as curvas C_0 e C_1 por um contínuo de curvas, as quais chamaremos de trajetórias, que começam em C_0 e alcançam C_1 perpendicularmente. Iterando f negativamente, estas trajetórias serão prolongadas sempre de modo ortogonal a $C_2 := f^{-2}(C_0), \dots, C_k := f^{-k}(C_0), \dots$

Para cada θ , sejam $\psi_1(\theta)$ o ponto sobre C_1 onde a trajetória com início em $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} \in C_0$ alcança C_1 e $\psi_2(\theta)$ o ponto sobre C_2 onde a trajetória com início em $\psi_1(\theta) \in C_1$ alcança C_2 . Procedendo desta maneira, obtemos uma sequência de curvas C_k , cada uma envolvendo seu antecessor, e uma família de trajetórias unindo os pontos $\psi_k(\theta) \in C_k$ e $\psi_{k+1}(\theta) \in C_{k+1}$.

Quando $k \rightarrow \infty$, as curvas C_k aproximam-se da fronteira da bacia de atração de z_c . Pelo Teorema 2.2.11, esta fronteira é o conjunto de Julia de f_c , ou seja, $C_k \rightarrow J(f_c)$. Como $|f'_c(z)| > 1$ para todo $z \notin D_0 \cup D_1$, segue que f_c^{-1} é uma contração próximo de J . Como isso, o comprimento da trajetória unindo $\psi_k(\theta)$

e $\psi_{k+1}(\theta)$ converge para 0, com taxa geométrica, quando $k \rightarrow \infty$. Logo, $\psi_k(\theta)$ converge uniformemente para uma função contínua $\psi(\theta)$ quando $k \rightarrow \infty$. Assim, $J(f_c)$ é a curva fechada definida por $\psi(\theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Vamos mostrar que ψ não tem auto-intersecção. Suponha que $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2)$. Seja D a região limitada por C_0 e por duas trajetórias unindo $\psi_0(\theta_1)$ e $\psi_0(\theta_2)$ a este ponto em comum. Como a fronteira de D permanece limitada pelos iterados de f_c , D permanece limitado sob os iterados de f_c . Agora, pela Proposição 2.2.5, D não contém no seu interior pontos de $J(f_c)$ e com isso não pode ocorrer $\theta_1 \neq \theta_2$. Logo, $\theta_1 = \theta_2$, donde concluímos que $\psi(\theta)$ não tem pontos de auto-intersecção. ■

As imagens a seguir mostram exemplos de conjuntos de Julia de um polinômio $f_c(z) = z^2 + c$ para diferentes parâmetros c . Os níveis de cores representam os níveis de iteração. Pelo Teorema 2.2.11, o conjunto $J(f_c)$ é formado pela fronteira das regiões onde os iterados convergem para o infinito ou para um atrator, respectivamente. Os pontos fora de $J(f_c)$ ou “escapam” para o infinito ou “escapam” para o ponto atrator.

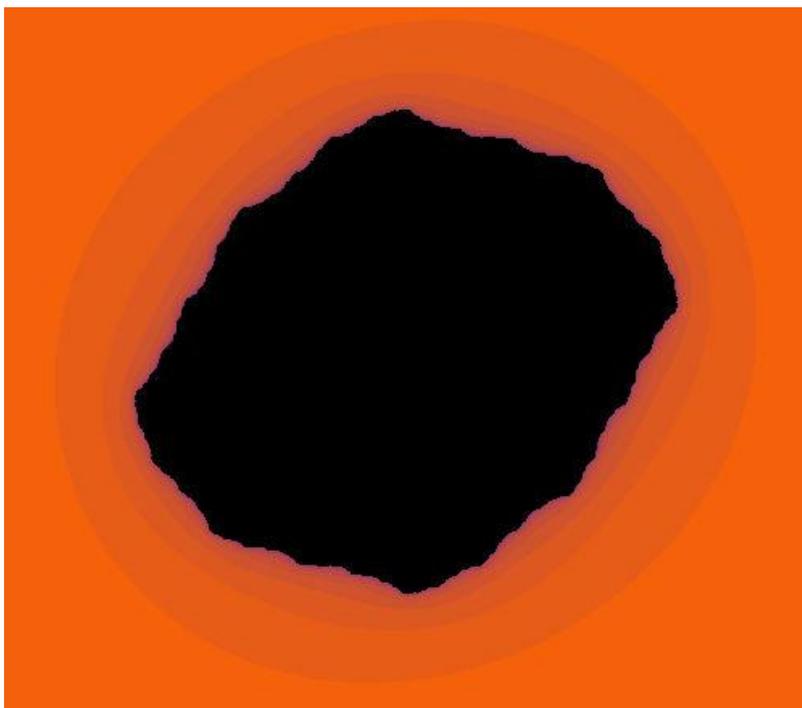


Figura 2.1: $J(f)$ para $f(z) = z^2 + 0,1 - 0,2i$. O conjunto $J(f)$ é conexo conforme a Proposição 2.2.12.

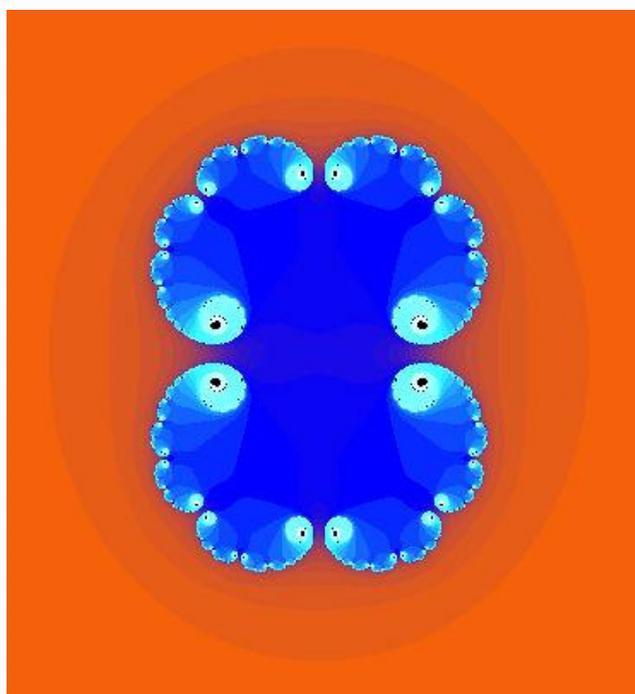


Figura 2.2: $J(f)$ para $f(z) = z^2 + 0,27$. O conjunto $J(f)$ não é conexo.

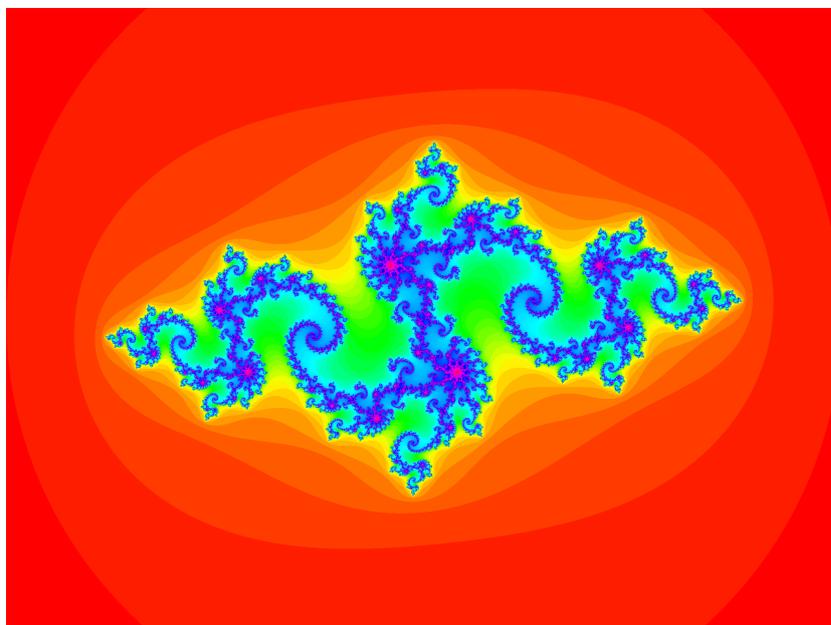


Figura 2.3: $J(f)$ para $f(z) = z^2 - 0.8 - 0.175i$

Capítulo 3

Repulsores Conformes

Neste capítulo, apresentaremos uma classe de objetos matemáticos conhecidos como *repulsores conformes*. Em seguida, mostraremos que todo repulsor conforme expande distâncias, em um certo sentido, e com isso concluiremos, impondo certas condições à aplicação, que todo repulsor conforme possui a propriedade de *distorção limitada*.

3.1 Definição e Propriedades Gerais

Sejam V um subconjunto aberto de \mathbb{C} , $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ um função de classe C^1 em V e J um subconjunto compacto de V .

Definição: A tripla (J, V, f) é um *repulsor conforme misturador* se:

(R1) Existem constantes reais $C > 0$ e $\alpha > 1$ tais que $|(f^n)'(z)| \geq C\alpha^n$ para todo

$$z \in J \text{ e } n \geq 1;$$

(R2) $f^{-1}(V)$ é relativamente compacto em V e $J = \bigcap_{n \geq 1} f^{-n}(V)$;

(R3) Para quaisquer conjuntos abertos $U, W \subset J$, existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $f^n(U) \cap W \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

Observação 3.1.1.

1. A propriedade **(R1)** garante que a restrição de f a J é uma *expansão uniforme*.
2. A propriedade **(R2)** nos diz que J é *localmente um conjunto maximal invariante*.
3. A propriedade **(R3)** nos diz que f é *topologicamente misturadora* em J .
4. O conceito de repulsor (conforme misturador) pode ser considerado em contextos mais gerais como, por exemplo, transformações de classe C^1 no \mathbb{R}^n .
5. Em contextos mais específicos podemos substituir a condição **(R3)** por uma condição um pouco mais forte:

(R3') Para qualquer conjunto aberto U com $U \cap J \neq \emptyset$, existe um inteiro $n > 0$ tal que $J \subset f^n(U \cap J)$.

Isto significa dizer que f é *topologicamente exata* sobre J , que implica em f ser topologicamente misturadora em J .

Antes de dar exemplos de repulsores conformes, vamos estabelecer algumas propriedades gerais desse objetos matemáticos.

Proposição 3.1.1. *Se (J, V, f) é um repulsor conforme então $f(J) = J = f^{-1}(J)$.*

Demonstração: Segue da condição (R1) da definição e do fato de que os conjuntos $f^{-n}(V)$ são encaixados, que $f^{-1}(J) = J$.

Seja $y \in f(J)$. Então existe $x \in J$ tal que $y = f(x)$. Logo para $n \geq 0$ temos que $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) \in V$. Agora, pela condição (R2) temos que $f(x) = y \in J$. Assim, $f(J) \subset J$.

