

Midory Komatsudani Quispe

AÇÕES DE COHOMOGENEIDADE UM E QUÁDRICAS EM
ESPAÇOS PROJETIVOS COMPLEXOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Rio de Janeiro
2013

K81a Komatsudani Quispe, Midory.
Ações de cohomogeneidade um e quádras em espaços
projetivos complexos / Midory Komatsudani Quispe. -- Rio de
Janeiro, 2013.
vii, 59 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Bruno César Azevedo Scárdua

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática,
Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.
Referências: f. 58 - 59

1.Espaços projetivos - Tese. 2.Teoria da homologia . I. Scárdua,
Bruno César Azevedo (Orient.). II.Universidade Federal do Rio de
Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em
Matemática. III. Título.

CDD 514.23

Midory Komatsudani Quispe

**AÇÕES DE COHOMOGENEIDADE UM E QUÁDRICAS EM ESPAÇOS
PROJETIVOS COMPLEXOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2013:

Presidente, Prof. Dr. Bruno César Azevedo Scárdua – IM/UFRJ

Prof. Dr. Luiz Amancio Machado de Sousa Junior – UNIRIO

Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara – UFES

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto – IM/UFRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Jakeline, avó Eusebia e tia Vanessa pela dedicação que sempre tiveram.

Ao meu orientador, Dr. Bruno César Azevedo Scárdua, pela paciência e conhecimento que compartilhou.

Ao Professor Leonardo, pelas sugestões.

À Professora Zezé, pelo apoio.

À meus amigos Daniel e Rafael, por ficar preocupados por mim e pelos momentos de lazer compartilhados.

À FAPERJ, pelo apoio financeiro.

RESUMO

KOMATSUDANI QUISPE, Midory. Ações de cohomogeneidade um e quádricas em espaços projetivos complexos. Rio de Janeiro, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013

Este trabalho é baseado no artigo Quádricas, ações ortogonais e involuções no espaço projetivo complexo, de Lê Du Tráng, José Seade e Alberto Verjovsky. Nele mostraremos que o espaço projetivo é um cilindro de aplicação dupla, da qual obtemos duas folheações sobre o espaço projetivo: uma sobre o complementar do espaço projetivo real, cujas folhas são imagens de mergulhos de discos de dimensão dois, e outra folheação no complementar da quádrica, com folhas que são mergulhos de discos da mesma dimensão do espaço projetivo real. Tem-se uma ação do grupo ortogonal especial real sobre o espaço projetivo complexo, de cohomogeneidade um.

Palavras-chave: Espaço projetivo complexo, quádrica, cilindro de aplicação dupla, cohomogeneidade um, variedade bandeira parcial.

ABSTRACT

KOMATSUDANI QUISPE, Midory. Cohomogeneity one–actions and quadrics in complex projective spaces. Rio de Janeiro, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013

This work is based on the article Quadrics, orthogonal actions and involutions in complex projective spaces, by Lê Du Tráng, José Seade and Alberto Verjovsky. We are going to show that the complex projective space is a double mapping cylinder, from which we obtain two foliations over the complex projective space: one over the complement of the real projective space, whose leaves are the images of embeddings of disk of dimension two, and another foliation over the complement of the quadric, whose leaves are embeddings of disk of the same dimension that the real projective space. We have an action of the orthogonal special group over the complex projective space, of cohomogeneity one.

Key words: Complex projective space, quadric, double mapping cylinder, cohomogeneity one, partial flag manifold.

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	10
1.1 Preliminares	10
1.2 A métrica de Fubini-Study	31
2 Sobre a Geometria e Topologia das Quádricas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	39
2.1 A topologia das quádricas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	39
2.2 O espaço $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ como um cilindro de aplicação dupla	43
2.3 Folheações sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	51
2.4 A ação de $SO(n + 1, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	55
Referências	58

Introdução

O objetivo principal do trabalho é estudar a ação do grupo ortogonal especial real sobre o espaço projetivo complexo, para obter um melhor entendimento da geometria e topologia de este último.

Para isto, começamos no primeiro capítulo dando alguns conceitos e resultados necessários para facilitar a compreensão do trabalho. Começamos com o conceito de variedade topológica, como exemplo temos o espaço projetivo complexo que é uma variedade complexa. Apresentamos as variedades de Stiefel e variedade bandeira como exemplos de variedades homogêneas. Damos o conceito de órbita principal ligado a uma ação de um grupo de Lie sobre uma variedade, e a de cohomogeneidade de uma ação que é a codimensão de uma órbita principal. Quando temos uma variedade Riemanniana conexa e completa e um subgrupo fechado e conexo do grupo de isometrias da variedade atuando sobre a variedade com cohomogeneidade um, obtemos que o espaço de órbitas é homeomorfo ou a reta, ou o intervalo fechado, ou o intervalo semiaberto ou o círculo.

Também damos alguns resultados ligados a geometria algébrica, ligados a variedades algébricas. Logo fazemos o estudo de um ponto não singular ou singular isolado de uma variedade algébrica, vemos a topologia do conjunto algebraico.

Na seção dois, vemos a métrica de Fubini–Study, que define uma métrica hermitiana sobre o espaço projetivo complexo que atua transitivamente por isometrias. Ela coincide num sentido com a métrica na esfera.

O capítulo dois está baseado no artigo de Lê Du Tráng, José Seade e Alberto Verjovsky, [3], começamos com o estudo da topologia das quádricas no espaço projetivo, obtemos que o complementar da hiperquádrica no espaço projetivo é o espaço total do espaço projetivo real.

Também obtemos uma dupla fibração da variedade bandeira parcial à quádrica e ao espaço projetivo real. Assim o espaço projetivo complexo é o cilindro de aplicação dupla da dupla fibração descrita acima.

Se retiramos o espaço projetivo real do espaço projetivo complexo, obtemos uma folheação por discos abertos de dimensão dois, estas folhas são transversais à quádrica, as folhas também podem ser vistas como imagens dos discos normais pela função normal de quádrica e o fecho de cada folha é um círculo.

Analogamente, se retiramos a quádrlica do espaço projetivo complexo obtemos uma folheação cujas folhas são as imagens da função normal do espaço projetivo real das fibras do fibrado disco normal do espaço projetivo real, o fecho de cada folha é disco fechado da mesma dimensão do espaço projetivo real e encontra ortogonalmente à quádrlica numa esfera de dimensão uma menos que do espaço projetivo real.

Por ultimo estudamos a ação do grupo ortogonal especial real sobre o espaço projetivo complexo. Temos que a quádrlica e o espaço projetivo real são orbitas de esta ação, as outras órbitas são variedades bandeira, que correspondem as orbitas principais de esta ação. O espaço de orbitas é o intervalo com bordo, e os extremos correspondem à quádrlica e o espaço projetivo. Esta ação é de cohomogeneidade um.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Preliminares

Neste primeiro capítulo faremos revisão de alguns fatos relacionados a topologia diferencial, geometria algébrica, geometria Riemanniana e grupos de Lie.

Vejam alguns conceitos e resultados de topologia diferencial. Estas definições e teoremas relacionados podem se encontrar em [7] e [16].

Definição 1.1.1. *Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma **variedade topológica** de dimensão n se tem as seguintes propriedades:*

- M é um espaço de Hausdorff: para cada par de pontos p, q de M existem subconjuntos abertos disjuntos U, V de M tais que p pertence a U e q pertence a V .
- M satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade: existe uma base enumerável para os abertos de M .
- M é localmente Euclidiano de dimensão n : cada ponto p de M tem um subconjunto aberto U de M contendo p , um subconjunto aberto \tilde{U} de \mathbb{R}^n e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$.

Um **atlas** em M é uma coleção $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in I}$ onde $\varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$ é homeomorfismo, U_i é subconjunto aberto de M , \tilde{U}_i é subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , para todo i que pertence a I e tal que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Os homeomorfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ são chamados de **cartas locais** de M . Os homeomorfismos $\{\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\}_{i, j \in I}$ são chamados de **mudanças de coordenadas**. Ver figura 1.1.

Um atlas é de classe C^r , $0 \leq r \leq \infty$ se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe C^r . Neste caso existe um único atlas maximal C^r , Ψ , que contém Φ . Um

atlas maximal sobre M é chamado de **estrutura diferenciável**. M e sua estrutura diferenciável é chamado de **variedade de classe C^r** .

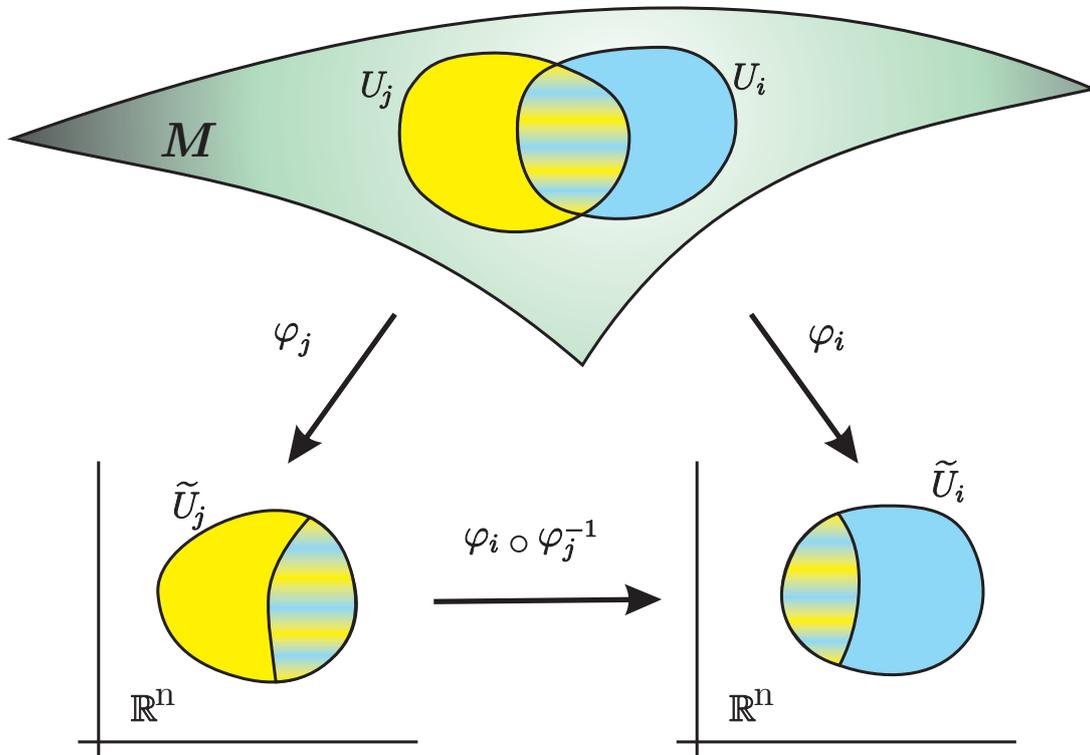


Figura 1.1: Cartas locais e mudanças de coordenadas de uma variedade M .

