

A Continuidade Automática de Homomorfismos entre Álgebras de Banach

Nelson Borda Duran

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Rio de Janeiro, 25 de Novembro de 2013.

A Continuidade Automática de Homomorfismos entre Álgebras de Banach

Nelson Borda Duran

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - IM-UFRJ
Presidente

Prof^a. Dra. Luiza Amália de Moraes - IM-UFRJ

Prof. Dr. Alex Farah Pereira - UFF

Rio de Janeiro, 25 de Novembro de 2013.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Rosalino Borda e Juana Duran, que sempre me apoiaram e me incentivaram a estudar. Aos meus irmãos e todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que eu chegasse até aqui: parentes, amigos e, em especial, minha namorada Elena, que me apoiou ao longo do mestrado.

Ao meu orientador, Antonio Roberto, pela compreensão em alguns momentos difíceis, pela paciência e dedicação ao desenvolvimento da tese.

Aos professores da banca pelas sugestões: Alex Farah e, em especial, Luiza Amália, pelo tempo dedicado para melhorar o trabalho.

Ao meu orientador da graduação, Eugenio Cabanillas, pelo incentivo a prosseguir nos estudos.

Aos meus amigos peruanos, colombianos e brasileiros, que fizeram minha estadia aqui agradável, e à CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos alguns resultados de continuidade automática para homomorfismos entre álgebras de Banach. Inicialmente consideramos o caso clássico no qual a álgebra de Banach de chegada, isto é, o contradomínio do homomorfismo, é semi-simples e comutativa com unidade. Utilizando um resultado devido a Johnson, cuja prova incluímos na dissertação, estendemos o resultado anterior para álgebras semi-simples com unidade não necessariamente comutativas. Esse mesmo resultado de Johnson também garante que uma álgebra de Banach semi-simples com unidade tem uma única norma completa. Na segunda parte da dissertação mostramos o Teorema Fundamental de Bade-Curtis e algumas de suas consequências. Finalmente consideramos o caso de homomorfismos que têm como domínio espaços de funções contínuas complexas definidas em espaços compactos de Hausdorff.

Palavras-chave: álgebra de Banach, teoria de Gelfand, continuidade automática, teorema de Johnson, teorema de Bade-Curtis.

Abstract

In this dissertation we present some results of automatic continuity for Banach algebras homomorphisms. Initially we consider the classic case in which the target Banach algebra, i.e., the counter-domain of the given homomorphism is a semisimple commutative Banach algebra with unity. Using a result due to Johnson, whose proof is included here, we extend the previous result for not necessarily commutative semisimple Banach algebras with the unit. Further, we show that Johnson's result also ensures that a semisimple Banach algebra with unit has a unique complete norm. In the second part of the dissertation we present the Fundamental Theorem of Bade-Curtis and some of its consequences. Finally, we consider the case of homomorphisms whose domain is the space of continuous complex functions defined on a compact Hausdorff endowed with the uniform norm.

Keywords: Banach algebras, Gelfand theory, automatic continuity, Johnson theorem, Bade-Curtis theorem.

Sumário

1	Alguns Resultados Sobre Álgebras de Banach	2
1.1	Noções Preliminares	2
1.2	Ideais, Espectros e Radicais	6
1.3	Teoria de Gelfand	18
1.4	Continuidade Automática de Homomorfismos	24
2	Sobre a Continuidade Automática	29
2.1	O Espaço Separante de um Operador Linear	29
2.2	O Teorema de Johnson	32
2.3	Reformulação do Teorema de Johnson	38
2.4	O Teorema de Bade - Curtis	46
	Referências	62

Introdução

O objetivo central de nosso trabalho é estudar condições sobre álgebras de Banach que permitam garantir que um dado homomorfismo entre elas seja contínuo.

No primeiro capítulo apresentamos, de forma concisa, os conceitos básicos e resultados clássicos de Teoria de Álgebras de Banach, dos quais fazemos uso no capítulo subsequente. Dessa forma o capítulo 1 é centrado na Teoria de Gelfand, sobre a qual fazemos breve apresentação. Concluimos o capítulo com um primeiro resultado, também clássico, de continuidade automática.

No segundo capítulo, que é centrado nos Teoremas de Johnson e Bade-Curtis, apresentamos diversas extensões do resultado preliminar do capítulo anterior. A prova desses dois resultados envolve várias técnicas das quais destacamos àquela introduzida por Ransford [11], que difere completamente da prova original [6]. As outras provas aqui apresentadas diferem ligeiramente das originais contendo algumas simplificações.

Capítulo 1

Alguns Resultados Sobre Álgebras de Banach

1.1 Noções Preliminares

Com o objetivo de tornar o texto o mais auto-suficiente quanto possível apresentamos nesta seção uma coletânea de conceitos e resultados que nos serão úteis posteriormente. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em [3], [4], [5] e [8]. No que segue $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

Definição 1.1.1. *Uma álgebra A sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial A sobre $\mathbb{K}$, tal que para cada par ordenado de elementos $x, y \in A$ está definido um produto $xy \in A$ com as propriedades:*

$$(i) \quad (xy)z = x(yz).$$

$$(ii) \quad x(y + z) = xy + xz.$$

$$(iii) \quad (x + y)z = xz + yz.$$

$$(iv) \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

para todos $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então A é dita real ou complexa, respectivamente.

A é dita comutativa (ou abeliana) se o produto é comutativo, isto é, $xy = yx$ para todos $x, y \in A$.

A é chamada uma álgebra com unidade se A contém um elemento $e_A = e$ chamado unidade de A , tal que para todo elemento $x \in A$ temos que $xe = ex = x$.

Definição 1.1.2. *Seja A uma álgebra com unidade. Um elemento $a \in A$ é invertível se existe um elemento $b \in A$ com $ab = ba = e$. O elemento b , chamado inverso de a , é único e denotado por a^{-1} . O conjunto dos elementos invertíveis é denotado por $\text{Inv } A$.*

Observação 1.1.3. *Se $a, b \in \text{Inv } A$, então $ab \in \text{Inv } A$ e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Definição 1.1.4. *Seja uma álgebra A . Uma norma de álgebra sobre A é uma aplicação $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(A, \|\cdot\|)$ é um espaço normado e para quaisquer $a, b \in A$, vale*

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

A álgebra normada $(A, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach se $(A, \|\cdot\|)$ é completa.

Vejamos agora alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1. *Seja S um conjunto não vazio. Então $\mathbb{C}^S$ denota o conjunto das funções de S em $\mathbb{C}$. Definimos as operações algébricas pontuais por*

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(s) &= \alpha f(s) + \beta g(s), \\ (fg)(s) &= f(s)g(s), \\ 1(s) &= 1 = e \end{aligned}$$

para todos $s \in S$, $f, g \in \mathbb{C}^S$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então $\mathbb{C}^S$ é uma álgebra comutativa com unidade.

Escrevemos $\ell^\infty(S)$ como o subconjunto das funções limitadas sobre S , que também é uma álgebra. Definimos a norma uniforme sobre S por

$$\|f\|_S = \sup\{|f(s)| : s \in S\}, \text{ para todo } f \in \ell^\infty(S).$$

É fácil verificar que $(\ell^\infty(S), \|\cdot\|_S)$ é uma álgebra de Banach com unidade.

Exemplo 2. *Seja X um espaço topológico. Escrevemos $C(X)$ para denotar o espaço de todas as funções contínuas em X com valores em $\mathbb{K}$. Com as operações pontuais definidas no Exemplo 1, $C(X)$ se torna uma álgebra. Seja $C^b(X)$ para denotar a álgebra das funções contínuas limitadas em X . Temos que $(C^b(X), \|\cdot\|_X)$ é uma álgebra de Banach com unidade.*

Tomando agora um espaço compacto Ω , temos que $C^b(\Omega) = C(\Omega)$, e assim $(C(\Omega), \|\cdot\|_\Omega)$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.

Exemplo 3. *Seja E um espaço de Banach. O espaço $\mathcal{B}(E)$, representa o espaço de Banach dos operadores lineares contínuos $T : E \rightarrow E$. Definimos o produto de dois operadores S e T em $\mathcal{B}(E)$ através da composição:*

$$(ST)(x) = (S \circ T)(x) = S(Tx), \text{ para todo } x \in E.$$

$\mathcal{B}(E)$ se torna uma álgebra e como $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ para todos $S, T \in \mathcal{B}(E)$, obtemos que $(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach com unidade e a unidade de $\mathcal{B}(E)$ é o operador identidade I . Assim $\mathcal{B}(E)$ é uma álgebra de Banach não comutativa com unidade.

Exemplo 4. Seja U um conjunto aberto não vazio de $\mathbb{C}$ ou $(\mathbb{C}^n)$. Representamos por $H(U)$ o conjunto das funções analíticas (ou holomorfas) sobre U . Temos que $H(U)$ é uma álgebra com as operações pontuais. Agora para cada subconjunto compacto K de U , definimos

$$p_K(f) = |f|_K, \text{ para toda } f \in H(U).$$

Então cada p_K é uma seminorma em $H(U)$. O espaço $H(U)$ é um espaço de Fréchet com respeito à topologia gerada pela família destas seminormas. Nesta topologia, $f_n \rightarrow f$ se, e somente se, (f_n) converge para f uniformemente sobre cada subconjunto compacto de U . Com esta topologia $H(U)$ é uma álgebra de Fréchet (ver [3], p. 185), pois, temos que $p_K(fg) \leq p_K(f)p_K(g)$. No entanto, a álgebra $H(U)$ não é uma álgebra de Banach.

Uma álgebra relacionada com a anterior é $H^\infty(U)$, a álgebra das funções analíticas limitadas sobre U . É possível verificar que esta álgebra é uma álgebra de Banach com respeito à norma uniforme $|\cdot|_U$.

Vejamos agora o seguinte lema, o qual utilizaremos para provar um resultado central.

Lema 1.1.5. Seja (w_n) uma sequência em $\mathbb{R}^+$ (reais positivos). Suponha que $w_{m+n} \leq w_m w_n$ para $m, n \in \mathbb{N}$ e seja $\rho = \inf\{w_n^{1/n}; n \in \mathbb{N}\}$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n^{1/n} = \rho$.

Demonstração. Pela definição de ρ , temos que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $w_m^{1/m} < \rho + \epsilon$.

Seja $M = \max\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Pelo Algoritmo de Euclides, para $n > m$ existem $q \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $n = mq + r$ e $0 \leq r < m$. Então, por hipótese, se $n > m$, temos que

$$w_n = w_{mq+r} \leq w_{mq} w_r \leq w_m^q w_r.$$

Como $w_r \leq M$ e $w_m < (\rho + \epsilon)^m$, obtemos que $w_n \leq M(\rho + \epsilon)^{qm}$, donde

$$w_n^{1/n} \leq M^{1/n} (\rho + \epsilon)^{qm/n}.$$

Dado que $\frac{mq}{n} + \frac{r}{n} = 1$, então

$$\limsup (\rho + \epsilon)^{qm/n} = \limsup (\rho + \epsilon)^{1-r/n} = \rho + \epsilon \quad \text{e} \quad \limsup M^{1/n} = 1$$

logo

$$\limsup w_n^{1/n} \leq \rho + \epsilon.$$

Como $\rho \leq w_n^{1/n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que $\lim w_n^{1/n} = \rho$.

□

Proposição 1.1.6. *Seja $(A, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada com unidade. Para cada $a \in A$, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf\{\|a^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\} \leq \|a\|.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $w_n = \|a^n\|$. Como A é uma álgebra normada, temos que para $m, n \in \mathbb{N}$

$$w_{m+n} = \|a^{m+n}\| = \|a^m \cdot a^n\| \leq \|a^m\| \cdot \|a^n\| = w_m w_n.$$

Pelo Lema 1.1.5, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n^{1/n} = \inf\{\|a^n\|^{1/n}; n \in \mathbb{N}\} \leq \|a\|.$$

□

Teorema 1.1.7. *Seja $(A, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Então*

- (i) *Se $a \in A$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} < 1$, então $e - a \in \text{Inv } A$.*
- (ii) *$C = \{b \in A : \|e - b\| < 1\} \subset \text{Inv } A$.*
- (iii) *$\text{Inv } A$ é um conjunto aberto de A .*
- (iv) *A aplicação:*

$$\begin{aligned} h : \text{Inv } A &\longrightarrow \text{Inv } A \\ a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. (i) Por hipótese $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} < 1$. Segue então do critério da raiz, que a

série $e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge na álgebra A e é fácil ver que $e + \sum_{n=1}^{\infty} a^n = (e - a)^{-1}$. Então $e - a \in \text{Inv } A$.

- (ii) Seja $c \in C$ arbitrário, então $c \in A$ e $\|e - c\| < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|(e - c)^n\|^{1/n} \leq \|e - c\| < 1$, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(e - c)^n\|^{1/n} = \inf\{\|(e - c)^n\|^{1/n}; n \in \mathbb{N}\} \leq \|e - c\| < 1.$$

Por (i), segue que $c = e - (e - c) \in \text{Inv } A$ e portanto a inclusão é válida. Note ainda que $0 \notin C$, pois $1 \leq \|e\|$.

(iii) Seja $a \in \text{Inv } A$. Tomando $b \in A$ com $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, temos que $\|a^{-1}b\| < 1$.

Assim, analogamente à prova de (ii), se $\|a^{-1}b\| < 1$, então $e - a^{-1}b \in \text{Inv } A$ e como $a - b = a(e - a^{-1}b)$, usando a Observação 1.1.3, obtemos que $a - b \in \text{Inv } A$.

(iv) Sejam $a, b \in \text{Inv } A$ com $\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|$. Dado que $b^{-1} - a^{-1} = b^{-1}(a - b)a^{-1}$, temos

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| = \|b^{-1}(a - b)a^{-1}\| \leq \|b^{-1}\| \cdot \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| \leq 2\|b - a\| \cdot \|a^{-1}\|^2$$

então

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq 2\|b - a\| \cdot \|a^{-1}\|^2.$$

Vejamos agora a continuidade em $a \in \text{Inv } A$. Seja $b - a = x$ então

$$\|h(a + x) - h(a)\| = \|(a + x)^{-1} - a^{-1}\| \leq 2\|x\| \cdot \|a^{-1}\|^2$$

com $\|x\| \leq \frac{\|a^{-1}\|}{2}$, logo tomando o limite quando $x \rightarrow 0$, obtemos a continuidade de h .

□

1.2 Ideais, Espectros e Radicais

Definição 1.2.1. Sejam A uma álgebra com unidade e $a \in A$. Definimos o conjunto resolvente de a por

$$\rho_A(a) = \{z \in \mathbb{C} : ze - a \in \text{Inv } A\}.$$

A função resolvente de a , é a função

$$\begin{aligned} R_a : \rho_A(a) &\longrightarrow \text{Inv } A \\ z &\longmapsto (ze - a)^{-1}. \end{aligned}$$

O espectro de a , denotado por $\sigma_A(a)$, é o complemento de $\rho_A(a)$ em $\mathbb{C}$

$$\sigma_A(a) = \mathbb{C} \setminus \rho_A(a).$$

Escrevemos geralmente $\rho(a)$ ao invés de $\rho_A(a)$ e $\sigma(a)$ ao invés de $\sigma_A(a)$, etc...

Sejam $x, y \in \text{Inv } A$. Para cada $z, w \in \rho(a)$, considere $x = we - a$ e $y = ze - a$. Sabemos que $x^{-1} - y^{-1} = y^{-1}(y - x)x^{-1}$, então

$$(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1} = (ze - a)^{-1}((ze - a) - (we - a))(we - a)^{-1},$$

donde resulta a identidade

$$(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1} = (z - w)(ze - a)^{-1}(we - a)^{-1}$$

que pode ser expressa na forma

$$R_a(w) - R_a(z) = (z - w)R_a(z)R_a(w). \quad (1.1)$$

Para $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{M}_n$, onde $\mathbb{M}_n$ denota o espaço das matrizes quadradas de ordem n com entradas em $\mathbb{C}$, o espectro da matriz T é o conjunto finito de autovalores de T .

Definição 1.2.2. *Sejam A uma álgebra com unidade e $a \in A$. O raio espectral de a é definido como*

$$\nu_A(a) = \nu(a) = \sup\{|z| : z \in \sigma(a)\}.$$

O elemento a é chamado *quasi-nilpotente* se $\nu(a) = 0$ (isto é, $\sigma(a) = \{0\}$). O conjunto dos elementos *quasi-nilpotentes* é denotado por $\mathfrak{D}(A)$.

Proposição 1.2.3. *Sejam A uma álgebra de Banach com unidade e $a \in A$. Então o raio espectral satisfaz*

$$\nu(a) \leq \|a\|.$$

Assim obtemos a limitação de $\sigma(a)$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$ qualquer, suponha que $\|a\| < |z|$. Então $\|z^{-1}a\| < 1$ e pelo Teorema 1.1.7 (ii), obtemos que $e - z^{-1}a \in \text{Inv } A$. Donde $a - ze = -z(e - z^{-1}a) \in \text{Inv } A$. Logo $z \in \rho(a)$.

Portanto, para todo $z \in \sigma(a)$, temos que $|z| \leq \|a\|$, donde segue que $\nu(a) \leq \|a\|$.

□

Para $f \in C(\Omega)$, o conjunto $\sigma(f)$ é igual a imagem de f (isto é $\sigma(f) = f(\Omega)$) e o raio espectral é $\nu(f) = |f|_\Omega$ de modo que nesse caso o único elemento quasi-nilpotente é 0.

Teorema 1.2.4 (Teorema do Liouville). *Sejam X um espaço normado complexo e uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ analítica em todo $\mathbb{C}$ (isto é, inteira). Se existe um $M > 0$, tal que $\|f(z)\| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $f(z)$ é constante.*

Demonstração. Ver [1], p. 309.

□

Teorema 1.2.5 (Hahn-Banach). *Seja X um espaço normado. Dado $x_0 \in X$ diferente de zero, existe $f \in X'$ (f funcional linear e limitado), tal que*

$$\|f\| = 1 \quad \text{e} \quad f(x_0) = \|x_0\|.$$

Observação 1.2.6. *O Teorema acima é na verdade um corolário do teorema de extensão de Hahn-Banach. A prova desse teorema, assim como a do corolário mencionado, pode ser encontrada em [5], que contém muitas outras consequências e interpretações desse resultado fundamental.*

Teorema 1.2.7 (Teorema de Cauchy). *Sejam X um espaço de Banach e $U \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto e conexo), com $f : U \rightarrow X$ uma função analítica e Γ um caminho fechado simples em U , então*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Ver [10], p. 268.

□

Proposição 1.2.8. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade e $a \in A$.*

- (i) *O resolvente $\rho(a)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$.*
- (ii) *Para cada $\lambda \in A'$, onde A' denota o espaço dual de A , temos que a função $\lambda \circ R_a$ é analítica sobre $\rho(a)$.*
- (iii) *O espectro $\sigma(a)$ é um conjunto compacto não vazio.*
- (iv) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $r > \nu(a)$, temos que*

$$a^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \zeta^n (\zeta e - a)^{-1} d\zeta.$$

- (v) $\nu(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}.$

Demonstração. (i) A função

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{C} &\longrightarrow A \\ z &\longmapsto ze - a \end{aligned}$$

é contínua. Pelo Teorema 1.1.7 (iii), temos que $\text{Inv } A$ é aberto em A e, conseqüentemente, o conjunto $\rho(A) = \theta^{-1}(\text{Inv } A)$ é aberto em $\mathbb{C}$.