Seja $x \in J$. Sendo V aberto, podemos tomar um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $B_\epsilon(x) \cap J \subset V$. Da condição (R3'), existe $n > 0$ tal que $J \subset f^n(B_\epsilon(x) \cap J)$. Logo, existe um $y \in V$ com $x = f^n(y)$. Como $f^{-1}(J) \subset J$, segue que $y \in J$. Com isso, $x \in f(J)$. Assim, $J \subset f(J)$.

Portanto, $f(J) = J$. ■

Um conjunto $X \subset \mathbb{C}$ é *perfeito* se ele é fechado e sem pontos isolados. A Proposição seguinte nos diz que o subconjunto J de V de um repulsor conforme (J, V, f) tem essa propriedade.

Proposição 3.1.2. *Se o conjunto J contém mais de um ponto então J é perfeito.*

Demonstração: Suponhamos que J não é perfeito. Então, existem $x \in J$ e $\epsilon > 0$ tais que $B_\epsilon(x) \cap J = \{x\}$. Pela condição (R3'), existe $n > 0$ tal que $J \subset f^n(B_\epsilon(x) \cap J)$. Daí, para todo $y \in J$ tem-se que $y = f^n(x)$, e com isso, segue que $J = \{x\}$. ■

Exemplo 3.1.1. *Considere uma função polinomial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grau no mínimo 2 sobre o plano complexo \mathbb{C} . O Conjunto de Julia de f , $J = J(f) \subset \mathbb{C}$, é não vazio, compacto e f -invariante, logo satisfaz a condição (R2). A condição (R3) é garantida pela Proposição 2.2.5. Se existir $\beta > 1$ e $m \geq 1$ tal que $|(f^m)'(z)| > \beta$ para todo $z \in J(f)$ então $(J(f), V, f)$, com $J(f) \subset V$ aberto, será um repulsor conforme. Para ver isto, basta tomar $\alpha = \beta^m$ e $C = \min_{1 \leq k \leq m-1} \{|(f^k)'(z)| \alpha^{-k}; z \in J(f)\}$. Por exemplo, se $f(z) = z^2 + c$ com $|c| < 1/4$ então $(J(f), V, f)$, onde V é*

um aberto contendo $J(f)$, é um repulsor conforme.

3.2 Transformações que expandem distâncias

Nessa seção, estudaremos uma classe especial de transformações definidas, em um espaço métrico compacto, que tem a propriedade de expandir uniformemente a distância de seus iterados. Um estudo mais detalhado sobre essa classe de transformações pode ser encontrado em [10, Capítulo 4].

Definição: Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Dizemos que $T : X \rightarrow X$ *expande distância em X* (em relação à métrica d) se existem constantes $\lambda > 1, \eta > 0$ e $n \geq 0$ tais que, para todo $x, y \in X$ tem-se:

$$d(T^n(x), T^n(y)) \geq \lambda d(x, y) \text{ sempre que } d(x, y) \leq 2\eta.$$

Dizemos que T *expande distância em $Y \subset X$* se para todo $z \in Y$ e para cada $x, y \in B_\eta(z)$ tem-se que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \lambda d(x, y)$.

Note que, podemos trabalhar com o iterado $g := T^n$ ao invés de T . Portanto, sempre podemos assumir $n = 1$,

$$d(x, y) \leq 2\eta \implies d(g(x), g(y)) \geq \lambda d(x, y).$$

Teorema 3.2.1. *Seja (V, J, f) um repulsor conforme. Então f expande distância em J .*

Demonstração: Segue da condição (R1) que $f'(x) \neq 0$ para $x \in J$. Trocando f por algum iterado f^n , se necessário, podemos supor sem perda de generalidade, que $\tau := \min_{z \in J} |f'(z)| > 1$. Em particular f é um difeomorfismo local em cada ponto,

isto é, cada $x \in J$ tem um vizinhança V_x tal que $f|_{V_x} : V_x \rightarrow f(V_x)$ é invertível e tem inversa diferenciável.

Para cada $z \in J$, existem $\epsilon_z > 0$ e V_z tais que $f : V_z \rightarrow B_{\epsilon_z}(f(z))$ é um difeomorfismo. Seja $U = \{B_{\epsilon_z}(f(z))\}$ uma cobertura de $f(J) = J$. Como J é compacto, podemos extrair de U uma subcobertura finita $U' = \{B_{\epsilon_i}(f(z_i))\}_{i=1}^k$ para $f(J)$. Tome $\epsilon_0 = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k, \delta/2\}$, onde δ é o número de Lebesgue desta cobertura. Com isso, $f : V_z \rightarrow B_{\epsilon_0}(f(z))$ é um difeomorfismo e ϵ_0 não depende de z (depende apenas de f).

Fixe arbitrariamente $z \in J$. Agora, tome $x, y \in V_z$ e considere $\gamma : [0, 1] \rightarrow J$ uma curva que minimiza a distância entre os pontos $f(x)$ e $f(y)$ em $B_{\epsilon_0}(f(z))$. Seja g o ramo inverso de f^{-1} em $B_{\epsilon_0}(f(z))$. Daí, a curva $\alpha := g \circ \gamma$ liga os pontos $g(f(x))$ e $g(f(y))$ em V_z . Com isso,

$$\begin{aligned} d(g(f(x)), g(f(y))) &\leq \int_0^1 |\alpha'(s)| ds \\ &\leq \int_0^1 |g'(\gamma(s))| \cdot |\gamma'(s)| ds, \end{aligned} \quad (3.1)$$

e como, $|g'(w)| = |[f'(g(w))]^{-1}| = |f'(g(w))|^{-1} \leq \tau^{-1} < 1$ segue que,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(g(f(x)), g(f(y))) \\ &\leq \tau^{-1} \int_0^1 |\gamma'(s)| ds \\ &= \tau^{-1} d(f(x), f(y)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Portanto, existem constantes $\tau > 1$ e $n = 1$ tais que $d(f(x), f(y)) \geq \tau d(x, y)$ sempre que $x, y \in V_z$, onde $n > 0$ é tal que $f(B_n(z)) \subset B_{\epsilon_0}(f(z))$ para todo $z \in J$. Como z foi fixado arbitrariamente, tal propriedade vale para todo $z \in J$. Logo, f expande distâncias em J . ■

Corolário 3.2.2. *f é expansiva em J , no sentido que existe $\beta > 0$ tal que para qualquer $x, y \in J, x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \beta$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.1, f expande distâncias em J , logo existem constantes $\lambda > 1, \eta > 0$ e $n = 1$ tais que, para todo $x, y \in J$ tem-se: $d(x, y) \leq 2\eta \implies d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$. Assim, para $x, y \in J$ com $d(f(x), f(y)) \leq 2\eta$, podemos repetir o argumento anterior e concluir que $d(f^2(x), f^2(y)) \geq \lambda^2 d(x, y)$. Então, para $x, y \in J$ com $d(f^j(x), f^j(y)) \leq 2\eta$ e $j = 1, \dots, n - 1$, repetindo indutivamente o argumento anterior tem-se que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \lambda^j d(x, y)$ para $j = 1, \dots, n$. Sendo $\lambda > 1$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^n d(x, y) \geq 2\eta$ e com isso $d(f^n(x), f^n(y)) \geq 2\eta$ para algum $m \leq n$. O resultado segue fazendo $\beta = 2\eta$. ■

Resumindo temos: (J, V, f) repulsor conforme $\implies f$ expande distâncias em $J \implies f$ é expansiva em J .

Provaremos a seguir um lema que nos possibilitará obter uma importante propriedade sobre a derivada da aplicação f de um repulsor conforme (J, V, f) em cada ponto de J .

Lema 3.2.3. *Sejam f uma transformação que expande distâncias em J e $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ϵ -Hölder contínua. Então existem $C > 0$ e $\eta > 0$ tais que para todo $n \geq 1$ e para todo $x, y \in J$ com*

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq 2\eta \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.3)$$

tem-se

$$|S_n \phi(x) - S_n \phi(y)| \leq C d(f^n(x), f^n(y))^\epsilon, \quad (3.4)$$

onde $S_n \phi(x) = \phi(x) + \phi(f(x)) + \dots + \phi(f^{n-1}(x))$ é a soma de Birkhoff de ϕ ao longo da órbita de x .

Demonstração: Sendo ϕ ϵ -Hölder contínua, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C_\epsilon d(x, y)^\epsilon, \quad \forall x, y \in J. \quad (3.5)$$

Como f expande distâncias em J , existem constantes $\lambda > 1$ e $\eta > 0$ tais que, se $x, y \in J$ com $d(x, y) \leq 2\eta$ tem-se $d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$. Pela hipótese (3.3), $d(f^k(x), f^k(y)) \leq 2\eta$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Assim,

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq \lambda^{-(n-k)} d(f^n(x), f^n(y)) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6) temos,

$$|\phi(f^k(x)) - \phi(f^k(y))| \leq C_\epsilon \lambda^{-(n-k)\epsilon} d(f^n(x), f^n(y))^\epsilon. \quad (3.7)$$

De (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} |S_n \phi(x) - S_n \phi(y)| &\leq C_\epsilon d(f^n(x), f^n(y))^\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-(n-k)\epsilon} \\ &\leq C_\epsilon d(f^n(x), f^n(y))^\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k\epsilon} \\ &= \frac{C_\epsilon}{1 - \lambda^{-\epsilon}} d(f^n(x), f^n(y))^\epsilon. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O resultado segue de (3.8) tomando $C = \frac{C_\epsilon}{1 - \lambda^{-\epsilon}} > 0$. ■

Em seguida iremos restringir um pouco mais a classe de funções, em particular iremos exigir que f seja conforme e de classe $C^{1+\epsilon}$, isto é, de classe C^1 com derivada ϵ -Hölder. Esta restrição é importante, pois irá permitir-nos obter uma propriedade fundamental para a demonstração de alguns resultados nos capítulos posteriores. Esta propriedade é conhecida por *distorção limitada*. Sendo f uma função de classe $C^{1+\epsilon}$, a função $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = -\log |f'(x)|$$

é ϵ -Hölder contínua.