Vejamos alguns exemplos de variedades diferenciáveis.

Definição 1.1.2. O n -espaço projetivo \mathbb{CP}^n é o conjunto de retas de \mathbb{C}^{n+1} que passam pelo ponto $(0, \dots, 0)$ de \mathbb{C}^{n+1} . Dizemos que dois pontos não nulos x e y de \mathbb{C}^{n+1} estão relacionados se existe λ em \mathbb{C} não nulo tal que $x = \lambda y$. Isto define uma relação de equivalência em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Assim \mathbb{CP}^n identifica-se com o conjunto de classes de equivalência de pontos de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Consideramos a aplicação quociente

$$\begin{aligned} q: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} &\rightarrow \mathbb{CP}^n \\ z &\mapsto [z]. \end{aligned}$$

Dotemos a \mathbb{CP}^n da topologia quociente.

Para cada i entre zero e n , definamos

$$U_i = \{[z] \in \mathbb{CP}^n; z_i \neq 0\}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ [z] &\mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \frac{z_n}{z_i} \right), \end{aligned}$$

onde $z = (z_0, \dots, z_n)$.

Temos que U_i é subconjunto aberto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e que a função ϕ_i é um homeomorfismo, para cada i entre zero e n .

Assim as funções $\{\phi_i\}_{0 \leq i \leq n}$ fornecem as cartas locais de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Os câmbios de coordenadas são dados por

$$\begin{aligned} \text{se } j < i & \quad \phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_{j+1}}, \dots, \frac{1}{z_{j+1}}, \frac{z_{i+1}}{z_{j+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{j+1}} \right), \\ \text{se } j > i & \quad \phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_i}{z_j}, \frac{1}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right). \end{aligned}$$

Assim $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma variedade diferenciável complexa de dimensão complexa n .

Definição 1.1.3. O **grupo ortogonal** de grau n , denotado por $O(n, \mathbb{R})$, é dado por

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / AA^t = A^t A = I\}.$$

Seja

$$\begin{aligned} f : L(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L_s(\mathbb{R}^n) \\ T &\mapsto TT^* \end{aligned}$$

com domínio o espaço de transformações lineares de \mathbb{R}^n , ao espaço de transformações lineares simétricas em \mathbb{R}^n . Temos que I é um valor regular de f , pois se $TT^* = I$ e $A \in L_s(\mathbb{R}^n)$, então $Df(T)\left(\frac{1}{2}AT^{-1}\right) = A$. Logo $O(n, \mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável.

Como o determinante de uma matriz no grupo ortogonal é 1 ou -1 , $O(n, \mathbb{R})$ tem duas componentes conexas. O **grupo ortogonal especial**, denotado por $SO(n, \mathbb{R})$, é dado por

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}.$$

Definição 1.1.4. A **variedade de Grassmann** ou a **Grassmanianna** $G_{n,k}$ é o conjunto de subespaços lineares k -dimensionais de \mathbb{R}^n . Vejamos que podemos dotar à ela de uma estrutura diferenciável. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um k -subespaço linear e E^\perp seu complementar ortogonal. Identifiquemos \mathbb{R}^n com $E \times E^\perp$. Todo k -subespaço perto de E é o gráfico de uma única função linear $E \rightarrow E^\perp$. De esta forma, uma vizinhança de $E \in G_{n,k}$ é homeomorfa a um conjunto aberto do espaço vetorial de transformações lineares que van de E a E^\perp . Assim $G_{n,k}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $k(n-k)$.

Definição 1.1.5. *Sejam dois subespaços topológicos A, B de X . A é **isotópico ambiental** a B em X se existe uma função diferenciável $F : M \times I \rightarrow M$ tal que $F_t : M \rightarrow M$ é difeomorfismo, $F(x, 0) = x$, para todo x em M e $F(A, 1) = B$. F é chamado de **isotopia ambiental**.*

Definição 1.1.6. *Seja $f : E \rightarrow M$ uma submersão. Dizemos que f é uma **fibração localmente trivial** com fibra F se para cada p em M existe uma vizinhança aberta U e um difeomorfismo $h : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tal que o seguinte diagrama comute:*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow f|_{f^{-1}(U)} & \swarrow pr_U \\ & & U \end{array}$$

Exemplo 1.1.1. *Temos que a seguinte função $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ definida por $(0, 0, 1) \mapsto [(1, 0)]$ e $(x, y, z) \mapsto [(x + iy, 1 - z)]$, se $z \neq 1$, é um difeomorfismo. A aplicação quociente dada na definição 1.1.2 pode se restringir a S^{2n+1} , e obtemos uma nova função $S^3 \rightarrow S^2$, que é uma fibração localmente trivial de S^3 sobre S^2 com fibra S^1 , chamada de **fibração de Hopf**.*

Teorema 1.1.1 (Teorema de fibração de Ehresman:). *Sejam E e M duas variedades diferenciáveis conexas sem bordo. Se $\pi : E \rightarrow M$ é uma submersão própria e de classe C^r , $r \geq 2$, então é uma fibração localmente trivial.*

Demonstração. Seja y um ponto de M e F a fibra de π sobre este ponto, e seja (x_1, \dots, x_m) uma carta local de classe C^r definida numa vizinhança V de y tal que $(x_1(y), \dots, x_m(y)) = (0, \dots, 0)$. Como F é compacta, podemos encontrar uma vizinhança aberta W de y em V , uma vizinhança aberta U de F relativamente compacta em $\pi^{-1}(V)$ tal que $\pi(U)$ contem W , campos de vetores X_1, \dots, X_m de classe C^r em E com suporte em U tal que $D(\pi)X_i = \partial/\partial x_i$ em $U \cap \pi^{-1}(W)$.

Para um ponto $x = (x_1, \dots, x_m)$ de W , denotemos por h_x o difeomorfismo no tempo um do grupo um parâmetro de difeomorfismos de E gerados pelos campos de vetores $\sum x_i X_i$.

A aplicação $\Phi : (x, z) \mapsto h_x(z)$ de $W \times F$ sobre E é de classe C^{r-1} e tem-se $\pi(\Phi(x, z)) = x$. Ela é um difeomorfismo de $W \times F$ sobre uma vizinhança aberta de F em $\pi^{-1}(W)$ induzindo para cada x de W um difeomorfismo de F sobre uma subvariedade compacta da fibra $\pi^{-1}(x)$.

Resta verificar que a imagem de Φ coincide com $\pi^{-1}(W)$. Se não fosse o caso, pode-se encontrar uma sequência de pontos (y_n) de W tendendo a y e, para cada inteiro n , um ponto z_n de $\pi^{-1}(y_n)$ fora da imagem de Φ . Mas isto é incompatível com a hipótese de π ser própria, porque teríamos que (z_n) possui um valor de aderência em F . ■

Definição 1.1.7. Um **grupo de Lie** G é uma variedade diferenciável a qual está dotada de uma estrutura de grupo tal que as seguintes funções $G \times G \rightarrow G$, definida por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau$, e $G \rightarrow G$, definida por $\tau \mapsto \tau^{-1}$, são diferenciáveis.

Denotaremos por e o elemento identidade do grupo G .

(H, φ) é um **subgrupo de Lie** do grupo de Lie G se

- (a) H é um grupo de Lie.
- (b) (H, φ) é uma subvariedade de G .
- (c) $\varphi : H \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos.

Definição 1.1.8. Seja M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Uma função diferenciável $\mu : G \times M \rightarrow M$ tal que

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m)), \quad \mu(e, m) = m$$

para todo σ, τ que pertencem a G e $m \in M$ é chamada de **ação à esquerda** de G sobre M .

Se $\mu : G \times M \rightarrow M$ é uma ação à esquerda de G sobre M , então para cada σ fixo em G , a função $m \mapsto \mu(\sigma, m)$ é um difeomorfismo de M o qual denotaremos de μ_σ .

Similarmente, a função diferenciável $\mu : M \times G \rightarrow M$ tal que

$$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau), \quad \mu(m, e) = m$$

para todo σ, τ que pertencem a G e m que pertence a M é chamado de uma **ação a direita** de G em M .

Teorema 1.1.2. Seja H um subconjunto fechado de um grupo de Lie G , e seja

$$G/H = \{\sigma H / \sigma \in G\}$$

o conjunto de classes à esquerda módulo H . Seja π a projeção natural $\pi : G \rightarrow G/H$ dada por $\pi(\sigma) = \sigma H$. Então G/H tem uma única estrutura diferenciável que verifica as seguintes condições:

- (a) $\pi \in C^\infty$.
- (b) Existem localmente seções C^∞ de G/H em G , mais especificamente, dado $\sigma H \in G/H$ existe uma vizinhança W de σH e uma função C^∞ $\tau : W \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \tau = id$.

Variedades diferenciáveis da forma G/H onde G é um grupo de Lie, H é um subgrupo fechado de G , e a estrutura diferenciável é a única que satisfaz os itens (a) e (b) do teorema anterior são chamados de **variedades homogêneas**.