(ii) Fixando $z \in \rho(A)$, escolha $w \in \rho(A) \setminus \{z\}$ arbitrário. Seja f a função

$$f = \lambda \circ R_a : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{C}$$

então

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{(\lambda \circ R_a)(w) - (\lambda \circ R_a)(z)}{w - z}.$$

Pela linearidade de λ e a equação (1.1), temos que

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lambda \left(\frac{R_a(w) - R_a(z)}{w - z} \right) = -\lambda(R_a(w)R_a(z)).$$

Tomando o limite, quando $w \longrightarrow z$ e usando o Teorema 1.1.7 (iv), obtemos que

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} \longrightarrow -\lambda(R_a(z)^2).$$

Portanto f é analítica sobre $\rho(a)$.

(iii) Por (i), o espectro é fechado. Pela Proposição 1.2.3, temos que o espectro é limitado e portanto é compacto.

Vejamos agora que $\sigma(a) \neq \emptyset$, vamos assumir por contradição que $\sigma(a) = \emptyset$, então $\rho(a) = \mathbb{C}$. Tomando $\lambda \in A'$, por (ii), obtemos que a função $f = \lambda \circ R_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é inteira. Mas

$$R_a(z) = (ze - a)^{-1} = [z(e - z^{-1}a)]^{-1} = z^{-1}(e - z^{-1}a)^{-1}.$$

Logo quando $z \longrightarrow \infty$, obtemos que $R_a(z) \longrightarrow 0$ e pela continuidade de λ temos que $f(z) = (\lambda \circ R_a)(z) \longrightarrow 0$.

Assim, dado $R > 0$, existe $C > 0$, tal que se $|z| > C$, então $|f(z)| < R$. Como o conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq C\}$ é compacto, pela continuidade de f , temos que $f(D)$ é compacto, donde para $|z| \leq C$, vale $|f(z)| < N$.

Assim, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e pelo Teorema de Liouville 1.2.4, temos que f é constante. Portanto, para todo $z \in \mathbb{C}$, resulta que $0 = f(z) = (\lambda \circ R_a)(z)$, e isto vale para todo $\lambda \in A'$.

Como $R_a(0) = (-a)^{-1} \neq 0$, pelo Teorema de Hahn-Banach 1.2.5 existe $\phi \in A'$, tal que $\phi(R_a(0)) = \|R_a(0)\| \neq 0$. Em particular, tomando $\lambda = \phi$, temos que $(\phi \circ R_a)(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Logo $0 = (\phi \circ R_a)(0) = \|R_a(0)\|$, que é uma contradição. Assim $\sigma(a)$ não é vazio.

(iv) Usando prova análoga a (ii), obtemos que R_a é analítica sobre $\rho(a)$. Se $a \in A$ e fixando $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} g : \rho(a) &\longrightarrow A \\ z &\longmapsto z^n(ze - a)^{-1}. \end{aligned}$$

Como a função z^n é analítica, então o produto $z^n R_a$ é também uma função analítica. Fixemos $r > \nu(a)$ e consideremos $r_1 > \max\{r, \|a\|\}$ e $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1\}$, portanto a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} = (ze - a)^{-1} \quad (1.2)$$

converge uniformemente sobre Γ , pois

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{a^k}{z^{k+1}} \right\|^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\|a\|^k}{|z|^{k+1}} \right)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|a\|}{|z|^{(k+1)/k}} = \frac{\|a\|}{|z|} = \frac{\|a\|}{r_1} < 1.$$

Por (1.2), temos

$$g(z) = z^n(ze - a)^{-1} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{n-k-1}.$$

Agora, como a série converge uniformemente

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \int_{\Gamma} z^n(ze - a)^{-1} dz = \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{n-k-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_{\Gamma} z^{n-k-1} dz$$

então

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \int_{\Gamma} f_k(z) dz \quad (1.3)$$

onde, para $n \neq k$ a função f_k está definida por

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Como $r_1 > \|a\|$, restringindo f a $\rho(a)$, pelo Teorema de Cauchy 1.2.7, obtemos que $\int_{\Gamma} f_k(z) dz = 0$ quando $0 \leq k \leq n-1$. Pela formula integral de Cauchy $\int_{\Gamma} f_k(z) dz = 0$ para $k > n$.

Agora, se $n = k$, para $|z| = r_1$, temos que $z = r_1 e^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$, então

$$\int_{\Gamma} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{r_1 i e^{it}}{r_1 e^{it}} dt = 2\pi i.$$

Portanto, da equação (1.3), resulta

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \int_{\Gamma} z^n (ze - a)^{-1} dz = a^n 2\pi i$$

logo

$$a^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^n (ze - a)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} z^n (ze - a)^{-1} dz.$$

Como g é analítica em $\{z : r \leq |z| \leq r_1\}$, pelo Teorema de Cauchy temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^n (ze - a)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} z^n (ze - a)^{-1} dz = a^n.$$

- (v) Seja $z \in \sigma(a)$ e $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $z^n \notin \sigma(a^n)$, então $z^n e - a^n \in \text{Inv } A$ e existe $b \in A$, tal que

$$b(z^n e - a^n) = e = (z^n e - a^n)b.$$

Como

$$\begin{aligned} z^n e - a^n &= (ze - a)(z^{n-1}e + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= (z^{n-1}e + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1})(ze - a), \end{aligned}$$

temos que $x = (z^{n-1}e + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1})b \in A$ é uma inversa à direita de $ze - a$. Analogamente $y = b(z^{n-1}e + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1}) \in A$ é uma inversa à esquerda de $ze - a$, então $x = y$ e este elemento é invertível.

Obtemos que $ze - a \in \text{Inv } A$, o que contradiz a hipótese que $z \in \sigma(a)$. Donde temos que $z^n \in \sigma(a^n)$.

Pela Proposição 1.2.3, vale $|z|^n \leq \|a^n\|$ e assim $\nu(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n} = \lim \|a^n\|^{1/n}$.

Tomando $r > 0$ com $r > \nu(a)$, e definindo $M_r = \sup\{\|R_a(z)\| : |z| = r\}$. Então por (iv), temos

$$\begin{aligned} \|a^n\| &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{|\zeta|=r} \zeta^n (\zeta e - a)^{-1} d\zeta \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} |\zeta|^n \|(\zeta e - a)^{-1}\| |d\zeta| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} r^n \|R_a(\zeta)\| |d\zeta| \leq \frac{r^n}{2\pi} (2\pi r M_r) = r^{n+1} M_r \end{aligned}$$

logo

$$\|a^n\| \leq r^{n+1} M_r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Isto mostra que a desigualdade $\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq r$, é válida para qualquer $r > \nu(a)$. Então se tomamos o limite quando $r \rightarrow \nu(a)$, obtemos que $\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq \nu(a)$, donde

$$\nu(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n} = \lim \|a^n\|^{1/n} \leq \limsup \|a^n\|^{1/n} \leq \nu(a)$$

o que mostra o resultado.

□

A parte (iii) do resultado acima é um dos teoremas fundamentais das álgebras de Banach, e a parte (v) é a fórmula do raio espectral. Observe que o raio espectral é o raio do menor disco fechado em $\mathbb{C}$ com centro em 0 que contém $\sigma(a)$.

Em consequência da parte (v), obtemos que $a \in \mathfrak{D}(A)$ se, e somente se, $\|a^n\|^{1/n} \rightarrow 0$;

$a^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $\nu(a) < 1$.

Exemplo 5. Sejam S um conjunto discreto não vazio e $w : S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ (os reais positivos e o zero) uma função de S em $\mathbb{C}$, definimos

$$\ell^1(S, w) = \left\{ f = \sum_{s \in S} f(s) \delta_s \in \mathbb{C}^S : \sum_{s \in S} |f(s)| w(s) < \infty \right\}$$

onde, para $s \in S$, temos que $\delta_s = \chi_{\{s\}}$ denota a função característica do subconjunto $\{s\}$ de S .

Consideremos $\ell^1(S, w)$ munido da soma pontual e da multiplicação por escalar usual. Definindo

$$\|f\|_w = \sum_{s \in S} |f(s)| w(s), \text{ para toda } f \in \ell^1(S, w).$$

Verifica-se que $(\ell^1(S, w), \|\cdot\|_w)$ é um espaço de Banach. O espaço $\ell^1(S, w)$ é separável se, e somente se, S é enumerável.

Vamos considerar em $\ell^1(S, w)$ duas estruturas de álgebra. No primeiro caso consideramos o produto pontual $\cdot$ sobre $\mathbb{C}^S$. Se a função w é limitada, então $(\ell^1(S, w), \cdot, \|\cdot\|_w)$ é uma álgebra de Banach comutativa. Esta álgebra tem unidade se, e somente se, S é finito.

Para considerar o segundo caso, suponhamos que S seja um semigrupo, não necessariamente abeliano. Um peso sobre S é uma aplicação $w : S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que

$$w(st) \leq w(s)w(t), \text{ para todos } s, t \in S.$$

No caso em que S tem unidade, $w(e) = 1$.

Dado $s \in S$, considere $x_n = w(s^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_{m+n} \leq x_m x_n$ para todos $m, n \in \mathbb{N}_0$. Se $\rho_w = \inf\{w(s^n)^{1/n} = x_n^{1/n} : n \in \mathbb{N}_0\}$, pelo Lema 1.1.5, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w(s^n)^{1/n} = \rho_w.$$

Um peso sobre $S = \mathbb{N}_0$ é chamado uma sequência de peso.

Definimos o produto $\star$, chamado convolução em $\ell^1(S, w)$ por

$$(f \star g)(t) = \sum_{rs=t} f(r)g(s), \text{ para todos } f, g \in \ell^1(S, w), t \in S.$$

Note que, se $f, g \in \ell^1(S, w)$, temos que

$$\sum_{t \in S} \left\{ \sum_{rs=t} |f(r)| \cdot |g(s)| \right\} w(t) \leq \sum_{r \in S} |f(r)| w(r) \cdot \sum_{s \in S} |g(s)| w(s) = \|f\|_w \|g\|_w.$$

Observe que $\delta_s \star \delta_t = \delta_{st}$ para todos $s, t \in S$.

e assim $\ell^1(S, w)$ é uma álgebra de Banach com respeito ao produto definido.

Se não há elementos $r, s \in S$ tais que $rs = t$, consideramos $(f \star g)(t) = 0$. A álgebra $(\ell^1(S, w), \star, \|\cdot\|_w)$ é uma álgebra de semigrupo ponderado pelo peso w sobre S . No caso que S tem unidade, então δ_e é a unidade da álgebra. $\ell^1(S, w)$ é comutativa se e somente se S é abeliano. Em particular, a função constante 1 é um peso sobre S , a correspondente álgebra é denotada por $\ell^1(S) = (\ell^1(S), \star, \|\cdot\|_1)$.

Sejam agora, $S = \mathbb{N}_0$ e $w = (w_n)_{n=0}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{R}^+$. Então $\ell^1(S, w)$ é o conjunto das sequências $a = (a_n)_{n=0}^\infty$ com valores complexos e peso w , tais que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| w_n < \infty.$$

$\ell^1(\mathbb{N}_0, w)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_w$, definida por

$$\|a\|_w = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| w_n, \text{ para todo } a \in \ell^1(w).$$

Denotaremos w_n por $w(n)$. A sequência w é dita radical se $\rho_w = 0$.

O produto convolução $\star$, agora feito sobre $\mathbb{N}_0$ como foi definido acima, torna $\ell^1(\mathbb{N}_0, w)$ uma álgebra de Banach com unidade. Neste caso, escrevemos $\ell^1(\mathbb{N}_0, w) = \ell^1(w)$.

Vamos denotar por $\mathbb{C}[[X]]$ o conjunto das séries de potências formais

$$\mathbb{C}[[X]] = \left\{ a = (a_n)_{n=0}^\infty : a_n \in \mathbb{C}, a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right\}.$$

Para $a, b \in \mathbb{C}[[X]]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, seja $a + b = (a_n + b_n)_{n=0}^\infty$, $\alpha a = (\alpha a_n)_{n=0}^\infty$ e

$$ab = \left(\sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} \right)_{n=0}^\infty.$$

Com respeito a essas operações, $\mathbb{C}[[X]]$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Identificamos $\mathbb{C}$ com $\{(a, 0, 0, \dots) : a \in \mathbb{C}\}$, de modo que 1 é a unidade de $\mathbb{C}[[X]]$ e escrevemos X como $(0, 1, 0, 0, \dots)$, X é a indeterminada de $\mathbb{C}[[X]]$.

Identificando $\ell^1(w)$ com a subálgebra

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| X^n : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| w_n < \infty \right\}$$

de $\mathbb{C}[[X]]$, obtemos que $\ell^1(w)$ é uma álgebra de Banach de séries de potências gerada polinomialmente por X .

Como X é identificado com $(0, 1, 0, 0, \dots)$ e X^n com a sequência que tem na n -ésima coordenada 1 e as outras zero, então

$$\|X^n\|_w = \sum_{i=1}^{\infty} |X_i^n| w_i = w_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pela Proposição 1.2.8 (v), temos que

$$\nu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n\|_w^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n^{1/n}.$$

Assim X é quasi-nilpotente se, e somente se, $w_n^{1/n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$; este é o caso, por exemplo, quando $w_n = e^{-n^2}$.

Teorema 1.2.9 (Gelfand-Mazur). *Se A é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, onde todo elemento não nulo é invertível, então A é isometricamente isomorfo a $\mathbb{C}$ ($A = \mathbb{C}e$).*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow A \\ \lambda &\longmapsto \lambda e. \end{aligned}$$

Temos que φ está bem definida e é linear. Se $\varphi(\lambda) = 0$, então $\lambda e = 0$ e portanto $|\lambda| = |\lambda| \cdot \|e\| = \|\lambda e\| = 0$, donde segue que $\lambda = 0$ e obtemos que φ é injetiva.

Agora dado $a \in A$, pela Proposição 1.2.8 (iii), temos que $\sigma(a) \neq \emptyset$, e daí existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $(\lambda e - a) \notin \text{Inv } A$. Por hipótese $\lambda e - a = 0$. Assim $a = \lambda e = \varphi(\lambda)$ e φ é sobrejetiva.

Finalmente $\|\varphi(\lambda)\| = \|\lambda e\| = |\lambda| \cdot \|e\| = |\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

Definição 1.2.10. *Seja A uma álgebra. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal de A se $\mathcal{I}$ é um subconjunto de A que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $a, b \in \mathcal{I}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então $a + \alpha b \in \mathcal{I}$;*
- (ii) *Se $a \in \mathcal{I}$ e $b \in A$, então $ab \in \mathcal{I}$;*
- (iii) *Se $a \in \mathcal{I}$ e $b \in A$, então $ba \in \mathcal{I}$;*

Se $\mathcal{I}$ satisfaz apenas (i) e (ii) (respectivamente (i) e (iii)) dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal à direita (respectivamente à esquerda) de A .

Os conjuntos $\{0\}$ e A são ideais de A , ditos ideais triviais.

Um ideal $\mathcal{I}$ é dito ideal maximal se $\mathcal{I} \neq A$, e se não existe um ideal $\mathcal{J}$ com $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \subsetneq A$.

Um ideal à esquerda $\mathcal{I}$ é dito ideal maximal à esquerda se $\mathcal{I} \neq A$, e se não existe um ideal à esquerda $\mathcal{J}$ com $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \subsetneq A$. Analogamente se define um ideal maximal à direita.

Para um ideal $\mathcal{I}$ em A , $A/\mathcal{I}$ é uma álgebra quociente, quando é munida do produto

$$(a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}) = ab + \mathcal{I} \quad \text{para, } a, b \in A.$$

Além disso, se A é uma álgebra normada (Banach) e $\mathcal{I}$ é um ideal fechado em A , então $A/\mathcal{I}$ é uma álgebra normada (Banach) com a norma quociente, definida por

$$\|a + \mathcal{I}\| = \text{dist}(a, \mathcal{I}) = \inf_{c \in \mathcal{I}} \|a - c\|. \quad (1.4)$$

Teorema 1.2.11. *Seja A uma álgebra comutativa com unidade. Então todo ideal próprio de A está contido em um ideal maximal de A . Um ideal $\mathcal{J}$ é maximal se, e somente se, $A/\mathcal{J}$ é um corpo.*

Demonstração. Ver [12], p. 264.

□

Teorema 1.2.12. *Sejam A uma álgebra comutativa com unidade e $a \in A$. Então a é invertível se, e somente se, não pertence a nenhum ideal maximal de A .*

Demonstração. Ver [12], p. 264.

□

Definição 1.2.13. *Um subconjunto B de uma álgebra A é dita uma subálgebra de A se é um subespaço vetorial fechado com seu produto definido em A .*

Proposição 1.2.14. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade.*

- (i) *Se $\mathcal{I}$ é um ideal (ideal à esquerda) em A , então $\overline{\mathcal{I}}$ é também um ideal (ideal à esquerda) em A .*
- (ii) *Se $\mathcal{J}$ é um ideal maximal (ideal maximal à esquerda) em A , então $\mathcal{J}$ é fechado.*

Demonstração. (i) Sejam $a, b \in \overline{\mathcal{I}}$, então existem seqüências (a_n) e (b_n) em $\mathcal{I}$, tais que

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{e} \quad b_n \longrightarrow b.$$

Pela continuidade da adição e do produto por escalar, temos que $a_n + \alpha b_n \longrightarrow a + \alpha b$ e daí $a + \alpha b \in \overline{\mathcal{I}}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

Analogamente, usando a continuidade do produto, mostramos que se $a \in \overline{\mathcal{I}}$ e $c \in A$, então $ca \in \overline{\mathcal{I}}$ e assim $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal à esquerda em A .

- (ii) Como $\mathcal{J}$ é um ideal maximal, temos $\mathcal{J} \neq A$. Vamos assumir inicialmente que $\overline{\mathcal{J}} = A$. Assim $\mathcal{J}$ é denso em A e pelo Teorema 1.1.7 (iii), temos que $\mathcal{J} \cap \text{Inv } A \neq \emptyset$. Logo existe $c \in \mathcal{J} \cap \text{Inv } A$ e também $d \in A$, tais que $dc = e$ e como $\mathcal{J}$ é um ideal, resulta que $e \in \mathcal{J}$. Portanto $\overline{\mathcal{J}} = A$ implica uma contradição com o fato que $\mathcal{J} \neq A$. Deste modo $\overline{\mathcal{J}} \neq A$.

Além disso, por (i) temos que $\overline{\mathcal{J}}$ é um ideal tal que $\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathcal{J}} \subsetneq A$. Como $\mathcal{J}$ é maximal, obtemos que $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}}$ e portanto fechado.

□

Exemplo 6. *Seja Ω um espaço compacto e $C(\Omega)$ como no Exemplo 2. Seja F um subconjunto fechado de Ω . Defina:*

$$I(F) = \{f \in C(\Omega) : f|_F = 0\};$$

$$J(F) = \{f \in C(\Omega) : f = 0, \text{ em uma vizinhança de } F\}.$$

Temos que $I(F)$ e $J(F)$ são ideais em $C(\Omega)$, sendo $I(F)$ fechado e $J(F)$ denso em $I(F)$.

