

Fluxos transversalmente holomorfos em 3-variedades

Víctor Arturo Martínez León

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro
2013

M385f Martinez León, Víctor Arturo.
 Fluxos transversalmente holomorfos em 3-variedades / Victor
 Arturo Martinez León. -- Rio de Janeiro, 2013.
 vii, 86 f.: Il. ; 30 cm.
 Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

 Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática,
 Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.
 Referências: f. 86

 1.Folheações (Matemática) – Tese 2. Teoria da homologia . I.
 Scárdua, Bruno César Azevedo (Orient.). II.Universidade Federal do
 Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação
 em Matemática. III. Título.

CDD 514.72

Víctor Arturo Martínez León

Fluxos transversalmente holomorfos em 3-variedades

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2013:

Presidente, Prof. Dr. Bruno César Azevedo Scárdua - IM/UFRJ

Prof. Dr. Luiz Amancio Machado de Sousa Junior - UNIRIO

Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara - UFES

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter posto sempre no meu caminho pessoas de bem. A meus pais Ronald e Elizabeth, por sempre dar-me amor, apoio e força. A meu irmão Jhon, meu melhor amigo quem sempre acreditou em mim. A meu orientador Bruno Scárdua, pelos muitos ensinamentos e pela paciência. A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho fosse terminado. A Josilda, que tem chegado na minha vida no momento mais importante, por mim motivar e fazer muito feliz. Gostaria também agradecer a meu amigo Raúl Izaguirre quem sempre me deu incentivo a continuar nos estudos. A CAPES e a FAPERJ pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é dedicado à classificação de folheações orientáveis unidimensionais transversalmente holomorfas numa 3 variedade fechada conexa, sendo que o pseudogrupo da holonomia da folheação é dado por biholomorfismo entre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$. Assumindo que a folheação satisfaz uma certa condição de racionalidade, o que se verifica se $\dim H^2(M; \mathbb{R}) \leq 1$ ou se $H^2(M; \mathcal{O}) = 0$ (onde $\mathcal{O}$ é o feixe de gérmen de funções as quais são constantes ao longo das folhas na direção transversal), Brunella mostra que a folheação é um dos seguintes: (1) Fibração de Seifert; (2) Folheação linear em T^3 ; (3) Folheação fortemente estável associado à suspensão de um difeomorfismo hiperbólico em T^2 ; (4) Suspensões de automorfismos holomorfos na esfera de Riemann; (5) Folheações transversalmente $\mathbb{C}$ -afine em $S^2 \times S^1$; (6) Folheação em S^3 induzido por uma singularidade de um campo de vetores em $\mathbb{C}^2$ no domínio de Poincaré, e quociente finito de eles.

Palavras chave: Parametrização harmônica, atlas harmonico, fluxos transversalmente holomorfos e folheações orientáveis transversalmente holomorfas racionais.

Abstract

In this work is devoted to the classification of holomorphic one-dimensional orientable foliations $\mathcal{F}$ on closed connected three-manifolds M , the holonomy pseudogroup of the foliation being given by biholomorphisms between open sets of $\mathbb{C}$. Assuming the foliation satisfies a certain rationality condition, which holds if $\dim H^2(M; \mathbb{R}) \leq 1$ or if $H^2(M; \mathcal{O}) = 0$ (where $\mathcal{O}$ is the sheaf of germs of functions which are constant along the leaves in the transverse direction), Brunella proves that the foliation is one of the following: (1) Seifert fibrations; (2) linear foliations on T^3 ; (3) strong stable foliations associated to suspensions of hyperbolic diffeomorphisms of T^2 ; (4) suspension of holomorphic automorphisms of the Riemann sphere; (5) transversely C-affine foliations on $S^2 \times S^1$; (6) foliations on S^3 induced by a singularity of a holomorphic vector field in $\mathbb{C}^2$ in the Poincare domain, and their finite quotients.

Key Words: Harmonic parametrization, harmonic atlas, transversely holomorphic flows and rational transversely holomorphic orientable foliation.

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	10
1.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie	10
1.2 Variedades complexas	12
1.3 Domínio de Poincaré	20
1.4 Feixes	22
1.5 Comohologia de feixes	28
1.6 Cohomologia de Čech	37
1.7 Folheações	44
1.8 Folheação linear em T^n	52
1.9 Fibrados de Seifert de Dimensão três	54
1.10 Conceitos geométricos	59
1.11 Medida harmônica	61
1.12 Condição Hörmander e Hipo-elipticidade	65
1.13 Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani	66
1.14 Folheações transversalmente homogêneas	67
1.15 Folheações transversalmente afins	69
1.16 Folheações transversalmente projetivas	70
1.17 Folheação Umbílica e fluxos transversalmente holomorfos	71
2 Fluxos transversalmente holomorfos	72
2.1 Exemplos de folheações transversalmente holomorfa em 3-variedade	72
2.2 Parametrização harmônica e atlas harmônico	73
2.3 Folheações transversalmente $\mathbb{C}$ -projetivas	79
2.4 Complexificação de uma folheação transversalmente holomorfa racional	81
2.5 Prova do Teorema A	83
Referências	86

Introdução

Neste trabalho estudamos a folheação orientável unidimensional transversalmente holomorfa numa 3-variedade fechada conexa. **Transversalmente holomorfa** significa que o pseudo grupo de holonomia da folheação é dada por biholomorfismos entre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$.

Aqui damos uma lista de exemplos, ver [6] para maiores detalhes e comentários.

- 1) Fibrção de Seifert;
- 2) Folheação linear em T^3 ;
- 3) Folheação estavelmente forte associado à suspensão de difeomorfismos hiperbólicos de T^2 . Chamamos em forma abreviada **folheação estavelmente forte**.
- 4) Suspensões de automorfismo holomorfos da esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$;
- 5) folheação transversalmente $\mathbb{C}$ -afim em $S^2 \times S^1$, isto é [17] quociente da folheação vertical em $(\mathbb{C} \times \mathbb{R})/\{(0, 0)\}$ por $(z, t) \mapsto (\lambda z, 2t)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$;
- 6) folheações em S^3 induzidas por uma singularidade de um campo vetorial holomorfo em $\mathbb{C}^2$ no domínio de Poincaré [1], [33] e quociente finito de eles. Chamamos de **folheação de Poincaré**.

Lembremos que uma suspensão de difeomorfismos holomorfos da superfície de Riemann com gênero positivo pertence a 1) ou 2). A lista previa contém também todas os fluxos Riemannianos [11], que são nada mais que folheações transversalmente holomorfas que preservam volume.

O resultado principal de este trabalho é classificar as folheações transversalmente holomorfas satisfazendo uma certa condição racional. Esta condição será explicada mais adiante, por enquanto é suficiente dizer que é facilmente satisfeito se uma das seguintes condições é cumprida:

- i) $\dim H^2(M, \mathbb{R}) \leq 1$
- ii) $H^2(M, \mathcal{O}) = 0$

onde $\mathcal{O}$ é o feixe em M de funções localmente constante nas folhas e transversalmente holomorfas. Além disso, todos os exemplos na lista previa são racionais.

Teorema A. *Seja $\mathcal{L}$ uma folheação orientável transversalmente holomorfa racional de uma 3-variedade fechada conexa M . Então $\mathcal{L}$ é um dos exemplos da lista previa.*

Temos como corolário: folheações transversalmente holomorfas em S^3 são esgotadas por folheações de Poincaré, em $S^2 \times S^1$ são esgotadas por suspensões e folheações transversalmente $\mathbb{C}$ -afine.

Por outro lado, E. Ghys foi capaz de remover a hipótese de racionalidade, usando algumas ferramentas desenvolvidas neste trabalho. Mas precisamente, ele “calcula” o grupo $H^2(M, \mathcal{O})$ e obtém o seguinte resultado, junto com Teorema de Carrière, [11], completa a classificação de fluxos transversalmente holomorfos numa 3-variedade.

Teorema B.[18] *Seja $\mathcal{L}$ uma folheação orientável transversalmente holomorfa de uma 3-variedade fechada conexa M . Suponha que $H^2(M, \mathcal{O}) \neq 0$. Então $\mathcal{L}$ é Riemanniana e só é um dos exemplos da lista previa. A prova do nosso teorema é estritamente relatado por ideias desenvolvidas em [6], onde existe uma classificação transversal de folheações holomorfas transversais a folheações de codimensão um. De fato, rigorosamente falando, nos trocamos a folheação transversal de [6] por uma “folheação difusa”, ainda transversal a $\mathcal{L}$.*

No Capítulo 1 dou os preliminares necessários para entender este trabalho.

No Capítulo 2, está dividido em 4 seções, na seção 2.1 esboço os exemplos dada pela classificação de este trabalho.

Na seção 2.2 nos introduzimos a ferramenta principal do trabalho, isto é, campo de discos transversais a $\mathcal{L}$ (a folheação difusa) e um correspondente operador diferencial elíptico transversal (o Laplaciano folheado difuso). Isto permite construir uma parametrização harmônica de $\mathcal{L}$, graças a resultados de Hörmander, Malliavin e outros acerca de hypo-elipticidade de E.D.P., e consequências de atlas harmônico adaptado a $\mathcal{L}$.

Na seção 2.3 nos mostramos a existência de um tal atlas especial que permite dar uma classificação às folheações transversais $\mathbb{C}$ -projetivas. Este resultado não necessariamente é a prova de nosso teorema principal, mais simplifica alguns argumentos e além disso estabelece uma conexão com resultados prévios [6], [19]. O atlas harmônico também é básico em [18].

Na seção 2.4, sob a condição mencionada de racionalidade, nos construímos uma complexificação de $(M, \mathcal{L})$: uma superfície compacta complexa X equipada com uma $\mathbb{C}^*$ -ação holomorfa não singular, gerando uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$, tal que $(M, \mathcal{L})$ é quociente de $(X, \mathcal{F})$ por S^1 -ação. O teorema A é então provada na seção 2.4, baseada em a Classificação de superfícies compactas complexas de Enriques-Kodaira [2].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Todos os resultados não demonstrados desta secção podem ser encontrados em [29].

Definição 1.1.1. *Um grupo de Lie é um grupo $(G, \cdot)$ com estrutura de variedade suave tal que as operações*

$$\begin{array}{ccc} m : G \times G & \rightarrow & G \\ (g, l) & \mapsto & g \cdot l \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} i : G & \rightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis.

Exemplo 1.1.1. *O grupo de matrizes invertíveis $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.*

Observação 1.1.1. *Consideremos para cada $g \in G$ a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} L_g : G & \rightarrow & G \\ h & \mapsto & g \cdot h \end{array}$$

*chamada **translação à esquerda de g** . Esta aplicação é diferenciável e sua inversa $L_{g^{-1}}$ é também diferenciável.*

Proposição 1.1.1. *Suponha que G é uma variedade com estrutura de grupo tal que a aplicação $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ é diferenciável. Então G é um grupo de Lie.*

Definição 1.1.2. *Seja G um grupo de Lie. Um subgrupo H de G é chamado **subgrupo de Lie** se H é uma subvariedade de G .*

Exemplo 1.1.2. *O grupo ortogonal $O(n)$, o grupo especial linear $SL(n; \mathbb{R})$ e o grupo ortogonal especial $SO(n)$*

$$O(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}); AA^t = A^t A = 1\}$$

$$SL(n; \mathbb{R}) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}); \det(A) = 1\}$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n; \mathbb{R})$$

são subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Há também o análogo complexo $GL(n; \mathbb{C})$ são as matrizes $n \times n$ com entradas complexas e invertíveis. O seus principais subgrupos de Lie

são o grupo unitário $U(n)$, o grupo especial linear $SL(n; \mathbb{C})$ e o grupo unitário especial $SU(n)$

$$U(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}); AA^H = A^H A = 1\}$$

$$SL(n; \mathbb{C}) = \{M \in GL(n; \mathbb{C}); \det(A) = 1\}$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n; \mathbb{C})$$

Sendo que neste caso em $U(n)$ o símbolo H significa que estamos considerando o conjugado hermitiano.

Definição 1.1.3. *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade suave. A **ação à esquerda de G em M** é uma aplicação $G \times M \rightarrow M$, tal que satisfaz:*

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot h) = (g_1 \cdot g_2) \cdot h;$$

$$e \cdot h = h.$$

A **ação à direita de G em M** é uma aplicação $M \times G \rightarrow M$, tal que satisfaz:

$$(h \cdot g_1) \cdot g_2 = h \cdot (g_1 \cdot g_2);$$

$$h \cdot e = h.$$

Dizemos que uma variedade M é dotado com uma **G -ação** se tem ação à esquerda e direita de G em M . Um variedade M dotado com uma G -ação é chamada **G -espaço**.

Introduziremos uma terminologia básica de ações de grupos de Lie. Seja $\theta : G \times M \rightarrow M$ a ação do grupo de Lie G em a variedade suave M , isto é, $\theta(e, g) = g$ e $\theta(g_1 \cdot g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x))$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in M$.

1. A ação é chamada **suave** se a aplicação $\theta : G \times M \rightarrow M$ é suave. Neste caso, para cada $g \in G$ a aplicação $\theta_g : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo, com inversa $\theta_{g^{-1}}$.
2. Para qualquer $p \in M$, o **órbita de p sob a ação** é o conjunto

$$\mathcal{O}_p(\theta) = \{\theta(g, p); g \in G\},$$

de todas as imagens de p sob elementos de G .

3. A ação é **transitiva** se para qualquer par de pontos $p, q \in M$, existe um elemento do grupo g tal que $\theta(g, p) = q$, ou equivalentemente se a órbita de qualquer ponto é todo M .
4. Dado $p \in M$, o **grupo de isotropia**, denotado por G_p , é o conjunto de elementos $g \in G$ que fixam p :

$$G_p(\theta) = \{g \in G; \theta(g, p) = p\}.$$

É evidente que $G_p(\theta)$ é fechado em G .

5. A ação é chamada **livre** se o único elemento de G que fixa qualquer elemento de M é a identidade: $\theta(g, p) = p$ para algum $p \in M$ implica que $g = e$. Isto é equivalente à exigência que $G_p(\theta) = \{e\}$ para todo $p \in M$.

6. A ação é chamada **própria** se a aplicação $G \times M \rightarrow M \times M$ dado por $(g, p) \mapsto (\theta(g, p), p)$ é uma aplicação própria (isto é, a pre-imagem de qualquer conjunto compacto é um conjunto compacto).

Definição 1.1.4. Uma **álgebra de Lie** é um espaço vetorial $\mathcal{B}$ dotado de uma aplicação bilinear $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, denotado por $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ e chamado **colchete ou comutador** de X e Y satisfazendo as seguintes duas propriedades para todo $X, Y, Z \in \mathcal{B}$:

- i) *Anti-simétrica:* $[X, Y] = -[Y, X]$.
- ii) *Identidade de Jacobi:* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Exemplo 1.1.3. O espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$ dotado do seguinte comutador $[X, Y] = XY - YX$ é um álgebra de Lie. Quando estamos pensando em o espaço das matrizes reais $n \times n$ como uma álgebra de Lie com este comutador, vamos denotar-lo por $gl(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.1.4. Seja M uma variedade suave compacta e sejam X, Y dois campos de vetores suaves em M . Fixado $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, o vetor

$$v(t) = DX_{-t}(X_t(p)) \cdot Y(X_t(p))$$

é tangente a M em p . Logo $t \mapsto v(t)$ é uma curva suave em $T_p M$.

O **colchete de Lie** entre X e Y é o campo de vetores $[X, Y]$ definido por

$$[X, Y](p) = \frac{d}{dt}(v(t))|_{t=0}.$$

Observe que a definição de $[X, Y](p)$ é local, isto é, só depende dos valores de X e Y numa vizinhança de p . O espaço dos campos suaves definidos em M dotado de este colchete de Lie é uma álgebra de Lie.

1.2 Variedades complexas

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Uma **estrutura complexa** em V é um endomorfismo $J : V \rightarrow V$, tal que $J^2 = -Id_V$. Tal estrutura torna V um espaço vetorial complexo via a multiplicação da unidade imaginária i por um vetor $v \in V$ definida por $iv := Jv$. Reciprocamente, todo espaço vetorial complexo possui uma estrutura complexa dada por $Jv := iv$. De fato,

$$J^2(v) = J(J(v)) = J(iv) = iJ(v) = i^2v = -v \text{ para todo } v \in V,$$

isto é, $J^2 = -Id_V$.

Exemplo 1.2.1. Seja $\mathbb{C}^m$ o espaço Euclidiano complexo. Escrevemos um vetor de $\mathbb{C}^m$ como a m -upla

$$z = (z_1, \dots, z_m) = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)$$

e identificamos com o vetor $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ em $\mathbb{R}^{2m}$. Observe que o espaço Euclidiano complexo $\mathbb{C}^m$ com as operações usuais de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, torna-se um espaço vetorial complexo. Assim podemos definir uma estrutura complexa J em $\mathbb{C}^m$ por $J_m z = iz$, ou seja,

$$J_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (-y_1, \dots, -y_m, x_1, \dots, x_m).$$

A estrutura complexa J_m definida acima é chamada **estrutura complexa canônica**. Ao longo do texto, usaremos a identificação

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) \quad (1.1)$$

de $\mathbb{C}^m$ com $\mathbb{R}^{2m}$ e a estrutura complexa canônica J_m em $\mathbb{R}^{2m}$ sem fazer referência.

Sejam U um aberto de $\mathbb{C}^m$ e $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função. Usando a identificação em (1.1), podemos escrever

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m), \\ g_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)).$$

Dizemos que $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é de classe C^1 , quando $F : U \subset \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é diferenciável e as derivadas parciais

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \text{ e } \frac{\partial g_i}{\partial y_j}$$

são contínuas para todos $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Definição 1.2.1. *Seja U um aberto de $\mathbb{C}^m$. Dizemos que uma função $F : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é **diferenciável (no sentido complexo)** em $a \in U$, se existe uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que*

$$F(a + h) = F(a) + L(h) + o(h), \text{ com } \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|}, \quad (1.2)$$

para todo $h \in \mathbb{C}^m \approx \mathbb{R}^{2m}$ de norma suficientemente pequena. A função $F : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é **holomorfa em** $a \in U$ se, e somente se, F é diferenciável (no sentido complexo) em uma vizinhança de a em U . Além disso, dizemos que F é **holomorfa em** U , se F é holomorfa em todo ponto de U .

Proposição 1.2.1. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função de classe C^1 . Então F é holomorfa em U se, e somente se,*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \text{ e } \frac{\partial f_i}{\partial y_j} = -\frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \text{ em } U, \quad (1.3)$$

para todos $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Demonstração. Ver [14], página 29, Teorema 6.3. $\square$

As equações em (1.3) são denominadas de equações de Cauchy-Riemann para a função $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Proposição 1.2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função de classe C^1 . Então F é holomorfa em U se, e somente se,*

$$dF(z) \circ J_m = J_n \circ dF(z), \text{ para todo } z \in U,$$

onde J_m e J_n denotam as estruturas complexas canônicas de $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$, respectivamente.

Demonstração. Usar Cauchy-Riemann e a Proposição 1.2.1. $\square$

Definição 1.2.2. Uma **variedade complexa** M de **dimensão complexa** m é uma variedade diferenciável de dimensão real $2m$, munida de um atlas formado por cartas $\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{C}^m \approx \mathbb{R}^{2m}$, tais que a mudança de coordenadas

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma função holomorfa, sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

O par (U_α, ψ_α) é denominado **carta coordenada holomorfa** ou **sistema de coordenadas complexas**. A coleção de todas as cartas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ é chamada **atlas complexo** para M . Se o atlas complexo $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ é maximal, dizemos que $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ é uma **estrutura complexa**.

Exemplo 1.2.2. Sejam M uma variedade complexa de dimensão complexa m e $U \subset M$ um aberto não-vazio. Observe que $U \subset M$, munido com o atlas induzido por M é também uma variedade complexa de dimensão complexa m .

Definição 1.2.3. Uma estrutura **quase-complexa** em uma variedade diferenciável M é um campo de endomorfismos diferenciável J que associa a cada $p \in M$ um $(1, 1)$ -tensor $J(p) = J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -Id_{T_p M}$. Uma variedade diferenciável M , munida de uma estrutura quase-complexa J , é dita **variedade quase-complexa**.

Proposição 1.2.3. Toda variedade quase-complexa (M, J) tem dimensão real par e, além disso, M é orientável.

Demonstração. Observe que podemos tornar o espaço tangente $T_p M$ em um espaço vetorial complexo definindo em $T_p M$ a multiplicação por um número complexo da seguinte forma

$$(a + ib)X = aX + bJX.$$

Suponhamos que a dimensão complexa de $T_p M$ é m e seja $\{X_1, \dots, X_m\}$ a base de $T_p M$ sobre $\mathbb{C}$. Daí $\{X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m\}$ é um conjunto linearmente independente que gera $T_p M$ sobre $\mathbb{R}$, ou seja, $\{X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m\}$ é uma base de $T_p M$ sobre $\mathbb{R}$. Portanto $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$. Agora, para concluir a demonstração dessa proposição, resta-nos mostrar que M é orientável, ou seja, as bases $\{X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m\}$ e $\{Y_1, \dots, Y_m, JY_1, \dots, JY_m\}$ distintas induzem a mesma orientação em $T_p M$. Com efeito, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, podemos escrever

$$Y_j = \sum_{k=1}^m (a_{kj}X_k + b_{kj}JX_k) \text{ e } JY_j = \sum_{k=1}^m (-b_{kj}X_k + a_{kj}JX_k)$$

e considerar as matrizes quadradas de ordem m , $A = (a_{kj})$ e $B = (b_{kj})$. Note que a matriz de mudança de base pode ser representada por

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{aligned} \det(C) &= (\det(A))^2 + (-1)^m (\det(B))(\det(-B)) = (\det(A))^2 + (-1)^{2m} (\det(B))^2 \\ &= (\det(A))^2 + (\det(B))^2 > 0, \end{aligned}$$

segue que M é orientável. $\square$

Exemplo 1.2.3. As variedades complexas são variedades quase-complexas. De fato, seja M uma variedade complexa de dimensão m . Podemos definir em uma vizinhança coordenada complexa (U_α, ψ_α) o operador

$$J = (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha,$$

onde $J_m(z) = iz$. Veja que o operador J é um endomorfismo e está globalmente definido, pois se tomarmos outra carta complexa (U_β, ψ_β) com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e sendo a mudança de coordenada $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ holomorfa, temos

$$\begin{aligned} (d\psi_\beta)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\beta &= (d\psi_\beta)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\beta \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ d\psi_\alpha \\ &= (d\psi_\beta)^{-1} \circ d\psi_\beta \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha \\ &= (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J^2 &= ((d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha) \circ ((d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha) \\ &= (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m^2 \circ d\psi_\alpha \\ &= -(d\psi_\alpha)^{-1} \circ d\psi_\alpha \\ &= -Id. \end{aligned}$$

Logo J é uma estrutura quase-complexa em M . A estrutura quase-complexa J obtida no exemplo acima é denominada **estrutura quase-complexa canônica**.

Definição 1.2.4. Sejam M e N duas variedades complexas de dimensão complexa m e n , respectivamente. Uma função $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 é **holomorfa** se, e somente se, para todas as cartas coordenadas complexas $\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{C}^m$ e $\varphi_\beta : V_\beta \subset N \rightarrow \mathbb{C}^n$, com $f(U_\alpha) \subset V_\beta$, a expressão em coordenadas de f ,

$$\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \varphi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{C}^n,$$

é uma função holomorfa.

Observação 1.2.1. Sejam M e N variedades complexas de dimensão complexa m e n , respectivamente. Decorre da Definição 1.2.4 que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se,

$$\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \varphi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{C}^n,$$

é uma função holomorfa. Usando a Proposição 1.2.2, obtemos que $\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ é holomorfa se, e somente se,

$$d(\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ J_m = J_n \circ d(\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1})$$

donde

$$d\varphi_\beta \circ df \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m = J_n \circ d\varphi_\beta \circ df \circ (d\psi_\alpha)^{-1}$$

o que implica

$$df \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha = (d\varphi_\beta)^{-1} \circ J_n \circ d\varphi_\beta \circ df$$

Logo $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se,

$$df \circ J = J' \circ df,$$

onde J e J' são as estruturas quase-complexas canônicas de M e N , respectivamente.

Observação 1.2.2. Consideremos M uma variedade complexa de dimensão complexa m e J a estrutura complexa canônica de M . Sejam $z_k = x_k + iy_k$ a k -ésima coordenada da carta coordenada complexa $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{2m}$. Afirmamos que

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \text{ e } J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

De fato, por definição,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = (d\psi)^{-1}(e_k) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y_k} = (d\psi)^{-1}(e_{m+k})$$

para $1 \leq k \leq m$ onde

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$$

é um referencial local em M . Visto que J é a estrutura quase-complexa canônica de M , então

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = ((d\psi)^{-1} \circ J_m \circ d\psi)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = (d\psi)^{-1}(J_m(e_k)) = (d\psi)^{-1}(e_{m+k}) = \frac{\partial}{\partial y_k}$$

e

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = ((d\psi)^{-1} \circ J_m \circ d\psi)\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = (d\psi)^{-1}(J_m(e_{m+k})) = -(d\psi)^{-1}(e_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Sejam (M, J) uma variedade quase-complexa. A aplicação $N_J : TM \times TM \rightarrow TM$, definida por

$$N_J(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\}, \quad (1.4)$$

é um $(2, 1)$ -tensor sobre M , denominado o tensor de **Nijenhuis (ou torção)**.

Definição 1.2.5. Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. Dizemos que J é uma **estrutura integrável**, se $N_J \equiv 0$.

Proposição 1.2.4. Sejam M^{2m} uma variedade complexa e J a estrutura quase-complexa canônica de M . Então J é integrável.

Demonstração. Seja $z_k = x_k + iy_k$ a k -ésima coordenada da carta coordenada complexa (U, ψ) . Segue da Observação 1.2.2 que

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \text{ e } J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (1.5)$$

para cada $1 \leq k \leq m$. Como N_J é um tensor, então para verificar que $N_J(X, Y) = 0$, para todos $X, Y \in TM$, basta mostrar que N_J é nulo nos campos coordenados. Para isto, observe que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right] = 0, \quad (1.6)$$

com $1 \leq j, k \leq n$. Substituindo as igualdades em (1.6) na expressão em (1.4) e usando (1.5), obtemos

$$N_J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = N_J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = N_J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = 0. \quad \square$$

A recíproca desta proposição foi provada em 1957, por Newlander e Nirenberg, ver Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds, página 393, Teorema 1.1. A saber:

Teorema 1.2.1. (Newlander e Nirenberg). *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. Se a estrutura quase-complexa J é integrável, então M admite uma única estrutura de variedade complexa em relação à qual J é a estrutura quase-complexa canônica.*

Veremos agora uma outra interpretação para a integrabilidade de J . Para isto, vamos considerar (M^{2m}, J) uma variedade quase-complexa de dimensão complexa m . A complexificação do espaço tangente de M em $p \in M$ é o produto tensorial

$$T_p M^{\mathbb{C}} = T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

cujos vetores são da forma $Z = X + iY$, com $X, Y \in T_p M$. Assim, $T_p M^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial complexo com dimensão complexa $2m$.

A estrutura quase-complexa J_p pode ser estendida a $T_p M^{\mathbb{C}}$ do seguinte modo:

$$J_p(X + iY) = J_p X + iJ_p Y, \text{ para todo } X, Y \in T_p M.$$

Observe que

$$J_p^2(X + iY) = J_p(J_p X + iJ_p Y) = J_p^2(X) + iJ_p^2(Y) = -(X + iY),$$

isto é, $J_p^2 = -Id$. Logo a extensão de J_p ao espaço vetorial $T_p M^{\mathbb{C}}$ é uma estrutura quase-complexa.

Agora considere

$$T_p^{1,0} M = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}}; J_p Z = iZ\} \quad \text{e} \quad T_p^{0,1} M = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}}; J_p Z = -iZ\} \quad (1.7)$$

os auto-espaços associados aos autovalores i e $-i$ de J_p , respectivamente. O auto-espaço $T_p^{1,0} M$ é chamado **espaço tangente complexificado**.

Lema 1.2.1. *Seja (M^{2m}, J) uma variedade quase-complexa de dimensão real $2m$. Os auto-espaços $T_p^{1,0} M$ e $T_p^{0,1} M$ de $T_p M^{\mathbb{C}}$, definidos em (1.7), têm dimensão complexa m e satisfazem*

$$i) \quad T_p^{1,0} M = \{X - iJX; X \in T_p M\};$$

$$ii) \quad T_p^{0,1} M = \{X + iJX; X \in T_p M\};$$

$$iii) \quad T_p M^{\mathbb{C}} = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M.$$

Demonstração. Inicialmente, considere $\{e_1, \dots, e_m, J_p(e_1), \dots, J_p(e_m)\}$ uma base real de $T_p M$. Se $u_k = \frac{1}{2}(e_k - iJ_p(e_k))$, $1 \leq k \leq m$, então $\bar{u}_k = \frac{1}{2}(e_k + iJ_p(e_k))$, $1 \leq k \leq m$ e $\{u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ é uma base complexa de $T_p M^{\mathbb{C}}$. Portanto a dimensão complexa de $T_p M^{\mathbb{C}}$ é $2m$. Note que $e_k = u_k + \bar{u}_k$ e $J_p(e_k) = i(u_k - \bar{u}_k)$. Daí

$$J_p(u_k) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) - iJ_p^2(e_k)) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) + ie_k) = \frac{i}{2}(e_k - iJ_p(e_k)) = iu_k$$

e

$$J_p(\bar{u}_k) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) + iJ_p^2(e_k)) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) - ie_k) = -\frac{i}{2}(e_k + iJ_p(e_k)) = -i\bar{u}_k$$

Logo $u_k \in T_p^{1,0} M$ e $\bar{u}_k \in T_p^{0,1} M$, para $1 \leq k \leq m$. Por outro lado,

$$T_p^{1,0} M \cap T_p^{0,1} M = \{0\}.$$

Deste modo $\{u_1, \dots, u_m\}$ e $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ são bases de $T_p^{1,0}M$ e $T_p^{0,1}M$, respectivamente. Assim concluímos os itens *i*) e *ii*). Além disso, obtemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_p^{1,0}M = \dim_{\mathbb{C}} T_p^{0,1}M = m.$$

Finalmente, o item *iii*) decorre do fato da dimensão real de T_pM ser $2m$. $\square$

Seja

$$TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

a complexificação do fibrado tangente da variedade M , cujos elementos são da forma $Z = X + iY$, com $X, Y \in TM$. Tal elemento $Z \in TM^{\mathbb{C}}$ é denominado **campo de vetores complexos sobre M** . A decomposição de $T_pM^{\mathbb{C}}$, para cada $p \in M$, em soma direta obtida no Lema (1.2.1), item *iii*), induz uma decomposição na complexificação do fibrado tangente $TM^{\mathbb{C}}$ na soma de Whitney

$$TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \otimes_W T^{0,1}M \quad (1.8)$$

onde

$$T^{1,0}M = \{Z \in TM^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} = \{X - iJX; X \in TM\}$$

e

$$T^{0,1}M = \{Z \in TM^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\} = \{X + iJX; X \in TM\}.$$

Observe que podemos estender o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ para campos vetoriais complexos, do seguinte modo:

$$[X + iY, X' + iY'] = [X, X'] - [Y, Y'] + i([X, Y'] + [Y, X']).$$

Proposição 1.2.5. *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. A estrutura quase-complexa J é integrável se, e somente se, o colchete de Lie deixa invariante $T^{1,0}M$ (resp. $T^{0,1}M$), isto é, $Z_1, Z_2 \in T^{1,0}M$ (resp. $Z_1, Z_2 \in T^{0,1}M$), então $[Z_1, Z_2] \in T^{1,0}M$ (resp. $[Z_1, Z_2] \in T^{0,1}M$).*

Demonstração. Seja $W = [X, Y] - [JX, JY]$. Note que

$$\begin{aligned} [X - iJX, Y - iJY] &= [X, Y] - [JX, JY] - i([X, JY] + [JX, Y]) \\ &= [X, Y] - [JX, JY] - iJ([X, Y] - [JX, JY]) + iJ([X, Y] \\ &\quad - [JX, JY]) - i([X, JY] + [JX, Y]) \\ &= W - iJW - iJ([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]) \\ &= W - iJW - \frac{i}{2}J(N_J(X, Y)). \end{aligned}$$

Logo o colchete de Lie deixa $T^{1,0}M$ invariante se, e somente se, $N_J \equiv 0$. $\square$

Exemplo 1.2.4. *Qualquer variedade (M^2, J) quase-complexa de dimensão real 2 é integrável, ou seja, toda superfície munida de uma estrutura quase-complexa é integrável. Com efeito, seja $\{X_0, JX_0\}$ um referencial local em M . Usando a anti-simetria do colchete de Lie, obtemos*

$$N_J(X_0, X_0) = 2\{[JX_0, JX_0] - [X_0, X_0] - J[JX_0, X_0] - J[X_0, JX_0]\} = 0,$$

$$\begin{aligned} N_J(JX_0, JX_0) &= 2\{[J^2X_0, J^2X_0] - [JX_0, JX_0] - J[J^2X_0, JX_0] - J[JX_0, J^2X_0]\} \\ &= 2\{[X_0, X_0] - [JX_0, JX_0] + J[X_0, JX_0] + J[JX_0, X_0]\} = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N_J(X_0, JX_0) &= 2\{[JX_0, J^2X_0] - [X_0, JX_0] - J[JX_0, JX_0] - J[X_0, J^2X_0]\} \\ &= 2\{[JX_0, X_0] - [X_0, JX_0] - J[JX_0, JX_0] + J[X_0, X_0]\} \\ &= 2\{[X_0, JX_0] - [X_0, JX_0] - J[JX_0, JX_0] + J[X_0, X_0]\} = 0. \end{aligned}$$

Como o tensor N_J é bilinear e nulo no referencial $\{X_0, JX_0\}$, obtemos

$$N_J(X, Y) = 0, \text{ para todo } X, Y \in TM.$$

Definição 1.2.6. *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. Uma métrica **Hermitiana** em M é uma métrica Riemanniana g , tal que J é uma isometria, ou seja,*

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \text{ para todo } X, Y \in TM.$$

Uma variedade quase-complexa (M, J) , munida de uma métrica Hermitiana g , é chamada **variedade quase-Hermitiana**. No caso em que M é uma variedade complexa, dizemos que (M, g, J) é uma **variedade Hermitiana**.