Definição 1.1.9. *Seja*

$$\eta : G \times M \rightarrow M$$

uma ação de G sobre M à esquerda; e seja

$$n_\sigma(m) = \eta(\sigma, m).$$

A ação é chamada de **efetiva** se e é o único elemento de G pelo qual η_e é a função identidade em M . A ação é chamada de **transitiva** se sempre que m e n pertencem a M existe σ em G tal que $n_\sigma(m) = n$. Seja m_0 em M e seja

$$H = \{\sigma \in G / \eta_\sigma(m_0) = m_0\}.$$

H é um subgrupo fechado de G chamado de o **grupo de isotropia em m_0** .

Teorema 1.1.3. *Seja $\eta : G \times M \rightarrow M$ uma ação à esquerda e transitiva do grupo de Lie G sobre uma variedade M . Seja $m_0 \in M$, e seja H o grupo de isotropia em m_0 . Então a função*

$$\begin{aligned} \beta : G/H &\rightarrow M \\ \sigma H &\mapsto \beta(\sigma H) = \eta_\sigma(m_0) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Definição 1.1.10. *A **variedade de Stiefel** $S_{k,n}$ é o conjunto de todos os pontos dados da seguinte forma: cada ponto de esta variedade é um conjunto ortonormal ordenado de k vetores (v_1, \dots, v_k) , $v_i \in \mathbb{R}^n$, $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ e $\|v_i\| = 1$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker, e \cdot é o produto interno em \mathbb{R}^n . Definimos*

$$\begin{aligned} \eta : O(n, \mathbb{R}) \times S_{k,n} &\rightarrow S_{k,n} \\ (\sigma, (w_1, \dots, w_k)) &\mapsto \eta(\sigma, (w_1, \dots, w_k)) = (\sigma(w_1), \dots, \sigma(w_k)). \end{aligned}$$

Vemos que se \tilde{v} e \tilde{w} pertencem a $S_{k,n}$, então existe σ em $O(n, \mathbb{R})$ tal que $\eta(\sigma, \tilde{v}) = \tilde{w}$. Seja v_1, \dots, v_n base ordenada de \mathbb{R}^n e $\tilde{s} = (v_1, \dots, v_k)$. Seja H o subconjunto de $O(n, \mathbb{R})$ deixando fixo \tilde{s} . Logo

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in O(n, \mathbb{R}) \right\} = O(n-k, \mathbb{R}),$$

onde I é a matriz identidade $p \times p$, assim H é um subgrupo fechado de $O(n, \mathbb{R})$. Segue que a função $\sigma H \mapsto \eta(\sigma, \tilde{s})$ é bijetiva, da variedade homogênea $O(n, \mathbb{R})/O(n-k, \mathbb{R})$ sobre o conjunto $S_{k,n}$. Dotamos a $S_{k,n}$ a estrutura de uma variedade diferenciável de dimensão nk requerendo que esta função seja um difeomorfismo. A estrutura de variedade diferenciável independe da base escolhida em \mathbb{R}^n .

Definição 1.1.11. A *variedade Bandeira Parcial*. Definimos a variedade bandeira parcial $F^n(n_1, \dots, n_k)$ como o conjunto de todas as sequências

$$V_1 \subset \dots \subset V_k$$

de subespaços vetoriais de \mathbb{R}^n onde a dimensão de V_i é n_i e

$$0 < n_1 < \dots < n_k \leq n.$$

Consideremos o grupo linear especial $SL(n, \mathbb{R})$ formado pelas matrizes $n \times n$ com determinante um. Temos uma ação de $SL(n, \mathbb{R}^n)$ a $F^n(n_1, \dots, n_k)$ dada pela multiplicação. Vemos que o grupo de isotropia é o subgrupo de $SL(n, \mathbb{R}^n)$ correspondente as matrizes triangulares superiores por blocos, onde a dimensão dos blocos é $n_i - n_{i-1}$, para $1 \leq i \leq k$, colocando $n_0 = 0$. Logo $F^n(n_1, \dots, n_k)$ é uma variedade homogênea.

Definição 1.1.12. Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma **folheação** de classe C^r e dimensão n de M , é um atlas máximo \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

- Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^n e de \mathbb{R}^{m-n} respectivamente.
- Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$

Consideremos uma carta (U, φ) como na definição, os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados de **placas** de U , ou as placas de \mathcal{F} . Um caminho por placas de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tais que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Isto define uma relação de equivalência em M , dado por p está relacionado com q se existe uma sequência de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. As classes de equivalência são chamadas de **folhas** de \mathcal{F} . Cada folha é conexa por caminhos e tem estrutura de variedade diferenciável C^r de dimensão n .

Como exemplo temos as folheações induzidas pelas preimagens de submersões, em particular uma fibração localmente trivial induz uma folheação no espaço total. As curvas integrais de um campo vetorial não singular numa variedade definem as folhas da variedade. Ver [2].

Vejam agora alguns preliminares relacionados a geometria Riemanniana. Para mais informação, pode-se consultar [14].

Definição 1.1.13. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m . Para cada $p \in M$, seja $T_p M$ o espaço tangente de M em p . Seja TM o fibrado tangente de M .

Suponha que cada espaço tangente $T_p M$ está equipado com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se a função $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ é diferenciável para quaisquer dois campos

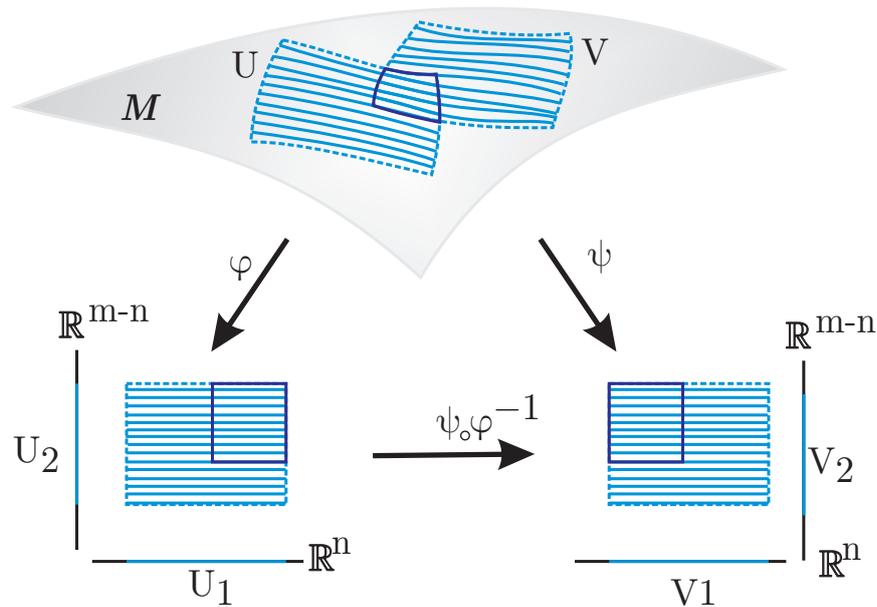


Figura 1.2: Folheação numa variedade M .

vetoriais $X, Y \in M$, então esta família de produtos internos é chamado de **métrica Riemanniana**, ou **estrutura Riemanniana** sobre M . Denotaremos a métrica Riemanniana, e cada um dos produtos internos nos espaços tangentes que a definem, por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma variedade diferenciável equipada com métrica Riemanniana é chamada de **variedade Riemanniana**.

Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Se $c : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável, o **comprimento** $L(c)$ de c é definido por

$$L(c) := \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{dc(t)}{dt}, \frac{dc(t)}{dt} \right\rangle} dt,$$

onde $\frac{dc}{dt}$ denota o vetor tangente ou vetor velocidade. O comprimento $L(c)$ de uma curva diferenciável por partes $c : [a, b] \rightarrow M$ é definida na forma usual, fazendo uma partição no intervalo $[a, b]$ em intervalos onde a curva restringida em esse subintervalo seja diferenciável, e logo fazer a soma.

A **distância** $d(p, q)$ entre dois pontos p, q de M é definida como o ínfimo sobre $L(c)$, onde $c : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável por partes em M com $c(a) = p$ e $c(b) = q$. A função distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dota a M de uma métrica. A topologia em M induzida pela métrica coincide com a topologia original da variedade.

Uma variedade Riemanniana é **completa** se é uma variedade Riemanniana M , a qual é completa quando é considerada como espaço métrico.

Dizemos que uma função $F : (M, g) \rightarrow (N, \bar{g})$ é uma **isometria Riemanniana** se para cada $p \in M$ o diferencial $DF_p : T_p M \rightarrow T_p N$ é uma isometria linear.

Definição 1.1.14. Uma **conexão** numa variedade diferenciável M é um operador ∇ tal que a imagem de dois campo de vetores X, Y em M é outro campo de vetores $\nabla_X Y$ e que satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) ∇ é \mathbb{R} -bilinear;
- (ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$;
- (iii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y$,

onde X e Y são campo de vetores em M , f é função diferenciável em M e $Xf = df(X)$ é a derivada de f na direção X . Se M é uma variedade Riemanniana, e uma conexão ∇ que satisfaz

$$(iv) Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

é chamado de **métrica**. Uma conexão ∇ é chamado de **livre de torção** se satisfaz

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Se temos uma conexão ∇ sobre uma variedade diferenciável, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , chamado de **derivada covariante** V ao longo de c tal que

$$a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}, \text{ onde } f \text{ é uma função diferenciável em } I$$

$$c) \text{ Se } V(t) = Y(c(t)), \text{ onde } Y \text{ é um campo vetorial em } M, \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

O item (iv), numa variedade Riemanniana equivale a

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I$$

onde V e W são campos de vetores ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$.

Teorema 1.1.4. A função $X \rightarrow \nabla X$ em (M, g) uma variedade Riemanniana é unicamente determinada pelas propriedades (i)-(v) dadas acima.

Definição 1.1.15. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é **geodésica**.