Definição 1.2.15. *O radical de uma álgebra A (ou radical de Jacobson) é definido como a interseção dos ideais maximais de A e denotado por $\text{rad } A$. Uma álgebra A (não necessariamente com unidade) é dita radical se $\text{rad } A = A$. A é dita uma álgebra semi-simples se $\text{rad } A = \{0\}$.*

Exemplo 7. (i) Como $\mathbb{C}$ é um corpo, o único ideal maximal de $\mathbb{C}$ é $\{0\}$. Então $\mathbb{C}$ é uma álgebra semi-simples. Analogamente para $\mathbb{R}$.

(ii) Se A é uma álgebra comutativa com unidade, então $A/\text{rad } A$ é uma álgebra semi-simples.

(iii) Para ver outros exemplos de algumas álgebras comutativas específicas que são semi-simples, consulte o capítulo 4 de [7], p. 85-128.

(iv) Seja A uma C^* -álgebra comutativa, ver o Corolário 10.2.1 de [7], p. 278 e obtemos que A é uma álgebra de Banach semi-simples comutativa regular autoadjunta.

Proposição 1.2.16. *Seja A uma álgebra com unidade, então*

$$\text{rad } A = \{a \in A : e - ba \in \text{Inv } A, \text{ para cada } b \in A\}.$$

Demonstração. ($\subset$) Seja $a \in \text{rad } A$. Como $\text{rad } A$ é um ideal, temos que para todo $b \in A$, vale $ba \in \text{rad } A$. Suponha que existe $b \in A$, tal que $e - ba \notin \text{Inv } A$. Pelo Teorema 1.2.12 existe um ideal maximal $\mathcal{J}$ com $e - ba \in \mathcal{J}$.

Como $\text{rad } A$ é um ideal, então $ba \in \text{rad } A \subset \mathcal{J}$. Além disso, $e = (e - ba) + ba \in \mathcal{J}$, pois, $\mathcal{J}$ é um ideal. Portanto $\mathcal{J} = A$, o que leva a uma contradição. Logo $e - ba \in \text{Inv } A$.

($\supset$) Seja $a \in A$, tal que $e - ba \in \text{Inv } A$ para cada $b \in A$. Se $a \notin \text{rad } A$, então existe $\mathcal{J}$ ideal maximal de A , tal que $a \notin \mathcal{J}$. Definimos

$$\mathcal{J} + Aa = \{m + ba : m \in \mathcal{J}, b \in A\}.$$

$\mathcal{J} + Aa$ é um ideal à esquerda que contém e é diferente de $\mathcal{J}$. Assim, $\mathcal{J} + Aa$ não pode ser próprio, pois $\mathcal{J}$ é maximal, donde $\mathcal{J} + Aa = A$. Portanto, como $e \in A$, existe $c \in A$, tal que $m + ca = e$ e assim m é invertível. Isto é uma contradição com $m \in \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal próprio. Logo $a \in \text{rad } A$.

□

Proposição 1.2.17. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade.*

(i) $\text{rad } A \subset \mathfrak{D}(A)$, onde $\mathfrak{D}(A)$ é o conjunto dos elementos quasi-nilpotentes de A .

(ii) Se $\mathcal{I}$ é um ideal (à esquerda) de A com $\mathcal{I} \subset \mathfrak{D}(A)$, então $\mathcal{I} \subset \text{rad } A$.

(iii) Se A é comutativa, então $\text{rad } A = \mathfrak{D}(A)$.

Demonstração. (i) Seja $a \in \text{rad } A$. Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ seja $b = z^{-1}e \in A$. Pela Proposição 1.2.16, temos que $e - z^{-1}a \in \text{Inv } A$ e daí $z \notin \sigma(a)$. Como isto vale para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, obtemos que, $\sigma(a) = \{0\}$. Assim $a \in \mathfrak{D}(A)$.

(ii) Seja $a \in \mathcal{I}$. Para cada $b \in A$, $ba \in \mathcal{I}$, pois, $\mathcal{I}$ é um ideal à esquerda. Assim $ba \in \mathfrak{D}(A)$, donde $\sigma(ba) = \{0\}$. Como $1 \notin \sigma(ba)$, temos que $1e - ba \in \text{Inv } A$ e daí, pela Proposição 1.2.16, segue que $a \in \text{rad } A$.

(iii) Por (i), basta mostrarmos a inclusão $\mathfrak{D}(A) \subset \text{rad } A$. Tome $a \in \mathfrak{D}(A)$ e $b \in A$. Como $\nu(a) = 0$, pois pela Proposição 1.2.8 (v), temos que $\nu(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Dado que A é comutativa, temos que $(ba)^n = b^n a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí

$$\|(ba)^n\|^{1/n} = \|b^n a^n\|^{1/n} \leq \|b\| \cdot \|a^n\|^{1/n} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue da desigualdade anterior, que $\nu(ba) = 0$ e $ba \in \mathfrak{D}(A)$. É simples verificar que $\nu(a+b) \leq \nu(a) + \nu(b)$ e assim $\mathfrak{D}(A)$ é um ideal. Agora, por (ii), vale $\mathfrak{D}(A) \subset \text{rad } A$.

□

1.3 Teoria de Gelfand

Definição 1.3.1. Um homomorfismo entre álgebras A e B é uma aplicação $\varphi : A \rightarrow B$, tal que para $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos:

$$(i) \quad \varphi(\alpha a + b) = \alpha \varphi(a) + \varphi(b).$$

$$(ii) \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Quando $B = \mathbb{K}$ dizemos que φ é um homomorfismo escalar.

Os homomorfismos bijetivos são chamados *isomorfismos*. Usaremos $A \cong B$ para denotar que existe um isomorfismo entre as álgebras A e B .

Denotaremos por Φ_A o conjunto de todos os homomorfismos escalares não nulos definidos na álgebra A . Se A tem uma unidade e , então $\varphi(e) = 1$ para todo $\varphi \in \Phi_A$.

Observação 1.3.2. Uma propriedade elementar dos ideais é que se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo e $\mathcal{J}$ um ideal de B , então $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ é um ideal de A .

Exemplo 8. Seja $A = C(\Omega)$, definimos $\varepsilon_{x_0}(f) = f(x_0)$, onde $f \in A$ e $x_0 \in \Omega$. Temos que $\varepsilon_{x_0} \in \Phi_A$.

Observação 1.3.3. Em um trabalho clássico, ver [9], John Tate mostra que os homomorfismos de uma álgebra comutativa com unidade sobre $\mathbb{R}$ podem ser identificados com os pontos extremos de certos conjuntos convexos.

Proposição 1.3.4. Um homomorfismo escalar φ é sobrejetivo se, e somente, se $\varphi \neq 0$.

Demonstração. ($\implies$) Suponha que $\varphi = 0$. Então $\varphi(a) = 0$ para todo $a \in A$, e portanto φ não é sobrejetivo. Logo $\varphi \neq 0$.

($\impliedby$) Como $\varphi \neq 0$, então existe $b \in A$, tal que $\varphi(b) = z_1$, onde $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\varphi(\lambda b) = \lambda \varphi(b) = \lambda z_1.$$

Como $\lambda \in \mathbb{C}$ é arbitrário, então $\varphi(\lambda b)$ percorre também todos os números complexos. Logo, dado $w \in \mathbb{C}$ existe $\lambda = w/z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(\lambda b) = w$, e daí φ é sobrejetivo. □

A partir de agora salvo quando dito explicitamente em contrário, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dados, uma álgebra A e $\varphi \in \Phi_A$, escrevemos

$$M_\varphi = \ker \varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}.$$

Proposição 1.3.5. Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então a aplicação $\varphi \mapsto M_\varphi$ é uma bijeção de Φ_A sobre o conjunto dos ideais maximais de A que denotaremos por $\Omega(A)$. Além disso, os ideais maximais de A tem codimensão 1 ($\dim(A/\ker \varphi) = 1$),

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} T : \Phi_A &\longrightarrow \Omega(A) \\ \varphi &\longmapsto \ker \varphi. \end{aligned}$$

Vejamos inicialmente que $\ker \varphi \in \Omega(A)$ para todo $\varphi \in \Phi_A$. Com efeito:

Dados $x, y \in \ker \varphi$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $\varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha \varphi(y) = 0$ e para todo $b \in A$, vale $\varphi(bx) = \varphi(b) \cdot \varphi(x) = 0$. Portanto $x + \alpha y, bx \in \ker \varphi$ e $\ker \varphi$ é um ideal.

Para cada $\varphi \in \Phi_A$, definimos

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : A/\ker \varphi &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a + \ker \varphi &\longmapsto \varphi(a). \end{aligned}$$

Temos que $\bar{\varphi}$ está bem definida. De fato, sejam $a, b \in A$, então $a + \ker \varphi = b + \ker \varphi$ se, e somente se, $a - b \in \ker \varphi$ se, e somente se, $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Pelas definições das operações no espaço quociente, temos também que $\bar{\varphi}$ é linear e multiplicativa. Sejam agora $a, b \in A$, $a + \ker \varphi \neq b + \ker \varphi$. Logo $a - b \notin \ker \varphi$ e assim $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Portanto $\bar{\varphi}$ é injetiva.

Dado $\varphi \in \Phi_A$, como $\varphi \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos que $\lambda\varphi(e) \notin \ker \varphi$. Como $\varphi(\lambda e) = \lambda\varphi(e) = \lambda$, temos $\bar{\varphi}(\lambda e + \ker \varphi) = \varphi(\lambda e) = \lambda$ e $\bar{\varphi}(\ker \varphi) = 0$, donde obtemos que $\bar{\varphi}$ é sobrejetiva.

Como $A/\ker \varphi$ é um corpo, pelo Teorema 1.2.11, temos que $\ker \varphi$ é um ideal maximal de A . Assim para todo $\varphi \in \Phi_A$, temos que $\ker \varphi \in \Omega(A)$ e comprovamos a boa definição de T .

Por outro lado, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_A$ com $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$. Temos que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $1 = \varphi_1(e) = \lambda\varphi_2(e) = \lambda$ e, portanto, $\varphi_1 = \varphi_2$. isto é, T é injetiva. Seja $\mathcal{J} \in \Omega(A)$. Então $A/\mathcal{J}$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade $e + \mathcal{J}$. Pelo Teorema 1.2.11, temos que $A/\mathcal{J}$ é um corpo.

Considere a projeção canônica

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{J}} : A &\longrightarrow A/\mathcal{J} \\ a &\longmapsto a + \mathcal{J}.\end{aligned}$$

Seja F o isomorfismo entre $A/\mathcal{J}$ e $\mathbb{C}$ dado pelo Teorema de Gelfand-Mazur 1.2.9, definido por $F(a + \mathcal{J}) = \lambda$ onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $a + \mathcal{J} = \lambda(e + \mathcal{J})$. Observe que F é multiplicativo e

$$F \circ \pi_{\mathcal{J}} : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

é um homomorfismo não nulo. Então $F \circ \pi_{\mathcal{J}} \in \Phi_A$. Temos que $a \in \ker(F \circ \pi_{\mathcal{J}})$ se, e somente se, $F \circ \pi_{\mathcal{J}}(a) = 0$ se, e somente se, $\pi_{\mathcal{J}}(a) = 0$, se e somente se $a \in \mathcal{J}$. Portanto, dado $\mathcal{J} \in \Omega(A)$, existe $F \circ \pi_{\mathcal{J}} \in \Phi_A$, tal que

$$T(F \circ \pi_{\mathcal{J}}) = \ker(F \circ \pi_{\mathcal{J}}) = \mathcal{J}$$

e assim T é sobrejetiva. Finalmente, como $\ker \varphi$ é de codimensão 1, $(\dim(A/\ker \varphi) = 1)$, segue o resultado.

□

Mostramos que existe uma bijeção entre Φ_A e o conjunto de ideais maximais de A . Por esta razão Φ_A é chamado muitas vezes de *espectro da álgebra* A ou de *espaço dos ideais maximais* de A .

O resultado a seguir desempenha um papel fundamental na teoria das álgebras de Banach comutativas com unidade.

Teorema 1.3.6. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade. Se $\varphi \in \Phi_A$, então φ é contínua e $\|\varphi\| = 1$.*

Demonstração. Como

$$\begin{aligned}\varphi : A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \varphi(a)\end{aligned}$$

é um homomorfismo não nulo e para cada $a \in A$

$$\varphi(\varphi(a)e - a) = \varphi(a)\varphi(e) - \varphi(a) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$$

então $\varphi(a)e - a \in M_\varphi$. Portanto $\varphi(a)e - a \notin \text{Inv } A$. De fato, se $\varphi(a)e - a \in \text{Inv } A$, existiria $b \in A$, tal que $b(\varphi(a)e - a) = e$ e daí teríamos

$$1 = \varphi(e) = \varphi(b(\varphi(a)e - a)) = \varphi(b)\varphi(\varphi(a)e - a) = \varphi(b).0 = 0.$$

O que é uma contradição. Portanto $\varphi(a)e - a \notin \text{Inv } A$ e assim $\varphi(a) \in \sigma(a)$. Agora, pela Proposição 1.2.3, temos que $|\varphi(a)| \leq \|a\|$ para qualquer $a \in A$, o que garante que φ é contínuo e limitado por 1, isto é, $\|\varphi\| \leq 1$.

Por outro lado,

$$1 = |\varphi(e)| \leq \|\varphi\| \cdot \|e\| = \|\varphi\| \leq 1$$

assim $\|\varphi\| = 1$.

□

Notemos também que Φ_A está contido no conjunto

$$\{\lambda \in A' : \lambda(e) = 1 = \|\lambda\|\}.$$

A topologia fraca $*$ sobre A' será denotada aqui por σ . Assim $\lambda_\nu \longrightarrow \lambda$ em (A', σ) , se e somente se $\lambda_\nu(a) \longrightarrow \lambda(a)$ para cada $a \in A$. Lembremos que, pelo Teorema de Alaoglu-Bourbaki, ver [10], a bola unitária de A' a qual denotamos por $A'_{[1]}$ é fracamente $*$ compacta. A topologia induzida em Φ_A pela topologia fraca $*$ de A' , é dita a topologia de Gelfand em Φ_A e é denotado por $\mathcal{T}_G$.

A cada $a \in A$, podemos associar a função

$$\begin{aligned}\widehat{a} : \Phi_A &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(a).\end{aligned}$$

$\widehat{a}$ é a transformada de Gelfand de a e satisfaz $\|\widehat{a}\|_{\Phi_A} = \sup_{\varphi \in \Phi_A} |\widehat{a}(\varphi)| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$.

O conjunto $\widehat{A} = \{\widehat{a} : a \in A\}$ é uma subálgebra de $C(\Phi_A)$, que é denominada Representação de Gelfand de A .

A aplicação

$$\begin{aligned}\widehat{}: A &\longrightarrow C(\Phi_A) \\ a &\longmapsto \widehat{a}\end{aligned}$$

é a transformação de Gelfand.

A definição da topologia fraca $*$ mostra que $\widehat{a}$ é contínua sobre $(\Phi_A, \mathcal{T}_G)$.

Teorema 1.3.7. *O espaço Φ_A é Hausdorff compacto (na topologia $\mathcal{T}_G$).*

Demonstração. Ver [12], p. 268.

□

A partir de agora Φ_A denotará sempre o espaço de Hausdorff compacto $(\Phi_A, \mathcal{T}_G)$ que será muitas vezes chamado espaço de estados de A .

Observação 1.3.8. *Notemos que pela Proposição 1.3.5 temos que*

$$\text{rad } A = \bigcap \{ \ker \varphi : \varphi \in \Phi_A \}.$$

Observamos que, como Φ_A é um espaço de Hausdorff compacto, $C(\Phi_A)$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade com a norma uniforme sobre Φ_A .

Teorema 1.3.9 (Teorema de Representação de Gelfand). *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então*

(i) *A aplicação:*

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = \widehat{}: A &\longrightarrow C(\Phi_A) \\ a &\longmapsto \widehat{a}\end{aligned}$$

é um homomorfismo.

(ii) $\sigma(a) = \widehat{a}(\Phi_A) = \{\widehat{a}(\varphi) : \varphi \in \Phi_A\}$.

(iii) $\nu_A(a) = |\widehat{a}|_{\Phi_A}$.

(iv) $a \in \text{Inv } A$ se, e somente se, $\widehat{a} \in \text{Inv } C(\Phi_A)$.

(v) $\text{rad } A = \mathfrak{D}(A) = \ker \mathcal{G}$.

Demonstração. Ver [3], p. 203.

□

Corolário 1.3.10. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) A é semi-simples.
- (ii) $\mathcal{G}$ é um homomorfismo injetivo.
- (iii) ν é uma norma de álgebra em A .

Demonstração. Ver [3], p. 203.

□

Note que, se A é uma álgebra de Banach semi-simples comutativa com unidade, a aplicação:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = \widehat{} : A &\longrightarrow \mathcal{G}(A) \\ a &\longmapsto \widehat{a}\end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Observação 1.3.11. *Como $\text{rad } A = \ker \mathcal{G}$, podemos identificar uma álgebra A de Banach semi-simples comutativa com unidade com a subálgebra $\mathcal{G}(A) = \widehat{A} = \{\widehat{a} : a \in A\}$ de $C(\Omega)$ para o espaço compacto $\Omega = \Phi_A$. Ou seja, $\mathcal{G}$ é uma bijeção entre A e $\widehat{A} \subset C(\Phi_A)$. Se $C(\Omega)$ com Ω espaço de Hausdorff compacto separa os pontos de Ω , dizemos que $C(\Omega)$ é uma álgebra de funções. É fácil verificar que $C(\Phi_A)$ é uma álgebra de funções.*

Teorema 1.3.12. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Então a aplicação $x \mapsto M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, para $x \in X$, é um homeomorfismo sobrejetivo de X em $\Phi_{C(X)}$.*

Demonstração. Ver [7], p. 86.

□

Corolário 1.3.13. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Então a transformação de Gelfand $\widehat{} : C(X) \longrightarrow C(\Phi_{C(X)})$ é a identidade de $C(X)$ sobre si mesmo.*

Demonstração. Ver [7], p. 87.

□

Observação 1.3.14. *Se X é um espaço topológico de Hausdorff compacto, então, temos que:*

- (i) *Pelo Corolário 1.3.13, obtemos que $C(X) = \widehat{C(X)} = C(\Phi_{C(X)})$.*

- (ii) Pelos Corolários 1.3.13 e 1.3.10, obtemos que a álgebra $C(X)$ é semi-simples. Além disso, $C(X)$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.
- (iii) Pela demonstração do Corolário 1.3.13 (ver [7], p. 87), podemos identificar X com $\Phi_{C(X)}$.

1.4 Continuidade Automática de Homomorfismos

Teorema 1.4.1 (Gráfico Fechado). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, T tem gráfico é fechado.*

Demonstração. Ver [10], p. 213.

□

Temos inicialmente o seguinte resultado:

Teorema 1.4.2. *Sejam A uma álgebra de Banach com unidade e B uma álgebra de Banach semi-simples comutativa com unidade. Então todo homomorfismo $\theta : A \longrightarrow B$ é automaticamente contínuo.*

Demonstração. Vamos mostrar que θ é contínuo. Para isto usaremos o Teorema de Gráfico Fechado 1.4.1. Para provar que o gráfico de θ é fechado tomamos uma sequência (u_n) em A , tal que $u_n \longrightarrow u$ e $\theta u_n \longrightarrow v$ e devemos mostrar que $\theta u = v$.

Como θ é um homomorfismo, consideramos $a_n = u_n - u$ e $b = v - \theta u$. Com esta mudança de variáveis, temos que $a_n \longrightarrow 0$ em A e $\theta a_n \longrightarrow b$ em B quando $n \longrightarrow \infty$. Assim basta provarmos que $b = 0$.