Dessa forma temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.4. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme com f de classe $C^{1+\epsilon}$. Então existe $C > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ e para quaisquer $x, y \in J$ com $d(f^k(x), f^k(y)) \leq 2\eta$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ tem-se*

$$|\log |(f^n)'(x)| - \log |(f^n)'(y)|| \leq Cd(f^n(x), f^n(y))^\epsilon. \quad (3.9)$$

Demonstração: O Teorema 3.2.4 é uma consequência do Teorema 3.2.1, do Lema 3.2.3 e da conformalidade de f . Vejamos, pelo Teorema 3.2.1, f expande distâncias em J . Pelo Lema 3.2.3, para todo $n \geq 1$ e para quaisquer $x, y \in J$ satisfazendo a condição $d(f^k(x), f^k(y)) \leq 2\eta$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, existe $C > 0$ tal que $|S_n\varphi(x) - S_n\varphi(y)| \leq Cd(f^n(x), f^n(y))^\epsilon$. Por outro lado, como f é conforme, para todo $x \in J$ temos

$$\log |(f^n)'(x)| = \log \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))| = \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(f^k(x))| = S_n\varphi(x).$$

Desse modo, para todo $n \geq 1$ e para todo $x, y \in J$ com $d(f^k(x), f^k(y)) \leq 2\eta$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ existe $C > 0$ tal que $|\log |(f^n)'(x)| - \log |(f^n)'(y)|| \leq Cd(f^n(x), f^n(y))^\epsilon$. ■

Notemos que a desigualdade (3.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$e^{-Cd(f^n(x), f^n(y))^\epsilon} \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq e^{Cd(f^n(x), f^n(y))^\epsilon}. \quad (3.10)$$

Capítulo 4

O Formalismo Termodinâmico

Neste capítulo, analisaremos a dinâmica simbólica associada a um repulsor conforme, através de uma partição de Markov e, desta forma, obteremos mais duas importantes propriedades de distorção. Estudaremos também a *pressão topológica* e a *medida de Gibbs* (estado de Gibbs), associadas a uma partição de Markov de um repulsor conforme. Esses dois últimos conceitos fazem parte de uma ampla teoria matemática, desenvolvida por Bowen [2], Ruelle [12], dentre outros, chamada de *Formalismo Termodinâmico*, cuja origem se encontra na Mecânica Estatística e na Termodinâmica. Mais detalhes sobre essa moderna teoria matemática podem ser encontrados em [10], [1], [14].

4.1 Partições de Markov

Vamos começar introduzindo a noção de partição de Markov de um repulsor conforme (J, V, f) . Uma partição de Markov consiste numa divisão de J em subconjuntos com propriedades especiais.

Definição: Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma família finita de subconjuntos de J . Dizemos que \mathcal{R} é uma *partição de Markov* de J se:

1. $\overline{\text{int } R_i} = R_i$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $J = \bigcup_{i=1}^m R_i$;
2. $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$;
3. $f(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j \neq \emptyset \implies R_j \subset f(R_i)$ para todo $i, j = 1, \dots, m$.

O diâmetro de uma partição de Markov \mathcal{R} é definido por

$$\Delta := \text{diam } \mathcal{R} = \max_{i=1, \dots, m} \{\text{diam } R_i\}.$$

Nesse momento, uma questão que surge naturalmente é, se dado um repulsor conforme (J, V, f) , existe uma partição de Markov para o subconjunto compacto $J \subset \mathbb{C}$. Para responder essa questão, vejamos primeiro, o seguinte resultado geral cuja demonstração pode ser encontrada em [10, Teorema 4.5.2].

Teorema 4.1.1. *Seja X um espaço métrico compacto. Qualquer transformação aberta $T : X \rightarrow X$ que expande distâncias em X possui partições de Markov para X com diâmetros arbitrariamente pequeno.*

Assim, podemos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1.2. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme. Então existe uma partição de Markov para J com diâmetro arbitrariamente pequeno.*

Demonstração: A condição (R1) e a conformalidade de f implica que $f : J \rightarrow J$ é uma aplicação aberta. Por outro lado, o Teorema 3.2.1 garante que f expande distâncias em J . Com isso, o resultado segue, imediatamente, do Teorema 4.1.1 acima. ■

Este teorema permite obter, para repulsores conformes, partições de Markov em que f é invertível em cada elemento da partição. Esse fato segue do seguinte corolário:

Corolário 4.1.3. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme. Então existe uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ para J tal que $f|_{R_i}$ é invertível para $i = 1, \dots, m$.*

Demonstração: Pelo Teorema da Função Inversa, para cada $x \in J$ existe δ_x tal que $f|_{B_{\delta_x}(x)}$ é inversível. Assim considere a cobertura aberta $\mathcal{C} = \{B_{\delta_x}(x), x \in J\}$ de J . Seja δ_0 o número de Lebesgue associado à cobertura \mathcal{C} de J . Então para cada $x \in J$ existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $B_{\delta_0}(x) \subseteq U$.

Agora, pelo Teorema 4.1.2. existe uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ de J cujo diâmetro é menor que δ_0 . Como, $R_i \subseteq \overline{B_{\text{diam } R_i}(x_i)}$ para algum $x_i \in R_i$ segue que, $R_i \subseteq \overline{B_{\text{diam } R_i}(x_i)} \subseteq B_{\delta_0}(x_i) \subseteq U$ para algum $U \in \mathcal{C}$. Logo, $f|_{R_i}$ é inversível. ■

4.2 Dinâmica Simbólica

Nesta seção vamos considerar um caso particular de dinâmica simbólica, que desempenha um papel importante em muitas aplicações de sistemas dinâmicos. Em particular, uma partição de Markov pode modelar repulsores conformes através de uma dinâmica simbólica associada ao sistema dinâmico, que neste caso é dado por uma cadeia topológica de Markov.

Primeiramente, vamos definir algumas noções básicas da dinâmica simbólica, começando com o espaço de seqüências.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $\Sigma_m^+ = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$ das seqüências de números em $\{1, \dots, m\}$. Dada uma seqüência $w \in \Sigma_m^+$, a escreveremos da seguinte forma:

$$w = (i_1 i_2 i_3 \dots).$$

Agora, sejam $w = (i_1 i_2 i_3 \dots), w' = (j_1 j_2 j_3 \dots) \in \Sigma_m^+$ e considere aplicação $d: \Sigma_m^+ \times \Sigma_m^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$d((i_1 i_2 i_3 \dots), (j_1 j_2 j_3 \dots)) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } (i_1 i_2 i_3 \dots) \neq (j_1 j_2 j_3 \dots) \\ 0 & \text{se } (i_1 i_2 i_3 \dots) = (j_1 j_2 j_3 \dots) \end{cases}$$

onde n é o menor inteiro tal que $i_n \neq j_n$.

Lema 4.2.1. *A função d é uma métrica em Σ_m^+ .*

Demonstração: Segue diretamente da definição de d que $d(w, w') = d(w', w)$ e que $d(w, w') = 0$ se e só se $w = w'$. Além disso, dados $w, w', w'' \in \Sigma_m^+$, temos $d(w, w'') = 2^{-n_1}, d(w, w') = 2^{-n_2}, d(w', w'') = 2^{-n_3}$, onde n_1, n_2 e n_3 são os menores inteiros positivos tais que $i_{n_1}(w) \neq i_{n_1}(w''), i_{n_2}(w) \neq i_{n_2}(w'), i_{n_3}(w') \neq i_{n_3}(w'')$.

Note que se $n_2 > n_1$ e $n_3 > n_1$, então $i_{n_1}(w) = i_{n_1}(w') = i_{n_1}(w'')$, o que contradiz o que foi visto no parágrafo imediatamente acima. Logo, $n_2 \leq n_1$ ou $n_3 \leq n_1$ e portanto $2^{-n_1} \leq 2^{-n_2}$ ou $2^{-n_1} \leq 2^{-n_3}$. Assim fica estabelecida a desigualdade triangular. Com isso, provamos que d é uma métrica em Σ_m^+ . ■

Lema 4.2.2. *(Σ_m^+, d) é um espaço métrico compacto.*

Demonstração: Para provar que (Σ_m^+, d) é um espaço métrico compacto, mostraremos que toda seqüência em Σ_m^+ admite uma subsequência que converge em Σ_m^+ . Seja $w^n = (i_1^n i_2^n i_3^n \dots)$ uma seqüência em Σ_m^+ . Vamos construir uma subsequência de

w^n convergindo para um elemento $w = (i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_m^+$. Como i_1^n assume valores no conjunto $\{1, 2, \dots, m\}$, necessariamente algum desses valores é assumido por alguma subsequência $i_1^{n_1^1} i_1^{n_2^1} \dots$ de i_1^n , onde denotaremos esse valor constante por i_1 , ou seja, $i_1^{n_k^1} = i_1$ para todo k . Para definir i_2 , consideramos a subsequência $i_2^{n_1^1} i_2^{n_2^1} \dots$ de i_2^n assumindo valores em $\{1, 2, \dots, m\}$ e com o mesmo argumento usado anteriormente, existe uma subsequência n_1^2, n_2^2, \dots de n_1^1, n_2^1, \dots tal que a subsequência $i_2^{n_1^2} i_2^{n_2^2} \dots$ é constante igual a um certo valor i_2 . Dessa forma, para $j = 1, 2$ temos $i_j^{n_k^j} = i_j$ para todo k . Para definir i_k , consideramos a subsequência $i_k^{n_1^{k-1}} i_k^{n_2^{k-1}} \dots$ de i_k^n assumindo valores em $\{1, 2, \dots, m\}$ e com o mesmo argumento usado anteriormente, existe uma subsequência n_1^k, n_2^k, \dots de $n_1^{k-1}, n_2^{k-1}, \dots$ tal que a subsequência $i_k^{n_1^k} i_k^{n_2^k} \dots$ é constante igual a um certo valor i_k . Dessa forma, para $j = 1, 2, \dots, k$ temos $i_j^{n_k^j} = i_j$ para todo k . Repete-se o argumento para definir i_4 e assim, sucessivamente, i_5, i_6, \dots

Considere a subsequência $w^{n_1^1}, w^{n_2^2}, w^{n_3^3}, \dots$ de w^n . Esta subsequência de w^n converge para $w = (i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_m^+$. De fato, pois para cada l , $i_j^{n_l^j} = i_j$ para todo $1 \leq j \leq l$. ■

O espaço métrico (Σ_m^+, d) é chamado de *espaço de seqüências* com números em $\{1, \dots, m\}$.

Lema 4.2.3. *A aplicação $\sigma : \Sigma_m^+ \rightarrow \Sigma_m^+$ definida por $\sigma(i_1 i_2 i_3 \dots) = (i_2 i_3 i_4 \dots)$ é uma aplicação contínua. A aplicação σ é chamada de deslocamento ou shift.*

Demonstração: Sejam $w, w' \in \Sigma_m^+$. Se $d(w, w') = 2^{-n}$, então $d(\sigma(w), \sigma(w')) \leq 2^{-(n-1)} = 2 \cdot d(w, w')$. Logo, a aplicação σ é contínua em Σ_m^+ . ■

Sejam $w = (i_1 i_2 \dots) \in \Sigma_m^+$ e r um número real tal que $2^{-(n+1)} \leq r < 2^{-n}$. Então

a bola aberta de centro em w e raio r , na métrica d , é dada por:

$$B_r(w) = \{y \in \Sigma_m^+; d(w, y) < r\} = \{y = (j_1 j_2 \dots) \in \Sigma_m^+; i_l = j_l, l = 1, \dots, n\}.$$

Definição: Sejam $k, l \in \mathbb{N}$ e $i_l, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$. Definimos o *cilindro* de comprimento $k - l + 1$ por:

$$C_{i_l \dots i_k} = \{(j_1 j_2 j_3 \dots) \in \Sigma_m^+ : j_l = i_l, \dots, j_k = i_k\}.$$

$C_{i_l \dots i_k}$ é chamado de $k - l + 1$ - *cilindro*. As bolas abertas de (Σ_m^+, d) são k - *cilindro*.