Temos que dado um ponto p numa variedade M e um vetor X no plano tangente T_pM , existe uma única geodésica passando pelo ponto p com vetor tangente nesse ponto igual a X . Mais ainda, dado um ponto $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em M , existe $\epsilon > 0$ e uma aplicação $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, onde $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_qM, |w| < \epsilon\}$ tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_qM$, com $|w| < \epsilon$. Temos assim a seguinte função

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{U} &\rightarrow M \\ (q, v) &\mapsto \exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}) \end{aligned}$$

chamada de **aplicação exponencial** em \mathcal{U} . Ela é diferenciável. Também temos que para cada $p \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo de sobre um aberto de M , onde $\exp_p(v) = \exp(p, v)$. Por exemplo, no caso da esfera \mathbb{S}^2 , temos que $\epsilon = \pi$, para todo ponto da esfera. Ver figura 1.1. Geometricamente, $\exp_p(v)$ é o ponto de M , obtido de percorrer uma distancia $|v|$, a partir de p , sobre a geodésica que passa por p com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Toda geodésica, localmente, minimiza distâncias. Também temos que se uma curva, diferenciável por partes, é minimizante, então a curva é uma geodésica.

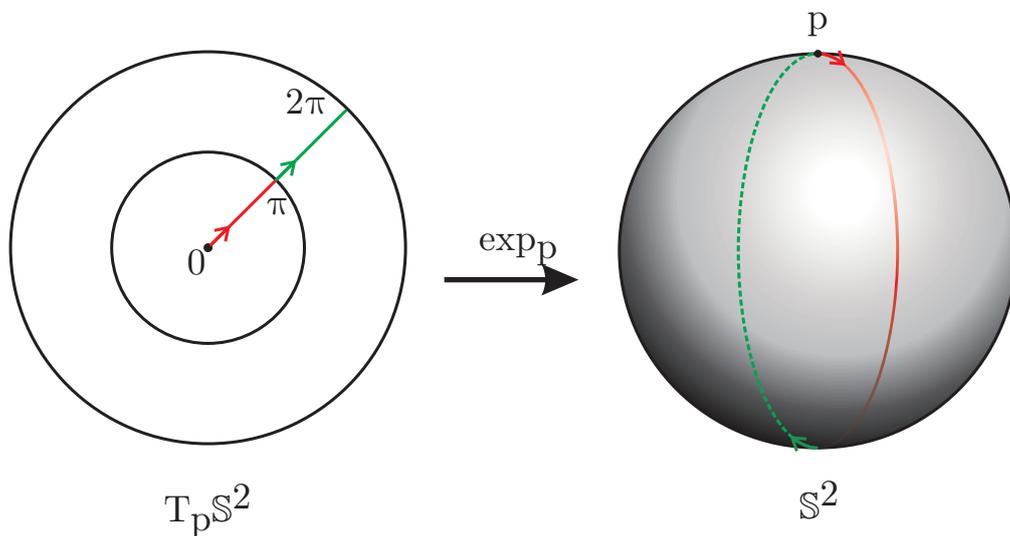


Figura 1.3: A função \exp_p , para $p = (0, 0, 1)$ da esfera \mathbb{S}^2 .

Proposição 1.1.5. *Seja $F(M, g) \rightarrow (N, \bar{g})$ uma isometria Riemanniana local, então tem-se*

- a) F leva geodésicas em geodésicas.
- b) $F \circ \exp_p(v) = \exp_{F(p)} \circ DF_p(v)$, se $\exp_p(v)$ está definida.
- c) F decresce distâncias.
- d) Se F é bijeção, então preserva distâncias.

As isometrias numa variedade Riemanniana (M, g) formam um grupo, o qual denotaremos por $Iso(M, g)$, é chamado de o **grupo de isometrias de M** . Dotamos a ele de uma topologia da seguinte forma: Seja $K \subset M$ subconjunto compacto de M , $U \subset M$ subconjunto aberto de M , e seja $I(K, U)$ o conjunto de todas as funções $F : M \rightarrow M$ de $Iso(M, g)$ tais que $F(K) \subset U$. A coleção de todos os $I(K, U)$ formam uma subbase para uma topologia sobre $Iso(M, g)$. Temos assim que $Iso(M, g)$ é um grupo de Lie, e temos uma ação sobre M .

Se $S \subset Iso(M, g)$ é subconjunto do grupo de isometrias, então o **conjunto de pontos fixos** de S é definido como o conjunto de todos os pontos de M que são pontos fixos por todas as isometrias de S .

$$Fix(S) = \{x \in M : F(x) = x \text{ para todo } F \in S\}.$$

Uma subvariedade $N \subset (M, g)$ é chamada de **totalmente geodésica** se para cada $p \in N$, uma vizinhança de $0 \in T_p N$ é levado em N via a função exponencial \exp_p . Isto é, as geodésicas em N são também geodésicas em M , e reciprocamente, qualquer geodésica em M a qual é tangente a N em algum ponto deve estar em N para algum tempo pequeno.

Proposição 1.1.6. *Seja $S \subset Iso(M, g)$ um conjunto de isometrias, então cada componente conexa do conjunto de pontos fixos é uma subvariedade totalmente geodésica.*

Teorema 1.1.7. *Se (M, g) e (N, \bar{g}) são variedades Riemannianas e $F : M \rightarrow N$ é uma bijeção, então F é uma isometria Riemanniana se F preserva distância, isto é, $d_{\bar{g}}(F(p), F(q)) = d_g(p, q)$ para todo $p, q \in M$.*

Definição 1.1.16. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, e suponha que $G \times M \rightarrow M$ é uma ação diferenciável. Seja $g \in G$, e $\varphi_g : M \rightarrow M$ definida por $p \mapsto g \cdot p$ cumpra que para todo p*

$$d\varphi_{g_p} : T_p M \rightarrow T_{g \cdot p} M$$

*é uma isometria, para qualquer $g \in G$, dizemos que G atua **atua por isometrias** sobre M .*

Definição 1.1.17. *Seja M uma variedade Riemanniana e G um grupo de Lie atuando diferenciavelmente sobre M por isometrias. Então temos um homomorfismo entre grupos de Lie*

$$\rho : G \rightarrow Iso(M, g)$$

e uma função diferenciável

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow M \\ (g, p) &\mapsto \rho(g)(p) = gp \end{aligned}$$

satisfazendo

$$(gg')p = g(g'p)$$

para todo $g, g' \in G$ e $p \in M$. Uma ação isométrica de um grupo de Lie G' sobre uma variedade Riemanniana M' é chamada de **isomorfa** a ação de G sobre M se existe um isomorfismo entre grupos de Lie $\phi : G \rightarrow G'$ e uma isometria $f : M \rightarrow M'$ tal que $f(gp) = \phi(g)f(p)$ para todo $p \in M$ e $g \in G$. Para cada ponto $p \in M$ a **órbita** da ação de G por p é

$$G \cdot p := \{gp / g \in G\},$$

e o **grupo de isotropia** em p é

$$G_p = \{g \in G / gp = p\}.$$

Se $G \cdot p = M$ para algum $p \in M$, e por tanto para qualquer $p \in M$, então a ação de G é chamada de transitiva e M é um espaço G -homogêneo.

Cada órbita $G \cdot p$ é uma subvariedade de M .

Denotamos por M/G o conjunto de órbitas da ação de G de M e dotamos a M/G da topologia quociente dada pela projeção canônica $M \rightarrow M/G, p \mapsto G \cdot p$.

Uma ação de G sobre M é chamada de **própria** se para quaisquer dois pontos $p, q \in M$, existem vizinhanças U_p e U_q de p e q em M , respectivamente, tal que $\{g \in G / gU_p \cap U_q \neq \emptyset\}$ é relativamente compacto em G . Isto é equivalente a dizer que a função

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, p) &\mapsto (p, gp) \end{aligned}$$

é uma função própria, isto é, a imagem inversa de cada conjunto compacto em $M \times M$ é também compacto em $G \times M$. Toda ação de um grupo de Lie compacto é própria, e a ação de qualquer subgrupo fechado de um grupo de isometria de M é própria. Si G atua propriamente sobre M então M/G é um espaço de Hausdorff, cada órbita $G \cdot p$ é fechado em M e por tanto é uma subvariedade mergulhada, e cada grupo de isotropia G_p é compacto.

Definição 1.1.18. Uma subvariedade Σ de M é chamada de **fatia** em $p \in M$ se

a) $p \in \Sigma$,

b) $G \cdot \Sigma := \{gq / g \in G, q \in \Sigma\}$ é um conjunto aberto de M .

c) $G_p \cdot \Sigma = \Sigma$,

d) a ação de G_p sobre Σ é isomorfa a uma ação linear ortogonal de G_p sobre um bola aberta num espaço Euclidiano,

e) a função

$$\begin{aligned} (G \times \Sigma)/G_p &\rightarrow M \\ G_p \cdot (g, p) &\mapsto gp \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre $G \cdot \Sigma$, onde $(G \times \Sigma)/G_p$ é o espaço de órbitas da ação de G_p sobre $G \times \Sigma$ dada por

$$k(g, q) := (gk^{-1}, kq)$$

para todo $k \in G_p$, $g \in G$ e $q \in \Sigma$.

Temos que $(G \times \Sigma)/G_p$ é um fibrado associado ao fibrado principal $G \mapsto G/G_p$ e fibra Σ e temos que é uma variedade diferenciável.

A existência de fatias em cada ponto permite nos definir um ordem parcial no conjunto de orbitas. Dizemos que duas orbitas $G \cdot p$ e $G \cdot q$ têm a mesmo tipo de orbita se G_p e G_q são conjugadas em G . Isto define uma relação de equivalência entre as orbitas de G . Denotamos por $[G \cdot p]$ a correspondente classe de equivalência, a qual é chamada de o **tipo de orbita** de $G \cdot p$. Denotamos \mathcal{D} o conjunto de todos os tipos de orbitas da ação de G sobre M . Dizemos que $[G \cdot p] \leq [G \cdot q]$ se, e somente se, G_q é conjugado em G a algum subgrupo de G_p , isto define um ordem parcial. Se Σ é uma fatia em p , as propriedades (d) e (e) implicam que $[G \cdot p] \leq [G \cdot q]$ para qualquer $q \in G \cdot \Sigma$. Se assumimos que M/G é conexo, temos que existe um tipo de orbita maximal em \mathcal{D} . Cada representante de este tipo de orbita maximal é chamado de **orbita principal**. Então uma orbita $G \cdot p$ é principal se, e somente se, para cada $q \in M$ o grupo de isotropia G_p em p é conjugado em G a algum subgrupo de G_q . A união de todos os tipos de órbitas principais são densas e é um subconjunto aberto de M . Cada orbita principal é uma orbita de dimensão maximal. Uma orbita não principal com a mesma dimensão de uma orbita principal é chamada de **orbita excepcional**. Uma orbita cuja dimensão é menor que a dimensão de uma orbita principal é chamada de **orbita singular**. A **cohomogeneidade** de uma ação é a codimensão de uma orbita principal, e esta cohomogeneidade é denotada por $\text{cohom}(G, M)$.