Exemplo 1.2.5. *Seja g uma métrica Riemanniana em uma variedade quase-complexa (M, J) . Então sempre podemos obter uma métrica Hermitiana a partir de g . De fato, definindo $\tilde{g} : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\tilde{g}(X, Y) = \frac{1}{2}(g(X, Y) + g(JX, JY)) \text{ para todo } X, Y \in TM,$$

temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(JX, JY) &= \frac{1}{2}(g(JX, JY) + g(J^2X, J^2Y)) \\ &= \frac{1}{2}(g(X, Y) + g(JX, JY)) = \tilde{g}(X, Y). \end{aligned}$$

Teorema 1.2.2. *Seja (M, g, J) uma variedade quase-complexa. A métrica Riemanniana g em M é Hermitiana se, e somente se, $g(X, JX) = 0$ para todo $X \in TM$.*

Demonstração. Suponha que g é Hermitiana. Decorre da Definição 1.2.6 que

$$g(X, JX) = g(JX, J^2X) = -g(JX, X) = -g(X, JX),$$

donde $g(X, JX) = 0$. Agora iremos mostrar a recíproca. Se $g(X, JX) = 0$ para todo $X \in TM$, então

$$0 = g(X + Y, J(X + Y)) = g(X, JX) + g(X, JY) + g(Y, JX) + g(Y, JY)$$

$$0 = g(X, JY) + g(Y, JX),$$

ou seja, $g(X, JY) = -g(Y, JX)$. Portanto

$$g(JX, JY) = -g(Y, J^2X) = g(Y, X), \text{ para todo } X, Y \in TM.$$

Logo g é Hermitiana. $\square$

1.3 Domínio de Poincaré

Definição 1.3.1. *Seja E um K -espaço vetorial, onde K é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A **envolvente convexa** de um subconjunto X de E é a intersecção de todos os subconjuntos convexos de E que contem a X .*

Definição 1.3.2. *Dizemos que uma matriz complexa A de ordem $n \times n$ pertence ao **domínio de Poincaré** se a envolvente convexa dos autovalores de A não contem o zero.*

Notação: Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ os autovalores de uma matriz complexa A de ordem $n \times n$. Denotaremos por $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, a envolvente convexa dos autovalores da matriz A . Denotaremos por D_p o domínio de Poincaré de A .

Exemplo 1.3.1. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tem como autovalores a $-1+i$, $2+i$ e $2-i$. Sua envolvente convexa

$$\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(-1+i, 2+i, 2-i),$$

é um triângulo de vértices $-1+i$, $2+i$ e $2-i$, o qual não contem o zero. Portanto $A \in D_p$.

Definição 1.3.3. *Seja A uma matriz complexa de ordem $n \times n$. Definimos a norma de uma matriz como*

$$\|A\| = \max\{|Az|; z \in \mathbb{C}^n \text{ com } |z| = 1\},$$

onde $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Teorema 1.3.1. (Existência e unicidade) *Seja $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto, $Z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ campo vetorial holomorfo. Consideremos o problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(0) &= z_0 \end{cases}$$

onde $z_0 \in U$, então existe uma única solução local definida em uma vizinhança de 0.

Demonstração. Ver [23] página 281. $\square$

Segue-se do teorema que as curvas integrais são curvas complexas localmente parametrizadas por $T \in \mathbb{C}$. Estas curvas definem uma folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Z)$ com singularidades nos zeros de Z .

Teorema 1.3.2. *Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $z_0 \in \mathbb{C}^n$ então a solução do PVI*

$$\begin{cases} z' &= Az \\ z(0) &= z_0 \end{cases}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{z_0} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ T &\rightarrow \Phi_{z_0}(T) = e^{TA} z_0 \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [23] página 356. $\square$

Definição 1.3.4. O fluxo complexo $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ associado ao campo linear A , se define como

$$\Phi(T, z) = \Phi_z(T) = e^{TA}z$$

Proposição 1.3.1. O fluxo complexo é uma função holomorfa em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ e satisfaz:

1. $\frac{\partial \Phi}{\partial T}(T, z) = A\Phi(T, z)$, para todo $(T, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.
2. $\Phi(0, z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$.
3. $\Phi(T_1 + T_2, z) = \Phi(T_1, \Phi(T_2, z))$; para todo $T_1, T_2 \in \mathbb{C}$ e todo $z \in \mathbb{C}^n$.

Demonstração. Ver [32] página 57. $\square$

Definição 1.3.5. Seja $z \in \mathbb{C}^n$, definimos a órbita de z sob Z , $Z(z) = Az$, como

$$\mathcal{O}_Z(z) = \{\Phi(T, z); T \in \mathbb{C}\}$$

Para o caso particular de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0\}$, $j = 1, \dots, n$, a solução do PVI:

$$\begin{cases} z' &= A(z) \\ z(0) &= z_0 \end{cases}$$

onde $z_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi_{z_0} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ T &\rightarrow \Phi_{z_0}(T) = e^{TA}z_0 = (e^{\lambda_1 T}z_1^0, \dots, e^{\lambda_n T}z_n^0) \end{aligned}$$

Além disso, como A é inversível, o campo linear $Z(z) = Az$ tem uma única singularidade no ponto 0.

Teorema 1.3.3. Se $Z(z) = Az$ é um campo vetorial linear holomorfo em $\mathbb{C}^n$ e se A é uma matriz diagonal com $A \in D_p$, então as curvas integrais de Z , exceto a nula, são transversais a cada uma das esferas

$$S_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = r^2 \right\}$$

onde $r > 0$.

Demonstração. Ver [8] página 45. $\square$

1.4 Feixes

Seja X um espaço topológico e seja $Top(X)$ a família de abertos de X . Podemos considerar a $Top(X)$ como uma **categoria** com **objetos** os abertos $U \in Top(X)$ e morfismos as inclusões entre eles, isto é, $\rho \in Hom(U, V)$ se $\rho : U \hookrightarrow V$ é a inclusão.

Definição 1.4.1. Um **prefeixe** de grupos abelianos em X é um funtor contravariante $F : Top(X) \rightarrow Ab$. Aos elementos $s \in F(U)$ das imagens dos abertos U de X são chamados de **seções** da prefeixe F em U . Aos morfismos $F(\rho) : F(V) \rightarrow F(U)$ correspondentes às inclusões $\rho : U \hookrightarrow V$ chama-se de **restrições**.

Usaremos a notação $F(\rho)(s) = \rho_{VU}(s) \in F(U)$, com $s \in F(V)$ para denotar a restrição a U da seção s de V . Esta notação provem dos exemplos naturais que veremos a continuação onde as seções são funções e as restrições o são de fato.

Podemos também considerar prefeixes de grupos, anéis, campos, espaços vetoriais, módulos, etc. segundo a natureza do problema que estevemos considerando.

Definição 1.4.2. Um **feixe** é um espaço topológico X é um prefeixe $F : Top(X) \rightarrow Ab$, tal que:

- (i) Se $U \in Top(X)$ é tal que $U = \bigcup_{j \in \Gamma} U_j$ com $U_j \in Top(X)$, então para quaisquer seções $s, s' \in F(U)$ tais que $s|_{U_j} = s'|_{U_j}$ para todos $i, j \in \Gamma$, tem-se que $s = s'$.
- (ii) Se $U = \bigcup_{j \in \Gamma} U_j$ e tem-se seções $s_j \in F(U_j)$ que coincidem em as interseções, isto é, tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos os $i, j \in \Gamma$, então existe uma seção $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in \Gamma$.

Observação 1.4.1.

1. A seção global $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in \Gamma$ na definição anterior, é única com estas propriedades pela primeira condição.
2. $F(\emptyset) = 0$ (o grupo trivial) já que $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i$, e assim para quaisquer $s, s' \in F(\emptyset)$ tem-se $s|_{U_i} = s'|_{U_j}$ para todos os $i, j \in \emptyset$. Consequentemente $s = s'$ pela Definição 1.4.2 (i). Então, se $F(\emptyset)$ tem algum elemento, este é único. Finalmente, pela Definição 1.4.2 (ii) $F(\emptyset)$ tem elementos já que para quaisquer $i, j \in \emptyset$ todas as seções $s_i \in F(U_i)$ satisfazem $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ e assim pela Definição 1.4.2 (ii) existe $s \in F(\emptyset)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$.

Exemplo 1.4.1. O feixe de funções contínuas: Seja X um espaço topológico. Para cada aberto $U \subset X$ seja

$$C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua}\}.$$

Claramente, com as operações de $\mathbb{C}$, $C(U)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Agora, se $\rho : V \hookrightarrow U$ é a inclusão entre os abertos de X , seja

$$\rho_{VU} : C(U) \rightarrow C(V)$$

a restrição usual, isto é, $\rho_{VU}(f) = f|_V$.

Então, $C : Top(X) \rightarrow \mathbb{C} - Mod$ é um feixe de espaços vetoriais.

Exemplo 1.4.2. O feixe das funções holomorfas: Seja X uma superfície de Riemann. Para cada aberto $U \subset X$ (o qual é portanto também superfície de Riemann), seja

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é holomorfa}\}.$$

Com as operações de $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}(U)$ é um anel comutativo com identidade.

Se $V \hookrightarrow U$ é a inclusão entre os abertos de X , seja $\rho : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ a restrição de funções. Então, $\mathcal{O} : \text{Top}(X) \rightarrow \text{An}$ é um feixe de anéis.

Exemplo 1.4.3. O feixe de funções diferenciáveis: Seja X uma variedade diferenciável. Para cada aberto $U \subset X$ o conjunto

$$C^\infty(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é diferenciável}\}.$$

é um anel, e assim C^∞ é um feixe de anéis.

Exemplo 1.4.4. O feixe de funções meromorfas: Seja X um superfície de Riemann. Para cada aberto $U \subset X$ considerado como superfície de Riemann, seja:

$$\mathcal{M}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é meromorfa}\}.$$

Com as restrições usuais, $\mathcal{M}$ é um feixe de campos.

Exemplo 1.4.5. O feixe de funções holomorfas que nunca anulam-se: Se X é uma superfície de Riemann e $U \subset X$ é um aberto, defina-se

$$\mathcal{O}^*(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^*; f \text{ é holomorfa}\}.$$

Este conjunto é um grupo multiplicativo com o produto do grupo $\mathbb{C}^*$, e $\mathcal{O}^*$ é um feixe de grupos abelianos.

Exemplo 1.4.6. Analogamente defina-se o feixe de funções meromorfas que nunca anulam-se $\mathcal{M}^*$.

Exemplo 1.4.7. O prefeixe constante: Este é um exemplo de prefeixe que em geral não é um feixe; seja X um espaço topológico e seja G um grupo abeliano. Definamos

$$F_G : \text{Top}(X) \rightarrow \text{Ab}$$

como:

(i) Se $\emptyset \neq U \subset X$, seja $F_G(U) = G$.

(ii) Se $\emptyset = U$, seja $F_G(\emptyset) = 0$ (o grupo trivial).

Os morfismos restrições são:

(a) Se $\emptyset \neq U \subset V$, $\rho : F_G(V) = G \rightarrow F_G(U) = G$ é a identidade $\rho = \text{id}_G : G \rightarrow G$.

(b) Se $\emptyset = U \subset V$, $\rho : F_G(V) \rightarrow 0 = F_G(\emptyset)$ é o morfismo zero.

Claramente F_G é um prefeixe.

Se $G = 0$ é o grupo trivial, então F_0 é claramente um feixe, o **feixe constante zero**. O mesmo acontece se $X = \emptyset$ pela Observação 1.4.2. (2).

Se $G \neq 0$ e X tem ao menos dois abertos não vazios disjuntos, então F_G não é um feixe: De fato, sejam U_1, U_2 abertos não vazios disjuntos de X , e seja $U = U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$. Sejam g_1, g_2 em $F_G(U) = G$. Então, como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tem-se que $F_G(U_1 \cap U_2) = 0$ e assim as restrições $g_1|_{U_1 \cap U_2} = 0 = g_2|_{U_1 \cap U_2}$.

Por outro lado, não existe $g \in F_G(U) = G$ tal que $g|_{U_1} = g_1$ e $g|_{U_2} = g_2$ pois $\rho_{U_i U} = id_G : F_G(U) = G \rightarrow F_G(U_i) = G$ e assim $g|_{U_i} = id_G(g) = g$, e se $g = g|_{U_i} = g_i$, então $g_1 = g_2$, o qual é absurdo.

Exemplo 1.4.8. O feixe de funções localmente constantes: Seja X um espaço topológico e seja G um grupo abeliano. Para cada aberto $U \subset X$ seja

$$\tilde{F}_G(U) = \{f : U \rightarrow G; f \text{ é localmente constante}\}.$$

(Note que f é constante em cada componente conexa de U). Se U é conexo e não vazio, então $\tilde{F}_G(U) \approx G$, e assim o feixe $\tilde{F}_G$ merece de fato de chamar-se **localmente constante**. Não é difícil mostrar que com as restrições usuais, $\tilde{F}_G$ é um feixe de grupos abelianos.

A fibra de um prefeixe: Seja $F : Top(X) \rightarrow \mathcal{A}$ um prefeixe em um espaço topológico X . Seja $p \in X$ um ponto e consideremos a família $\mathcal{U}(p) = \{U \in Top(X); p \in U\}$ de vizinhanças abertas de p em X . Note sé que dados $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{U}(p)$ a interseção $U_\gamma = U_\alpha \cap U_\beta$ é tal que $U_\gamma \subset U_\alpha$ e $U_\gamma \subset U_\beta$. Em outras palavras, o conjunto $\mathcal{U}(p)$ é um conjunto **dirigido** com o ordem parcial: $U \leq V$ se e só se $U \supset V$. Assim, avaliando o funtor contravariante F aos objetos de $\mathcal{U}(p)$ e seus morfismo, isto é, as inclusões $i_{\beta\alpha} : U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$, obtemos morfismos $\phi_{\beta\alpha} = F(i_{\beta\alpha}) : F(U_\beta) \rightarrow F(U_\alpha)$, que formam uma **família direta** na categoria $\mathcal{A}$ à que denotamos $(F(\mathcal{U}(p)), \leq)$.

Definição 1.4.3. O **limite direto** da família $(F(\mathcal{U}(p)), \leq)$ na categoria $\mathcal{A}$ chama-se a **fibra** do prefeixe F no ponto $p \in X$. Se este limite existe, denotaremos

$$F_p = \varinjlim F(U_\alpha).$$

Relembramos a continuação os conceitos involucrados na definição anterior:

Limites diretos. Um **conjunto dirigido** é um conjunto parcialmente ordenado $(\Gamma, \leq)$ tal que dados quaisquer elementos $\alpha, \beta \in \Gamma$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Se $(\Gamma, \leq)$ é um conjunto dirigido, uma **família direta ou filtrada** em uma categoria $\mathcal{A}$, é uma família de objetos $\{M_\alpha\}$, indicada por Γ , e morfismos $\phi_{\beta\alpha} : M_\alpha \rightarrow M_\beta$ para quaisquer índices $\alpha \leq \beta$ tais que

(i) $\phi_{\alpha\alpha} : M_\alpha \rightarrow M_\alpha$ é o morfismo identidade: $\phi_{\alpha\alpha} = id_{M_\alpha}$ para todos os $\alpha \in \Gamma$.

(ii) E, sempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, tem-se que $\phi_{\gamma\beta} \circ \phi_{\beta\alpha} = \phi_{\gamma\alpha}$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\phi_{\beta\alpha}} & M_\beta \\ & \searrow \phi_{\gamma\alpha} & \swarrow \phi_{\gamma\beta} \\ & M_\gamma & \end{array}$$

Se $\{M_\alpha; \alpha \in \Gamma\}$ é uma família direta em uma categoria $\mathcal{A}$, um **limite direto** desta família consiste de um objeto M de $\mathcal{A}$ e morfismos $\phi_\alpha : M_\alpha \rightarrow M$ para cada objeto M_α da família, tais que

- (a) Os morfismos ϕ_α são compatíveis com os morfismos $\phi_{\beta\alpha}$, isto é, se $\alpha \leq \beta$ então o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \phi_\alpha \nearrow & & \nwarrow \phi_\beta \\ M_\alpha & \xrightarrow{\phi_{\beta\alpha}} & M_\beta \end{array}$$

- (b) Mais ainda, (M_α, ϕ_α) tem a **propriedade universal** seguinte: Se N é outro objeto de $\mathcal{A}$ com morfismos $\psi_\alpha : M_\alpha \rightarrow N$ que também são compatíveis com os morfismos $\phi_{\beta\alpha}$, então existe um **único** morfismo $\phi : M \rightarrow N$ que faz comutar o diagrama seguinte para toda $\alpha \in \Gamma$:

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\psi_\alpha} & N \\ & \searrow \phi_\alpha & \uparrow \phi \\ & & M \end{array}$$

Como acontece em geral com objetos definidos com propriedades universais, se existe o limite direto de uma família existe em a categoria $\mathcal{A}$, este é único salvo isomorfismo. Isto justifica a notação

$$\lim_{\rightarrow} M_\alpha$$

para o limite direto de uma família $(M_\alpha, \phi_{\beta\alpha})$ de $\mathcal{A}$.

Para mostrar o anterior, suponhamos que (M_α, ϕ_α) e (N, ψ_α) são limites diretos de uma família $(M_\alpha, \phi_{\beta\alpha})$. Então, existem morfismos únicos $\phi : M \rightarrow N$ e $\psi : N \rightarrow M$ tais que os diagramas seguintes comutam (isto é, $\psi_\alpha = \phi \circ \phi_\alpha$ e $\phi_\alpha = \psi \circ \psi_\alpha$, para todos os $\alpha \in \Gamma$):

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\psi_\alpha} & N \\ & \searrow \phi_\alpha & \uparrow \phi \\ & & M \end{array}$$

agora, pela propriedades universal de (M_α, ϕ_α) , existe um único morfismo de M em M tal que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{\phi_\alpha} & M \\ & \searrow \phi_\alpha & \uparrow id \\ & & M \end{array}$$

e como tanto a composição $\phi \circ \psi : M \rightarrow M$ como a identidade $id : M \rightarrow M$ fazem comutar o diagrama anterior, então pela unicidade da propriedade universal tem-se que $\phi \circ \psi = id_M$. Analogamente, $\psi \circ \phi = id_N$.

Em geral, a existência do limite direto em uma categoria dada tem que prova-se em cada caso específico.

Nas categorias Top , Ab , An , $Campos$, Mod o limite direto $\varinjlim M_\alpha$ existe, e é construído tomando o **coproduto** (união disjunta em Top , soma direta em Ab , Mod , etc.) dos objetos M_α e logo identificam-se com elementos $s \in M_\alpha$, $s' \in M_\beta$, denotando $s \sim s'$, se e só se existe um índice $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ e $s = s'$ em M_γ , isto é, $\phi_{\gamma\alpha}(s) = \phi_{\gamma\beta}(s) \in M_\gamma$. Assim

$$\varinjlim M_\alpha = \left(\bigsqcup_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha \right) / \sim .$$

Os morfismo canônicos

$$\begin{array}{ccc} F(U_\alpha) & \xrightarrow{inc} & \bigsqcup_{\alpha \in \Gamma} F(U_\alpha) \\ & \searrow \phi_\alpha & \downarrow \pi \\ & & \varinjlim F(U_\alpha) = F_p \end{array}$$

onde inc é a inclusão e π é a aplicação quociente. Note-se que as imagens dos morfismos ϕ_α **geram** F_p .

Algumas vezes, a imagem $\phi_\alpha(s) \in F_p$ de uma seção $s \in F(U_\alpha)$ chama-se um **germe** de s em p e o denotamos

$$[s] = \langle U_\alpha, s \rangle = \langle p, [s]_p \rangle = \phi_\alpha(s).$$

Dado um ponto $p \in X$, a fibra F_p de F em p podemos pensa como segui: Os “pontos” de F_p são os gérmes $\langle p, [s]_p \rangle$ onde s é uma seção de um aberto $U_\alpha \subset X$ que contem a p . Nos exemplos que vimos $F(U_\alpha)$ é quase sempre um conjunto de funções definidas em U_α , assim podemos pensar a s como $s : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$. Então um germe $\langle p, [s]_p \rangle$ pode ser pensado como uma função s definida numa vizinhança não especifica de p .

Exemplo 1.4.9. *Seja X uma superfície de Riemann e $\mathcal{O} : Top(X) \rightarrow An$ o feixe de funções holomorfas em X . Seja $p \in X$ um ponto e consideramos a fibra $\mathcal{O}_p = \varinjlim \mathcal{O}(U)$.*

Um germe $[s] = \langle U_\alpha, s \rangle \in \mathcal{O}_p$ está representado localmente por uma seção $s \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, isto é, por uma função holomorfa $s : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$. Então, escolhendo as cartas (V, z) ao redor de $p \in U_\alpha$ e ao redor da sua imagem $z(p) \in \mathbb{C}$, a função s tem uma expansão em serie de Taylor

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z(p))^n$$

com raio de convergência positivo.

Podemos então definir a função

$$\phi : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{C}\{z - z(p)\}$$

onde o codomínio é o anel de series de Taylor convergentes ao redor de $z(p) \in \mathbb{C}$. Não difícil mostrar que ϕ é um isomorfismo de anéis.

Exemplo 1.4.10. *Analogamente, se $\mathcal{M} : Top(X) \rightarrow Campos$ é um feixe de funções meromorfas em X e $p \in X$ é um ponto, então existe um isomorfismo de anéis*

$$\phi : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{C}[[z - z(p)]]$$

de fibra $\mathcal{M}_p$ no anel de series de Laurent convergentes que tem parte principal finita:

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z(p))^n$$

com $k \in \mathbb{Z}$ e $c_n \in \mathbb{C}$.

A continuação mostraremos algumas propriedades das fibras: Seja $[s] \in F_p$ um germe de um prefeixe F em X . Se definimos $[s]_p = s(p)$ para qualquer escolha de um representante $s \in [s]$, então $[s]_p$ está bem definido, isto é, não depende da escolha do representante s do germe $[s]$. De fato, se $s \sim s'$, isto é, $\langle U_\alpha, s \rangle = \langle U_\beta, s' \rangle$, então existe γ tal que $s|_{U_\gamma} = s'|_{U_\gamma}$ e $p \in U_\gamma$, segue-se que $s(p) = s'(p)$.

Proposição 1.4.1. *Se $F : Top(X) \rightarrow Ab$ é um feixe de grupos abelianos em um espaço topológico X e $U \subset X$ é qualquer aberto, então $s \in F(U)$ é zero se e só se $\langle U, s \rangle = 0$ em todos os F_p com $p \in U$.*

Demonstração: Se $0 = s \in F(U)$, usando os morfismos $\phi : F(U) \rightarrow F_p$, tem-se que $0 = \phi(0) = \phi(s) = \langle U, s \rangle$. Reciprocamente, se $0 = \phi(s) \in F_p$ para todo $p \in U$, então por definição do limite direto existe uma vizinhança U_p de p tal que $s|_{U_p} = 0$, e como $U = \bigcup_{p \in U} U_p$ e $s|_{U_p} = 0$ para todo $p \in U$, e como F é feixe, segue-se que $s = 0$ em U . $\square$

O espaço topológico e a projeção associados a um prefeixe:

Seja $F : Top(X) \rightarrow \mathcal{A}$ um prefeixe em um espaço topológico X . A este prefeixe F associamos um espaço topológico $|F|$ e um função continua sobrejetiva $p : |F| \rightarrow X$ tal que:

1. O espaço $|F| = \bigsqcup_{p \in X} F_p$ é a união disjunta das fibras de F .
2. A projeção $p : |F| \rightarrow X$ define-se como $p(x) = x$ se $x \in X$, isto é, p leva cada fibra F_x no ponto $x \in X$.

Ao conjunto $|F|$ dotamos de uma topologia especificando uma base $\mathcal{B}$ para este, como segue: Seja $U \subset X$ um aberto e seja $s \in F(U)$ uma seção. Fazemos

$$[U, s] = \{\phi_x(s) = \langle U, s \rangle \in F_x; x \in U\} \subset |F|.$$

A base da topologia é:

$$\mathcal{B} = \{[U, s]; U \subset X, s \in F(U)\}.$$

Proposição 1.4.2. *Seja $F : Top(X) \rightarrow \mathcal{A}$ um prefeixe.*

1. *O conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para um topologia em $|F|$.*
2. *Com esta topologia em $|F|$, a projeção $p : |F| \rightarrow X$ é um homeomorfismo local.*

Demonstração:

1. Primeiro, todo ponto $\langle p, [s]_p \rangle$ de $|F|$ está contido em algum aberto básico $[U, s]$ já que $\langle p, [s]_p \rangle = \langle U, s \rangle = \rho_U(s)$ com $s \in F(U)$ e $p \in U$. Assim, $\langle p, [s]_p \rangle \in [U, s]$. Segundo, se $\langle p, [s]_p \rangle \in [U, s] \cap [U', s']$, então existe $[U'', s''] \in \mathcal{B}$ tal que $\langle p, [s]_p \rangle \in [U'', s''] \subset [U, s] \cap [U', s']$. De fato, como $p \in U \cap U'$, $s \in F(U)$ e $s' \in F(U')$, existe um aberto $U'' \subset U \cap U'$ tal que $p \in U''$, e fazendo $s'' = s|_{U''} = s'|_{U''}$, tem-se que $\langle p, [s]_p \rangle \in [U'', s'']$.

2. Para ver que $p : |F| \rightarrow X$, dada por $p : \langle x, [s]_x \rangle \mapsto x$ é um homeomorfismo local, seja $\langle x, [s]_x \rangle \in |F|$ um ponto arbitrário. Como $\langle x, [s]_x \rangle = \rho_U(s)$ com $s \in F(U)$ e $x \in U$, então $[U, s] \in \mathcal{B}$ e $\langle x, [s]_x \rangle \in [U, s]$. Assim $[U, s]$ é um aberto de $|F|$ que contem a $\langle x, [s]_x \rangle$ e U é um aberto de X que contem a x . Agora, $p|_{[U, s]} : [U, s] \rightarrow U$ dada por $p(\langle u, [s]_u \rangle) = u$ é claramente bijetiva. Também $p|_{[U, s]}$ é contínua e aberta e portanto é um homeomorfismo de $[U, s]$ em U . $\square$

1.5 Comohologia de feixes

Neste seção introduzimos a noção de cohomologia de um espaço com coeficientes em um feixe. Isto nos proporcionará importantes invariantes algébricos para o estudo das superfícies de Riemann e de fato muitos invariantes topológicos e geométricos das superfícies de Riemann pode ser definido usando grupos de cohomologia.

Há varias maneiras de introduzir grupos de cohomologia com coeficientes num feixe e temos elegido a cohomologia de Čech pelo direto da definição, e sob circunstancias razoáveis (por exemplo o Teorema de Leray) é fácil de calcular. Provaremos que quando X é paracompacto, a cohomologia de Čech de X coincide com a cohomologia do complexo de cadeias que resulta ao aplicar o functor de seções globais $\Gamma(X, -)$ a uma **resolução fina** (introduzida por Gunning e Rossi) do feixe em consideração.

Para começar a definir a noção de morfismos entre feixes $\varphi : F \rightarrow G$ como uma transformação natural entre funtores. Assim terá sentido falar de sequencias exatas de feixes

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Se agora, como é usual, para um feixe, denotamos por $\Gamma(-, F) = F(-)$ ao functor correspondente, ao considerar as seções globais de cada feixe na sequencia exata anterior teremos um sequencia exata da forma

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(X, G) \longrightarrow \Gamma(X, K),$$

onde o último morfismo não necessariamente é sobrejetivo.

Primeiramente nesta seção estenderemos o estudo de feixes que iniciamos na seção anterior com a intenção de poder usar métodos da álgebra homologica no estudo das superfícies de Riemann.

Introduziremos os conceitos de morfismo entre (pre)feixes, núcleos, imagens e sequencias exatas de feixes, de tal maneira que a categoria de feixes resultante seja adequada para fazer álgebra homologica. Neste sentido também introduziremos as ideias de sub feixes, feixes quocientes, e construiremos o feixe associado (em forma canônica) a um prefeixe. As ideias anteriores se ilustrarão com exemplos de feixes de inteiros no estudo das superfícies de Riemann as já familiares feixes $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{M}_X$.

Morfismos entre prefeixes Seja X um espaço topológico e sejam F, G prefeixes em X . Definimos um **morfismo entre prefeixes** como uma transformação natural entre funtores $\eta : F \rightarrow G$, em outras palavras, η consiste de uma família de morfismos

$\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ para cada aberto $U \subset X$ tais que para cada inclusão de abertos $V \subset U$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\eta_U} & G(U) \\ \rho_{VU} \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho}_{VU} \\ F(V) & \xrightarrow{\eta_V} & G(V) \end{array}$$

onde ρ_{VU} e $\tilde{\rho}_{VU}$ são as restrições correspondentes.