Qualquer cilindro de (Σ_m^+, d) é um conjunto aberto, pois podemos escrevê-lo como união de bolas abertas:

$$C_{i_l \dots i_k} = \bigcup_{(c_1 \dots c_{l-1})} C_{c_1 \dots c_{l-1} i_l \dots i_k}$$

A σ -álgebra gerada por estes conjuntos coincide com a σ -álgebra de Borel obtida da métrica d . Além disso, como todo aberto pode ser aproximado por uma união finita de bolas, todo aberto de (Σ_m^+, d) é aproximado por uma união finita de cilindros.

Com estes resultados, iremos descrever como partições de Markov podem ser usadas para modelar um repulsor conforme.

Sejam (V, J, f) um repulsor conforme e $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma partição de Markov de J com diâmetro suficientemente pequeno. Considere a matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ de ordem $m \times m$ com entradas definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j = \emptyset. \end{cases} \quad (4.1)$$

A matriz A é chamada de *matriz de transição*. Esse nome vem do fato de que $a_{ij} = 1$ apenas se for possível “transitar” de $\text{int } R_i$ para $\text{int } R_j$ por f , ou seja, existem elementos de $\text{int } R_i$ que são levados por f para $\text{int } R_j$.

Considere o subconjunto $\Sigma_A^+ = \{(i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_m^+ : a_{i_l i_{l+1}} = 1, \forall l \geq 1\}$ e seja $w \in \Sigma_A^+$. Daí, $a_{i_l i_{l+1}} = 1$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Com isso, $a_{i_{l+n} i_{(l+n)+1}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\sigma^n(w) \in \Sigma_A^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde concluímos que Σ_A^+ é invariante por σ .

Definição: A restrição da aplicação shift σ ao σ -conjunto invariante

$$\Sigma_A^+ = \{(i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_m^+ : a_{i_l i_{l+1}} = 1, \forall l \geq 1\}$$

é chamada de *cadeia topológica de Markov* com *matriz de transição* A .

Considere $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$. Dizemos que a sequência finita $(i_1 \dots i_k)$ é uma *sequência admissível* se $f(\text{int } R_{i_{l+1}}) \cap \text{int } R_{i_l} \neq \emptyset$ para $l = 1, \dots, k-1$, ou seja, a sequência $(i_1 \dots i_k)$ é formada pelos k primeiros elementos de alguma sequência em Σ_A^+ . Equivalentemente, se $a_{i_l i_{l+1}} = 1$ para $l = 1, \dots, k-1$ ou se $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k} = 1$.

Uma transformação $f : X \rightarrow X$, de um espaço métrico compacto, diz-se *topologicamente misturadora* se dados abertos não vazios $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para qualquer $m \geq n$.

Proposição 4.2.4. *Sejam (V, J, f) um repulsor conforme misturador e uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ de J com diâmetro suficientemente pequeno com matriz de transição $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ de ordem $m \times m$. Então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que a matriz A^q tem somente entradas inteiras positivas.*

Demonstração: Como f é topologicamente misturadora sobre J , dados $i, j \in \{1, \dots, m\}$ existe $N_{i,j}$ tal que os abertos $U_i = \text{int } R_i$ e $U_j = \text{int } R_j$ satisfazem

$$f^n(U_i) \cap (U_j) \neq \emptyset, \forall n \geq N_{i,j}.$$

Logo, $(a_{i,j}^n) = 1$ para todo $n \geq N_{i,j}$, onde $(a_{i,j}^n)$ é o i, j elemento da matriz $A^n = (a_{i,j}^n)_{i,j=1}^m$. Seja $N = \max_{i,j=1,\dots,m} N_{i,j}$. Assim, para $q \in \mathbb{N}$ com $q \geq N$ tem-se $a_{i,j}^q = 1$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$. ■

Agora, considere a aplicação $\pi : \Sigma_A^+ \rightarrow J$ definida por:

$$\pi(i_1 i_2 i_3 \dots) = \bigcap_{l=0}^{\infty} f^{-l}(R_{i_{l+1}}). \quad (4.2)$$

O próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], nos mostra como podemos relacionar a dinâmica simbólica com a dinâmica um repulsor conforme.

Teorema 4.2.5. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme. Então para qualquer partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_0, \dots, R_m\}$ de J , existe uma cadeia topológica de Markov Σ_A^+ e uma aplicação $\pi : \Sigma_A^+ \rightarrow J$ definida como em (4.2) que é bem definida, sobrejetora, Hölder contínua e satisfaz $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$.*

Na demonstração do Teorema 4.2.5 vê-se que $f^{-l}(R_{i_{l+1}})$ com $l = 0, 1, 2, \dots$ é uma sequência encaixada de conjuntos e portanto a sua intersecção é não é vazia e portanto π está bem definida.

O Teorema 4.2.5 nos diz que podemos relacionar o sistema dinâmico (f, J) com uma cadeia de Markov topológica (σ, Σ_A^+) através de partições de Markov.

Observações. Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma partição de Markov de J como diâmetro arbitrariamente pequeno.

1. Seja $(i_1 \dots i_k)$ uma seqüência admissível. Denotaremos por $R_{i_1 \dots i_k}$ o seguinte conjunto:

$$R_{i_1 \dots i_k} = \bigcap_{l=0}^k f^{-l}(R_{i_{l+1}}) = R_{i_1} \cap f^{-1}(R_{i_2}) \cap \dots \cap f^{-k}(R_{i_{k+1}}).$$

Pela definição da partição de Markov, $R_{i_1 \dots i_k} \neq \emptyset$ para qualquer seqüência finita admissível $(i_1 \dots i_k)$.

2. Pela Proposição 4.2.4, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a matriz de transição A associada a partição de Markov \mathcal{R} é composta somente de 1, ou seja, $a_{i,j} = 1$ para todo $i, j \in \{1, \dots, m\}$.
3. Pela observação 2. acima, a seqüência $(i_1 \dots i_k i_1 i_2 \dots i_k i_1 \dots) = ((i_1 i_2 \dots i_k)^{\mathbb{N}})$ é uma seqüência admissível para qualquer seqüência $(i_1 i_2 \dots i_k)$ admissível. Dessa forma, $\pi((i_1 i_2 \dots i_k)^{\mathbb{N}}) = x$, onde x é um ponto k -periódico com $x = f^k(x) \in R_{i_1 \dots i_k}$.
4. Se $x, y \in R_{i_1 \dots i_k}$, pela observação 2., temos $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \text{diam } R_{i_{k+1}} \leq \Delta$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos escrever a desigualdade em (3.10) como $e^{-C\Delta^\epsilon} \leq \frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|} \leq e^{C\Delta^\epsilon}$. Fazendo $D = e^{C\Delta^\epsilon} > 0$ obtemos

$$\frac{1}{D} \leq \frac{|(f^k)'(x)|}{|(f^k)'(y)|} \leq D. \quad (4.3)$$

A constante D é chamada de *constante de distorção* (com respeito à partição de Markov \mathcal{R}).

Finalmente, usando o Teorema 3.2.4 (distorção limitada), provaremos dois resultados de distorção, que nos permitirão obter um controle sobre a “*forma*” dos elementos da partição de Markov.

Proposição 4.2.6. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme com f de classe $C^{1+\epsilon}$. Então existe uma constante $M > 1$ tal que para qualquer sequência $(i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_A^+$ tem-se*

$$\text{diam } R_{i_1 \dots i_n} \leq M \cdot |(f^{n-1})'(z)|^{-1}, \quad \forall z \in R_{i_1 \dots i_n} \text{ e } \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma partição de Markov para J tal que $f|_{R_i}$ é invertível. Com isso, $f^{n-1}|_{R_{i_1 \dots i_n}}$ é invertível.

Agora vamos mostrar a desigualdade do Teorema. Seja $h = f^{-(n-1)}$ o ramo inverso de f^{n-1} em $R_{i_1 \dots i_n}$. Sendo f é conforme em J e $[(f^n)'(z)]^{-1} = h'(f^n(z))$, temos que $|h'(f^n(z))| = |(f^n)'(z)|^{-1}$. Como $R_{i_n} \subseteq B_{\delta_0}(w)$ para qualquer $w \in R_{i_n}$, a Desigualdade do Valor Médio aplicada a h em $B_{\delta_0}(w)$ nos dá

$$\begin{aligned} \text{diam } R_{i_1 \dots i_n} &= \sup_{x, y \in R_{i_1 \dots i_n}} |x - y| \\ &\leq \sup_{x, y \in R_{i_1 \dots i_n}} |f^{n-1}(x) - f^{n-1}(y)| \cdot \sup_{\xi_1 \in B_{\delta_0}(w)} |h'(\xi_1)| \\ &\leq \text{diam } \mathcal{R} \cdot \sup_{\xi_1 \in B_{\delta_0}(w)} |h'(\xi_1)| \\ &= \text{diam } \mathcal{R} \cdot \sup_{\theta_1 \in h(B_{\delta_0}(w))} |(f^{n-1})'(\theta_1)|^{-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como $R_{i_1 \dots i_n} \subset h(B_{\delta_0}(w))$ e aplicando a desigualdade (4.3) em (4.4) obtemos

$$\text{diam } R_{i_1 \dots i_n} \leq \Delta D |(f^{n-1})'(z)|^{-1} \quad \forall z \in R_{i_1 \dots i_n}. \quad (4.5)$$

O resultado segue de (4.5) fazendo $M = \Delta D > 1$. ■

Proposição 4.2.7. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme com f de classe $C^{1+\epsilon}$. Então existe uma constante $m > 1$ tal que para toda sequência $(i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_A^+$ e para todo $n \geq 1$ existe uma bola aberta de centro em um ponto $p \in R_{i_1 \dots i_n}$ e raio $m \cdot |(f^{n-1})'(w)|^{-1}$ que está contida em $R_{i_1 \dots i_n}$ para todo $w \in R_{i_1 \dots i_n}$.*

Demonstração: Sabemos que cada conjunto R_i da partição de Markov é igual ao fecho do seu interior. Com isso, existem $\rho > 0$ e pontos w_i tais que $B_i = B_\rho(w_i) \subset R_i$ para $i = 1, \dots, m$.

Sejam $(i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_A^+$ com $n \geq 1$ e $h = f^{-(n-1)}$ o ramo inverso de f^{n-1} que leva R_{i_n} para $R_{i_1 \dots i_n}$. Pela conformalidade de f em J , temos que $|h'(f^n(z))| = |(f^n)'(z)|^{-1}$.