Seja $\varphi \in \Phi_B$ arbitrário. Por definição $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{C}$ é um homomorfismo sobrejetivo. Logo $\varphi \circ \theta : A \longrightarrow \mathbb{C}$ é também um homomorfismo. Dois casos são possíveis: $\varphi \circ \theta = 0$ ou $\varphi \circ \theta \neq 0$. Se $\varphi \circ \theta \neq 0$, pela Proposição 1.3.4, obtemos que $\varphi \circ \theta$ é um homomorfismo sobrejetivo. Assim $\varphi \circ \theta \in \Phi_A \cup \{0\}$. Além disso $\varphi \circ \theta$ e φ são contínuas, pelo Teorema 1.3.6. Como $a_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos que

$$(\varphi \circ \theta)(a_n) \longrightarrow (\varphi \circ \theta)(0) = 0$$

e

$$(\varphi \circ \theta)(a_n) = \varphi(\theta(a_n)) \longrightarrow \varphi(b)$$

donde $\varphi(b) = 0$. Assim $b \in \bigcap \{\ker \varphi : \varphi \in \Phi_B\}$.

Como B é uma álgebra comutativa com unidade, segue da Observação 1.3.8 e do fato que B é semi-simples, que

$$\text{rad } B = \bigcap \{\ker \varphi : \varphi \in \Phi_B\} = \{0\}.$$

Logo $b = 0$. Como $b = v - \theta u$, temos que $v = \theta u$. Mostramos assim que θ é automaticamente contínuo.

□

Definição 1.4.3. *Seja $(A, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Dizemos que A tem uma única norma completa se cada norma de álgebra em relação à qual A é uma álgebra de Banach é equivalente à norma $\|\cdot\|$.*

Corolário 1.4.4. *Seja $(A, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach semi-simples comutativa com unidade. Então A tem uma única norma completa.*

Demonstração. Seja $\|\cdot\|$ outra norma de álgebra completa sobre a álgebra A . Assim os espaços $(A, \|\cdot\|)$, e $(A, \|\cdot\|)$ são álgebras de Banach. Consideremos o homomorfismo identidade $I : (A, \|\cdot\|) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$. Pelo Teorema 1.4.2, temos que I é contínua e portanto existe $C > 0$, tal que $\|a\| = \|I(a)\| \leq C\|a\|$.

Trocando os papéis das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|$ e repetindo o mesmo argumento, obtemos que existe $K > 0$, tal que $\|a\| = \|I(a)\| \leq K\|a\|$.

Consequentemente as normas de álgebra $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|$ em A são equivalentes e, portanto, A tem uma única norma completa.

□

Observação 1.4.5. *Como veremos agora o Corolário 1.4.4 pode ser estendido para o caso em que a álgebra de Banach não é comutativa (ver Corolário 2.2.6), mas não para o caso em que a álgebra de Banach não é semi-simples, isto é, que o $\text{rad } B$ tenha dimensão maior ou igual a 1. Em outras palavras, para uma álgebra não semi-simples, podemos encontrar normas de álgebra completas não equivalentes.*

Exemplo 9. *Lembremos que para $1 \leq p$ o conjunto*

$$\ell^p = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_n \in \mathbb{C}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

forma um espaço vetorial com as operações usuais e munido com a norma definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \text{ para } x \in \ell^p$$

é um espaço de Banach.

Notemos que $\ell^1 \subset \ell^2$, pois dado $x \in \ell^1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, vale que

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right)^2$$

e tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, segue que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, donde $x \in \ell^2$.

Definindo agora o produto coordenada a coordenada, ℓ^2 é uma álgebra, pois, dados $x, y \in \ell^2$, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que $\|xy\|_1 \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$, donde $xy \in \ell^1$ e portanto $xy \in \ell^2$. A álgebra ℓ^2 é de Banach semi-simples comutativa que não tem unidade.

Dado que $e = (1, 1, 1, \dots) \notin \ell^2$, definimos

$$\mathfrak{U} = \ell^2 \odot \mathbb{C}.e$$

como um espaço vetorial com a soma e produto com um escalar usuais e a multiplicação dada por $(a, z)(b, w) = (ab, 0)$. Portanto $\mathfrak{U}$ é uma álgebra, tal que $\text{rad } \mathfrak{U} = \{0\} \odot \mathbb{C}.e$, e tem dimensão 1. Além disso, usando as normas $\|\cdot\|_2$ e $|\cdot|$, definimos sobre $\mathfrak{U}$, a aplicação

$$\|(a, z)\| = \|a\|_2 + |z|, \quad (a, z) \in \mathfrak{U}.$$

Notemos que a aplicação $\|\cdot\|$ é submultiplicativa. De fato, dados $(a, z), (b, w) \in \mathfrak{U}$, temos que

$$\begin{aligned} \|(a, z).(b, w)\| &= \|(ab, 0)\| = \|ab\|_2 \\ &\leq \|a\|_2 \cdot \|b\|_2 \leq (\|a\|_2 + |z|) \cdot (\|b\|_2 + |w|) \end{aligned}$$

donde $\|(a, z).(b, w)\| \leq \|(a, z)\| \cdot \|(b, w)\|$. Assim $\|\cdot\|$ é uma norma de álgebra sobre $\mathfrak{U}$.

Não é difícil verificar que $\mathfrak{U}$ munida com $\|\cdot\|$ é uma álgebra de Banach sem unidade.

Considere agora a sequência $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$, então

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad \text{converge, mas} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \quad \text{diverge.}$$

Portanto $\ell^1 \subsetneq \ell^2$.

Seja agora, λ um funcional linear sobre ℓ^2 . Definimos $\lambda_1 = \lambda|_{\ell^1}$, isto é, para $\alpha = (\alpha_n)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n. \end{aligned}$$

Seja $(\mathbf{x}_n)$ uma sequência de elementos em ℓ^1 , tal que $\mathbf{x}_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Considere $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n - x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\mathbf{y}_n \rightarrow 0$ em ℓ^1 e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$|\lambda_1(\mathbf{x}_n - x)| = |\lambda_1(\mathbf{y}_n)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} y_{i,n} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y_{i,n}| = \|\mathbf{y}_n\|_1 \rightarrow 0.$$

Logo $\lambda_1(\mathbf{x}_n) \rightarrow \lambda_1(x)$ em $\mathbb{C}$ quando $n \rightarrow \infty$, e disto segue que λ_1 é contínua em ℓ^1 .

Definimos

$$|||(a, z)||| = \max\{\|a\|_2, |\lambda(a) - z|\}, \quad (a, z) \in \mathfrak{U}.$$

Segue que, $||| \cdot |||$ é uma norma sobre $\mathfrak{U}$.

Dados $(a, z), (b, w) \in \mathfrak{U}$, como $a, b \in \ell^2$, então $ab \in \ell^1$ e temos que

$$|\lambda(ab)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \|ab\|_1 \leq \|a\|_2 \cdot \|b\|_2 \leq |||(a, z)||| \cdot |||(b, w)|||.$$

Como $\|ab\|_2 \leq \|a\|_2 \cdot \|b\|_2$, então $\|ab\|_2 \leq |||(a, z)||| \cdot |||(b, w)|||$, portanto

$$|||(a, z) \cdot (b, w)||| = |||(ab, 0)||| = \max\{\|ab\|_2, |\lambda(ab)|\} \leq |||(a, z)||| \cdot |||(b, w)|||.$$

Assim, $||| \cdot |||$ é uma norma de álgebra sobre $\mathfrak{U}$.

Seja uma sequência de Cauchy $(\mathbf{a}_n, z_n)$ em $\mathfrak{U}$. Então $(\mathbf{a}_n)$ e $(\lambda(\mathbf{a}_n) - z_n)$ são sequências de Cauchy em ℓ^2 e $\mathbb{C}$ respectivamente, donde existem a e α , tais que

$$\|\mathbf{a}_n - a\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad |\lambda(\mathbf{a}_n) - z_n - \alpha| \rightarrow 0.$$

Considere $w = \lambda(a) - \alpha$. Então $(\mathbf{a}_n, z_n) \rightarrow (a, w)$ em $\mathfrak{U}$, pois

$$|||(\mathbf{a}_n, z_n) - (a, w)||| = \max\{\|\mathbf{a}_n - a\|_2, |\lambda(\mathbf{a}_n - a) - (z_n - w)|\}$$

e tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos que $|||(\mathbf{a}_n, z_n) - (a, w)||| \rightarrow 0$. Portanto $(\mathfrak{U}, ||| \cdot |||)$ é uma álgebra de Banach.

Por outro lado, seja a sequência definida por

$$\mathbf{x}_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então $\mathbf{x}_n \in \ell^1 \subsetneq \ell^2$. Agora $\|\mathbf{x}_n\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$ e fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $(\mathbf{x}_n)$ converge em ℓ^2 .

Por outro lado,

$$|\lambda(\mathbf{x}_n)| = \lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda(\mathbf{x}_n)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverge. Portanto $(\lambda(\mathbf{x}_n))$ diverge.

Assim λ não é contínuo sobre ℓ^2 .

Podemos verificar que $||| \cdot |||$ não é equivalente a $\| \cdot \|$.

Caso contrário, existe $K > 0$, tal que $|||(a, z)||| \leq K\|(a, z)\|$ para todos $(a, z) \in \mathfrak{U}$. Considerando $x \in \ell^2$ e $z = 0$, temos que

$$|\lambda(x)| \leq |||(x, 0)||| \leq K\|(x, 0)\| = K\|x\|_2.$$

Isto nos mostra que, todo funcional linear λ em ℓ^2 é contínuo, o que é um absurdo.

O exemplo acima exhibe uma álgebra de Banach $\mathfrak{U}$ que não é semi-simples e não tem uma única norma completa.

Observação 1.4.6. No próximo capítulo faremos um estudo mais aprofundado da continuidade automática de homomorfismos entre álgebras de Banach.

Capítulo 2

Sobre a Continuidade Automática

Como veremos neste capítulo existe uma forte ligação entre as propriedades algébricas e topológicas de uma álgebra de Banach. Como vimos no capítulo anterior (Teorema 1.3.6), todo homomorfismo escalar sobrejetivo sobre uma álgebra de Banach com unidade A (isto é todo epimorfismo de A em $\mathbb{C}$) é automaticamente contínuo. Na verdade, muitos outros homomorfismos entre álgebras de Banach A e B são automaticamente contínuos. Entretanto, de uma maneira geral, não podemos garantir a continuidade de um homomorfismo entre duas álgebras de Banach.

Vamos explorar algumas dessas idéias no presente capítulo, através dos teoremas de Johnson e de Bade-Curtis entre outros, que constituem o cerne da dissertação.

2.1 O Espaço Separante de um Operador Linear

Definição 2.1.1. *Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Então o espaço separante de T é*

$$\mathcal{S}(T) = \{y \in F : \text{existe } (x_n) \in E, \text{ tal que } x_n \longrightarrow 0 \text{ em } E \text{ com } Tx_n \longrightarrow y \text{ em } F\}.$$

Vamos ver que o conceito acima permite medir o "quanto um operador linear deixa de ser um operador contínuo".

Proposição 2.1.2. $\mathcal{S}(T)$ é um subespaço linear fechado de F .

Demonstração. Dados $x, y \in \mathcal{S}(T)$ e α escalar, temos que existem sequências (x_n) e (y_n)

em E , tais que

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ com } Tx_n \longrightarrow x \text{ em } F$$

e

$$y_n \longrightarrow 0 \text{ com } Ty_n \longrightarrow y \text{ em } F.$$

Logo

$$(x_n + \alpha y_n) \longrightarrow 0 \text{ em } E \text{ e } T(x_n + \alpha y_n) \longrightarrow (x + \alpha y) \text{ em } F$$

donde $(x + \alpha y) \in \mathcal{S}(T)$, portanto $\mathcal{S}(T)$ é um subespaço linear.

Por outro lado, consideremos para cada $b \in F$

$$\delta(b) = \inf_{a \in E} \{ \|a\| + \|b - T(a)\| \}.$$

é fácil verificar que:

$$(i) \delta(b_1 + b_2) \leq \delta(b_1) + \delta(b_2), \text{ para todos } b_1, b_2 \in F.$$

$$(ii) \delta(\alpha b) = |\alpha| \delta(b), \text{ para todos } b \in F \text{ e } \alpha \text{ escalar.}$$

$$(iii) \delta(b) \leq \|b\|, \text{ para todo } b \in F \text{ e se } b = T(a), \text{ então } \delta(T(a)) \leq \|a\| \text{ para todo } a \in E.$$

Notemos que das definições de $\delta(b)$ e $\mathcal{S}(T)$, temos que

$$\delta(b) = 0 \text{ se, e somente se, } b \in \mathcal{S}(T).$$

Agora se (b_n) é uma sequência contida em $\mathcal{S}(T)$ com $b_n \longrightarrow b$, então segue das propriedades (i) e (iii) que

$$\delta(b) \leq \delta(b - b_n) + \delta(b_n) \leq \delta(b - b_n) \leq \|b - b_n\|$$

tomando limite quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos que $b \in \mathcal{S}(T)$ e portanto $\mathcal{S}(T)$ é fechado. □

Teorema 2.1.3. T é contínuo se, e somente se, $\mathcal{S}(T) = \{0\}$.

Demonstração. ($\implies$) Seja $y \in \mathcal{S}(T)$ arbitrário, isto é, que existe uma sequência (x_n) em E , tal que

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ em } E, \text{ com } Tx_n \longrightarrow y \text{ em } F.$$

Como $x_n \longrightarrow 0$ e T é operador linear contínuo, então $Tx_n \longrightarrow T(0) = 0$, donde por unicidade de limite, obtemos que $y = 0$. Assim $\mathcal{S}(T) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que T é contínuo vamos provar que o gráfico de T é fechado e assim, pelo Teorema do Gráfico Fechado 1.4.1, obteremos a continuidade de T . Analogamente, à demonstração do Teorema 1.4.2, basta tomarmos uma sequência (x_n) em E , tal que

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ em } E, \text{ com } Tx_n \longrightarrow x \text{ em } F.$$

Por definição, isto quer dizer que $x \in \mathcal{S}(T)$. Agora, por hipótese, temos que $\mathcal{S}(T) = \{0\}$, então $x = 0$, portanto T é contínua. □

Vamos analisar agora o subespaço $\mathcal{S}(\theta)$, onde $\theta : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo entre álgebras de Banach.

Teorema 2.1.4. *Sejam A e B álgebras de Banach e $\theta : A \longrightarrow B$ um homomorfismo com $\overline{\theta(A)} = B$. Então $\mathcal{S}(\theta)$ é um ideal em B .*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathcal{S}(\theta)$, pela Proposição 2.1.2, temos que $a + b \in \mathcal{S}(\theta)$.

Se $a \in \mathcal{S}(\theta)$ e $b \in B$. Temos que existe uma sequência (x_n) em A , tal que

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ em } E, \text{ com } \theta x_n \longrightarrow a \text{ em } B.$$

Como $b \in B = \overline{\theta(A)}$ existe uma sequência (y_n) em A , tal que $\theta(y_n) \longrightarrow b$ em B . Logo, a sequência $(y_n x_n)$ está contida em A e como θ é um homomorfismo, vale

$$y_n x_n \longrightarrow b.0 = 0 \text{ em } A \text{ e } \theta(y_n x_n) = \theta(y_n)\theta(x_n) \longrightarrow ba \text{ em } B.$$

Assim $ba \in \mathcal{S}(\theta)$. Portanto $\mathcal{S}(\theta)$ é um ideal à esquerda de B . Analogamente mostramos que $\mathcal{S}(\theta)$ é um ideal à direita de B . □

Proposição 2.1.5. *Sejam A uma álgebra de Banach com unidade e B uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Se $\theta : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo, temos que $\mathcal{S}(\theta) \subset \text{rad } B$.*

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{S}(\theta)$. Então existe uma sequência (x_n) em A , tal que

$$x_n \longrightarrow 0 \text{ em } E, \text{ com } \theta x_n \longrightarrow y \text{ em } B.$$

Tal como argumentamos na prova do Teorema 1.4.2, temos que dado $\varphi \in \Phi_B$ qualquer, podemos mostrar que $\varphi(y) = 0$. Portanto $y \in \bigcap \{\ker \varphi : \varphi \in \Phi_B\}$, donde concluímos que $y \in \text{rad } B$, e temos a inclusão. □

Nas versões do Teorema de Johnson, consideremos álgebras de Banach com unidade não necessariamente comutativas.

2.2 O Teorema de Johnson

Lema 2.2.1. *Sejam B uma álgebra de Banach com unidade e $b \in B$. Se $\nu(bb') = 0$ para todo $b' \in B$, então $b \in \text{rad } B$.*

Demonstração. Suponha que $b \notin \text{rad } B$. Logo b está fora de algum $\mathcal{I}$ ideal maximal de B .

Afirmção. $\mathcal{J} = Bb + \mathcal{I}$ é um ideal de B que contém $\mathcal{I}$.

De fato, sejam $u, v \in \mathcal{J}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então existem $r, s \in B$ e $a, c \in \mathcal{I}$, tais que $u = rb + a$ e $v = sb + c$. Logo, como $r + \alpha s \in B$ e $a + \alpha c \in \mathcal{I}$, pois, $\mathcal{I}$ é um ideal, obtemos que $u + \alpha v = (r + \alpha s)b + (a + \alpha c) \in \mathcal{J}$. Seja agora $p \in B$. Como $pr \in B$ e $pa \in \mathcal{I}$, então $pu = (pr)b + pa \in \mathcal{J}$, portanto $\mathcal{J}$ é um ideal de B .

Seja $a \in \mathcal{I}$ qualquer, dado que $a = 0.b + a \in \mathcal{J}$, temos então que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ donde segue a afirmativa.

Se $\mathcal{I} = \mathcal{J} = Bb + \mathcal{I}$ então $\mathcal{I} = Bb$, o que não é possível, pois, como $e \in B$, temos que $b \in \mathcal{I}$. Logo $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J}$.

Dado que $\mathcal{I}$ é um ideal maximal e $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J}$, obtemos que $Bb + \mathcal{I} = \mathcal{J} = B$. Como $e \in B$, existe $b' \in B$ tal que $e - b'b \in \mathcal{I}$. Este elemento não é invertível, pois se o fosse, teríamos $(e - b'b)^{-1} \in B$ com $e = (e - b'b)^{-1}(e - b'b) \in \mathcal{I}$, o que implica $\mathcal{I} = B$, o que não é possível. Obtemos que $e - b'b \notin \text{Inv } B$, donde $1 \in \sigma(bb')$, logo $1 \leq \nu(bb')$, e segue daí $\nu(bb') \neq 0$. Isto é, uma contradição.

□

Teorema 2.2.2 (Teorema de Dini). *Sejam X um espaço métrico compacto e $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência monótona de funções contínuas. Se $f_n \rightarrow f$ pontualmente em X e f é contínua, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Ver [3], p. 789.

□

No que segue, $B[X]$ denota o espaço dos polinômios com coeficientes em B e variáveis em $\mathbb{C}$.

Lema 2.2.3. *Sejam B uma álgebra de Banach com unidade, $p \in B[X]$ e $R > 0$. Então*

$$(\nu(p(1)))^2 \leq \sup_{|z|=R} \nu(p(z)) \cdot \sup_{|z|=1/R} \nu(p(z)).$$

Demonstração. Como $p \in B[X]$ um polinômio definido por $p : \mathbb{C} \rightarrow B$, seja $p(1) \neq 0$.