Se F e G são feixes, um **morfismo de feixes** $\eta : F \rightarrow G$ é um morfismo entre os prefeixes correspondentes.

Observação 1.5.1. Se F é um (pre)feixe em X , então $\text{id} : F \rightarrow F$ definido claramente como $\text{id}_U : F(U) \rightarrow F(U)$ o morfismo identidade, é um morfismo de (pre)feixes chamado também o **morfismo identidade**.

Se $\alpha : F \rightarrow G$ e $\beta : G \rightarrow K$ são morfismos de (pre)feixes, então a composição $\beta \circ \alpha : F \rightarrow K$ definida como $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U : F(U) \rightarrow K(U)$ também é um morfismo de (pre)feixes.

Assim temos as categorias $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{P}(X)$ de feixes e prefeixes sobre X respectivamente, com **objetos** os feixes (respectivamente prefeixes) e **morfismos** os morfismos entre feixes (respectivamente prefeixes).

Definição 1.5.1. Um morfismo de (pre)feixes $\eta : F \rightarrow G$ chama-se um **isomorfismo** se η tem um inverso bilateral $\varphi : G \rightarrow F$, isto é, φ é um morfismo de (pre)feixes tal que:

$$\eta \circ \varphi = \text{id} : G \rightarrow G \quad \text{e} \quad \varphi \circ \eta = \text{id} : F \rightarrow F.$$

Lema 1.5.1. Um morfismo de (pre)feixes $\eta : F \rightarrow G$ é um isomorfismo se e só se para todo aberto $U \subset X$, o morfismo $\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ é um isomorfismo de grupos.

Demonstração: A primeira implicação é óbvia. Reciprocamente, se cada $\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ é um isomorfismo (de grupos), seja $\varphi_U : G(U) \rightarrow F(U)$ seu inverso. Então $\varphi = \{\varphi_U\} : G \rightarrow F$ é claramente uma transformação natural que é inversa de η . $\square$

Note-se agora que se $\eta : F \rightarrow G$ é um morfismo de prefeixes em X , então para cada $x \in X$, η induz morfismos entre as fibras: $\eta_x : F_x \rightarrow G_x$ já que para quaisquer vizinhanças abertas U, V de x em X com $V \subset U$, os diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\eta_U} & G(U) \\ \rho_{VU} \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho}_{VU} \\ F(V) & \xrightarrow{\eta_V} & G(V) \end{array}$$

e assim passando ao limite direto (sobre as vizinhanças de $x \in X$) tem-se o morfismo induzido nas fibras:

$$\eta_x : \lim_{U \ni x} F(U) \rightarrow \lim_{U \ni x} G(U).$$

A proposição seguinte (que como olharemos depois é falsa, em geral, para prefeixes) ilustra a natureza local de um feixe.

Proposição 1.5.1. Um morfismo $\eta : F \rightarrow G$ entre feixes sobre X é um isomorfismo se e só se para todo $x \in X$ os morfismos induzidos entre as fibras $\eta_x : F_x \rightarrow G_x$ são isomorfismos.

Demonstração: Se $\eta : F \rightarrow G$ é um isomorfismo então pelo Lema 1.5.1. cada $\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ é um isomorfismo e assim o limite $\eta_x : F_x \rightarrow G_x$ também é um isomorfismo para cada $x \in X$.

Reciprocamente, suponhamos que para todo $x \in X$ os morfismos $\eta_x : F_x \rightarrow G_x$ são isomorfismos. Mostraremos que para cada aberto $U \subset X$ as aplicações $\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ são isomorfismos, e assim pelo Lema 1.5.1. η será um isomorfismo de feixes. Seja $U \subset X$ um aberto qualquer:

- (i) $\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ é injetivo: De fato, seja $s \in F(U)$ uma seção tal que $\eta_U(s) = 0$ em $G(U)$. Então, para todo $x \in U$ o germe $[\eta_U(s)]_x$ de $\eta_U(s) = 0$ em G_x é zero. Assim, $0 = [\eta_U(s)]_x = \eta_x[s]_x$ e como $\eta_x : F_x \rightarrow G_x$ é um isomorfismo, então $[s]_x = 0$ em F_x , e isto para todo $x \in U$. Então, como $[s]_x = 0$, por definição de limite, existe uma vizinhança aberta W_x de x , com $W_x \subset U$, tal que $s|_{W_x} = 0$ (isto é, é zero em algum nível). Y como as W_x , para $x \in U$, formam uma cobertura aberta de U , e a seção $s \in F(U)$ é tal que $s|_{W_x} = 0$ para toda W_x nesta cobertura, então $s = 0$ em U já que F é feixe.
- (ii) $\eta_U : F(U) \rightarrow G(U)$ é sobrejetivo: De fato, seja $t \in G(U)$ uma seção qualquer. Para cada $x \in U$ seja $[t]_x \in G_x$ o germe correspondente. Como $\eta_x : F_x \rightarrow G_x$ é um isomorfismo, existe um único germe $[s]_x \in F_x$ tal que $\eta_x[s]_x = [t]_x$. Representemos ao germe $[s]_x$ em algum nível por uma seção $\langle s_x, V_x \rangle$ onde $V_x \subset U$ é uma vizinhança aberta de x e $s_x \in F(V_x)$ é uma seção. Assim $\eta(s_x) \in G(V_x)$ e $t|_{V_x} \in G(V_x)$ são duas seções cujos germes em x são iguais. Então, em algum nível $W_x \subset V_x \subset U$ são iguais, isto é, $\eta(s_x)|_{W_x} = t|_{W_x}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $W_x = V_x$. Claramente U é coberto pelas W_x , e em cada um dos W_x temos seções $s_x \in F(W_x)$. Suponhamos agora que $x, z \in U$ são dois pontos e sejam $s_x \in F(W_x)$, $s_z \in F(W_z)$ as seções e abertos construídos anteriormente. Então as restrições $s_x|_{W_x \cap W_z}$ e $s_z|_{W_x \cap W_z}$ são duas seções em $F(W_x \cap W_z)$ tais que

$$\eta(s_x|_{W_x \cap W_z}) = t|_{W_x \cap W_z} = \eta(s_z|_{W_x \cap W_z})$$

em $G(W_x \cap W_z)$, pela definição de s_x e s_z . Assim, para cada W_x (que cobrem U) tem-se seções locais s_x que coincidem nas interseções. Portanto, como F é feixe, existe uma única seção global $s \in F(U)$ tal que $s|_{W_x} = s_x$ para toda $x \in U$. Mostraremos finalmente que $\eta_U(s) = t \in G(U)$. De fato, $\eta_U(s)$, $t \in G(U)$ são duas seções tais que para cada $x \in U$ tem-se $\eta(s)|_{W_x} = t|_{W_x}$, e como G é feixe (e os W_x cobrem U), segue-se que $\eta(s) = t$ em $G(U)$. $\square$

A continuação introduziremos os conceitos esperados de sub-prefeixes, prefeixe quociente, núcleo, imagem e conucle de um morfismo de prefeixes, e depois, com as adaptações necessarias em alguns casos, os correspondentes conceitos para feixes.

Núcleo, imagem e co-núcleo de um morfismo ente prefeixes: Seja $\varphi : F \rightarrow G$ um morfismo de prefeixes.

- (i) O **prefeixe núcleo** de φ , denotada, $\text{Ker}\varphi$, está dada como segue: Se $U \subset X$ aberto e o morfismo $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ então $(\text{Ker}\varphi)(U) = \text{Ker}(\varphi_U)$.
- (ii) O **prefeixe imagem** de φ , denotada, $\text{Im}\varphi$, está dada como segue: Se $U \subset X$ aberto e o morfismo $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ então $(\text{Im}\varphi)(U) = \text{Im}(\varphi_U)$.

- (iii) O **prefeixe co-núcleo** de φ , denotada, $\text{Coker}\varphi$, está dada como segue: Se $U \subset X$ aberto e o morfismo $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ então

$$(\text{Coker}\varphi)(U) = \text{Coker}(\varphi_U) = G(U)/\text{Im}(\varphi_U).$$

Em cada caso os morfismos restrições define-se na forma obvia, e claramente $\text{Ker}\varphi$, $\text{Im}\varphi$ e $\text{Coker}\varphi$ resultam prefeixes em X .

Definição 1.5.2. Se F e G são prefeixes em X , dizemos que F é um **sub-prefeixe** de G , denotado por $F \subseteq G$, se:

- (i) Para cada aberto $U \subset X$, $F(U) \subset G(U)$ é um subgrupo.
- (ii) Se $U \subset V$ são abertos, então o morfismo $F(V) \rightarrow F(U)$ é a restrição do morfismo $G(V) \rightarrow G(U)$.

Se F é um sub-prefeixe de G , o **prefeixe quociente**, denotado por G/F , esta dada por:

- (a) Para cada aberto $U \subset X$, $G/F(U) = G(U)/F(U)$.
- (b) Se $U \subset V$ são abertos, então os morfismos $G(V) \rightarrow G(U)$ e $F(V) \rightarrow F(U)$ induzem, por passo ao quociente, os morfismos $(G/F)(V) \rightarrow (G/F)(U)$.

Note-se que se $\varphi : F \rightarrow G$ é um morfismo de prefeixes, então:

1. $\text{Ker}\varphi \subseteq F$ é um sub-prefeixe.
2. $\text{Im}\varphi \subseteq G$ é um sub-prefeixe.
3. $\text{Coker}\varphi = G/\text{Im}\varphi$ é um prefeixe quociente.

Antes de continuar vejamos alguns exemplos:

Seja X uma superfície de Riemann e consideremos os feixes C , C^∞ , $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ em X e os (pre)feixes constantes $\mathbb{C}_X$ e $\mathbb{Z}_X$ (com valores em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}$ respectivamente) em X .

1. Como toda função holomorfa é diferenciável então $\mathcal{O}_X \subseteq C_X^\infty$ é um sub-prefeixe. Analogamente $C_X^\infty \subseteq C_X$. Então temos uma cadeia de sub-prefeixes:

$$\mathcal{O}_X^* \subseteq \mathcal{O}_X \subseteq C_X^\infty \subseteq C_X.$$

2. Similarmente, como os prefeixes $\mathbb{Z}_X$ e $\mathbb{C}_X$ podem ser considerados prefeixes de funções constantes portanto holomorfas, então tem-se inclusões de sub-prefeixes:

$$\mathbb{Z}_X \subseteq \mathbb{C}_X \subseteq \mathcal{O}_X.$$

3. Em geral, se $F \subseteq G$ é uma inclusão de prefeixes, então pode-se considerar como um morfismo de prefeixes.
4. O **morfismo exponencial** $\exp: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ defina-se como segue: Seja $U \subset X$ um aberto, então $\exp: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}^*(U)$ está dado por $\exp(s) = \exp(2\pi i s)$. Este é um homomorfismo de grupos já que:

$$\begin{aligned} \exp(s + s') &= \exp(2\pi i(s + s')) = \exp(2\pi i s + 2\pi i s') \\ &= \exp(2\pi i s) \cdot \exp(2\pi i s') = \exp(s) \cdot \exp(s') \end{aligned}$$

5. O núcleo do morfismo exponencial é:

$$\text{Ker}(\exp)(U) = \{s \in \mathcal{O}(U); \exp(2\pi is) = 1\},$$

e como $\exp(2\pi is) = 1$ se e só se $s \in \mathbb{Z}$, então $\text{Ker}(\exp) = \mathbb{Z}_X \subseteq \mathcal{O}_X$.

6. O morfismo dado pelas equações de Cauchy-Riemann: Lembremos que $\mathcal{O}_X$ consiste de aquelas funções diferenciáveis em X que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, isto é, se $f = u + iv \in C_X^\infty$, então

$$\begin{aligned} f = u + iv \in \mathcal{O}_X &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) = 0, \end{aligned}$$

onde define-se o operador diferencial

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Note-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + iv) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) + i \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Ressumindo: Dada $f = u + iv \in C_X^\infty$, então

$$f \in \mathcal{O}_X \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) = 0.$$

Note-se que como a diferenciação é um operador linear (em particular aditivo), então

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : C_X^\infty \rightarrow C_X^\infty$$

é de fato um **morfismo de feixes**, e pelas observações previas, tem-se que seu núcleo é

$$\mathcal{O}_X = \text{Ker} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

Proposição 1.5.2. *Se $\varphi : F \rightarrow G$ é um morfismo de feixes, então o prefeixe $\text{Ker}\varphi \subseteq F$ é de fato um feixe.*

Demonstração:

- (i) Seja $U \subset X$ um aberto e seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de U . Suponhamos que tem-se uma seção $s \in \text{Ker}(\varphi)(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = 0$ para toda U_α . Queremos mostrar que $s = 0$ em U . De fato, como $\text{Ker}(\varphi)(U) \subseteq F(U)$, então $s \in F(U)$ e como as restrições de $\text{Ker}(\varphi)$ são as de F então $s|_{U_\alpha} = 0$ em $F(U_\alpha)$ para toda α , e portanto $s = 0$ em $F(U)$ já que F é feixe. Então $s = 0$ em $\text{Ker}(\varphi)(U) \subseteq F(U)$.

- (ii) Suponhamos agora que temos seções $s_\alpha \in \text{Ker}(\varphi)(U_\alpha) \subseteq F(U_\alpha)$ tais que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ para todos os α, β . Então, como as restrições de $\text{Ker}\varphi$ são as mesmas que as de F , e como F é feixe, existe uma (única) $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ em $F(U_\alpha)$ para toda α . Mostraremos que de fato $s \in (\text{Ker}\varphi)(U)$. De fato, como $s \in F(U)$ então $\varphi(s) \in G(U)$ e $\varphi(s)|_{U_\alpha} = \varphi(s_\alpha) = 0 \in G(U_\alpha)$ já que $s_\alpha \in (\text{Ker}\varphi)(U_\alpha)$. Agora, como o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\varphi} & G(U) \\ \rho_{U_\alpha U} \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho}_{U_\alpha U} \\ F(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & G(U_\alpha) \end{array}$$

então $\varphi(s)|_{U_\alpha} = \varphi(s|_{U_\alpha}) = 0$, e como G é feixe segue-se que a seção $\varphi(s) = 0$ em $G(U)$, isto é, $s \in (\text{Ker}\varphi)(U)$. $\square$

Para o caso da imagem de um morfismo tem-se, embora:

Se $\varphi : F \rightarrow G$ é um morfismo de feixes, então o prefeixe $\text{Im}\varphi \subseteq G$ não é, em geral, um feixe. Um contraexemplo é o seguinte: Seja $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideremos os feixes $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}^*$ em $X = \mathbb{C}^*$ e o morfismo exponencial $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$. Olharemos que o prefeixe imagem $\text{Im}(\exp) \subseteq \mathcal{O}^*$ não é um feixe (de fato olharemos que o axioma (ii) da definição de feixe não é satisfeita neste caso):

De fato, para o aberto $U = X = \mathbb{C}^*$ consideremos a cobertura dada por $U_1 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ e $U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+$. Claramente cada um de estes U_j é simplesmente conexo e $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$. Agora, como U_j é simplesmente conexo, as funções (seções) $s_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$ dadas por $s_j(z) = z$, ($S_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$) podem-se escrever da forma: $s_j(z) = \exp(2\pi i f_j)(z)$ com $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ já que como U_j é simplesmente conexo então existe um ramo do logaritmo holomorfo em U_j . Então $s_j \in \text{Im}(\exp)$, $j = 1, 2$. Note-se que $s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2}$. Embora, como $U = U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^*$ não é simplesmente conexo, então não existe um ramo do logaritmo em $U = \mathbb{C}^*$, e assim a função (seção) $s \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ dada por $s(z) = z$ não pode-se escrever da forma $s(z) = z = \exp(2\pi i f)(z)$ com $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, isto é, não existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\exp(f)|_{U_j} = s_j$, isto é, não existe uma seção global $t \in \text{Im}(\exp)$ não é um feixe.

Para concertar o anterior introduzimos a construção de **feixe associado a um prefeixe**:

Teorema 1.5.1. (Feixe associado a um prefeixe) *Seja F um prefeixe sobre um espaço X . Então existe um feixe F^+ e um morfismo de (pre)feixes $\theta : F \rightarrow F^+$ tal que para todo feixe G e qualquer morfismo $\varphi : F \rightarrow G$, existe um único morfismo $\psi : F^+ \rightarrow G$ que faz o diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\theta} & F^+ \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & G \end{array}$$

O F^+ chama-se de **feixe associado ao prefeixe F** .

Demonstração: Seja $|F|$ o espaço topológico associado ao prefeixe F com projeção $p : |F| \rightarrow X$. Assim $|F| = \bigsqcup_{x \in X} F_x$. Para cada aberto $U \subset X$, definamos

$$F^+(U) = \{s : U \rightarrow F; s \text{ é continua e } s(x) \in F_x\}.$$

Agora, como F é um prefeixe de grupos abelianos, então $F^+(U)$ é um grupo abeliano definindo $(s + s')(x) = s(x) + s'(x)$ (estamos somando em F_x o qual é um grupo abeliano, já que $s(x), s'(x) \in F_x$). As restrições de $F^+(U)$ são as usuais: Se $V \subset U$ são abertos, então $\rho : F^+(U) \rightarrow F^+(V)$ é $\rho_s = s|_V$.

1. Claramente F^+ é um prefeixe em X , mais ainda F^+ é um feixe (o feixe “feixe de seções” de $p : |F| \rightarrow X$) já que:

- (i) Suponhamos que $U = \bigcup_i U_i$ e sejam $s, s' \in F^+(U)$ tais que $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ para toda i . Então, se $x \in U = \bigcup_i U_i$ tem-se que $x \in U_j$ para algum índice j e assim $s(x) = s'(x)$, isto é, $s = s'$ em U .
- (ii) Novamente, $U = \bigcup_i U_i$ e sejam $s_i \in F^+(U_i)$ tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos os pares (i, j) .

Defina-se a seção $s \in F^+(U)$, $s : U \rightarrow |F|$, como $s(x) = s_i(x)$ se $x \in U_i$. Pela condição de compatibilidade das s_i , s está bem definida, e pela sua mesma definição $s|_{U_i} = s_i$. Claramente s é contínua e é uma seção de p , isto é, $s \in F^+(U)$.

2. O morfismo $\theta : F \rightarrow F^+$ defina-se como segue:

Seja $U \subset X$ é um aberto, $\theta_U : F(U) \rightarrow F^+(U)$ é o homomorfismo que leva $s \in F(U)$ a $s^+ : U \rightarrow |F|$, onde $s^+(x) = [s]_x \in F_x$. Claramente

$$\theta_U(s + s')(x) = (s + s')^+(x) = [s + s']_x = [s]_x + [s']_x = \theta_U(s)(x) + \theta_U(s')(x).$$

Mais ainda, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\theta_U} & F^+(U) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho^+ \\ F(V) & \xrightarrow{\theta_V} & F^+(V) \end{array}$$

já que se $s \in F(U)$,

$$\rho^+ \circ \theta_U(s) = \rho^+(s^+) = s^+|_V \text{ e } \theta_V \circ \rho(s) = (\rho(s))^+.$$

Assim para todo $x \in V$ tem-se que $(\rho(s))^+(x) = [\rho(s)]_x$ e $(s^+|_V)(x) = [s]_x$. Mais $[\rho(s)]_x = [s]_x$ no limite direto F_x . Segue-se que $\theta : F \rightarrow F^+$ é de fato um morfismo de prefeixes. $\square$

Observação 1.5.2.

1. Como consequência da propriedade universal do par (F^+, θ) anterior, segue-se que este par é único, salvo isomorfismos.
2. Assim se F é um feixe então $F \approx F^+$.
3. Em geral, para cada $x \in X$ existe um isomorfismo natural nas fibras $\theta_x : F_x \rightarrow F_x^+$.

Definição 1.5.3. *Seja $\varphi : F \rightarrow G$ é um morfismo de feixes.*

1. O **feixe núcleo** de φ , denotada $\ker\varphi$, é o prefeixe $\ker\varphi \subseteq F$ que é de fato um feixe pela Proposição 1.5.2.
2. O **feixe imagem** de φ , denotado $\text{im}\varphi$, é o feixe associado ao prefeixe $\text{Im}\varphi \subseteq G$, isto é, $\text{im}\varphi = (\text{Im}\varphi)^+$.
3. Seja F um subfeixe do feixe G em X . O **feixe quociente**, denotada F/G é o feixe associado ao prefeixe quociente F/G .
4. Se $\phi : F \rightarrow G$ é um morfismo de feixes, o **feixe co-núcleo**, denotado $\text{Coker}\phi$, é o feixe associado ao prefeixe $\text{Coker}\phi$.

Observação 1.5.3. *Se $\varphi : F \rightarrow G$ é um morfismo de feixes e $\text{Im}\varphi \hookrightarrow (\text{Im}\varphi)^+ = \text{im}\varphi$ é o morfismo canônico, como G é feixe, por a propriedade universal existe um único morfismo $\psi : \text{im}\varphi \rightarrow G$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}\varphi & \xrightarrow{\text{inc}} & G \\ & \searrow \theta & \uparrow \psi \\ & & \text{im}\varphi \end{array}$$

Na seguinte proposição teremos que ψ é injetiva e assim $\text{im}\varphi$ pode-se identificar como um subfeixe de G .

Definição 1.5.4. *Seja $\varphi : F \rightarrow G$ um morfismo de feixes.*

1. φ é um **monomorfismo** se $\ker\varphi = 0$.
2. φ é um **epimorfismo** se $\text{im}\varphi \approx G$ (isto é, ψ é um isomorfismo).

Proposição 1.5.3. *Seja $\varphi : F \rightarrow G$ um morfismo de feixes. Então*

1. φ é um monomorfismo se e só se $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ é injetivo para todo $x \in X$, se e só se $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ para todo aberto $U \subset X$. Segue-se que o morfismo $\psi : \text{im}\varphi \rightarrow G$ de acima é um monomorfismo, já que o diagrama de acima comuta nas fibras

$$\begin{array}{ccc} (\text{Im}\varphi)_x & \xrightarrow{\text{inc}_x} & G_x \\ & \searrow \theta_x & \uparrow \psi_x \\ & & (\text{im}\varphi)_x \end{array}$$

com θ_x um isomorfismo. Por comutatividade segue-se que ψ_x é injetiva.

2. φ é um epimorfismo se e só se $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ é sobrejetivo para todo $x \in X$.

Em geral, se φ é epimorfismo os homomorfismos $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$ não tem por que ser sobrejetivos.

Demonstração:

1. Não é difícil mostrar estas equivalências. Fica como exercício para o leitor.

2. Se φ é um epimorfismo, então $\psi : \text{im}\varphi \rightarrow G$ é um isomorfismo e assim no seguinte diagrama ψ_x é um isomorfismo pela Proposição 1.5.1.

$$\begin{array}{ccc} F_x & \xrightarrow{\varphi_x} & G_x \\ \tilde{\varphi}_x \downarrow & & \downarrow \psi_x \\ (\text{Im}\varphi)_x & \xrightarrow{\theta_x} & (\text{im}\varphi)_x \end{array}$$

e θ_x é, sempre, um isomorfismo pela Observação 1.5.3 parte (3), e claramente $\tilde{\varphi} : F_x \rightarrow (\text{Im}\varphi)_x$ é sobrejetivo. Segue-se que $\varphi_x : F_x \rightarrow G_x$ é sobrejetivo. O recíproco segue-se da comutatividade do diagrama anterior, que mostra que $\psi_x \circ \theta_x \circ \tilde{\varphi}_x^{-1} = \varphi_x$ com φ_x sobrejetivo pela hipótese. Segue-se que ψ_x é sobrejetivo, e como sempre é injetivo pela parte (1), então cada ψ_x é um isomorfismo. Assim, pela Proposição 1.5.1. ψ é um isomorfismo. $\square$

Finalmente damos um contraexemplo para justificar a segunda parte de (2): Seja $X = \mathbb{C}^*$ e consideremos o morfismo $\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ é um epimorfismo já que para cada $x \in X$ fixo, $\exp_x : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^*$ é um epimorfismo pois localmente cada função em $\mathbb{C}$ que não anula-se tem um logaritmo. Embora, para $U = X$ globalmente não existe um logaritmo e assim $\exp : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X^*(U)$ não é sobrejetiva.

Definição 1.5.5. *Uma sequencia exata de feixes e morfismos de feixes:*

$$\dots \rightarrow F^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} F^i \xrightarrow{\varphi^i} F^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots \quad (*)$$

chama-se de **exata**, no nível i , se $\ker\varphi^i = \text{im}\varphi^{i-1}$.

Proposição 1.5.4. *A sequencia anterior é exata, no nível i se e só se para cada $x \in X$ a sequencia de fibras*

$$\dots \rightarrow F_x^{i-1} \xrightarrow{\varphi_x^{i-1}} F_x^i \xrightarrow{\varphi_x^i} F_x^{i+1} \xrightarrow{\varphi_x^{i+1}} \dots \quad (**)$$

é um sequencia exata de grupos e homomorfismos, no nível i .

Demonstração: Se $(*)$ é exata, então $\ker\varphi^i = \text{im}\varphi^{i-1}$ e assim $(\ker\varphi^i)_x = (\text{im}\varphi^{i-1})_x$. Mais, pela Definição 1.5.3. parte (1) $(\ker\varphi^i)_x = \ker\varphi_x^i$, e pela Observação 1.5.3. $(\text{im}\varphi^i)_x = (\text{Im}\varphi^i)_x^+ \approx (\text{Im}\varphi^i)_x = \text{Im}\varphi_x^i$. Segue-se $\ker\varphi_x^i = \text{Im}\varphi_x^i$. Reciprocamente, segue-se das igualdades anteriores e pela Proposição 1.5.1. $\square$

Das Proposições 1.5.3. 1.5.4. segue-se:

1. Uma sequencia $0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G$ de feixes é exata se e só se φ é um monomorfismo.
2. Uma sequencia $F \xrightarrow{\psi} G \rightarrow 0$ é exata se e só se $\psi : F \rightarrow G$ é um epimorfismo.
3. Mas, note-sé que pela Proposição 1.5.3. parte (2), a exatidade de uma sequencia de feixes não é equivalente à exatidade das sequencias correspondentes de seções. Embora, a Proposição 1.5.4. diz que se é equivalente a exatidade das sequencias correspondentes das fibras. Isto reflete novamente da natureza local dos feixes.

Definição 1.5.6. *Um **sequencia exata corta** de feixes é uma sequencia exata da forma;*

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \rightarrow 0.$$

Assim nas fibras, tem-se sequencias exatas cortas

$$0 \rightarrow F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} L_x \rightarrow 0,$$

embora, pela observação (3) de acima, não é certo em geral que tenha-se sequencias exatas cortas nas sequencias da forma:

$$0 \rightarrow F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U) \xrightarrow{\psi_U} L(U) \rightarrow 0$$

já que o exemplo dada depois da Proposição 1.5.3. é um contraexemplo à sobrejetividade de ψ_U .

Lema 1.5.2. *Se a sequencia de feixes em um espaço X*

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \rightarrow 0$$

é exata, então para todo aberto $U \subset X$ a sequencia de seções

$$0 \rightarrow F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U) \xrightarrow{\psi_U} L(U)$$

é exata.

Demonstração: Pela Proposição 1.5.3. parte (1) φ_U é injetiva, e assim $0 \rightarrow F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U)$ é exata. Para mostrar que $\text{Im} \varphi_U \subset \ker \psi_U$ basta ver que $\psi \circ \varphi = 0$, mas isto segue-se do fato que $\psi_U \circ \varphi_U = (\psi \circ \varphi)_U = (0)_U = 0$. O outra inclusão é direta. $\square$

Exemplo 1.5.1. *Seja X uma superfície de Riemann. A **sequencia exponencial** é uma sequencia exata corta:*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0,$$

já que $\exp$ é sobrejetiva e seu núcleo é $\mathbb{Z}_X$.

Exemplo 1.5.2. *Seja X uma superfície de Riemann. Se $\bar{\partial}$ é o morfismo dada pelas equações de Cauchy- Riemann, a seguinte sequencia é exata:*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \hookrightarrow C_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} C_X^\infty,$$

mas em geral $\bar{\partial}$ não sempre é um epimorfismo.

1.6 Cohomologia de Čech

Nesta seção associamos a um espaço topológico X e a um feixe (de grupos abelianos) F em X , grupos de cohomologia $\check{H}^q(X, F)$ que são razoavelmente fácil de calcular no caso que nos interessa, (X paracompacto) e coincidem nesse caso e quando F é o feixe constante, com os grupos de cohomologia singular usuais.

Estes grupos de cohomologia serão um ferramenta poderosa para o estudo das superfícies de Riemann. Começamos associando a cada cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X e a cada feixe F em X , grupos $H^q(\mathcal{U}, F)$ tais que para $q = 0$ recuperamos as seções globais de F , isto é, $H^0(\mathcal{U}, F) \approx \Gamma(X, F)$, depois veremos que, a ordem natural das coberturas abertas de X , os grupos $H^q(-, F)$ formam uma **família direta** e assim, ao considerar seu **limite direto** tendermos os grupos de cohomologia associados a X e a F , os grupos

de cohomologia de Čech $\check{H}^q(X, F)$.

Cohomologia de uma cobertura: Seja X um espaço topológico. Lembremos que uma **cobertura aberta** de X é uma família de abertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $U_\alpha \subset X$ tal que sua união é X . Seja F um feixe (de grupos abelianos) em X . Para definir os grupos de cohomologia $H^q(\mathcal{U}, F)$ associados a $\mathcal{U}$ e a F , $q \geq 0$ um inteiro, definimos primeiro os grupos de cocadeias e operadores de cobordo:

Cocadeias: Associado a uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X e a um feixe F em X , temos um **complexo simplicial**, o **nervo** $N(\mathcal{U})$ da cobertura $\mathcal{U}$, definido como segue:

- Os **vertices** de $N(\mathcal{U})$ são os abertos $U_\alpha \in \mathcal{U}$.
- Os **q -simplexos** de $N(\mathcal{U})$ são as $(q+1)$ -uplas de abertos: $(U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_q})$ com $(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \Lambda^{q+1}$.

O conjunto dos q -simplexos de $N(\mathcal{U})$ o que denotamos por $N^q(\mathcal{U})$.

Definição 1.6.1. *Seja $q \geq 0$ um inteiro. Uma **q -cocadeia** de $\mathcal{U}$ com coeficientes no feixe F é uma função $f : N^q(\mathcal{U}) \rightarrow \{\text{seções de } F\}$ que associa a cada q -simplexo $\sigma = (U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_q}) \in N^q(\mathcal{U})$ uma seção $f(\sigma) \in \Gamma(|\sigma|, F)$, onde $|\sigma| = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}$.*

O conjunto de q -cocadeias o denotamos por $C^q(\mathcal{U}, F)$. Assim,

$$C^q(\mathcal{U}, F) = \{f : N^q(\mathcal{U}) \rightarrow \bigcup_{\sigma \in N^q(\mathcal{U})} F(\sigma); f(\sigma) \in F(\sigma)\}.$$

É claro então, que para $q \geq 0$,

$$C^q(\mathcal{U}, F) = \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \in \Lambda^{q+1}} F(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_q}),$$

e como F é um feixe de grupos abelianos, então o produto direto $C^q(\mathcal{U}, F)$ também é um grupo abeliano para cada $q \geq 0$ (a soma das q -cocadeias se faz componente a componente).

