

ENTROPIA TOPOLÓGICA

Jennyffer Smith Bohorquez Barrera

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Maria Jose Pacifico

Coorientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

**Rio de Janeiro
Outubro 2013**

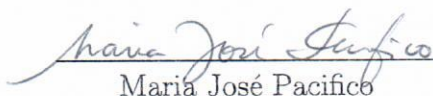
Jennyffer Smith Bohorquez Barrera

Orientador: Maria José Pacífico

Coorientador : Alexander Arbieto

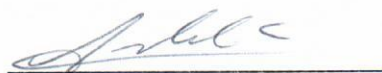
Dissertação de Mestrado submetida, em 9 de Outubro de 2013, ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:



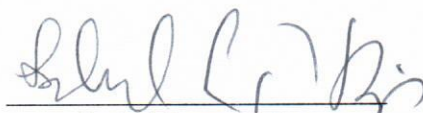
Maria José Pacífico

IM - UFRJ - Orientador.



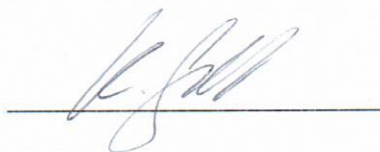
Alexander Arbieto

IM - UFRJ - Coorientador



Isabel Lugao Rios

UFF.



Katrin Gelfert

IM - UFRJ.

CIP - Catalogação na Publicação

B676e Bohorquez Barrera, Jennyffer Smith
Entropia topológica / Jennyffer Smith Bohorquez
Barrera. -- Rio de Janeiro, 2013.
57 f.

Orientadora: Maria Jose Pacífico.
Coorientador: Alexander Eduardo Arbieto
Mendoza.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2013.

1. Entropia topológica - teses. 2. Dinâmica. I.
Pacífico, Maria Jose, orient. II. Arbieto Mendoza,
Alexander Eduardo, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores Maria José Pacifico e Alexander Arbieto Mendoza pela paciência e dedicação.

À minha avó Maria Antonia Serrano, meus pais Blanca Barrera e Jesus Bohorquez, e aos meus irmãos Johanna e Chucho, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e apoio incondicional.

Aos meus amigos da UFRJ: Rozieli, Rodrigo, Nelson, Daniel, Sara, Andrés e Paul que tornaram os dias mais agradáveis. Em especial a Freddy Castro, Thiago Peixinho, Diego Silva Barros e Renan Assimios.

E finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro que foi essencial para a realização deste trabalho.

Resumo

A entropia topológica é uma maneira de medir a taxa de complexidade de um sistema dinâmico, que se traduz como a imprevisibilidade da evolução do sistema. Neste contexto, um sistema pode ser dito caótico se sua entropia topológica é positiva. O objetivo principal deste trabalho é expor três mecanismos que garantem a positividade da entropia topológica de um sistema dinâmico.

Primeiro estudamos difeomorfismos que possuem pontos homoclínicos transversais. Smale [19] observou que a existência destes pontos garantem a positividade da entropia topológica.

O segundo resultado é uma desigualdade obtida por Fathi [10], que chamaremos a fórmula de Fathi, a qual relaciona entropia topológica, dimensão de Hausdorff e propriedades parecidas com a hiperbolicidade. Esta fórmula requer apenas conhecimento topológico do sistema dinâmico e se aplica a uma classe importante de sistemas dinâmicos que são ditos os sistemas expansivos.

Finalmente, Lewowicz [12] observou que se o espaço onde a dinâmica é definida é suficientemente rico então é possível garantir a positividade da entropia topológica de um sistema expansivo geral.

Palavras Chaves: Entropia topológica, Expansividade, Hiperbolicidade, Dimensão de Hausdorff.

Abstract

The Topological entropy is a way to measure the rate of complexity of a dynamic system, which translates as the unpredictability of the system evolution. In this context, a system can be said chaotic if its topological entropy is positive. The main goal of this text is to present three mechanisms to ensure the positivity of the topological entropy of a dynamical system.

First we study diffeomorphisms that have transversal homoclinic points, Smale [19], noticed that the existence of these points ensure the positivity of topological entropy.

The second result is an inequality obtained by Fathi [10] , which we call Fathis's formula, which relates topological entropy, Hausdorff dimension and properties similar to Hyperbolicity. This formula requires only the knowledge of the topological dynamical system and it applies to an important class of dynamical systems that are called expansive systems.

Finally, Lewowicz [12] noted that the space where the dynamics is defined is rich enough then it is possible to guarantee the positivity of the topological entropy of a general expansive system.

Key words: Topological entropy, Expansivity, Hyperbolicity, Hausdorff dimension.

Sumário

1	Notação, Definições e Ferramentas	5
2	Entropia topológica e propriedades	10
2.1	A Definição de Adler, Konheim e McAndrew	10
2.2	A Definição de Bowen-Dinaburg	12
2.3	Propriedades de entropia topológica	13
2.4	Outras Propriedades	16
2.5	Expansividade	18
2.6	O <i>shift</i>	20
2.6.1	Propriedades do espaço das sequências bilaterais	20
2.6.2	Propriedades do <i>shift</i>	21
3	A Ferradura de Smale	23
3.1	A Ferradura de Smale em $\mathbb{R}^2$	23
3.2	Alguns preliminares da Dinâmica Hiperbólica	28
3.3	Hiperbolicidade	32
3.4	Sombreamento e Expansividade	37
3.5	Prova do Teorema de S. Smale	38
4	Expansividade e Entropia Topológica	45
4.1	A fórmula de Fathi	45
4.2	Condições sobre o espaço métrico para ter entropia topológica positiva . . .	51

4.2.1	Homeomorfismo expansivo com entropia topológica nula	51
4.2.2	Teorema de Lewowicz	52

Introdução

Stephen Smale foi um dos matemáticos que mais contribuiu ao desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. No começo de suas pesquisas sobre o assunto, junto com os matemáticos da época, acreditavam que a maioria dos sistemas dinâmicos apresentava um comportamento não demasiadamente estranho, e que de fato, o número de órbitas periódicas era finito. Segundo a terminologia atual isto significaria que caos não seria uma propriedade comum. Porém, o matemático Norman Levinson enviou uma carta a Smale onde descreveu um resultado de Cartwright-Littlewood ([4] e [5]), que continha um exemplo com uma infinidade de órbitas periódicas, aparentemente robusto. Tentando entender as razões pelas quais este fenômeno ocorria, na década de 1960, Stephen Smale introduz em [19] um exemplo de caráter geométrico de um sistema dinâmico caótico com infinitas órbitas periódicas, chamada a *Ferradura de Smale*. Este exemplo o levou a definir e investigar os sistemas ditos hiperbólicos que motivou o estudo da teoria destes sistemas dinâmicos até hoje.

Por outro lado, surgiram diversas propostas para a noção de um sistema caótico, ou seja, maneiras de medir a taxa de complexidade do sistema, que se traduz como a imprevisibilidade da evolução do sistema. Uma delas é por meio do uso da entropia topológica, que é o nosso principal objeto de estudo neste trabalho. Neste contexto, um sistema pode ser dito caótico se sua entropia topológica é positiva.

A entropia topológica de um sistema dinâmico discreto (X, T) , foi definida pela primeira vez em [1] pelos matemáticos Adler, Konheim, e McAndrew na década de 1965. A definição está baseada em coberturas abertas e requer, portanto, que o espaço X seja um espaço topológico compacto e a aplicação T seja contínua. Na década de 1970, Bowen e Dinaburg introduziram em [2] e [7] uma definição equivalente e muito útil de entropia topológica. Uma vantagem desta definição, é que o espaço X não precisa ser compacto, desde que T seja uniformemente contínua. No entanto, iremos considerar sistemas dinâmicos apenas em espaços compactos.

O objetivo desta monografia é expor três mecanismos que garantam a positividade da entropia topológica de um sistema dinâmico.

O primeiro resultado, obtido por Smale, usa um fenômeno semi-local. A teoria hiperbólica local lida com pontos periódicos cujos autovalores da derivada (no período) não pertencem ao círculo unitário. Esta propriedade implica que o conjunto de pontos que no futuro convergem à órbita periódica é de fato uma subvariedade diferenciável, o mesmo ocorrendo com o conjunto de pontos que no passado convergem à órbita periódica. O que Smale observou é que caso ocorra uma interseção transversal entre estas subvariedades (distinta da órbita periódica) então o sistema deve ter entropia topológica positiva.

Teorema (S. Smale). Seja $T : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de uma variedade diferenciável compacta. Se T possui um ponto homoclínico transversal então a entropia topológica de T é positiva.

O segundo resultado é uma desigualdade obtida por Fathi a qual relaciona entropia topológica, dimensão de Hausdorff e propriedades parecidas com a hiperbolicidade. Este tipo de fórmula é muito frequente em sistemas dinâmicos, como por exemplo, a fórmula de Pesin, que ocorre em situações aonde o sistema é suficientemente diferenciável. Porém a fórmula de Fathi requer apenas conhecimento topológico do sistema dinâmico. Em particular, ela se aplica a uma classe importante de sistemas dinâmicos que são ditos sistemas expansivos, ver [20].

Lembramos que um homeomorfismo $T : X \rightarrow X$ sob um espaço métrico compacto (X, d') é *expansivo*, se existe uma constante $\delta > 0$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{se } d'(T^j(x), T^j(y)) < \delta \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}, \text{ então } x = y.$$

A constante α chama-se constante de expansividade.

Fathi, observou que neste caso é possível mudar a métrica d' por uma métrica d de forma que satisfaça a seguinte propriedade do tipo hiperbólica:

$$\text{Para todo } x, y \in M, \max\{d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))\} \geq \min\{kd(x, y), \varepsilon\} \quad (1)$$

Onde $\varepsilon > 0$, $k > 1$ e d é uma métrica que gera a topologia do espaço (X, d') .

Esta propriedade é usada para obter a desigualdade de Fathi e tem como consequência o seguinte resultado:

Teorema (Fathi). Seja $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo de um espaço metrizável compacto. Se existe uma métrica d e números $k > 1$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo (1), então T é expansiva e

$$HD_d(X) \leq \overline{C}_d(X) \leq 2 \frac{h(T)}{\log k}.$$

Em particular, $HD_d(X)$ e $\overline{C}_d(X)$ são finitas.

Um problema no resultado anterior é que, na prática, talvez seja difícil obter a expressão explícita da métrica de Fathi. Neste sentido, Lewowicz observou que se o espaço onde a dinâmica é definida é suficientemente rico, então é possível garantir a positividade da entropia topológica de um sistema expansivo geral.

Teorema (Lewowicz). Seja $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo α -expansivo. Se existe um ponto $x_0 \in X$ tal que a componente conexa do seu conjunto α -local instável é não trivial, então

$$h(T) \geq \frac{\log 2}{N_{\alpha/4}}$$

onde $N_{\alpha/4}$ é um número natural que depende da constante de expansividade.

Finalmente, observamos que a riqueza do espaço onde a dinâmica é definida é necessária, pois temos o seguinte exemplo de um sistema expansivo com entropia nula.

Exemplo

Sejam $A = \{x_n = -1 - \frac{1}{n} : n \leq -2\}$ e $B = \{y_n = 1 - \frac{1}{n} : n \geq 1\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Considere o subespaço compacto de $\mathbb{R}$

$$X = \{-1, 1\} \cup A \cup B$$

com a métrica usual e $f : X \rightarrow X$ uma função definida recursivamente como segue:

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(x_n) = x_{n+1}, \quad f(y_n) = y_{n+1} \text{ e } f(x_{-2}) = y_1.$$

Esta função, por construção, é um homeomorfismo expansivo com constante de expansividade $0 < \delta < 1/2$. Além disso, podemos observar que o conjunto não-errante de f , $\Omega(f) = \{-1, 1\}$, está formado pelos únicos pontos fixos de f . Portanto, a entropia de f é igual a entropia de $f|_{\Omega(f)}$, ou seja, $h(f) = h(f|_{\Omega(f)}) = 0$.

A monografia está estruturada da seguinte forma: No primeiro capítulo, são apresentadas a notação, definições e ferramentas que serão necessárias. Alguns resultados, especialmente de Teoria Ergódica e Dinâmica Hiperbólica serão admitidos, enquanto outros considerados importantes serão apresentados ao longo deste trabalho.

No segundo capítulo, serão apresentadas as definições de entropia topológica tanto no sentido Adler, Konheim, e McAndrew quanto no sentido Bowen e Dinaburg e mostramos que, de fato, são equivalentes. Também mostramos algumas propriedades, entre as mais importantes, que a entropia topológica é um invariante topológico e que homeomorfismos expansivos possuem entropia topológica finita. Mais ainda, descreveremos um exemplo simples de um sistema dinâmico com infinitas órbitas periódicas e entropia positiva, *o shift*.

No terceiro capítulo, estudamos brevemente a *Ferradura de Smale* no espaço $\mathbb{R}^2$ e provamos que é conjugada ao *shift*. Depois, enunciaremos alguns resultados da Dinâmica Hiperbólica, em particular, o Lema de Sombreamento, que é fundamental para provar o Teorema de Smale [[22], Teorema III.17 pg 102].

O quarto capítulo, é dedicado aos Teoremas de Fathi e de Lewowicz. Na seção 4.1, definimos a *Métrica Hiperbólica Adaptada*, mostramos que todo homeomorfismo expansivo admite esta métrica, e finalmente, mostraremos o Teorema de Fathi. As demonstrações estão baseadas no artigo do mesmo autor [10]. Na seção 4.2, descreveremos com mais detalhes o homeomorfismo expansivo com entropia nula apresentado no exemplo acima, e depois, demonstraremos dois lemas necessários para provar o Teorema de Lewowicz. Estas demonstrações são baseadas nas notas não publicadas de Jana Rodriguez Hertz expostas em [12].

Capítulo 1

Notação, Definições e Ferramentas

Neste capítulo, estabeleceremos notação, definições preliminares e as ferramentas que serão usadas ao longo deste trabalho. Nós sempre iremos considerar (X, d) um espaço métrico compacto, $T : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e α (ou β) uma cobertura aberta de X . Além disso, a bola aberta de centro x e raio r será denotada por $B(x, r)$, e a bola fechada por $\bar{B}(x, r)$.

Coberturas De Um Espaço Topológico

Dizemos que uma *cobertura aberta* de X , que denotaremos por α , é uma coleção de subconjuntos abertos de X cuja união é X . Se uma subcoleção β da cobertura α é ainda uma cobertura de X dizemos que β é uma *subcobertura* de α . Assim, temos que X é *compacto* se qualquer cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

Dadas duas coberturas α e β , podemos definir uma nova cobertura

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ e } B \in \beta\}.$$

Observe que isso vale também para qualquer número finito de coberturas. Além disso, pela continuidade de T temos que $T^{-1}\alpha = \{T^{-1}A : A \in \alpha\}$ e $\bigvee_{i=1}^n T^{-i}\alpha$ são também coberturas de X , para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Seja A um subconjunto não vazio de X . O *diâmetro de um conjunto* A é definido como $|A| = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, isto é, o supremo das distâncias entre qualquer dois pontos do conjunto A . E o *diâmetro de uma cobertura* α como $\text{diam}(\alpha) = \sup\{|A| : A \in \alpha\}$.

1.0.1 Definição. *Seja α uma cobertura aberta do espaço (X, d) . Dizemos que $\delta > 0$ é um número de Lebesgue para a cobertura α se para todo $A \subset X$ com $|A| \leq \delta$, existe $B \in \alpha$ tal que $A \subset B$.*

A compacidade do espaço métrico é uma condição suficiente para garantir a existência do número de Lebesgue de qualquer cobertura aberta de X (veja [Wa], Teorema 0.20 (pg 18)).

Dizemos que α é um refinamento de β , que denotaremos por $\beta < \alpha$, se todo conjunto da cobertura α está contido em algum conjunto da cobertura β . Observe que se α e β são duas coberturas abertas de X tal que $\text{diam}(\alpha) < \delta$, onde $\delta > 0$ é um número de Lebesgue para a cobertura β , então α é um refinamento de β .

Bola Dinâmica

Dada uma métrica d no espaço X , podemos definir uma sequência crescente de distâncias $(d_n)_{n \geq 1}$ em X com $d_1 = d$ por

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i x, T^i y)$$

onde cada métrica d_n mede a distância entre os segmentos de órbita $I_x^n = \{x, \dots, T^{n-1}x\}$ e $I_y^n = \{y, \dots, T^{n-1}y\}$. Assim, para cada n fixo, definimos a *bola dinâmica* de centro em x e raio r no tempo n como

$$B(x, r, n) = \{y \in X : d_n(x, y) < r\}.$$

Pela definição da bola dinâmica temos que

$$B(x, r, n) = \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} B(T^i(x), r)$$

Dinâmica Topológica

Muitas vezes, em matemática, usamos ferramentas para colocar um determinado problema em um ambiente mais fácil de compreender. Uma dessas ferramentas em dinâmica é a conjugação topológica.

1.0.2 Definição. *Sejam $T_1 : X \rightarrow X$ e $T_2 : Y \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que T_1 e T_2 são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ T_1 = T_2 \circ h$, ou seja, o diagrama (3.3) conmuta. Dizemos também que h é uma conjugação entre T_1 e T_2 .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T_1} & X \\ h \downarrow & \circlearrowright & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{T_2} & Y \end{array} \quad (1.1)$$

Se T_1 e T_2 são topologicamente conjugados então muitos comportamentos dinâmicos do sistema (T_1, X) são preservados por conjugação, ou seja, o sistema (T_2, Y) também possui esses comportamentos.

Um ponto $y \in X$ é um *ponto ω -limite* de um ponto $x \in X$ se existe uma sequência de números naturais $n_k \rightarrow \infty$ (quando $k \rightarrow \infty$) tal que $T^{n_k}(x) \rightarrow y$. O *conjunto ω -limite* do ponto $x \in X$ é o conjunto $\omega(x)$ de todos os ponto ω -limites. Observe que pela compacidade do espaço X , dado qualquer $x \in X$, o conjunto $\omega(x)$ é diferente do vazio.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos os *conjuntos ε -local estável* e *ε -local instável* de um ponto $x \in X$ como

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : d(T^n(x), T^n(y)) \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq 0\}$$

e

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) \leq \varepsilon, \text{ para todo } n \geq 0\}$$

respectivamente. Observe que $W_\varepsilon^s(x, T^{-1}) = W_\varepsilon^u(x, T)$.

Denotaremos por $CW_\varepsilon^s(x)$ a componente conexa do ponto x no conjunto $W_\varepsilon^s(x)$. Analogamente, definimos $CW_\varepsilon^u(x)$.

Dizemos que um ponto x é *não-errante* se para toda vizinhança U de x , existe um inteiro $n > 0$ tal que $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Assim, existe um ponto $y \in U$ tal que $T^n(y) \in U$. O conjunto dos pontos não-errantes da aplicação T é chamado *conjunto não-errante* e será denotado por $\Omega(T)$.

Dimensão de Hausdorff e Capacidade Superior

Dizemos que $\alpha = \{A_i\}_{i \in \Lambda}$ é uma *ε -cobertura* de X se α é uma coleção enumerável de conjuntos de diâmetro menor ou igual do que ε , ou seja, $0 \leq |A_i| \leq \varepsilon$ para todo $i \in \Lambda$.

Suponhamos que s é um número real não negativo, então para qualquer $\varepsilon > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(X) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : \{A_i\} \text{ é uma } \varepsilon\text{-cobertura de } X \right\}$$

e

$$\mathcal{H}^s(X) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(X).$$

onde $\mathcal{H}^s(X)$ é a *Medida de Hausdorff s -dimensional*.