Pelo Teorema 1.2.5, temos que existe um funcional linear contínuo ϕ sobre B , com $\|\phi\| = 1$ e $\phi(p(1)) = \|p(1)\|$.

Como $p : \mathbb{C} \rightarrow B$ e $\phi : B \rightarrow \mathbb{C}$, então $q = \phi \circ p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é um polinômio tal que $q(z) = \phi(p(z))$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Vamos escrever q na forma $q(z) = \sum_{k=0}^d \beta_k z^k$, onde $\beta_k \in \mathbb{C}$ e d é o grau do polinômio q . Temos que

$$\|p(1)\|^2 = |\phi(p(1))|^2 = |q(1)|^2 = \left| \sum_{k=0}^d \beta_k \right|^2. \quad (2.1)$$

Afirmção. *Para $d \in \mathbb{N}$, vale* $\left| \sum_{k=1}^d \beta_k \right|^2 \leq d \cdot \sum_{k=1}^d |\beta_k|^2$.

De fato, vamos verificar por princípio da indução.

Quando $d = 1$, temos que $|\beta_1| \leq |\beta_1|$.

Hipótese indutiva: Suponha que $\left| \sum_{k=1}^d \beta_k \right|^2 \leq d \cdot \sum_{k=1}^d |\beta_k|^2$.

Então

$$\left| \sum_{k=1}^{d+1} \beta_k \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^d \beta_k \right|^2 + \beta_{d+1} \cdot \sum_{k=1}^d \overline{\beta_k} + \overline{\beta_{d+1}} \cdot \sum_{k=1}^d \beta_k + |\beta_{d+1}|^2$$

e usando a hipótese indutiva, obtemos

$$\left| \sum_{k=1}^{d+1} \beta_k \right|^2 \leq d \cdot \sum_{k=1}^d |\beta_k|^2 + \sum_{k=1}^d (\beta_{d+1} \overline{\beta_k} + \overline{\beta_{d+1}} \beta_k) + |\beta_{d+1}|^2.$$

Como para quaisquer números complexos z e w , vale $z\overline{w} + \overline{z}w \leq |z|^2 + |w|^2$, usando este fato na desigualdade de acima, obtemos que

$$\left| \sum_{k=1}^{d+1} \beta_k \right|^2 \leq d \cdot \sum_{k=1}^d |\beta_k|^2 + \sum_{k=1}^d (|\beta_{d+1}|^2 + |\beta_k|^2) + |\beta_{d+1}|^2 = (d+1) \cdot \sum_{k=1}^{d+1} |\beta_k|^2$$

donde

$$\left| \sum_{k=1}^{d+1} \beta_k \right|^2 \leq (d+1) \cdot \sum_{k=1}^{d+1} |\beta_k|^2.$$

Provando assim a afirmativa.

Usando a afirmação, para $\sum_{k=0}^d \beta_k$ vale

$$\left| \sum_{k=0}^d \beta_k \right|^2 \leq (d+1) \cdot \sum_{k=0}^d |\beta_k|^2. \quad (2.2)$$

Agora, voltando na equação (2.1), dado $R > 0$ arbitrário e usando a equação (2.2), temos que

$$||p(1)||^2 = \left| \sum_{k=0}^d \beta_k \right|^2 \leq (d+1) \cdot \sum_{k=0}^d |\beta_k|^2 = (d+1) \cdot \sum_{k=0}^d |\beta_k R^k| |\beta_k R^{-k}|.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$||p(1)||^2 \leq (d+1) \left(\sum_{k=0}^d |\beta_k|^2 R^{2k} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=0}^d |\beta_k|^2 R^{-2k} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Afirmção. $\sum_{k=0}^d |\beta_k|^2 R^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(Re^{it})|^2 dt.$

De fato, como $q(z) = \sum_{k=0}^d \beta_k z^k$ para $z, \beta_k \in \mathbb{C}$, considerando $|z| = R$, isto é, $z(t) = Re^{it}$

para $t \in [0, 2\pi]$, temos $q(Re^{it}) = \sum_{k=0}^d \beta_k R^k e^{itk}$ e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(Re^{it})|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(Re^{it}) \overline{q(Re^{it})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^d \beta_k R^k e^{itk} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^d \overline{\beta_j} R^j e^{-itj} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^d \sum_{j=0}^d \beta_k \overline{\beta_j} R^k R^j \int_0^{2\pi} e^{it(k-j)} dt. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\int_0^{2\pi} e^{it(k-j)} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } j = k, \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Segue na igualdade acima

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(Re^{it})|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^d |\beta_k|^2 R^{2k} (2\pi) = \sum_{k=0}^d |\beta_k|^2 R^{2k}.$$

O que prova a afirmação.

Agora, voltando na equação (2.3) e usando a afirmação acima, temos que

$$\|p(1)\|^2 \leq (d+1) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(Re^{it})|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(R^{-1}e^{it})|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Dado que, para todo $z \in \mathbb{C}$, vale $|q(z)| = |\phi(p(z))| \leq \|\phi\| \cdot \|p(z)\| = \|p(z)\|$, segue então da desigualdade anterior que

$$\begin{aligned} \|p(1)\|^2 &\leq (d+1) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|p(Re^{it})\|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|p(R^{-1}e^{it})\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq (d+1) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{|z|=R} \|p(z)\|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{|w|=1/R} \|p(w)\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq (d+1) \cdot \left(\sup_{|z|=R} \|p(z)\|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sup_{|w|=1/R} \|p(w)\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e pelas propriedades do supremo, temos que

$$\leq (d+1) \cdot \sup_{|z|=R} \|p(z)\| \cdot \sup_{|z|=1/R} \|p(z)\|.$$

Então, resulta

$$\|p(1)\|^2 \leq (d+1) \cdot \sup_{|z|=R} \|p(z)\| \cdot \sup_{|z|=1/R} \|p(z)\|.$$

Trocando $p(z)^m$ por $p(z)$ ($m \geq 1$), o novo grau do polinômio é md e tomando a raiz m -ésima, obtemos

$$\|p(1)^m\|^{2/m} \leq (md+1)^{1/m} \cdot \sup_{|z|=R} \|p(z)^m\|^{1/m} \cdot \sup_{|z|=1/R} \|p(z)^m\|^{1/m}. \quad (2.4)$$

Lembrando a fórmula de raio espectral dada na Proposição 1.2.8 (v), temos que para $a \in B$

$$\nu(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Considerando $a = p(z)$, então

$$\nu(p(z)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|p(z)^m\|^{1/m}, \quad (2.5)$$

mas, esta convergência é pontual, pois depende de cada z .

Dado que a sequência $(\|p(z)^m\|^{1/m})$ é monótona decrescente e a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \|p(z)^m\|^{1/m} \end{aligned}$$

é contínua em $\mathbb{C}$, pois é uma composição de um polinômio, da norma e das potências que são contínuas em $\mathbb{C}$, segue então do Teorema de Dini 2.2.2, que dado $R \in \mathbb{R}^+$, temos que a convergência em (2.5) é uniforme. Portanto, quando $m \rightarrow \infty$ obtemos que

$$\sup_{|z|=R} \|p^m(z)\|^{1/m} \longrightarrow \sup_{|z|=R} \nu(p(z)) \quad (2.6)$$

e

$$\sup_{|z|=1/R} \|p^m(z)\|^{1/m} \longrightarrow \sup_{|z|=1/R} \nu(p(z)). \quad (2.7)$$

Finalmente, tomando o limite em (2.4), quando $m \rightarrow \infty$ e usando (2.5), (2.6) e (2.7) obtemos

$$(\nu(p(1)))^2 \leq \sup_{|z|=R} \nu(p(z)) \cdot \sup_{|z|=1/R} \nu(p(z)).$$

□

Proposição 2.2.4. *Sejam A e B álgebras de Banach com unidade e $\theta : A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetivo. Dado $a \in A$, temos que $\nu_B(\theta(a)) \leq \nu_A(a)$.*

Demonstração. Como θ é um homomorfismo sobrejetivo, garantizamos que $\theta(e)$ é a unidade de B . Seja $z \in \rho_A(a)$, temos que $ze - a \in \text{Inv } A$ e existe $c \in A$, tal que $(ze - a)c = e = c(ze - a)$, logo

$$(z\theta(e) - \theta(a))\theta(c) = \theta(ze - a).\theta(c) = \theta(e) = e.$$

Portanto $z\theta(e) - \theta(a) \in \text{Inv } B$, donde $z \in \rho_B(\theta(a))$ e daí $\rho_A(a) \subset \rho_B(\theta(a))$ para todo $a \in A$. Assim $\sigma_B(\theta(a)) \subset \sigma_A(a)$ para todo $a \in A$. Então

$$\{|z| : z \in \sigma_B(\theta(a))\} \subseteq \{|z| : z \in \sigma_A(a)\}$$

e pela definição de raio espectral, temos que $\nu_B(\theta(a)) \leq \nu_A(a)$ para todo $a \in A$.

□

Teorema 2.2.5 (Teorema de Johnson). *Sejam A e B álgebras de Banach com unidade. Suponha que $\text{rad } B = \{0\}$, então cada homomorfismo sobrejetivo $\theta : A \longrightarrow B$ é automaticamente contínuo.*

Demonstração. Para mostrar a continuidade de θ trabalharemos como na demonstração do Teorema 1.4.2 usando o Teorema de Gráfico Fechado, isto é, vamos considerar uma sequência (a_n) em A tal que $a_n \longrightarrow 0$ em A e $\theta(a_n) \longrightarrow b$ em B . Basta provar que $b = 0$.

Como θ é sobrejetivo, dado $b \in B$ existe $a \in A$, tal que $\theta(a) = b$ e para cada $n \geq 1$, defina

$$p_n(z) = z\theta(a_n) + \theta(a) - \theta(a_n).$$

Dado que $\nu(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in B$, se $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\nu(p_n(z)) \leq \|p_n(z)\| \leq |z| \cdot \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a) - \theta(a_n)\|.$$

Tomando supremo quando $|z| = 1/R$, obtemos

$$\sup_{|z|=1/R} \nu(p_n(z)) \leq R^{-1} \cdot \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a) - \theta(a_n)\|, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$, como θ é um homomorfismo, pela Proposição 2.2.4, obtemos que

$$\begin{aligned} \nu(p_n(z)) &= \nu(\theta(z a_n + a - a_n)) \leq \nu(z a_n + a - a_n) \\ &\leq \|z a_n + a - a_n\| \leq |z| \cdot \|a_n\| + \|a - a_n\| \end{aligned}$$

e isto vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando supremo quando $|z| = R$, obtemos

$$\sup_{|z|=R} \nu(p_n(z)) \leq R \cdot \|a_n\| + \|a - a_n\|, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Pelo Lema 2.2.3 e pelas equações (2.8) e (2.9), temos

$$(\nu(\theta(a)))^2 = (\nu(p_n(1)))^2 \leq (R \cdot \|a_n\| + \|a - a_n\|) \cdot (R^{-1} \cdot \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a) - \theta(a_n)\|)$$

donde

$$(\nu(b))^2 \leq (R \cdot \|a_n\| + \|a - a_n\|) \cdot (R^{-1} \cdot \|\theta(a_n)\| + \|\theta(a) - \theta(a_n)\|).$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$, vemos que

$$(\nu(b))^2 \leq \|a\| \cdot (R^{-1} \cdot \|b\|).$$

Mas isso acontece para cada $R > 0$ e assim tomando $R \longrightarrow \infty$, obtemos que $\nu(b) = 0$.

Agora, seja $b' \in B$. Por hipótese existe $a' \in A$, tal que $\theta(a') = b'$. Como $a_n \rightarrow 0$ em A e $\theta(a_n) \rightarrow b$ em B , então $a'a_n \rightarrow 0$ e $\theta(a'a_n) \rightarrow b'b$. Repetindo o argumento acima, obtemos que $\nu(b'b) = 0$. Assim, pela arbitrariedade de b' , usando o Lema 2.2.1, temos que $b \in \text{rad } B = \{0\}$, portanto $b = 0$ o que prova o resultado. $\square$

No Corolário 1.4.4, mostramos que se A é uma álgebra de Banach semi-simples comutativa com unidade, então tem uma única norma completa. O próximo resultado mostra que a afirmação continua verdadeira sem a hipótese de A ser comutativa.

Corolário 2.2.6. *Seja $(A, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach semi-simples com unidade. Então A tem uma única norma completa.*

Demonstração. Considere $A = B$ e o homomorfismo identidade I no Teorema de Johnson 2.2.5. Procedendo como na demonstração do Corolário 1.4.4, obtemos que a álgebra A tem uma única norma completa. $\square$

2.3 Reformulação do Teorema de Johnson

Lema 2.3.1 (Adaptação de uma Prova de Ransford). *Sejam $(A, \|\cdot\|_A)$ e $(B, \|\cdot\|_B)$ álgebras de Banach com unidade e $T : A \rightarrow B$ um operador linear. Suponha que:*

- (i) *Dado $\epsilon > 0$, existe uma norma de álgebra $\|\cdot\|$ sobre A equivalente a $\|\cdot\|_A$, tal que para cada $a \in A$, vale $\|a\| \leq \nu(a) + \epsilon$, (respectivamente para B , isto é, que existe uma norma de álgebra sobre B satisfazendo à correspondente condição).*
- (ii) $\nu_B(T(a)) \leq \nu_A(a)$ para todo $a \in A$.

Então

- (1) *Dado $b \in \mathcal{S}(T)$, para todo $a \in A$ temos que*

$$(\nu_B(Ta))^2 \leq \nu_A(a) \cdot \nu_B(Ta - b).$$

- (2) $T(A) \cap \mathcal{S}(T) \subset \mathfrak{D}(B)$.

Demonstração. (1) Como $b \in \mathcal{S}(T)$, podemos escolher uma sequência (a_n) em A com $a_n \rightarrow 0$ em A e $Ta_n \rightarrow b$ em B , quando $n \rightarrow \infty$.

Por (i), para cada $\epsilon > 0$, podemos escolher normas de álgebra sobre A e B que são equivalentes às normas dadas e que são de tal forma que, dados $a \in A$ e $b \in B$, vale

$$\|a\| \leq \nu_A(a) + \epsilon, \quad \|Ta - b\| \leq \nu_B(Ta - b) + \epsilon. \quad (2.10)$$

Por outro lado, no caso onde $p(X) = Ta - Ta_n + (Ta_n)X$, temos que p pertence a $B[X]$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, $(Ta - Ta_n)$ e Ta_n são elementos de B . Temos também que $p(1) = Ta$ e assim para cada $R > 0$, aplicando o Lemma 2.2.3, obtemos que

$$(\nu_B(Ta))^2 \leq \sup_{|z|=R} \nu_B(p(z)) \cdot \sup_{|z|=1/R} \nu_B(p(z)). \quad (2.11)$$

Agora, pelas Proposições 1.2.8 (v) e 1.1.6, temos que dado $y \in B$, vale $\nu_B(y) \leq \|y\|$.

Por outro lado, dado que $p(z) = Ta - Ta_n + (Ta_n)z$ para cada $z \in \mathbb{C}$, então

$$\nu_B(p(z)) \leq \|(Ta - Ta_n) + (Ta_n)z\|$$

donde, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\nu_B(p(z)) \leq \|Ta - Ta_n\| + |z| \cdot \|Ta_n\|.$$

Tomando supremo quando $|z| = 1/R$, resulta

$$\sup_{|z|=1/R} \nu_B(p(z)) \leq \|Ta - Ta_n\| + \|Ta_n\|/R.$$

Além disso, pela linearidade de T , temos que $p(z) = T(a - a_n + za_n)$ e assim pela hipótese (ii), vale

$$\begin{aligned} \nu_B(p(z)) &= \nu_B(T(a - a_n + za_n)) \\ &\leq \nu_A(a - a_n + za_n) \leq \|a - a_n\| + |z| \cdot \|a_n\|. \end{aligned}$$

Agora, tomando o supremo sobre $|z| = R$, resulta

$$\sup_{|z|=R} \nu_B(p(z)) \leq \|a - a_n\| + R \cdot \|a_n\|.$$

Assim, a desigualdade (2.11) se torna

$$(\nu_B(Ta))^2 \leq (\|a - a_n\| + R \cdot \|a_n\|) \cdot (\|Ta - Ta_n\| + \|Ta_n\|/R),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$(\nu_B(Ta))^2 \leq \|a\|(\|Ta - b\| + \|b\|/R).$$

Mas a desigualdade é válida para cada $R > 0$ e, tomando o limite, quando $R \rightarrow \infty$ e usando a desigualdade (2.10), obtemos

$$(\nu_B(Ta))^2 \leq \|a\| \cdot \|Ta - b\| \leq (\nu_A(a) + \epsilon)(\nu_B(Ta - b) + \epsilon).$$

Finalmente, isso vale para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, portanto para $a \in A$, vale

$$(\nu_B(Ta))^2 \leq \|a\| \cdot \|Ta - b\| \leq \nu_A(a) \cdot \nu_B(Ta - b).$$

- (2) Seja $y \in T(A) \cap \mathcal{S}(T)$. Logo existem x e (x_n) em A , tais que $y = Tx$, $x_n \rightarrow 0$ em A e $Tx_n \rightarrow y = Tx$ em B quando $n \rightarrow \infty$. Neste caso, consideramos $b = y$ e $a = x$ e usando (1), obtemos

$$(\nu_B(y))^2 = (\nu_B(Tx))^2 \leq \nu_A(x) \nu_B(Tx - y) = 0$$

donde $\nu_B(y) = 0$. Assim y é quasi-nilpotente e portanto $y \in \mathfrak{D}(B)$, o que mostra a inclusão.

□

Observação 2.3.2. *Pela Proposição 2.2.4, todo homomorfismo sobrejetivo entre álgebras de Banach com unidade satisfaz a condição (ii) do Lema 2.3.1.*

Teorema 2.3.3. *Sejam A e B álgebras de Banach com unidade, tais que satisfazem a condição (i) do Lema 2.3.1. Se $\theta : A \rightarrow B$ é um homomorfismo sobrejetivo, então $\mathcal{S}(\theta) \subset \text{rad } B$. Além disso, se B é semi-simples, então θ é automaticamente contínuo.*

Demonstração. Dado que $\mathcal{S}(\theta) \subset B$ e $\theta(A) = B$. Pela hipótese e a Observação 2.3.5, usamos o Lema 2.3.1 parte (2), considerando θ ao invés de T e obtemos que

$$\mathcal{S}(\theta) = \theta(A) \cap \mathcal{S}(\theta) \subset \mathfrak{D}(B).$$

Logo $\mathcal{S}(\theta) \subset \mathfrak{D}(B)$. Temos que $\overline{\theta(A)} = \overline{B} = B$ e usando o Teorema 2.1.4, obtemos que $\mathcal{S}(\theta)$ é um ideal em B , pela Proposição 1.2.17 (ii) vale $\mathcal{S}(\theta) \subset \text{rad } B$. Assim, concluímos a primeira parte da demonstração.

Por outro lado, se B é uma álgebra semi-simples, então $\text{rad } B = \{0\}$ e como mostramos acima $\mathcal{S}(\theta) \subset \text{rad } B$, obtemos que $\mathcal{S}(\theta) = \{0\}$. Pelo Teorema 2.1.3, temos que θ é automaticamente contínuo.