Definição 1.6.2. *Os operadores **cobordos***

$$\delta : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$$

defina-se como segue: Dada uma q -cocadeia $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$, $\delta f \in C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$ é a $(q+1)$ -cocadeia dada por: se $\sigma = (U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_{q+1}}) \in N^{q+1}(\mathcal{U})$ é qualquer $(q+1)$ -simplexo, ponhamos $\sigma_j = (U_{\alpha_0}, \dots, \tilde{U}_{\alpha_j}, \dots, U_{\alpha_{q+1}})$ onde $\tilde{U}_{\alpha_j}$ quer dizer que se omite este aberto, e então define-se

$$(\delta f)(\sigma) = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f(\sigma_j)|_{|\sigma|}$$

*onde $f(\sigma_j)|_{|\sigma|}$ significa que a **restrição** (no feixe F) da seção $f(\sigma_j)$ de $F(|\sigma_j|)$ ao aberto “mais pequeno” $|\sigma|$, e assim $f(\sigma_j)|_{|\sigma|} \in F(|\sigma|)$ como desejamos, isto é, $\delta f \in C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$.*

É claro que:

1. $\delta : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$ é um homomorfismo de grupos, isto é,

$$\delta(f + g) = \delta f + \delta g.$$

2. Um calculo direto mostra que $\delta \circ \delta = 0$.

3. Em consequência, tem-se um **co-complexo** de grupos abelianos:

$$C^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, F) \rightarrow \cdots C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow \cdots.$$

4. Como é usual, define-se os grupos de **cociclos** e **cobordos**:

$$(i) \text{ } q\text{-cociclos: } Z^q(\mathcal{U}, F) = \text{Ker}(C^q(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U}, F)).$$

$$(ii) \text{ } q\text{-cobordos: } B^q(\mathcal{U}, F) = \text{Im}(C^{q-1}(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^q(\mathcal{U}, F)).$$

Da observação (2) segue-se que $B^q(\mathcal{U}, F) \subset Z^q(\mathcal{U}, F)$ para todo $q \geq 1$.

Definição 1.6.3. *Seja $q \geq 0$ um inteiro, os q -esimo **grupos de cohomologia** do feixe F com respeito à cobertura $\mathcal{U}$ de X são:*

$$H^q(\mathcal{U}, F) = Z^q(\mathcal{U}, F) / B^q(\mathcal{U}, F)$$

se $q \geq 1$, e

$$H^0(\mathcal{U}, F) = Z^0(\mathcal{U}, F).$$

Lema 1.6.1. *Para X , $\mathcal{U}$ e F como antes, tem-se $H^0(\mathcal{U}, F) \approx \Gamma(X, F)$.*

Demonstração: Pela definição,

$$H^0(\mathcal{U}, F) = \text{ker}(C^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, F)).$$

Agora, dada $f \in C^0(\mathcal{U}, F)$, $\delta f \in C^1(\mathcal{U}, F)$ é a 1-cocadeia dada por:

$$(\delta f)(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}) = f(U_{\alpha_0})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}} - f(U_{\alpha_1})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}}$$

e assim, $f \in \text{ker}(\delta)$ se e só se para todo par $(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1})$ tem-se que

$$f(U_{\alpha_0})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}} = f(U_{\alpha_1})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}},$$

isto é, se e só se as seções $f(U_{\alpha_i})$ pode-se colar para definir uma única seção global (já que F é um feixe) $g \in \Gamma(X, F)$ tal que $g|_{U_{\alpha_i}} = f(U_{\alpha_i})$. Então define-se $\phi : H^0(X, F) \rightarrow \Gamma(X, F)$ como $\phi(f) = g$. Claramente ϕ é um homomorfismo bijetivo. $\square$

Para cálculos em dimensões baixas convêm escrever os operadores co-bordo

$$\delta : C^0(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, F)$$

e

$$\delta : C^1(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^2(\mathcal{U}, F)$$

em forma explicita:

- (i) Dar uma 0-cocadeia $f \in C^0(\mathcal{U}, F)$ é dar uma seção $f(U_\alpha) \in \Gamma(U_\alpha, F)$ por cada aberto $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Assim podemos usar a notação $f = (f_\alpha)$ para indicar que $f(U_\alpha) = f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, F)$. Similarmente, dar uma 1-cocadeia $g \in C^1(\mathcal{U}, F)$ é dar uma seção $g(U_\alpha, U_\beta) \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, F)$ por cada par (U_α, U_β) de abertos de $\mathcal{U}$. Usaremos a notação $g = (g_{\alpha\beta})$ para indicar que $g(U_\alpha, U_\beta) = g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, F)$. Analogamente para às 3-cocadeias, etc.
- (ii) Como vimos na demonstração do lema anterior, uma 0-cocadeia $f = (f_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, F)$ é um 0-cociclo se e só se as seções $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, F)$ e $f_\beta \in \Gamma(U_\beta, F)$ coincidem nas interseções $U_\alpha \cap U_\beta$, para cada par de abertos U_α e U_β de $\mathcal{U}$.
- (iii) Agora, dado uma 1-cocadeia $g = (g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, F)$ seu cobordo é a 1-cocadeia $\delta g \in C^2(\mathcal{U}, F)$ dada por: $\delta g = (h_{\alpha\beta\gamma})$ onde $h_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, F)$
- (iv) Assim, a 1-cocadeia $g = (g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, F)$ é um 1-cociclo se e só se $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma}$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.
- (v) Uma 1-cocadeia $g = (g_{\alpha\beta})$ é um 1-cobordo se e só se existe uma 0-cocadeia $f = (f_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, F)$ tal que para todo $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ tem-se que $g_{\alpha\beta}(z) = f_\beta(z) - f_\alpha(z)$.

Os grupos de cohomologia $H^q(\mathcal{U}, F)$ dependem, na sua definição, da cobertura $\mathcal{U}$ de X . Se queremos grupos de cohomologia associados a X , devemos primeiro fazer variar estas coberturas e ver o que acontece. A variação que nos interessa é a natural: “refinar” as coberturas.

Definição 1.6.4. Uma cobertura $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ de um espaço topológico X se diz que é **mais fina** que outra cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ denotado por $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, se todo V_β está contido em algum U_α , isto é, existe uma função $\mu : B \rightarrow A$ (entre os conjuntos de índices) tal que para todo $\beta \in B$ tem-se que $V_\beta \subset U_{\mu(\beta)}$. Um tal função chama-se de **refinamento**. É claro que a cobertura $\mathcal{V}$ pode refinar a outra cobertura $\mathcal{U}$ de varias maneiras, isto é, por diferentes funções $\mu : B \rightarrow A$.

Lema 1.6.2. Se $\mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ é um refinamento de coberturas de X , então

1. μ induz um homomorfismo de complexos de cadeia

$$\mu^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, F).$$

2. E assim, μ^+ induz homomorfismo de grupos de cohomologia

$$\mu^* : H^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, F).$$

Demonstração:

1. $\mu^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, F)$ define-se como segue: Dado $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$, $\mu^+(f) \in C^q(\mathcal{V}, F)$ está dado por

$$\mu^+(f)(V_0, \dots, V_q) = f(\mu V_0, \dots, \mu V_q)|_{V_0 \cap \dots \cap V_q},$$

note-se que como $V_i \subset \mu V_i$ então $V_0 \cap \dots \cap V_q \subset \mu V_0 \cap \dots \cap \mu V_q$. Claramente $\mu u^+(f + g) = \mu^+(f) + \mu^+(g)$, e temos que os diagramas comutam

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{U}, F) \\ \mu^+ \downarrow & & \downarrow \mu^+ \\ C^q(\mathcal{V}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{V}, F) \end{array}$$

já que para $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ e para todo $(V_0, \dots, V_{q+1}) \in N(\mathcal{V})$ tem-se:

$$\begin{aligned} (\mu^+ \circ \delta)(f)(V_0, \dots, V_{q+1}) &= (\delta f)(\mu V_0, \dots, \mu V_{q+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f(\mu V_0, \dots, \mu \tilde{V}_j, \dots, \mu V_{q+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \mu f(V_0, \dots, \tilde{V}_j, \dots, V_{q+1}) \\ &= (\delta \circ \mu^+)(f)(V_0, \dots, V_{q+1}) \end{aligned}$$

2. Segue-se de (1). $\square$

O seguinte lema nos diz que ainda quando $\mathcal{V}$ pode refinar a $\mathcal{U}$ de varias maneiras, em cohomologia os morfismos induzidos são iguais.

Lema 1.6.3. *Se $\mu, \nu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ são dois refinamentos quaisquer entre coberturas de X , então*

$$\mu^* = \nu^* : H^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, F).$$

Demonstração: Mostraremos que os morfismos de complexos $\mu^+, \nu^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, F)$ são homotópicos, isto é, mostraremos que existem morfismos $s : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, F)$ tais que o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} C^{q-1}(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{U}, F) \\ \mu^+ - \nu^+ \downarrow & \swarrow s & \downarrow \mu^+ - \nu^+ & \swarrow s & \downarrow \mu^+ - \nu^+ \\ C^{q-1}(\mathcal{V}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^q(\mathcal{V}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{V}, F) \end{array}$$

temos que $\mu^+ - \nu^+ = \delta \circ s + s \circ \delta : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, F)$. As homotopias s define-se como segue:

- (i) Se $q = 0$, como $C^{q-1}(\mathcal{V}, F) = 0$ (já que $q-1 < 0$) tem-se que definir $s : C^0(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{U}, F) = 0$ como $s = 0$.
- (ii) Se $q > 0$, dada $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ e $\sigma = (V_0, \dots, V_{q-1}) \in N(\mathcal{V})$, define-se $sf \in C^{q-1}(\mathcal{V}, F)$ como:

$$(sf)(\sigma) = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k f(\mu V_0, \dots, \mu V_k, \nu V_k, \dots, \nu V_{q-1})$$

(note-se que ao repetir k acrescentou-se um vértice mais ao simplexo). É claro que s é um homomorfismo. Para poder provar que é de fato uma homotopia, convém considerar a seguinte função

$$\phi_k : N^q(\mathcal{V}) \rightarrow N^q(\mathcal{U})$$

dada por

$$\phi_k(V_0, \dots, V_q) = (\mu V_0, \dots, \mu V_k, \nu V_k, \dots, \nu V_q)$$

onde $0 \leq k \leq q-1$. Note-se que como $V_i \subset \mu V_i$ e $V_j \subset \nu V_j$, então $|\sigma| \subset |\phi_k \sigma|$. E observamos que se $\sigma_j = (V_0, \dots, \tilde{V}_j, \dots, V_q)$ então diretamente mostra-se que

$$\phi_k(\sigma_j) = \begin{cases} (\phi_k \sigma)_{j+1} & \text{se } 0 \leq k < j \leq q-1 \\ (\phi_{k+1} \sigma)_j & \text{se } 0 \leq j \leq k \leq q-2 \end{cases}$$

por exemplo, no primeiro caso $0 \leq k < j \leq q-1$, tem-se que

$$\begin{aligned} \phi_k(\sigma_j) = \phi_k(V_0, \dots, \tilde{V}_j, \dots, V_q) &= (\mu V_0, \dots, \mu V_k, \nu V_k, \dots, \nu \tilde{V}_j, \dots, \nu V_q) \\ &= (\phi_k \sigma)_{j+1} \end{aligned}$$

já que tínhamos acrescentado um lugar ao repetir o índice k em μV_k e νV_k . Usando está função ϕ_k , a homotopia s está definida por:

$$(sf)(\sigma) = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k f(\phi_k \sigma)|_{\sigma}.$$

Se agora calculamos, para toda $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ e para todo $\sigma \in N(\mathcal{V})$:

$$\begin{aligned} (s \circ \delta)(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k (\delta f)(\phi_k \sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=0}^q (-1)^{k+j} f((\phi_k \sigma)_j) \end{aligned}$$

e por outro lado:

$$\begin{aligned} (\delta \circ s)(f)(\sigma) &= \sum_{j=0}^q (-1)^j (sf)(\sigma_j) = \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{j+k} f(\phi_k \sigma_j) \\ &= \sum_{k=0}^{q-2} \sum_{j=k+2}^q (-1)^{j+k+1} f(\phi_k \sigma)_j + \sum_{j=0}^{q-2} \sum_{k=j+1}^{q-1} (-1)^{j+k+1} f(\phi_k \sigma)_j \end{aligned}$$

(pela definição de ϕ_k). E somando estas duas equações obtêm-se:

$$\begin{aligned}
(s\delta)(f)(\sigma) + (\delta s)(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=k}^{q-1} (-1)^{j+k} f(\phi_k \sigma)_j + \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{j=k+1}^{q-1} (-1)^{j+k} f(\phi_k \sigma)_j \\
&\quad (\text{já que os outros termos das equações cancelam-se}) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1} f(\mu V_0, \dots, \mu V_{k-1}, \nu V_k, \dots, \nu V_q) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{q-1} f(\mu V_0, \dots, \mu V_k, \nu V_{k+1}, \dots, \nu V_q) \\
&= f(\mu V_0, \dots, \mu V_q) - f(\nu V_0, \dots, \nu V_q) \\
&= \mu^+ f(\sigma) - \nu^+ f(\sigma).
\end{aligned}$$

E assim, $s\delta + \delta s = \mu^+ - \nu^+$ como queríamos mostrar.

- (iii) Finalmente, note-se que se f é um cociclo (isto é, $\delta f = 0$) então $\mu^+ f - \nu^+ f = \delta s f$ e assim os cociclos $\mu^+ f$ e $\nu^+ f$ diferem por um cobordo $\delta(s f)$, isto é, representam a mesma classe de cohomologia em $H^q(\mathcal{V}, F)$, isto é, $\mu^+(f) = \nu^+(f)$. $\square$

Os morfismos μ^* são transitivos:

Lema 1.6.4. *Se $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ são coberturas de X com refinamentos $\alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ e $\beta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, então $\beta \circ \alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ é um refinamento, e tem-se que*

$$(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^* : H^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^q(\mathcal{W}, F).$$

Demonstração: Claramente $\beta \circ \alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ é um refinamento, já que qualquer $W_i \in \mathcal{W}$ tem-se que $W_i \subset \alpha W_i \in \mathcal{V}$ e assim $\alpha W_i \subset \beta(\alpha W_i) \in \mathcal{U}$, isto é, $W_i \subset (\beta \circ \alpha)W_i$. Para mostrar a última afirmação, basta mostrar que $(\beta \circ \alpha)^+ = \alpha^+ \circ \beta^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^q(\mathcal{W}, F)$. Embora isto é claro, já que dado $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ e qualquer $(W_0, \dots, w_q) \in N(\mathcal{W})$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha)^+(f)(W_0, \dots, W_q) &= f(\beta \alpha W_0, \dots, \beta \alpha W_q) \\
&= \beta^+(f)(\alpha W_0, \dots, \alpha W_q) \\
&= \alpha^+(\beta^+ f)(W_0, \dots, W_q). \quad \square
\end{aligned}$$

Observação 1.6.1. *A coleção de todas as coberturas de X está **parcialmente ordenada** por $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ se e só se $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, isto é, existe um refinamento $\mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$. Mais ainda, esta coleção é um conjunto **dirigido** já que se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são coberturas de X , então ambas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ refinam à união $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ (que é claramente uma cobertura de X), isto é, $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \leq \mathcal{V}$ mediante os refinamentos $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.*

Corolário 1.6.1. *A coleção de grupos de cohomologia $\{H^q(\mathcal{U}, F), \mu^*\}$ obtida variando as coberturas $\mathcal{U}$ de X e com morfismos μ^* induzida pelos refinamentos $\mu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, é um conjunto direto.*

Demonstração:

- (i) Pelo Lema anterior, se $\alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ e $\beta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ são refinamentos, então $(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.
- (ii) Claramente, se $Id : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é o refinamento identidade, então $Id^* : H^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow H^q(\mathcal{U}, F)$ é o morfismo identidade. $\square$

Definição 1.6.5. *Seja X um espaço topológico e F um feixe de grupos abelianos em X . Os **grupos de cohomologia de Čech** de X com coeficientes no feixe F são*

$$\check{H}^q(X, F) = \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, F).$$

Uma consequência imediata da definição anterior e do Lema 1.6.1. é

$$\check{H}^0(X, F) \approx \Gamma(X, F).$$

Teorema 1.6.1. (Sequencia exata de cohomologia) *Seja X um espaço Hausdorff paracompacto e seja*

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \rightarrow 0$$

uma sequencia exata corta de feixes em X . Então existe uma sequencia exata larga de grupos de cohomologia:

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, F) \xrightarrow{\varphi} \check{H}^0(X, G) \xrightarrow{\psi} \check{H}^0(X, K) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, F) \xrightarrow{\varphi} \check{H}^1(X, G) \rightarrow \dots$$

Demonstração: Ver [15] pagina 56.

1.7 Folheações

Todos os resultados não demonstrados desta seção podem ser encontrados em [31].

Definição 1.7.1. *Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma **folheação de classe C^r** , $r \geq 1$, e **dimensão n** é uma decomposição de M em subvariedades imersas caracterizadas pelo atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M com as seguintes propriedades:*

- a) *Se $(U; \varphi) \in \mathcal{F}$, então $\varphi(U) = U_1 \times U_2$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.*
- b) *Se $(U; \varphi)$ e $(V; \psi)$ pertencem a $\mathcal{F}$ e $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas*

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V) \\ (x, y) &\mapsto (h_1(x, y), h_2(y)) \end{aligned}$$

*As cartas $(U; \varphi) \in \mathcal{F}$ serão chamadas também **cartas trivializadoras** de $\mathcal{F}$.*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M de dimensão n e classe C^r , onde $r \geq 1$ e $0 < n < m$. Consideremos uma carta local $(U; \varphi)$ de $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados **placas de U** , ou ainda **placas de $\mathcal{F}$** . Fixado $c \in U_2$, a aplicação $\varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n de classe C^r de M . Além disso, se α e β são placas de U então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Um **caminho de placas de $\mathcal{F}$** é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de $\mathcal{F}$, podemos definir em M a seguinte relação de equivalência:

$$pRq \text{ se existe um caminho de placas } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ com } p \in \alpha_1 \text{ e } q \in \alpha_k.$$

As classes de equivalência da relação R são chamadas folhas de $\mathcal{F}$.

Observação: Toda folha de $\mathcal{F}$ é um subconjunto de M conexo por caminhos.

Exemplo 1.7.1. *Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma submersão de classe C^r . Pela forma local das submersões dados $p \in M$ e $q = f(p) \in N$, existem cartas locais (U, φ) em M , (V, ψ) em N tais que $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ e tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ coincide com a segunda projeção $(x, y) \mapsto y$. Daí é claro que as cartas locais (U, φ) definem uma estrutura de variedade folheada de classe C^r onde as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, $c \in N$.*

Exemplo 1.7.2. *Um campo $X : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 sem singularidades define uma folheação de classe C^1 em $\mathbb{R}^m$, cujas folhas são as trajetórias de X . As cartas desta folheação são obtidas a partir do Teorema do Fluxo tubular.*

Exemplo 1.7.3. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação suave de um grupo de Lie G numa variedade. A aplicação $\psi_x : G \rightarrow M$ dada por $\psi_x(g) = \varphi(g, x)$ induz a aplicação $\bar{\psi}_x : G/G_x(\varphi) \rightarrow M$, $\bar{\psi}_x(\bar{g}) = \psi_x(g)$ onde $\bar{g} = g \cdot G_x(\varphi)$. Como $g_1^{-1}g_2 \in G_x(\varphi)$ se, e somente se, $\varphi(g_1, x) = \psi_x(g_1) = \psi_x(g_2) = \varphi(g_2, x)$ concluímos que $\bar{\psi}_x$ está bem definida e é injetiva. Pode-se demonstrar ainda que $G/G_x(\varphi)$ possui estrutura diferenciável e que $\bar{\psi}_x$ é uma imersão injetiva cuja imagem é $\mathcal{O}_x(\varphi)$.*

*Dizemos que $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é uma **ação folheada** se para todo $x \in M$ o espaço tangente à órbita de φ passando por x tem dimensão k fixa. Quando k é a dimensão de G dizemos que φ é **localmente livre**.*

Proposição 1.7.1. *As órbitas de uma ação folheada definem as folhas de uma folheação.*

Toda folha F de uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r possui uma estrutura de variedade diferenciável C^r induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$. Esta estrutura chamada **estrutura intrínseca** de F , é construída da maneira seguinte:

Dado $p \in F$ seja (U, φ) uma carta de $\mathcal{F}$ tal que $p \in U$ e $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{n+s}$ onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^s$ respectivamente. Seja α uma placa de U que contém p . Tomando-se $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, onde $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^s$, definimos $\bar{\varphi} : \alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\bar{\varphi} = \varphi_1|_{\alpha}$. É claro que $\bar{\varphi} : \alpha \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo pois $\varphi(\alpha) = U_1 \times \{a\}$ para algum $a \in U_2$. A seguir mostraremos que

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \bar{\varphi}); \alpha \subset F \text{ é placa de } U \text{ com } (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

é um atlas de classe C^r e dimensão n de F .

Basta verificar que se $(\alpha, \bar{\varphi})$, $(\beta, \bar{\psi})$ estão em $\mathcal{B}$ e $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, então $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ e $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$

são abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1} : \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \rightarrow \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ é um difeomorfismo de classe C^r . Mostremos primeiro que $\alpha \cap \beta$ é aberto em α e em β . Sejam (U, φ) , (V, ψ) em $\mathcal{F}$ tais que $\bar{\varphi} = \varphi|_\alpha$ e $\bar{\psi} = \psi|_\beta$. Pela definição de folheação $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ se escreve como

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s.$$

Em particular, como $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ temos

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, b) = (h_1(x, b), h_2(b)) = (h_1(x, b), a). \quad (*)$$

Como $\psi(\beta \cap U) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})$ e $\varphi(\beta \cap U) = \varphi(U \cap V \cap \beta) = \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})$, de $(*)$ obtemos

$$\begin{aligned} \varphi(\beta \cap U) &= \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(\beta \cap U)) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})) \\ &\subset \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\}) = \varphi(\alpha \cap V) \end{aligned}$$

ou seja $\beta \cap U \subset \alpha \cap V$. Analogamente $\alpha \cap V \subset \beta \cap U$, logo $\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U$. Isto prova a afirmação.

Como $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ são homeomorfismos obtemos $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ e $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$. A aplicação $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1} : \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \rightarrow \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ é C^r pois $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}(x) = h_1(x, b)$ se $x \in \bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$. Analogamente $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}$ é C^r , por tanto $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}$ é um difeomorfismo C^r . Isto define a estrutura intrínseca de F .

Teorema 1.7.1. *Seja M uma variedade folheada por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão n e classe C^r . Toda folha F de $\mathcal{F}$ possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n , tal que os domínios das cartas locais são placas de $\mathcal{F}$. A aplicação $i : F \rightarrow M$ definida por $i(p) = p$ é uma imersão biunívoca de classe C^r , quando em F consideremos a estrutura de variedade intrínseca. Além disto F é subvariedade C^r de M se e somente se i é um mergulho.*

Definição 1.7.2. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão s e classe C^r , $r \geq 1$ de M está definida por uma coleção máxima de pares (U_i, f_i) , $i \in I$, onde os U_i são abertos em M e as $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$ são submersões satisfazendo*

$$1) \bigcup_{i \in I} U_i = M.$$

$$2) \text{ Se } U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ existe um difeomorfismo local } g_{ij} \text{ de classe } C^r \text{ de } \mathbb{R}^s \text{ tal que } f_i = g_{ij} \circ f_j \text{ em } U_i \cap U_j.$$

As f_i são chamadas **aplicações distinguidas** de $\mathcal{F}$.

Nesta definição as placas de $\mathcal{F}$ em U_i são as componentes conexas dos conjuntos $f_i^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^s$.

Esta definição de folheação é equivalente à dada anteriormente, para isto precisamos do seguinte lema.

Lema 1.7.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade M . Existe uma cobertura $C = \{U_i; i \in I\}$ de M por domínios de cartas locais de $\mathcal{F}$ tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido no domínio de uma carta local de $\mathcal{F}$.*

Definição 1.7.3. *Seja N uma variedade. Dizemos que $g : N \rightarrow M$ é **transversal a $\mathcal{F}$** quando g é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}$, ou seja, se para todo $p \in N$ temos*

$$Dg(p)(T_p N) + T_q(\mathcal{F}) = T_q M, \quad q = g(p).$$

Teorema 1.7.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em M de classe C^r , ($r \geq 1$) e $g : N \rightarrow M$ uma aplicação C^r . Então g é transversal a $\mathcal{F}$ se, e somente, se para toda aplicação distinguida (U, f) de $\mathcal{F}$ a composição $f \circ g : g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^s$ é uma submersão.*

Teorema 1.7.3. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em M de classe C^r e $g : N \rightarrow M$, de classe C^r , transversal a $\mathcal{F}$. Então existe uma única folheação $g^*(\mathcal{F})$ em N de classe C^r e codimensão $\text{cod}(\mathcal{F})$, cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $g^{-1}(F)$, F folha de $\mathcal{F}$.*

Um campo de k -planos numa variedade M é uma aplicação P que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de $T_q M$.

Um campo de 1-planos é também chamado de **campo de linhas**. Por exemplo, se X é um campo de vetores sem singularidade em M , podemos definir um campo de linhas p em M colocando $P(q) = \mathbb{R} \cdot X(q)$, subespaço de dimensão 1 de $T_q M$ gerado por $X(q)$. Reciprocamente, se P é um campo de linhas em M , podemos definir um campo de vetores sem singularidades em M escolhendo em cada ponto $q \in M$ um vetor não nulo em $P(q)$. Diz-se que tal campo de vetores é tangente a P . Dizemos que um campo de linhas em M é de classe C^r quando para todo $q \in M$ existe um campo de vetores X , de classe C^r , definido numa vizinhança V de q , tal que $P(x) = \mathbb{R} \cdot X(x)$ para todo $x \in V$. Analogamente ao caso de campos de linhas, dizemos que um campo de k -planos P em M é de classe C^r se para todo $q \in M$ existem k campos de vetores C^r , $X^1, \dots, X^k$, definidos numa vizinhança V de q tais que para todo $x \in V$, $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$, é ua base de $P(x)$.

Proposição 1.7.2. *Toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe C^r , $r \geq 1$, em M , define um campo de k -planos de classe C^{r-1} em M , o qual será denotado por $T\mathcal{F}$.*

Em particular, se M não admite campos contínuos de k -planos, então M não possui folheação de dimensão k . Por exemplo, a esfera S^5 não possui campos de 2-planos contínuos logo, no existem folheações de dimensão 2 de S^5 . Uma pergunta natural então é a seguinte. Dado um campo de k -planos P em M , sob que condições existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k tal que, para todo $q \in M$, $T_q \mathcal{F} = P(q)$?

Esta pergunta é respondida pelo teorema de Frobenius.

Definição 1.7.4. *Diz-se que um campo de planos P é **involutivo** se, dados dois campos de vetores X e Y tais que, para todo $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q) \in P(q)$, então $[X, Y](q) \in P(q)$.*

Teorema 1.7.4. [Frobenius] *Seja P um campo de k -planos de classe C^r , $r \geq 1$, em M . Se P é involutivo, então existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe C^r em M tal que $T_q(\mathcal{F}) = P(q)$ para todo $q \in M$. Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^r ($r \geq 2$) e P é o campo de planos tangente a $\mathcal{F}$, então P é involutivo.*

Dizemos também que um campo de planos involutivos é **completamente integrável**. Em particular, se $k = 1$, P é sempre integrável. Neste caso o teorema se reduz ao teorema de existência e unicidade das soluções de uma equação diferencial ordinária.

Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, dizemos que **duas bases ordenadas de**

E , $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, **definem a mesma orientação em E** se a matriz mudança de base $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definida por $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$ tem determinante positivo. Se B o conjunto de todas as bases ordenadas de E , a relação “ $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definem a mesma orientação em E ” é uma equivalência em B , a qual possui duas classes de equivalência chamadas as orientações de E . Seja P um campo de k -planos contínuo em M . Diremos que P é **orientável** se para cada $x \in M$ for possível escolher uma orientação $\mathcal{O}(x)$ em $P(x)$ de tal forma que a aplicação $x \mapsto \mathcal{O}(x)$ seja contínua no seguinte sentido. Consideremos uma cobertura de M por abertos $(U_i)_{i \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, a restrição $P|_{U_i}$ é definida por k campos de vetores contínuos $X^1, \dots, X^k$. Para cada $x \in U_i$, as bases $\mathcal{B}(x) = \{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ e $\mathcal{B}' = \{-X^1(x), X^2(x), \dots, X^k(x)\}$ definem duas orientações distintas de $P(x)$, $\mathcal{O}_i^+(x)$ e $\mathcal{O}_i^-(x)$ digamos. Dizemos que a escolha de $\mathcal{O}$ é contínua se $\mathcal{O}|_{U_i} = \mathcal{O}_i^+$ para todo i e sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $\mathcal{O}_i^+ = \mathcal{O}_j^+$ na intersecção. Se $k = \dim M$ e $P(x) = T_x M$, então M é orientável. Por exemplo, um campo de linhas P em M é orientável se e somente se existe um campo de vetores contínuo X em M tal que, para todo $x \in M$, $P(x)$ é o subespaço gerado por $X(x)$.

Seja P um campo de k -planos em M . Dizemos que $\tilde{P}$ é um **campo complementar a P ou transversal a P** , se para todo $x \in M$ tivermos $P(x) + \tilde{P}(x) = T_x M$ e $P(x) \cap \tilde{P}(x) = \{0\}$. É claro da definição que $\tilde{P}$ é um campo de planos de codimensão k . Se P é de classe C^r é possível definir um campo complementar de classe C^r da maneira seguinte. Fixemos em M uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Coloquemos $P^\perp = \{v \in T_x M; \langle u, v \rangle_x = 0 \text{ para todo } u \in P(x)\}$. É claro que $P^\perp$ é um campo de planos complementar a P .

Definição 1.7.5. *Seja P um campo contínuo de k -planos. Dizemos que P é **transversalmente orientável** se existe um campo complementar a P contínuo e orientável.*

Proposição 1.7.3. *Se P é transversalmente orientável, qualquer campo de planos contínuo e complementar de P é orientável.*

Teorema 1.7.5. *Seja P um campo de k -planos de classe C^r em M . Valem as seguintes propriedades:*

- a) *Se P é orientável e transversalmente orientável, então M é orientável.*
- b) *Se M é orientável então P é orientável se e somente se é transversalmente orientável.*

Definição 1.7.6. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r ($r \geq 1$) é **orientável** se o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ é orientável. Similarmente, $\mathcal{F}$ é **transversalmente orientável** se o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável. Denotaremos o campo de planos tangente a $\mathcal{F}$ por $T\mathcal{F}$.*

Um exemplo específico de folheação de dimensão um, induzida por um campo de vetores sem singularidades, é obtido pela **suspensão de um difeomorfismo C^r** ($r \geq 1$), $f : N \rightarrow N$, definida como se segue.