1.0.3 Definição (Dimensão de Hausdorff). *A dimensão de Hausdorff de um espaço métrico compacto (X, d) é*

$$DH_d(X) = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = \infty\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(X) = 0\}$$

1.0.4 Definição (Capacidade Superior). *Seja $N(X, \varepsilon)$ a cardinalidade mínima de uma cobertura do espaço métrico compacto (X, d) por bolas de raio ε . Então a capacidade inferior e superior de X são definidas, respectivamente, como*

$$\underline{C}_d(X) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} \quad e \quad \overline{C}_d(X) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Se $\underline{C}_d(X) = \overline{C}_d(X)$, então dizemos que a capacidade de X é

$$C_d(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

1.0.5 Observação.

i. *Pelas definições de dimensão de Hausdorff e de capacidade obtemos a seguinte desigualdade*

$$HD_d(X) \leq \underline{C}_d(X) \leq \overline{C}_d(X).$$

De fato, se X é coberto por $N(X, \varepsilon)$ bolas de raio ε , então $\mathcal{H}_\varepsilon^s(X) \leq \varepsilon^s N(X, \varepsilon)$. Portanto, se $1 < \mathcal{H}^s(X) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(X)$ então $\log N(X, \varepsilon) + s \log \varepsilon > 0$ para ε suficientemente pequeno. Assim, $s \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(X, \varepsilon) / -\log \varepsilon$. Além disso, tanto a dimensão Hausdorff quanto a capacidade são invariantes sob a passagem a uma métrica bi-Lipschitz-equivalente.

ii. *Se $T : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ é uma aplicação Hölder contínua, isto é, existem constantes $C > 0$ e $\beta > 0$ tal que*

$$d_2(Tx, Ty) \leq C d_1(x, y)^\beta \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Então $DH_{d_2}(T(X)) \leq \frac{1}{\beta} DH_{d_1}(X)$. Veja [8], pg 29.

Espaços Topológicos Metrizáveis

Sabemos que todo espaço métrico X pode ser considerado, de modo natural, como um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, no qual a coleção $\mathcal{T}$ é formada pelos subconjuntos abertos de (X, d) . Lembre que A é um conjunto *aberto* em (X, d) se para todo ponto x em A existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.

Uma topologia $\mathcal{T}$ em X é *metrizável* quando existe uma métrica em X com relação à qual os abertos são os elementos de $\mathcal{T}$. Porém, sabemos também que nem todo espaço topológico é metrizável. Assim, surge o *Problema de Metrização*, isto é, sob que condições um espaço topológico é metrizável. Nós estamos interessados no seguinte teorema de metrização.

1.0.6 Teorema (Teorema de Metrização de Frink). *Seja (X, τ) um espaço topológico com uma função distância $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:*

1. $\rho(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simetria);
3. Se $\rho(x, z) < \varepsilon$ e $\rho(z, y) < \varepsilon$, então $\rho(x, y) < 2\varepsilon$ (Desigualdade triangular generalizada).

Então (X, τ) é metrizavel, isto é, existe uma métrica D em X tal que (X, τ) e (X, D) são homeomorfos. Além disso, vale a desigualdade

$$\frac{\rho(x, y)}{4} \leq D(x, y) \leq \rho(x, y).$$

Demonstração. Veja [[11], pg 135].

□

Capítulo 2

Entropia topológica e propriedades

Existem duas definições padrão de entropia topológica para mapas contínuos $T : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico compacto. Primeiro, iremos dar a definição original introduzida por Adler, Konheim e McAndrew, baseada em coberturas abertas, que em princípio pode ser aplicada a mapas contínuos $T : X \rightarrow X$, sendo X qualquer espaço topológico compacto. Depois, daremos a definição introduzida por Bowen e Dinaburg, baseada na dispersão de órbitas de mapas uniformemente contínuos $T : X \rightarrow X$, sendo X é um espaço métrico não necessariamente compacto. Porém, nós iremos trabalhar o caso em que X é um espaço métrico compacto e iremos ver que, neste caso, as duas definições coincidem, isto é, produzem o mesmo número. Também iremos enunciar algumas de suas propriedades, dentre as mais importantes, que a entropia topológica é invariante por conjugação topológica e que homeomorfismos expansivos possuem entropia topológica finita. Finalmente, iremos calcular a entropia topológica do *shift*.

2.1 A Definição de Adler, Konheim e McAndrew

Nesta seção, definiremos a entropia topológica de mapas $T : X \rightarrow X$ contínuos sobre espaços topológicos compactos.

2.1.1 Definição. *Seja $N(\alpha) = \min\{\#\beta : \beta \text{ é uma subcobertura finita de } \alpha\}$, então definimos a entropia de uma cobertura α como $H(\alpha) = \log N(\alpha)$.*

Sejam α e β duas coberturas abertas de X . Caso $\alpha < \beta$, então por definição, cada elemento de uma subcobertura de β com cardinalidade mínima está contido em um elemento de α e, portanto, esta escolha gera uma subcobertura de α , que pode não ter cardinalidade mínima. Mesmo assim, temos $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

Da mesma forma, se $\{A_1, \dots, A_n\}$ e $\{B_1, \dots, B_m\}$ são subcoberturas com cardinalidade

mínima de α e β , respectivamente, então $\{A_i \cap B_j \text{ com } 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$ forma uma subcobertura de $\alpha \vee \beta$ e assim, $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

Se $T : X \rightarrow X$ é um mapa contínuo, então $H(T^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$. Caso seja um homeomorfismo, usando a desigualdade anterior para T^{-1} , temos $H(T^{-1}\alpha) = H(\alpha)$.

Estas propriedades serão aplicadas na demonstração do seguinte teorema.

2.1.2 Teorema. *Se α é uma cobertura aberta de X , então o limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \text{ existe.}$$

Este limite é chamado *entropia de T em relação à α* e será denotado por $h(T, \alpha)$. Além disso, é a taxa de crescimento do número de elementos em $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ (da subcobertura de cardinalidade mínima).

Demonstração. Primeiro, precisamos provar que se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de números reais não-negativos subaditiva, ou seja, $a_{n+k} \leq a_n + a_k$ para todo $n, k \geq 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ existe e é igual a $\inf\{\frac{a_n}{n} : n \geq 1\}$. De fato, note que a condição $a_n \geq 0$ garante a existência do ínfimo, logo tome $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$. Pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n_0}}{n_0} \leq C + \varepsilon$. Para $n > n_0$ existem $p, q \in \mathbb{N}$ com $n_0 \geq 0$ tais que $n = n_0 p + q$. Assim, por hipótese, $a_n \leq p a_{n_0} + a_q$. Daí,

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{p a_{n_0} + a_q}{n} \leq \frac{p a_{n_0}}{n_0 p} + \frac{a_q}{n} \leq C + \varepsilon + \frac{1}{n} \left(\sup_{j=1, \dots, n_0} a_j \right)$$

Portanto, quando n tende ao infinito, o resultado segue.

Agora fixando uma cobertura aberta α , definimos a sequência

$$a_n := H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então para todo $n, k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n+k-1} T^{-i}\alpha\right) \leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{i=n}^{n+k-1} T^{-i}\alpha\right) \\ &\leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\alpha\right) = a_n + a_k, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência subaditiva com $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)$ existe e é não-negativo. $\square$

Finalmente, a entropia topológica do mapa T será o supremo das entropias relativas à todas as coberturas abertas de X .

2.1.3 Definição. A entropia topológica de T no sentido Adler, Konheim e McAndrew é

$$h_{AKM}(T) = \sup \{h(T, \alpha) \text{ tal que } \alpha \text{ é uma cobertura aberta de } X\}$$

Note que a entropia topológica pode ser infinito e, na definição, podemos tomar o supremo sob as coberturas abertas finitas em vez de coberturas abertas de X .

2.2 A Definição de Bowen-Dinaburg

Nesta seção definiremos entropia topológica usando *conjuntos geradores* ou *conjuntos separados*, como veremos.

2.2.1 Definição. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $F \subset X$ é (n, ε) -gerado com respeito à T se para todo $x \in X$ existe $y \in F$ com $d_n(x, y) \leq \varepsilon$, ou seja,

$$X \subseteq \bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} \overline{B}(T^i y, \varepsilon).$$

2.2.2 Definição. A entropia topológica de T no sentido de Bowen-Dinaburg em termos de conjuntos geradores é

$$h_{DB}^g(T) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon),$$

onde

$$r(n, \varepsilon) = \min\{\#F : F \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-gerado}\} \quad e$$

$$r(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon).$$

A seguir, daremos a definição de entropia topológica usando conjuntos separados e veremos que é equivalente à definição acima.

2.2.3 Definição. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $E \subset X$ é (n, ε) -separado com relação a T se $x, y \in E$ com $x \neq y$, implica $d_n(x, y) > \varepsilon$. Ou seja, para cada $x \in E$, o conjunto $\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} \overline{B}(T^i x; \varepsilon)$ não contém outro ponto de E .

2.2.4 Definição. A entropia topológica de T no sentido de Bowen-Dinaburg em termos de conjuntos separados é definida por

$$h_{DB}^s(T) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log s(n, \varepsilon),$$

onde

$$s(n, \varepsilon) = \max\{\#E : E \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado}\} \quad e$$

$$s(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log s(n, \varepsilon)$$

2.2.5 Observação. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, então*

1. $r(n, \varepsilon) < \infty$. *De fato, se $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$, então pela compacidade de X existem $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon)$. Assim, temos que $F = \{x_1, \dots, x_k\}$ é um conjunto (n, ε) -gerador. Portanto, $r(n, \varepsilon) \leq k$.*
2. $r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq r(n, \varepsilon/2)$ e portanto $s(n, \varepsilon) < \infty$. *De fato, se $\#(E) = s_n(\varepsilon, X)$, então E é (n, ε) -gerador. Logo, $r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon)$. Para provar a segunda desigualdade, sejam E um conjunto (n, ε) -separado, F um conjunto $(n, \varepsilon/2)$ -gerador e defina o mapa $\phi : E \rightarrow F$ escolhendo para cada $x \in E$ um ponto $\phi(x) \in F$ tal que $d_n(x, \phi(x)) \leq \varepsilon/2$. Assim ϕ é injetora e portanto, $s(n, \varepsilon) \leq r(n, \varepsilon/2)$.*

Assim,

$$r(\varepsilon) \leq s(\varepsilon) \leq r(\varepsilon/2).$$

Da observaao acima temos que, $h_{DB}^s(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = h_{DB}^g(T)$ e portanto

$$h_{DB}(T) = h_{DB}^s(T) = h_{DB}^g(T).$$

Daqui em diante denotaremos por h_{DB} a entropia topológica no sentido de Bowen e Dinaburg. Observe que, para calcular a entropia topológica, podemos usar tanto conjuntos geradores quanto conjuntos separados.

2.3 Propriedades de entropia topológica

Nesta seao veremos duas propriedades importantes da entropia topológica. A primeira delas, é que a definiçao de entropia topológica no sentido Bowen e Dinaburg coincide com a definiçao dada por Adler, Konheim e McAndrew, ou seja, $h_{AKM}(T) = h_{BD}(T)$. A segunda é que a entropia topológica é invariante por conjugacao topológica.

Para provar a primeira propriedade iremos precisar de alguns teoremas prévios.

2.3.1 Teorema. *Seja $\{\alpha_n\}_1^\infty$ uma sequência de coberturas abertas do espaco (X, d) tal que $\text{diam}(\alpha_n) \rightarrow 0$. Então,*

$$h_{AKM}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{AKM}(T, \alpha_n)$$

Demonstraao. Veja [[21], Teorema 7.6, pg 173]. □

2.3.2 Teorema. *Sejam α e γ duas coberturas abertas do espaco (X, d) .*

1. Se δ é o número de Lebesgue da cobertura α , então

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \leq r(n, \delta/2) \leq s(n, \delta/2),$$

2. Se $\varepsilon > 0$ e $\text{diam}(\gamma) < \varepsilon$, então

$$r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma\right).$$

Demonstração. Pela observação 2.2.5 temos que para todo $\varepsilon > 0$, $r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon)$.

1. Se F é um subconjunto de X tal que $\#(F) = r(n, \delta/2)$, então

$$X = \bigcup_{x \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} \overline{B}(T^i x; \delta/2)$$

e, dado que $|B(T^i x, \delta/2)| = \delta$, temos para cada $x \in F$ e $i = 0, \dots, n-1$ um $A_{x,i} \in \alpha$ tal que $\overline{B}(T^i x, \delta/2) \subset A_{x,i}$. Logo, $\{\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} A_{x,i} : x \in F\}$ é uma subcobertura finita de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ e portanto, $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \leq r(n, \delta/2)$.

2. Seja E um subconjunto de X tal que $\#(E) = s(n, \varepsilon)$. Vamos provar que não existe um conjunto em $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma$ que contenha dois elementos de E . De fato, suponha que existem dois ponto diferentes x_1 e x_2 em E tal que $x_1, x_2 \in \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} B_i$. Então, $d(T^i x_1, T^i x_2) \leq \varepsilon$ para $0 \leq i \leq n-1$. Assim, $d_n(x_1, x_2) \leq \varepsilon$, o que é uma contradição. Portanto, $s(n, \varepsilon) \leq N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma)$.

□

2.3.3 Corolário. Para cada $\varepsilon > 0$ considere as seguintes coberturas de X :

$$\alpha_\varepsilon = \{B(x, 2\varepsilon) : x \in X\} \quad e \quad \gamma_\varepsilon = \{B(x, \varepsilon/2) : x \in X\}.$$

Então, temos a seguinte desigualdade

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha_\varepsilon\right) \leq r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma_\varepsilon\right).$$

A desigualdade acima é muito importante, pois relaciona a entropia topológica de uma cobertura com os valores $r(\varepsilon)$ e $s(\varepsilon)$ das definições de entropia topológica em termos de conjuntos geradores e separados. Logo, usando a desigualdade, iremos demonstrar a primeira propriedade.

2.3.4 Teorema. $h_{AKM}(T) = h_{BD}(T)$.

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\alpha_\varepsilon, \gamma_\varepsilon$ como no Corolário 2.3.3. Então, pela desigualdade deste corolário temos

$$h_{AKM}(T, \alpha_\varepsilon) \leq r(\varepsilon) \leq s(\varepsilon) \leq h_{AKM}(T, \gamma_\varepsilon).$$

Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$. Então $\varepsilon \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r\left(\frac{1}{n}, X\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon, X) = h_{BD}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} s\left(\frac{1}{n}, X\right).$$

Além disso, pelo Teorema 2.3.1 temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{AKM}(T, \alpha_{\frac{1}{n}}) = h_{AKM}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{AKM}(T, \gamma_{\frac{1}{n}}).$$

Portanto, considerando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ na desigualdade acima e fazendo n tender para o infinito, temos que $h_{AKM}(T) = h_{BD}(T)$. $\square$

Daqui em diante, iremos denotar por $h(T)$ a entropia topológica da aplicação T e usaremos qualquer uma das três definições dadas.

Agora vamos provar que a entropia topológica é um invariante topológico. Esta propriedade é muito importante porque proporciona um método para calcular a entropia topológica. Observe que a entropia topológica não é fácil de ser calculada, porém é possível em alguns casos. Logo, se queremos calcular a entropia topológica de um sistema dinâmico usando este método, devemos calcular primeiro a entropia topológica de um sistema dinâmico conjugado mais simples.

2.3.5 Teorema. Se $T_1 : X_1 \rightarrow X_1$ e $T_2 : Y \rightarrow Y$ são duas aplicações conjugadas, então $h(T_1) = h(T_2)$.

Demonstração. Dado que T_1 e T_2 são topologicamente conjugadas então existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ T_1 = T_2 \circ h$. Consideremos α uma cobertura aberta de Y , então

$$\begin{aligned} h(T_2, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i} \alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(h^{-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i} \alpha\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} h^{-1} T_2^{-i} \alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_1^{-i} h^{-1} \alpha\right) = h(T_1, h^{-1} \alpha). \end{aligned}$$

Logo, $h(T_2) \leq h(T_1)$. Como h é um homeomorfismo temos que $h^{-1} \circ T_2 = T_1 \circ h^{-1}$ e, aplicando o mesmo argumento, obtemos $h(T_1) \leq h(T_2)$, o que prova o teorema. $\square$

2.3.6 Teorema. Se $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo, então $h(T) = h(T^{-1})$.

Demonstração. Seja α uma cobertura aberta de X , então

$$\begin{aligned} h(T, \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(T^{n-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\alpha\right) = h(T^{-1}\alpha). \end{aligned}$$

Dado que α é qualquer cobertura de X , concluímos que $h(T) = h(T^{-1})$. $\square$

2.4 Outras Propriedades

Nesta seção iremos enunciar algumas propriedades clássicas da entropia topológica. As suas respectivas demonstrações podem ser encontradas em [21].

Seja $I : X \rightarrow X$ a aplicação identidade, isto é, $I(x) = x$ para todo $x \in X$. É claro que (X, I) não é um sistema dinâmico caótico. De fato, iremos provar, usando conjuntos separados, que a entropia topológica da aplicação I é zero.

2.4.1 Proposição. $h(I) = 0$.

Demonstração. Observe que $d_n(x, y) = d_1(x, y)$ para todo $x, y \in X$ e $n > 1$. Então, dado $\varepsilon > 0$ temos que $s(n, \varepsilon) \leq s(1, \varepsilon)$ para todo $n > 1$. Logo, $s(\varepsilon) \leq 0$ e portanto $h(I) = 0$. $\square$

A proposição a seguir, proporciona um método para aproximar o valor da entropia topológica de um sistema dinâmico, por meio de subconjuntos fechados e invariantes nos quais seja possível calcular a entropia topológica. Na prova, usaremos a definição de entropia baseada em coberturas.

2.4.2 Proposição. Seja $Y \subset X$ fechado tal que $T(Y) = Y$, então $h(T|_Y) \leq h(T)$.

Demonstração. Seja $\alpha = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura de X e $\{A_1, \dots, A_{N(\alpha)}\}$ uma subcobertura finita de α com cardinalidade mínima. Então $\alpha \cap Y = \{A_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura de Y e $\{A_1 \cap Y, \dots, A_{N(\alpha)} \cap Y\}$ é uma subcobertura finita de $\alpha \cap Y$, assim $N(\alpha \cap Y) \leq N(\alpha)$. Dado que $(\alpha \cap Y) \vee (T^{-1}(\alpha \cap Y)) = (\alpha \vee T^{-1}(\alpha)) \cap Y$ temos que

$$N(\alpha \cap Y \vee T^{-1}(\alpha \cap Y)) = N((\alpha \vee T^{-1}(\alpha)) \cap Y) \leq N(\alpha \vee T^{-1}(\alpha)).$$

Continuando com o mesmo argumento, obtemos

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha \cap Y)\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha)\right)$$

para todo $n \geq 1$. Assim, $h(T|_Y, \alpha \cap Y) \leq h(T, \alpha) \leq h(T)$ para toda cobertura α de X . Logo, $h(T|_Y) \leq h(T)$. $\square$

Quando calculamos a entropia topológica usando a definição introduzida por Bowen e Dinaburg, devemos ter em conta o resultado a seguir. Lembre que no caso em que X é compacto, duas métricas d e d' são equivalentes se $I : (X, d) \rightarrow (X, d')$ e $I : (X, d') \rightarrow (X, d)$ são aplicações contínuas.

2.4.3 Teorema. *Se d e d' são métricas equivalentes, então*

$$h_d(T) = h_{d'}(T).$$

A demonstração da proposição a seguir é análoga à da proposição 2.4.1

2.4.4 Proposição. *Se T é uma isometria, então $h_d(T) = 0$.*

Dado que T é uma aplicação contínua, então para qualquer $m > 0$ a aplicação T^m também é contínua. Logo, uma pergunta natural é: existe alguma relação entre a entropia topológica de T e de T^m ? O seguinte resultado, mostra que a entropia topológica de T^m é m vezes a entropia topológica de T .