□

O Lema que apresentamos a seguir mostra que se $(A, \|\cdot\|_A)$ e $(B, \|\cdot\|_B)$ são álgebras de Banach com unidade, então existem normas de álgebra $\|\cdot\|_A$ em A e $\|\cdot\|_B$ em B equivalentes a $\|\cdot\|_A$ e $\|\cdot\|_B$ que satisfazem a condição (i) do Lema 2.3.1. Usando isto apresentaremos uma reformulação do Teorema de Johnson.

Lema 2.3.4. *Sejam $(A, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade, $x \in A$ e $\epsilon > 0$. Então existe uma norma de álgebra $\|\cdot\|$ sobre A , tal que $\|\cdot\|$ é equivalente a $\|\cdot\|$ satisfazendo $\|e\| = 1$ e $\|x\| \leq \nu(x) + \epsilon$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, vale que $\nu(x) + \epsilon \in \mathbb{R}^+$. Seja $y = x/(\nu(x) + \epsilon) \in A$.

Definimos o conjunto $S = \{y^n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$. Dado que A é uma álgebra com unidade, em particular, A é um grupo, com a operação de produto.

Afirmção. *O conjunto S é um semigrupo no grupo $(A, \cdot)$ e é limitado.*

De fato, vejamos primeiro que S com produto é um semigrupo. É claro que S é fechado em relação com o produto. Dados $r, s, t \in S$, existem $m, n, p \in \mathbb{N}$, tais que $r = y^m$, $s = y^n$ e $t = y^p$, então

$$(rs)t = (y^m \cdot y^n)y^p = y^{m+n} \cdot y^p = y^{m+n+p} = y^m(y^{n+p}) = y^m(y^n \cdot y^p) = r(st)$$

logo a propriedade associativa é satisfeita, portanto S é semigrupo.

Agora, pela Proposição (1.2.8) (v), existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$, temos que

$$\|x^n\|^{1/n} < \nu(x) + \epsilon.$$

Logo

$$\|y^n\| = \left(\frac{1}{\nu(x) + \epsilon} \right)^n \cdot \|x^n\| < 1, \text{ para todo } n > n_0.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$, como $\|x^m\| \leq \|x\|^m$ para $x \in A$, definimos

$$M = \max\{1, \|y\|^{n_0}, \|y\|^{n_0-1}, \dots, \|y\|^2, \|y\|\}.$$

Então $\|s\| \leq M$ para todo $s \in S$, o que prova a afirmação.

Por outro lado, para $s \in S$ e $a \in A$ arbitrários, temos que $\|sa\| \leq \|s\| \cdot \|a\| \leq M\|a\|$. Logo $p(a) = \sup\{\|a\|, \|sa\| : s \in S\}$ para todo $a \in A$, está bem definida.

Afirmção. $p(\cdot)$ é uma norma de álgebra sobre A e $\|a\| \leq p(a) \leq M\|a\|$, para todo $a \in A$.

De fato, vejamos cada condição:

(i) Seja $a \in A$ tal que $p(a) = 0$. Como $\|a\| \leq p(a)$, então $\|a\| = 0$ e portanto $a = 0$, pois, $\|\cdot\|$ é norma de álgebra. Além disso, $p(0) = \sup\{\|0\|, \|s \cdot 0\| : s \in S\} = 0$.

(ii) Como $\|\cdot\|$ é norma de álgebra, pela propriedade de supremo, para todos $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$p(\alpha a) = \sup\{\|\alpha a\|, \|s(\alpha a)\| : s \in S\} = |\alpha| \sup\{\|a\|, \|sa\| : s \in S\} = |\alpha|p(a)$$

e assim, $p(\alpha a) = |\alpha|p(a)$.

(iii) Sejam $a, b \in A$. Pelas propriedades de norma de álgebra e supremo, vale

$$\begin{aligned} p(a+b) &= \sup\{\|a+b\|, \|s(a+b)\| : s \in S\} \leq \sup\{\|a\| + \|b\|, \|sa\| + \|sb\| : s \in S\} \\ &\leq \sup\{\|a\|, \|sa\| : s \in S\} + \sup\{\|b\|, \|sb\| : s \in S\} = p(a) + p(b). \end{aligned}$$

Portanto $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$.

(iv) Como a norma $\|\cdot\|$ é de álgebra, satisfaz $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ para todos $a, b \in A$, e então

$$\begin{aligned} p(ab) &= \sup\{\|ab\|, \|sab\| : s \in S\} \leq \sup\{\|a\| \cdot \|b\|, \|sa\| \cdot \|b\| : s \in S\} \\ &\leq \|b\| \sup\{\|a\|, \|sa\| : s \in S\} = \|b\|p(a) \end{aligned}$$

e dado que $\|b\| \leq p(b)$, obtemos que $p(ab) \leq p(a)p(b)$.

Assim $p(\cdot)$ é norma de álgebra sobre A .

Dado que $M \geq 1$, se $a \in A$ temos que $\|a\| \leq M\|a\|$. Como $\|sa\| \leq M\|a\|$ para todo $s \in S$, então $p(a) \leq M\|a\|$. Logo $\|a\| \leq p(a) \leq M\|a\|$ e portanto as normas de álgebra $\|\cdot\|$ e $p(\cdot)$ são equivalentes, o que mostra a afirmação.

Agora, para $a \in A$ e $r, s \in S$, temos que $\|sa\| \leq p(a)$ e como S é semigrupo $rs \in S$. Além disso, pela definição de $p(\cdot)$ temos que $\|(rs)a\| \leq p(a)$, donde

$$p(sa) = \sup\{\|sa\|, \|rsa\| : r \in S\} \leq p(a). \quad (2.12)$$

Para todo $s \in S$, vale que $\|s\| \leq M$ e

$$p(s) = \sup\{\|s\|, \|rs\| : r \in S\} \leq M. \quad (2.13)$$

Sejam $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Usando as propriedades mostradas acima e lembrando que $M \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} p(\alpha a + ab) &\leq p(\alpha a) + p(ab) \leq |\alpha|p(a) + p(a)p(b) \\ &\leq p(a)(|\alpha| + p(b)) \leq p(a)(M|\alpha| + p(b)). \end{aligned}$$

Se α e b satisfazem $M|\alpha| + p(b) \leq 1$, então $p(\alpha a + ab) \leq p(a)$ e

$$\sup\{p(\alpha a + ab) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \leq p(a). \quad (2.14)$$

Portanto, está garantida a boa definição de

$$|||a||| = \sup\{p(\alpha a + ab) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\}, \text{ para todo } a \in A.$$

E também temos que $|||a||| \leq p(a)$ para todo $a \in A$.

Afirmção. $|||\cdot|||$ é uma norma de álgebra sobre A e $p(a)/M \leq |||a||| \leq p(a)$, para todo $a \in A$.

De fato, vejamos cada condição:

- (i) Seja $a \in A$ tal que $|||a||| = 0$. Logo $p(\alpha a + ab) \leq |||a|||$, para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $b \in A$ que satisfazem $M|\alpha| + p(b) \leq 1$. Dado que $p(\cdot)$ é norma de álgebra, vale que $p(\alpha a + ab) = 0$ e portanto $\alpha a + ab = 0$.

Consideremos α , tal que $|\alpha| = 1/M$ e $b = 0$. Então $1 = M|\alpha| + p(b) \leq 1$, e assim obtemos que $\alpha a = \alpha a + ab = 0$, donde $|\alpha| \cdot |||a||| = ||\alpha a|| = 0$, logo $a = 0$.

Temos também $|||0||| = \sup\{p(\alpha 0 + 0b) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} = 0$.

- (ii) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ para todo $a \in A$, temos que

$$|||\lambda a||| = \sup\{p[\alpha(\lambda a) + (\lambda a)b] : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\}.$$

Como $p(\cdot)$ é norma de álgebra, então

$$|||\lambda a||| = |\lambda| \sup\{p(\alpha a + ab) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} = |\lambda| \cdot |||a|||$$

e assim, $|||\lambda a||| = |\lambda| \cdot |||a|||$.

(iii) Sejam $a, c \in A$. Pelas propriedades da norma de álgebra $p(\cdot)$, temos que

$$\begin{aligned} |||a + c||| &= \sup\{p[\alpha(a + c) + (a + c)b] : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \\ &\leq \sup\{p(\alpha a + ab) + p(\alpha c + cb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \\ &\leq \sup\{p(\alpha a + ab) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \\ &\quad + \sup\{p(\alpha c + cb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \\ &\leq |||a||| + |||c||| \end{aligned}$$

portanto $|||a + c||| \leq |||a||| + |||c|||$.

(iv) Sejam $a, b, c \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ que satisfazem $M|\alpha| + p(b) \leq 1$. Daí segue que $p(\alpha c + cb) \leq |||c|||$. Logo

$$\{(\alpha, b) \in \mathbb{C} \times A : M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \subseteq \{(\alpha, b) \in \mathbb{C} \times A : p(\alpha c + cb) \leq |||c|||\}.$$

Então

$$\begin{aligned} &\{p(\alpha ac + acb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \\ &\subseteq \{p(\alpha ac + acb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, p(\alpha c + cb) \leq |||c|||\}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo, temos que

$$\begin{aligned} |||ac||| &= \sup\{p(\alpha ac + acb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \\ &\leq \sup\{p(\alpha ac + acb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, p(\alpha c + cb) \leq |||c|||\} \\ &\leq \sup\{p[a(\alpha c + cb)] : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, p\left(\frac{\alpha c + cb}{|||c|||}\right) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Seja $d = \frac{\alpha c + cb}{|||c|||}$, então

$$\begin{aligned} |||ac||| &\leq \sup\{p[a(|||c|||d)] : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, p(d) \leq 1\} \\ &= |||c||| \sup\{p(ad) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, p(d) \leq 1\} \\ &= |||c||| \sup\{p(0.a + ad) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M.0 + p(d) \leq 1\} \\ &\leq |||c|||.|||a||| = |||a|||.|||c|||. \end{aligned}$$

Assim, $|||ac||| \leq |||a|||.|||c|||$. Portanto $|||\cdot|||$ é norma de álgebra sobre A .

Seja agora $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $|\alpha| = 1/M$. Então, se $a \in A$

$$\frac{p(a)}{M} = |\alpha|p(a) = p(\alpha a) = p(\alpha a + a \cdot 0) \leq |||a|||,$$

pois $1 = M|\alpha| = M|\alpha| + p(0) \leq 1$. Logo $p(a)/M \leq |||a|||$ e pela equação (2.14), temos que $|||a||| \leq p(a)$. Assim, as normas de álgebra $p(\cdot)$ e $|||\cdot|||$ são equivalentes e a afirmação é válida.

Portanto, pelas afirmações acima temos que as normas de álgebra $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ são equivalentes. A munida com $|||\cdot|||$ é uma álgebra de Banach.

Por outro lado, sejam $s \in S$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $b \in A$ com $M|\alpha| + p(b) \leq 1$. Usando propriedades de norma de álgebra e as equações (2.12) e (2.13), temos que

$$p(\alpha s + sb) \leq p(\alpha s) + p(sb) = |\alpha|p(s) + p(sb) \leq M|\alpha| + p(b) \leq 1$$

e assim $|||s||| \leq 1$.

Afirmção. $|||e||| = 1$ e $|||x||| \leq \nu(x) + \epsilon$.

De fato, como $|||e||| = |||e \cdot e||| \leq |||e||| \cdot |||e|||$ e dado que $|||e||| \neq 0$, então $1 \leq |||e|||$.

Agora, como $p(e) = \sup\{|||e|||, |||se||| : s \in S\} \leq M$, temos que se $b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$p(\alpha e + eb) \leq |\alpha|p(e) + p(b) \leq M|\alpha| + p(b)$$

então

$$|||e||| = \sup\{p(\alpha e + eb) : \alpha \in \mathbb{C}, b \in A, M|\alpha| + p(b) \leq 1\} \leq 1.$$

Portanto $|||e||| = 1$.

Seja agora $s \in S$ arbitrário. Temos que $|||s||| \leq 1$, pela definição dos elementos de S . Consideremos o caso particular que $s = y = \frac{x}{\nu(x) + \epsilon}$, portanto

$$\frac{1}{\nu(x) + \epsilon} |||x||| \leq 1$$

donde segue que $|||x||| \leq \nu(x) + \epsilon$, o que conclui a prova do Lema.

□

Observação 2.3.5. *Pela Proposição 2.2.4, todo homomorfismo sobrejetivo entre álgebras de Banach com unidade satisfaz a condição (ii) do Lema 2.3.1.*

Teorema 2.3.6 (Reformulação do Teorema de Johnson). *Sejam A e B álgebras de Banach com unidade e suponha que $\theta : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo sobrejetivo. Então $\mathcal{S}(\theta) \subset \text{rad } B$. Se B é semi-simples, então θ é automaticamente contínuo.*

Demonstração. Primeiro, usamos o Lema 2.3.4 e assim garantimos a hipótese do Teorema 2.3.3. Portanto obtemos o resultado. □

2.4 O Teorema de Bade - Curtis

Teorema 2.4.1 (Fundamental de Bade-Curtis). *Sejam A uma álgebra de Banach comutativa e θ um homomorfismo de A sobre uma álgebra de Banach B . Se (g_n) e (h_n) são sequências em A , tais que $g_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo*

$$(i) \ g_n h_n = g_n, \ n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \ h_m h_n = 0, \ n, m \in \mathbb{N} \text{ tais que } m \neq n,$$

então

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|\theta(g_n)\|}{\|g_n\| \cdot \|h_n\|} < \infty.$$

Demonstração. Suponha que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|\theta(g_n)\|}{\|g_n\| \cdot \|h_n\|} = +\infty. \quad (2.15)$$

Suponhamos que $\|g_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (i), temos que $g_n h_n = g_n$ e

$$1 = \|g_n\| = \|g_n h_n\| \leq \|g_n\| \cdot \|h_n\| = \|h_n\|.$$

Daí $\|h_n\| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmção. *Dados $i, j \in \mathbb{N}$, existem elementos distintos $q_{i,j}$ e $p_{i,j}$ das sequências (g_n) e (h_n) , tais que $p_{i,j} = h_m$, onde m é o índice tal que $q_{i,j} = g_m$ com*

$$\|\theta(q_{i,j})\| \geq 4^{i+j} \|p_{i,j}\|. \quad (2.16)$$

De fato, Sabemos que existe uma bijeção

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ m &\longmapsto (i, j).\end{aligned}$$

Seja $(i_1, j_1) = \varphi(1)$. Por (2.15), temos que

$$\{n \in \mathbb{N} : \|\theta(g_n)\| \geq 4^{i_1+j_1}\|h_n\|\}$$

é infinito. Escolha um elemento m_1 deste conjunto. Tomando $q_{i_1, j_1} = g_{m_1}$ e $p_{i_1, j_1} = h_{m_1}$, temos que

$$\|\theta(q_{i_1, j_1})\| \geq 4^{i_1+j_1}\|p_{i_1, j_1}\|.$$

Seja $(i_2, j_2) = \varphi(2)$. Novamente por (2.15), temos que

$$\{n \in \mathbb{N} : n > m_1 \text{ e } \|\theta(g_n)\| \geq 4^{i_2+j_2}\|h_n\|\}$$

é infinito. Escolhendo um elemento m_2 deste conjunto, é claro que $m_2 \neq m_1$. Tomando $q_{i_2, j_2} = g_{m_2}$ e $p_{i_2, j_2} = h_{m_2}$, temos que

$$\|\theta(q_{i_2, j_2})\| \geq 4^{i_2+j_2}\|p_{i_2, j_2}\|.$$

Usando a indução e o fato de φ ser uma bijeção, obtemos nossa afirmação.

Observe que $\|q_{i, j}\| = 1$ e $\|p_{i, j}\| \geq 1$ para todos $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$f_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_{i, j}}{2^j}.$$

A série f_i converge em A e $\|f_i\| \leq 1$, pois para cada $i \in \mathbb{N}$ temos

$$\|f_i\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{q_{i, j}}{2^j} \right\|$$

e como a norma de álgebra é contínua, segue que

$$\|f_i\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{q_{i, j}}{2^j} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n \frac{q_{i, j}}{2^j} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left\| \frac{q_{i, j}}{2^j} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = 1.$$

Agora, A é comutativa, assim de (i) para $n \neq m$, vale que

$$h_m g_n = g_n h_m = (g_n h_n) h_m = g_n (h_n h_m) = g_n 0 = 0. \quad (2.17)$$

Portanto, usando (2.17) e lembrando que $p_{i,j}q_{i,l} = 0$ se $j \neq l$ e $p_{i,j}q_{i,j} = q_{i,j}$, temos

$$p_{i,j} f_i = p_{i,j} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q_{i,l}}{2^l} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_{i,j} q_{i,l}}{2^l} = \frac{q_{i,j}}{2^j}.$$

Daí $p_{i,j} f_i = \frac{q_{i,j}}{2^j}$ e usando (2.16), temos

$$\begin{aligned} 4^{i+j} &\leq 4^{i+j} \|p_{i,j}\| \leq \|\theta(q_{i,j})\| = \|\theta(2^j p_{i,j} f_i)\| \\ &= 2^j \|\theta(p_{i,j} f_i)\| \leq 2^j \|\theta(p_{i,j})\| \cdot \|\theta(f_i)\|. \end{aligned}$$

Donde, obtemos que $\|\theta(f_i)\| \neq 0$ e portanto $\theta(f_i) \neq 0$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolha $j(i) \in \mathbb{N}$, tal que $\|\theta(f_i)\| < 2^{j(i)}$. Defina

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k,j(k)}}{2^k \|p_{k,j(k)}\|}$$

como acima com f_i , temos que esta última série converge em A , pois a norma de $\frac{p_{k,j(k)}}{\|p_{k,j(k)}\|}$ é 1. Agora, como as convergências são absolutas, temos

$$y f_i = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k,j(k)}}{2^k \|p_{k,j(k)}\|} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{q_{i,l}}{2^l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_{k,j(k)} q_{i,l}}{2^{k+l} \|p_{k,j(k)}\|}.$$

Usando (2.17) e (i), segue que

$$\begin{aligned} y f_i &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h_{n(k,j(k))} g_{n(i,l)}}{2^{k+l} \|p_{k,j(k)}\|} = \frac{h_{n(i,j(i))} g_{n(i,j(i))}}{2^{i+j(i)} \|p_{i,j(i)}\|} \\ &= \frac{g_{n(i,j(i))}}{2^{i+j(i)} \|p_{i,j(i)}\|} = \frac{q_{i,j(i)}}{2^{i+j(i)} \|p_{i,j(i)}\|}. \end{aligned}$$

e por (2.16), temos

$$\|\theta(y f_i)\| = \frac{1}{2^{i+j(i)}} \cdot \frac{\|\theta(q_{i,j(i)})\|}{\|p_{i,j(i)}\|} > \frac{4^{i+j(i)}}{2^{i+j(i)}} = 2^{i+j(i)}.$$

Por outro lado

$$\|\theta(y f_i)\| \leq \|\theta(y)\| \cdot \|\theta(f_i)\| \leq 2^{j(i)} \|\theta(y)\|.$$

Logo $2^{i+j(i)} < \|\theta(y f_i)\| \leq 2^{j(i)} \|\theta(y)\|$ e concluímos que $2^i < \|\theta(y)\|$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Obtemos assim uma contradição, pois, $\theta(y)$ é um valor fixo em B e portanto o resultado é válido nesse caso.