No produto $N \times \mathbb{R}$ consideremos a relação de equivalência $\sim$ definida por $(x, t) \sim (x', t')$ se e só se $t - t' = n \in \mathbb{Z}$ e $x' = f^n(x)$. Assim se $g(x, t) = (f^{-1}(x), t + 1)$, então g é um

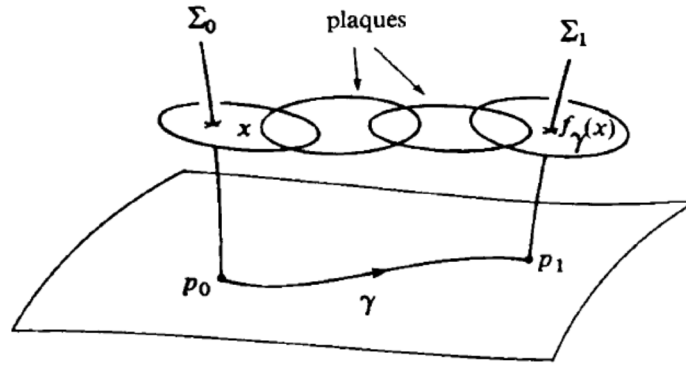
difeomorfismo C^r em $N \times \mathbb{R}$ e $(x, t) \sim (x', t')$ se e só se $(x, t) = g^n(x', t')$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Sejam $M = N \times \mathbb{R} / \sim$ o espaço quociente, com a topologia quociente, e $\pi : N \times \mathbb{R} \rightarrow M$ a projeção da relação de equivalência. Se segue que $\pi : N \times \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento, logo é possível induzir-se em M uma estrutura de variedade C^r tal que π é um difeomorfismo local C^r e $\dim(M) = \dim(N) + 1$.

Em $N \times \mathbb{R}$ consideramos a folheação $\mathcal{F}_0$ cujas folhas são as linhas $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in N$, a qual é tangente ao campo de vetores $X^0(x, t) = (0, 1)$ em $N \times \mathbb{R}$. Esta folheação e o campo X^0 , são invariantes pelo difeomorfismo g (isto é, $g^*(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$ e $g^*(X^0) = (dg)^{-1} \cdot (X^0 \circ g) = X^0$). Nestas condições, é fácil ver que existem uma folheação $\mathcal{F}$ e um campo X em M , tais que $\mathcal{F}_0 = \pi^*(\mathcal{F})$ e $X^0 = \pi^*(X)$. As curvas integrais de X são as folhas de $\mathcal{F}$. A folheação $\mathcal{F}$ é chamada **suspensão do difeomorfismo f** e o campo X , **campo se suspensão**.

Vejam a relação que existe entre f e $\mathcal{F}$. Seja $N_0 = \pi(N \times \{0\})$. Então N_0 é uma subvariedade mergulhada de M , difeomorfa a N por $h = \pi|_{N \times \{0\}} : N \times \{0\} \rightarrow N_0$. Dado $y = \pi(x, 0) \in N_0$, seja F_y a folha de $\mathcal{F}$ que passa por y . Então F_y pode ser parametrizada por $\gamma(t) = \pi(x, t)$, que é a órbita de X com condição inicial $\gamma(0) = y$. Esta órbita volta a cortar N_0 para $t = 1$ no ponto $\pi(x, 1) = \pi(f(x), 0) = h \circ f \circ h^{-1}(y)$, logo podemos definir uma aplicação de “primeiro retorno”, $\tilde{g} : N_0 \rightarrow N_0$, por $\tilde{g} = h \circ f \circ h^{-1}$. A aplicação $\tilde{g}$ é um difeomorfismo C^r de N_0 conjugado a f . Esta aplicação é também conhecida por **transformação de Poincaré** da seção N_0 e do campo X . As propriedades topológicas ou algébricas de f se traduzem em propriedades análogas de $\mathcal{F}$. Por exemplo, se $x \in N$ é um ponto periódico de f de período k então a folha $\mathcal{F}$ contendo $h(x)$ é uma curva fechada que corta N_0 k vezes. Se x não é ponto periódico de f , então a folha de $\mathcal{F}$ por $h(x)$ não é compacta e corta N_0 no conjunto $\{h(f^n(x)); n \in \mathbb{Z}\}$. Se a órbita de x por f , $\{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$, for densa em N a folha de $\mathcal{F}$ por $h(x)$ será densa em M .

Como exemplo específico de esta situação consideremos o difeomorfismo $f_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ definido por $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z$. Este difeomorfismo é uma rotação de ângulo $2\pi\alpha$. A suspensão de f_α é uma folheação definida em $M = T^2$, a qual denotaremos por $\mathcal{F}_\alpha$ se $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, onde p e q são primos entre si, então todos os pontos de S^1 são periódicos para f_α , o que significa que as folhas de $\mathcal{F}_\alpha$ são todas homeomorfas a S^1 e cortam $N_0 = \pi(S^1 \times \{0\})$ q vezes. Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ todas as folhas de $\mathcal{F}_\alpha$ são densas em T^2 .

Sejam M uma variedade complexa de dimensão m e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M . Fixemos uma folha F de $\mathcal{F}$, sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo e Σ_0, Σ_1 pequenas seções transversais a $\mathcal{F}$ de dimensão k passando por $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$ respectivamente. As seções Σ_0 e Σ_1 podem ser obtidas através de cartas distinguidas U_0 e U_1 em p_0 e p_1 de tal forma que Σ_j corta cada placa de U_j exatamente uma vez, como mostra a figura abaixo.



Segue do Lema 1.13.1 consideremos uma cobertura finita de $\gamma([0, 1])$ por cartas distinguidas de $\mathcal{F}$, digamos $(V_i)_{i=0}^n$, tais que:

1. $V_0 = U_0$ e $V_n = U_1$
2. $V_{i-1} \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, n$.
3. $V_{i-1} \cup V_i$ está contido numa carta trivializadora de $\mathcal{F}$, para todo $i = 1, \dots, n$.
4. Existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$ tais que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_i$ para todo $0 \leq i \leq n$.

Dizemos então que existe uma **cadeia subordinada a γ** ou, por simplicidade, que $(V_i)_{i=0}^n$ é uma cadeia subordinada a γ .

Para cada $0 < j < n + 1$ fixemos Σ'_j uma seção transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(t_j) \in \Sigma'_j \subset V_{j-1} \cap V_j$ e Σ'_j corta a cada placa de V_{j-1} e a cada placa de V_j no máximo em um ponto. Coloquemos também $\Sigma'_0 = \Sigma_0$ e $\Sigma'_{n+1} = \Sigma_1$. Utilizando (2) e (3), não é difícil ver que se $q \in \Sigma'_i$, então a placa de V_j que contém q , corta Σ'_{j+1} no máximo em um ponto, sendo que se q está numa pequena vizinhança, digamos A_j , de $\gamma(t_j)$ em Σ'_j , então esta placa corta Σ'_{j+1} num ponto, digamos $f_j(q)$. Com isso podemos definir uma aplicação $f_j : A_j \rightarrow \Sigma'_j$ tal que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Se as seções consideradas são subvariedades holomorfas, o que suporemos de agora em diante, então f_j é holomorfa. De fato, f_j será um biholomorfismo sobre sua imagem, já que podemos definir sua inversa de maneira análoga. Em geral não é possível compor f_{j+1} com f_j , mas podemos compor os seus germes, já que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Denotamos o germe de f_j em $\gamma(t_j)$ por $[f_j]$, e consideramos o germe composto:

$$[f]_\gamma = [f_n] \circ \dots \circ [f_0]$$

que será um germe de biholomorfismo em p_0 , onde, em princípio, $[f]_\gamma$ depende da cobertura $(V_i)_{i=0}^n$ e das seções intermediárias consideradas.

Teorema 1.7.6. *O germe $[f]_\gamma$ depende apenas de Σ_0 e de Σ_1 .*

O germe $[f]_\gamma$ é chamado de **holonomia de γ com respeito às seções Σ_1 e Σ_2** . No caso em que γ é uma curva fechada em F , isto é $p_0 = p_1$, e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, $[f]_\gamma$ é um elemento do grupo $\text{Bih}(\Sigma_0, p_0)$ e é chamado de **holonomia de com respeito a Σ_0 , ou simplesmente holonomia com respeito a γ** .

Teorema 1.7.7. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão m e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M . Fixemos uma folha F de $\mathcal{F}$. Se $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow F$ são duas curvas fechadas tais que, $\gamma(0) = \gamma(1) = \eta(0) = \eta(1) = p_0 \in F$ e γ e η são homotópicas em F , então $[f]_\gamma = [f]_\eta$.*

Convém lembrar aqui que duas curvas fechadas γ e η são homotópicas em F com extremo fixo $p_0 \in F$, se existe uma aplicação continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow F$ tal que:

$$\text{i)} \quad H(t, 0) = \gamma(t) \text{ e } H(t, 1) = \eta(t) \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

$$\text{ii)} \quad H(0, s) = H(1, s) = p_0 \text{ para todo } s \in [0, 1].$$

Denotaremos por $\gamma \sim \eta$ se γ e η são homotópicas. A classe de homotopia de uma curva γ com extremos em p_0 é denotada por $[\gamma]$. O conjunto das classes de equivalência de $\sim$, neste caso, chamado de **grupo fundamental ou de holonomia de F com base em p_0** . A notação geralmente utilizada para esse grupo é $\pi_1(F, p_0)$.

Definição 1.7.7. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão m e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão k em M , F uma folha de $\mathcal{F}$, $p \in F$ e Σ uma seção holomorfa transversal a F tal que $p \in \Sigma$. A representação de holonomia de F com respeito a p e a Σ é, por definição, a aplicação $H = H(F, p, \Sigma) : \pi_1(F, p) \rightarrow \text{Bih}(\Sigma, p)$, definida por:*

$$H([\gamma]) = [f]_\gamma$$

onde γ é um representante de $[\gamma]$ e $[f]_\gamma$ é um germe de holonomia de γ com respeito a Σ .

O teorema anterior garante que H está bem definida, isto é, não depende do representante de $[\gamma]$.

O grupo de holonomia de F com respeito a p e a Σ , é a imagem de $H(\pi_1(F, p))$, onde H é um homomorfismo de grupos, e será denotado por $\text{Hol}(F, p, \Sigma)$.

Exemplo 1.7.4. *Seja $Z(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ e $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Dado $z_0 = (z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2$, temos que a única solução $\varphi_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ do P.V.I.*

$$\begin{cases} z' &= Z(z) \\ z(0) &= z_0 \end{cases}$$

é dada por

$$\varphi_{z_0}(T) = (e^{\lambda_1 T} z_1^0, e^{\lambda_2 T} z_2^0) \text{ para todo } T \in \mathbb{C}.$$

De esta maneira seu fluxo $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ associado ao campo Z es definido por

$$\varphi(T, z) = (e^{\lambda_1 T} z_1, e^{\lambda_2 T} z_2), \quad \text{onde } z = (z_1, z_2).$$

A órbita de um ponto $z \in \mathbb{C}^2$, $\mathcal{O}(z)$, é dado por

$$\mathcal{O}(z) = \{\varphi(T, z); T \in \mathbb{C}\}$$

e a folheação por curvas de $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{F}$, é dado por

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{O}(z); z \in \mathbb{C}^2\}.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{C}^*$, consideremos $\varphi^\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por

$$\varphi^\alpha(t, z) = \varphi(t\alpha, z) = (e^{t\alpha\lambda_1} z_1, e^{t\alpha\lambda_2} z_2)$$

chamado **fluxo real induzido por φ na direção α** . Assim $\mathcal{O}(1, 0) = \mathbb{C}^* \times \{0\}$ é uma folha de $\mathcal{F}$, logo $\gamma_1(t) = (e^{it}, 0)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, é uma curva fechada da folha

$\mathcal{O}(1,0)$. Segue-se que o cilindro $\Gamma_1 = S^1 \times \mathbb{C}$ é invariante por φ^{α_1} onde $\alpha_1 = \frac{i}{\lambda_1}$, isto é, se $z \in \Gamma_1$ então $\varphi^{\alpha_1}(t, z) \in \Gamma_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $\Sigma_1 = \{1\} \times \mathbb{C} \approx \mathbb{C}$ a seção transversal a $\mathcal{O}(1,0)$ no ponto $(1,0)$, vamos achar a holonomia de γ_1 com respeito a Σ_1 . Seja $(1, w) \in \Sigma_1$, então

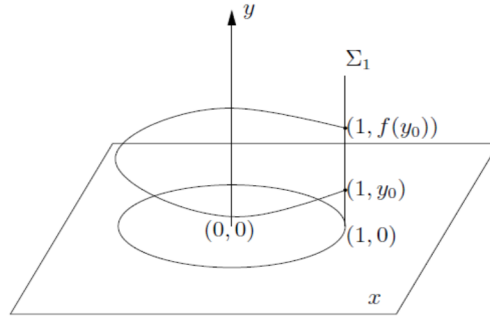
$$\varphi\left(\frac{it}{\lambda_1}, (1, w)\right) = (e^{it}, e^{it\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} w), \text{ para todo } t \in [0, 2\pi].$$

Para uma volta completa temos que

$$\varphi\left(\frac{2\pi i}{\lambda_1}, (1, w)\right) = (e^{2\pi i}, e^{2\pi i\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} w) = (1, e^{2\pi i\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} w).$$

Como consequência, podemos definir a aplicação holonomia da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto e^{2\pi i\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} w \end{aligned}$$



Analogamente, se consideramos a folha $\mathcal{O}(0,1) = \{0\} \times \mathbb{C}^*$ de $\mathcal{F}$, o cilindro $\Gamma_2 = \mathbb{C} \times S^1$ e a curva fechada $\gamma_2(t) = (0, e^{it})$, $t \in \mathbb{R}$, podemos construir a holonomia de γ_2 com respeito à seção transversal $\Sigma_2 = \mathbb{C} \times \{1\} \approx \mathbb{C}$ dado por

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto e^{2\pi i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} w \end{aligned}$$

1.8 Folheação linear em T^n

Primeiro consideremos G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie e Γ subgrupo de discreto. Definimos a ação

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma \times G/H &\rightarrow G/H \\ (\gamma, gH) &\mapsto (\gamma gH) \end{aligned}$$

a órbita de gH é dada por

$$\mathcal{O}_{gH} = \{\psi(\gamma, gH); \gamma \in \Gamma\},$$

logo a folheação de G/H é dada por

$$\mathcal{F}_{G/H} = \{\mathcal{O}_{gH}; g \in G\} = \{\Gamma gH; g \in G\}.$$

Temos definida outra ação

$$\begin{aligned} \phi: G/\Gamma \times H &\rightarrow G/\Gamma \\ (\Gamma g, h) &\mapsto (\Gamma gh) \end{aligned}$$

a órbita de Γg é dada por

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma g} = \{\phi(\Gamma g, h); h \in H\},$$

logo a folheação de G/Γ é dada por

$$\mathcal{F}_{G/\Gamma} = \{\tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma g}; g \in G\} = \{\Gamma gH; g \in G\}.$$

Assim temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \pi_\Gamma \swarrow & & \searrow \pi_H \\ G/\Gamma & \xleftarrow{i} & G/H \end{array}$$

Dado $g \in G$ temos

$$\begin{aligned} \Sigma: H &\rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma g} \\ h &\mapsto \Gamma gh \end{aligned}$$

está aplicação será injetiva? em geral não pois se $\Gamma gh_1 = \Gamma gh_2$ então $gh_1 = \gamma gh_2$ para algum $\gamma \in \Gamma$, logo $h_1 = g^{-1}\gamma gh_2$. Assim supondo que $g^{-1}\gamma gh \in H$ com $\gamma \in \Gamma$ temos que

$$\Sigma(g^{-1}\gamma g) = \Gamma g g^{-1}\gamma g = \Gamma g = \Gamma g$$

isto nos diz que $(g^{-1}\Gamma g) \cap H$ é um subgrupo de H dali $\Sigma((g^{-1}\Gamma g) \cap H) \subset \tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma g}$. Não é difícil mostrar que existe um difeomorfismo entre o chamado espaço homogêneo $H/((g^{-1}\Gamma g) \cap H)$ e $\tilde{\mathcal{O}}_{\Gamma g}$. No caso particular, tomamos $G = \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, $H = V$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão p então temos a **folheação linear em $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de dimensão p** dada por

$$\mathcal{F}_{T^n} = \{x + V + \mathbb{Z}^n; x \in \mathbb{R}^n\}$$

e pelo visto anteriormente $\mathcal{F}_{T^n}$ é difeomorfo a $V/(V \cap \mathbb{Z}^n)$. Note que $V \cap \mathbb{Z}^n$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}^n$ então $V \cap \mathbb{Z}^n$ é um grupo abeliano livre de posto r para algum $r \leq n$ (pelo Teorema fundamental de grupos abelianos finitamente gerados).

Afirmo que $V/(V \cap \mathbb{Z}^n)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^{p-r} \times T^r$. De fato como a dimensão de V é p se apresentam dois casos: se $V \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ então acabou pois $V/(V \cap \mathbb{Z}^n) \cong V \cong \mathbb{R}^p$. Agora se $V \cap \mathbb{Z}^n \neq \{0\}$ pelo Teorema fundamental de grupos abelianos finitamente gerados

$$V \cap \mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}v_i$$

onde $v_i \in V \cap \mathbb{Z}^n$ para todo $i = 1, \dots, r$. Vejamos que $\{v_1, \dots, v_r\}$ é $\mathbb{Z}$ -linearmente independente o que implicaria que é $\mathbb{R}$ -linearmente independente. Suponhamos que $\{v_1, \dots, v_r\}$ é $\mathbb{Z}$ -linearmente dependente, logo existe $x \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$, $x = (x_1, \dots, x_r)$ tal que $\sum_{i=1}^r x_i v_i = 0$. Seja $\{u_1, \dots, u_p\}$ uma $\mathbb{R}$ -base de V então para cada $i = 1, \dots, r$

existe $\{a_{ij}\}_{j=1}^p \in \mathbb{R}$ tal que $v_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}u_j \in \mathbb{Z}^n$ então $\sum_{i=1}^r x_i \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}u_j \right) = 0$ logo $\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^r a_{ij}x_i \right) u_j = 0$ isto no diz que $\sum_{i=1}^r a_{ij}x_i = 0$ para todo $j = 1, \dots, p$. Se denotamos $A = (a_{ij})_{p \times r}$ e representamos $x = (x_j)_{r \times 1}$ temos que $Ax = 0$ então $x \notin \mathbb{Z}^r$ o qual é uma contradição por tanto $\{v_1, \dots, v_r\}$ é $\mathbb{R}$ -linearmente independente e como $V \cap \mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}v_i \subset V$ então $r \leq \dim(V) = p$. Assim podemos completar a base de modo

que $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}\}$ de V dali temos que $V = \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{R}v_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{p-r} \mathbb{R}u_i$ então

$$\begin{aligned} \frac{V}{V \cap \mathbb{Z}^n} &= \frac{\bigoplus_{j=1}^r \mathbb{R}v_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{p-r} \mathbb{R}u_i}{\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}v_i} \cong \left(\bigoplus_{j=1}^r \frac{\mathbb{R}v_j}{\mathbb{Z}v_j} \right) \oplus \bigoplus_{i=1}^{p-r} \mathbb{R}u_i \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^r \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \right) v_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{p-r} \mathbb{R}u_i \cong T^r \times \mathbb{R}^{p-r} \end{aligned}$$

Por tanto podemos pensar $\mathcal{F}_{T^n} = T^r \times \mathbb{R}^{p-r}$.

1.9 Fibrados de Seifert de Dimensão três

Definição 1.9.1. Um **espaço fibrado** consiste de variedades E, B, F e de uma aplicação diferenciável $\pi : E \rightarrow B$. Além disso E possui uma estrutura de produto local definida por uma cobertura $\{U_i\}_{i \in J}$ por abertos de B e por difeomorfismos $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, que tornam os diagramas do tipo abaixo comutativos

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow p & \\ & U_i & \end{array}$$

isto é, $\pi = p \circ \varphi_i$, onde p é a primeira projeção. Em particular, π é uma submersão sobre B e E é localmente difeomorfo ao produto de um aberto em B por F . O espaço E é chamado **espaço total**, B a **base** e F a **fibra** do fibrado. A aplicação π é chamada de **projeção**. Se $x \in B$, a subvariedade $F_x = \pi^{-1}(x) \cong F$ é chamada de **fibra de E sobre x** . Usualmente os fibrados são denotados por (E, π, B, F) . Caso não exista perigo de confusão, denotaremos o fibrado simplesmente por E . Além disso, admitiremos que E é de classe C^∞ , isto é, todas as variedades e aplicações envolvidas na definição de fibrado serão consideradas C^∞ .

Dados $i, j \in J$ tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, podemos definir $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Diff}(F)$ de tal forma que a aplicação Φ_{ij} , a qual faz o diagrama abaixo comutar

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ \varphi_i \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ (U_i \cap U_j) \times F & \xrightarrow{\Phi_{ij}} & (U_i \cap U_j) \times F \end{array}$$

se escreve $\Phi_{ij}(x, y) = (x, h_{ij}(x, y))$. Para cada $x \in U_i \cap U_j$, a aplicação $h_{ij}^x : F \rightarrow F$ é dada por $h_{ij}^x(y) = h_{ij}(x, y)$ é claramente um difeomorfismo. Colocamos então $g_{ij}(x) = h_{ij}^x$.

Quando F e as fibras são espaços vetoriais e todos os h_{ij}^x são automorfismos lineares de F , dizemos que E é um **espaço fibrado vetorial**. Dizemos que o espaço fibrado E tem **grupo estrutural discreto** se, para quaisquer i e j , a aplicação $x \rightarrow h_{ij}^x$ é localmente constante. Quando E tem grupo estrutural discreto as folheações de $\pi^{-1}(U_i)$ dadas pelas submersões

$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times F \xrightarrow{q} F,$$

onde $q(x, y) = y$, definem as aplicações distinguidas de uma folheação cujas folhas são transversais às fibras de E . As placas da folheação em $\pi^{-1}(U_i)$ são os conjuntos $(q \circ \varphi_i)^{-1}(y)$, $y \in F$.

Exemplo 1.9.1. (O Espaço Fibrado tangente) Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ . Para cada $p \in M$ seja $T_p M$ o espaço de vetores tangentes a M em p , e

$$TM = \{(p, v_p); p \in M, v_p \in T_p M\}.$$

Se $\pi : TM \rightarrow M$ é dada por $\pi(p, v_p) = p$ então $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ é um espaço fibrado vetorial de classe C^∞ .

Exemplo 1.9.2. (O Espaço Fibrado Normal) Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um métrica Riemanniana em M^m e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade de M . Dado $p \in M$, seja $T_p N^\perp \subset T_p M$ o subespaço de vetores normais a $T_p N$; definimos $\nu(N) = \{(p, v_p); p \in N, v_p \in T_p N^\perp\}$ e $\pi : \nu(N) \rightarrow N$ dada por $\pi(p, v_p) = p$. Então $(\nu(N), \pi, N, \mathbb{R}^{m-n})$ é um espaço fibrado vetorial.

Exemplo 1.9.3. (O Espaço Fibrado dos Vetores Unitários Tangentes) Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um métrica Riemanniana em M^n e $T^1 M = \{(p, v_p); p \in M, v_p \in T_p M, |v_p| = 1\}$. Indiquemos por $\pi : T^1 M \rightarrow M$ a aplicação $\pi(p, v_p) = p$. Então $(T^1 M, \pi, M, S^{n-1})$ é um espaço fibrado cuja fibra é a esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \approx T_p M$.

Exemplo 1.9.4. Sejam M uma variedade compacta, conexa e $\mathcal{F}$ uma folheação transversalmente orientável de codimensão um de M que possui uma folha F compacta com grupo fundamental finito. Então as folhas de $\mathcal{F}$ são as fibras de um espaço fibrado com base S^1 , fibra F e grupo estrutural discreto.

Definição 1.9.2. Seja $\pi : E \rightarrow B$ a projeção de um espaço fibrado de fibra F . Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ de E é **transversal às fibras** quando satisfaz às propriedades seguintes:

- 1) Para todo $p \in E$ a folha L_p de $\mathcal{F}$ que passa por p é transversal à fibra $F_{\pi(p)}$ e $\dim(\mathcal{F}) + \dim(F) = \dim(E)$.
- 2) Para toda folha L de $\mathcal{F}$, $\pi|_L : L \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento.

Decorre da definição que para todo $p \in E$ tem-se

$$T_p E = T_p(L_p) \oplus T_p(F_{\pi(p)}).$$

Uma observação importante devida a Ehresman é a seguinte: Suponhamos que a fibra F é compacta, neste caso (1) implica (2).

Quando $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^r ($r \geq 1$), transversal às fibras de E , existe uma representação

$$\varphi : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Dif}^r(F) \cong \text{Dif}^r(\pi^{-1}(b))$$

do grupo fundamental $\pi_1(B, b)$ no grupo de difeomorfismos de classe C^r de F , $\text{Dif}^r(F)$, denominada holonomia de $\mathcal{F}$, a qual definimos a seguir.

Sejam $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b$ e $y \in \pi^{-1}(b)$. Como $\pi|_{L_y} : L_y \rightarrow B$ é um recobrimento, existe um único caminho $\tilde{\alpha}_y : [0, 1] \rightarrow L_y$ tal que $\tilde{\alpha}_y(0) = y$ e $\pi \circ \tilde{\alpha}_y = \alpha^{-1}$. Se identificamos $\pi^{-1}(b)$ como F , podemos definir uma aplicação $\varphi_\alpha : F \rightarrow F$ por $\varphi_\alpha(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$.

Como o ponto final da curva $\tilde{\alpha}_y$ só depende da classe de homotopia de α^{-1} , segue-se que $\varphi_\alpha(y)$ só depende da classe de homotopia de α^{-1} e podemos escrever $\varphi_\alpha = \varphi_{[\alpha]}$. Além disso, $\varphi_{[\alpha]^{-1}} = (\varphi_{[\alpha]})^{-1}$ e se $[\beta] \in \pi_1(B)$, $\varphi_{[\alpha*\beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$. Verifica-se facilmente que $\varphi_{[\alpha]}$ é de classe C^r . Como $\varphi_{[\alpha]}$ possui uma inversa $\varphi_{[\alpha]}^{-1}$ que é também de classe C^r , $\varphi_{[\alpha]}$ é um difeomorfismo C^r . Logo, $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}^r(F)$ dada por $\varphi([\alpha]) = \varphi_{[\alpha]}$ é o homomorfismo de grupo desejado.

Anteriormente vimos um exemplo simples de folheação holomorfa transversal às fibras de um fibrado. Este é o da suspensão de um difeomorfismo $f : F \rightarrow F$ a uma folheação de dimensão um do espaço quociente $E = F \times [0, 1] / \sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência que identifica $(0, y)$ com $(1, f^{-1}(y))$. Esta folheação é a induzida em E pela folheação trivial de $F \times [0, 1]$ com folhas $\{x\} \times [0, 1]$, $x \in F$. O espaço E é fibrado sobre S^1 com grupo estrutural discreto já que podemos tomar como cartas locais de E os quocientes $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ de $U = (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \times F$, $V = ([0, 2\varepsilon] \cup (1 - 2\varepsilon, 1]) \times F$. Então $\tilde{U} \cap \tilde{V}$ tem duas componentes conexas W_{12} , W_{21} e $g_{12} : W_{12} \rightarrow \text{Dif}(F)$, $g_{21} : W_{21} \rightarrow \text{Dif}(F)$ estão dadas por $g_{12}(x) = Id$ e $g_{21}(x) = f$.

Uma pergunta natural é a seguinte: como se generaliza a construção de acima ao caso em que temos uma representação $\varphi : G \rightarrow \text{Dif}^r(F)$ (isto é, um homomorfismo de grupos), onde G é um grupo? como já vimos anteriormente, G deve ser o grupo fundamental da base B . Mais especificamente o problema é o seguinte: dadas duas variedades F , B e uma representação $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}^r(F)$ determinar uma variedade $E(\varphi)$, fibrada sobre B com fibra F , e uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de E tais que a holonomia de $\mathcal{F}(\varphi)$ seja φ .

Teorema 1.9.1. (*Suspensão de uma representação*) *Sejam B e F variedades conexas e $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}^r(F)$ uma representação. Então existem um espaço fibrado $(E(\varphi), \pi, B, F)$ e um folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de $E(\varphi)$ cuja holonomia é φ . O fibrado $E(\varphi)$ tem grupo estrutural discreto.*

Definição 1.9.3. *Dizemos que duas representações $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Dif}^r(F)$ e $\varphi' : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Dif}^r(F')$ são C^s conjugadas se existe um difeomorfismo C^s (caso $s \geq 1$) ou homeomorfismo ($s = 0$), $h : F \rightarrow F'$ tal que, para todo $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$, temos $\varphi([\alpha]) = h^{-1} \circ \varphi'([\alpha]) \circ h$.*

Teorema 1.9.2. (*Unicidade da suspensão*) *Sejam φ e φ' C^s conjugadas como acima. Existe um difeomorfismo C^s , $H : E(\varphi) \rightarrow E(\varphi')$ (homeomorfismo se $s = 0$), tal que*

- (1) $\pi' \circ H = \pi$ e conseqüentemente H leva fibras de $E(\varphi)$ em fibras de $E(\varphi')$.
- (2) H leva folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$ sobre folhas de $\mathcal{F}(\varphi')$.

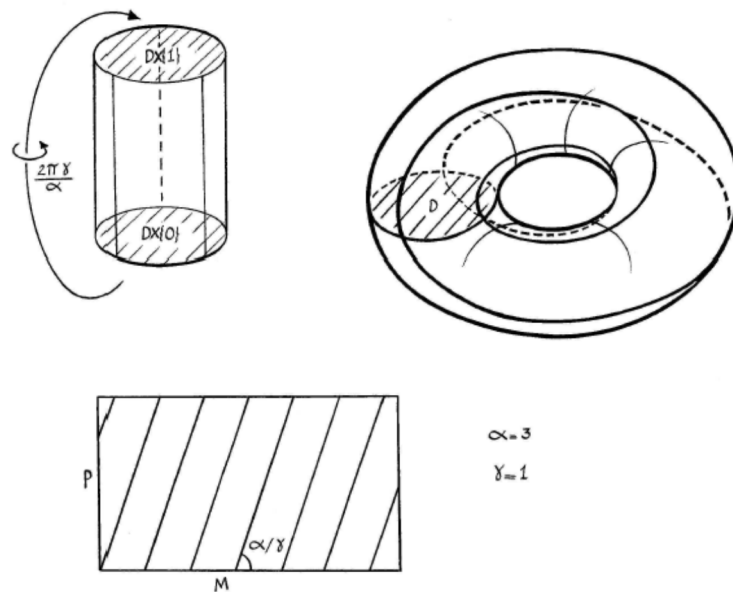
Definição 1.9.4. *Seja M uma 3-variedade compacta orientada. Um **campo planar** E em M é um subfibrado do fibrado tangente TM que associa suavemente a cada ponto $p \in M$ um subespaço 2-dimensional de $E(p) \subset T_p M$.*

Agora definiremos Fibrado de Seifert de dimensão três a qual chamaremos simplesmente de Fibrado de Seifert. Para definir essa estrutura, consideramos inicialmente o toro sólido e a garrafa de Klein sólida com folheações por círculos que descrevemos a partir de agora. Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $I = [0, 1]$. Considere $D \times I$ com orientação fixa e com folheação produto $\{x\} \times I$, $x \in D$, cujas folhas chamaremos de **fibras**. No que se segue, faremos identificações nos extremos de $D \times I$ de forma de obter toros sólidos e garrafas de Klein sólidas com folheações por círculos induzidas, que chamaremos **toros fibrados** e **garrafas de Klein fibradas**, cujas folhas também serão chamadas de fibras.