Seja $z_i \in \overline{B}_\rho(w_{i_n})$ tal que $|h'(z_i)| = \inf\{|h'(z)|; z \in \overline{B}_\rho(w_{i_n})\}$, e tome $x \in \partial(h(B_\rho(w_{i_n})))$ tal que $|x - h(w_{i_n})| = \inf\{|u - h(w_{i_n})|; u \in \partial(h(B_\rho(w_{i_n})))\}$. Considere a curva $\beta : [0, 1] \rightarrow h(B_\rho(w_{i_n})) \subset R_{i_1 \dots i_n}$ com $\beta(0) = h(w_{i_n})$ e $\beta(1) = x$. Usando a conformalidade de f e a Desigualdade da Médio na bola B_{i_n} temos,

$$\begin{aligned}
 |x - h(w_{i_n})| &= \int_0^1 |\beta'(t)| dt = \int_0^1 |(h \circ f^{n-1} \circ \beta)'(t)| dt \\
 &= \int_0^1 |h'(f^{n-1} \circ \beta(t))| \cdot |(f^{n-1} \circ \beta)'(t)| dt \\
 &\geq |h'(z_i)| \int_0^1 |(f^{n-1} \circ \beta)'(t)| dt \\
 &\geq |h'(z_i)| \cdot |w_{i_n} - f^{n-1}(x)| \\
 &\geq |h'(z_i)| \cdot \rho \\
 &= |(f^{n-1})'(\theta)|^{-1} \cdot \rho
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

pois $f^{n-1}(x) \in \partial B_\rho(w_{i_n})$ e $\theta \in h(B_\rho(w_{i_n}))$.

Agora, aplicando a distorção limitada em (4.6), obtemos

$$|x - h(w_{i_n})| \geq |(f^{n-1})'(\theta)|^{-1} \cdot \rho \geq |(f^{n-1})'(w)|^{-1} \cdot \rho \cdot D^{-1},$$

para todo $w \in R_{i_1 \dots i_n}$.

Com isso, $B_{D^{-1}\rho|(f^{n-1})'(w)|^{-1}}(h(w_{i_n})) \subset h(B_\rho(w_{i_n})) \subset R_{i_1 \dots i_n}$. Assim, fazendo $m = D^{-1}\rho > 0$ e $p = h(w_{i_n}) \in R_{i_1 \dots i_n}$ obtemos o resultado desejado. \blacksquare

Corolário 4.2.8. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme com f de classe $C^{1+\epsilon}$. Então existe uma constante $c > 1$ tal que para qualquer sequência $(i_1 i_2 i_3 \dots) \in \Sigma_A^+$ tem-se*

$$c^{-1} \cdot |(f^{n-1})'(z)|^{-1} \leq \text{diam } R_{i_1 \dots i_n} \leq c \cdot |(f^{n-1})'(z)|^{-1}, \quad \forall z \in R_{i_1 \dots i_n} \text{ e } \forall n \geq 1.$$

Demonstração: O resultado segue diretamente das Proposições (4.2.6) e (4.2.7) bastando tomar $c = \max\{\Delta, 1/\rho\} > 1$.

A Proposição 4.2.6 juntamente com a Proposição 4.2.7 nos diz que: existem constantes m e M tal que para cada sequência admissível $(i_1 \dots i_n)$ com $n \geq 1$, as bolas abertas $B_{m|(f^{n-1})'(x)|^{-1}}(x)$ e $B_{M|(f^{n-1})'(x)|^{-1}}(x)$ satisfazem a seguinte relação

$$B_{m|(f^{n-1})'(x)|^{-1}}(x) \subset R_{i_1 \dots i_n} \subset B_{M|(f^{n-1})'(x)|^{-1}}(x)$$

para algum x em $R_{i_1 \dots i_n}$. Isto nos mostra o seguinte: para repulsores conformes, embora os conjuntos $R_{i_1 \dots i_n}$ não sejam exatamente bolas, os mesmos se comportam como se fossem bolas no plano complexo. Note que, tirando os fatores que aparecem por conta da distorção, o raio dessas bolas é dado por $|(f^{n-1})'(z)|^{-1}$, onde z é um ponto qualquer de $R_{i_1 \dots i_n}$.

4.3 Pressão Topológica

Nesta seção definiremos um dos objetos matemáticos mais importantes do Formalismo Termodinâmico: a *Pressão Topológica*. Tal conceito desempenha um papel fundamental nessa área, pois é a partir dela que mostra-se a relação existente entre o Formalismo Termodinâmico e a Teoria da Dimensão.

Sejam (J, V, f) um repulsor conforme, \mathcal{R} uma partição de Markov para J e (Σ_A^+, σ) a dinâmica simbólica associada ao sistema dinâmico (J, f) . A pressão

topológica de uma função contínua $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ com relação à f é definida por:

$$P_f(\varphi) = P(\varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)} e^{\max\{S_n \varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_n}\}}, \quad (4.7)$$

onde a soma é tomada sobre todas as seqüências finitas admissíveis.

Proposição 4.3.1. *O limite em (4.7) está bem definido.*

Para demonstrar esta Proposição 4.3.1, precisaremos dos lemas a seguir. Note que uma seqüência de números reais $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é *subaditiva* se $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Lema 4.3.2. *Se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de números reais subaditiva então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$ existe e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_k}{k}; k \in \mathbb{N} \right\}$.*

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$. Pelo algoritmo de Euclides, $n = qk + r$ para algum $q \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Assim,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qk+r}}{qk+r} \leq \frac{a_{qk} + a_r}{qk+r} \leq \frac{qa_k + a_r}{qk+r} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{a_r}{qk}.$$

Como $q \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que $\limsup \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}$. Com isso,

$$\limsup \frac{a_n}{n} \leq \inf \left\{ \frac{a_k}{k}; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dessa forma temos $\limsup \frac{a_n}{n} \leq \inf \left\{ \frac{a_k}{k}; k \in \mathbb{N} \right\} \leq \liminf \frac{a_n}{n}$.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_k}{k}; k \in \mathbb{N} \right\}$. ■

Lema 4.3.3. *A seqüência $(\log M_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais definida por*

$$M_n = \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max\{S_n \varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_n}\}}$$

é uma seqüência subaditiva.

Demonstração: Sabemos que $S_{n+m}\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n+m-1} \varphi(f^j(x)) = S_n\varphi(x) + S_m\varphi(f^n(x))$.

Seja $x \in R_{i_1 \dots i_{n-1} i_n \dots i_{n+m}}$. Então $f^n(x) \in R_{i_n \dots i_{n+m}}$. Daí,

$$\begin{aligned} \max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1} i_n \dots i_{n+m}}\} &\leq \max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1}}\} \\ &+ \max \{S_m\varphi(y); y \in R_{i_n \dots i_{n+m}}\}. \end{aligned}$$

Como a função exponencial é crescente temos,

$$e^{\max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1} i_n \dots i_{n+m}}\}} \leq e^{\max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1}}\}} \cdot e^{\max \{S_m\varphi(y); y \in R_{i_n \dots i_{n+m}}\}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_{n+m} &= \log \sum_{(i_1 \dots i_{n+m})} e^{\max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1} i_n \dots i_{n+m}}\}} \\ &\leq \log \sum_{(i_1 \dots i_{n+m})} \left(e^{\max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1}}\}} \cdot e^{\max \{S_m\varphi(y); y \in R_{i_n \dots i_{n+m}}\}} \right) \\ &= \log \sum_{(i_1 \dots i_{n-1})} e^{\max \{S_n\varphi(x); x \in R_{i_1 \dots i_{n-1}}\}} + \log \sum_{(i_n \dots i_m)} e^{\max \{S_m\varphi(y); y \in R_{i_n \dots i_{n+m}}\}} \\ &= M_n + M_m. \end{aligned}$$

Logo, $M_{m+n} \leq M_m + M_n$. ■

A demonstração da Proposição 4.3.1 segue diretamente do Lema 4.3.3.

Exemplo 4.3.1. Dados números $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$, considere a função contínua $\varphi :$

$\Sigma_k^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(i_1 i_2 \dots) = \log \lambda_{i_1}$. Então,

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} e^{\sum_{i=1}^n \log \lambda_{i_i}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} (\lambda_{i_1} \cdot \lambda_{i_2} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right)^n \right] \\ &= \log \sum_{j=1}^k \lambda_j. \end{aligned}$$

No teorema a seguir, daremos uma caracterização alternativa da pressão topológica. Esta outra caracterização tem a vantagem de não requerer uma partição de Markov e uma dinâmica simbólica para J .

Proposição 4.3.4. *Sejam (J, V, f) um repulsor conforme misturador e $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ϵ -Hölder contínua. Então,*

$$P_f(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)}$$

onde $\text{Fix}(f^n) = \{x \in J, f^n(x) = x\}$ é o conjunto dos pontos fixos de f^n em J .

Demonstração: Sejam $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma partição de Markov para J com $\Delta = \text{diam } \mathcal{R} < \delta$ e $x \in J \cap \text{Fix}(f^n)$. Pelo item (3) da observação feita na Seção (4.2), $x \in R_{i_1 \dots i_n}$ para uma sequência finita admissível $(i_1 \dots i_n)$.

Seja $y \in R_{i_1 \dots i_n}$. Então $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \text{diam } R_{i_{k+1}} < \Delta < \delta$ para todo $k = 0, \dots, n-1$.

Pelo Lema 3.2.3,

$$\begin{aligned} S_n \phi(y) &= S_n \phi(y) - S_n \phi(x) + S_n \phi(x) \\ &\leq C \cdot d(f^n(y), f^n(x))^\epsilon + S_n \phi(x) \\ &< C \cdot \delta^\epsilon + S_n \phi(x) \\ &= D + S_n \phi(x). \end{aligned}$$

Logo, $\max \{S_n \phi(y), y \in R_{i_1 \dots i_n}\} \leq D + S_n \phi(x)$.

Com isso,

$$\sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n \phi(y), y \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \leq e^D \cdot \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)},$$

donde concluimos que,

$$\frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n \phi(y), y \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \leq \frac{D}{n} + \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)}. \quad (4.8)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (4.8) obtemos,

$$P_f(\phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)}. \quad (4.9)$$

Para obter a desigualdade inversa, basta notar que $S_n \phi(x) \leq \max \{S_n \phi(y), y \in R_{i_1 \dots i_n}\}$. Daí,

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)} \leq \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n \phi(y), y \in R_{i_1 \dots i_n}\}},$$

donde concluimos que,

$$\frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)} \leq \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n \phi(y), y \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \quad (4.10)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (4.10) obtemos,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)} \leq P_f(\phi). \quad (4.11)$$

Portanto, de (4.9) e (4.11),

$$P_f(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{S_n \phi(x)}.$$

■

Exemplo 4.3.2. *Considere um repulsor conforme misturador (J, V, f) com f de classe $C^{1+\epsilon}$. Então a função $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = -\log |f'(x)|$ é ϵ -Hölder contínua. Como f é conforme, $S_n \varphi(x) = -\log |(f^n)'(x)|$, para qualquer $x \in J$. Com isso,*

$$\begin{aligned} P_f(\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} e^{-\log |(f^n)'(x)|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} |(f^n)'(x)|^{-1} \end{aligned}$$

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *convexa* quando para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Proposição 4.3.5. *Seja (J, V, f) um repulsor conforme. Então a função pressão topológica $P : C(V) \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa.*

Demonstração: Sejam $\phi, \psi \in C(V)$ e $0 < \alpha < 1$.