Suponha que temos uma ação própria de G sobre M e que M/G é conexa. Temos que para cada $g \in G$ a função

$$\begin{aligned} \varphi_g : M &\rightarrow M \\ p &\mapsto gp \end{aligned}$$

é uma isometria de M . Se $p \in M$ e $g \in G_p$, então φ_g fixa p . Então, para cada ponto $p \in M$, o grupo de isotropia G_p atua em T_pM da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_p \times T_pM &\rightarrow T_pM \\ (g, X) &\mapsto g \cdot X := (\varphi_g)_*X. \end{aligned}$$

Como temos que $g \in G_p$ deixa invariante $G \cdot p$, também deixa invariante o espaço tangente $T_p(G \cdot p)$ e o espaço normal $\nu_p(G \cdot p)$ de $G \cdot p$ em p . A restrição

$$\begin{aligned} \chi_p : G_p \times T_p(G \cdot p) &\rightarrow T_p(G \cdot p) \\ (g, X) &\mapsto g \cdot X \end{aligned}$$

é chamado de a **representação da isotropia** da ação em p , e a restrição

$$\begin{aligned} \rho_p : G_p \times \nu_p(G \cdot p) &\rightarrow \nu_p(G \cdot p) \\ (g, \xi) &\mapsto g \cdot \xi \end{aligned}$$

é chamado da **representação da fatia** da ação em p . Se $(G_p)^0$ é a componente conexa da identidade em G_p , a restrição de uma representação de fatia a $(G_p)^0$ será chamada de **representação conexa da fatia**

Seja $p \in M$ e $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeno tal que a restrição da função exponencial \exp_p de M em p a $U_r(0) \subset \nu_p(G \cdot p)$ é um mergulho de $U_r(0)$ em M . Então $\Sigma = \exp_p(U_r(0))$ é uma fatia em p , é chamada de **fatia geodésica**. A fatia geodésica obtida indo ao longo de uma geodésica que sai ortogonalmente de $G \cdot p$ em p até uma distância r . Como funções isométricas levam geodésicas em geodésicas temos que

$$g\Sigma = \exp_{gp}(g \cdot U_r(0))$$

para todo $g \in G$. Seja $q \in \Sigma$ e $g \in G_q$, então $gp \in \Sigma$ e logo $g\Sigma = \Sigma$. Desde que $\Sigma \cap G \cdot p = \{p\}$ segue que $gp = p$ e assim $g \in G_p$. Por tanto, se Σ é uma fatia de geodésica em p , então $G_q \subset G_p$ para todo $q \in \Sigma$.

Seja Σ uma fatia de geodésica em p . Então $G \cdot \Sigma$ é um subconjunto aberto de M . Como as órbitas principais formam um subconjunto aberto e denso de M , temos $G \cdot p$ é uma órbita principal se, e somente se, $G_q = G_p$ para todo $q \in \Sigma$. Por outro lado, cada $g \in G_q$ fixa q e p , então assumindo que a fatia de geodésica é suficientemente pequena, a geodésica inteira em Σ liga p e q . Assim G_q fixa ponto a ponto o subespaço linear de dimensão um de $\nu_p(G \cdot p)$ correspondente a sua geodésica. Isto implica que uma órbita $G \cdot p$ é principal se, e somente se, sua representação de fatia Σ_p é trivial.

Seja M uma variedade Riemanniana completa e seja G um subgrupo fechado de $Iso(M)$. Uma subvariedade fechada completa mergulhada Σ de M é chamada de **seção** da ação se Σ interseca cada órbita de G em M tal que $T_p\Sigma \subset \nu_p(G \cdot p)$ para todo $p \in \Sigma$.

A ação é chamada de **polar** se admite uma seção. Tem-se que cada seção de uma ação polar é totalmente geodésica. Uma ação polar é chamada de **hiperpolar** se admite uma seção plana.

Seja M uma variedade Riemanniana conexa e completa e G um subgrupo fechado e conexo do grupo de isometria $ISO(M)$ de M atuando sobre M com cohomogeneidade um. Denotamos por M/G o espaço de orbitas de esta ação e por $\pi : M \rightarrow M/G$ a projeção canônica $p \mapsto G \cdot p$. Dotamos a M/G da topologia quociente relativa a π . O espaço de orbitas M/G é homeomorfo a \mathbb{R} , S^1 , $[0, 1]$, ou $[0, \infty[$. A demonstração pode-se encontrar em [13] (ele demonstrou para o caso compacto, note que existem duas variedades com bordo fechadas e conexas de dimensão um: o círculo e o intervalo fechado) e [1] no caso geral.

Teorema 1.1.8. *Seja M uma variedade conexa, e G um grupo agindo diferenciavelmente em M . Então existe um único tipo de órbita H tal que $[H] \succ [K]$ para todo tipo de órbita K da ação. E ainda, a união de todas as órbitas do tipo H , a saber*

$$M^* = \{x \in M; G_x \in [H]\},$$

é uma variedade aberta, densa e conexa de M .

A demonstração pode ser encontrada em [8].

No caso de ação de cohomogeneidade um tem-se no máximo duas orbitas singulares ou excepcionais, correspondentes aos pontos da fronteira de M/G . Se tem-se uma orbita singular, cada orbita principal é um tubo ao redor da orbita singular. Se M/G é homeomorfo a \mathbb{R} ou S^1 , então cada orbita é principal e as orbitas da ação de G sobre M formam uma folheação Riemanniana sobre M . Mais ainda, como as orbitas são homeomorfas umas a outras, a projeção $\pi : M \rightarrow M/G$ é uma fibração. Se, além disso, M é simplesmente conexa, então M/G não pode ser homeomorfo a S^1 . Toda ação de cohomogeneidade um é hiperpolar e uma geodésica que interseca uma orbita perpendicularmente é uma seção.

Proposição 1.1.9. *Sejam M uma variedade riemanniana compacta, sem bordo, e $G \subset ISO(M)$ compacto, conexo, agindo com cohomogeneidade 1 em M . Se $\lambda : [0, l] \rightarrow M$, é uma curva ortogonal às órbitas de G , então λ é uma geodésica.*

Proposição 1.1.10. *Sejam M uma variedade riemanniana compacta orientada de dimensão maior ou igual a 2, e $G \subset ISO(M)$, um subgrupo de Lie conexo e compacto agindo em cohomogeneidade 1. Se G deixa um ponto fixo, p_O , então as órbitas de G são esferas geodésicas centradas em p_O .*

Exemplo 1.1.2. *Seja G o grupo de traslações gerada por uma reta em \mathbb{R}^2 , então $\mathbb{R}^2/G = \mathbb{R}$*

Exemplo 1.1.3. *Seja C o cilindro em \mathbb{R}^3 e seja G o grupo de traslações sobre Z ao longo do seu eixo. Então $C/G = S^1$*

Exemplo 1.1.4. *Seja C um cilindro em \mathbb{R}^3 e seja G o grupo de traslações sobre C ao longo de seu eixo, então $C/G = S^1$.*

Exemplo 1.1.5. *Seja $G = SO(2)$ o grupo de rotações ao redor da origem em \mathbb{R}^2 . Então $\mathbb{R}^2/G = [0, \infty)$.*

Exemplo 1.1.6. *Seja $G = SO(2)$ o grupo de isotropia da ação de $SO(3)$ na esfera S^2 . Então $S^2/G = [0, 1]$.*

Também vão precisar de alguns preliminares da geometria algébrica. As seguintes definições e teoremas podem-se encontrar em [4], [10], [5],

Seja k um corpo fixo algebricamente fechado. Definimos o **espaço afim** de dimensão n sobre k , denotado por A^n , pelo conjunto de todas as n -uplas de elementos de k .

Um subconjunto X de A^n é **conjunto algébrico** em A^n se, e somente se, é o conjunto dos zeros comuns de uma família $\{f_i\}_{i \in I}$ de polinômios $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n / f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall i \in I\}.$$

Se tomamos como os abertos o complementar dos conjuntos algébricos em A^n , dotamos ao espaço afim de uma topologia, chamada a topologia de Zariski.

Um subconjunto Y de um espaço topológico X é irreduzível se não pode ser expressado como a união $Y = Y_1 \cup Y_2$ de dois subconjuntos próprios sendo cada um de eles fechado em Y . O conjunto vazio não é considerado como irreduzível.

Proposição 1.1.11. *Se $X \neq \emptyset$ é espaço topológico, são equivalentes:*

- a) X é irreduzível.
- b) X não é união de dois fechados.
- c) Cada interseção de dois abertos de X não vazios, é não vazio.
- d) Cada aberto de X não vazio é denso em X .

Vemos que se X é espaço topológico não vazio irreduzível, então X é conexo, se $Y \subset X$ é aberto e denso, então Y é irreduzível se, e somente se, X é irreduzível.

Definição 1.1.19. *Uma **variedade algébrica afim** ou **variedade afim** é um subconjunto fechado irreduzível de A^n . Um subconjunto aberto de uma variedade afim é uma **variedade quase afim**.*

Seja $X \subset A^n$, definimos o **ideal de X** em $k[x_1, \dots, x_n]$ por

$$I(X) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] / f(p) = 0 \text{ para todo } p \in X\}.$$

Proposição 1.1.12. *Existe uma correspondência um a um entre os conjuntos algébricos em A^n e ideais radicais em $k[x_1, \dots, x_n]$, dada por $X \mapsto I(X)$ e $I \mapsto Z(I)$. Além disso, um conjunto algébrico é irredutível se, e somente se, seu ideal é um ideal primo.*

Exemplo 1.1.7. A^n é irredutível.