2.4.5 Teorema. *Se $m > 0$, então $h_d(T^m) = m \cdot h_d(T)$.*

A seguinte propriedade também é muito útil no momento de calcular a entropia topológica de aplicações da forma $T_1 \times \dots \times T_n$, onde cada T_i é uma aplicação contínua definida sobre um espaço métrico compacto X_i . O teorema nos diz que é suficiente calcular a entropia topológica de cada aplicação T_i .

2.4.6 Teorema. *Seja T_i uma aplicação contínua sobre (X_i, d_i) espaço métrico compacto, com $i = 1, 2$ e defina a métrica d sobre o espaço $X_1 \times X_2$ por*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Então $(X_1 \times X_2, d)$ é um espaço métrico compacto, $T_1 \times T_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ é uma aplicação contínua e

$$h_d(T_1 \times T_2) = h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2).$$

O seguinte resultado de Bowen, diz que toda a entropia está contida no conjunto não errante, ou seja, as órbitas de pontos errantes não contribuem à entropia topológica.

2.4.7 Teorema. *A entropia topológica de T é igual à entropia topológica de T restrita ao seu conjunto não errante, isto é, $h(T) = h(T|_{\Omega(T)})$.*

Mais ainda, se o conjunto não errante é um conjunto finito de pontos periódicos, então a entropia topológica é zero.

2.4.8 Teorema. *Se $\Omega(T)$ é um conjunto finito de pontos periódicos. Então $h(T) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $\Omega(T) = \{x_1, \dots, x_k\}$ onde cada x_i é um ponto periódico com período n_i . Então, se N é o mínimo múltiplo comum entre $n_1, n_2, \dots, n_k$, temos que $T|_{\Omega(T)}^N = \underbrace{T|_{\Omega(T)} \circ \dots \circ T|_{\Omega(T)}}_N = I$. Logo, pelos Teoremas 2.4.5 e 2.4.7 temos que

$$N.h(T) = h(T|_{\Omega(T)}^N) = h(I) = 0.$$

□

2.5 Expansividade

O conceito de expansividade foi introduzido por Utz [20], na metade do século XX, para homeomorfismos de espaços métricos compactos. Um exemplo deste tipo de homeomorfismos é a aplicação *shift*, que será apresentada na próxima seção. Nós estamos interessados em provar que a entropia topológica de homeomorfismos expansivos é finita. Para isso, iremos precisar da relação entre homeomorfismos expansivos e coberturas geradoras. Nesta seção $T : X \rightarrow X$ denota um homeomorfismo. O leitor pode encontrar as demonstrações em [21].

2.5.1 Definição. *Um homeomorfismo $T : X \rightarrow X$ é expansivo se existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$, $x \neq y$, então $d(T^n x, T^n y) > \delta$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, dizemos que T é um homeomorfismo δ -expansivo e que δ é uma constante de expansividade para T .*

Observe que se T é expansiva, pela definição, temos que os iterados de dois pontos diferentes são visivelmente separados ao passar do tempo, independentemente da distância entre os pontos iniciais. Portanto, o sistema dinâmico (X, T) mostra uma dependência sensível sobre as condições iniciais.

Equivalentemente, dizemos que T é expansiva se existe uma constante $\alpha > 0$, satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{Se } d(T^j(x), T^j(y)) < \alpha \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}, \text{ então } x = y.$$

Assim, se os iterados de dois pontos sempre ficam α -próximos, então eles devem ser idênticos.

2.5.2 Definição. *Dizemos que T é uniformemente α -expansivo se para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que*

$$d(x, y) \geq \varepsilon \text{ então } \sup_{|n| \leq N_\varepsilon} d(T^n(x), T^n(y)) > \alpha.$$

É fácil ver que, todo homeomorfismo uniformemente α -expansivo sobre um espaço métrico não necessariamente compacto é um homeomorfismo expansivo. Porém, o recíproco se verifica sempre que o espaço métrico seja compacto.

2.5.3 Lema. *Se T é um homeomorfismo α -expansivo, então T é uniformemente α -expansivo.*

Demonstração. Suponha que T é um homeomorfismo α -expansivo mas não uniformemente α -expansivo, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{Z}^+$ e $x_j \neq y_j \in X$ com $d(x_j, y_j) \geq \varepsilon$ temos que $\sup_{|n| \leq j} d(T^n(x_j), T^n(y_j)) \leq \alpha$. Dado que (X, d) é um espaço métrico compacto, temos que existem (x_{j_k}) e (y_{j_k}) subsequências convergentes de (x_j) e (y_j) , respectivamente. Sejam $x_*, y_* \in X$ tais que $x_{j_k} \rightarrow x_*$ e $y_{j_k} \rightarrow y_*$, então $x_* \neq y_*$ pois $d(x_*, y_*) \geq \varepsilon$. Além disso, $d(T^n(x_*), T^n(y_*)) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, o que é uma contradição. $\square$

2.5.4 Definição. *Uma cobertura aberta e finita é um gerador para T se, para toda sequência bilateral $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de elementos da cobertura, o conjunto $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}\overline{A_n}$ contém no máximo um ponto de X .*

As coberturas que são geradoras satisfazem a seguinte propriedade que será usada na demonstração do teorema 2.5.7.

2.5.5 Proposição. *Seja α um gerador para T , então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que todo conjunto da cobertura $\bigvee_{n=-N}^N T^{-n}\alpha$ tem diâmetro menor que ε .*

No início da seção, afirmamos que precisamos de uma relação entre homeomorfismos expansivos e coberturas geradoras. A proposição a seguir garante que todo homeomorfismo expansivo possui um gerador.

2.5.6 Proposição. *T é expansivo se e só se T possui um gerador.*

Demonstração. Veja [[21], Teorema 5.22, pg 139]. $\square$

O teorema a seguir nos proporciona dois métodos para calcular a entropia topológica de um homeomorfismo expansivo. O primeiro método, diz que a entropia topológica de um homeomorfismo expansivo coincide com a entropia de uma cobertura geradora. Observe que esta cobertura sempre existe pela proposição acima. O segundo método, garante que para calcular a entropia é suficiente calcular $r(\delta_0)$ ou $s(\delta_0)$ onde δ_0 é um número real positivo menor do que a constante de expansividade. Note que no primeiro método para calcular a entropia devemos usar a definição de Adler, Konheim e McAndrew e, no segundo método, devemos usar a definição de Bowen e Dinaburg.

2.5.7 Teorema. *Seja $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo expansivo.*

1. Se α é um gerador para T , então $h(T) = h(T, \alpha)$.

2. Se δ é uma constante de expansividade, então $h(T) = r(\delta_0) = s(\delta_0)$ para todo $\delta_0 < \frac{\delta}{4}$.

Demonstração. Seja β qualquer cobertura aberta de X e δ o número de Lebesgue correspondente a cobertura β . Pela proposição 2.5.5, existe $N > 0$ tal que se $B \in \bigvee_{n=-N}^N T^{-n}\alpha$ então $|B| < \delta$. Assim, $\beta < \bigvee_{n=-N}^N T^{-n}\alpha$ e vale a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} h(T, \beta) &\leq h\left(T, \bigvee_{n=-N}^N T^{-n}\alpha\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\left(\bigvee_{n=-N}^N T^{-n}\alpha\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{n=-N}^{N+k-1} T^{-n}\alpha\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(T^{-N}\left(\bigvee_{n=-N}^{N+k-1} T^n\alpha\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{n=0}^{2N+k-1} T^{-n}\alpha\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2N+k}{k} \frac{1}{2N+k} H\left(\bigvee_0^{2N+k-1} T^{-n}\alpha\right) \end{aligned}$$

Portanto, $h(T, \beta) \leq h(T, \alpha)$ para toda cobertura aberta β de X . Logo, $h(T) = h(T, \alpha)$. $\square$

2.5.8 Corolário. *Todo homeomorfismo expansivo tem entropia topológica finita.*

2.6 O *shift*

Em sistemas dinâmicos uma das grandes ferramentas é a chamada dinâmica simbólica, a qual consiste em estudar a aplicação *shift*. Nesta seção iremos estudar, primeiro, algumas propriedades do espaço das sequências bilaterais que denotaremos por Σ_A e, depois, algumas propriedades dinâmicas básicas da aplicação *Shift* que denotaremos por σ . Finalmente, iremos calcular a entropia topológica desta aplicação e concluiremos que o sistema dinâmico (σ, Σ_A) é caótico. Para o leitor interessado, ver [22].

2.6.1 Propriedades do espaço das sequências bilaterais

Considere o alfabeto finito $A = \{1, 2, \dots, a\}$ com $a \geq 2$. O espaço das *sequências bilaterais de símbolos* do alfabeto A é o espaço métrico $\Sigma_A = \{s = (s_j)_{j \in \mathbb{Z}} \text{ tal que } s_j \in A\}$ junto com a métrica

$$d(s, t) = \begin{cases} 2^{-\min\{|i| \geq 0: s_i \neq t_i\}}, & \text{se } s \neq t \\ 0 & \text{se } s = t \end{cases} \quad s, t \in \Sigma_A$$

Observe que duas sequências $s, t \in \Sigma_A$ estão próximas se elas coincidem sobre uma longa cadeia central, isto é, $s_j = t_j$ para todo $|j| \leq N$ com N grande.

Dizemos que um conjunto é *perfeito* se todo ponto é ponto de acumulação.

2.6.1 Proposição. *O espaço métrico (Σ_A, d) é compacto e perfeito.*

Demonstração. Vejamos que (Σ_A, d) é compacto. Seja $(s^n)_{n \geq 1}$ uma sequência em (Σ_A, d) , por tanto, $s^n = (s_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$. Vamos construir uma subsequência de $(s^n)_{n \geq 1}$ convergente no espaço métrico (Σ_A, d) . Dado que o alfabeto A é finito, temos que para toda sequência $(t^n)_{n \geq 1}$ em Σ_A, d e todo índice $j \in \mathbb{Z}$, existe um símbolo $a_j \in A$ que depende da sequência $(t^n)_{n \geq 1}$ tal que $t_j^n = a_j$ para um número infinito de n 's. Considere, então, o símbolo a_0 da sequência $(s^n)_{n \geq 1}$ tal que $s_0^n = a_0$ para um número infinito de n 's. Assim, obtemos uma subsequência $(s^{n_k})_{k \geq 1}$ tal que $s_0^{n_k} = a_0$ para todo $k \geq 1$. Para esta subsequência, considere o símbolo a_1 tal que $s_1^{n_k} = a_1$ para um número infinito de n_k 's. Assim, obtemos uma subsequência $(s^{n_{k_l}})_{l \geq 1}$ tal que $s_0^{n_{k_l}} = 0$ e $s_1^{n_{k_l}} = 1$ para todo $l \geq 1$. Continuando com este procedimento, obtemos uma subsequência de $(s^n)_{n \geq 1}$ que converge para a sequência $a = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in (\Sigma_A, d)$. Portanto, (Σ_A, d) é compacto.

Finalmente, vejamos que (Σ_A, d) é perfeito. Se s é uma sequência bilateral em (Σ_A, d) , então vamos construir uma sequência $(s^n)_{n \geq 1}$ não constante tal que converge para s . Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos um símbolo $a_n \in A$ tal que $a_n \neq s_{n+1}$ ou $a_n \neq s_{-(n+1)}$ e definimos a sequência $(s^n)_{n \geq 1}$ por $s_j^n = s_j$ para $|j| \leq n$ e $s_j^n = a_n$ para $|j| > n$. Assim, a sequência s^n converge para s e $(s^n)_{n \geq 1}$ não é constante. Portanto, (Σ_A, d) é perfeito. $\square$

2.6.2 Propriedades do *shift*

O *shift* é a aplicação $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$, definida por

$$s \mapsto \sigma(s) = (\sigma(s)_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \sigma(s)_j := s_{j+1}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

isto é,

$$\sigma : (\dots, s_{-2}, s_{-1}, \hat{s}_0, s_1, s_2, \dots) \mapsto (\dots, s_{-1}, s_0, \hat{s}_1, s_2, s_3, \dots)$$

onde o chapéu indica o centro da sequência bilateral.

Apesar da definição desta aplicação ser muito simples, o sistema dinâmico (Σ_A, σ) apresenta algumas propriedades dinâmicas interessantes, como veremos a seguir. Além disso, é muito importante “teoricamente”, pois por meio dele, podemos obter informação sobre o comportamento de sistemas dinâmicos caóticos.

2.6.2 Proposição. *O shift possui as seguintes propriedades:*

1. *É um homeomorfismo expansivo.*
2. *O conjunto dos pontos periódicos é denso e enumerável em Σ_A .*

Demonstração. 1. É claro que σ é bijetora. A continuidade de σ segue diretamente da definição da métrica d . De fato, se $s \neq t \in \Sigma_A$, então

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) = 2^{-l_0} \leq 2^{-(l_0-1)} = 2d(s, t)$$

onde $l_0 = \min\{|j| : (\sigma(s))_j \neq (\sigma(t))_j\}$. Logo, como (Σ_A, d) é um espaço métrico compacto e σ é uma bijeção contínua, então σ^{-1} também é contínua.

Vejamos que σ é expansivo. Sejam s e t dois elementos diferentes em Σ_A , então existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $s_{j_0} \neq t_{j_0}$. Escolha o menor j_0 com esta propriedade. Note que $d(\sigma^{n_0}(x), \sigma^{n_0}(y)) = 2^0 > \frac{1}{2}$, portanto $1/2$ é uma constante de expansividade para σ .

2. Observe que os pontos periódicos são precisamente as sequências periódicas em Σ_A . Portanto, para toda sequência bilateral e toda vizinhança deste ponto, podemos construir uma sequência periódica de período suficientemente grande contida na vizinhança.

□

Dado que o *shift* é um homeomorfismo expansivo, pelo Corolário 2.5.8 temos que a entropia topológica é finita. Vamos agora calcular o valor da entropia topológica da aplicação *Shift* usando o método do Teorema 2.5.7

2.6.3 Teorema. $h(\sigma) = \log(a)$.

Demonstração. Para cada i em A considere o conjunto aberto $A_i = \{s \in \Sigma_A \text{ tal que } s_0 = i\}$. Seja $\alpha = \{A_1, \dots, A_a\}$ uma cobertura aberta finita de Σ_A . Afirmamos que α é um gerador para σ . De fato, se s e $t \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \sigma^{-j} \overline{A_j}$ com $A_j \in \alpha$, então $d(\sigma^j(s), \sigma^j(t)) \leq \frac{1}{2}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e, pela Proposição 2.6.2 item 1, $s = t$. Assim, aplicando o Teorema 2.5.7 item 1, temos

$$h(T) = h(T, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \alpha\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^n) = \log(a),$$

o que conclui a prova.

□

Capítulo 3

A Ferradura de Smale

O objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema devida a Stephen Smale:

3.0.4 Teorema (S. Smale). *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo tal que 0 é um ponto fixo hiperbólico, com um ponto homoclínico transversal ν . Fixe uma vizinhança aberta U de $\Lambda = \overline{O(\nu)} = O(\nu) \cup O(0)$ e $A = \{1 \dots, a\}$ um alfabeto finito. Então, existem $K \geq 1$ e um homeomorfismo $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \Phi(\Sigma_A) := \Gamma \subset U$ com as seguintes propriedades:*

- i) Γ é um conjunto invariante por T^K , isto é, $T^K(\Gamma) = \Gamma$,
- ii) Para todo $m \in \Gamma$ a órbita de m por T^K está contida em U ,
- iii) σ e T^K são topologicamente conjugadas, isto é, $\Phi \circ \sigma = T^K \circ \Phi$.

Para isto, primeiro descreveremos brevemente o caso da ferradura de Smale no espaço $\mathbb{R}^2$ que é conjugada à aplicação *shift* e, é portanto, um caso particular de um sistema dinâmico caótico. Depois, introduziremos algumas propriedades básicas da dinâmica hiperbólica e enunciaremos o Lema de Sombreamento, que é a ferramenta principal na demonstração. Finalmente, iremos concluir com este teorema que, dinâmicas parecidas com a da ferradura aparecem sempre que tenhamos um ponto homoclínico transversal. De fato, diremos que qualquer conjunto Γ obtido como no teorema acima é uma ferradura de Smale.

3.1 A Ferradura de Smale em $\mathbb{R}^2$

Nesta seção, iremos descrever brevemente a ferradura introduzida por Smale [?], que é um dos primeiros exemplos importantes com dinâmica caótica em um conjunto invariante. A ferradura é um difeomorfismo que transforma um conjunto de pontos no plano, usando operações topológicas básicas, que consiste em esticar e dobrar o conjunto inicial. O efeito das

sucessivas operações de esticar e dobrar é a obtenção de um objeto de grande complexidade topológica, como veremos a seguir. Recomendamos ao leitor ver [18].

Seja $S = [0, 1] \times [0, 1]$ o quadrado unitário e consideremos para $j = 1, 2$ os seguintes conjuntos

$$H_j = \{(x, y) \text{ tal que } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y_1^j \leq y \leq y_2^j\}$$

$$I_j = \{(x, y) \text{ tal que } x_1^j \leq x \leq x_2^j \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$$

com $0 \leq y_1^1 < y_2^1 < y_1^2 < y_2^2 \leq 1$ e $0 \leq x_1^1 < x_2^1 < x_1^2 < x_2^2 \leq 1$. Veja figura 3.1.

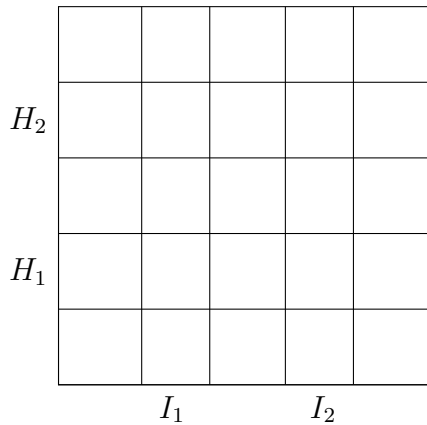


Figura 3.1: Definição dos conjuntos H_i e I_j

Iremos assumir que f é um difeomorfismo tal que $f(H_j) = I_j$ para $j = 1, 2$ e que $S \cap f^{-1}(S) = H_1 \cup H_2$. Para todo ponto $p \in H_1 \cup H_2$

$$Df(p) = \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & b_p \end{pmatrix}$$

com $|a_p| = \mu < 1/2$ e $|b_p| = \lambda > 2$.