Daí, $\max \{S_n(\alpha\phi + (1-\alpha)\psi)(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\} \leq \alpha \cdot \max \{S_n\phi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\} + (1-\alpha) \cdot \max \{S_n\psi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}$.

Com isso,

$$e^{\max \{S_n(\alpha\phi + (1-\alpha)\psi)(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \leq e^{\alpha \cdot \max \{S_n\phi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \cdot e^{(1-\alpha) \cdot \max \{S_n\psi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}},$$

donde obtemos,

$$\sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n(\alpha\phi + (1-\alpha)\psi)(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \leq \sum_{(i_1 \dots i_n)} \left[\left(e^{\max \{S_n\phi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \right)^\alpha \cdot \left(e^{\max \{S_n\psi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \right)^{1-\alpha} \right]. \quad (4.12)$$

Sejam $a = 1/\alpha$ e $b = 1/(1-\alpha)$. Daí, $1/a + 1/b = \alpha + 1 - \alpha = 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder em (4.12) temos

$$\sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n(\alpha\phi + (1-\alpha)\psi)(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \leq \left(\sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n\phi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \right)^\alpha \cdot \left(\sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n\psi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \right)^{1-\alpha},$$

donde obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n(\alpha\phi + (1-\alpha)\psi)(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} &\leq \frac{\alpha}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n\phi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \\ &+ \frac{(1-\alpha)}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max \{S_n\psi(x), x \in R_{i_1 \dots i_n}\}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Quando $n \rightarrow \infty$ em (4.13) temos $P(\alpha\phi + (1-\alpha)\psi) \leq \alpha \cdot P(\phi) + (1-\alpha) \cdot P(\psi)$,

ou seja, P é convexa. ■

Corolário 4.3.6. *Sejam (J, V, f) um repulsor conforme e $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = -\log |f'(x)|$. A função $t \mapsto P(-t \log |f'|)$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: A função φ é contínua em J e com isso $\varphi \in C(J)$. Como J é compacto, segue da proposição anterior que a função $P(-t \log |f'|) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e portanto, é contínua em \mathbb{R} . ■

Proposição 4.3.7. *Sejam (J, V, f) um repulsor conforme com f de classe $C^{1+\epsilon}$ e $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = -\log |f'(x)|$. A função $t \mapsto P(-t \log |f'|)$ é decrescente em \mathbb{R} .*

Demonstração: Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Da condição (R.1) de repulsor conforme, para n suficientemente grande, existem $\alpha > 1$ e $C > 0$ tais que $|(f^n)'(x)| > C\alpha^n > \beta^n$ para todo $x \in J$ e para algum $1 < \beta < \alpha$.

Como f é de classe $C^{1+\epsilon}$, $\varphi(x) = -\log |f'(x)|$ é ϵ -Hölder contínua. Com isso,

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} |(f^n)'(x)|^{-t} \cdot |(f^n)'(x)|^{-\epsilon} \leq \beta^{-n\epsilon} \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} |(f^n)'(x)|^{-t},$$

donde concluimos que,

$$\frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} |(f^n)'(x)|^{-(t+\epsilon)} \leq -\frac{\epsilon}{n} \log \beta + \frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} |(f^n)'(x)|^{-t}. \quad (4.14)$$

Sendo $\epsilon > 0$, quando $n \rightarrow \infty$ em (4.14) obtemos,

$$P(-(t + \epsilon) \log |f'|) \leq P(-t \log |f'|).$$

Portanto, a função $t \mapsto P(-t \log |f'|)$ é decrescente. ■

Proposição 4.3.8. $\lim_{t \rightarrow \infty} P(-t \log |f'|) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(-t \log |f'|) = +\infty$.

Demonstração: Da condição (R.1) de repulsor conforme, existem $\alpha > 1$ e $C > 0$ tais que $|(f^n)'(x)| > C\alpha^n$ para todo $x \in J$ e $n \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\frac{1}{n} \log \sum_{x \in \text{Fix}(f^n)} |(f^n)'(x)|^{-t} < -\frac{t}{n} \log C - t \log \alpha. \quad (4.15)$$

Quando $n \rightarrow \infty$ em (4.15) obtemos, $P(-t \log |f'|) \leq -t \log \alpha$. Agora, fazendo $t \rightarrow \infty$, concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(-t \log |f'|) = -\infty$.

Para o segundo limite, pela Proposição 4.3.7, $P(-s \log |f'|) - P(-t \log |f'|) \leq -(s - t) \log \alpha$ para $t < s$, ou seja, $P(-t \log |f'|) \geq P(-s \log |f'|) + (s - t) \log \alpha$.

Quando $t \rightarrow -\infty$, concluímos que $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(-t \log |f'|) = +\infty$. ■

Em resumo, a função $t \mapsto P(-t \log |f'|)$ é convexa, contínua e estritamente decrescente em \mathbb{R} com $\lim_{t \rightarrow \infty} P(-t \log |f'|) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(-t \log |f'|) = +\infty$. Logo, existe um único número real t_0 tal que

$$P(-t_0 \log |f'|) = 0.$$

4.4 Medida de Gibbs

Nesta seção, faremos uma breve explanação sobre medida de Gibbs, nos restringindo ao caso particular da dinâmica simbólica.

Seja (J, V, f) um repulsor conforme.

Definição: Dados uma partição de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ para J com diâmetro suficientemente pequeno e uma função contínua $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que uma medida de probabilidade μ em J é uma *medida de Gibbs* para φ se existe uma constante real $M \geq 1$ tal que para todo $n \geq 1$

$$M^{-1} \leq \frac{\mu(R_{i_1 \dots i_n})}{e^{-nP(\varphi) + S_n \varphi(x)}} \leq M \quad (4.16)$$

para toda sequência finita admissível $(i_1 \dots i_n)$ e para todo $x \in R_{i_1 \dots i_n}$.

Em particular, para a aplicação deslocamento σ de uma cadeia topológica de Markov,

$$M^{-1} \leq \frac{\mu(C_{i_1 \dots i_n})}{e^{-nP(\varphi) + S_n \varphi(w)}} \leq M \quad (4.17)$$

para toda $(i_1 i_2 \dots) \in \Sigma_A^+$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in C_{i_1 \dots i_n}$ e $\varphi : \Sigma_A^+ \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Uma pergunta que surge naturalmente é se sempre existe uma medida de Gibbs associada a uma função contínua φ . A resposta, nesse caso, é não, pois existem exemplos de funções contínuas que não existem medidas de Gibbs associadas a elas. Porém, se φ for uma função Hölder contínua definida num conjunto compacto a resposta é sim. Essa resposta é consequência de um importante teorema devido a Ruelle.

Teorema 4.4.1. *Sejam (J, V, f) um repulsor conforme misturador e $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua. Então existe uma única medida de Gibbs μ associada a φ .*

A demonstração do Teorema 4.4.1 pode ser encontrada em Ruelle [12] ou em Zinsmeister [14] e baseia-se no Teorema de Ruelle no qual é extenso, porém construtivo.

Exemplo 4.4.1. Dados números $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ com $\sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i} = 1$, considere a função contínua $\varphi : \Sigma_2^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(i_1 i_2 \dots) = \lambda_{i_1}$. Daí,

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} e^{\sum_{l=1}^n \varphi \circ \sigma^l(i_1 \dots i_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i_1 \dots i_n} e^{(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\left(\sum_{j=1}^2 e^{\lambda_j} \right)^n \right] \\ &= \log \sum_{j=1}^2 e^{\lambda_j} = \log 1 = 0. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\mu(C_{i_1 \dots i_n}) = e^{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n}},$$

ou seja, μ é a medida de Gibbs para φ em Σ_2^+ .

4.5 A Equação de Bowen-Ruelle

Nesta seção, apresentaremos a demonstração do Teorema 1. Este resultado é devido à Ruelle e mostra a relação que existe entre a equação $P(-t \log |f'|) = 0$ (também conhecida como equação de Bowen ou equação de Bowen-Ruelle) e a dimensão de Hausdorff do conjunto J de um repulsor conforme (V, J, f) .

Para provar o Teorema 1 seguiremos as idéias expostas por David Ruelle em [11]. Para isso, vamos começar fazendo algumas considerações iniciais e demonstrando alguns lemas que serão úteis para a compreensão do mesmo.

Seja $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ uma partição de Markov para J com diâmetro Δ suficientemente pequeno.

Começaremos então com o seguinte lema geométrico,

Lema 4.5.1. *Existe um número real $K \geq 1$ tal que para todo $n \geq 1$ e para qualquer sequência finita admissível $(i_1 \dots i_n)$, o número de conjuntos $R_{j_1 \dots j_n}$, com $(j_1 \dots j_n)$ uma sequência finita admissível, que interceptam $R_{i_1 \dots i_n}$ é no máximo K .*

Demonstração: Sejam $n \geq 1$ e $(i_1 \dots i_n)$ uma sequência admissível. Sejam $R_{j_1 \dots j_n}$ tais que $R_{j_1 \dots j_n} \cap R_{i_1 \dots i_n} \neq \emptyset$, $(j_1 \dots j_n)$ sequências admissíveis. Para cada $R_{j_1 \dots j_n}$, seja m_j o maior número tal que a bola B_{m_j} , de raio m_j , esteja contida em $R_{j_1 \dots j_n}$. Seja $\bar{M} = \max_{(j_1 \dots j_n)} \{\text{diam } R_{j_1 \dots j_n}\}$. Daí, $\cup_{(j_1 \dots j_n)} R_{j_1 \dots j_n} \subset B_{2\bar{M}}(\xi)$, onde $\xi \in R_{i_1 \dots i_n}$.

Da mesma forma, seja $\bar{m} = \min_{(j_1 \dots j_n)} \{\text{diam interior de } R_{j_1 \dots j_n}\}$, onde o *diâmetro interior de $R_{j_1 \dots j_n}$* é o maior diâmetro de uma bola que está completamente contida em $R_{j_1 \dots j_n}$.

Como $R_{j_1 \dots j_n}$ tem interior disjuntos temos

$$\begin{aligned} \text{area } B_{2\bar{M}}(\xi) &= 4\pi\bar{M}^2 \\ &\geq \sum_{(j_1 \dots j_n)} \text{area } B_{m_j} \\ &= \sum_{(j_1 \dots j_n)} \pi m_j^2 \\ &\geq \sum_{(j_1 \dots j_n)} \pi \bar{m}^2, \end{aligned}$$

onde a soma é tomada sobre todos os conjuntos $R_{j_1 \dots j_n}$ que interceptam $R_{i_1 \dots i_n}$.