Definição 1.1.20. *Se $X \subset A^n$ é um conjunto algébrico afim, definimos o **anel de coordenadas afim** $A(X)$ de X , como $k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.*

Observação 1.1.1. *Se X é uma variedade afim, então $A(X)$ é um domínio.*

Definição 1.1.21. *Um espaço topológico X é chamado de **noetheriano** se satisfaz a condição de cadeia descendente para subconjuntos fechados: para qualquer sequência $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ de subconjuntos fechados, existe um inteiro r tal que $X_r = X_{r+1} = \dots$.*

Num espaço topológico noetheriano X , cada subconjunto fechado não vazio Y pode ser expressado como uma união finita $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ de subconjuntos fechados irredutíveis Y_i . Se pedimos que $Y_i \not\supseteq Y_j$ para $i \neq j$, então os Y_i são unicamente determinados. São chamados de componentes irredutíveis de Y . Então cada conjunto algébrico de A^n pode ser expressado unicamente como uma união de variedades, nenhuma de elas contendo outra.

Definição 1.1.22. *Se X é um espaço topológico, definimos a **dimensão** de X , denotada por $\dim X$ como o supremo de todos os inteiros n tais que existe uma cadeia $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ de subconjuntos fechados irredutíveis distintos de X . Definimos a **dimensão** de uma variedade quase afim como a dimensão como espaço topológico.*

Proposição 1.1.13. *Se Y é uma variedade quase afim, então $\dim Y = \dim \bar{Y}$.*

Proposição 1.1.14. *Uma variedade X em A^n tem dimensão $n - 1$ se, e somente se, é o conjunto de zeros de um polinômio irredutível não constante em $k[x_1, \dots, x_n]$.*

Consideremos o anel de polinômios $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ como um anel graduado tomando sua decomposição $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ onde S_d é o conjunto de todas as combinações lineares de monômios de grau d em x_0, \dots, x_n . Um ideal $I \subset S$ é um **ideal homogêneo** se $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$. Um ideal é homogêneo se e só se pode ser gerado por elementos homogêneos. A soma, produto, interseção, e radicais de ideais homogêneos é homogêneo.

Se I é qualquer conjunto de elementos homogêneos de S , definimos o conjunto de zeros de I por

$$Z(I) = \{p = [(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n / f(x_0, \dots, x_n) = 0, \text{ para todo } f \in I\}$$

Definição 1.1.23. Um subconjunto X de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é um **conjunto algébrico** se existe um conjunto T de elementos homogêneos de S tal que $X = Z(T)$.

Definimos a topologia de Zariski em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ tomando como abertos os complementares dos conjuntos algébricos.

Definição 1.1.24. Uma **variedade projetiva algébrica** ou **variedade projetiva** é um conjunto algébrico irredutível em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, com a topologia induzida. Um subconjunto aberto de uma variedade projetiva é uma **variedade quase projetiva**. A dimensão de uma variedade quase projetiva ou projetiva é sua dimensão como espaço topológico.

Definição 1.1.25. Seja X um subconjunto algébrico de \mathbf{A}^n não vazio. Se $I(X)$ é gerado por f_1, \dots, f_k , para cada $x \in X$, consideremos a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ avaliada em x . Seja ρ o maior valor que atinge o rango de esta matriz em qualquer ponto de X .

Um ponto $x \in X$ é chamado de **ponto não singular** se o posto da matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ em x é ρ , um ponto x é **ponto singular** se o posto de $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$ é menor que ρ .

Observação 1.1.2. A definição não depende da escolha de $\{f_1, \dots, f_n\}$.

Lema 1.1.1. O conjunto $\Sigma(X)$ de todos os pontos singulares de X formam um conjunto algébrico próprio de X .

Demonstração. Se $x \in \Sigma(X)$, então $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right) < \rho$, logo determinante menor de $\rho \times \rho$ de $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$ é zero, logo $\Sigma(X)$ é determinado pelos zeros de essas equações. ■

Teorema 1.1.15. Se $X \subset \mathbf{A}^n$, onde k é o conjunto dos números reais ou complexos, então $X - \Sigma(X)$ é uma variedade diferenciável não vazia e tem dimensão $m - \rho$ sobre k .

Definição 1.1.26. Seja $X \subset \mathbf{A}^n$. O **espaço tangente** $T_x X$ de X no ponto $x = (x_1, \dots, x_n)$ é definido como

$$T_x X = Z \left(\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial T_i} (T_i - x_i), f \in I(X) \right\} \right)$$

Observação 1.1.3. Vemos que $T_x X$ é um subespaço linear de \mathbf{A}^n cuja dimensão é n -posto de $\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$, onde $I(X)$ é gerado por f_1, \dots, f_k .

Teorema 1.1.16. Seja X variedade algébrica de dimensão n . Então existe um aberto denso U em X tal que $\dim(T_x X) = \dim(X)$, para todo $x \in U$, e $\dim(T_x X) > \dim(X)$, para todo $x \in X \setminus U$. Em particular $\dim(X) = \max_{x \in X} \{\dim(T_x X)\}$.

Temos que $x \in X$ é ponto singular se $\dim(T_x X) > \dim(X)$ e não singular se $\dim(T_x X) = \dim(X)$.

Teorema 1.1.17. *Seja $X \subset \mathbf{A}^n$ conjunto fechado e irredutível de dimensão n , $x \in X$. Se f_1, \dots, f_n é base de $I(X)$, então x é ponto singular se, e somente se, o posto da matriz $(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j})$ é menor que a codimensão de X .*

Definição 1.1.27. *Sejam $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. O espaço **tangente projetivo** de X no ponto x é definido por*

$$\bar{T}_x X = \{(y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_n) \cdot y_i = 0, \text{ para todo } F \in I(X) \text{ homogêneo.}\}$$

Corolário 1. *Se $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ for subconjunto fechado irredutível, então um ponto $x \in X$ é singular se, e somente se, o posto da matriz $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, \dots, x_n)) < \rho$ for menor que $n - \dim(X)$.*

Definição 1.1.28. *Seja F um polinômio homogêneo de $n + 1$ variáveis, então*

$$V(F) = \{[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid F(a_0, \dots, a_n) = 0\}$$

é chamado de hipersuperfície de grau m , se $\text{grau}(F) = m$.

Proposição 1.1.18. *Seja Q dado pela equação $h(x_0, \dots, x_n) = 0$. Temos que $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é não singular se e só se $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \neq 0$, para algum $i \in \{0, \dots, n\}$.*

Para ver as demonstrações dos seguintes resultados ver [12], [15].

Seja V um conjunto algébrico sobre os complexos. Seja x_0 um ponto não singular de V ou um ponto isolado do conjunto singular $\Sigma(V)$.

Corolário 2. *Seja S_ϵ a esfera de raio $\epsilon > 0$ com centro em x_0 , então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $V \cap S_\epsilon$ é uma variedade diferenciável.*

Seja D_ϵ o disco fechado de raio $\epsilon > 0$ centrado em x_0 . Seja x_0 um ponto não singular ou ponto singular isolado de V . Seja $K = V \cap S_\epsilon$ e $C(K) = \{tx + (1-t)x_0 \mid 0 \leq t \leq 1, x \in K\}$ o cone sobre K .

Teorema 1.1.19. *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $V \cap D_\epsilon$ é homeomorfo ao cono $C(K)$.*

Seja f um polinômio em $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tal que $f(0) = 0$. Seja $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$ e $K = V \cap S_\epsilon$, onde S_ϵ é a esfera de raio $\epsilon > 0$ com centro em $0 \in \mathbb{C}^n$. Definamos

$$\begin{aligned} \phi: S_\epsilon - K &\rightarrow S_1 \\ z &\mapsto \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}. \end{aligned}$$

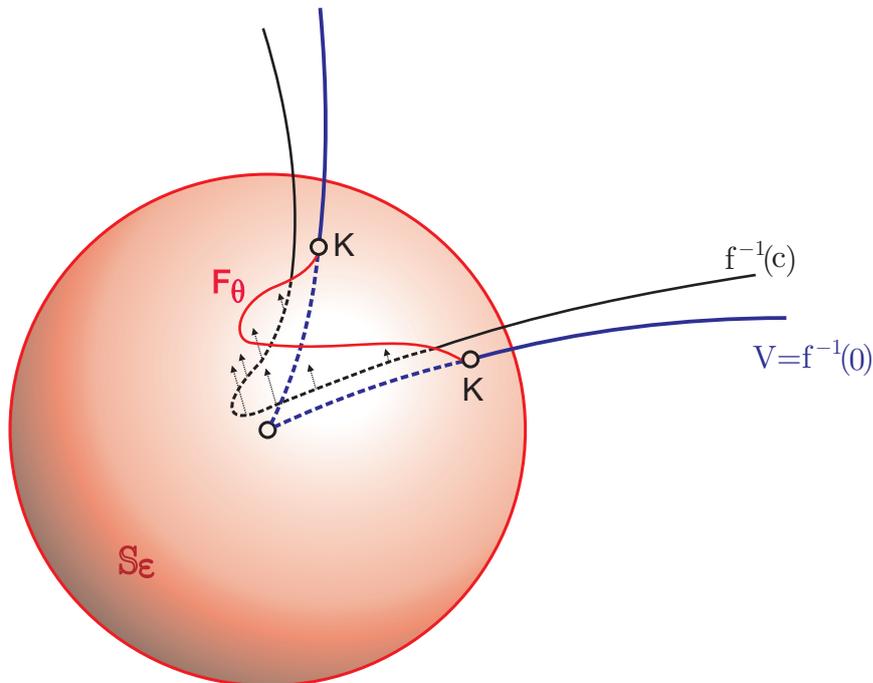
Proposição 1.1.20. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a função ϕ não tem pontos críticos, isto é, que a derivada da função é sobrejetiva em todos os pontos.*

Observação 1.1.4. *Temos que para cada $e^{i\theta} \in S^1$, $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\epsilon - K$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2m - 2$.*

Teorema 1.1.21. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, $\phi : S_\epsilon - K \rightarrow S^1$ é um fibrado localmente trivial.*

Teorema 1.1.22. *Cada fibra F_θ é paralelizável.*

Teorema 1.1.23. *Se $c \neq 0$ é um número complexo suficientemente pequeno, hipersuperfície complexa $f^{-1}(c)$, B_ϵ a bola de centro zero e raio ϵ , então $f^{-1}(c) \cap B_\epsilon$ é uma variedade diferenciável difeomorfa á fibra F_θ .*



Interpretação do teorema 1.1.23.