O difeomorfismo $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser pensado como a composição de dois mapas. O primeiro mapa, $A(x, y) = (\mu x, \lambda y)$, toma o conjunto S e o estica na direção vertical até que ele se torne mais que duas vezes mais alto e, o contrai na direção horizontal até sua largura se tornar menor que a metade. O segundo mapa g , toma o retângulo obtido aplicando o mapa A e dobra ele formando uma ferradura. Veja figura 3.1

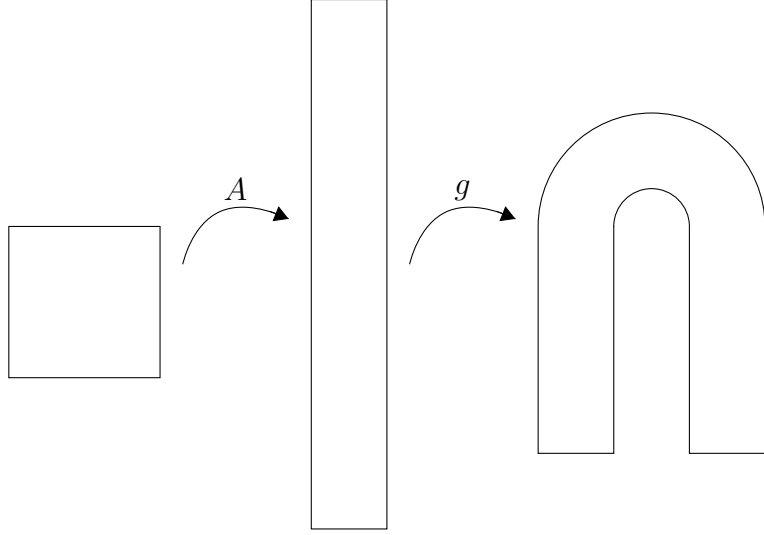


Figura 3.2: Construção da Ferradura

Vejamos que $\Lambda = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(S)$ é um conjunto de Cantor, isto é, um conjunto não vazio, totalmente desconexo, perfeito e compacto. Para isto, primeiro iremos analisar os conjuntos $\mathcal{S}_m^n = \bigcap_m^n f^j(S)$.

Por indução obtemos que $\mathcal{S}_0^n = f(\mathcal{S}_0^{n-1} \cap H_1) \cup f(\mathcal{S}_0^{n-1} \cap H_2)$ é a união de 2^n faixas verticais de largura μ^n . Portanto, a interseção infinita,

$$\mathcal{S}_0^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_0^n = C_1 \times [0, 1]$$

é um conjunto de Cantor de segmentos de reta verticais. Além disso, $\mathcal{S}_0^\infty$ é o conjunto dos pontos cujos iterados para trás permanecem em S .

Analogamente, temos que $\mathcal{S}_{-n}^0$ é a união de 2^n faixas horizontais de largura λ^{-n} . Portanto, a interseção infinita

$$\mathcal{S}_{-\infty}^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_{-n}^0 = [0, 1] \times C_2$$

é um conjunto de Cantor de segmentos de reta horizontais. Além disso, $\mathcal{S}_{-\infty}^0$ é o conjunto dos pontos cujos iterados para a frente permanecem em S .

Se intersectamos os conjuntos $\mathcal{S}_0^n$ e $\mathcal{S}_{-n}^0$, isto é, intersectamos as 2^n faixas verticais de largura μ^n com as 2^n faixas horizontais de largura λ^{-n} , obtemos o conjunto $\mathcal{S}_{-n}^n$ que é a união de 2^{2n} retângulos de dimensões μ^n e λ^{-n} . De fato, se $n = 0$ temos que $\mathcal{S}_{-0}^0 = S$. Se $n = 1$ temos que $\mathcal{S}_{-1}^1$ é a união de 4 retângulos de dimensões μ e λ^{-1} tal como mostra a figura 3.1. No caso $n = 2$ temos que $\mathcal{S}_{-2}^2$ é a união de 16 retângulos de dimensões μ^2 e λ^{-2} tal como mostra a figura 3.1

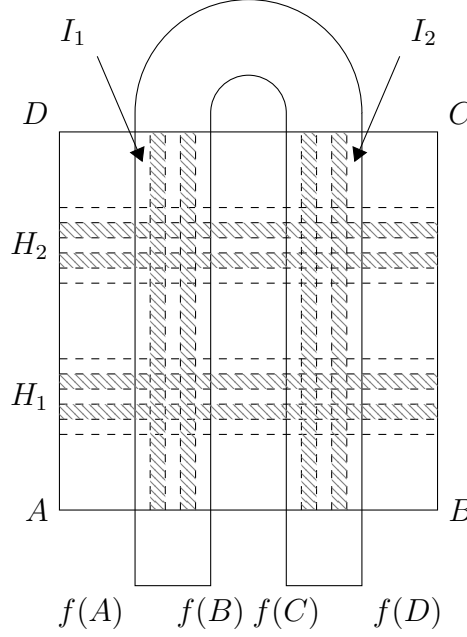


Figura 3.3: Ferradura

Continuando com o processo indutivo, temos que

$$\Lambda = \mathcal{S}_{-\infty}^{\infty} = \mathcal{S}_0^{\infty} \cap \mathcal{S}_{-\infty}^0 = C_1 \times C_2$$

é o produto de dois conjuntos de Cantor e, conseqüentemente, é ele próprio um conjunto de Cantor. Além disso, Λ é o conjunto dos pontos cujos iterados, tanto para frente quanto para trás permanecem em S .

A seguinte proposição fornece uma quantidade substancial de informação sobre o comportamento de f em Λ .

3.1.1 Proposição. *A restrição do difeomorfismo f ao conjunto Λ é conjugado ao shift de dois símbolos.*

Demonstração. Definamos a aplicação $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$, onde $A = \{1, 2\}$, como segue:

$$h(q) = s \text{ onde } f^j(q) \in H_{s_j} \text{ para todo } j.$$

Primeiro vamos ver que $h \circ f|_{\Lambda} = \sigma \circ h$. De fato, seja $h(q) = s$ e $h(f(q)) = t$. Então $f^{j+1}(q) \in H_{s_{j+1}}$ mas $f^{j+1}(q) = f^j \circ f(q) \in H_{t_j}$. Portanto, $s_{j+1} = t_j$ e $\sigma(s) = t$. Logo, $\sigma(h(q)) = h(f(q))$, isto é, o diagrama 3.1 comuta

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \end{array} \quad (3.1)$$

3.1.2 Lema. h é contínua.

Demonstração. Consideremos um ponto $q \in \Lambda$ e a vizinhança de $s = h(q)$, $\mathcal{N} = \{t : t_j = s_j, \text{ para } j \in \{-n_0, \dots, n_0\}\}$. A continuidade de f garante que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $p \in \Lambda$ tal que $\|p - q\| < \delta$, $f^j(p) \in H_{s_j}$, para todo $j \in \{-n_0, \dots, n_0\}$. Assim, se $t = h(p)$ e $\|p - q\| < \delta$, então $t \in \mathcal{N}$, o que prova a continuidade de h . $\square$

3.1.3 Lema. h é injetiva.

Demonstração. Suponhamos que $h(p) = h(q) = s$. Para todo j inteiro, temos que

$$f^{-j}(p), f^{-j}(q) \in H_{s_{-j}},$$

logo $p, q \in f^j(H_{s_{-j}})$. Como j é qualquer, resulta que $p, q \in \bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(H_{s_{-j}})$, e, portanto, p e q estão no mesmo segmento de reta vertical. Analogamente, temos que $p, q \in \bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{s_{-j}})$, e, portanto, p e q estão no mesmo segmento de reta horizontal. Assim, concluímos que $p = q$. $\square$

Finalmente, vamos provar que h é sobrejetiva.

3.1.4 Lema. h é sobrejetiva.

Demonstração. Primeiro, vamos provar por indução, que o conjunto $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}})$ é uma faixa vertical com largura μ^n , para qualquer $s \in \Sigma_A$. De fato, seja $s \in \Sigma_A$. Para $n = 1$, aquele conjunto é $f(H_{s_{-1}}) = I_{s_{-1}}$, que é uma faixa vertical de largura μ . Como

$$\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}}) = f\left(\bigcap_{n=2}^n f^{j-1}(H_{s_{-j}})\right) \cap f(H_{s_{-1}})$$

e, pela hipótese de indução, $\bigcap_{j=2}^n f^{j-1}(H_{s_{-j}})$ é uma faixa vertical de comprimento μ^{n-1} , resulta que $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}})$ é uma faixa vertical de comprimento μ^n . Fazendo n tender para infinito, concluímos que $\bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(H_{s_{-j}})$ é um segmento de reta vertical.

Analogamente, $\bigcap_{j=-\infty}^0 f^{j-1}(H_{s_{-j}})$ é um segmento de reta horizontal, e o conjunto $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} f^{j-1}(H_{s_{-j}})$ é formado apenas por um ponto q . Para esse ponto, resulta que $h(q) = s$ e portanto, h é sobrejetiva. $\square$

Dado que Λ é compacto e, h é contínua e bijetiva, temos que h^{-1} é contínua e portanto um homeomorfismo. $\square$

3.1.5 Corolário. $h(f|_{\Lambda}) = \log 2$.

Assim concluímos que, o sistema dinâmico $(f|_{\Lambda}, \Lambda)$ é um sistema caótico.

3.2 Alguns preliminares da Dinâmica Hiperbólica

Nesta seção enunciaremos algumas definições e resultados da Dinâmica Hiperbólica que iremos precisar. Neste capítulo iremos considerar o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas em $\mathbb{R}^n$ que denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

3.2.1 Definição. Um isomorfismo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é dito hiperbólico se todos os autovalores de A possuem norma diferente de 1.

A proposição a seguir é uma consequência da definição que permite caracterizar tanto o autoespaço generalizado correspondente a todos os autovalores que possuem norma menor do que um quanto como o autoespaço generalizado correspondente a todos os autovalores que possuem norma maior do que um.

3.2.2 Proposição. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ um isomorfismo hiperbólico. Então existem subespaços E^s e E^u (chamados subespaço estável e instável respectivamente) e constantes $c > 0$ e $\lambda_s, \lambda_u \in (0, 1)$ tais que:

1. $\mathbb{R}^n$ possui uma decomposição, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.
2. Os subespaços E^s e E^u são invariantes por $A = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$, isto é, $A_s \in \mathcal{L}(E^s)$ e $A_u \in \mathcal{L}(E^u)$.
3. Para todo $j \geq 0$ e $\nu \in E^s$ temos $\|A_s^j \nu\| \leq c \lambda_s^j \|\nu\|$.
4. Para todo $j \geq 0$ e $\nu \in E^u$ temos $\|A_u^{-j} \nu\| \leq c \lambda_u^j \|\nu\|$.

Demonstração. Veja [[22], (pg. 48)]. □

Note que todo vetor no subespaço estável sofre contração pela ação positiva de A , e todo vetor no subespaço instável sofre contração pela ação negativa de A . Logo, podemos caracterizar os subespaços E^s e E^u como segue:

$$E^s = \{\nu \in \mathbb{R}^n | A^j \nu \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\}$$

$$E^u = \{\nu \in \mathbb{R}^n | A^{-j} \nu \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\}.$$

Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo e 0 um ponto fixo para T , ou seja, $T(0) = 0$. Dizemos que 0 é *um ponto fixo hiperbólico* se a linearização do difeomorfismo T no ponto fixo 0 que denotemos por $DT(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo hiperbólico. É conveniente para os argumentos posteriores introduzir novas normas equivalentes à norma da Proposição 3.2.2, chamadas *normas adaptadas* com as quais a constante c é igual a 1. Com respeito a estas normas as aplicações lineares A_s e A_u^{-1} são contrações, ou seja, $\|A_s\|_* < 1$ e $\|A_u^{-1}\|_* < 1$. Assim, temos que existe $0 < \alpha < 1$ satisfazendo $\|A_s\| \leq \alpha$ e $\|A_u^{-1}\| \leq \alpha$.

3.2.3 Proposição (Normas adaptadas). *Seja $A \in \mathcal{L}(R)^n$ um isomorfismo hiperbólico. Então existem normas equivalentes $|\cdot|_*$ sobre os subespaços E^s e E^u tais que*

$$|A_s \nu|_* \leq \alpha |\nu|_* \text{ para todo } \nu \in E^s$$

$$|A_u^{-1} \nu|_* \leq \beta |\nu|_* \text{ para todo } \nu \in E^u$$

com constantes $\lambda_s < \alpha < 1$ e $\lambda_u < \beta < 1$. Com relação a estas normas, as transformações lineares A_s e A_u^{-1} são contrações, portanto $\|A_s\|_* < 1$ e $\|A_u^{-1}\|_* < 1$.

Demonstração. Primeiro iremos construir a nova norma no espaço E^u . Considere $\lambda_u < \beta < 1$ e escolha um inteiro N suficientemente grande de modo que

$$c(\lambda_u/\beta)^N \leq 1.$$

Para cada $\nu \in E^u$ definimos a nova norma em E^u por

$$|\nu|_* := \sum_{j=0}^{N-1} \beta^{-j} |A_u^{-j} \nu|.$$

Observe que $|\nu| \leq |\nu|_* \leq C|\nu|$ com $C = cN$, portanto as normas são equivalentes. Falta provar que A_u^{-1} é uma contração satisfazendo $\|A_u^{-1}\|_* \leq \beta < 1$. Para isso, considere as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |A_u^{-1} \nu|_* &= \sum_{j=0}^{N-1} \beta^{-j} |A_u^{-j-1} \nu| \\ &= \beta \left(\sum_{j=1}^{N-1} \beta^{-j} |A_u^{-j} \nu| + \beta^{-N} |A_u^{-N} \nu| \right) \\ &\leq \beta \left(\sum_{j=1}^{N-1} \beta^{-j} |A_u^{-j} \nu| + |\nu| \right) \\ &= \beta \sum_{j=0}^{N-1} \beta^{-j} |A_u^{-j} \nu| \\ &= \beta |\nu|_* \end{aligned}$$

onde usamos a seguinte desigualdade

$$\beta^{-N}|A_u^{-N}\nu| \leq c\beta^{-N}\lambda_u^N|x| \leq |\nu|.$$

No espaço E^s , podemos usar o mesmo método para construir a norma, usando A_s em vez de A_u^{-1} . $\square$

Neste capítulo sempre iremos considerar $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 e 0 um ponto fixo hiperbólico de T , onde $A = DT(0)$ é um isomorfismo hiperbólico satisfazendo $\|A_s\| \leq \alpha$ e $\|A_u^{-1}\| \leq \alpha$ para uma constante $0 < \alpha < 1$.

Dado que 0 é um ponto fixo hiperbólico, definimos o conjunto estável local e o conjunto instável local de 0 em relação à uma vizinhança como se segue.

3.2.4 Definição. *Sejam $r > 0$ e $Q(r)$ uma vizinhança do ponto 0 com*

$$Q(r) = \{x = (x_s, x_u) \in E^s \oplus E^u \text{ tal que } \|x_s\| \leq r \text{ e } \|x_u\| \leq r\}.$$

Então definimos, respectivamente, o conjunto estável local e o conjunto instável local de 0 em relação à vizinhança $Q(r)$ como

$$W_{loc}^s(0) = \{x \in Q(r) \mid T^j(x) \in Q, \text{ para todo } j \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(0) = \{x \in Q(r) \mid T^{-j}(x) \in Q, \text{ para todo } j \geq 0\}.$$

Em palavras, o conjunto estável local em relação à vizinhança $Q(r)$ do ponto fixo hiperbólico 0 é formado pelos pontos da vizinhança $Q(r)$ cuja órbita futura está sempre próxima do ponto fixo 0, e similarmente para o conjunto instável. A seguir, iremos enunciar um fato não-trivial, o Teorema de *Hadamard e Perron*, que diz que os conjuntos $W_{loc}^s(0)$ e $W_{loc}^u(0)$ são variedades mergulhadas representadas por gráficos de mapas diferenciáveis.

3.2.5 Teorema (Hadamard-Perron). *Seja T um difeomorfismo de classe C^1 . Então, se $r > 0$ é suficientemente pequeno, temos que*

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(0) &= \{x \in Q(r) \mid T^j(x) \in Q(r), j \leq 0, \text{ e } T^j(x) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\} \\ &= \{x \in Q(r) \mid x = (x_s, h(x_s)) \in E^s \oplus E^u\}, \end{aligned}$$

onde $h : E^s \rightarrow E^u$ é uma aplicação de classe C^1 com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Portanto o espaço tangente no ponto 0 é dado por $T_0 W_{loc}^s(0) = E^s$. Analogamente,

$$\begin{aligned} W_{loc}^u(0) &= \{x \in Q(r) \mid T^{-j}(x) \in Q(r), j \leq 0, \text{ e } T^{-j}(x) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\} \\ &= \{x \in Q(r) \mid x = (k(x_u), x_u) \in E^s \oplus E^u\} \end{aligned}$$

onde $k : E^u \rightarrow E^s$ é uma aplicação de classe C^1 com $k(0) = 0$ e $Dk(0) = 0$. Portanto $T_0 W_{loc}^u(0) = E^u$.

Demonstração. Veja [[22], Teorema II.7 (pg. 59)]. □

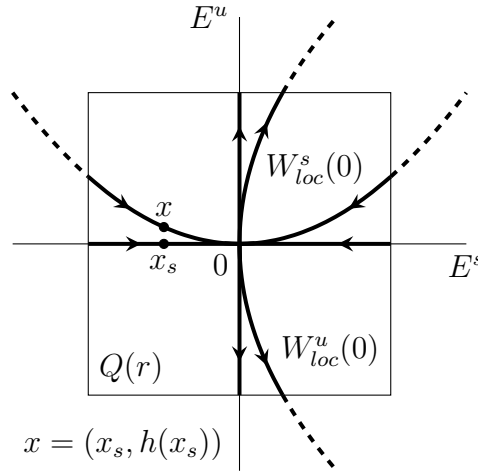


Figura 3.4: Interpretação Geométrica do Teorema de Hadamard-Perron

Observe que a variedade estável local e a variedade instável local de 0 em relação à vizinhança $Q(r)$ são invariantes pela ação de T e T^{-1} respectivamente, isto é, $T(W_{loc}^s(0)) \subset W_{loc}^s(0)$ e $T^{-1}(W_{loc}^u(0)) \subset W_{loc}^u(0)$. Além disso, pelo teorema de *Hadamard e Perron* temos que para um r suficientemente pequeno, a variedade estável local do ponto fixo 0 em relação à vizinhança $Q(r)$ é formada pelos pontos da vizinhança $Q(r)$ cuja órbita futura se aproxima arbitrariamente do ponto fixo 0, e similarmente para o conjunto instável.

Agora iremos definir variedade estável e instável global, e veremos que estes conjuntos podem intersectar-se em outros pontos diferentes do ponto fixo, que são chamados pontos homoclínicos e que foram descobertos por Poincaré, durante seus estudos em mecânica celeste sob o problema dos três corpos. Veja [17].

3.2.6 Definição. *Seja 0 um ponto fixo hiperbólico de T . Definimos, respectivamente, a variedade estável de 0 $W^s(0)$ e a variedade instável de 0 $W^u(0)$ por*

$$W^s(0) = \{\nu \in \mathbb{R}^n | T^j(\nu) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(0) = \{\nu \in \mathbb{R}^n | T^{-j}(\nu) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty\}.$$

Observe que o ponto 0 pertence aos conjuntos $W^s(0)$ e $W^u(0)$ que são invariantes por T , ou seja, $T(W^s(0)) = W^s(0)$ e $T(W^u(0)) = W^u(0)$. Além disso, estes conjuntos se intersectam transversalmente em 0, de modo que $\mathbb{R}^n = T_0\mathbb{R}^n = T_0W^s \oplus T_0W^u$ onde o espaço tangente da variedade estável no ponto 0 é dado por $T_0W^s = E^s$ e o espaço tangente da variedade instável é dado por $T_0W^u = E^u$.

3.2.7 Definição. *Se $\nu \in W^s(0) \cap W^u(0) \setminus \{0\}$ então ν é um ponto homoclínico de 0.*

Se $\nu \in \mathbb{R}^n$ é um ponto homoclínico de 0, então as iteradas de ν também são pontos homoclínicos, pois os conjuntos estável e instável de 0 são conjuntos invariantes. Portanto, chamaremos a órbita de ν de *órbita homoclínica* e a denotaremos por $\mathcal{O}(\nu)$. Além disso, todo ponto homoclínico converge para o ponto fixo hiperbólico 0 sob as iteradas de T e sob as iteradas de T^{-1} , implicando que o fecho da órbita de ν é dado pela união da órbita de ν e de 0, ou seja, $\overline{\mathcal{O}(\nu)} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} T^j(\nu) \cup \{0\}$. Assim temos que, o fecho da órbita homoclínica é um conjunto compacto e invariante por T .