Certamente, dado uma sequência admissível $(i_1 \dots i_n)$ com $n \geq 1$ existe somente um número finito K de conjuntos $R_{j_1 \dots j_n}$ que interceptam $R_{i_1 \dots i_n}$. Vamos mostrar que esse número finito K não depende de n e nem da sequência admissível $(i_1 \dots i_n)$. Se existe um número K de conjuntos $R_{j_1 \dots j_n}$ tais que $R_{j_1 \dots j_n} \cap R_{i_1 \dots i_n} \neq \emptyset$, então $4\pi\bar{M}^2 \geq K\pi\bar{m}^2$ donde concluímos que

$$K \leq 4 \frac{\bar{M}^2}{\bar{m}^2} = 4 \left(\frac{\bar{M}}{\bar{m}} \right)^2.$$

Por outro lado, pela Proposição 4.2.7, $\bar{m} = \min_{(j_1 \dots j_n)} \{m_j\} \geq c^{-1} \rho |(f^{n-1})'(y_{l_1 \dots l_n})|^{-1}$ onde $y_{l_1 \dots l_n}$ é um ponto em algum $R_{l_1 \dots l_n}$ com $R_{l_1 \dots l_n} \cap R_{i_1 \dots i_n} \neq \emptyset$ e, pela Proposição 4.2.6, $\bar{M} = \max_{(j_1 \dots j_n)} \{\text{diam } R_{j_1 \dots j_n}\} \leq c |(f^{n-1})'(z_{t_1 \dots t_n})|^{-1}$ onde $z_{t_1 \dots t_n}$ é um ponto em algum $R_{t_1 \dots t_n}$ com $R_{t_1 \dots t_n} \cap R_{i_1 \dots i_n} \neq \emptyset$. Usando a distorção limitada em $R_{l_1 \dots l_n}$ e em $R_{t_1 \dots t_n}$ temos

$$\bar{m} \geq c^{-1} \rho |(f^{n-1})'(y_{l_1 \dots l_n})|^{-1} \geq c^{-2} \rho |(f^{n-1})'(\bar{y})|^{-1}$$

$$\bar{M} \leq c |(f^{n-1})'(z_{t_1 \dots t_n})|^{-1} \leq c^2 |(f^{n-1})'(\bar{z})|^{-1},$$

onde $\bar{y} \in R_{l_1 \dots l_n} \cap R_{i_1 \dots i_n}$ e $\bar{z} \in R_{t_1 \dots t_n} \cap R_{i_1 \dots i_n}$. Assim,

$$K \leq 4 \left(\frac{\bar{M}}{\bar{m}} \right)^2 \leq 4 \left(\frac{c^2 |(f^{n-1})'(\bar{z})|^{-1}}{c^{-2} \rho |(f^{n-1})'(\bar{y})|^{-1}} \right)^2,$$

com $\bar{y}, \bar{z} \in R_{i_1 \dots i_n}$. Usando novamente a distorção limitada, agora em $R_{i_1 \dots i_n}$,

$$K \leq 4 \left(\frac{c^3 |(f^{n-1})'(\bar{y})|^{-1}}{c^{-2} \rho |(f^{n-1})'(\bar{y})|^{-1}} \right)^2 = 4c^6 c^4 \rho^{-2} = 4c^{10} \rho^{-2}.$$

Logo, concluímos que K é uma constante positiva limitada e não dependente de n . ■

Para demonstrarmos a relação citada no início da seção, precisaremos construir uma cobertura especial para J de modo que essa nova cobertura tenha propriedades similares a de uma partição de Markov para J .

Considere a família de conjuntos $\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m\}$ onde os elementos de $\tilde{\mathcal{R}}$ são abertos e satisfazem as seguintes propriedades:

1. Para cada $i = 1, \dots, m$ tem-se $\text{diam } R_i < \text{diam } \tilde{R}_i < \tilde{\Delta}$;
2. Para cada $i = 1, \dots, m$ tem-se $R_i \subset \tilde{R}_i$ e \tilde{R}_i contém δ -vizinhança de R_i com $0 < \delta < \tilde{\Delta}$;

3. $\tilde{R}_i \cap \tilde{R}_j = \emptyset$ sempre que $R_i \cap R_j = \emptyset$.

Para cada sequência admissível $(i_1 \dots i_k)$, definimos

$$\tilde{R}_{i_1 \dots i_k} = \bigcap_{l=0}^{k-1} f^{-l} \left(\tilde{R}_{i_{l+1}} \right).$$

Em particular temos

$$\begin{aligned} R_{i_1 \dots i_n} \cap R_{j_1 \dots j_n} \neq \emptyset &\Leftrightarrow f^{-l} R_{i_{l+1}} \cap f^{-l} R_{j_{l+1}} \neq \emptyset \quad \forall l = 0, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow R_{i_{l+1}} \cap R_{j_{l+1}} \neq \emptyset \quad \forall l = 0, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{R}_{i_{l+1}} \cap \tilde{R}_{j_{l+1}} \neq \emptyset \quad \forall l = 0, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{R}_{i_1 \dots i_n} \cap \tilde{R}_{j_1 \dots j_n} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, os conjuntos $\tilde{R}_{j_1 \dots j_n}$ que intersectam $\tilde{R}_{i_1 \dots i_n}$ correspondem precisamente aos conjuntos $R_{j_1 \dots j_n}$ que intersectam $R_{i_1 \dots i_n}$, e pelo Lema 4.5.1. existem no máximo K desses conjuntos.

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.

Demonstração do Teorema 1: Vimos, no final da seção 4.3, que existe um único número real t_0 tal que $P(-t_0 \log |f'|) = 0$. Vamos mostrar que $\dim_H J = t_0$.

Como f é de classe $C^{1+\epsilon}$, a função $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = -\log |f'(x)|$ é Hölder contínua, logo pelo Teorema 4.4.1, existe uma única medida de Gibbs μ associada a $t_0 \varphi$. Assim, existe $C > 1$ tal que para todo $n \geq 1$ e para todo $x \in R_{i_1 \dots i_n}$ tem-se

$$C^{-1} \leq \frac{\mu(R_{i_1 \dots i_n})}{e^{t_0 S_n \varphi(x)}} \leq C. \quad (4.18)$$

Usando a Proposição 4.2.6, a conformalidade de f , duas vezes a desigualdade (4.18) e o fato de que $R_{i_1 \dots i_n} = \bigcup_{(i_{n+1} \dots i_{n+p})} R_{i_1 \dots i_n i_{n+1} \dots i_{n+p}}$, denotando $x_{i_1 \dots i_n}$ para

indicar um ponto em $R_{i_1 \dots i_n}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{t_0}(R_{i_1 \dots i_n}) &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+p}} |\tilde{R}_{i_1 \dots i_{n+p}}|^{t_0} \\
&\leq \limsup_{p \rightarrow \infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+p}} c^{t_0} \cdot |(f^{n+p})'(y_{i_1 \dots i_{n+p}})|^{-t_0} \\
&= \limsup_{p \rightarrow \infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+p}} c^{t_0} \cdot |(f^n)'(y_{i_1 \dots i_{n+p}})|^{-t_0} \cdot |(f^p)'(f^n(y_{i_1 \dots i_{n+p}}))|^{-t_0} \\
&= c^{t_0} \cdot \limsup_{p \rightarrow \infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+p}} |(f^p)'(x_{i_{n+1} \dots i_{n+p}})|^{-t_0} \cdot e^{t_0 S_n \varphi(y_{i_1 \dots i_{n+p}})} \\
&\leq c^{t_0} \cdot C \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}) \cdot \limsup_{p \rightarrow \infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+p}} |(f^p)'(x_{i_{n+1} \dots i_{n+p}})|^{-t_0} \\
&\leq c^{t_0} \cdot C^2 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}) \cdot \limsup_{p \rightarrow \infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+p}} \mu(R_{i_{n+1} \dots i_{n+p}}) \\
&= c^{t_0} \cdot C^2 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}) \cdot 1
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Observamos que, pela construção, usamos o fato de que os conjuntos $\tilde{R}_{i_1 \dots i_{n+p}}$ fornecem uma cobertura para $R_{i_1 \dots i_n}$ e que a propriedade de distorção limitada estende-se naturalmente para a família $\tilde{\mathcal{R}}$ (modificando as constantes de distorção se necessário).

Definindo $M_1 := c^{t_0} \cdot C^2$ em (4.19), concluímos que para toda sequência admissível $(i_1 \dots i_n)$ com $n \geq 1$ tem-se

$$\mathcal{H}^{t_0}(R_{i_1 \dots i_n}) \leq M_1 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}). \tag{4.20}$$

Seja $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ uma cobertura aberta para $R_{i_1 \dots i_n}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ tome um $y_j \in R_{i_1 \dots i_n} \cap U_j$. Com isso, $R_{i_1 \dots i_n} \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_{|U_j|}(y_j)$.

Agora, seja n_j o menor número natural com a seguinte propriedade:

$$\text{se } y_j \in R_{\xi_1 \dots \xi_{n_j+1}} \text{ então } c^{-1} \delta |(f^{n_j+1})'(y_j)|^{-1} \leq |U_j|, \tag{4.21}$$

onde c é a constante da Proposição 4.2.6 e δ é o da condição (2) de $\tilde{\mathcal{R}}$. Daí, para $y_j \in R_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}}$ tem-se $c^{-1} \delta |(f^{n_j})'(y_j)|^{-1} > |U_j|$, donde concluímos que, $R_{i_1 \dots i_n} \subset$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{|U_j|}(y_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{c^{-1}\delta|(f^{n_j})'(y_j)|^{-1}}(y_j).$$

Afirmação: Se $y \in R_{\xi_1 \dots \xi_l}$ então $B_{c^{-1}\delta|(f^l)'(y)|^{-1}}(y) \subset \tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_l}$.

Demonstração: Observamos que $y \in R_{\xi_1 \dots \xi_l}$ implica que $f^k(y) \in R_{\xi_k}$ para $k = 1, \dots, l-1$. Seja $w \in B_{c^{-1}\delta|(f^k)'(y)|^{-1}}(y)$. Pela Desigualdade da Média e pela Proposição 4.2.7 em R_{ξ_k} temos

$$c^{-1} \cdot |(f^k)'(y)|^{-1} \cdot |f^k(y) - f^k(w)| \leq |y - w| \leq c^{-1} \cdot \delta \cdot |(f^k)'(y)|^{-1},$$

donde concluimos que $|f^k(y) - f^k(w)| \leq \delta$ e com isso, $f^k(B_{c^{-1}\delta|(f^k)'(y)|^{-1}}(y)) \subseteq B_{\delta}(f^k(y)) \subset \tilde{R}_{\xi_k}$ para $k = 1, \dots, l-1$. Portanto, $B_{c^{-1}\delta|(f^l)'(y)|^{-1}}(y) \subset \tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_l}$. ■

Da afirmação acima temos

$$R_{i_1 \dots i_n} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{|U_j|}(y_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{c^{-1}\delta|(f^{n_j})'(y_j)|^{-1}}(y_j) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}}.$$

Assim, de (4.21) temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{t_0} &\geq \sum_{j=1}^{\infty} c^{-t_0} \cdot \delta^{t_0} \cdot |(f^{n_j+1})'(y_j)|^{-t_0} \\ &= c^{-t_0} \cdot \delta^{t_0} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |(f^{n_j+1})'(y_j)|^{-t_0} \\ &= c^{-t_0} \cdot \delta^{t_0} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} e^{t_0 S_{n_j+1} \varphi(y_j)} \\ &= c^{-t_0} \cdot \delta^{t_0} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)} \cdot e^{t_0 \varphi(f^{n_j}(y_j))} \\ &\geq c^{-t_0} \cdot \delta^{t_0} e^{-t_0 L} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde L é o máximo da função $|\varphi|$ em J .