Toro Fibrado:

Seja $\rho : D \rightarrow D$ uma rotação em torno da origem de $\mathbb{R}^2$ por um ângulo $2\pi\gamma/\alpha$, onde $\alpha > 0$, e $\gamma \geq 0$ são inteiros primos entre si. Se fizermos a identificação $(x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ em $D \times I$, teremos um toro T_ρ com folheação induzida por $\{x\} \times I$, o chamado toro fibrado. Se $\gamma = 0$, $T_\rho = T_{id}$, chamado toro fibrado trivial, herda a folheação produto $\{x\} \times S^1$. Se $\gamma > 0$, T_ρ é denotado por $T_{\alpha,\gamma}$. Nesse caso, se $x = 0$, essa identificação apenas liga os extremos da fibra central $\{0\} \times I$, resultando em um único círculo central $\{0\} \times S^1$. Se $x \in D - \{0\}$, cada folha $\{\rho^j(x)\} \times I$, $j = 0, \dots, \alpha - 2$, é ligada à folha $\{\rho^{j+1}(x)\} \times I$ e a folha $\{\rho^{\alpha-1}(x)\} \times I$ é ligada à folha $\{\rho^0(x)\} \times I = \{x\} \times I$, sempre resultando em um único círculo em $T_{\alpha,\gamma}$. Este círculo intercepta $D \times \{0\} \sim D \times \{1\}$ em α pontos diferentes e dá γ voltas em torno da fibra central. Na Figura da abaixo, que ilustra isso, o bordo de $T_{\alpha,\gamma}$, que é um toro bi-dimensional, é representado por um retângulo, onde os lados horizontais são identificados, resultando no meridiano M , assim como os verticais, que resultam no paralelo P . Neste retângulo, as fibras, se supostas lineares, têm inclinação α/γ .

Observe que se α' divide α , $T_{\alpha',\gamma}$ é um recobrimento por α/α' folhas de $T_{\alpha,\gamma}$. Além disso, o espaço das fibras de $T_{\alpha,\gamma}$, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada fibra a um ponto, é uma orbifold, um cone de ângulo $2\pi/\alpha$. O que acontece é que $T_{\alpha,\gamma}$ é o quociente do toro fibrado trivial T_{id} pela ação de $\mathbb{Z}_\alpha$ na qual seu gerador age por rotação por γ/α de volta na primeira coordenada e por $1/\alpha$ de volta na segunda coordenada. Essa ação desce ao disco D resultando no cone de ângulo $2\pi/\alpha$. No caso do toro fibrado trivial, o espaço de fibras é o próprio disco D .

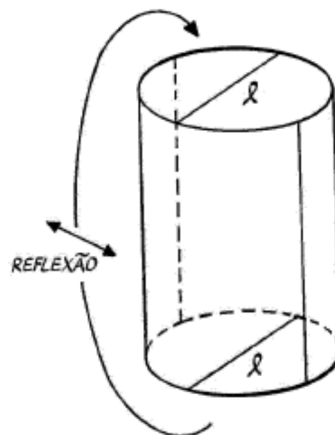


Garrafa de Klein Fibrada

Se $\rho : D \rightarrow D$ for uma reflexão em um diâmetro $l \subset D$, a identificação $(x, 1) \sim (\rho(x), 0)$ resulta em uma garrafa de Klein K_ρ , dita garrafa de Klein fibrada, e a folheação induzida por $\{x\} \in I$ é descrita como se segue. Cada fibra $\{x\} \times I$, com $x \in D \setminus l$, é ligada à fibra $\{\rho(x)\} \times I$, oposta em relação a l , formando um único círculo. Estas fibras interceptam $D \times \{0\} \approx D \times \{1\}$ em dois pontos opostos em relação a $l \times \{0\}$. As fibras que interceptam o subconjunto $l \times \{0\}$ interceptam $D \times \{0\}$ num único ponto cada uma.

Observe que T_{id} recobre K_ρ por duas folhas. Na realidade, K_ρ é o quociente de T_{id} pela ação de $\mathbb{Z}_2$ na qual seu gerador age por reflexão em l na primeira coordenada e por rotação por $1/2$ de volta na segunda coordenada.

Essa ação desce ao disco D resultando um disco com uma linha refletora, que é o espaço de fibras de K_ρ (Como mostra a figura de abaixo).



Daqui para frente, um homeomorfismo que preserva fibras será dito um **isomorfismo**. Observe que todas as garrafas de Klein fibradas são isomorfas entre si. Além disso, é fácil ver que $T_{\alpha, \gamma}$ é isomorfo a $T_{\alpha', \gamma'}$, por um isomorfismo que preserva orientações da variedade e das fibras, se e só se

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \gamma' \equiv \gamma \pmod{\alpha} \end{cases}$$

O par (α, γ) , com $0 < \gamma < \alpha$ primos entre si, define a classe de toros fibrados isomorfos a $T_{\alpha, \gamma}$ e é dito os invariantes de órbita dessa classe. Definimos os invariantes de órbita do toro fibrado trivial como $(1, 0)$. Frequentemente nos referiremos aos invariantes de órbita não normalizados, o que significa que não estaremos impondo, a α e γ , a condição $0 < \gamma < \alpha$.

Definição 1.9.5. *Um **fibrado de Seifert** (de dimensão três) é uma variedade de dimensão três com uma decomposição por círculos, ditos fibras, tal que cada fibra possui uma vizinhança tubular isomorfa ou a um toro fibrado ou a uma garrafa de Klein fibrada.*

Passamos agora a dar um exemplo de fibrado de Seifert. Considere C_λ , $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ interseção da reta complexa $\{(z, \lambda z) \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C}\}$, se $\lambda \in \mathbb{C}$, ou $\{(0, z) \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C}\}$, se $\lambda = \infty$, com $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Mostremos que C_λ é um círculo. As equações de C_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, são:

$$\begin{cases} |z|^2 + |w|^2 = 1 \\ w = \lambda z \end{cases}$$

Resolvendo para z e para w temos:

$$\begin{cases} |z|^2 = \frac{1}{1 + |\lambda|^2} \\ |w|^2 = \frac{|\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2} \end{cases}$$

Logo, $e^{it}(z_0, \lambda z_0) = (e^{it}z_0, e^{it}\lambda z_0)$, $t \in [0, 2\pi]$, onde $\frac{1}{\sqrt{1 + |\lambda|^2}}$, é uma parametrização de C_λ . Se $\lambda = \infty$, essa parametrização é $e^{it}(1, 0) = (e^{it}, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Os círculos C_λ , $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, determinam uma folheação de S^3 cujo espaço de folhas, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada folha a um ponto, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2$. Essa folheação é um fibrado de Seifert, dito o **fibrado de Hopf**, com duas fibras, $C_1 = \{(e^{it}z, 0); t \in S^1\} \subset \mathbb{C} \times \{0\}$ e $C_2 = \{(0, e^{it}z); t \in S^1\} \subset \{0\} \times \mathbb{C}$, com invariantes de órbita não normalizados $(1, 1)$ (e $(1, 0)$ quando normalizados). Isso porque cada fibra próxima de C_i ; $i = 1, 2$, dá uma volta em torno desta no sentido positivo determinado pelas orientações canônicas de $\mathbb{C} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{C}$. As demais fibras têm invariantes de órbita não normalizados $(1, 0)$ (e normalizados também).

1.10 Conceitos geométricos

No que segue, M denotará uma variedade suave conexa. Um **domínio** em M é um subconjunto aberto e conexo de M . Um **domínio limitado** é um domínio D tal que $\bar{D}$ é compacto, e um **domínio regular** é um domínio cujo bordo em M , se é não vazio, é uma subvariedade suave de codimensão um. Então um domínio limitado regular é o interior de uma variedade compacta com bordo.

A seguinte notação para espaços de funções associados a um domínio D em M é muito usado. Como é usual, $C^0(D) = C(D)$ denota o espaço de funções contínuas em D , e $C_0(D)$ é o espaço de funções contínuas que desaparecem no infinito. O espaço de funções em D tal que são k -vezes diferenciáveis com k derivadas contínuas em $\bar{D}$ é denotado por $C^k(D)$, e $C^k(\bar{D})$ denota o espaço de funções em $\bar{D}$ que estendem funções C^k numa vizinhança de

$\bar{D}$ em M . Finalmente, $\bar{C}^k(D)$ é o espaço de funções que estão em $C^k(D)$ e cujas derivadas de ordem menor ou igual que k estendem continuamente a $\bar{D}$.

Seja g um tensor métrico definido em M e denotemos por vol ao volume forma. A expressão de g em coordenadas locais $x_1, \dots, x_n$ em M , onde $n = \dim M$, é da forma

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i \otimes dx_j,$$

onde cada $g_{ij} = g_{ji}$ é uma função suave de coordenadas $x_1, \dots, x_n$, e a matriz $g = (g_{ij})$ é definida positiva. As entradas da matriz inversa são denotadas por g^{ij} . O volume de forma vol tem a expressão local

$$vol = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

onde $|g| = \det(g)$. O volume forma vol define uma medida em M , tipicamente denotamos por mero gusto dx às integrais.

O tensor métrico g define um produto interno assinando a dois vetores v e w (tangentes a M no mesmo ponto) o número $g(v, w)$, a quantidade obtida é abreviada por $\langle v, w \rangle$. Se v e w são campos de vetores em M , então $\langle v, w \rangle$ é uma função suave em M .

O **gradiente** de uma função suave f em M é um campo vetorial dual à 1-forma df com respeito ao tensor métrico g . Isto é,

$$\langle grad f, v \rangle = v(f) = df(v),$$

para qualquer campo vetorial v em M . Em coordenadas locais,

$$grad f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

A divergência de um campo vetorial v em X é a função $div f$ em M definida por

$$div v(x) = tr(w \mapsto \nabla_w v),$$

onde $w \in T_x M$, e ∇ é a conexão Levi-Civita de g . Se a expressão local de $v = \sum_i h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, então

$$div v = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h_i \sqrt{|g|} \right).$$

Definição 1.10.1. O **Laplaciano** de uma função de classe C^2 em M é uma função Δf definida por

$$\Delta f = div grad f$$

A expressão local para o Laplaciano de uma função f é

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

O Laplaciano é um operador linear diferencial de segundo ordem no espaço $C^\infty(M)$.

Definição 1.10.2. Uma função f é dita **harmônica** se f de classe C^2 e $\Delta f \equiv 0$

O **raio de injetividade** $i(x)$ em um ponto x numa variedade Riemanniana M é o supremo dos números $r > 0$ para os quais

$$\exp_x : B(0_x, r) \subset T_x M \rightarrow B(x, r) \subset M$$

é um difeomorfismo. Aqui, claramente, $B(\xi, r)$ denota a bola métrica de raio r em a direção do espaço, centrado em ξ .

Uma variedade Riemanniana M é dito que tem **geometria limitada** se é completa e existem números $r > 0$ e a, b tais que o raio de injetividade em todo ponto é maior ou igual a r e toda curvatura seccional pertencem ao intervalo $[a, b]$.

Proposição 1.10.1. *Seja $(M, \mathcal{F})$ um espaço folheado com tensor métrico suave. Toda folha de M é uma variedade Riemanniana de geometria limitada. De fato, o raio de injetividade e curvatura seccional de todas as folhas são uniformemente limitados.*

Demonstração: Ver [10] pagina 429.

1.11 Medida harmônica

Todos os resultados desta seção estão demonstrados em [10].

Seja $(M, \mathcal{F})$ um espaço folheado. Sempre é possível dotar M com um tensor métrico nas folhas suaves. Uma carta folheada $U = D \times Z$ para $(M, \mathcal{F})$, com coordenadas $(x, z) = (x^1, \dots, x^n, z)$ ($n = \dim \mathcal{F}$ sendo a dimensão da folha), tal que o tensor métrico tem expressão local

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x^1, \dots, x^n, z) dx^i \otimes dx^j,$$

onde a matriz de funções suaves (g_{ij}) é simétrica e definida positiva. Se (g^{ij}) denota à inversa da matriz e $|g|$ é o determinante, então o Laplaciano $\Delta f = \text{div} \circ \text{grad } f$ tem expressão local

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

Isto é,

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} + \text{termos de primeira ordem},$$

e Δ é um operador elíptico de segunda ordem que se anula em constantes.

O tensor métrico g em $(M, \mathcal{F})$ induz um tensor métrico em cada folha L de M , $g|_L$, e isto tem o correspondente Laplaciano $\Delta_L = \Delta|_L$. Se f é uma função em M tal que é de classe C^2 em cada folha, então Δ é agregado ao Laplaciano das folhas $\Delta_L f$. Isto é, Δ é definido nas funções contínuas f em M que são de classe C^2 em cada folha e são tais que Δ seja uma função continua em M .

Definição 1.11.1. *Seja $(M, \mathcal{F})$ um espaço folheado com tensor métrico g e Laplaciano correspondente Δ . A medida m em M é dita **harmônica** se*

$$\int_M \Delta f(x) \cdot m(x) = 0,$$

para toda $f \in C(M)$ que é de classe C^2 ao longo de cada folha e tal que Δf é contínuo.

Um tensor métrico em M induz uma medida em cada folha, chamada **medida Riemanniana de volume por folhas**. Isto é, a coleção de todas as medidas de Borel Vol_L nas folhas L de $\mathcal{F}$ as quais são unicamente determinadas por os seguintes, em cada domínio limitado $D \subset L$, $vol_L(D)$ é o volume Riemanniano em D , calculado como a integral sobre D da densidade de volume de $g|_L$.

Lema 1.11.1. *Seja M um variedade com tensor métrico g , e seja Δ o Laplaciano associado. Se f é uma função em M que é de classe C^2 e $y_0 \in M$ é um ponto máximo local de f , então $\Delta f(y_0) \leq 0$. Analogamente, se y_0 é um mínimo local de f , então $\Delta f(y_0) \geq 0$.*

Quando M é compacto, $C(M)$, o espaço das funções contínuas em M com valores reais, é um espaço de Banach (real) com a norma uniforme. Denotemos por $\mathbf{1}$ a função constante $\mathbf{1}(x) = 1$ em M .

Corolário 1.11.1. *Seja M espaço compacto folheado com tensor métrico e correspondente Laplaciano. Então o fecho do rango de Δ em $C(M)$ não contém a função constante $\mathbf{1}$.*

A versão do teorema de Hahn-Banach que se necessita aqui é o seguinte.

Teorema 1.11.1. *Seja E um subespaço linear do espaço de Banach $C(M)$, e seja $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear de norma λ . Então ϕ é estendido a um funcional linear contínuo $C(M) \rightarrow \mathbb{R}$ com a mesma norma como ϕ .*

Lema 1.11.2. *Um funcional linear contínuo $\phi : C(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por a integral com respeito à medida de probabilidade m em M se e só se $\|\phi\| = 1$ e $\phi(\mathbf{1}) = 1$.*

Teorema 1.11.2. *Um espaço métrico compacto folheado, dotado com um tensor métrico, sempre admite uma medida de probabilidade harmônica.*

Se M é um espaço compacto folheado com tensor métrico g , então cada folha L com a métrica $g|_L$ é uma variedade Riemanniana compacta com geometria limitada. Isto é, tem um limite inferior, tanto para o raio de injetividade e a curvatura seccional.

Uma variedade L com geometria limitada e com Laplaciano Δ , a equação difusa do calor é introduzido como segue. Se f é uma função contínua limitada em L , a equação do calor em L com condição inicial f pede uma solução limitada $u \in C^{2,1}(L \times (0, \infty))$ para a equação diferencial parabólica

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t)$$

tal que, subconjuntos compactos convergem uniformemente em L , $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ (o qual por abreviação se escreve $u(x, 0) = f(x)$). Existe um teorema fundamental tal que a solução existe e é única (ver [10]).

A equação do calor em $(L, g|_L)$ admite uma solução fundamental, chamada o **núcleo do calor**. Esta função $p(x, y; t)$ é tal que, para cada $y \in L$, satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, y; t) = \Delta_x p(x, y; t)$$

e tem a propriedade que, se f é uma função limitada em L , então

$$D_{L,t} f(x) = \int_L f(y) p(x, y; t) \cdot dy$$

é a solução limitada da equação do calor em L com condição inicial f . Estes operadores $D_{L,t}$ formam o que é chamado semigrupo de operadores de difusão da variedade (L, g) .

O total de estes vários semigrupos $D_{L,t}$, com L a folha de M , define um semigrupo D_t de operadores de funções em M .

Definição 1.11.2. O semigrupo D_t é chamado **semigrupo de difusão** de (M, g) .

Se f é uma função adequada no espaço folheado M , então $D_t f$ é definido como a função que, em o ponto $x \in M$, tem o valor prescrito por a difusão de f na folha L_x através de x , isto é,

$$D_t f(x) = \int_{L_x} f(y) p(x, y; t) \cdot dy,$$

onde $p(x, y; t)$ é o núcleo do calor da variedade Riemanniana $(L_x, g|_{L_x})$.

Definição 1.11.3. Seja $(M, \mathcal{F})$ um espaço folheado compacto, e seja $C(M)$ denotando ao espaço de Banach de funções contínuas com a norma do supremo. Um **semigrupo de operadores em** $C(M)$ é uma família $T_r : C(M) \rightarrow C(M)$, $r \geq 0$, de operadores lineares positivos em $C(M)$ (isto é, $T_r f \geq 0$ se $f \geq 0$) com as seguintes propriedades.

- (1) Para todo $r \geq 0$, $\|T_r\| \leq 1$ e $T_0 = \text{identidade}$.
- (2) Para todo $r, s \geq 0$, $T_{r+s} = T_r \circ T_s$.
- (3) Para qualquer função $f \in C(M)$, o limite $\lim_{r \rightarrow 0} \|T_r f - f\| = 0$.

Associado a um semigrupo de operadores $\{T_r\}_{r \geq 0}$ como na definição, há um **gerador infinitesimal**, o qual é um operador A definido por

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t f - f),$$

quando a função f é tal que o limite de acima existe uniformemente em M . A coleção de todas as tais funções f formam um subespaço linear de $C(M)$, chamado **domínio de** A .

A definição de semigrupo implica que a função

$$r \in [0, \infty) \rightarrow T_r f \in C(M)$$

é uma norma continua.

Um mapa $\phi : [a, b] \rightarrow C(M)$ é diferenciável em $s \in (a, b)$ se o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t+s) - \phi(s)}{t}$$

existe em $C(M)$. Isto é, existe uma função $f \in C(M)$ tal que a família de funções

$$\frac{\phi(t+s) - \phi(s)}{t}$$

converge uniformemente para f em M quando $t \rightarrow 0$. A função $\phi : (a, b) \rightarrow C(M)$ é diferenciável em (a, b) se é diferenciável em cada ponto de (a, b) . Está derivada é denotada

$$\frac{d}{dt} \phi.$$

Derivada em à direita de a (respectivamente esquerda de b) são também definidos no modo obvio, dando uma noção de diferenciabilidade em $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$.

Se $\phi : [a, b] \rightarrow C(M)$ é função contínua então existe um elemento de $C(M)$, denotado por

$$\int_b^a \phi(t) \cdot dt,$$

chamada a integral de ϕ . Em geral, a integral é definida por aproximação uniforme de ϕ por funções simples.

Teoremas estâdardes de cálculo de funções real valoradas continuam sendo verdade para funções com valores vetoriais. Dois fatos básicos são os seguintes.

Proposição 1.11.1. *Seja $\phi : [a, b] \rightarrow C(M)$ uma função.*

(1) *Se ϕ é contínua, então*

$$\left\| \int_b^a \phi(t) \cdot dt \right\| \leq \int_b^a \|\phi(t)\| \cdot dt.$$

(2) *Se ϕ é diferenciável com derivada contínua $\frac{d}{dt}\phi$ em $[a, b]$, então $\frac{d}{dt}\phi$ é integrável e, para $s \in [a, b]$,*

$$\phi(s) - \phi(a) = \int_a^s \frac{d}{dt}\phi(t) \cdot dt.$$

Proposição 1.11.2. *Seja T_r um semigrupo de operadores em $C(M)$ com gerador infinitesimal A e domínio D_A . Então D_A é invariante sob T_r e*

$$AT_r = T_r A$$

em D_A .

Proposição 1.11.3. *Se $f \in D_A$ então a função*

$$r \in [0, \infty) \rightarrow T - rf \in C(M)$$

tem derivada contínua em $[0, \infty)$ e

$$\frac{d}{dr} T_r f = AT_r f.$$

Mais ainda,

$$T_r f - f = \int_0^r \frac{d}{ds} T_s f ds.$$

Teorema 1.11.3. *O domínio de um gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores é denso em $C(M)$.*

Um operador linear A definido no subespaço D de E é dito fechado se sempre que a sequência $f_n \in D$ é tal que $f_n \rightarrow f$ e $Af_n \rightarrow Ag$, então $f \in D$ e $Af = g$. Equivalentemente, A é fechado se o gráfico de A é fechado.

Proposição 1.11.4. *O gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores em $C(M)$ é um operador fechado.*

O seguinte teorema é conhecido como o Teorema de Hille-Yosida.

Teorema 1.11.4. *A é um gerador infinitesimal do semigrupo de operadores em $C(M)$ se e só se*

- (1) o domínio D_A é denso em $C(M)$;
- (2) A é um operador fechado; e
- (3) para todo $\lambda > 0$, o operador $\lambda I - A$ é um bijeção de D_A sobre $C(M)$, e tem norma $\|\lambda I - A\| \geq \lambda$.

Teorema 1.11.5. *(Continuidade de difusão). Seja M um espaço compacto folheado com tensor métrico g e associado ao Laplaciano Δ . Então os operadores de difusão nas folhas $\{D_{t,L}\}$ se unem à definição de semigrupo de operadores D_t em $C(M)$ cujo gerador infinitesimal coincide com Δ em um subconjunto denso de $C(M)$.*

Os operadores de difusão obtidos folha por folha se unem para definir os operadores D_t tomando funções contínuas em M para funções contínuas em M . Por dualidade entre funções contínuas e medidas, os operadores D_t atuam numa medida m por construção adjunta. Isto é, a medida $D_t m$ é definida por

$$\int_M f \cdot D_t m = \int_M D_t f \cdot m$$

para todo $f \in C(M)$. O fato de que $D_t m$ é não negativo decorre da definição de difusão.

Proposição 1.11.5. *A medida m no espaço compacto folheado M é harmônico se e só se $D_t m = m$ para todo $t \geq 0$.*

1.12 Condição Hörmander e Hipo-elipticidade

Seja V uma variedade conexa de classe C^∞ de dimensão n . Consideremos o seguinte sistema $X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de campos de vetores em V de classe C^∞ . Denotaremos por L_X a álgebra de Lie gerada por X na álgebra de Lie de campos de vetores de classe C^∞ em V .

Dado um $x \in V$ denotaremos por $L_X(x)$ ao subespaço vetorial de $T_x V$ obtido por avaliação x de elementos de L_X .

Definição 1.12.1. *Seja um sistema $X = \{X_1, \dots, X_k\}$ de campos de vetores de classe C^∞ em V é dito que **satisfaz a condição de Hörmander**, ou que é um **sistema de campos de vetores Hörmander**, se para todo $x \in V$, $L_X(x) = T_x V$.*

Definição 1.12.2. *Um operador diferencial D em V é dito **hipo-elíptico** se $Du \in C^\infty(\Omega)$ implica que $u \in C^\infty(\Omega)$ para toda distribuição u em V e todo subconjunto aberto Ω de V .*

Teorema 1.12.1. *Se $X = \{X_1, \dots, X_{k+1}\}$ é sistema de campos de vetores Hörmander em V , e se $a \in C^\infty(V)$, o operador diferencial $D = \sum_{i=1}^k X_i^2 + X_{k+1} + a$ é hipo-elíptico.*

Demonstração: Ver [22].

1.13 Teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani

Definição 1.13.1. *Seja C um subconjunto convexo do espaço vetorial real X . Uma aplicação $T : C \rightarrow C$ é chamado **afim** se*

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$ e $x, y \in C$. Claramente qualquer transformação linear é uma aplicação afim.

Lema 1.13.1. *Seja K um subconjunto compacto do espaço vetorial topológico X e seja V uma vizinhança de 0 em X . Então existe um número real $\alpha > 0$ tal que $\lambda K \subset V$ para todo número real λ com $|\lambda| < \alpha$.*

Demonstração. Desde que a aplicação multiplicação por um escalar $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é contínua, podemos encontrar, para cada $x \in X$, um número real $\alpha_x > 0$ e uma vizinhança aberta Ω_x de x tal que para cada $|\lambda| < \alpha_x$ tem-se que $\lambda \cdot \Omega_x \subset V$. Temos assim que

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \Omega_x$$

e como K é compacto existe uma subcobertura finita $F \subset K$ tal que

$$K \subset \bigcup_{x \in F} \Omega_x.$$

Se nos fazemos $\alpha = \min_{x \in F} \{\alpha_x\}$ então $\alpha > 0$ e se $|\lambda| < \alpha$ então $\lambda K \subset V$.

Lema 1.13.2. *Seja K um subconjunto compacto do espaço vetorial topológico X . Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de K e $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de números reais convergindo para 0 em $\mathbb{R}$. Então $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 em X .*

Demonstração. Seja V uma vizinhança de 0 em X . Pelo Lema 1.13.1, podemos encontrar $\alpha > 0$ tal que $\lambda K \subset V$ para todo λ com $|\lambda| < \alpha$. Como $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 , existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que $|\lambda_n| < \alpha$. Logo $\lambda_n x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Isto prova que $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 em X .

O seguinte lema é o teorema de Markov-Kakutani em o caso particular que o conjunto $\mathcal{F}$ seja unitário.

Lema 1.13.3. *Seja K um subconjunto não vazio compacto convexo do espaço vetorial topológico de Hausdorff X e seja $f : K \rightarrow K$ uma aplicação afim contínua. Então f tem ponto fixo em K .*

Demonstração. Definamos o seguinte conjunto $C = \{y - f(y); y \in K\}$. O fato de que f admita ponto fixo é equivalente ao fato de que $0 \in C$. Escolhemos um ponto arbitrário $x \in K$ e consideremos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de K definido por

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f^k(x) - f^{k+1}(x)).$$

Nos temos que $f^k(x) - f^{k+1}(x) = f^k(x) - f(f^k(x)) \in C$ para $0 \leq k \leq n-1$. Por outro lado, o conjunto C é convexo, desde que K é convexo e f é afim. Logo $x_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$x_n = \frac{1}{n}x - \frac{1}{n}f^n(x)$$

e $f^n(x) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 1.13.2 segue-se que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 em X . O conjunto C é compacto desde que é a imagem do compacto K por a aplicação contínua $y \mapsto y - f(y)$. Como todo subconjunto compacto de um espaço topológico de Hausdorff é fechado, nos temos que C é fechado em X . Logo $0 \in C$.

Teorema 1.13.1. (Markov-Kakutani) *Sejam X um espaço vetorial topológico de Hausdorff e K um subconjunto não vazio compacto convexo. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das aplicações afim contínuas $T : K \rightarrow K$. Suponha que todos os elementos de $\mathcal{F}$ comutam, isto é, $T \circ S = S \circ T$ para todo $T, S \in \mathcal{F}$. Então existe um ponto em K fixo para todos os elementos de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{F}$ e consideremos o conjunto

$$\text{Fix}(T) = \{x \in K; T(x) = x\}$$

de pontos fixos. O conjunto $\text{Fix}(T)$ é não vazio pelo Lema 1.13.3 e é compacto desde que é um subconjunto fechado do conjunto compacto K . Por outro lado, $\text{Fix}(T)$ é convexo desde que K é convexo e T é afim. Se $S \in \mathcal{F}$ e $x \in \text{Fix}(T)$, então o fato de que T e S comutem implica que $S(x) \in \text{Fix}(T)$ desde

$$T(S(x)) = S(T(x)) = S(x).$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 1.13.3 à restrição de S a $\text{Fix}(T)$. Segue-se que S fixa um ponto em $\text{Fix}(T)$, isto é,

$$\text{Fix}(T) \cap \text{Fix}(S) \neq \emptyset.$$

Por indução sobre n , obtemos

$$\text{Fix}(T_1) \cap \text{Fix}(T_2) \cap \cdots \cap \text{Fix}(T_n) \neq \emptyset$$

para todo $T_1, T_2, \dots, T_n \in \mathcal{F}$. Desde que K é compacto e possui a propriedade de intersecção finita temos que

$$\bigcap_{T \in \mathcal{F}} \text{Fix}(T) \neq \emptyset.$$

Isto mostra que existe um ponto em K que é fixo para todos os elementos de $\mathcal{F}$.

A prova apresentada aqui é devido a S. Kakutani [26] (ver [25]). Em a prova de A. Markov [30], é necessário que X seja localmente convexo.

1.14 Folheações transversalmente homogêneas

Nesta seção estudaremos folheações holomorfas do ponto de vista de sua estrutura transversal. A grosso modo, tal estrutura é definida pelo modo como se “colam” as trivializações locais da folheação, do mesmo modo que para uma variedade diferenciável sua classe (módulo difeomorfismos) é definida pelos cociclos de mudanças de coordenadas

associados a um atlas da variedade. No que se segue, introduzimos de modo mais preciso estas noções, começando com a noção de folheação transversalmente homogênea.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular de codimensão q , $q \geq 1$, em uma variedade complexa M , com conjunto singular $\text{sing}\mathcal{F}$ de codimensão ≥ 2 . Definimos $M' = M \setminus \text{sing}\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{F}|_{M'}$, a folheação não singular associada. Então M' pode ser coberta por abertos U_i , $i \in I$; onde estão definidas submersões holomorfas $f_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{C}^q$ tais que $\mathcal{F}'|_{U_i} = \mathcal{F}|_{U_i}$ é dada pelas componentes conexas das curvas de nível $f_i^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{C}^q$ de f_i , para todo $i \in I$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então nós temos $f_i = f_{ij} \circ f_j$ para algum biholomorfismo local

$$f_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^q \rightarrow f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^q.$$

Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então no domínio comum nós temos a condição de cociclo satisfeita $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$. O pseudogrupo $\{f_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)\}_{i,j \in I}$ define uma **estrutura transversal** para $\mathcal{F}$ em M . Intuitivamente, $\mathcal{F}$ tem estrutura transversal “simples” se o pseudogrupo acima pode ser escolhido como sendo simples. O significado preciso da expressão “simples” acima é dado pela noção de folheação transversalmente homogênea que passamos a descrever: Primeiro substituímos $\mathbb{C}^q$ por qualquer variedade complexa q -dimensional N de modo que as submersões f_i toman valores em N , $f_i : U_i \rightarrow N$. Assim a estrutura transversal é um pseudogrupo de biholomorfismos de N . Considere agora um grupo de Lie complexo G agindo em N de modo que N é um espaço homogêneo $N = G/H$ para algum subgrupo fechado e conexo (e logo subgrupo de Lie) $H \subset G$. Além de isso suponha que G é um subgrupo de $\text{Bih}(N) = \{\text{grupo de biholomorfismos de } N\}$. Nesta situação dizemos que $\mathcal{F}$ é **transversalmente homogênea de modelo G/H** em M se localmente temos $f_{ij} \in G \subset \text{Bih}(N)$ para todo i, j .

Definição 1.14.1. Dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é **transversalmente homogênea** com estrutura num grupo de Lie, se existe uma ação $\Phi : G \times N \rightarrow N$ tal que:

- (a) Para todo $g \in G$, a aplicação $\Phi_g : N \rightarrow N$, definida por $\Phi_g(p) = \Phi(g, p)$, é um biholomorfismo de N .
- (b) A aplicação $g \in g \mapsto \Phi_g \in \text{Bih}(N)$ é um homomorfismo (de grupos) injetor.
- (c) Todo biholomorfismo da estrutura transversal de $\mathcal{F}$ é restrição a um aberto de N , de uma aplicação da forma Φ_g , para algum $g \in G$.