3.2.8 Definição. Dizemos que um ponto homoclínico ν é transversal, se os conjuntos $W^s(0)$ e $W^u(0)$ se intersectam transversalmente em ν , isto é,

$$T_\nu \mathbb{R}^n = T_\nu W^s(0) \oplus T_\nu W^u(0).$$

3.3 Hiperbolicidade

Um fato importante e que provaremos a seguir é que o fecho da órbita de um ponto homoclínico transversal é um conjunto hiperbólico. Para isso usaremos o Teorema de Hadamard-Perron 3.2.5. É fundamental estudar este tipo de conjuntos porque possuem muitas propriedades importantes que permite desenvolver uma vasta teoria para descrever sua dinâmica.

3.3.1 Definição. Um subconjunto compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ invariante por T é dito um conjunto hiperbólico se para todo $x \in \Lambda$ existem subespaços E_x^s e E_x^u de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

1. Para todo $x \in \Lambda$, $T_x \mathbb{R}^n = E_x^s \oplus E_x^u$.
2. Os subespaços E_x^s e E_x^u são invariantes pela linearização de T , isto é,

$$DT(x)(E_x^s) = E_{T(x)}^s \quad e \quad DT(x)(E_x^u) = E_{T(x)}^u.$$

3. Existem constantes $c > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ que não dependem de $x \in \Lambda$ tal que

$$(a) \text{ Para todo } \nu \in E_x^s \text{ e } j \geq 0 \text{ temos que } \|DT^j(x)\nu\| \leq c\lambda^j \|\nu\|.$$

$$(b) \text{ Para todo } \nu \in E_x^u \text{ e } j \geq 0 \text{ temos que } \|DT^{-j}(x)\nu\| \leq c\lambda^j \|\nu\|.$$

É importante ressaltar que os subespaços E_x^s e E_x^u variam continuamente com relação a $x \in \Lambda$. Para o leitor interessado ver [22], Proposição 5.2.1 (pg. 108). Um exemplo de conjunto hiperbólico é a ferradura de Smale descrita na seção 4.1.

3.3.2 Proposição. Seja 0 um ponto fixo hiperbólico de T e seja $\nu \in \mathbb{R}^n$ um ponto homoclínico transversal de 0. Então

$$\overline{\mathcal{O}(\nu)} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} T^j(\nu) \cup \{0\}$$

é um conjunto hiperbólico.

Demonstração. Vimos que $\overline{\mathcal{O}(\nu)}$ é um conjunto compacto e invariante por T . Vamos definir a decomposição em cada ponto $x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)}$ por meio dos espaços tangentes da variedade estável $W^s(0)$ e a variedade instável $W^u(0)$, que se intersectam ao longo da órbita homoclínica,

$$E_x^s := T_x W^s(0) \quad \text{e} \quad E_x^u := T_x W^u(0).$$

Primeiro iremos provar que E_x^s e E_x^u são invariantes pela linearização de T . Para isto, considere $v \in T_x W^s(0)$, então existe uma curva $\gamma : I \rightarrow W^s(0)$ definida em um intervalo I satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Posto que $W^s(0)$ é invariante pela ação de T , então a imagem da curva $t \rightarrow T(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$T(\gamma(t)) \in W^s(0) \quad \text{e} \quad T(\gamma(0)) = T(x).$$

De $\frac{d}{dt}T(\gamma(t)) = DT(\gamma(t))\gamma'(t)$ temos para $t = 0$ que $DT(x)v \in T_{T(x)}W^s(0)$. Assim, obtemos que $DT(x)(T_x W^s(0)) \subset T_{T(x)}W^s(0)$. Aplicando o mesmo argumento a T^{-1} concluimos que

$$DT(x)E_x^s = E_{T(x)}^s.$$

Analogamente, obtemos $DT(x)E_x^u = E_{T(x)}^u$.

Agora iremos provar que para todo $x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)}$, $T_x \mathbb{R}^n = E_x^s \oplus E_x^u$. É claro que para $x = 0$ e $x = \nu$ a afirmação se verifica. Logo, devemos provar que todo iterado do ponto ν é um ponto homoclínico transversal. De fato, temos que a aplicação $DT(\nu) : T_\nu \mathbb{R}^n \rightarrow T_{T\nu} \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear e como $T_\nu \mathbb{R}^n = E_\nu^s \oplus E_\nu^u$ então

$$T_{T(\nu)} \mathbb{R}^n = DT(\nu)(E_\nu^s \oplus E_\nu^u) = DT(\nu)(E_\nu^s) \oplus DT(\nu)(E_\nu^u) = E_{T(\nu)}^s \oplus E_{T(\nu)}^u.$$

Assim, a afirmação segue por indução.

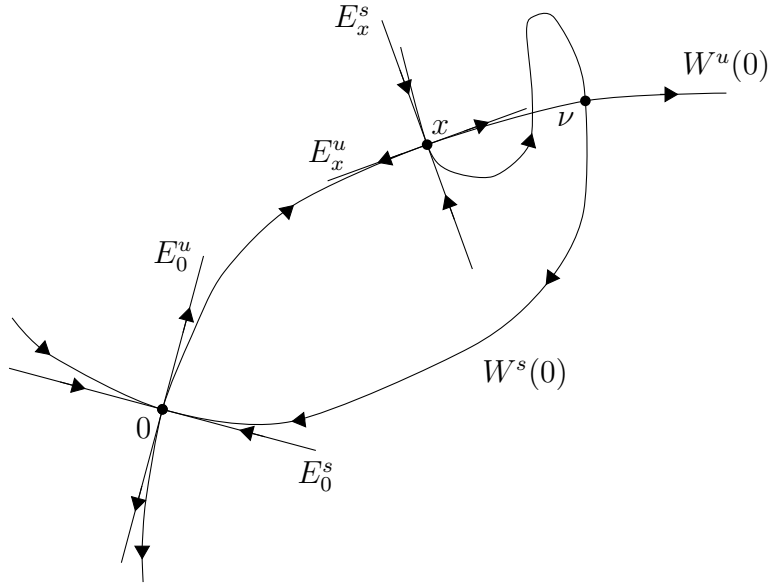


Figura 3.5: A decomposição $E_x^s \oplus E_x^u$.

As estimativas requeridas serão deduzidas das estimativas da linearização de T no ponto fixo hiperbólico $DT(0)$ e usando o fato que $T^j(\nu) \rightarrow 0$ quando $|j| \rightarrow \infty$. Dada a representação local das variedades invariantes como gráficos de mapas diferenciáveis (na vizinhança Q do ponto fixo) do Teorema de Hadamard-Perron 3.2.5

$$y = h(x), \quad (x, y) \in W_{loc}^s(0),$$

$$x = k(y), \quad (x, y) \in W_{loc}^u(0),$$

definimos a mudança de coordenadas $\psi(x, y) = (\xi, \eta)$ por

$$\xi = x - k(y),$$

$$\eta = y - h(x).$$

Dado que $h(0) = k(0) = 0$ e $Dh(0) = Dk(0) = 0$, então $\psi(0) = 0$ e $D\psi(0) = I_d$ onde I_d é a matriz identidade. Portanto, pelo teorema da função inversa, ψ é um difeomorfismo local perto de 0. Nas novas coordenadas, T é representada por

$$\hat{T} = \psi \circ T \circ \psi^{-1} = (\xi_1, \eta_1), \quad \text{onde } \xi_1 = f(\xi, \eta) \text{ e } \eta_1 = g(\xi, \eta)$$

como se mostra no diagrama 3.2, onde $\psi(Q) = \hat{Q}$

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{T} & Q \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \hat{Q} & \xrightarrow{\hat{T}} & \hat{Q} \end{array} \quad (3.2)$$

Além disso, as variedades invariantes locais de 0 em relação à vizinhança $\hat{Q}$ são os conjuntos

$$W_{loc}^s(0) = \{(\xi, 0)\} = E^s \quad \text{e} \quad W_{loc}^u(0) = \{(0, \eta)\} = E^u.$$

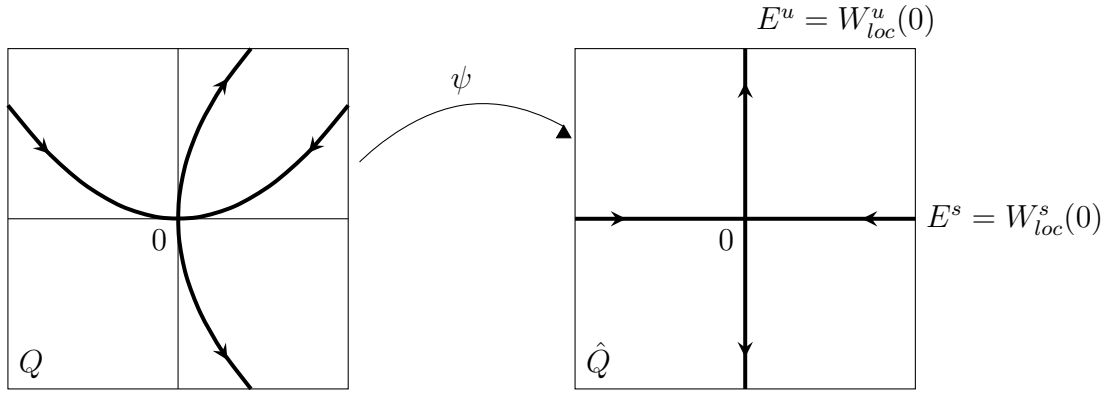


Figura 3.6: Interpretação geométrica

Da invariância destes conjuntos temos que $f(0, \eta) = 0$ e $g(\xi, 0) = 0$ para todo ξ e η suficientemente pequenos. Portanto, usando o fato que $DT(0) = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$ temos que perto de 0 o difeomorfismo $\hat{T}$ pode ser escrito como $\hat{T} = (\xi_1, \eta_1)$ onde

$$\xi_1 = (A_s + O(\xi, \eta))\xi,$$

$$\eta_1 = (A_u + O(\xi, \eta))\eta.$$

Logo,

$$D\hat{T}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} O_\xi(\xi, \eta)\xi + A_s + O(\xi, \eta) & O_\eta(\xi, \eta)\xi \\ O_\xi(\xi, \eta)\eta & O_\eta(\xi, \eta)\eta + A_u + O(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

Em particular, $D\hat{T}(0) = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}$ e ao longo da variedade estável, $W_{loc}^s(\hat{Q})$, temos que

$$D\hat{T}(\xi, 0) = \begin{pmatrix} A_s + O_\xi(\xi, 0)\xi + O(\xi, 0) & O_\eta(\xi, 0)\xi \\ 0 & A_u + O(\xi, 0) \end{pmatrix}$$

De $\|A_s\|, \|A_u^{-1}\| \leq \alpha < 1$ segue que para $v_s = (\xi, 0) \in E_s$ e $\|\xi\|$ suficientemente pequeno,

$$\|D\hat{T}(\xi, 0)v_s\| \leq \vartheta\|v_s\| \text{ com } \alpha < \vartheta < 1.$$

Nas coordenadas originais temos $T = \psi^{-1} \circ \hat{T} \circ \psi$ e portanto $T^j = \psi^{-1} \circ \hat{T}^j \circ \psi$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Considerando um conjunto compacto contido em Q , temos que existe uma constante $K > 0$ satisfazendo $\|D\psi\| \leq K$ e $\|D\psi^{-1}\| \leq K$. Para um ponto x_0 na vizinhança Q de 0 temos

$$DT^j(x_0)v_s = D\psi^{-1} \circ D\hat{T}^j \circ D\psi(x_0)v_s \text{ para todo } v_s \in T_{x_0}W_{loc}^s(0) = E_{x_0}^s.$$

Assim, $\|DT^j(x_0)v_s\| \leq \vartheta^j K^2 \|v_s\|$ para todo $j \leq 0$. Logo, verificamos as estimativas desejadas para os pontos $x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)} \cap Q$.

Agora considere $x_0 \in \overline{\mathcal{O}(\nu)} \setminus Q$. Dado que $T^j(\nu) \rightarrow 0$ quando $|j| \rightarrow \infty$, então existem inteiros $N_1, N_2 \geq 0$ tal que $T^j(\nu) \in Q$ para todo $j \geq N_1$ e $T^{-j}(\nu) \in Q$ para todo $j \geq N_2$. Portanto, para $N = N_1 + N_2$ temos que $T^N(x_0) \in Q$. Assim

$$\begin{aligned} \|DT^{N+n}(x_0)v_s\| &= \|DT^n(T^N(x_0)) \circ DT^N(x_0)v_s\| \\ &\leq \vartheta^n K^2 \|DT^N(x_0)v_s\| \\ &\leq \max_{x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)} \setminus Q} \|DT^N(x)\| \vartheta^n K^2 \|v_s\|. \end{aligned}$$

Observe que a cardinalidade do conjunto $\overline{\mathcal{O}(\nu)} \setminus Q$ é finita pois $T^j(\nu) \rightarrow 0$ quando $|j| \rightarrow \infty$ como se mostra na figura 3.3.

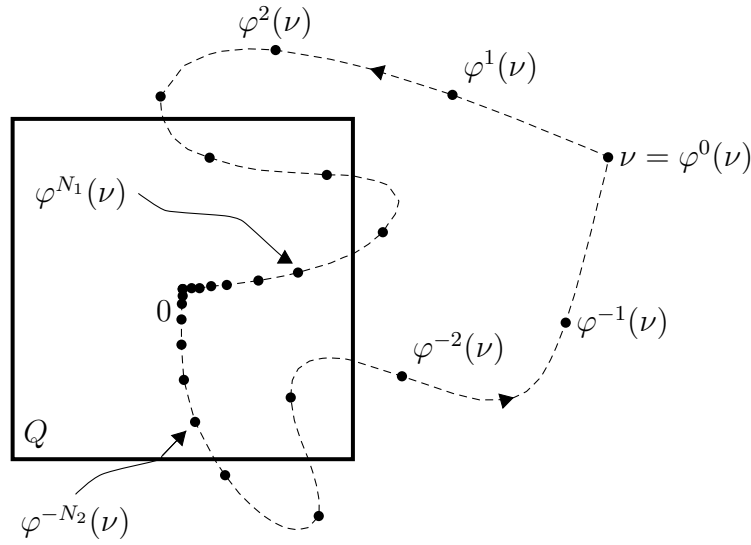


Figura 3.7: Estimativa na demonstração

Assim, definindo $c := \max_{x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)} \setminus Q} \|DT^N(x)\| \vartheta^{-N} K^2$ obtemos

$$\|DT^j(x)v_s\| \leq c\vartheta^j \|v_s\| \text{ para todo } j \geq N \text{ e } x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)} \setminus Q.$$

Posto que $\overline{\mathcal{O}(\nu)} \setminus Q$ é um conjunto finito de pontos, podemos escolher uma constante $C \geq c$ suficientemente grande, de modo que as estimativas se verifiquem para $0 \leq j < N$. Assim, obtemos as estimativas desejadas

$$\|DT^j(x)v_s\| \leq C\vartheta^j \|v_s\|, \text{ para todo } v_s \in E_x^s \text{ e } j \geq 0$$

para todo $x \in \overline{\mathcal{O}(\nu)}$ e uma constante C que não depende de x . Analogamente obtemos as estimativas para E_x^u . $\square$

3.4 Sombreamento e Expansividade

Nesta seção veremos que hiperbolicidade implica as propriedades de expansividade e sombreamento. O leitor interessado poderá consultar em [6], onde provam estas propriedades em espaços mais gerais.

Primeiro, iremos enunciar o Teorema da Variedade Estável para Conjuntos Hiperbólicos e segue como consequência direta que hiperbolicidade implica expansividade.

3.4.1 Teorema (Teorema da Variedade Estável para Conjuntos Hiperbólicos). *Seja T um difeomorfismo de classe C^1 e Λ um conjunto hiperbólico para T com decomposição $T_\Lambda \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $p \in \Lambda$, $W_\varepsilon^s(p; T)$ é um disco mergulhado de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $T_p W_\varepsilon^s(p; T) = E_p^s$. Além disso, $W^s(p; T) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} T^{-j}(W_\varepsilon^s(T^j(p), T))$ (logo, $W^s(p; T)$ é uma subvariedade imersa) e pedaços compactos de $W^s(p; T)$ variam continuamente com respeito a p e T .*

Trocando T por T^{-1} obtemos um resultado análogo para a variedade instável. A constante ε não depende do ponto $p \in \Lambda$, logo as variedades invariantes têm tamanho uniforme sobre todo o conjunto Λ . No enunciado do teorema, $T_\Lambda \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ quer dizer que para todo ponto $p \in \Lambda$ temos a decomposição $T_p \mathbb{R}^n = E_p^s \oplus E_p^u$.

3.4.2 Proposição. *Se Λ é um conjunto hiperbólico então o sistema dinâmico (Λ, T) é expansivo.*

Demonstração. Considere $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$ como no Teorema 3.4.1. Então dizer que

$$|T^j(x) - T^j(y)| < \varepsilon \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}$$

é equivalente a dizer que $y \in W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x)$. Mas pelo Teorema 3.4.4 temos que a variedade estável local e a variedade instável local são transversais, ou seja, $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) = \{x\}$, logo $x = y$. $\square$

3.4.3 Definição. *Uma sequência $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ em $\mathbb{R}^n$ é uma δ pseudo-órbita ($\delta > 0$) se*

$$|x_{j+1} - T(x_j)| \leq \delta \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Observe que se $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é um órbita de T , então $T^j(x_0) = x_j$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Porém, se $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é um pseudo-órbita de T , então podemos dizer que $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência que deixa de ser uma órbita por erros pequenos. As pseudo órbitas não descrevem a real evolução do sistema, porem seria útil a existência de uma órbita (e portanto a evolução precisa do sistema) que acompanhe essa pseudo-órbita ao longo do tempo. Dessa forma, os erros da pseudo-órbita podem ser desconsiderados. Esta propriedade é chamada de sombreamento.

3.4.4 Definição. Dizemos que a órbita de um ponto y_0 em $\mathbb{R}^n$ ε -sombreia uma δ pseudo-órbita $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (ou que $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é ε -sombreada pela órbita de y_0) se $|T^j(y_0) - x_j| \leq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Dizemos que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem a propriedade sombreadamento se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ pseudo-órbita é ε -sombreada.

A seguir enunciaremos sem demonstração o Lema de Sombramento. Este afirma que hiperbolicidade implica a propriedade de sombreadamento. Além disso, é muito importante pois é a principal ferramenta na demonstração do Teorema de S. Smale. Para uma prova, ver [22].

3.4.5 Lema (de Sombramento). *Seja Λ um conjunto hiperbólico do difeomorfismo T . Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ com a seguinte propriedade:*

Toda δ pseudo-órbita $(q_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de T no conjunto hiperbólico Λ é ε -sombreada por uma única órbita $(p_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ numa vizinhança de Λ .

Demonstração. Veja [[22], Teorema III.7, pg 89] □

3.5 Prova do Teorema de S. Smale

Demonstração. Vamos mostrar que $T^K|_\Gamma$ é conjugado a um *shift*, para algum $K > 0$ e um conjunto Γ invariante por T^K , como se mostra na figura 3.3.

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{T^K} & \Gamma \\
 \Phi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \Phi \\
 \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A
 \end{array} \tag{3.3}$$

Vamos dividir a demonstração em três etapas.

ETAPA 1: Nesta etapa iremos construir duas vizinhanças necessárias para definir a aplicação Φ , uma vizinhança do conjunto $\{T^j(\nu) \mid 1 \leq j \leq a\}$ e uma vizinhança do ponto fixo hiperbólico 0.