Agora, como não sabemos se a família de conjuntos $\{R_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ cobre $R_{i_1 \dots i_n}$, não podemos usar a desigualdade (4.18). Então vamos considerar a família $\{R_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} : \tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}} \cap \tilde{R}_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} \neq \emptyset\}_{j \in \mathbb{N}}$. Pela afirmação acima, esta família cobre $R_{i_1 \dots i_n}$.

Como a partição de Markov \mathcal{R} tem diâmetro suficientemente pequeno, pelo Teorema 3.2.4 , existe uma constante $D > 1$ tal que para quaisquer $x, y \in R_{\xi_1 \dots \xi_k}$ e $k \geq 1$ tem-se

$$e^{-D} \leq \frac{e^{S_k \varphi(x)}}{e^{S_k \varphi(y)}} \leq e^D.$$

Daí, para $x \in R_{\xi_1 \dots \xi_n}$ e $y \in R_{\eta_1 \dots \eta_n}$ com $\tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_n} \cap \tilde{R}_{\eta_1 \dots \eta_n} \neq \emptyset$ temos

$$e^{-2D} \leq \frac{e^{S_n \varphi(x)}}{e^{S_n \varphi(y)}} \leq e^{2D}.$$

Em particular, para um $z \in R_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}}$ tal que $\tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}} \cap \tilde{R}_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} \neq \emptyset$ temos

$$e^{-2Dt_0} \leq \frac{e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)}}{e^{t_0 S_{n_j} \varphi(z)}} \leq e^{2Dt_0}.$$

Com isso,

$$e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)} \geq e^{-2Dt_0} \cdot e^{t_0 S_{n_j} \varphi(z)}. \quad (4.23)$$

Como existem no máximo K conjuntos $\tilde{R}_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}}$ tal que $\tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}} \cap \tilde{R}_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} \neq \emptyset$, de (4.23) temos

$$\begin{aligned} K \cdot e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)} &\geq \sum_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} e^{-2Dt_0} \cdot e^{t_0 S_{n_j} \varphi(z)} \\ &= e^{-2Dt_0} \sum_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} e^{t_0 S_{n_j} \varphi(z)}, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)} \geq K^{-1} e^{-2Dt_0} \sum_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} e^{t_0 S_{n_j} \varphi(z)}. \quad (4.24)$$

Para todo $j \in \mathbb{N}$, indexando em l todos os índices $\xi_1 \dots \xi_{n_j}$ e $\eta_1 \dots \eta_{n_j}$ tais que $\tilde{R}_{\xi_1 \dots \xi_{n_j}} \cap \tilde{R}_{\eta_1 \dots \eta_{n_j}} \neq \emptyset$ temos que $\{R_{\xi_1^{i_l} \dots \xi_{n_l}^{i_l}}\}$ é uma cobertura para $R_{i_1 \dots i_n}$ e assim,

substituindo (4.24) em (4.22) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{t_0} &\geq c^{-t_0} \delta^{t_0} e^{-t_0 L} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} e^{t_0 S_{n_j} \varphi(y_j)} \\
&\geq c^{-t_0} \delta^{t_0} e^{-t_0 L} K^{-1} e^{-2Dt_0} \sum_l e^{t_0 S_{n_l} \varphi(z_l)} \\
&\geq c^{-t_0} \delta^{t_0} e^{-t_0 L} K^{-1} e^{-2Dt_0} C^{-1} \sum_l \mu(R_{\xi_1^l \dots \xi_{n_l}^l}) \\
&\geq c^{-t_0} \delta^{t_0} e^{-t_0 L} K^{-1} e^{-2Dt_0} C^{-1} \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Definindo $M_2 := c^{-t_0} \delta^{t_0} e^{-t_0 L} K^{-1} e^{-2Dt_0} C^{-1}$ em (4.25), concluímos que para toda sequência admissível $(i_1 \dots i_n)$ com $n \geq 1$ tem-se

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{t_0} \geq M_2 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}).$$

Sendo $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma cobertura arbitrária para $R_{i_1 \dots i_n}$ temos que

$$\mathcal{H}^{t_0}(R_{i_1 \dots i_n}) \geq M_2 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}). \tag{4.26}$$

De (4.20) e (4.26) conclui-se que existem constantes reais positivas M_1 e M_2 tais que para toda sequência admissível $(i_1 \dots i_n)$ com $n \geq 1$ tem-se

$$M_2 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}) \leq \mathcal{H}^{t_0}(R_{i_1 \dots i_n}) \leq M_1 \cdot \mu(R_{i_1 \dots i_n}). \tag{4.27}$$

Como a família de conjuntos $\{R_{i_1 \dots i_n}, (i_1 \dots i_n \dots) \in \Sigma_A^+\}$ gera a topologia de J , ou seja, gera a σ -álgebra de Borel de J temos, de (4.27), que

$$M_2 \cdot \mu(E) \leq \mathcal{H}^{t_0}(E) \leq M_1 \cdot \mu(E), \tag{4.28}$$

para qualquer conjunto de Borel $E \subseteq J$. Observamos que μ é uma probabilidade em J e, portanto, $0 < \mathcal{H}^{t_0}(J) < \infty$. Isto, de fato, mostra que J é um t_0 -conjunto. Assim podemos concluir que $\dim_H J = t_0$. Isto termina a demonstração do teorema.

□

Exemplo 4.5.1. *Seja $J \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor clássico. Então, $\dim_H J = \log 2 / \log 3$.*

Considere a função $f : [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$, se $x \in [0, 1/3]$ ou $f(x) = 3x - 2$, se $x \in [2/3, 1]$.

- f é uma função de classe $C^{1+\epsilon}$ em $K = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$;
- $f'(x) = 3$ para todo $x \in K$, e $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(K)$.

Isto mostra que (J, V, f) é um repulsor conforme para alguma extensão de f . Seja $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = -\log |f'(x)| = -\log 3$. Observe que $R_1 = J \cap [0, 1/3]$ e $R_2 = J \cap [2/3, 1]$ formam uma partição de Markov de J . Daí,

$$\begin{aligned} P_f(s\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{-ns \log 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (2^n e^{-ns \log 3}) \\ &= \log (2 \cdot 3^{-s}), \end{aligned}$$

com $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$. Resolvendo a equação $P_f(s\varphi) = 0$ obtemos $s = \log 2 / \log 3$ e com isso $\dim_H J = \log 2 / \log 3$.

Exemplo 4.5.2. *Sejam $I_1, \dots, I_k \subset [0, 1]$ intervalos fechados e disjuntos de comprimento, respectivamente, $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ e $g_i : I_i \rightarrow [0, 1]$ aplicações afins tais que $g_i(I_i) = [0, 1]$ para $i = 1, \dots, k$. Defina $f : \bigcup_{i=1}^k I_i \rightarrow [0, 1]$ por $f|_{I_i} = g_i$ para $i = 1, \dots, k$. Seja $J = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\bigcup_{i=1}^k I_i)$. Então $\dim_H J = s$ tal que $\sum_{j=1}^k \lambda_j^s = 1$.*

Observe que:

- f é a restrição de uma função de classe $C^{1+\epsilon}$ ao conjunto $\bigcup_{i=1}^k I_i$;

- $|f'(x)| = \lambda_i^{-1} > 1$ para $x \in I_i$, e $J = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\bigcup_{i=1}^k I_i)$;
- $R_i = J \cap I_i, i = 1, \dots, k$ formam uma partição de Markov de J .

Seja $\varphi|_{R_i} = -\log |f'(x)| = \log \lambda_i, x \in R_i$. Daí,

$$\begin{aligned}
P_f(s\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\max\{s \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j(x); x \in R_{i_1 \dots i_n}\}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\left(s \sum_{j=0}^{n-1} \varphi|_{R_{i_{j+1} \dots i_n}}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} e^{\left(s \sum_{j=0}^{n-1} \log \lambda_{i_j}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{(i_1 \dots i_n)} \prod_{j=1}^n \lambda_{i_j}^s \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j^s \right)^n \\
&= \log \sum_{j=1}^k \lambda_j^s.
\end{aligned}$$

Neste caso, a equação $P_f(s\varphi) = 0$ reduz-se a fórmula $\sum_{j=1}^k \lambda_j^s = 1$. Esta fórmula foi obtida por Moran em [7].

Referências Bibliográficas

- [1] BARREIRA, L., *Thermodynamic Formalism and Applications to Dimension Theory*, Progress in Mathematics 294; Birkhäuser, 2011.
- [2] BOWEN, R., *Hausdorff dimension of quasi-circles*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., n. 50, p. 259-273, 1979.
- [3] FALCONER, K. J., *The Geometry of Fractal Sets*, Lectures in Mathematics; Cambridge University Press, 1985.
- [4] FALCONER, K. J., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*; John Wiley & Sons, 1990.
- [5] FALCONER, K. J., *A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers*; J. Phys. A., n. 21, p. L737-L742, 1988.
- [6] MILNOR, J., *Dynamics in One Complex Variable*, Annals of Mathematics Studies, número 160; Princeton University Press, 2006.
- [7] MORAN, P., *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 42, 15-23, 1946.

- [8] PESIN, Y., *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications*, Chicago Lectures in Mathematics; Chicago University Press, 1997.
- [9] PESIN, Y. AND CLIMENHAGA, V., *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*, Student Mathematical Library, 52, American Mathematical Society, Providence, 2009.
- [10] PRZYTYCKI, F. AND URBANSKI, M., *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*, London Mathematical Society Lecture Note Series 371; Cambridge University Press, 2010.
- [11] RUELLE, D., *Repellers for real analytic maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems, n. 2, p. 99-107, 1982.
- [12] RUELLE, D., *Thermodynamic Formalism. The Mathematical Structures of Equilibrium Statistical Mechanics*, Cambridge Mathematical Library; Cambridge University Press, 2004.
- [13] SAD, P., *Introdução à Dinâmica das Funções racionais na Esfera de Riemann*, 14° Colóquio Brasileiro de Matemática; IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [14] ZINSMEISTER, M., *Thermodynamic Formalism and Holomorphic Dynamical Systems*, SMF/AMS Text and Monographs, volume 2; American Mathematical Society, Providence, Société Mathématique de France, Paris, 2000.