Por (b), podemos pensar que G é um subgrupo de $\text{Bih}(N)$. Desta forma, denotaremos o elemento Φ_g por g simplesmente. Um exemplo típico, é quando N é um espaço homogêneo, $N = G/H$, onde H é um subgrupo fechado (logo subgrupo de Lie) de G . Nesta situação diremos que $\mathcal{F}$ é transversalmente homogênea de modelo G/H em M se $f_{ij} \in G \subset \text{Bih}(N)$, para todo i, j .

Assim, por exemplo, o **grupo afim** $Af(\mathbb{C}^q) = GL_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q$ em $\mathbb{C}^q$ age neste espaço afim de modo natural

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : (GL_q(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q) \times \mathbb{C}^q &\rightarrow \mathbb{C}^q \\ ((A, B), Z) &\mapsto A \cdot Z + B \end{aligned}$$

O subgrupo de isotropia da origem $0 \in \mathbb{C}^q$ é $GL_q(\mathbb{C})$ de modo que $\mathbb{C}^q$ é o espaço homogêneo $Af(\mathbb{C}^q)/GL_q(\mathbb{C})$. As folheações transversalmente homogêneas de modelo $Af(\mathbb{C}^q)/GL_q(\mathbb{C})$ são chamadas **folheações transversal afins** e desempenham um papel fundamental neste

estudo. Na maior parte do tempo estaremos considerando folheações de codimensão 1. Neste caso existe uma outra estrutura transversal homogênea importante que descrevemos abaixo:

Considere $SL(2, \mathbb{C})$ o **grupo unimodular** das matrizes complexas 2×2 de determinante 1 e denote por $PSL(2, \mathbb{C})$ sua projetivização $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\pm 1$. O grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{C})$ age em $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}(1)$ pelas transformações de Möbius

$$\Sigma_2 : PSL(2, \mathbb{C}) \times \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

O subgrupo de isotropia do infinito $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ é

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}); b = 0 \right\} \cong Af(\mathbb{C})$$

e assim $\bar{\mathbb{C}} = PSL(2, \mathbb{C})/Af(\mathbb{C})$ é o espaço homogêneo associado. As folheações transversalmente homogêneas de modelo $PSL(2, \mathbb{C})/Af(\mathbb{C})$ são chamadas **folheações transversalmente projetivas**.

1.15 Folheações transversalmente afins

Nesta seção $\mathcal{F}$ denota uma folheação holomorfa de codimensão 1 em uma variedade complexa n -dimensional M , com conjunto singular $\text{sing}\mathcal{F}$ de codimensão ≥ 2 . Tal folheação pode ser dada fora do seu conjunto singular por um atlas de submersões holomorfas $y_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $y_i = g_{ij}(y_j)$ para algum biholomorfismo local g_{ij} entre abertos de $\mathbb{C}$. Formularemos a seguinte definição:

Definição 1.15.1. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **transversalmente afim** em M se é possível de se escolher um atlas de submersões como acima $\{y_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}\}_{i \in I}$, definindo $\mathcal{F}$ em $M \setminus \text{sing}\mathcal{F}$, cujas mudança de cartas são afins, isto é, $y_i = a_{ij}y_j + b_{ij}$ em $U_i \cap U_j$, onde a_{ij}, b_{ij} são constantes.

O problema de se decidir se existem estruturas afins para uma dada folheação, em certos casos, é equivalente a um problema em formas diferenciais, como mostra o resultado seguinte:

Proposição 1.15.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão um numa variedade complexa M . Suponha que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma forma meromorfa, isto é, que existe uma 1-forma integrável meromorfa, que define $\mathcal{F}$ fora de seu divisor de pólos, $(\Omega)_\infty$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente afim no aberto $U = M \setminus \text{sing}\mathcal{F}$ se, e somente se, existe uma 1-forma meromorfa η em M satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) η é fechada.
- (b) $d\Omega = \eta \wedge \Omega$.
- (c) $(\eta)_\infty = (\Omega)_\infty$.
- (d) A ordem do polo de η ao longo de qualquer componente irredutível de $(\eta)_\infty$ é um.
- (e) Para toda componente irredutível L de $(\Omega)_\infty$, temos $\text{Res } \eta = -(\text{ordem de } (\Omega)_\infty|_L)$.

Além disso, dois pares (Ω, η) e (Ω', η') definem a mesma estrutura afim para $\mathcal{F}$ em U se, e somente se, existe uma função meromorfa $g : M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ satisfazendo $\Omega' = g\Omega$ e $\eta' = \eta + \frac{dg}{g}$ em U .

Demonstração: Ver [28].

Exemplo 1.15.1. (Folheações transversalmente afins em variedades simplesmente conexas). Seja M uma variedade complexa simplesmente conexa e $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão maior ou igual a dois. Então $\mathcal{F}$ possui uma estrutura transversal afim se, e somente se, possui uma integral primeira holomorfa $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ a qual é uma submersão fora de $\text{sing}(\mathcal{F})$.

Proposição 1.15.2. Não existe folheação transversalmente afim em $\mathbb{CP}(n)$.

Demonstração: Ver [28].

Exemplo 1.15.2. Seja $\Phi : N \rightarrow M$ uma função holomorfa transversal à folheação $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é transversalmente afim então o mesmo vale para a folheação induzida $\Phi^*\mathcal{F}$. Isto se verifica facilmente tomando-se as submersões locais que definem a estrutura afim para $\mathcal{F}$ e compondo-as com Φ , para definir uma estrutura afim para $\Phi^*\mathcal{F}$.

1.16 Folheações transversalmente projetivas

Definição 1.16.1. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão 1 na variedade complexa M . Dizemos que $\mathcal{F}$ é **transversalmente projetiva** em M se é possível escolher um atlas de submersões holomorfas $y_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ definindo $\mathcal{F}$ em $M \setminus \text{sing}\mathcal{F} = \bigcup U_j$ e tendo relações afins, $y_i = \frac{a_{ij}y_j + b_{ij}}{c_{ij}y_j + d_{ij}}$ para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, onde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ são localmente constantes com $a_{ij}d_{ij} - b_{ij}c_{ij} = 1$ em $U_i \cap U_j$.

Assim como no caso transversalmente afim existe uma formulação da existência de estruturas transversais projetivas em termos de 1-formas diferenciais:

Proposição 1.16.1. Seja $\mathcal{F}$ folheação singular de codimensão 1 em M dada por uma 1-forma holomorfa integrável Ω suponha que existe uma 1-forma holomorfa η em M tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$. A folheação $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M se, e somente se, existe uma 1-forma holomorfa ξ em M satisfazendo:

$$(i) \quad d\eta = \Omega \wedge \xi;$$

$$(ii) \quad d\xi = \xi \wedge \eta;$$

Além disso, dois tais ternos (Ω, η, ξ) e (Ω', η', ξ') definem a mesma estrutura projetiva para $\mathcal{F}$ se, e somente se, vale:

$$\Omega' = f\Omega; \quad \eta' = \eta + \frac{df}{f} + 2g\Omega; \quad \xi' = \frac{1}{f}(\xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega);$$

para algumas funções holomorfas $f : M \rightarrow \mathbb{C}^*$ e $g : M \rightarrow \mathbb{C}$. Em particular os ternos (Ω, η, ξ) e $(f\Omega, \eta + \frac{df}{f}, \frac{1}{f}\xi)$ definem a mesma estrutura transversal projetiva para $\mathcal{F}$. Agora, se Ω e η são meromorfas então temos:

Se $\mathcal{F}$ é transversalmente projetiva em M então existe uma 1-forma meromorfa ξ em M satisfazendo $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ e $d\xi = \xi \wedge \eta$.

Demonstração: Ver [28].

1.17 Folheação Umbílica e fluxos transversalmente holomorfos

Consideremos uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão 1 numa variedade fechada orientada M 3-dimensional equipada com uma métrica Riemanniana g e denotemos $\mathcal{N}$ folheação ortogonal 1-dimensional. Existe uma relação interessante entre a geometria local das folhas de $\mathcal{F}$ e a estrutura transversal de $\mathcal{N}$. Mais precisamente, suponhamos por simplicidade que $\mathcal{N}$ é orientada pelo fluxo ϕ^t de módulo um, denotemos π à projeção ortogonal do espaço tangente TM em o espaço tangente $T\mathcal{F}$ e por II_x a segunda forma fundamental em x de cada folha $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ ao redor do ponto x . Então, se v é qualquer campo vetorial tangente a $\mathcal{F}_x$ em x , temos que

$$II_x(v) = \frac{d}{dt}g(\pi d\phi^t(v))|_{t=0}.$$

Como corolário imediato temos o seguinte:

- (1) As folhas de $\mathcal{F}$ são superfícies mínimas, isto é, a curvatura média (ou a traça de II) zero se, e somente se, a holonomia de $\mathcal{N}$, aplicação que leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}$, preserva área. Equivalentemente, ϕ^t preserva volume.
- (2) As folhas de $\mathcal{F}$ são totalmente geodésicas, isto é, II é nulo se, e somente se, o comprimento de los vetores $\pi d\phi^t(v)$ não depende de t ; nesse caso dizemos que g é um bundle-like para $\mathcal{N}$ ou que ϕ^t é um fluxo Riemanniano.
- (3) As folhas de $\mathcal{F}$ são totalmente umbílicas, isto é, para cada ponto x a forma quadrática II_x é um múltiplo da métrica g no espaço tangente para $\mathcal{F}$.

Suponhamos que $\mathcal{F}$ é tal que a folheação umbílica, isto é, que a folheação é umbílica para alguma métrica Riemanniana. Em qualquer folha L de $\mathcal{F}$ a métrica Riemanniana define uma estrutura conforme e, logo é uma estrutura holomorfa. Desde que a holonomia de $\mathcal{N}$ é conforme das folhas de $\mathcal{F}$ para folhas de $\mathcal{F}$, deduzimos que $\mathcal{N}$ é naturalmente uma **folheação transversalmente holomorfa**, isto significa, que localmente é definido por submersões entre subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ e duas submersões diferem (na interseção dos domínios) por uma aplicação holomorfa.

Capítulo 2

Fluxos transversalmente holomorfos

2.1 Exemplos de folheações transversalmente holomorfa em 3-variedade

1) **Fibração de Seifert:**

Relembramos que um Fibrado de Seifert em uma variedade de dimensão 3 é uma folheação de dimensão 1 tal que as folhas são fechadas (com holonomia finita). Cada espaço folha do fibrado de Seifert é uma orbifold de dimensão 2 e pode ser equipada com estrutura holomorfa. Por isso, os fibrados de Seifert são exemplos de folheações transversalmente holomorfas de dimensão 1. Muitos de estos são folheações transversais de codimensão 1 de modo que temos muitos exemplos de folheações umbilicais. Notar que estos fibrados de Seifert são também folheações riemannianas em no sentido obvio a as folheações umbilicais que construímos por este proceso são também geodesíveis.

2) **Folheação linear em T^3 :**

Seja A um elemento de $SL(2, \mathbb{Z})$ com dois autovalores reais distintos. Seja f_1 e f_2 duas folheações lineares irracionais no toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ por retas paralelas a um dos autovetores associados de A . O produto $T^2 \times \mathbb{R}$ pode ser equipado com duas folheações transversais de dimensão 1 e 2 respectivamente e cujas folhas são respectivamente produto de folhas de f_1 por pontos e de f_2 por $\mathbb{R}$. Estas duas folheações são invariantes sob difeomorfismo levando $(x, t) \in T^2 \times \mathbb{R}$ para $(Ax, t+1) \in T^2 \times \mathbb{R}$, e define duas folheações $\mathcal{N}$ e $\mathcal{F}$ no cociente compacto denotado T_A^3 . Neste exemplo $\mathcal{N}$ é Riemanniana, e $\mathcal{F}$ é portanto geodesível (e umbilical). É mostrado em [12] que qualquer folheação de codimensão 1 em T_A^3 a qual é transversal a $\mathcal{N}$ é conjugada a $\mathcal{F}$.

3) **Folheação estavelmente forte associado à suspensão de difeomorfismos hiperbólicos de T^2 .** Chamamos em forma abreviada **folheação estavelmente forte**.

Seja M uma variedade Riemanniana suave conexa, compacta e sem bordo. Um difeomorfismo de classe C^1 , $f : M \rightarrow M$, é parcialmente hiperbólico se existem números reais positivos

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \gamma_1 \leq 1 \leq \gamma_2 < \mu_2 \leq \mu_1$$

e para cada $x \in M$ temos uma decomposição df -invariante no espaço tangente

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$$

de subespaços chamados subespaços estáveis, instáveis e centros tal que

$$\begin{aligned} df(x)E^a(x) &= E^a(f(x)) & \text{para } a &= s, u, c \\ \lambda_1 \|v^s\| &\leq \|df(x)v^s\| \leq \lambda_2 \|v^s\| & \text{para } v^s &\in E^s(x) \\ \mu_1 \|v^u\| &\leq \|df(x)v^u\| \leq \mu_2 \|v^u\| & \text{para } v^u &\in E^u(x) \\ \gamma_1 \|v^c\| &\leq \|df(x)v^c\| \leq \gamma_2 \|v^c\| & \text{para } v^c &\in E^c(x) \end{aligned}$$

Seja f um difeomorfismo de classe C^r numa variedade fechada M que admite uma decomposição $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ onde Df é uniformemente expansiva ao longo de E^u e uniformemente contrativa ao longo de E^s , isto é, f é parcialmente hiperbólico.

Teorema: Suponha que $\dim E^u > 0$ então existe uma única família $\mathcal{F}^u$ de subvariedades imersas C^r injetivas $\{\mathcal{F}^u(x); x \in M\}$ tal que $x \in \mathcal{F}^u(x)$ e $\mathcal{F}^u$ é tangente a E_x^u em todo $x \in M$. Esta família é invariante, no seguinte sentido $f(\mathcal{F}^u(x)) = \mathcal{F}^u(f(x))$ para todo $x \in K$ (onde K é um subconjunto invariante em M admitindo uma decomposição como acima), e as folhas $\mathcal{F}^u(x)$ são uniformemente contrativas por iterados negativos de f . Além disso, $\mathcal{F}^u$ é uma laminação contínua de M , significa que para todo ponto tem carta local continua a qual trivializa as folhas e é C^r uniforme ao longo de cada folha. $\mathcal{F}^u$ é chamado folheação fortemente instável e a suas folhas $\mathcal{F}^u(x)$ são chamadas variedades fortemente instáveis. Analogamente podemos falar de $\mathcal{F}^s$ a folheação fortemente estável supondo que $\dim E^s > 0$.

- 4) Suspensões de automorfismo holomorfos da esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$;

Os automorfismos da esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$, denotado por $Aut(\bar{\mathbb{C}})$, es dado por

$$Aut(\bar{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d}; ad - bc = 1 \right\}.$$

Temos definida uma representação $\varphi : \pi_1(M, p_0) \rightarrow Aut(\bar{\mathbb{C}})$ a partir da construção canônica de Holonomia na qual as seções transversais são as biholomorfias à esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$. Logo pelo Teorema 1 do [27, pag 97] existem um espaço fibrado $(E(\varphi), \pi, B, F)$ e uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de $E(\varphi)$ cuja holonomia é φ . por tanto nossa folheação $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi)$.

- 5) folheação transversalmente $\mathbb{C}$ -afine em $S^2 \times S^1$, isto é [17] quociente da folheação vertical em $(\mathbb{C} \times \mathbb{R})/\{(0, 0)\}$ por $(z, t) \mapsto (\lambda z, 2t)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$;
- 6) folheações em S^3 induzidas por uma singularidade de um campo vetorial holomorfo em $\mathbb{C}^2$ no domínio de Poincaré [1], [33] e quociente finito de eles. Chamamos de **folheação de Poincaré**.

2.2 Parametrização harmônica e atlas harmônico

Seja $\mathcal{L}$ uma folheação orientável transversalmente holomorfa em uma variedade M fechada conexa de dimensão 3.

Fixemos um campo planar E em M transversal a $\mathcal{L}$. Podemos assumir que E é genérico, em o seguinte sentido: seja α uma 1-forma em M definida em E . Então nos precisamos que $\Sigma_1 = \{p \in M; (\alpha \wedge d\alpha)(p) = 0\}$ é uma superfície suave e $\Sigma_2 = \{q \in \Sigma_1; E_q = T_q \Sigma_1\}$ é um conjunto finito, mais ainda para todo $q \in \Sigma_2$ a tangencia entre E e Σ_1 é não degenerada (Quadrática). É fácil ver que está condição é realmente genérica no espaço de campos planares em M e dali pode ser comprido [35].

O significado para a nossa suposta generecidade é o seguinte. Seja $\{v_j\}_{j=1}^N$ um conjunto de campo de vetores de M tangente a E e gerando E , e seja $\text{Lie}(\{v_j\})$ a álgebra de Lie que eles geram, então $\text{Lie}(\{v_j\})(p) = T_p M$ para todo $p \in M$. De fato, para gerar $T_p M$, fora de Σ_1 é suficiente tirar o comutador de primeira ordem $[v_j, v_i]$, em $\Sigma_1 \setminus \Sigma_2$ os de segunda ordem e em Σ_2 os de terceira ordem.

Então fixamos um campo de disco $\mathcal{D}$ em M , isto é, para todo $p \in M$ fixamos um (gérmen de) disco $\mathcal{D}_p \subset M$ através de p de tal forma que para todo $k \in \mathbb{N}$ o k -jato de $\mathcal{D}_p$ em p varia continuamente com p . Exigimos que $T_p \mathcal{D}_p = E_p$ para todo $p \in M$, mas precisamos uma condição mas sutil.

Seja $p \in M$ e seja (t, x, y) uma coordenada local em M centrada em p , tal que $E_p = \{dt(p) = 0\}$ e $z = x + iy$ é constante ao longo de $\mathcal{L}$ e holomorfa transversal. O campo planar E induz em $\mathcal{D}_p$ uma folheação $\mathcal{E}_p$, singular em p . Se E tem equação $dt = rdx + sdy$ ($r(0) = s(0) = 0$) e $\mathcal{D}_p$ é dado por $t = f(x, y)$ ($f(0) = f_x(0) = f_y(0) = 0$), então $\mathcal{E}_p$ é dado (usando as coordenadas x, y em $\mathcal{D}_p$) por $(r - f_x)dx + (s - f_y)dy = 0$. Precisamos que $\mathcal{D}_p$ seja escolhido de tal maneira que $(r - f_x)_x(0) + (s - f_y)_y(0) = 0$, isto é,

$$(\Delta_{(x,y)}f)(0) = (r_x + s_y)(0).$$

É fácil ver que está é uma condição intrínseca, independente da escolha das coordenadas; significa que a folheação ortogonal de $\mathcal{E}_p$, a qual é bem definida pois $\mathcal{D}_p$ tem estrutura complexa, é gerado por um campo de vetores cuja parte linear em p tem traço zero. Isto é, de fato, uma condição sobre o 2-jato de $\mathcal{D}_p$ em p .

Se $K \rightarrow M$ é um fibrado sobre M cuja fibra K_p é composto por o 2-jato do disco tangente a E_p e satisfazendo a condição previa, então a fibra é difeomorfo a $\mathbb{R}^2$ e desde que K admite uma seção suave. Segue-se que podemos encontrar um disco de campo $\mathcal{D}$ em M com a propriedade requerida.

Note que se a coordenada t é escolhida tal que $\mathcal{D}_p = \{t = 0\}$ então está condição se torna de segundo ordem $(r_x + s_y)(0) = 0$.

Seja g uma métrica hermitiana em E . Em todo $\mathcal{D}_p$ nós consideramos a métrica hermitiana induzida por g exigindo que os mapas lineares $E_q \rightarrow T_q \mathcal{D}_p$ induzimos por $\mathcal{L}$ são isometrias, para todo $q \in \mathcal{D}_p$. Denotaremos por $\Delta^{\mathcal{D}_p}$ o Laplaciano correspondente. Seja

$$\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definido por

$$(\Delta f)(p) = [\Delta^{\mathcal{D}_p}(f|_{\mathcal{D}_p})](p).$$

Se v, w são campos de vetores em um conjunto aberto $U \subset M$ tal que $\{v(p), w(p)\}$ é uma base ortonormal em E_p para todo $p \in U$, então $\Delta|_U = L_v^2 + L_w^2 + L_u$ para algum campo vetorial u . Usando partição da unidade é fácil obter uma representação global

$$\Delta = \sum_{j=1}^N L_{v_j}^2 + L_{u_0}$$

onde $v_1, \dots, v_N$ são campos de vetores gerando E . A condição genérica imposta em E garante, que Δ satisfaz a condição hipo-elíptica de Hörmander [22], [3], [4].

O operador Δ gera um 1-parâmetro de semigrupo de difusão

$$P_t : C^0(M) \rightarrow C^0(M) \quad t \geq 0$$

$P_t f$ é a única solução de

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F$$

com condição inicial f ([13], [22]). Claramente, $P_t f \geq 0$ se $f \geq 0$ e $P_t c = c$ para toda constante c , de modo que por dualidade P_t age no espaço $\mathcal{M}(M)$ das medidas de probabilidade Borel em M , continua respeito à topologia débil estrela em $C_0(M)$. O teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani mostra que existe $\mu \in \mathcal{M}(M)$ tal que $P_t \mu = \mu$ para todo $t \geq 0$, isto é, $\Delta \mu = 0$ no sentido distribucional:

$$\int_M \Delta f \, d\mu = 0, \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M).$$

A condição forte de Hörmander implica que μ tem densidade suave [3], [22], isto é, μ é um volume forma Ω em M multiplicada por uma função não negativa m . Em Ω tem-se definido um produto escalar dado por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \int_M f \cdot g \, d\Omega \end{aligned}$$

Se $\Delta^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é o adjunto de Δ com respeito ao produto escalar definido por Ω , isto é, $\langle \Delta^* f, g \rangle_\Omega = \langle f, \Delta g \rangle_\Omega$, então $\Delta^* m = 0$. Temos que

$$\Delta^* = \sum_{j=1}^N L_{v_j}^2 + L_{\bar{v}_0} + V$$

onde V é uma função suave, atuando por multiplicação, e usando o Princípio do Máximo [4], [22] (ver, [Bo, Proposição 5.1] reduz ao caso $V \geq 0$). Neste caso, como $V \geq 0$ temos que

$$0 = \Delta^* m = \left(\sum_{j=1}^N L_{v_j}^2 + L_{\bar{v}_0} + V \right)(m) \geq \left(\sum_{j=1}^N L_{v_j}^2 + L_{\bar{v}_0} \right)(m) = \Delta m,$$

logo m é super harmonica e como m , sendo sempre não negativa e quase sempre positiva, deve ser sempre positivo. Em conclusão, μ é um volume forma em M . Novamente o Princípio do Máximo, mostra que μ é definido único.

Seja ω uma 2-forma em M unicamente definido por $\text{Ker} \omega = T\mathcal{L}$ e $\omega|_E = \text{área forma}$. Podemos decompor:

$$\mu = \lambda \wedge \omega$$

onde λ é unicamente definido se nos exigimos que $\text{Ker} \lambda = E$, pois se existe outro λ' tal que $\text{Ker} \lambda' = E$ e $\mu = \lambda' \wedge \omega$ temos que $(\lambda - \lambda') \wedge \omega = 0$. Seja E gerado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ logo

$\lambda - \lambda' = A dx + B dy$ e como $\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 = \lambda' \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ temos que $A = 0$, analogamente $B = 0$. Uma escolha coerente da orientação garante que λ é positivo em na direção

positiva de $\mathcal{L}$. Observe que, salvo constantes normalizadas, λ não depende da escolha da métrica hermitiana g (mas, claramente, depende de $\mathcal{D}$).

Podemos usar, como em [6], λ para parametrizar $\mathcal{L}$: o “tempo” necessário para cobrir o segmento $[p, q] \subset l \in \mathcal{L}$ é denotado por $\int_{[p,q]} \lambda$. Mas formalmente, nos parametrizamos $\mathcal{L}$ pelo fluxo

$$\phi_t : M \rightarrow M$$

gerado por um campo de vetores φ tangente a $\mathcal{L}$ e tal que $\lambda(\varphi) = 1$. Diremos que ϕ_t é uma **parametrização harmônica** de $\mathcal{L}$.

Se $[p, q] \subset l \in \mathcal{L}$, podemos considerar a função

$$T : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

definido como o tempo de $\mathcal{D}_p$ para $\mathcal{D}_q$. A seguinte proposição justifica a expressão “parametrização harmônica”.

Proposição 2.2.1. $\Delta^{\mathcal{D}_p} T(p) = 0$.

Demonstração: Podemos assumir que os discos $\mathcal{D}_r$, $r \in [p, q]$, formam uma folheação $\mathcal{F}$ próximo de $[p, q]$ (por exemplo, é suficiente tomar E e $\mathcal{D}$ real analítico). Nos tomamos coordenadas (t, x, y) próximo $[p, q]$ tal que $\mathcal{F}$ é dado por $dt = 0$, $\mathcal{L}$ é dado por $dx = dy = 0$, $z = x + iy$ é holomorfo em todo $\mathcal{D}_r$, $r \in [p, q]$, e $t(p) = 0$, $t(q) = 1$ (assumindo $[p, q]$ orientado por $\mathcal{L}$ de p para q). Então:

- $\omega = F(t, x, y)dx \wedge dy$, $F > 0$
- $E : dt = rdx + sdy$, $r = s = r_x + s_y = 0$ ao longo $[p, q]$
- $\lambda = A(t, x, y)(dt - rdx - sdy)$, $A > 0$
- $\mu = AFdt \wedge dx \wedge dy$.

Vamos a explicitar a condição $\Delta\mu = 0$. Seja $\Delta^{\mathcal{F}}$ denotando o Laplaciano associado à folheação de $\mathcal{F}$, isto é,

$$\Delta^{\mathcal{F}} = \frac{1}{F} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Por definição de Δ , temos que $\Delta = \Delta^{\mathcal{F}} + D$, onde D é um operador diferencial de segundo ordem cujos coeficientes se anulam ao longo de $[p, q]$. Além disso, $\Delta f = \Delta^{\mathcal{F}} f$ se f é uma função independente de t . Segue-se que

$$D = a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} + d \frac{\partial}{\partial t}$$

com a, b, c, d funções suaves que se anulam ao longo de $[p, q]$. Por outro lado, se

$$v = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial}{\partial x} + r \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad w = \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\partial}{\partial y} + s \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

(eles são tangentes a E e ortogonais) então $\Delta = L_v^2 + L_w^2 + L_u$ para algum campo vetorial

u . Segue-se que $b = \frac{2r}{F}$, $c = \frac{2s}{F}$, $a = \frac{r^2 + s^2}{F}$.

Para todo $f \in C^\infty(M)$ com suporte compacto em o domínio de (t, x, y) temos que

$$\int (\Delta f) A F \, dt \wedge dx \wedge dy = 0$$

isto é,

$$\int f \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2((r^2 + s^2)A)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2(2rA)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2(2sA)}{\partial y \partial t} - \frac{\partial(dAF)}{\partial t} \right] dt \wedge dx \wedge dy = 0.$$

Consequentemente, a expressão entre $[\dots]$ deve ser zero, e usando as identidades $r = s = r_x + s_y = d = 0$ ao longo de $[p, q]$ encontramos

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \text{ ao longo } [p, q].$$

O tempo T é dado por integração de A :

$$T(x, y) = \int_0^1 A(t, x, y) dt$$

portanto

$$(\Delta^{\mathcal{F}} T)(p) = \frac{1}{F(p)} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) (t, 0, 0) dt = 0. \square$$

Infelizmente, isto não é verdade, em geral, que $\Delta^{\mathcal{D}_p} T$ é identicamente nulo em todo $\mathcal{D}_p$. Pero podemos usar o seguinte truque.

Seja $D \subset M$ qualquer disco (ou qualquer superfície) transversal a $\mathcal{L}$ e seja Δ^D o laplaciano em D induzido por g da maneira usual. Consideremos as seguintes duas funções: (ver a figura)

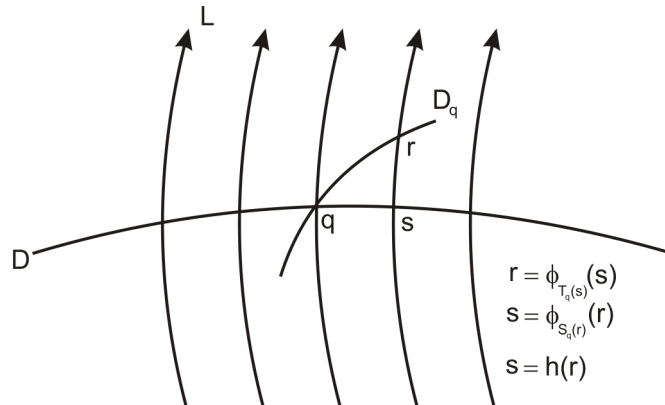
$$f_D : D \rightarrow \mathbb{R} \quad f_D(q) = (\Delta^D T_q)(q)$$

onde T_q é definido numa vizinhança de q em D e o tempo medido de D para $\mathcal{D}_q$;

$$g_D : D \rightarrow \mathbb{R} \quad g_D(q) = (\Delta^{\mathcal{D}_q} S_q)(q)$$

onde $S_q : \mathcal{D}_q \rightarrow \mathbb{R}$ medi o tempo de $\mathcal{D}_q$ para D . Claramente, $T_q \circ h = -S_q$, onde $h : \mathcal{D}_q \rightarrow D$ é a holonomia de $\mathcal{L}$, e a conformalidade de h junto com $\|D_q h\| = 1$ implica que $f_D = -g_D$:

$$(\Delta^{\mathcal{D}_q} S_q)(q) = -(\Delta^{\mathcal{D}_q} (T_q \circ h))(q) = -\|D_q h\|^2 \cdot (\Delta^D T_q)(q) = -(\Delta^D T_q)(q).$$

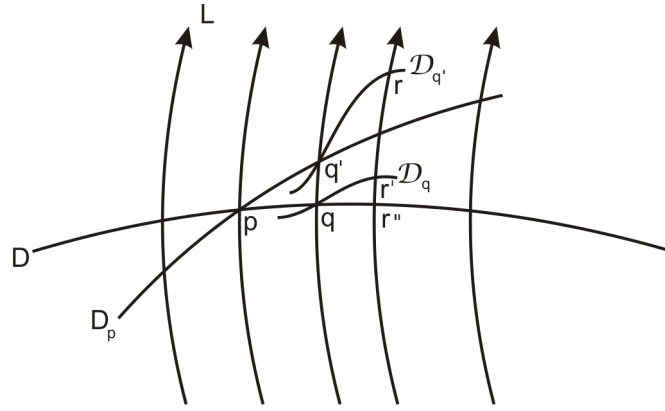


Lema 2.2.1. Para todo $p \in M$ existe um disco $D_p \subset M$, transversal a $\mathcal{L}$ e passando por p , tal que $f_{D_p}(q) = g_{D_p}(q) = 0$ para todo $q \in D_p$.

Demonstração: Seja $D \subset M$ qualquer disco transversal a $\mathcal{L}$ e contendo p , e seja $t : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset D$, uma função definida próximo de p e tal que $(\Delta^D t)(q) = f_D(q)$ para todo $q \in U$, $t(p) = 0$. Tal função existe por resultados estândares acerca do Laplaciano. Seja $D_p \subset M$ um disco obtido por uma t -traslação de U :

$$D_p = \{\phi_{t(q)}(q); q \in U\}.$$

Podemos supor que D_p é ainda mergulhado em M , restringindo U se for necessário. Agora, se $q' = \phi_{t(q)}(q) \in D_p$, o tempo de $\mathcal{D}_{q'}$ para D_p pode ser decomposto como a suma de três partes (ver figura):



$$T(r) = T_1(r) + T_2(r') + T_3(r'')$$

onde

- T_1 = tempo de $\mathcal{D}_{q'}$ para $\mathcal{D}_q$,
- T_2 = tempo de $\mathcal{D}_q$ para D ,
- T_3 = tempo de D para $\mathcal{D}_p$ ($= t$),
- $r' = h_1(r)$, $r'' = h_2(r')$.