Seja f polinômio em $n + 1$ variáveis, com $n \geq 1$, que não possui ponto crítico em alguma vizinhança da origem, excepto, tal vez a origem mesmo. Assim a origem é um ponto crítico isolado, ou ponto não singular, da hipersuperfície $V = f^{-1}(0)$.

Lema 1.1.2. *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o fecho de cada fibra F_θ em S_ϵ é uma variedade diferenciável com bordo, de dimensão $2n$. O interior de esta variedade é F_θ e o bordo da variedade é K .*

Definição 1.1.29. Dada qualquer fibrado localmente trivial $\phi : E \rightarrow S^1$, existe uma família 1-parâmetro contínua de homeomorfismos

$$h_t : F_0 \rightarrow F_t$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$, onde h_0 é a identidade e $h = h_{2\pi}$, h é chamado de **homeomorfismo característico** da fibra $F_0 = \phi^{-1}(1)$.

Sejam $a_0, \dots, a_n \geq 2$ e o polinômio em $n + 1$ variáveis

$$f(z_0, \dots, z_n) = z_0^{a_0} + \dots + z_n^{a_n}.$$

Temos que a origem é o único ponto crítico de f , assim se $V = f^{-1}(0)$ e $K = S_\epsilon \cap V$, obtemos que K é uma variedade diferenciável de dimensão $2n - 3$. Também as fibras de $\phi : S_\epsilon - K \rightarrow S^1$, F_θ , têm dimensão $2(n-1)$.

Definição 1.1.30. Sejam a_1, \dots, a_m números racionais positivos. Seja f um polinômio em m variáveis. O polinômio f é chamado de **homogêneo com peso** ou **quase homogêneo** do tipo (a_1, \dots, a_m) se pode ser expressado como combinação linear de monômios $z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m}$ tais que

$$\frac{i_1}{a_1} + \dots + \frac{i_m}{a_m} = 1.$$

Lema 1.1.3. Se f é um polinômio homogêneo com peso, então a fibra associada a $\phi : S_\epsilon - K \rightarrow S^1$ é difeomorfo à hipersuperfície não singular

$$F' = \{z \in \mathbb{C}^m \mid f(z) = 1\}.$$

O homomorfismo característico de F' (ou F) a ele mesmo pode ser escolhido como a transformação unitária periódica

$$h(z_1, \dots, z_m) = (\exp^{2\pi i/a_1} z_1, \dots, \exp^{2\pi i/a_m} z_m)$$

Definição 1.1.31. Uma **decomposição de livro aberto** de uma variedade diferenciável M de dimensão n consiste de uma subvariedade N de codimensão 2, chamado de **binding**, mergulhado em M com fibrado normal trivial, junto com um fibrado no seu complemento

$$\pi : M - N \rightarrow S^1,$$

satisfazendo que em uma vizinhança tubular de N , difeomorfa a $N \times \mathbb{D}^2$, onde \mathbb{D}^2 é um disco aberto, a restrição de π a $N \times (\mathbb{D}^2 - \{0\})$ é a função

$$(x, y) \mapsto \frac{y}{|y|}.$$

As fibras de π são chamadas de **páginas** do livro aberto.

Observação 1.1.5. *As páginas são todas difeomorfas e cada página F pode ser compactificada colando o binding N como seu bordo, obtendo assim uma variedade compacto com bordo não vazio. Também como a base da fibração é o círculo \mathbb{S}^1 , um pode induzir um campo vetorial integrável em $M - N$, de um campo vetorial que não se anula em nenhum ponto de \mathbb{S}^1 , o campo resultante em $M - N$ é transversal às fibras. Usando o fluxo do campo vetorial, um pode definir uma função de primeiro retorno nas fibras, o qual está bem definido, salvo isotopias. Este difeomorfismo h é chamado de a **monodromia** da fibração. Desde que todas as páginas tem o mesmo binding N como bordo, segue que h se estende a identidade em N .*

Definição 1.1.32. *Seja M uma variedade diferenciável, fechada e conexa. Um **nudo** em M é uma subvariedade diferenciável N , fechada, conexa, de codimensão 2 de M . Se N tem várias componentes conexas, então é chamado de um **link** em M .*

Definição 1.1.33. *Um nudo ou link $N \subset M$ é **fibrado** se é o binding de uma decomposição de livro aberto de M .*

Com estes conceitos, o teorema 1.1.21, que se generaliza para funções complexas analíticas, fica da seguinte forma:

Teorema 1.1.24. *Seja $f : (\mathbb{B}_r \subset \mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função complexa analítica com ponto crítico em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $V = f^{-1}(0)$ e $K = V \cap \mathbb{S}_\epsilon$. Então a função*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_\epsilon - K &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

é a função projeção de um fibrado localmente trivial. Mais ainda, se V tem uma singularidade isolada em zero, então $K \subset \mathbb{S}_\epsilon$ é um link fibrado, definindo uma decomposição de livro aberto na esfera $\mathbb{S}_\epsilon \cong \mathbb{S}^{2n+1}$.

Definição 1.1.34. *A variedade $F = \phi^{-1}(e^{i\theta})$, para algum $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, é chamada de **fibra de Milnor** de f em zero.*

1.2 A métrica de Fubini-Study

Seja M uma variedade complexa de dimensão n . Sejam $p \in M$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ sistema de coordenadas ao redor de p , $T'_p(M)$ é chamado de **espaço tangente holomorfo** de M em p , temos que $\left\{\frac{\partial}{\partial z_i}\right\}$ é uma \mathbb{C} -base. O espaço $T''_p(M)$ gerado pela \mathbb{C} -base

$\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right\}$ é chamado de o **espaço tangente antiholomorfo** de M em p . Uma **métrica hermitiana** sobre M é dada por um produto interno hermitiano definido positivo $(\cdot, \cdot)_z : T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)} \rightarrow \mathbb{C}$, sobre o espaço tangente holomorfo em z , para cada $z \in M$, que depende diferenciavelmente de z , isto é, em coordenadas locais de z em M , as funções

$$h_{ij}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right)_z$$

são diferenciáveis. Em termos da base $(dz_i \otimes d\bar{z}_j)$ de $(T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)})^* = T_z^{*'}(M) \otimes T_z^{*''}(M)$, a forma hermitiana tem a forma $ds^2 = \sum_{i,j} h_{i,j} dz_i \otimes d\bar{z}_j$.

Seja

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (z_0, \dots, z_n) &\mapsto [z_0 : \dots : z_n]. \end{aligned}$$

Se $\tilde{\phi} = -4i\partial\bar{\partial}\log(z_0\bar{z}_0 + \dots + z_n\bar{z}_n)$ então $p^*(\phi) = \tilde{\phi}$, onde ϕ é a forma de Kaehler sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, isto é

$$\phi_{p(z)}(dp_z(X), dp_z(Y)) = \tilde{\phi}(X, Y), \quad X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}).$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= -4i\partial \left(\frac{\sum z_j d\bar{z}_j}{z_0\bar{z}_0 + \dots + z_n\bar{z}_n} \right) \\ &= -\frac{4i}{|z|^4} (|z|^2 \sum dz_j \wedge d\bar{z}_j - (\sum \bar{z}_k dz_k) \wedge (\sum z_j d\bar{z}_j)) \end{aligned}$$

A **métrica de Fubini-Study** é definida por $g(X, Y) = \phi(JX, Y)$, onde

$$JX = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j} - \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \text{ se } X = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Suponha que $X = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ e $Y = \sum \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \theta_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ então

$$JX = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial y_j} - \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

logo

$$\begin{aligned} JX &= \sum (-\beta_j + i\alpha_j) \frac{\partial}{\partial z_j} + (-\beta_j - i\alpha_j) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \\ Y &= \sum (\gamma_j + \theta_j) \frac{\partial}{\partial z_j} + (\gamma_j - i\theta_j) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
g_{p(z)}(dp_z(X), dp_z(Y)) &= \tilde{\phi}_z(JX, Y) \\
&= -\frac{4i}{|z|^4} \left(\frac{|z|^2}{2!} \sum_j \begin{vmatrix} -\beta_j + i\alpha_j & \gamma_j + i\theta_j \\ -\beta_j - i\alpha_j & \gamma_j - i\theta_j \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} \sum \bar{z}_k(-\beta_k + i\alpha_k) & \sum \bar{z}_k(\gamma_k + i\theta_k) \\ \sum z_j(-\beta_j - i\alpha_j) & \sum z_j(\gamma_j - i\theta_j) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{2i}{|z|^4} (|z|^2 2i \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} - i2 \operatorname{Re}((X, Z)_{\mathbb{C}}(Z, Y)_{\mathbb{C}})) \\
&= \frac{4}{|z|^4} (|z|^2 \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} - \operatorname{Re}((X, Z)_{\mathbb{C}}(Z, Y)_{\mathbb{C}}))
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g_{p(z)}(dp_z(X), dp_z(Y)) = \frac{4}{|z|^4} \operatorname{Re}(X, |z|^2 Y - (Y, Z)Z)_{\mathbb{C}},$$

onde $X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$.

Seja $f(z_0, \dots, z_n) = z_0^2 + \dots + z_n^2 = (z, \bar{z})_{\mathbb{C}} = |X|^2 - |Y|^2 + 2i \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}}$, onde $z = (z_0, \dots, z_n) = X + iY$ e $X, Y \in \mathbb{R}^{n+1}$

Se $\tilde{Q} = f^{-1}(0)$, logo para $z \in \tilde{Q}$, $z \neq 0$ temos que

$$T_z \tilde{Q} = \operatorname{Nuc}(df_z) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / (jw, z)_{\mathbb{C}} = 0\}$$

Temos que $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, restringimos o dominio, então $p : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, logo $dp_z : T_z \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow T_{[z]} \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, onde

$$T_z \mathbb{S}^{2n+1} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / \langle w, z \rangle_{\mathbb{R}} = 0\}.$$

Vemos que $iz \in T_z \mathbb{S}^{2n+1}$.