Considere o alfabeto $A = \{1, 2, \dots, a\}$, então para cada $1 \leq j \leq a$ vamos escolher vizinhanças V_j de $T^j(\nu)$ satisfazendo $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ se $i \neq j$, e vamos definir o aberto V como $V := \bigcup_{1 \leq j \leq a} V_j$.

Agora escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que a ε -vizinhança do conjunto Λ esteja contida em U e a ε -vizinhança do ponto homoclínico $T^j(\nu)$ esteja contida em V_j , para

todo $j \in A$. Dado que Λ é um conjunto hiperbólico, podemos considerar uma δ -vizinhança $B_\delta(0)$ onde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ satisfaz a propriedade do Lema de Sombreamento. Logo, como ν é um ponto homoclínico temos que existe $N \geq 1$ tal que

$$T^{s_j+N-1}(\nu) \in B_\delta(0) \text{ e } T^{s_j-N+1}(\nu) \in B_\delta(0) \text{ para todo } s_j \in A. \quad (*)$$

ETAPA 2: Nesta segunda etapa iremos construir para cada sequência bilateral do conjunto Σ_A uma δ pseudo-órbita do conjunto hiperbólico Λ .

Seja $s = (s_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ uma sequência bilateral do conjunto Σ_A . Para construir a δ pseudo-órbita $q(s) = (q(s)_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ em Λ correspondente à sequência bilateral s , vamos considerar os seguintes “blocos comparativos” que ajudarão a visualizar melhor a correspondência $s \mapsto q(s)$. Para isto, tenha em conta que $q_j = q(s)_j$ e $T^j = T^j(\nu)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} q_{-N+1} & \dots & q_{-1} & q_0 & q_1 & \dots & q_{N-1} & q_N \\ T^{s_0-N+1} & \dots & T^{s_0-1} & T^{s_0} & T^{s_0+1} & \dots & T^{s_0+N-1} & 0 \end{bmatrix} \\ A_1 &= \begin{bmatrix} q_{N+1} & \dots & q_{2N-1} & q_{2N} & q_{2N+1} & \dots & q_{3N-1} & q_{3N} \\ T^{s_1-N+1} & \dots & T^{s_1-1} & T^{s_1} & T^{s_1+1} & \dots & T^{s_1+N-1} & 0 \end{bmatrix} \\ A_{-1} &= \begin{bmatrix} q_{-3N+1} & \dots & q_{-2N-1} & q_{-2N} & q_{-2N+1} & \dots & q_{-N-1} & q_{-N} \\ T^{s_{-1}-N+1} & \dots & T^{s_{-1}-1} & T^{s_{-1}} & T^{s_{-1}+1} & \dots & T^{s_{-1}+N-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A_k &= \begin{bmatrix} q_{2Nk-N+1} & \dots & q_{2Nk-1} & q_{2Nk} & q_{2Nk+1} & \dots & q_{2Nk+N-1} & q_{2Nk+N} \\ T^{s_k-N+1} & \dots & T^{s_k-1} & T^{s_k} & T^{s_k+1} & \dots & T^{s_k+N-1} & 0 \end{bmatrix} \\ A_{-k} &= \begin{bmatrix} q_{-2Nk-N+1} & \dots & q_{-2Nk-1} & q_{-2Nk} & q_{-2Nk+1} & \dots & q_{-2Nk-1} & q_{-2Nk+N} \\ T^{s_{-k}-N+1} & \dots & T^{s_{-k}-1} & T^{s_{-k}} & T^{s_{-k}+1} & \dots & T^{s_{-k}+N-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

E para visualizar melhor a correspondência $s \mapsto q(s)$ recomendamos que o leitor ordene os blocos assim

$$\dots A_{-k} \dots A_{-1} A_0 A_1 \dots A_k \dots$$

O nome de “blocos comparativos” é dado para identificar cada termo da sequência $q(s)$ com um iterado do ponto homoclínico ν , posicionados na primeira e segunda linha de cada bloco, respectivamente. Note que cada iterado do ponto ν escolhido está contido na δ vizinhança do ponto fixo 0 construída na Etapa 1. Já construída a sequência, passamos a provar que, de fato, ela é uma δ pseudo-órbita.

1 Afirmação. *A sequência $q(s)$ é uma δ pseudo-órbita.*

Demonstração. Vamos fazer a análise por casos, como segue:

- Se $j = (2k - 1)N$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $q_j = 0$. Assim, segue diretamente de (*) que

$$|q_{j+1} - T(q_j)| = |T^{s_k - N + 1}(\nu) - T(0)| = |T^{s_k - N + 1}(\nu)| < \delta.$$

- Se $j = (2k)N$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $q_j = T^{s_k}(\nu)$. Assim,

$$|q_{j+1} - T(q_j)| = |T^{s_k + 1}(\nu) - T(T^{s_k}(\nu))| = |T^{s_k + 1}(\nu) - T^{s_k + 1}(\nu)| = 0 < \delta.$$

- Se $j = (2k - 1)N - 1$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $q_j = T^{s_{k-1} + N - 1}(\nu)$. Aplicando (*) e o fato que $T^j(\nu) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$ temos

$$|q_{j+1} - T(q_j)| = |0 - T(T^{s_{k-1} + N - 1}(\nu))| = |T^{s_{k-1} + N}(\nu)| < \delta.$$

- Se $(2k - 1)N - 1 < j < (2k)N$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $q_j = T^{s_k + l}(\nu)$ com $-N < l < -1$. Assim,

$$|q_{j+1} - T(q_j)| = |T^{s_k + l + 1}(\nu) - T(T^{s_k + l}(\nu))| = |T^{s_k + l + 1}(\nu) - T^{s_k + l}(\nu)| = 0 < \delta.$$

- Se $(2k)N < j < (2k + 1)N$ e $k \in \mathbb{Z}$, deixamos a verificação para o leitor.

Com isto, concluímos que $|q_{j+1} - T(q_j)| < \delta$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, ou seja, $q(s)$ é uma δ pseudo-órbita. $\square$

Agora, vamos analisar duas propriedades que iremos precisar na última Etapa. A primeira propriedade, mostra a relação existente entre os termos da sequência que são múltiplos de $2N$ e os iterados do ponto homoclínico ν . E a segunda propriedade, mostra uma relação existente entre a sequência $q(s)$ e a sequência $q(\sigma(s))$.

Seja s uma sequência bilateral em Σ_A e $\sigma(s)$ a imagem de s pela aplicação *shift*, então temos as seguintes propriedades:

$$q(s)_{j2N} = T^{s_j}(\nu) \in V_{s_j} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \quad (\text{I})$$

$$q(s)_{j+2N} = q(\sigma(s))_j \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \quad (\text{II})$$

A propriedade (I) segue diretamente da construção da sequência $q(s)$. De fato, se observamos com atenção a N -ésima coluna de cada um dos blocos A_k obtemos:

Bloco	N-ésima coluna
A_0	$q(s)_0 = T^{s_0}(\nu)$
A_1	$q(s)_{2N} = T^{s_1}(\nu)$
A_{-1}	$q(s)_{-2N} = T^{s_{-1}}(\nu)$
$\vdots$	$\vdots$
A_k	$q(s)_{2Nk} = T^{s_k}(\nu)$
A_{-k}	$q(s)_{-2Nk} = T^{s_{-k}}(\nu)$
$\vdots$	$\vdots$

Blocos da sequência $q(s)$ $q_j = q(s)_j$ e $T^j = T^j(\nu)$							
$A_0 =$	$\begin{bmatrix} q_{-N+1} & \cdots & q_{-1} & q_0 & q_1 & \cdots & q_{N-1} & q_N \\ T^{s_0-N+1} & \cdots & T^{s_0-1} & T^{s_0} & T^{s_0+1} & \cdots & T^{s_0+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
$A_1 =$	$\begin{bmatrix} q_{N+1} & \cdots & q_{2N-1} & q_{2N} & q_{2N+1} & \cdots & q_{3N-1} & q_{3N} \\ T^{s_1-N+1} & \cdots & T^{s_1-1} & T^{s_1} & T^{s_1+1} & \cdots & T^{s_1+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
$A_{-1} =$	$\begin{bmatrix} q_{-3N+1} & \cdots & q_{-2N-1} & q_{-2N} & q_{-2N+1} & \cdots & q_{-N-1} & q_{-N} \\ T^{s_{-1}-N+1} & \cdots & T^{s_{-1}-1} & T^{s_{-1}} & T^{s_{-1}+1} & \cdots & T^{s_{-1}+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
	$\vdots$						
$A_k =$	$\begin{bmatrix} q_{2Nk-N+1} & \cdots & q_{2Nk-1} & q_{2Nk} & q_{2Nk+1} & \cdots & q_{2Nk+N-1} & q_{2Nk+N} \\ T^{s_k-N+1} & \cdots & T^{s_k-1} & T^{s_k} & T^{s_k+1} & \cdots & T^{s_k+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
$A_{-k} =$	$\begin{bmatrix} q_{-2Nk-N+1} & \cdots & q_{-2Nk-1} & q_{-2Nk} & q_{-2Nk+1} & \cdots & q_{-2Nk-1} & q_{-2Nk+N} \\ T^{s_{-k}-N+1} & \cdots & T^{s_{-k}-1} & T^{s_{-k}} & T^{s_{-k}+1} & \cdots & T^{s_{-k}+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
	$\vdots$						

Blocos da sequência $q(\sigma(s))$ $\hat{q}_j = q(\sigma(s))_j$ e $T^j = T^j(\nu)$							
$\hat{A}_0 =$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{-N+1} & \dots & \hat{q}_{-1} & \hat{q}_0 & \hat{q}_1 & \dots & \hat{q}_{N-1} & \hat{q}_N \\ T^{s_1-N+1} & \dots & T^{s_1-1} & T^{s_1} & T^{s_1+1} & \dots & T^{s_1+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
$\hat{A}_1 =$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{N+1} & \dots & \hat{q}_{2N-1} & \hat{q}_{2N} & \hat{q}_{2N+1} & \dots & \hat{q}_{3N-1} & \hat{q}_{3N} \\ T^{s_2-N+1} & \dots & T^{s_2-1} & T^{s_2} & T^{s_2+1} & \dots & T^{s_2+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
$\hat{A}_{-1} =$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{-3N+1} & \dots & \hat{q}_{-2N-1} & \hat{q}_{-2N} & \hat{q}_{-2N+1} & \dots & \hat{q}_{-N-1} & \hat{q}_{-N} \\ T^{s_0-N+1} & \dots & T^{s_0-1} & T^{s_0} & T^{s_0+1} & \dots & T^{s_0+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
	$\vdots$						
$\hat{A}_k =$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{2Nk-N+1} & \dots & \hat{q}_{2Nk-1} & \hat{q}_{2Nk} & \hat{q}_{2Nk+1} & \dots & \hat{q}_{2Nk+N-1} & \hat{q}_{2Nk+N} \\ T^{s_{k+1}-N+1} & \dots & T^{s_{k+1}-1} & T^{s_{k+1}} & T^{s_{k+1}+1} & \dots & T^{s_{k+1}+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
$\hat{A}_{-k} =$	$\begin{bmatrix} \hat{q}_{-2Nk-N+1} & \dots & \hat{q}_{-2Nk-1} & \hat{q}_{-2Nk} & \hat{q}_{-2Nk+1} & \dots & \hat{q}_{-2Nk-1} & \hat{q}_{-2Nk+N} \\ T^{s_{-k+1}-N+1} & \dots & T^{s_{-k+1}-1} & T^{s_{-k+1}} & T^{s_{-k+1}+1} & \dots & T^{s_{-k+1}+N-1} & 0 \end{bmatrix}$						
	$\vdots$						

Para obter a propriedade (II), vamos comparar acima os blocos correspondentes à sequência $q(s)$ e à sequência $q(\sigma(s))$ e, se observarmos com atenção, obtemos que a segunda linha do bloco $\hat{A}_k$ coincide com a segunda linha do bloco A_{k+1} para todo $k \in \mathbb{Z}$, assim concluímos a propriedade (II).

ETAPA 3: Primeiro vamos definir a aplicação $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o valor de K , posteriormente, provaremos que se verificam as propriedades *i*), *ii*) e *iii*) do teorema.

Considere s em Σ_A e $q(s)$ a δ pseudo-órbita construída na Etapa 2. Aplicando o Lema de Sombreamento temos que existe uma única órbita $p(s)$ em U que ε -sombreia $q(s)$, isto é,

$$|p(s)_j - q(s)_j| \leq \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (\text{III})$$

Assim, para cada s em Σ_A vamos definir $\Phi(s) := p(s)_0$ e, para facilitar a leitura, daqui em adiante vamos denotar por p_j o ponto $p(s)_j$. Por outro lado, observe que $p_0 \in V_{s_0}$. De fato, segue de (III) que $|p_0 - q_0| = |p_0 - T^{s_0}(\nu)| \leq \varepsilon$ e como escolhemos $\varepsilon > 0$ de modo que $B_\varepsilon(T^{s_0}(\nu)) \subset V_{s_0}$, então $p_0 \in V_{s_0}$.

Escolhamos agora $K = 2N$, onde N é o número natural que verifica (*) na Etapa 1. Não é difícil verificar que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$(T^K)^j(\Phi(s)) \in V_{s_j} \quad (\text{IV})$$

De fato, note que

$$(T^K)^j(\Phi(s)) = (T^K)^j(p_0) = (T^{2N})^j(p_0) = T^{j2N}(p_0) = p(s)_{j2N}.$$

Além disso, de (I) e (III) temos que $|p_{j2N} - q_{j2N}| = |p_{j2N} - T^{s_j}(\nu)| \leq \varepsilon$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Logo, usando o fato que $B_\varepsilon(T^{s_j}(\nu)) \subset V_{s_j}$ obtemos a afirmação desejada.

Agora vamos provar a propriedade *iii*), isto é, Φ é um homeomorfismo que satisfaz $\Phi \circ \sigma = T^K \circ \Phi$. Começemos provando a igualdade.

3.5.1 Lema. $\Phi \circ \sigma = T^K \circ \Phi$.

Demonstração. Fixe $s \in \Sigma_A$. Segue de (III), que para todo $j \in \mathbb{Z}$

$$|p(s)_j - q(s)_j| = |T^j(p_0) - q(s)_j| \leq \varepsilon.$$

Aplicando (II) e trocando j por $j + 2N$ na estimativa acima temos

$$|T^{j+2N}(p_0) - q(s)_{j+2N}| = |T^j(T^{2N}(p_0)) - q(\sigma(s))_j| = |T^j(T^K(p_0)) - q(\sigma(s))_j| \leq \varepsilon$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $(T^j(T^K(p_0)))_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma ε -sombra da δ -pseudo órbita $q(\sigma(s))$. Por outro lado, aplicando Φ à sequência bilateral $\sigma(s)$ temos

$$|T^j(p(\sigma(s)_0) - q(\sigma(s))_j| = |T^j(\Phi \circ \sigma(s)) - q(\sigma(s))_j| \leq \varepsilon, \quad j \in \mathbb{Z}$$

de modo que $(T^j(\Phi \circ \sigma(s)))_{j \in \mathbb{Z}}$ é também uma ε -sombra da δ pseudo-órbita $q(\sigma(s))$. Pela unicidade do Lema de sombreamento concluímos que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$T^j(T^K(p_0)) = T^j(\Phi(\sigma(s)))$$

Em particular, para $j = 0$, temos $T^K(p_0) = \Phi(\sigma(s))$ e como $\Phi(s) = p_0$ então

$$T^K(\Phi(s)) = \Phi(\sigma(s)).$$

Dado que s é uma sequência bilateral fixa mas arbitrária, concluímos

$$T^K \circ \Phi = \Phi \circ \sigma.$$

□

Queremos agora mostrar que Φ é um homeomorfismo. Dado que Σ_A é compacto, então toda aplicação injetora e contínua $\Phi; \Sigma_A \rightarrow \Phi(\Sigma_A) \subset V$ é um homeomorfismo sobre sua imagem, logo basta provar que Φ é injetora e contínua. Sejam então, s e s' duas sequências bilaterais diferentes em Σ_A tal que $\Phi(s) = p_0$ e $\Phi(s') = p'_0$. Como $s \neq s'$, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $s_{j_0} \neq s'_{j_0}$ e $V_{s_{j_0}} \cap V_{s'_{j_0}} = \emptyset$. Por (IV) temos que $(T^K)^{j_0}(p_0) \neq (T^K)^{j_0}(p'_0)$, então $p_0 \neq p'_0$. Logo, Φ é injetora. Vejamos agora que Φ é contínua.

3.5.2 Lema. Φ é contínua.

Demonstração. Considere $s^{(n)}$ uma sequência de sequências bilaterais que converge para s em Σ_A e vamos provar que $\Phi(s^{(n)}) \rightarrow \Phi(s)$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponha então, que existe uma subsequência de $(\Phi(s^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ que denotaremos por $(\Phi(s^{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$|\Phi(s^{n_k}) - \Phi(s)| \geq \varepsilon^* > 0 \quad (\text{V})$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que $\overline{V}$ é compacto, existe uma subsequência de $(\Phi(s^{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ que converge em $\overline{V}$. Assumiremos que $\Phi(s^{n_k}) \rightarrow \xi$ e por (V) obtemos que $|\xi - \Phi(s)| > 0$. Além disso, $(T^j(\xi))_{j \in \mathbb{Z}}$ é também uma órbita que ε -sombreia a pseudo-órbita $q(s)$. De fato, seja j um inteiro, então

$$|T^j(\xi) - q(s)_j| \leq |T^j(\xi) - T^j(\Phi(s^{n_k}))| + |T^j(\Phi(s^{n_k})) - q(s^{n_k})_j| + |q(s^{n_k})_j - q(s)_j|.$$

Se $n_k \rightarrow \infty$, então $s^{n_k} \rightarrow s$ e $\Phi(s^{n_k}) \rightarrow \xi$. Logo, para qualquer j inteiro temos que

1. $\lim_{n_k \rightarrow \infty} |T^j(\xi) - T^j(\Phi(s^{n_k}))| = 0.$
2. $\lim_{n_k \rightarrow \infty} |T^j(\Phi(s^{n_k})) - q(s^{n_k})_j| \leq \varepsilon.$
3. $\lim_{n_k \rightarrow \infty} |q(s^{n_k})_j - q(s)_j| = 0.$

Assim, concluímos que $|T^j(\xi) - q(s)_j| \leq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Pela unicidade do Lema de Sombreamento temos que $p_j = T^j(\xi)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Em particular, $\Phi(s) = p_0 = \xi$, o que é uma contradição. $\square$

A propriedade *i)* segue diretamente da propriedade *iii)* do Teorema. De fato, para qualquer $m \in M = \Phi(\Sigma_A)$ temos que $T^K(m) = \Phi \circ \sigma \circ \Phi^{-1}(m) \in M = \Phi(\Sigma_A)$.

Finalmente, vamos provar a propriedade *ii)* do Teorema. Considere $m \in M$. Vimos que $\Phi : \Sigma_A \rightarrow M$ é um homeomorfismo, então existe uma sequência bilateral s tal que $\Phi(s) = m$ e cuja δ pseudo-órbita correspondente é $q(s)$. Assim, aplicando o Lema de Sombreamento temos que existe uma única órbita $p(s)$ em U que ε -sombreia $q(s)$, isto é,

$$|T^j(\Phi(s)) - q_j| = |T^j(p_0) - q_j| = |p_j - q_j| \leq \varepsilon$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$. Logo, $T^j(\Phi(s))$ pertence à ε -vizinhança do conjunto Λ que está contida em U .