De uma maneira geral, quando a norma da sequência g_n não necessariamente é 1, consideramos então a sequência $g'_n = g_n/||g_n||$ para $n \in \mathbb{N}$. Notemos que (g'_n) e h_n satisfazem as condições (i) e (ii).

Pelo o que foi mostrado acima, podemos garantir que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{||\theta(g'_n)||}{||g'_n|| \cdot ||h_n||} < \infty.$$

Como $\frac{||\theta(g'_n)||}{||g'_n|| \cdot ||h_n||} = \frac{||\theta(g_n)||}{||g_n|| \cdot ||h_n||}$, temos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{||\theta(g_n)||}{||g_n|| \cdot ||h_n||} < \infty.$$

o que conclui a prova.

□

O Lema que acabamos de provar afirma que dado qualquer homomorfismo $\theta : A \longrightarrow B$, sobre álgebras nas condições acima, as normas dos elementos $\theta(g_n)$ em B não podem crescer mais rápido do que as normas das correspondentes h_n em A . Em casos específicos é possível exibir sequências (g_n) e (h_n) com as propriedades descritas no Lema anterior.

A partir do Teorema 2.4.1, obteremos abaixo uma propriedade importante de θ sobre o conjunto $\mathfrak{B}$ dos idempotentes de A .

Definição 2.4.2. *Seja A uma álgebra. Um elemento $p \in A$ é chamado idempotente se $p^2 = p$.*

O conjunto de idempotentes de A é denotado por $\mathfrak{B}$. Observe que se A é uma álgebra, então $0 \in \mathfrak{B}$ e consequentemente $\mathfrak{B} \neq \emptyset$.

Definição 2.4.3. *Seja A uma álgebra. Os elementos $a, b \in A$ são chamados ortogonais em A , e denotado por $a \perp b$, se $ab = ba = 0$.*

Um subconjunto S de A é ortogonal, se $a \perp b$ sempre que $a, b \in S$ são tais que $a \neq b$. Uma sequência (a_n) em S é ortogonal se $a_m \perp a_n$ quando $m \neq n$.

Observação 2.4.4. (i) *Se A é uma álgebra com unidade e $p \in \mathfrak{B}$, então p e $e - p$ são idempotentes ortogonais.*

(ii) *Um conjunto ortogonal de idempotentes não vazio é linearmente independente.*

Definição 2.4.5. *Seja A uma álgebra. No conjunto $\mathfrak{B}$ dos idempotentes definimos uma relação de ordem parcial da seguinte forma: dados $p, q \in \mathfrak{B}$ seja $p \preceq q$, se $pq = qp = p$.*

Observação 2.4.6. (i) *Se $p \preceq q$, então $-p \preceq q$, pois se $p \preceq q$, temos que $pq = qp = p$, isto implica que $(-p)q = q(-p) = -p$, logo $-p \preceq q$.*

(ii) *Se A é uma álgebra comutativa, dados $p, q \in \mathfrak{B}$ tais que $p \preceq q$, temos $pq = p$.*

Corolário 2.4.7. *Seja θ um homomorfismo arbitrário de uma álgebra de Banach comutativa com unidade A sobre uma álgebra de Banach B . Se (p_n) é uma sequência de idempotentes ortogonais em A , isto é, se para $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $p_m p_n = 0$ quando $m \neq n$, então existe uma constante $K > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\|\theta(p_n)\| \leq K \|p_n\|^2.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $g_n = h_n = p_n$. Por hipótese, a condição (ii) do Teorema 2.4.1 está satisfeita. Agora, como $g_n h_n = p_n p_n = p_n^2 = p_n = g_n$, a condição (i) também está satisfeita. Segue então do Teorema 2.4.1, que existe $M > 0$, tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|\theta(p_n)\|}{\|p_n\| \cdot \|p_n\|} < M < \infty.$$

Obtemos então que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade $\|\theta(p_n)\| \leq K \|p_n\|^2$.

□

O Teorema seguinte mostra que a constante K do Corolário 2.4.7 não depende da sequência (p_n) .

Teorema 2.4.8. *Seja θ um homomorfismo de uma álgebra de Banach comutativa com unidade A sobre uma álgebra de Banach B . Então existe uma constante $K > 0$, tal que para todo $p \in \mathfrak{B}$, vale*

$$\|\theta(p)\| \leq K \|p\|^2.$$

Além disso, se $\mathfrak{B}$ é um conjunto limitado em A , então a imagem de $\mathfrak{B}$ por qualquer homomorfismo é limitada.

Demonstração. Consideremos apenas elementos não nulos de $\mathfrak{B}$, pois, caso contrário a desigualdade é satisfeita trivialmente. Suponha que o Teorema seja falso, isto é, para qualquer $M > 0$, existe $p_M \in \mathfrak{B}$, tal que $\|\theta(p_M)\| > M \|p_M\|^2$. A idéia da demonstração por absurdo é construir uma sequência de idempotentes ortogonais que contradiz o Corolário 2.4.7.

Seja $\mathfrak{B}_1$ o conjunto que denota os elementos $p \in \mathfrak{B}$, tais que $p \neq 0$ e

$$\sup_{q \preceq p} \frac{\|\theta(q)\|}{\|q\|^2} = +\infty.$$

Para todo $p \in \mathfrak{B}$, temos que $p \preceq e$. Agora, pela hipótese acima, para cada $M > 0$ suficientemente grande, existe $p_M \in \mathfrak{B}$, tal que $\|\theta(p_M)\| > M\|p_M\|^2$, então

$$M < \frac{\|\theta(p_M)\|}{\|p_M\|^2} \leq \sup_{q \preceq e} \frac{\|\theta(q)\|}{\|q\|^2}$$

e conseqüentemente, fazendo $M \rightarrow \infty$, obtemos que $e \in \mathfrak{B}_1$. Isto mostra que $\mathfrak{B}_1 \neq \emptyset$.

Afirmção. Se $p \in \mathfrak{B}_1$ e $q \preceq p$, então $q \in \mathfrak{B}_1$ ou $p - q \in \mathfrak{B}_1$.

De fato, suponha por contradição, que a afirmação seja falsa. Nesse caso existe uma constante $K > 0$, tal que

$$\|\theta(r)\| \leq K\|r\|^2, \text{ para todo } r \preceq q \text{ e } r \preceq p - q. \quad (2.18)$$

Seja agora $s \in \mathfrak{B}$ arbitrário, tal que $s \preceq p$. Então $sp = ps = s$ e podemos escrever $s = sq + s(p - q)$. Assim,

$$\|\theta(s)\| = \|\theta(sq + s(p - q))\| = \|\theta(sq) + \theta(s(p - q))\|$$

donde

$$\|\theta(s)\| \leq \|\theta(sq)\| + \|\theta(s(p - q))\|. \quad (2.19)$$

Dado que, a álgebra A é comutativa e $p, q \in \mathfrak{B}$ ($p^2 = p$ e $q^2 = q$), temos que

$$(sq)q = sq^2 = sq = q(sq)$$

e assim $sq \preceq q$. Agora,

$$\begin{aligned} (s(p - q))(p - q) &= (sp - sq)(p - q) = sp^2 - sqp - (sp)q + sq^2 \\ &= sp - (sp)q - sq + sq = sp - sq = s(p - q) \end{aligned}$$

então $(s(p - q))(p - q) = s(p - q)$, donde $s(p - q) \preceq p - q$.

Como $sq \preceq q$ e $s(p - q) \preceq p - q$, usando (2.18) em (2.19), resulta

$$\begin{aligned} \|\theta(s)\| &\leq \|\theta(sq)\| + \|\theta(s(p - q))\| \leq K\|sq\|^2 + K\|s(p - q)\|^2 \\ &\leq K\|s\|^2 \cdot \|q\|^2 + K\|s\|^2 \cdot \|p - q\|^2 = K\|s\|^2 (\|q\|^2 + \|p - q\|^2) \end{aligned}$$

logo

$$\|\theta(s)\| \leq K\|s\|^2 (\|q\|^2 + \|p - q\|^2)$$

e obtemos $\|\theta(s)\| \leq C\|s\|^2$ para $s \preceq p$ arbitrário, contradizendo a hipótese que $p \in \mathfrak{B}_1$. Portanto $q \in \mathfrak{B}_1$ ou $(p - q) \in \mathfrak{B}_1$, o que mostra a afirmação.

Usando o processo de indução vamos construir uma sequência (r_k) de idempotentes em $\mathfrak{B}_1$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $r_{k+1} \preceq r_k$ e

$$4\|r_k\|^2 \left(k + 1 + \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} \right) < \frac{\|\theta(r_{k+1})\|}{\|r_{k+1}\|^2}.$$

Se $r_1 \in \mathfrak{B}_1$, então dado $M = 16\|r_1\|^4 \left(2 + 2\frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right)$, existe $q_1 \in \mathfrak{B}$, tal que $q_1 \preceq r_1$ e

$$\frac{\|\theta(q_1)\|}{\|q_1\|^2} > M = 16\|r_1\|^4 \left(2 + 2\frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right). \quad (2.20)$$

Como $q_1 \preceq r_1$ então $q_1 r_1 = q_1$, donde $\|q_1\| \leq \|q_1\| \cdot \|r_1\|$ e como $q_1 \neq 0$, vale que $1 \leq \|r_1\|$.

Segue de (2.20), que

$$16\|r_1\|^4 \left(2 + 2\frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right) < \frac{\|\theta(q_1)\|}{\|q_1\|^2}$$

logo

$$4\|r_1\|^2 \left(2 + 2\frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right) < \frac{\|\theta(q_1)\|}{4\|r_1\|^2\|q_1\|^2}$$

donde

$$4\|r_1\|^2 \left(2 + \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right) + 4\|r_1\|^2 \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} < \frac{\|\theta(q_1)\|}{4\|r_1\|^2\|q_1\|^2}$$

logo

$$4\|r_1\|^2 \left(2 + \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right) < \frac{\|\theta(q_1)\|}{4\|r_1\|^2\|q_1\|^2} - 4\|r_1\|^2 \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2}.$$

Como $1 \leq \|r_1\|$, então $-4\|r_1\|^2 \leq -1$, obtemos assim, que

$$4\|r_1\|^2 \left(2 + \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \right) < \frac{\|\theta(q_1)\|}{4\|r_1\|^2\|q_1\|^2} - \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2}. \quad (2.21)$$

Dado que, $q_1 \in \mathfrak{B}$, então $q_1 = q_1^2$, donde $\|q_1\| \leq \|q_1\| \cdot \|q_1\|$ e como $q_1 \neq 0$, vale que $1 \leq \|q_1\|$.

Temos que $1 \leq \|r_1\| \leq \|r_1\| \cdot \|q_1\|$, então $2 \leq \|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\| \leq 2\|r_1\| \cdot \|q_1\|$, logo $(\|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\|)^2 \leq 4\|r_1\|^2 \cdot \|q_1\|^2$.

E também $1 \leq \|r_1\| \leq \|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\|$, donde $\|r_1\|^2 \leq (\|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\|)^2$, portanto

$$\frac{-1}{\|r_1\|^2} \leq \frac{-1}{(\|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\|)^2}.$$

Usando agora estas últimas desigualdades temos que

$$\frac{\|\theta(q_1)\|}{4\|r_1\|^2\|q_1\|^2} - \frac{\|\theta(r_1)\|}{\|r_1\|^2} \leq \frac{\|\theta(q_1)\|}{(\|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\|)^2} - \frac{\|\theta(r_1)\|}{(\|r_1\| \cdot \|q_1\| + \|r_1\|)^2}$$

portanto

$$\frac{||\theta(q_1)||}{4||r_1||^2||q_1||^2} - \frac{||\theta(r_1)||}{||r_1||^2} \leq \frac{||\theta(q_1)|| - ||\theta(r_1)||}{(||r_1|| \cdot ||q_1|| + ||r_1||)^2}. \quad (2.22)$$

Como $q_1 \preceq r_1$, por propriedades da norma de álgebra, temos que

$$||r_1 - q_1|| \leq ||r_1|| + ||q_1|| \leq ||r_1|| + ||r_1|| \cdot ||q_1||$$

donde $||r_1 - q_1||^2 \leq (||r_1|| \cdot ||q_1|| + ||r_1||)^2$ e também temos

$$||\theta(q_1)|| - ||\theta(r_1)|| \leq ||\theta(q_1) - \theta(r_1)|| = ||\theta(q_1 - r_1)|| = ||\theta(r_1 - q_1)||.$$

Usando estas últimas desigualdades, temos que

$$\frac{||\theta(q_1)|| - ||\theta(r_1)||}{(||r_1|| \cdot ||q_1|| + ||r_1||)^2} \leq \frac{||\theta(r_1 - q_1)||}{||r_1 - q_1||^2}. \quad (2.23)$$

Agora, de (2.21), (2.22) e (2.23), resulta que

$$4||r_1||^2 \left(2 + \frac{||\theta(r_1)||}{||r_1||^2} \right) < \frac{||\theta(r_1 - q_1)||}{||r_1 - q_1||^2}. \quad (2.24)$$

Por hipótese temos que $q_1 \preceq r_1$, e como $(r_1 - q_1)r_1 = r_1^2 - r_1q_1 = r_1 - q_1$, então $r_1 - q_1 \preceq r_1$. Usando a afirmação anterior, obtemos que $q_1 \in \mathfrak{B}_1$ ou $r_1 - q_1 \in \mathfrak{B}_1$.

Dado que $1 \leq ||r_1||$ e por (2.20), temos que

$$4||r_1||^2 \left(2 + \frac{||\theta(r_1)||}{||r_1||^2} \right) < 16||r_1||^4 \left(2 + 2\frac{||\theta(r_1)||}{||r_1||^2} \right) < \frac{||\theta(q_1)||}{||q_1||^2}.$$

Se $q_1 \in \mathfrak{B}_1$, tomamos $r_2 = q_1$ e se $q_1 \notin \mathfrak{B}_1$, tomamos $r_2 = r_1 - q_1 \in \mathfrak{B}_1$. Em qualquer dos dois casos $r_2 \in \mathfrak{B}_1$ e $r_2 \preceq r_1$. Além disso, de esta última desigualdade se $r_2 = q_1$ e de (2.24) se $r_2 = r_1 - q_1$, temos que em cada caso

$$4||r_1||^2 \left(2 + \frac{||\theta(r_1)||}{||r_1||^2} \right) < \frac{||\theta(r_2)||}{||r_2||^2}.$$

Seja agora $r_2 \in \mathfrak{B}_1$, considerando $M = 16||r_2||^4 \left(3 + 2\frac{||\theta(r_2)||}{||r_2||^2} \right)$, existe $q_2 \in \mathfrak{B}$, tal que $q_2 \preceq r_2$ e temos que

$$\frac{||\theta(q_2)||}{||q_2||^2} > M = 16||r_2||^4 \left(3 + 2\frac{||\theta(r_2)||}{||r_2||^2} \right).$$

Repetindo o feito acima, obtemos que $r_3 \in \mathfrak{B}_1$ (r_3 é igual a q_2 ou $r_2 - q_2$) com $r_3 \preceq r_2$, satisfazendo

$$4\|r_2\|^2 \left(3 + \frac{\|\theta(r_2)\|}{\|r_2\|^2} \right) < \frac{\|\theta(r_3)\|}{\|r_3\|^2}.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos indutivamente uma sequência (r_k) de idempotentes em $\mathfrak{B}_1$. Assim:

Se $r_k \in \mathfrak{B}_1$, considerando $M = 16\|r_k\|^4 \left(k + 2 \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} \right)$, existe $q_k \in \mathfrak{B}$, tal que $q_k \preceq r_k$ e temos que

$$\frac{\|\theta(q_k)\|}{\|q_k\|^2} > M = 16\|r_k\|^4 \left(k + 2 \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} \right).$$

Repetindo o feito acima, obtemos que $r_{k+1} \in \mathfrak{B}_1$ com $r_{k+1} \preceq r_k$ para $k = 3, 4, 5, \dots$ satisfazendo

$$4\|r_k\|^2 \left(k + 1 + \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} \right) < \frac{\|\theta(r_{k+1})\|}{\|r_{k+1}\|^2}. \quad (2.25)$$

Como temos que $\preceq$ é uma relação de ordem parcial, em particular é transitiva, se $r \preceq s$ e $s \preceq t$, então $r \preceq t$.

É claro que, dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n < m$, então $r_m \preceq r_n$, ou seja $r_m r_n = r_m$.

Por outro lado, para $k \in \mathbb{N}$ defina $p_k = r_k - r_{k+1}$. Sejam $k, l \in \mathbb{N}$, tais que $k \neq l$, então

$$p_k p_l = (r_k - r_{k+1})(r_l - r_{l+1}) = r_k r_l - r_{k+1} r_l - r_k r_{l+1} + r_{k+1} r_{l+1}.$$

Considere $k < l$. Usando a afirmação acima, obtemos que

$$p_k p_l = r_l - r_{k+1} r_l - r_{l+1} + r_{l+1}.$$

Pode ocorrer que $k + 1 = l$ ou $k + 1 < l$, nos dois casos temos que $r_{k+1} r_l = r_l$, então

$$p_k p_l = r_l - r_l - r_{l+1} + r_{l+1} = 0.$$

Portanto, para $k, l \in \mathbb{N}$, tais que $k \neq l$, temos que $p_k \perp p_l$.

Além disso, é fácil ver que p_k é idempotente para todo $k \in \mathbb{N}$.

De (2.25), obtemos que

$$4\|r_k\|^2 \left(k + 1 + \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} \right) < \frac{\|\theta(r_{k+1})\|}{\|r_{k+1}\|^2}.$$

Como, para $k \in \mathbb{N}$, vale $r_{k+1} \preceq r_k$, então $\|r_{k+1}\| \leq \|r_k\| \cdot \|r_{k+1}\|$, portanto $1 \leq \|r_k\|$, donde

$$k + 1 + \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} < \frac{\|\theta(r_{k+1})\|}{4\|r_k\|^2\|r_{k+1}\|^2}.$$

Logo

$$k + 1 \leq \frac{\|\theta(r_{k+1})\|}{4\|r_k\|^2\|r_{k+1}\|^2} - \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2}. \quad (2.26)$$

Agora, considerando (2.22) e (2.23) e mudando as variáveis q_1 e r_1 por r_{k+1} e r_k , obtemos que

$$\frac{\|\theta(r_{k+1})\|}{4\|r_k\|^2\|r_{k+1}\|^2} - \frac{\|\theta(r_k)\|}{\|r_k\|^2} \leq \frac{\|\theta(r_{k+1} - r_k)\|}{\|r_{k+1} - r_k\|^2}.$$

Donde, usando (2.26) e a definição de p_k , resulta que para cada $k \in \mathbb{N}$, vale

$$k + 1 < \frac{\|\theta(p_k)\|}{\|p_k\|^2}.$$

Portanto, obtemos uma sequência (p_k) de idempotentes ortogonais em A , para a qual não existe $K > 0$ satisfazendo $\|\theta(p_k)\| \leq K\|p_k\|^2$, o que contradiz o Corolário 2.4.7.

Então existe uma constante $K > 0$, tal que para todo $p \in \mathfrak{B}$, temos

$$\|\theta(p)\| \leq K\|p\|^2.$$

Se $\mathfrak{B}$ é um conjunto limitado em A , existe $C > 0$, tal que para todo $p \in \mathfrak{B}$, temos que $\|p\| \leq C$ e portanto para todo $p \in \mathfrak{B}$, vale $\|\theta(p)\| \leq KC^2$. O que mostra que a imagem de $\mathfrak{B}$ por qualquer homomorfismo é limitada. Observe o Exemplo 5.4.6 em [3] p. 665.