Usando a conformidade dos mapas de holonomias h_1 , h_2 , e a propriedade $\|D_q h_2\| = 1$:

$$(\Delta^{\mathcal{D}_{q'}} T)(q') = (\Delta^{\mathcal{D}_{q'}} T_1)(q') + \|D_{q'} h_1\|^2 (\Delta^{\mathcal{D}_q} T_2)(q) + \|D_{q'} h_1\|^2 (\Delta^D T_3)(q).$$

O primeiro termo é zero pela proposição 2.1.1, o segundo termo é $\|D_{q'} h_1\|^2 g_D(q)$ e o terceiro termo é $\|D_{q'} h_1\|^2 g_D(q)$, assim que eles sumam zero. Segue-se, como requeremos, $f_{D_p} = g_{D_p} \equiv 0$. $\square$

Se D_p , $D_{p'} \subset M$ são dois discos como no Lema 2.1.1, e se $q \in D_p$, $q' \in D_{p'}$ são dois pontos na mesma folha, então sobre uma vizinhança U de q em D_p podemos considerar a função $T : U \rightarrow \mathbb{R}$ que dá o tempo de D_p a $D_{p'}$.

Proposição 2.2.2. $\Delta^{D_p} T(q) = 0$.

Demonstração: Decomponemos T como a soma de três partes, como no Lema 2.1.1: o tempo de D_p para $\mathcal{D}_q$, de $\mathcal{D}_q$ para $\mathcal{D}_{q'}$, e de $\mathcal{D}_{q'}$ para $D_{p'}$. Estes três termos tem Laplaciano zero pela Proposição 2.1.1 e pela escolha de D_p e $D_{p'}$. $\square$

Nos agora construímos um **atlas harmônico** adaptado a $(M, \mathcal{L})$. Por compacidade de M , nos podemos encontrar uma coleção de discos $D_1, \dots, D_N$ como no Lema 2.1.1 e $\varepsilon > 0$ tal que os conjuntos abertos $U_j = \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(D_j)$, $j = 1, \dots, N$, formam uma cobertura de M com as seguintes duas propriedades:

- i) $(-\varepsilon, \varepsilon) \times D_j \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \phi_t(p)$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, para todo $j = 1, \dots, N$.
- ii) a interseção $U_i \cap U_j$ são conexo e simplesmente conexa (isto é, $\mathcal{L}|_{U_i \cap U_j}$ é uma “caixa de fluxo”).

Para todo $j = 1, \dots, N$ seja $h_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ a ϕ_t -distância de D_j ($h_j(q) = t$ se $q = \phi_t(p)$, $p \in D_j$), seja $\phi_j : D_j \rightarrow \bar{D}$ um biholomorfismo qualquer com $\bar{D} \subset \mathbb{C}$ o disco unitário. Seja $\pi : U_j \rightarrow D_j$ a projeção ao longo de $\mathcal{L}$ e definimos

$$\begin{aligned} \psi_j : U_j &\rightarrow V_j = \psi_j(U_j) \subset \bar{D} \times \mathbb{R} \\ q' &\mapsto (\phi_j(\pi(q)), h_j(q)). \end{aligned}$$

Claramente ψ_j é um difeomorfismo sobre sua imagem V_j e a coleção $\{(U_j, \psi_j)\}_{j=1}^N$ é um atlas folheado por $(M, \mathcal{L})$. Agora nos estudamos a correspondentes funções de transições.

Primeiramente, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, seja

$$\begin{aligned} h_{ij} : U_i \cap U_j &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h_i(x) - h_j(x). \end{aligned}$$

Está função é constante nas folhas de $\mathcal{L}$ e, graças à Proposição 2.1.2, está é harmônica transversal. Seja $V_{ij} = \psi_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$, $W_{ij} = \pi(V_{ij})$ onde $\pi : \bar{D} \times \mathbb{R} \rightarrow \bar{D}$ é a projeção. O difeomorfismo de transição $\psi_{ij} = \phi_i \circ \psi_j^{-1}$ é então dado por

$$\begin{aligned} \psi_{ij} : V_{ij} &\rightarrow V_{ji} \\ (z, t) &\mapsto (\phi_{ij}(z), t + \tilde{h}_{ij}(z)) \end{aligned}$$

onde $\phi_{ij} : W_{ij} \rightarrow W_{ji}$ é um biholomorfismo e $\tilde{h}_{ij} : W_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$, o qual é essencialmente h_{ij} representado na carta ψ_j , é uma função harmônica.

Diremos que $\{(U_j, \psi_j)\}_j$ é um atlas harmônico subordinado à parametrização harmônica $\phi_t : M \rightarrow M$. Mas geralmente, chamamos **atlas harmônico** a um atlas folheado cujos difeomorfismos de transição tem a estrutura previa, com ϕ_{ij} holomorfismo e $\tilde{h}_{ij}$ harmônico, não necessariamente derivado a uma parametrização harmônica. A conclusão de está seção é a existência de uma atlas harmônico para toda folheação holomorfa transversal.

2.3 Folheações transversalmente $\mathbb{C}$ -projetivas

Seja agora $\mathcal{L}$ uma folheação transversalmente $\mathbb{C}$ -projetiva numa variedade fechada conexa de dimensão três: isto é, o pseudo-grupo de holonomia de $\mathcal{L}$ é gerado por

transformações projetivas da esfera de Riemann. É bem conhecido que o levantamento $\bar{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ no recobrimento universal $\bar{M}$ de M é dado por uma submersão $P : \bar{M} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, chamada mapa de desenvolvimento. O espaço de folhas $\bar{M}/\bar{\mathcal{L}}$ (possivelmente não Hausdorff) é uma superfície de Riemann simplesmente conexa Σ , e P fatora através de uma submersão $P_0 : \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Duas folhas de $\bar{\mathcal{L}}$ as quais não são separadas são mapeadas por P_0 em um mesmo ponto de $\bar{\mathbb{C}}$. A prova do seguinte teorema usa só a existência de tal mapa de desenvolvimento.

Teorema B. *$\mathcal{L}$ é um dos exemplos 1), ..., 5) da lista na introdução.*

Se Σ é Hausdorff então, como em [[6], seção 4], é fácil mostrar este teorema: se Σ é um disco então $\mathcal{L}$ é hiperbólico transversal (Exemplo 1) ou 3)), se Σ é uma linha complexa então $\mathcal{L}$ euclidiano transversal (Exemplo 1) ou 2)), e se Σ é uma esfera de Riemann então $\mathcal{L}$ é ou uma suspensão de um automorfismo projetivo (Exemplo 4) ou uma fibração de Seifert sobre um espaço óculo (incluindo S^3) (Exemplo 1). Daqui pra frente nos assumiremos que Σ não é Hausdorff, nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{L}$ é $\mathbb{C}$ -afim transversal em $S^2 \times S^1$. Neste caso $\bar{\mathcal{L}}$ é necessariamente uma folheação por linhas.

Seja $p, q \in \bar{M}$ tal que as correspondentes folhas $l_p, l_q \in \bar{\mathcal{L}}$ são não separadas. O campo de disco $\mathcal{D}$ em M e a correspondente parametrização harmônica de $\mathcal{L}$ do levantamento $\bar{M}$; denotemos por $D_p, D_q \subset \bar{M}$ os dois discos através de p, q como no Lema 2.1.1. Podemos assumir que P é injetivo em D_p e D_q , e que $P(D_p) = P(D_q)$. Temos um mapa de holonomia $\phi : U \rightarrow V$ para alguns conjuntos abertos $U \subset D_p, V \subset D_q$, com $p \in \partial U, q \in \partial V$ (os discos são pequenos de forma que cada folha de $\bar{L}$ intersecta no máximo uma vez cada disco). Temos também uma função do tempo $T : U \rightarrow \mathbb{R}$ medindo o tempo necessário de U para V . Esta função é harmônica e além disso $T(q) \rightarrow +\infty$ para $q \in \partial U$ (= bordo de U em D_p), de modo que a extensão $T : D_p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido por $T|_{U^c} = +\infty$ é superharmônica: isto é semicontínua inferior y harmônica fora do conjunto onde é $+\infty$. Como em [6], segue-se que U^c (similarmente V^c) tem capacidade logarítmica zero e em particular é totalmente desconectado [34]. Segue-se daí que podemos encontrar uma curva fechada simples $\gamma \subset U$ com bordo em D_p um disco D_0 contendo p . Está imagem $\tilde{\gamma}$ por ϕ é uma curva fechada simples em V delimitando um disco D_1 contendo q . Seja $\Gamma \subset \bar{M}$ uma esfera (topológica) composta por D_0 e D_1 e as trajetórias de $\bar{\mathcal{L}}$ entre γ e $\tilde{\gamma}$. Escolhendo γ suficientemente pequeno, a projeção de Γ em M é injetiva, denotamos por Γ' está imagem, e por D'_1, D'_0 as imagens de D_1, D_0 .

No seguinte lema usamos teoria de Homologia, ver[5].

Lema 2.3.1. *Γ' é não homólogo ao zero.*

Demonstração: Suponha por contradição que $[\Gamma'] = 0$ e seja $N \subset M$ uma variedade com bordo e esquinas limitadas por Γ' (Figura 3). Queremos mostrar que $\mathcal{L}|_N$ é uma caixa de fluxo, contradizendo a construção de Γ' . Isto resulta por um teorema de Ghys and Gomez-Mont [19], [6], mas podemos dar uma resposta mais direta da prova baseada na parametrização harmônica.

Suponhamos que $\mathcal{L}$ é orientada a partir de D'_0 a D'_1 , como na Figura 3. Suponha por contradição que existe $r \in D'_1$ cuja órbita negativa não atinge D'_0 , e seja $s \in N$ no conjunto de limite negativo da r . Temos um mapa de holonomia $h : D_s \setminus K \rightarrow D'_1$, onde D_s é como no Lema 2.1.1 e K é conjunto fechado de capacidade zero, pelo argumento usual superharmônico. Seja $f : D'_1 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função não constante holomorfa limitada.

Então $f \circ h : D_s \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$ é também não constante holomorfa limitada e se estende para todo D_s [34]. Isto contradiz a escola de r e s : $f \circ h$ é constante numa sequencia de pontos de acumulação de s . $\square$

Cortando M ao longo de Γ' nos obtemos uma variedade topológica conexa com bordo M_0 . Desde o ponto de vista da diferenciabilidade, $\partial M_0 = A \cup B$ onde A e B são ambos homeomorfos a S^2 pero as esquinas de A são agudos considerando que as esquinas de B são obtusos (ver fig. 4).

O mapa de holonomia prévio $\phi : D_0 \cap U \rightarrow D_1 \cap V$ é definida fora de um conjunto de capacidade zero e por [34] é estendido a um biholomorfismo $\hat{\phi} : D_0 \rightarrow D_1$. Isto nos permite colar em B uma caixa $D^2 \times [0, 1]$ com a foliação trivial de tal de está maneira resulte uma folheação holomorfa transversal numa variedade compacta com bordo e esquinas. Por o mesmo argumento que no Lema 2.1.2 esta nova folheação é uma caixa de fluxo. É então fácil ver que $\mathcal{L}$ é uma folheação $\mathbb{C}$ -afine transversal em $S^2 \times S^1$.

Observação 2.3.1. *Usando o mesmo tipo de argumentos isto não é difícil de classificar essas folheações holomorfas transversais que admitem uma superfície fechada transversal, ou equivalentemente folheações holomorfas transversais em variedades compactas com bordo não vazio.*

2.4 Complexificação de uma folheação transversalmente holomorfa racional

Continuaremos com as hipóteses e notações da seção 2.2: $\{(U_j, \psi_j)\}_j$ denota o atlas harmônico para $(M, \mathcal{L})$. Iniciaremos explicando o significado de “racional”.

Seja $\mathcal{A}$ (respectivamente $\mathcal{O}$) um feixe em M de funções localmente constantes nas folhas e transversalmente harmônico (respectivamente holomorfo). Temos uma sequencia exata de feixes

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{Re} \mathcal{A} \rightarrow 0$$

onde j é a inclusão canônica composta com a multiplicação por i , e Re é a função “parte real”. Está sequencia induz uma sequencia de cohomologia exata

$$\dots \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) \xrightarrow{A} H^1(M, \mathcal{A}) \xrightarrow{B} H^2(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{C} H^2(M, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

A função previamente definida $h_{ij} = h_i - h_j : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}$ (constante nas folhas e transversalmente harmônico) satisfaz a condição de cociclo

$$h_{ij} = -h_{ji}, \quad h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0 \quad \text{em } U_i \cap U_j \cap U_k$$

e só eles determinam a classe de cohomologia

$$[h_{ij}] \in H^1(M, \mathcal{A}).$$

Denotaremos por

$$\mathbf{c}(\{\psi_j\}) \in H^2(M, \mathbb{R})$$

à imagem de $[h_{ij}]$ sob $B : H^1(M, \mathcal{A}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})$. Está classe de cohomologia real representa a obstrução à complexificação do cociclo $\{h_{ij}\}$, pois $\text{Ker } B = \text{Im } A$.

Definição 2.4.1. $(M, \mathcal{L})$ é **racional** se existe um atlas harmônico $\{\psi_j\}$ tal que $\mathbf{c}(\{\psi_j\})$ é proporcional à classe de cohomologia integral:

$$\mathbf{c}(\{\psi_j\}) \in \lambda \cdot H^2(M, \mathbb{Z}) \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Claro que, se $\dim H^2(M, \mathbb{R}) \leq 1$ então a condição de racionalidade é trivialmente satisfeita, para qualquer atlas harmônico. Na lista de exemplos escrito na introdução, exemplos apenas 1) e 2) são definidos em variedades com $\dim H^2(M, \mathbb{R}) > 1$, mas é fácil nestes dois casos a construção de um atlas harmônica com $\mathbf{c}(\{\psi_j\}) = 0$ (podemos construir um atlas harmônica onde as funções h_{ij} são constantes). Na próxima seção, será claro que, nos exemplos 3) e 5) a classe $\mathbf{c}(\{\psi_j\})$ é sempre diferente de 0, para qualquer atlas harmônica.

Note também que se $H^2(M, \mathcal{O}) = 0$ então a condição de racionalidade está satisfeita. Isso ocorre porque o conjunto de classes em $H^1(M, \mathcal{A})$ associado ao atlas harmônico é aberto (um atlas harmônico pode ser perturbado pela adição de qualquer pequeno cociclo harmônico), e, portanto, se $H^2(M, \mathcal{O}) = 0$ o conjunto das classes em $H^1(M, \mathbb{R})$ associado a atlas harmônicos é também aberto, pois B é sobrejetiva. Agora, um conjunto aberto em $H^2(M, \mathbb{R})$ contém pontos racionais.

No restante desta seção, vamos supor que $(M, \mathcal{L})$ é racional e que um atlas harmônico $\{\psi_j\}$ é escolhido de forma que $\mathbf{c}(\{\psi_j\}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Isto é possível, pois (por um argumento fácil) o espaço das classes de cohomologia associado ao atlas harmônico é invariante pela multiplicação por um número real positivo.

Para todo $i, j = 1, \dots, N$ nos escolhemos a função $k_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}$ constante nas folhas, harmônicas transversais, e conjugadas a h_{ij} : $H_{ij} = h_{ij} + ik_{ij}$ será uma função transversalmente holomorfa. Tais k_{ij} existem e é unicamente definido modulo uma constante aditiva, pelas propriedades de interseção de $\{U_j\}$. Podemos escolher uma coleção $\{k_{ij}\}$ satisfazendo $k_{ij} = -k_{ji}$, mas a função $k_{ij} + k_{jk} + k_{ki} : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{R}$ não necessariamente é igual a zero. Porém, $k_{ij} + k_{jk} + k_{ki}$ é conjugado a $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$, consequentemente é uma constante real, denotado por c_{ijk} . Estes números reais $\{c_{ijk}\}$ formam um cociclo real e dali determina uma classe de cohomologia $[c_{ijk}] \in H^2(M, \mathbb{R})$ a qual é nada mais que $\mathbf{c}(\{\psi_j\})$:

$$[c_{ijk}] = \mathbf{c}(\{\psi_j\}).$$

Segue-se que nos podemos escolher as funções k_{ij} de tal modo $c_{ijk} \in \mathbb{Z}$ para todo i, j, k .

Definimos

$$\hat{V}_{ij} = V_{ij} \times S^1 \subset D \times \mathbb{R} \times S^1 \quad (S^1 = \mathbb{R} \bmod \mathbb{Z})$$

$$\psi_{ij} : \hat{V}_{ij} \rightarrow \hat{V}_{ji}$$

$$(z, t, s) \mapsto (\phi_{ij}(z), t + \tilde{h}_{ij}(z), s + \tilde{k}_{ij}(z))$$

onde $\tilde{k}_{ij} : W_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escrita como k_{ij} na carta ψ_j , e portanto conjugado a $\tilde{h}_{ij}$. Graças a $k_{ij} + k_{jk} + k_{ki} \in \mathbb{Z}$, os mapas ψ_j são difeomorfismos que permitem colar as peças $\{V_j \times S^1\}_{j=1}^N$ e obter uma 4-variedade X . Esta variedade é um fibrado do círculo sobre M , cuja classe de Euler é exatamente $\mathbf{c}(\{\psi_j\})$.

Além disso, em todo $V_j \times S^1$ podemos considerar a estrutura holomorfa “obvio” (com $w = t + is$ coordenada holomorfa), e então os mapas ψ_{ij} são holomorfas pois $\tilde{H}_{ij} = \tilde{h}_{ij} + i\tilde{k}_{ij}$ são:

$$\Psi_{ij} : \tilde{V}_{ij} \rightarrow \tilde{V}_{ji}$$

$$(z, w) \mapsto (\phi_{ij}(z), w + \tilde{H}_{ij}(z)).$$

Desde que X é uma superfície complexa compacta. O campo de vetores holomorfo $\frac{\partial}{\partial s}$ em $V_j \times S^1$ é invariante por Ψ_{ij} e por isso produz um campo vetorial holomorfo V em X . O fluxo real de V gera uma S^1 -ação livre (a fibração círculo de X), o fluxo complexo gera uma $\mathbb{C}^*$ -ação e uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ a qual é nada mais que $p^*(\mathcal{L})$, onde p é a projeção $X \rightarrow M$. Nos resumimos a seguinte proposição o resultado final de nossa construção.

Proposição 2.4.1. *Seja $(M, \mathcal{L})$ um folheação orientável holomorfa transversal racional. Então existe uma superfície complexa compacta X e um campo vetorial holomorfo V não singular em X , gerando uma $\mathbb{C}^*$ -ação e uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$, tais que $(M, \mathcal{L})$ é o cociente de $(X, \mathcal{F})$ por a S^1 -ação (livre) sob a ação de $\mathbb{C}^*$ -ação.*

Diremos que $(X, \mathcal{F})$ (ou (X, V)) é a **complexificação de $(M, \mathcal{L})$** . Uma versão local de esta construção, mas em um contexto mais geral, se pode encontrar em [20]. Ver também [16] para ter uma ideia relacionada.

2.5 Prova do Teorema A

Nesta seção classificamos a folheação orientável transversalmente holomorfa racional, completando a prova do Teorema A.

Seja $(M, \mathcal{L})$ racional e seja (X, V) a complexificação. A fim de compreender $(M, \mathcal{L})$ é suficiente classificar a $\mathbb{C}^*$ -ação holomorfa não singular sobre uma superfície complexa compacta. Isto não é difícil, se um se permite usar a classificação de Enriques-Kodaira [2].

A existência de um campo vetorial sem singularidades implica que a segunda classe Chern de X , $c_2(X)$, é igual a zero. Além disso, X deve ser minimal: uma (-1) -esfera $S \subset X$ seria invariante pelo fluxo de V , dali V seria tangente a S , impossível. Segue-se que X é um das seguintes classes (nos usamos a notação de [BPV, seção VI.1]):

- i) superfície regradada sobre uma curva elíptica,
- ii) toro complexo,
- iii) superfície hiper-elíptica,
- iv) superfície Kodaira,
- v) superfície propriamente elíptica,
- vi) superfície de classe VII.

Lema 2.5.1. *No caso i), $\mathcal{L}$ é suspensão de um automorfismo de $\bar{\mathbb{C}}$.*

Demonstração: O fluxo de V preserva a regra de X (a qual é unicamente definida), portanto V é projetável na base $E \cong T^2$ para um campo vetorial holomorfo W . Tal W não tem singularidades, porque V não pode ser tangente a uma fibra de X , daí a folheação $\mathcal{F}$ gerada por V é transversal as fibras de X e consequentemente $\mathcal{L}$ é uma suspensão de automorfismo de $\bar{\mathbb{C}}$. $\square$

Lema 2.5.2. *No caso ii), $\mathcal{L}$ é um fluxo linear em T^3 .*

Demonstração: O campo vetorial V levanta o recobrimento universal de $\mathbb{C}^2$ para um campo vetorial $\tilde{V}$ holomorfo e limitado, daí constante. A folheação $\mathcal{F}$ é linear, o mesmo para $\mathcal{L}$. $\square$

Lema 2.5.3. *No caso iii), iv) e v); $\mathcal{L}$ é uma fibração de Seifert.*

Demonstração: Em estes casos X é uma fibração elíptica [BPV, página 149] sobre a curva holomorfa Σ . Como no Lema 2.4.1, V é projetável e Σ para um campo vetorial W . Se $\text{gênero}(\sigma) \geq 2$ então W é identicamente zero, V gera uma fibração elíptica e $\mathcal{L}$ é um fibrado de Seifert sobre Σ . Se $\text{gênero}(\sigma) = 1$ então ou $W \equiv 0$ e $\mathcal{L}$ é novamente um fibrado de Seifert ou W não tem singularidades e L é a suspensão por um automorfismo de uma curva elíptica. De fato, no segundo caso para um detalhe mais analítico (X é um fibrado holomorfo [2] na seção V.5, desde que é uma superfície primaria de Kodaira ou uma hiper superfície ...) mostra que $\mathcal{L}$ é a suspensão de um automorfismo periódico, e por isso é um fibrado de Seifert sobre um orbifold de gênero zero.

Mantem-se o caso $\text{gênero}(\Sigma) = 0$. A fibração $X \rightarrow \Sigma$ tem fibras não singulares (a singularidade seria singularidade de V) mas tem varias fibras $F_1, \dots, F_n$, com multiplicidades $m_1, \dots, m_n$. Pela fórmula de Noether (dando $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$, pois $c_1^2(X) = c_2(X) = 0$) e fórmula de Kodaira para o fibrado canônico de X ([2] na seção V.12.4) segue-se que, por causa de $Kod(X) \geq 0$, a desigualdade

$$n - 2 \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j}$$

é verdadeira (ver a prueba de [2] na seção V.12.4). Em particular, para $n \geq 3$. Mas as fibras multiplex são invariantes por V , de modo que W tem pelo menos 3 singularidades, isto é, $W \equiv 0$. Se segue que $\mathcal{L}$ é uma fibração de Seifert, sobre uma orbifold de gênero zero. $\square$

O último caso, onde X é de classe VII, é um pouco elaborado e requiere de um resultado de Inoue [24]. De $c_2(X) = 0$ e $\dim H^1(X, \mathbb{R}) = 1$ obtemos $\dim H^2(X, \mathbb{R}) = 0$. Podemos distinguir dois casos.

Lema 2.5.4. *Se X não conteve qualquer curva holomorfa, então $\mathcal{L}$ é uma folheação estável forte.*

Demonstração: A existência de uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ em X garante a existência de um fibrado linear F sobre X tal que o fibrado $\Omega^1 \otimes F$ admite seção não trivial: apenas tomar como F o fibrado normal $TX/T\mathcal{F}$. Podemos aplicar o Teorema de Inoue [24] para deduzir que X é uma “superfície de Inoue”. Mais precisamente, e porque X não tem campo de vector holomorfo, temos $X = S_{N,p,q,r;t}^{(+)}$ para adequado $N \in SL(2, \mathbb{Z})$ hiperbólica, $p, q, r \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{C}$ ([24] página 273-280). Desde o ponto de vista real, X é um fibrado linear sobre o círculo cujas fibras é um círculo fibrado sobre o 2-toro. O campo vetorial V gera uma $\mathbb{C}^*$ -ação tangente à fibras de X (sob multiplicação por uma constante existe um único campo vetorial em X), e o quociente de X por S^1 -ação é um T^2 -fibrado por S^1 , cuja monodromia é representado por N . Assim a folheação $\mathcal{L}$ é a folheação estavelmente forte correspondente ao automorfismo hiperbólico N . Observamos que as superfícies $S_{N,p,q,r;t}^{(-)}$ (que são duplamente coberto pelas superfícies da classe $S_{N,p,q,r;t}^{(+)}$ iria aparecer em nosso contexto, se estamos considerando também folheações não orientáveis). $\square$

Observação 2.5.1. (*E. Ghys*): o uso do teorema difícil de Inoue pode ser evitado: Kodaira comentou em [27] que uma folheação F como que sob análise é transversalmente $\mathbb{C}$ -projetiva, portanto, desde que $\mathcal{L}$ também é transversalmente $\mathbb{C}$ -projetiva e podemos aplicar o Teorema B.

Lema 2.5.5. *Se X contém curvas holomorfas, então $\mathcal{L}$ é ou uma folheação de Poincaré, ou uma suspensão de um automorfismo de $\bar{\mathbb{C}}$, ou uma folheação $\mathbb{C}$ -afim transversal em $S^2 \times S^1$.*

Demonstração: O teorema de Kodaira ([2], V.18.6-7) afirma que X é uma superfície de Hopf, isto é, o recobrimento universal $\tilde{X}$ é $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. O recobrimento finito de X é difeomorfo a $S^2 \times S^1$. Consideremos a fibração circular de X , gerada por o fluxo real de V .

As fibras de esta fibração permanecem sendo círculos quando levantamos ao recobrimento universal, então o levantamento do campo vetorial $\tilde{V}$ (definido em todo $\mathbb{C}^2$ por Hartog) gera uma $\mathbb{C}^*$ -ação, singular apenas na origem e sim órbitas “múltiplas”.

Campos vetoriais holomorfos em uma superfície de Hopf são bem conhecidos [33], e encontramos que $\tilde{V}$ é conjugado à (parte real de) $2\pi i(z \frac{\partial}{\partial z} + \delta w \frac{\partial}{\partial w})$, $\delta \in \{-1, 1\}$. Sob S^1 -ação é tangente à esfera $\{|z|^2 + |w|^2 = \text{constante}\}$ e induzimos em ele uma fibração de Hopf. Nos obtemos facilmente que M é difeomorfo a $S^2 \times S^1$ e $\mathcal{L}$ é ou uma suspensão ($\delta = 1$) ou uma folheação transversalmente $\mathbb{C}$ -afim ($\delta = -1$).

Se, pelo o contrario, as fibras de X são levantadas em retas em $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, então estas retas “convergem” ao origem, que deve ser uma singularidade de $\tilde{V}$ em o domínio de Poincaré (ver [1]). Então é fácil ver que M admite recobrimento $\tilde{M}$ difeomorfo a S^3 , tal que o levantamento de $\mathcal{L}$ coincide com a folheação induzida por a singularidade de $\tilde{V}$. Por definição, $\mathcal{L}$ é uma folheação de Poincaré. $\square$

Referências

- [1] V.I. Arno'ld: Chapîtres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires. Mir, Moscou, 1980.
- [2] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: Compact complex surfaces. Springer, Berlin, 1984.
- [3] A. Bonani, N. Karouri, B. Roynette, H. Reinhard: Processus de diffusion associé à um operateur elliptique dégénéré. Ann. Inst. Poincaré, Sec. B, Vol. VII 31-80, 1971.
- [4] J.-M. Bony: Principe du maximum; inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier 19, 277-304, 1969.
- [5] Glem E. Bredon: Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [6] M. Brunella, E. Ghys: Umbilical foliations and tranversely holomorphic flows, J. Differ. Geom. 41, 1995.
- [7] M. Brunella: On transeversely holomorphic flows I. Invent. math. Phys. 126, 265-279, 1996.
- [8] C. Camacho, P. Sad: Pontos singulares de equações diferenciais analíticas. 16° Coloquio Brasileiro de Matemática, Publ. do IMPA, 1987.
- [9] A. Candel, L. Conlon: Foliations I, American Math. Society, 2000.
- [10] A. Candel, L. Conlon: Foliations II, American Math. Society, 2003.
- [11] Y. Carrière: Flots Riemanniens, in structure transverse des feuilletages. Astérisque 116, 31-52, 1984.
- [12] Y. Carrière, E. Ghys: Feuilletages totalment géodésiques. An. Acad. Brasil Ciênc. 53, 427-432, 1981.
- [13] K.D. Elworthy: Stochastic differential equations on manifolds. Cambridge Univ. Press, 1982.
- [14] K. Fritzsche, H. Grauert: From Holomorphic Functions to Complex Manifolds, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [15] R. C. Gunning: Introduction to holomorphic functions of several variables, Vol. III, Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, 1990.

- [16] H. Geiges, J. Gonzalo: Contact geometry and complex surfaces. *Invent Math.* 121, 147-209, 1995.
- [17] E. Ghys: Flots transversalement affines et tissus feuilletés. *Mém. S.M.F.* 119, 123-150, 1991.
- [18] E. Ghys: On transversely holomorphic flows II. *Invent. math.* 126, 281-286, 1996.
- [19] E. Ghys, X. Gomez-Mont: The space of wandering leaves of a transversely holomorphic foliation, 1993.
- [20] A. Haefliger, D. Sundararaman: Complexification of transversely holomorphic foliations. *Math. Ann.* 272, 23-27, 1985.
- [21] M. W. Hirsch: *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [22] N. Ikeda, S. Watanabe: *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [23] E.L. Ince: *Ordinary differential equations*, Dover, 1956.
- [24] M. Inoue: On surfaces of class VII_0 . *Invent Math.* 24, 269-310, 1974.
- [25] J. R. Jachymski: Another proof of the Markov-Kakutani theorem, and an extension. *Math. Jpn.* 47, 19-20, 1998.
- [26] S. Kakutani: Two fixed-point theorems concerning bicomact convex sets. *Proc. Imp. Acad. (Tokyo)* 14, 242-245, 1938.
- [27] K. Kodaira: On the structure of compact complex surfaces III. *Am. J. Math.* 90, 55-83, 1968.
- [28] A. Lins Neto, B. Azevedo Scárdua: *Folheações algébricas complexas*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [29] J. M. Lee: *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [30] A. Markov: Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens. *C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS* 1, 311-313, 1936.
- [31] A. L. Neto, C. Camacho: *Teoria geométrica das folheações*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1979.
- [32] J. Sotomayor: *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1979.
- [33] D. Sundararaman: On holomorphic vector fields (maps) with singularities (fixed points) of Poincaré type. *Aport. Matem., Notas de Investigación* 1, 127-151, 1985.
- [34] M. Tsuji: *Potential theory in modern function theory*. Maruzen, Tokio, 1959.
- [35] I. Zelenko, M. Zhitomirskii: Rigid paths of generic 2-distributions on 3-manifolds. *Duke Math. J.* 79, 281-307, 1995.