Com isso concluímos a demonstração do Teorema 3.0.4 $\square$

Capítulo 4

Expansividade e Entropia Topológica

Neste capítulo iremos estudar relações existentes entre sistemas dinâmicos expansivos e sua entropia topológica. Na primeira seção, iremos provar o Teorema de Fathi que chamaremos *A Fórmula De Fathi*. Damos este nome pois o autor obtém uma cota superior finita para a dimensão de Hausdorff de um espaço metrizável compacto:

$$HD_d(X) \leq 2 \frac{h(T)}{\log k}$$

onde chamaremos $k > 1$ a constante de expansão (ou contração) na “Métrica Hiperbólica Adaptada” (também construída por Fathi). Também veremos que todo homeomorfismo expansivo sobre um espaço métrico compacto admite a existência desta métrica. As provas destes teoremas estão baseadas nas idéias de Fathi em [10].

Na seção 3.6.2 estudamos brevemente a aplicação *shift* que tornou-se interessante por ser um caso particular de um homeomorfismo expansivo com infinitas órbitas periódicas, e concluímos, que é um sistema dinâmico caótico. Porém, nem todo homeomorfismo expansivo possui entropia topológica positiva como veremos na seção 4.2.1. Nós estamos interessados em provar o Teorema de Lewowicz que diz que a existência de componentes conexas não triviais no conjunto α -local instável implica entropia positiva. Apresentamos a prova deste Teorema na seção 5.2.2 usando as idéias de Jana Rodriguez Hertz exposto na monografia “New proofs of some known facts about expansive homeomorphisms” [12].

4.1 A fórmula de Fathi

Nesta seção vamos apresentar a fórmula de Fathi que consiste em uma desigualdade que relaciona Entropia Topológica, Dimensão de Hausdorff e Hiperbolicidade no sentido de Fathi. Primeiro iremos dar a definição de “Métrica Hiperbólica Adaptada”.

4.1.1 Definição. *Sejam (X, d') um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Uma métrica d definida em X é uma Métrica Hiperbólica Adaptada, se gera a mesma topologia que d' e, se existem números $k > 1$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo:*

$$\text{para todo } x, y \in X, \max\{d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))\} \geq \min\{kd(x, y), \varepsilon\}.$$

Dado que $k > 1$ temos que a métrica contrai ou expande distâncias no primeiro iterado. Por esta razão, k é chamada de constante de expansão (ou de contração) na métrica hiperbólica adaptada. Sempre que um homeomorfismo expansivo admita a existência de uma métrica hiperbólica adaptada, será chamado de *Homeomorfismo expansivo topologicamente hiperbólico*.

A seguir provaremos que todo homeomorfismo expansivo é topologicamente hiperbólico, isto é, todo homeomorfismo expansivo possui uma métrica hiperbólica adaptada.

4.1.2 Teorema. *Sejam (X, d') um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo expansivo. Então, existe uma Métrica Hiperbólica Adaptada d em X , tais que, T e T^{-1} são Lipschitz com relação a métrica d .*

Demonstração. Escolha uma métrica δ no espaço X definindo sua topologia e ε_0 a constante de expansividade de T com respeito a esta métrica.

Definamos a aplicação $n(x, y)$ para quaisquer dois pontos x e y em X por:

$$n(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = y \\ \min\{n_0 \in \mathbb{N} \mid \max_{|n| \leq n_0} \delta(T^n(x), T^n(y)) > \varepsilon_0\} & \text{se } x \neq y. \end{cases} \quad (4.1)$$

Fixemos $\alpha > 1$, e definamos a função distância $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \alpha^{-n(x, y)} & \text{se } x \neq y. \end{cases} \quad (4.2)$$

Observe que esta função satisfaz as seguintes propriedades:

- i. $\rho(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$ (por definição da função ρ).
- ii. Para todo x e y em X , $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Apesar de ρ não ser uma métrica, ela define a topologia de X já que T é um homeomorfismo expansivo.

Além disso, esta função distância verifica a seguinte implicação:

Se $\max_{|i| \leq n-1} \rho(T^i(x), T^i(y)) \leq \frac{1}{\alpha}$, então

$$\max(\rho(T^n(x), T^n(y)), \rho(T^{-n}(x), T^{-n}(y))) \geq \alpha^n \rho(x, y). \quad (4.3)$$

Agora iremos dar mais condições para a escolha de α . Dado que nós podemos encontrar um inteiro m tal que $\delta(a, b) > \varepsilon/2$ implica $n(a, b) \leq m$. Então podemos escolher α de modo que $\alpha^m \leq 2$. Pela desigualdade triangular da métrica δ e a definição de m , temos que para todo x, y e z em X , ou $n(z, y) \leq m + n(x, y)$ ou $n(z, x) \leq m + n(x, y)$. Assim, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\rho(x, y) \leq 2 \max(\rho(x, z), \rho(z, y)). \quad (4.4)$$

Pela definição da função distância ρ e a desigualdade (4.4), podemos aplicar o **Teorema de Metrização de Frink** (veja capítulo 1), isto é, existe uma métrica D sobre X tal que:

$$D(x, y) \leq \rho(x, y) \leq 4D(x, y). \quad (4.5)$$

Isto implica que D define a mesma topologia sobre X . Por outro lado, de (4.3) e (4.5), temos que:

Se $\max_{|i| \leq n-1} D(T^i(x), T^i(y)) \leq 1/4$, então

$$\max(D(T^n(x), T^n(y)), D(T^{-n}(x), T^{-n}(y))) \geq \frac{\alpha^n}{4} D(x, y). \quad (4.6)$$

Escolha n_0 tal que $K = (\alpha^{n_0}/4) > 1$ e considere $k = K^{1/n_0}$. Finalmente, definimos a métrica d por:

$$d(x, y) = \max_{|i| \leq n_0-1} \frac{D(T^i(x), T^i(y))}{k^i}. \quad (4.7)$$

É claro que, a métrica d define a topologia de X .

Nós podemos estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\max\{d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))\} \geq \max_{0 < |i| \leq n_0} \frac{D(T^i(x), T^i(y))}{k^{|i|-1}}. \quad (4.8)$$

Esta última quantidade é o máximo das seguintes quantidades A e B:

$$A = \max_{0 < |i| < m_0} \frac{D(T^i(x), T^i(y))}{k^{|i|-1}} = k \max_{0 < |i| < n_0} \frac{D(T^i(x), T^i(y))}{k^{|i|}}, \quad (4.9)$$

e

$$B = \frac{\max(D(T^{n_0}(x), T^{n_0}(y)), D(T^{-n_0}(x), T^{-n_0}(y)))}{k^{n_0}}. \quad (4.10)$$

Suponhamos agora que $d(x, y) < \frac{1}{4} \alpha k^{n_0-1}$, então por (4.6), (4.7) e a definição de k , temos:

$$B \geq kD(x, y). \quad (4.11)$$

Por outro lado, de (4.9) e (4.11) temos que, se $d(x, y) < \frac{1}{4}\alpha k^{n_0-1}$ então

$$\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) \geq kd(x, y). \quad (4.12)$$

Dado que X é compacto, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que:

Se $d(x, y) \geq \frac{1}{4}\alpha k^{n_0-1}$, então

$$\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) \geq \varepsilon. \quad (4.13)$$

Finalmente de (4.12) e (4.13), obtemos que:

$$\text{Para todo } x, y \in X, \max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) \geq \min\{kd(x, y), \varepsilon\}. \quad (4.14)$$

Para provar que T e T^{-1} são Lipschitz, observe que elas são Lipschitz com constante de Lipschitz α para ρ e além disso, todas as métricas acima foram definidas na mesma classe de Lipschitz como ρ . $\square$

Se (X, d) é um espaço métrico, dizemos que $T : X \rightarrow X$ é uma *aplicação bi-Lipschitz*, se existe $\beta > 1$ tal que

$$\beta^{-1}d(x, y) \leq d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

A constante β é chamada de constante bi-Lipschitz da aplicação T .

4.1.3 Corolário. *Seja $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo expansivo bi-Lipschitz e (X, δ) um espaço métrico compacto. Então, existe a métrica hiperbólica adaptada d e a aplicação identidade $I : (X, d) \rightarrow (X, \delta)$ é Hölder contínua. Em particular,*

$$DH_\delta(X) \leq \frac{\log \beta}{\log \alpha} DH_d(X),$$

sendo β a constante bi-Lipschitz da aplicação T e α como na demonstração do Teorema 4.1.2.

Demonstração. Considere ε_0 a constante de expansividade de T e n a função definida na demonstração do Teorema 4.1.2. Se x e y são dois pontos diferentes em X e se consideramos $n(x, y) = n_0$, então pela definição de n temos que $\beta^{n_0}\delta(x, y) > \varepsilon_0$. Logo, pela definição de ρ em (4.2), obtemos que

$$\rho(x, y) = \alpha^{-n_0} < \alpha^{\frac{\log \delta(x, y) - \log \varepsilon_0}{\log \beta}}.$$

Pelo Teorema de Metrização de Frink, vimos que existe uma métrica D sobre X tal que se verifica (4.5). Assim, temos que a aplicação identidade $I : (X, \delta) \rightarrow (X, D)$ é Hölder contínua e

$$D(x, y) \leq \alpha^{-\frac{\log \varepsilon_0}{\log \beta}} \delta(x, y)^{\frac{\log \alpha}{\log \beta}} \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Da definição da métrica hiperbólica adaptada em (4.7) obtemos a seguinte desigualdade,

$$d(x, y) < \frac{(k\beta^{\frac{\log \alpha}{\log \beta}})^{n_0-1}}{\alpha^{\frac{\log \varepsilon_0}{\log \beta}}} \rho(x, y)^{\frac{\log \alpha}{\log \beta}} \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Com isso, temos que a aplicação $I : (X, d) \rightarrow (X, \delta)$ é Hölder contínua e pela Observação 1.0.5 concluímos o Corolário. $\square$

A seguir, iremos mostrar que se um homeomorfismo expansivo admite uma métrica hiperbólica adaptada então ele é expansivo. Além disso, verifica a fórmula de Fathi.

4.1.4 Teorema. *Seja $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo de um espaço metrizável compacto. Suponha que existe uma métrica d em X , que gera a topologia, e números $k > 1$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo:*

$$\text{para todo } x, y \in X, \max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) \geq \min(kd(x, y), \varepsilon).$$

Então T é expansivo e vale

$$HD_d(X) \leq \overline{C}_d(X) \leq 2 \frac{h(T)}{\log k} \quad [\text{Fórmula de Fathi}].$$

Em particular, $\overline{C}_d(X)$ e $HD_d(X)$ são finitas.

Demonstração. Primeiro iremos provar por indução sobre n a seguinte propriedade:

$P(n)$: Se

$$\max_{|i| < n} d(T^i(x), T^i(y)) < \frac{\varepsilon}{k}$$

então,

$$\max(d(T^n(x), T^n(y)), d(T^{-n}(x), T^{-n}(y))) = \max_{|i| \leq n} d(T^i(x), T^i(y)) \geq k^n d(x, y).$$

Vejamos que a propriedade se verifica para $n = 1$ e $n = 2$.

$P(1)$: Suponhamos que $\max_{|i| < 1} d(T^i(x), T^i(y)) = d(x, y) < \varepsilon/k$. Dado que d é a métrica hiperbólica adaptada, temos

$$\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) = \max_{|i| \leq 1} d(T^i(x), T^i(y)) \geq kd(x, y).$$

$P(2)$: Suponhamos que $\max_{|i| < 2} d(T^i(x), T^i(y)) < \varepsilon/k$. Dado que d é a métrica hiperbólica adaptada temos

$$kd(T^i(x), T^i(y)) \leq \max(d(T^{i+1}(x), T^{i+1}(y)), d(T^{i-1}(x), T^{i-1}(y)))$$

para $|i| \leq 1$. Assim, temos dois casos:

- Se $\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) = d(T(x), T(y))$, então

$$k^2 d(x, y) \leq k d(T(x), T(y)) \leq d(T^2(x), T^2(y)).$$

- Se $\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) = d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))$, então

$$k^2 d(x, y) \leq k d(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) \leq d(T^{-2}(x), T^{-2}(y)).$$

Portanto,

$$\max_{|i| \leq 2} d(T^i(x), T^i(y)) = \max(d(T^2(x), T^2(y)), d(T^{-2}(x), T^{-2}(y))) \geq k^2 d(x, y).$$

Agora vejamos o caso geral. Suponha que $P(n)$ se verifica para algum $n \geq 1$ e suponhamos que $\max_{|i| \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y)) < \varepsilon/k$. Dado que d é a métrica hiperbólica adaptada temos

$$k d(T^i(x), T^i(y)) \leq \max(d(T^{i+1}(x), T^{i+1}(y)), d(T^{i-1}(x), T^{i-1}(y)))$$

para $|i| \leq n$. Assim, temos dois casos:

- Se $\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) = d(T(x), T(y))$, então

$$k^{n+1} d(x, y) \leq k^n d(T(x), T(y)) \leq \dots \leq k d(T^n(x), T^n(y)) \leq d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y)).$$

- Se $\max(d(T(x), T(y)), d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))) = d(T^{-1}(x), T^{-1}(y))$, então

$$k^{n+1} d(x, y) \leq k^n d(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) \leq \dots \leq k d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) \leq d(T^{-n-1}(x), T^{-n-1}(y)).$$

Portanto,

$$\max_{|i| \leq n+1} d(T^i(x), T^i(y)) = \max(d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y)), d(T^{-n-1}(x), T^{-n-1}(y))) \geq k^{n+1} d(x, y).$$

Para provar que T é expansiva, suponha que $d(T^n(x), T^n(y)) < \varepsilon/k$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então, pela propriedade $P(n)$, temos que

$$\frac{\varepsilon}{k} > \max(d(T^n(x), T^n(y)), d(T^{-n}(x), T^{-n}(y))) \geq k^n d(x, y)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, fazendo n tender para infinito obtemos $d(x, y) = 0$. Portanto, T é expansiva.

Alem disso, para todo $\alpha < (\varepsilon/k)$, o conjunto

$$B_n(x, \alpha) = \left\{ y \mid \max_{|i| \leq n} d(T^i(x), T^i(y)) \leq \alpha \right\} = \bigcap_{j=-n}^n T^{-j} B(T^j(x), \alpha)$$

está contido na bola de centro x e raio $k^{-n}\alpha$. Logo, se consideramos $N(n, \alpha)$ o número mínimo de conjuntos da forma $B_n(x, \alpha)$ necessários para cobrir X e as imagens por T^{-n} dos conjuntos $B_n(x, \alpha)$ temos

$$X = \bigcup_{x \in \Lambda} \bigcap_{i=0}^{2n} T^{-i} \overline{B}(T^i(x), \alpha)$$

onde a cardinalidade do conjunto Λ é igual a $N(n, \alpha)$. Assim, temos que $N(n, \alpha)$ é menor ou igual do que a cardinalidade mínima de um conjunto $(2n+1, \alpha)$ -gerador. Segue da definição de entropia topológica e capacidade superior que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, \alpha)}{n} \leq 2h(T).$$

Logo,

$$\overline{C}_d(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, k^{-n}\alpha)}{-\log k^{-n}\alpha} \leq \frac{\lim_{\alpha \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, \alpha)}{n}}{\log k - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \alpha}{n}}.$$

Dado que $HD_d(X) \leq \overline{C}_d(X)$ (veja capítulo 1), concluimos que

$$HD_d(X) \leq \overline{C}_d(X) \leq 2 \frac{h(T)}{\log k}.$$

Finalmente, obtemos pelo Corolário 2.5.8 que $HD_d(X)$ e $\overline{C}_d(X)$ são finitas. $\square$

4.1.5 Corolário. *Se $T : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo expansivo e a dimensão de Hausdorff com relação a métrica hiperbólica adaptada é positiva, então a entropia topológica é positiva.*

4.2 Condições sobre o espaço métrico para ter entropia topológica positiva

Antes de provar o teorema de Lewowicz iremos apresentar um exemplo de um homeomorfismo expansivo com entropia topológica nula.

4.2.1 Homeomorfismo expansivo com entropia topológica nula

Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ onde $|\cdot|$ é a distância usual e, os subconjuntos

$$A = \left\{ x_n = -1 - \frac{1}{n} : n \leq -2 \right\} \text{ e } B = \left\{ y_n = 1 - \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$$

Agora consideremos o subconjunto

$$X = \{-1, 1\} \cup A \cup B.$$

Podemos considerar X , de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de $|\cdot|$ a X , ou seja, usar entre os elementos de X a mesma distância que eles possuíam como elementos de $\mathbb{R}$. Neste caso, X chama-se *subespaço* de $\mathbb{R}$ e a métrica de X diz-se *induzida* pela de $\mathbb{R}$. Observe que o subespaço X com a métrica induzida é um espaço métrico compacto. Definamos a função $f : X \rightarrow X$ recursivamente como segue:

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(x_n) = x_{n+1}, \quad f(y_n) = y_{n+1} \text{ e } f(x_{-2}) = y_1.$$

Por construção a função f é um homeomorfismo, ou seja, f é bijetiva, contínua e sua inversa é também contínua. Além disso, se consideramos $0 < \delta < 1/2$ temos que f é expansivo. De fato, suponhamos que $x, y \in X \setminus \{-1, 1\}$ e $x \neq y$. Então, existe um inteiro j tal que $f^j(x) = 1/2$ e pela definição de f temos que $|f^j(x) - f^j(y)| > \delta$. Os outros casos são triviais, dado que -1 e 1 são pontos fixos de f .

Observe também que os únicos pontos não errantes de f são os pontos fixos 1 e -1 , assim $\Omega(f) = \{1, -1\}$. Logo pelos Teoremas 2.4.7 e 2.4.8 temos que $h(f) = 0$.

4.2.2 Teorema de Lewowicz

Nesta seção iremos provar o Teorema de Lewowicz. Para isso, iremos precisar de dois lemas. O primeiro, diz que os conjuntos α -local estáveis são contraídos uniformemente pela ação de T sempre que seja um homeomorfismo uniformemente α -expansivo. O segundo, diz que se a componente conexa do conjunto α -local instável de um ponto é não trivial, então podemos encontrar outro ponto y_0 em X tal que a componente conexa do seu conjunto $\frac{\alpha}{2}$ -local instável intersectado com a fronteira da bola de raio $\frac{\alpha}{4}$ e centro y_0 , é diferente de vazio. Observe que a hipótese desse lema é a condição que garante que um homeomorfismo expansivo tenha entropia topológica positiva. Ao longo desta seção, iremos considerar $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo α -expansivo.

4.2.1 Lema. *Para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que*

$$T^n(W_\alpha^s(x)) \subset B_\varepsilon(T^n(x)) \text{ para todo } n \geq N_\varepsilon.$$

Em particular, $\omega(y) = \omega(x)$ para todo $y \in W_\alpha^s(x)$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 1.5.5, existe $N_\varepsilon > 0$ tal que

$$d(x, y) \geq \varepsilon \Rightarrow \sup_{|j| \leq N_\varepsilon} d(T^j(x), T^j(y)) > \alpha. \quad (*)$$

Considere $y \in W_\alpha^s(x)$, $n \geq N_\varepsilon$ e $|j| \leq N_\varepsilon$, então $d(T^{j+n}(x), T^{j+n}(y)) \leq \alpha$.