□

Estaremos interessados agora em resultados de continuidade automática onde a álgebra de partida do homomorfismo dado é uma álgebra de funções contínuas e a álgebra de chegada é arbitrária.

Definição 2.4.9. *Seja A uma álgebra. Então $a \in A$ é nilpotente, se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Um conjunto $S \subset A$ é dito nilpotente, se cada $a \in S$ é nilpotente.*

Denotamos por $\mathcal{R}$ o conjunto dos elementos nilpotentes de A . Assim a álgebra A é dita nilpotente se $A = \mathcal{R}$.

Observação 2.4.10. *Seja A uma álgebra de Banach semi-simples comutativa com unidade. Identificamos A com a subálgebra $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$ de $C(\Phi_A)$, onde $C(\Phi_A)$ é o espaço das funções contínuas com valores complexos definidas no espaço Φ_A que é um espaço de Hausdorff compacto. A álgebra $A \cong \hat{A}$ é chamada regular (no sentido de Silov) se satisfaz a seguinte condição:*

Dados quaisquer dois conjuntos fechados disjuntos F_1 e F_2 em Φ_A , existe uma função em A que é zero em F_1 e 1 em F_2 .

Definição 2.4.11. *Sejam A uma álgebra de Banach semi-simples comutativa regular com unidade, B uma álgebra de Banach e $\theta : A \longrightarrow B$ um homomorfismo. Denotamos*

$$\mathfrak{G} = \left\{ E \subset \Phi_A : E \text{ aberto e } \sup \frac{\|\theta(g)\|}{\|g\| \cdot \|h\|} = M_E < \infty \right\}$$

para todos $g, h \in A \cong \widehat{A}$ tais que $\text{supp}(g) = \overline{\{x \in \Phi_A : g(x) \neq 0\}} \subset E$, $\text{supp}(h) \subset E$ e $gh = g$.

Observação 2.4.12. *Se $E \in \mathfrak{G}$ e $C \subset E$ é aberto então $C \in \mathfrak{G}$.*

Lema 2.4.13 (Urysohn). *Seja X um espaço topológico normal. Se F e G são fechados em X com $F \cap G = \emptyset$, então existe uma função $f \in C(X, [0, 1])$ satisfazendo $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$.*

Vamos mostrar que existe um elemento maximal em $\mathfrak{G}$ cujo complementar é finito.

Lema 2.4.14. *Se (E_n) é uma sequência de conjuntos abertos dois a dois disjuntos em Φ_A , então $E_n \in \mathfrak{G}$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Suponhamos que o Lema é falso. Então existe uma sequência infinita (E_m) de conjuntos abertos dois a dois disjuntos em Φ_A e funções $g_m, h_m \in A$ com $\text{supp}(g_m) \subset E$ e $\text{supp}(h_m) \subset E$ para todo $m \in \mathbb{N}$, satisfazendo:

(i) $g_m h_m = g_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Vamos escolher g_m , tal que $\|g_m\| = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\|\theta(g_m)\| \geq m\|g_m\|$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $m \neq n$. Como E_m e E_n são abertos disjuntos, então

$$\text{supp}(h_m) \cap \text{supp}(h_n) = \emptyset$$

portanto $h_m h_n = 0$. Assim (g_n) e (h_n) satisfazem as condições do Teorema Fundamental de Bade-Curtis 2.4.1 e (ii) contradiz este teorema.

□

Lema 2.4.15. *Sejam $E_1, E_2 \in \mathfrak{G}$. Se G é um conjunto aberto tal que $\overline{G} \subseteq E_2$, então $E_1 \cup G \in \mathfrak{G}$.*

Demonstração. É claro que $\overline{G} \cap E_2^c = \emptyset$, onde E_2^c denota o complementar de E_2 . Como Φ_A é um espaço de Hausdorff compacto e A é regular, pelo Lema de Urysohn 2.4.13, podemos escolher um aberto V_1 e uma função $u_1 \in A$ tais que $E_2^c \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset \overline{G}^c$, $u_1(E_2^c) = \{1\}$ e $\text{supp}(u_1) \subset V_1$. Observe que temos $u_1(\overline{G}) = \{0\}$.

Consideremos $u_2 = 1 - u_1$. É claro que $\text{supp}(u_1) \cap \overline{G} = \emptyset$ e $\text{supp}(u_2) \cap E_2^c = \emptyset$. Pela regularidade de A , usando um argumento análogo ao anterior, podemos encontrar v_1 e v_2 em A , tais que

$$u_1 v_1 = u_1, \quad \text{supp}(v_1) \cap \overline{G} = \emptyset \quad \text{e} \quad u_2 v_2 = u_2, \quad \text{supp}(v_2) \cap E_2^c = \emptyset.$$

Seja $H = E_1 \cup G$ e suponha $\text{supp}(g) \subseteq H$, $\text{supp}(h) \subseteq H$ e $gh = g$. Então

$$\text{supp}(gu_i) \subseteq E_i, \quad \text{supp}(hv_i) \subseteq E_i, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

e

$$gu_i = gh u_i v_i = (gu_i)(hv_i), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Como $E_1, E_2 \in \mathfrak{G}$, temos que

$$\begin{aligned} \|\theta(g)\| &\leq \|\theta(gu_1)\| + \|\theta(gu_2)\| \\ &\leq M_{E_1} \|gu_1\| \cdot \|hv_1\| + M_{E_2} \|gu_2\| \cdot \|hv_2\| \\ &\leq (M_{E_1} \|u_1\| \cdot \|v_1\| + M_{E_2} \|u_2\| \cdot \|v_2\|) \|g\| \cdot \|h\|. \end{aligned}$$

Assim $H \in \mathfrak{G}$.

□

Corolário 2.4.16. Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{G}$ e G é um aberto com $\overline{G} \subseteq E_1 \cup E_2$, então $G \in \mathfrak{G}$.

Demonstração. Consideremos $F = E_1^c \cap \overline{G}$, que é fechado. É fácil ver que $F \subseteq E_2$. Seja U um conjunto aberto com $F \subset U \subset \overline{U} \subseteq E_2$. Pelo Lema 2.4.15, obtemos que $E_1 \cup U \in \mathfrak{G}$.

Dado que $F \subset U$, implica que $G \subset E_1 \cup U$ e pela Observação 2.4.12, vale que $G \in \mathfrak{G}$.

□

Lema 2.4.17. Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{G}$, então $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{G}$.

Demonstração. Suponha $E_1 \cup E_2 \notin \mathfrak{G}$. Note que, se F é um fechado tal que $F \subseteq E_1 \cup E_2$, então $G = (E_1 \cup E_2) \cap F^c$ é aberto.

Afirmção. $G = (E_1 \cup E_2) \cap F^c \notin \mathfrak{G}$

De fato, suponha que $G = (E_1 \cup E_2) \cap F^c \in \mathfrak{G}$. Como Φ_A é um compacto de Hausdorff, podemos escolher conjuntos abertos U e V , tais que

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset E_1 \cup E_2.$$

Pelo Corolário 2.4.16, temos que $U \in \mathfrak{G}$. Como $G \in \mathfrak{G}$ e temos que $\overline{V} \subset U$, pelo Lema 2.4.15, vale que $G \cup V \in \mathfrak{G}$. Como $E_1 \cup E_2 = G \cup V$, isto contradiz a suposição inicial. Portanto $G \notin \mathfrak{G}$.

Agora, temos suposto que $E_1 \cup E_2 \notin \mathfrak{G}$. Então, existem g_1, h_1 tais que $g_1 h_1 = g_1$, $\text{supp}(h_1) \subset E_1 \cup E_2$ e

$$\|\theta(g_1)\| > \|g_1\| \cdot \|h_1\|.$$

Escolhemos um conjunto aberto U_1 , tal que $\text{supp}(h_1) \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset E_1 \cup E_2$. Tomando $F = \overline{U_1}$, pela afirmação mostrada, temos que $G_2 = (E_1 \cup E_2) \cap \overline{U_1}^c \notin \mathfrak{G}$. Então, existem g_2, h_2 tais que $g_2 h_2 = g_2$, $\text{supp}(h_2) \subset G_2$ e

$$\|\theta(g_2)\| > 2\|g_2\| \cdot \|h_2\|.$$

Como $\text{supp}(h_1) \subset U_1$ e $\text{supp}(h_2) \subset G_2$, é claro que $\text{supp}(h_1) \cap \text{supp}(h_2) = \emptyset$.

Continuando indutivamente obtemos sequências (g_n) e (h_n) tais que

$$(i) \ g_n h_n = g_n,$$

$$(ii) \ \|\theta(g_n)\| > n\|g_n\| \cdot \|h_n\|,$$

(iii) Os conjuntos $\text{supp}(h_n)$ são disjuntos dois a dois, e daí temos a ortogonalidade de h_n .

Isto contradiz o Teorema Fundamental de Bade-Curtis 2.4.1 e completa a prova.

□

Corolário 2.4.18. $\mathfrak{G}$ é fechado sob uniões arbitrárias.

Demonstração. Seja $E_0 = \cup E_\alpha$, onde $E_\alpha \in \mathfrak{G}$. Suponha $E_0 \notin \mathfrak{G}$. Se $F \subseteq E_0 \subset \Phi_A$ é fechado, temos que F é compacto. Então

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}, \text{ onde } E_{\alpha_i} \in \mathfrak{G}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Seja $G = \bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}$. Pelo Lema 2.4.17, temos que $G \in \mathfrak{G}$. Se $E_0 \cap F^c \in \mathfrak{G}$, obtemos $E_0 = (E_0 \cap F^c) \cup G \in \mathfrak{G}$ e isto contraria a hipótese $E_0 \notin \mathfrak{G}$. Portanto $E_0 \cap F^c \notin \mathfrak{G}$.

Como $E_0 \notin \mathfrak{G}$, existem g_1, h_1 tais que $g_1 h_1 = g_1$, $\text{supp}(h_1) \subset E_0$ e

$$\|\theta(g_1)\| > \|g_1\| \cdot \|h_1\|.$$

Escolhemos um conjunto aberto U_1 , tal que $\text{supp}(h_1) \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset E_0$. Tomando $F = \overline{U_1}$, pelo que mostramos acima, temos que $G_2 = E_0 \cap F^c \notin \mathfrak{G}$. Então, existem g_2, h_2 tais que $g_2 h_2 = g_2$, $\text{supp}(h_2) \subset G_2$ e

$$\|\theta(g_2)\| > 2\|g_2\| \cdot \|h_2\|.$$

Como $\text{supp}(h_1) \subset U_1$ e $\text{supp}(h_2) \subset G_2$, é claro que $\text{supp}(h_1) \cap \text{supp}(h_2) = \emptyset$.

Continuando indutivamente obtemos sequências (g_n) e (h_n) tais que

$$(i) \quad g_n h_n = g_n,$$

$$(ii) \quad \|\theta(g_n)\| > n\|g_n\| \cdot \|h_n\|,$$

(iii) Os conjuntos $\text{supp}(h_n)$ são disjuntos dois a dois, e daí temos a ortogonalidade de h_n .

Isto contradiz o Teorema Fundamental de Bade-Curtis 2.4.1 e completa a prova. □

Teorema 2.4.19. *Sejam A uma álgebra de Banach semi-simples comutativa regular com unidade e B uma álgebra de Banach. Dado um homomorfismo $\theta : A \longrightarrow B$, existem um conjunto finito $F \subset \Phi_A$, que é chamado o conjunto de singularidades de θ , e uma constante $M > 0$, tais que*

$$\|\theta(g)\| \leq M\|g\| \cdot \|h\|$$

para todas as funções $g, h \in A$ que têm suportes contidos em $\Phi_A \cap F^c$ e tais que $gh = g$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.4.18 a classe $\mathfrak{G}$ contém um conjunto aberto maximal G_0 . Seja $F = G_0^c$ e suponha F infinito, podemos separar uma sequência de estes elementos por conjuntos abertos E_n disjuntos dois a dois. Pelo Lema 2.4.14, obtemos que $E_n \in \mathfrak{G}$ para todo n suficientemente grande. Assim G_0 deve conter pontos de seu complemento, isto é, uma contradição. Portanto F é finito. □

Pela Observação 1.3.14, temos que a álgebra $C(\Phi_A)$ é regular. Portanto $C(\Phi_A)$ é uma álgebra de Banach semi-simples comutativa regular com unidade e considere B uma álgebra de Banach. Pela Observação 1.3.14 (iii), podemos identificar a Φ_A com $\Phi_{C(\Phi_A)}$.

Seja $F = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ o conjunto finito de singularidades para $\theta : C(\Phi_A) \longrightarrow B$, cuja existência é garantido pelo Teorema 2.4.19. É conveniente introduzir os seguintes conjuntos e classes de funções:

- (i) O conjunto $\mathfrak{F}(F)$ é o ideal das funções $f \in C(\Phi_A)$ que se anulam em uma vizinhança V_f de F , a vizinhança depende da função, isto é

$$\mathfrak{F}(F) = \{f \in C(\Phi_A) : \text{existe } V_f, \text{ tal que } f(V_f) = 0\}.$$

- (ii) $\mathfrak{C}(F)$ é a subálgebra densa de $C(\Phi_A)$, definida por

$$\mathfrak{C}(F) = \{f \in C(\Phi_A) : \text{existe } V_{w_i} \text{ para cada } w_i, \text{ tal que } f(w) = f(w_i), w \in V_{w_i}\}.$$

Teorema 2.4.20. *Sejam B uma álgebra de Banach e $\theta : C(\Phi_A) \longrightarrow B$ um homomorfismo. Se F denota o conjunto de singularidades de θ , então θ é contínuo sobre $\mathfrak{C}(F)$.*

Demonstração. Seja $F = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Dada $f \in \mathfrak{C}(F) \subset C(\Phi_A)$, temos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe uma vizinhança V_{w_i} de $w_i \in F$ tal que $f(w) = f(w_i)$ para todo $w \in V_{w_i}$. É claro que podemos escolher estas V_{w_i} disjuntas. Usando o Lema de Urysohn 2.4.13 para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, escolhemos funções $f_i \in C(\Phi_A)$ com $0 \leq f_i \leq 1$, tais que $f_i f_j = 0$, $i \neq j$ e $f_i(w) = 1$ em cada vizinhança V_{w_i} .

Definimos $p = f - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k$, logo, tomando o produto com f_i , para um i fixo, e usando a ortogonalidade dos f_i , vale

$$p f_i = f f_i - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k f_i = f f_i - f(w_i) f_i f_i.$$

Seja $w \in V_{w_i}$, então $f_i(w) = 1$ e como

$$p(w) f_i(w) = f(w) f_i(w) - f(w_i) f_i(w) f_i(w)$$

obtemos $p(w) = f(w) - f(w_i)$. Como $f(w) = f(w_i)$ para $w \in V_{w_i}$ e todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que $p(w) = 0$. Mostramos que $p(w) = 0$ para todo $w \in V_p = \bigcup_{i=1}^n V_{w_i}$, onde V_p é uma vizinhança de F . Portanto $\text{supp}(p) \subset \Phi_A \cap F^c$. Tomando qualquer $h \in C(\Phi_A)$ tal que $\|h\| = 1$ e $\text{supp}(h) \subset \Phi_A \cap F^c$, pelo Teorema 2.4.19, temos que

$$\|\theta(p)\| \leq M \|p\| \quad (2.27)$$

Como

$$f = \left(f - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k \right) + \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k$$

e dado que $f(w_k) \in \mathbb{C}$, temos que

$$\theta(f) = \theta \left(f - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k \right) + \sum_{k=1}^n f(w_k) \theta(f_k).$$

Logo

$$\|\theta(f)\| \leq \left\| \theta \left(f - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k \right) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^n f(w_k) \theta(f_k) \right\|$$

por (2.27), obtemos que

$$\|\theta(f)\| \leq M \left\| f - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k \right\| + \sum_{k=1}^n |f(w_k)| \cdot \|\theta(f_k)\|.$$

Como $f \in C(\Phi_A)$, f é contínua e dado que $w_k \in \Phi_A$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos $\|w_k\| = 1$, e $|f(w_k)| \leq \sup_{x \in \Phi_A} |f(x)| = \|f\|$, donde

$$\|\theta(f)\| \leq M \left\| f - \sum_{k=1}^n f(w_k) f_k \right\| + \|f\| \sum_{k=1}^n \|\theta(f_k)\|$$

logo

$$\|\theta(f)\| \leq M(\|f\| + \sum_{k=1}^n |f(w_k)| \cdot \|f_k\|) + \|f\| \sum_{k=1}^n \|\theta(f_k)\|.$$

Por outro lado, dado que $f_k \in C(\Phi_A)$ e para todo $x \in \Phi_A$ vale $0 \leq f_k(x) \leq 1$, então $\|f_k\| = \sup_{x \in \Phi_A} |f_k(x)| \leq 1$. Portanto para $f \in \mathfrak{C}(F)$, temos que

$$\|\theta(f)\| \leq M \left(\|f\| + \sum_{k=1}^n \|f\| \cdot 1 \right) + \|f\| \sum_{k=1}^n \|\theta(f_k)\|$$

então

$$\|\theta(f)\| \leq \left[(n+1)M + \sum_{k=1}^n \|\theta(f_k)\| \right] \|f\|.$$

Como o conjunto F é finito, temos que existe $C > 0$, tal que $\|\theta(f)\| \leq C\|f\|$. Portanto, θ é contínuo sobre a subálgebra densa $\mathfrak{C}(F)$.

□

Observação 2.4.21. Como θ é contínuo sobre a subálgebra densa $\mathfrak{C}(F)$, θ admite uma extensão contínua única a todo $C(\Phi_A)$.

Referências

- [1] G. BACHMAN AND L. NARICI, *Functional Analysis*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2000.
- [2] W. G. BADE AND P. C. CURTIS, JR., *Homomorphisms of commutative Banach algebras*, American Journal of Mathematics. **82**, pp. 589-608, 1960.
- [3] H. G. DALES, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, London Mathematical Society Monographs, New Series 24, 2004.
- [4] H. G. DALES, P. AIENA, J. ESCHMEIER, K. B. LAURSEN AND G. A. WILLIS, *Introduction to Banach Algebras, Operators and Harmonic Analysis*, Cambridge University Press., pp. 229-334, 2003.
- [5] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [6] B. E. JOHNSON, *The Uniqueness of the (Complete) Norm Topology*, Bull. American Math. Soc., **73**, pp. 537-539, 1967.
- [7] R. LARSEN, *Banach Algebras an Introduction*, Pure and Applied Mathematics A Series of Monographs and Textbooks, No. 24, New York, 1973.
- [8] K. B. LAURSEN AND M. M. NEUMANN, *An Introduction to Local Spectral Theory*, London Mathematical Society Monographs, New Series 20, 2000.
- [9] J. TATE, *On the relation between extremal points of convex sets and homomorphisms of algebras*, Princeton University, Comm. Pure Appl. Math., **4**, pp. 31-32, 1951.
- [10] A. E. TAYLOR AND D. C. LAY, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1980.
- [11] T.J. RANSFORD, *A short proof of Johnson's uniqueness-of-norm theorem*, Bull. London Math. Soc., **21**, pp. 487-488, 1989.
- [12] W. RUDIN, *Functional Analysis*, Mc. Graw-Hill Book Company, 1973.