Suponha que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \varepsilon$, então por (*) temos que

$$\sup_{|j| \leq N_\varepsilon} d(T^j(T^n(x)), T^j(T^n(y))) > \alpha,$$

que é uma contradição. Logo, $d(T^n(x), T^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Assim, concluímos que se $y \in W_\alpha^s(x)$ então $d(T^n(x), T^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Para verificar que se $y \in W_\alpha^s(x)$ então $\omega(x) = \omega(y)$, iremos provar que $\omega(x) \subset \omega(y)$. Considere $z \in \omega(x)$ e $\varepsilon > 0$, então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ e uma subsequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que se $n_k \geq N_0$ então $d(T^{n_k}(x), z) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Além disso, se $y \in W_\alpha^s(x)$ então existe $N_\varepsilon > 0$ tal que $d(T^n(x), T^n(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N_\varepsilon$.

Logo, se $n_k \geq \max\{N_\varepsilon, N_0\}$ temos

$$d(T^{n_k}(y), z) \leq d(T^{n_k}(y), T^{n_k}(x)) + d(T^{n_k}(x), z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Analogamente prova-se que $\omega(y) \subset \omega(x)$. □

4.2.2 Lema. Se $CW_\alpha^u(x_0) \neq \{x_0\}$ para algum $x_0 \in X$, então existe $y_0 \in X$ tal que $CW_{\alpha/2}^u(y_0) \cap \partial B_{\alpha/4}(y_0) \neq \emptyset$.

Demonstração. Considere a aplicação T^{-1} . Aplicando o Corolário 4.1.1 com $\varepsilon = \alpha/2$ temos que existe um número natural $N_{\alpha/2}$ tal que

$$T^{-n}(W_\alpha^u(x_0, T^{-1})) \subset B_{\alpha/2}(T^{-n}(x_0)) \quad , \forall n \geq N_{\alpha/2}.$$

Dado que $CW_\alpha^u(x_0) \subset W_\alpha^s(x_0, T^{-1})$ temos que $T^{-n}(CW_\alpha^u(x_0)) \subset B_{\alpha/2}(T^{-n}(x_0))$ para todo $n \geq N_{\alpha/2}$. Logo,

$$T^{-n}(CW_\alpha^u(x_0)) \subset W_{\alpha/2}^u(T^{-n}(x_0)) \quad , n \geq N_{\alpha/2}.$$

Agora considere $z_0 = T^{-N_{\alpha/2}}(x_0)$ e observe que $CW_{\alpha/2}^u(z_0) \neq \{z_0\}$. De fato, como $CW_\alpha^u(x_0) \neq \{x_0\}$ então existe $x' \in CW_\alpha^u(x_0)$ com $x' \neq x_0$. Além disso, T é um homeomorfismo portanto $T^{-N_{\alpha/2}}(CW_\alpha^u(x_0))$ é um subconjunto conexo de $CW_{\alpha/2}^u(z_0)$ que contém o ponto $T^{-N_{\alpha/2}}(x')$.

Já que $CW_{\alpha/2}^u(z_0) \neq \{z_0\}$ podemos escolher $\delta > 0$ tal que $CW_{\alpha/2}^u(z_0) \cap \partial B_\delta(z_0) \neq \emptyset$. Além disso, note que $\sup_{k \leq 0} \text{diam} T^k(CW_{\alpha/2}^u(z_0)) \leq \alpha$. De fato, sejam $x, y \in CW_{\alpha/2}^u(z_0)$ e $n \geq 0$ então

$$d(T^{-n}x, T^{-n}y) \leq d(T^{-n}x, T^{-n}z_0) + d(T^{-n}z_0, T^{-n}y) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Aplicando o Lema 3.1.3 à aplicação T com $\varepsilon = \delta$ temos que existe $N_\delta \geq 0$ tal que se $d(x, y) \geq \delta$ então $\sup_{|n| \leq N_\delta} d(T^n x, T^n y) > \alpha$. E, dado que $CW_{\alpha/2}^u(z_0) \cap \partial B_\delta(z_0) \neq \emptyset$ e $\sup_{k \leq 0} \text{diam} T^k(CW_{\alpha/2}^u(z_0)) \leq \alpha$ então existe $1 \leq k \leq N_\delta$ tal que

$$\text{diam} T^k(CW_{\alpha/2}^u(z_0)) > \alpha > \alpha/2 \quad (**)$$

2 Afirmação. *Seja $k_0 \geq 1$ o menor k satisfazendo (**), então*

$$T^{k_0}(CW_{\alpha/2}^u(z_0)) \cap \overline{B_{\alpha/4}(T^{k_0}(z_0))} \subset W_{\alpha/2}^u(T^{k_0}z_0).$$

Demonstração. Seja $y \in T^{k_0}(CW_{\alpha/2}^u(z_0)) \cap \overline{B_{\alpha/4}(T^{k_0}(z_0))}$, então existe $z \in CW_{\alpha/2}^u(z_0)$ tal que $y = T^{k_0}z$. Vamos considerar três casos:

- Seja $k \geq k_0$. Dado que $z \in CW_{\alpha/2}^u(z_0)$ e $y = T^{k_0}z$ então $d(T^{-k}y, T^{-k}(T^{k_0}z_0)) \leq \frac{\alpha}{2}$.
- Seja $k = 0$. Dado que $y \in \overline{B_{\alpha/4}(T^{k_0}(z_0))}$ então $d(y, T^{k_0}z_0) \leq \frac{\alpha}{4} < \frac{\alpha}{2}$.
- Seja $0 < k < k_0$. Suponha que existe $0 < k < k_0$ tal que $d(T^{-k+k_0}z, T^{-k+k_0}z_0) > \alpha/2$, então $\text{diam} T^{-k+k_0}(CW_{\alpha/2}^u) > \alpha/2$ com $k_0 - k < k_0$ que é uma contradição. Logo, $d(T^{-k}y, T^{-k}(T^{k_0}z_0)) \leq \alpha/2$.

Assim, temos que $y \in W_{\alpha/2}^u(T^{k_0}z_0)$. □

Portanto se consideramos $y_0 = T^{k_0}(z_0)$ então por (**) e pela afirmação acima concluímos que $CW_{\alpha/2}^u(y_0) \cap \partial B_{\alpha/4}(y_0) \neq \emptyset$. □

4.2.3 Teorema (Lewowicz). *Seja $T : X \rightarrow X$ um homeomorfismo α -expansivo e (X, d) um espaço métrico compacto. Se existe $x_0 \in X$ tal que $CW_\alpha^u(x_0) \neq \{x_0\}$, então*

$$h(T) \geq \frac{\log 2}{N_{\alpha/4}},$$

onde $N_{\alpha/4}$ é como na definição 2.5.2 com $\varepsilon = \alpha/4$.

Demonstração. Vamos provar por indução sob $n \geq 0$ a seguinte propriedade:

$P(n)$: Existe $S_n = \{x_j^{(n)} : j = 0, \dots, 2^{n+1} - 1\} \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ tal que S_n é um conjunto $(nN_{\alpha/4} + 1, \alpha/4)$ -separado.

Vejamos que a propriedade se verifica para os casos $n = 0$ e $n = 1$.

$P(0)$: Existe $S_0 = \{x_j^{(0)} : j = 0, 1\} \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ tal que S_0 é um conjunto $(1, \alpha/4)$ -separado.

De fato, seja $y_0 \in X$ como no Lema 4.2.2. e vamos considerar o conjunto $S_0 = \{x_0^{(0)}, x_1^{(0)}\}$

onde $x_0^{(0)} = y_0$ e $x_1^{(0)} \in CW_{\alpha/2}^u(y_0) \cap \partial B_{\alpha/4}(y_0)$. Dado que $S_0 \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ e $d_1(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}) = d(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}) = \alpha/4$ temos que S_0 é $(1, \alpha/4)$ -separado.

$P(1)$: Existe $S_1 = \{x_j^{(1)} : j = 0, \dots, 3\} \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ tal que S_1 é um conjunto $(N_{\alpha/4} + 1, \alpha/4)$ -separado. Posto que a propriedade se verifica para $n = 0$, considere o conjunto $S_0 = \{x_0^{(0)}, x_1^{(0)}\}$. Para facilitar a leitura do texto iremos denotar x_0^0 por x_0 e x_1^0 por x_1 .

Aplicando o Lema 2.5.3 à aplicação T com $\varepsilon = \alpha/4$, temos que existe $N_{\alpha/4} \geq 1$ tal que se $d(x, y) \geq \alpha/4$ então $\max_{|k| \leq N_{\alpha/4}} d(T^k x, T^k y) > \alpha$. Como $d(x_0, x_1) = \alpha/4$ e $x_1 \in CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ então

$$d_{N_{\alpha/4}+1}(x_0, x_1) = \max_{k=0, \dots, N_{\alpha/4}} d(T^k x_0, T^k x_1) > \alpha.$$

Além disso, o conjunto $CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ é conexo e contém os pontos x_0 e x_1 , então podemos escolher dois pontos y_0^1 e y_1^1 em $CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ tal que

$$d_{N_{\alpha/4}+1}(x_j, y_j^1) = \alpha/4 \text{ para } j = 1, 2.$$

Observe que o conjunto $S_1 = \{x_0, x_1, y_0^1, y_1^1\} \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ é $(N_{\alpha/4} + 1, \alpha/4)$ -separado. De fato, para $i \neq j$ temos

- $d_{N_{\alpha/4}+1}(x_0, y_1^1) > \frac{\alpha}{4}$
- $d_{N_{\alpha/4}+1}(x_i, y_j^1) \geq d_{N_{\alpha/4}+1}(x_i, x_j^1) - d_{N_{\alpha/4}+1}(x_j, y_j^1) > \alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{3\alpha}{4} > \frac{\alpha}{4}$
- $d_{N_{\alpha/4}+1}(y_0^1, y_1^1) \geq d_{N_{\alpha/4}+1}(y_0^1, x_1) - d_{N_{\alpha/4}+1}(x_1, y_1^1) \geq \frac{3\alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{4}$

Na figura 4.1 podemos observar o mecanismo usado no processo indutivo para os primeiros casos.

Agora vejamos o caso geral. Suponha que $P(n)$ se verifica para algum $n \geq 0$ e para facilitar a leitura do texto iremos denotar cada ponto x_j^n do conjunto S_n por x_j . Então, para cada $i \neq j$ temos

$$d_{nN_{\alpha/4}+1}(x_i, x_j) = \max_{0, \dots, nN_{\alpha/4}} d(T^k(x_i), T^k(x_j)) \geq \alpha/4.$$

Logo, existe $l \in \{0, \dots, nN_{\alpha/4}\}$ tal que $d(T^l(x_i), T^l(x_j)) \geq \alpha/4$. Aplicando o Lema 2.5.3 ao mapa T com $\varepsilon = \alpha/4$, temos que existe $N_{\alpha/4} \geq 1$ tal que se $d(x, y) \geq \alpha/4$ então $\max_{|k| \leq N_{\alpha/4}} d(T^k(x), T^k(y)) > \alpha$. Assim, temos

$$\max_{|k| \leq N_{\alpha/4}} d(T^k(T^l(x_i)), T^k(T^l(x_j))) = \max_{-N_{\alpha/4}, \dots, (n+1)N_{\alpha/4}} d(T^k(x_i), T^k(x_j)) > \alpha.$$

E como $S_n \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$, isto é, $d(T^k(x_i), T^k(x_j)) \leq \alpha$ para todo $k \leq 0$, então para $i \neq j$ temos

$$d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_i, x_j) = \max_{k=0, \dots, (n+1)N_{\alpha/4}} d(T^k(x_i), T^k(x_j)) > \alpha$$

Pela conexidade do conjunto $CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ podemos escolher para cada $j = 0, \dots, 2^{n+1} - 1$ pontos $y_j^{(n+1)}$ em $CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ tal que

$$d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_j, y_j^{(n+1)}) = \alpha/4$$

Observe que o conjunto $S_{n+1} = S_n \cup \{y_j^{(n+1)} : j = 0, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ é $((n+1)N_{\alpha/4} + 1, \alpha/4)$ -separado. De fato, para cada $i \neq j$ temos

- $d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_i, x_j) > \alpha$,
- $d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_i, y_j^{(n+1)}) \geq d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_i, x_j) - d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_j, y_j^{(n+1)}) \geq 3\alpha/4$,
- $d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(y_i^{(n+1)}, y_j^{(n+1)}) \geq d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(y_j^{(n+1)}, x_j) - d_{(n+1)N_{\alpha/4}+1}(x_j, y_j^{(n+1)}) \geq \alpha/2$.

Portanto, temos que o conjunto $S_{n+1} = S_n \cup \{y_j^{(n+1)} : j = 0, \dots, 2^{n+1} - 1\} \subset CW_{\alpha/2}^u(y_0)$ é $((n+1)N_{\alpha/4} + 1, \alpha)$ -separado.

Para concluir a demonstração, vamos aplicar a definição de entropia topológica no sentido de Bowen-Dinaburg usando conjuntos separados (ver capítulo 2). Dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe S_n subconjunto de X $(nN_{\alpha/4} + 1, \alpha/4)$ -separado de cardinalidade 2^{n+1} , temos $s_{nN_{\alpha/4}+1}(\alpha/4, X) \geq 2^{n+1}$. Portanto

$$h(T) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log s_{nN_{\alpha/4}+1}(\alpha/4, X)}{nN_{\alpha/4} + 1} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{n+1}}{nN_{\alpha/4} + 1} = \frac{\log 2}{N_{\alpha/4}},$$

o que conclui a prova. □

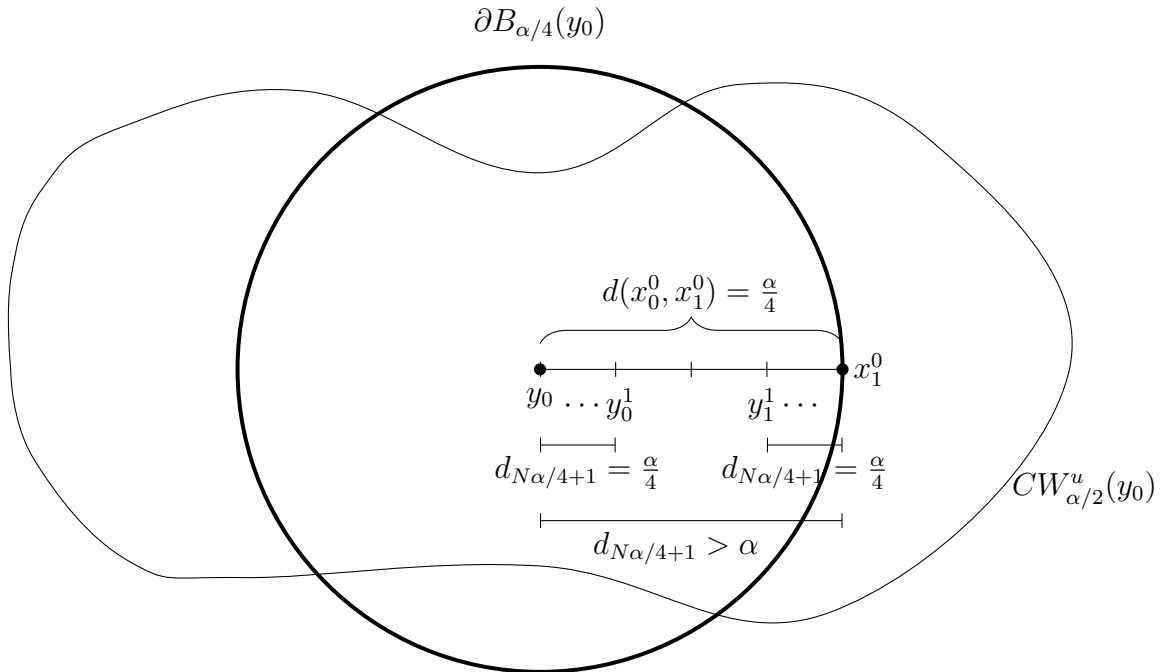


Figura 4.1: Interpretação Geométrica do Processo Indutivo

Se M^n é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e d a distância geodésica induzida pela métrica Riemanniana, veja [3] pg 161. Então, temos o seguinte resultado.

4.2.4 Corolário. *Seja $T : M^n \rightarrow M^n$ um homeomorfismo expansivo e M^n uma variedade Riemanniana compacta, então $h(T) > 0$.*

Demonstração. Seja α uma constante de expansividade de T com relação a distância geodésica d e $S_\alpha(x) = \{y \in M^n \text{ tal que } d(x, y) = \alpha\}$. Dado que a dimensão de M^n é positiva, de [[16], Lemma III, pg 315] temos que, existe $x_0 \in M^n$ tal que

$$CW_\alpha^u(x_0) \cap S_\alpha(x_0) \neq \emptyset \text{ ou } CW_\alpha^s(x_0) \cap S_\alpha(x_0) \neq \emptyset.$$

Se $CW_\alpha^u(x_0) \cap S_\alpha(x_0) \neq \emptyset$, então $CW_\alpha^u(x_0) \neq \{x_0\}$. Pelo Teorema 4.2.3 concluímos que $h(T) > 0$.

Se $CW_\alpha^s(x_0) \cap S_\alpha(x_0) \neq \emptyset$, então $CW_\alpha^u(x_0, T^{-1}) \cap S_\alpha(x_0) \neq \emptyset$ já que os conjuntos $W_\alpha^s(x_0)$ e $W_\alpha^u(x_0, T^{-1})$ são iguais. Logo, $CW_\alpha^u(x_0, T^{-1}) \neq \{x_0\}$ e pelos Teoremas 4.2.3 e 2.3.6 temos que $h(T) = h(T^{-1}) > 0$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Adler, R.L., Konheim, A.G., McAndrew, M.H., 1965, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 114, 309-319.
- [2] Bowen, R., 1973, Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 181, 509-510.
- [3] Carmo, M. do, 2008, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides.
- [4] Cartwright, M. L., Littlewood, J. E., 1945, On non-linear differential equations of the second order. I. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)y + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large J. London Math. Soc. 20, 180–189.
- [5] Cartwright, M. L., Littlewood, J. E., 1947, On non-linear differential equations of the second order. II. The equation $\ddot{y} + kf(y)\dot{y} + g(y, k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$; $k > 0$, $f(y) \geq 1$. Ann. of Math. (2) 48, 472–494.
- [6] Carvalho, Bernardo Melo de, 2012, Sombreamento. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [7] Dinaburg, E.I., 1970, The relation between topological entropy and metric entropy, Soviet Math.11, 13-16.
- [8] Falconer, K., 1985, The geometry of fractal sets. Cambridge University.
- [9] Fathi, A., 1988, Some compact invariant subsets for hyperbolic linear automorphisms of torii. Ergod. Th. Dynam. Syst. 8, 191-204.
- [10] Fathi A., 1989, Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension, Comm. Math. Phys.126, no. 2, 249-262.
- [11] Frink, A., 1937, Distance functions and the metrization problem. Bull. Am. Math. Soc. 43, 133-142.
- [12] Hertz, J. R., New proofs of some known facts about expansive homeomorphisms. Unpublished notes.

- [13] Hurewicz, W., Wallman, H., 1941, Dimension theory. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [14] Katok, A., Hasselblatt, B., 1995, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, C.U.P., Cambridge.
- [15] Lima, E.L., Espaços métricos, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 2011.
- [16] Mañé, R., Expansive homeomorphisms and topological dimension, Trans. Am. Math. Soc. 252, 312-319.
- [17] Poincaré, H., 1899, Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste. Paris. Gauthier-Villars et fils.
- [18] Robinson, Clark, 1994, Dynamical systems; stability, symbolic dynamics, and chaos, CRC Press, Cleveland, OH.
- [19] Smale, S., 1964, Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 63-80.
- [20] Utz, W. R., 1950, Unstable homeomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 769–774.
- [21] Walters, P., 1982, An introduction to ergodic theory. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [22] Zehnder, Eduard., 2010, Lectures on Dynamical Systems Hamiltonian Vector Fields and Symplectic Capacities, European Mathematical Society, Switzerland.