Definamos

$$\begin{aligned}
T'_z &= \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / \langle w, z \rangle = \langle w, iz \rangle = 0\} \\
&= \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / (w, z)_{\mathbb{C}} = 0\}
\end{aligned}$$

então $dp_z : T'_z \rightarrow T_{[z]} \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é um isomorfismo.

Seja $p(z) \in Q$ e definamos

$$\begin{aligned}
T''_z &= \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / (w, z)_{\mathbb{C}} = (w, \bar{z})_{\mathbb{C}} = 0\} \\
&= \{w \in \mathbb{C}^{n+1} / \langle w, z \rangle = \langle w, iz \rangle = \langle w, \bar{z} \rangle = \langle w, i\bar{z} \rangle = 0\}
\end{aligned}$$

Vemos que $T'_z = \langle \bar{z} \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle i\bar{z} \rangle_{\mathbb{R}} \oplus T''_z$. Logo

$$dp_z(T'_z) = T_{[z]}\mathbb{C}\mathbb{P}^n = dp_z(\langle \bar{z} \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle i\bar{z} \rangle_{\mathbb{R}}) \oplus T_{[z]}Q.$$

Os elementos de $\langle \bar{z} \rangle \oplus \langle i\bar{z} \rangle$ são da forma $a\bar{z} + bi\bar{z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, logo

$$\begin{aligned} g_{p(z)}(d\Pi_z(X), d\Pi_z(a\bar{z} + bi\bar{z})) &= 4\operatorname{Re}(X, (a + ib)\bar{z} - ((a + ib)\bar{z}, z)_{\mathbb{C}}z)_{\mathbb{C}} \\ &= 4\operatorname{Re}((a + ib)(X, \bar{z})_{\mathbb{C}}) = 0, \quad X \in T_z\tilde{Q}. \end{aligned}$$

Se $w \in T_{[z]}Q$, suponhamos que $dp_z : T''_z \rightarrow T_{[z]}Q$ é isomorfismo, então existe $v \in T''_z$ tal que $d\Pi_z(v) = w$, como $(v, \bar{z})_{\mathbb{C}} = 0$, $v \in T_z\tilde{Q}$ assim $d\Pi_z(T_z\tilde{Q}) = T_{[z]}Q$.

Se $l = \{a\bar{z} + bi\bar{z}/a, b \in \mathbb{R}\} = \{\lambda z^R + \beta z^I, \lambda, \beta \in \mathbb{C}\}$, onde $z = z^R + iz^I$ e $\mathcal{L} = \{p(\lambda z^R + \beta z^I), \lambda, \beta \in \mathbb{C}\}$ então $dp_z l = T_{[z]}\mathcal{L}$ e temos que $g_{p(z)}(U, V) = 0$, para todo $U \in T_{[z]}Q$ e para todo $V \in T_{[z]}\mathcal{L}$, e assim $T_{[z]}\mathcal{L} \subset (T_{[z]}Q)^{\perp}$, como $\dim_{\mathbb{R}}(T_{[z]}Q)^{\perp} = 2$ temos que $(T_{[z]}Q)^{\perp} = T_{[z]}\mathcal{L}$, onde $z \in Q \cap \mathbb{S}^{2n+1}$ e $\mathcal{L} = \{[\lambda z^R + \beta z^I] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}\}$.

Vejamus que $d\pi_z : T''_z \rightarrow T_{[z]}Q$ é um isomorfismo.

Se $z = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} + i\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}$, então $|\alpha_0| = |\alpha_1| = 1$, $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle_{\mathbb{R}} = 0$.

Seja $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base ortonormal de \mathbb{C}^{n+1} .

Seja \tilde{A} uma matriz tal que $\tilde{A}e_0 = \alpha_0, \tilde{A}e_1 = \alpha_1, \dots, \tilde{A}e_n = \alpha_n$, então $\tilde{A} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n] \in O(n+1, \mathbb{R})$.

Se $\det \tilde{A} = -1$, escolhemos $A = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n-1}]$.

Se $\det \tilde{A} = 1$, escolhemos $A = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n]$.

Assim $A \in SO(n+1, \mathbb{R})$.

Temos $z = A\left(\frac{e_0}{\sqrt{2}} + i\frac{e_1}{\sqrt{2}}\right)$, $iz = A\left(\frac{ie_0 - e_1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{z} = A\left(\frac{e_0 - ie_1}{\sqrt{2}}\right)$, $i\bar{z} = A\left(\frac{e_1 + ie_0}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\langle w, Ae_k \rangle = \langle w, iAe_k \rangle = 0, \quad w = z, iz, \bar{z}, i\bar{z}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Logo $T_z\mathbb{S}^{2n+1}$ é gerado por $iz, \bar{z}, i\bar{z}, Ae_k, iAe_k, 2 \leq k \leq n$.

T'_z é gerado por $\bar{z}, i\bar{z}, Ae_k, iAe_k, 2 \leq k \leq n$.

T''_z é gerado por $Ae_k, iAe_k, 2 \leq k \leq n$.

Defino $\alpha_k(t) = \cos t Ae_0 + \sin t Ae_k + iAe_k$, $\alpha_k(0) = \sqrt{2}z$, $\alpha'_k(0) = Ae_k$
 $\beta_k(t) = i\cos t Ae_1 + \sin t Ae_k + Ae_0$, $\beta_k(0) = \sqrt{2}z$, $\beta'_k(0) = iAe_k$, $2 \leq k \leq n$.
 $(\alpha_k(t), \overline{\alpha_k(t)})_{\mathbb{C}} = (\beta_k(t), \overline{\beta_k(t)})_{\mathbb{C}} = 0$, então

$$\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)'(0), \left(\frac{\beta_k}{2}\right)'(0) \in T''_z$$

e

$$\Pi \circ \frac{\alpha_k}{2}(t), \Pi \circ \frac{\beta_k}{2}(t) \in Q,$$

assim

$$d\Pi_z\left(\frac{Ae_k}{2}\right), d\Pi_z\left(i\frac{Ae_k}{2}\right) \in T_{[z]}Q$$

e

$$d\Pi_z(T_z'') \subset T_{[z]}Q.$$

Por lo tanto $d\Pi_z : T_z'' \rightarrow T_{[z]}Q$ é um isomorfismo, $z \in Q$.

Agora vejamos alguns lemas.

Sejam $a, b \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathcal{L} = \{[\lambda a + \beta b] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$ uma linha projetiva complexa, então a, b são \mathbb{C} -linearmente independentes.

Se $z \in \mathcal{L}$, então temos que $\mathcal{L} = \{[\lambda z_0 + \beta b] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$.

Lema 1.2.1. *Se $[z] \in \mathcal{L} \cap Q$. Então $j[z] \in \mathcal{L} \cap Q$ se, e somente se,*

$$\mathcal{L} = \{[\lambda a + \beta b] / a, b \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Demostração. Temos que $[\bar{z}] = [\lambda_0 z + \beta_0 b]$, então $\bar{z} = \lambda_1 \lambda_0 z + \lambda_1 \beta_0 b$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$. Como z e b são \mathbb{C} -linearmente independentes e

$$\mathbb{C}^{n+1} = \langle z \rangle_{\mathbb{C}} \oplus (\langle z \rangle_{\mathbb{C}})^{\perp}$$

então $(\lambda_1 \beta_0 b, z)_{\mathbb{C}} = \lambda_1 \beta_0 (b, z)_{\mathbb{C}} = 0$, logo $\beta_0 (b, z)_{\mathbb{C}} = 0$.

Se $\beta_0 = 0$, $\bar{z} = \lambda_1 \lambda_0 z$ e $(\bar{z}, z) = \lambda_1 \lambda_0 |z|^2 = 0$ então $z = 0$, é uma contradição. Logo $(b, z)_{\mathbb{C}} = 0$.

Como $0 = (\bar{z}, z) = (\lambda_1 \lambda_0 z + \lambda_1 \beta_0 b, z) = \lambda_1 \lambda_0 |z|^2$, temos que $\lambda_0 = 0$ e $\bar{z} = \lambda_1 \beta_0 b$, e se $z = z^R + iz^I$, $z^R, z^I \in \mathbb{R}^{n+1}$ então

$$\lambda z + \beta b = \lambda z + \frac{\beta}{\lambda_1 \beta_0} \bar{z} = \left(\lambda + \frac{\beta}{\lambda_1 \beta_0} \right) z^R + \left(i\lambda - \frac{i\beta}{\lambda_1 \beta_0} \right) z^I.$$

Assim

$$\mathcal{L} = \{[\lambda z^R + \beta z^I] / |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0, \lambda, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

■

Lema 1.2.2. *Seja $[z_0] \in \mathcal{L} \cap Q$. Então $j[z_0] \in \mathcal{L} \cap Q$ se, e somente se, \mathcal{L} intersecta ortogonalmente a Q em z_0 .*

Demostração. Suponha que $j[z_0] \in \mathcal{L} \cap Q$, pelo lema anterior

$$\mathcal{L} = \{[\lambda z_0^R + \beta z_0^I], \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$$

Seja $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ tal que $(\bar{z}, z_0)_{\mathbb{C}} = 0$, se $z = z^R + iz^I$, onde $z^R, z^I \in \mathbb{R}^{n+1}$ então $d\pi_{z_0}(z) \in T_{[z_0]}Q$.

Temos que

$$\lambda z_0^R + \beta z_0^I = \lambda \left(\frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right) - \beta i \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{2} \right)$$

então

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(z, |z_0|^2 \left[\frac{\lambda - i\beta}{2} z_0 + \frac{\lambda + i\beta}{2} \bar{z}_0 \right] - \left(\left[\frac{\lambda - i\beta}{2} z_0 + \frac{\lambda + i\beta}{2} \bar{z}_0 \right], z_0 \right) z_0)_{\mathbb{C}} \\ &= \operatorname{Re}(z, \left(\frac{\lambda - i\beta}{2} \right) |z_0|^2 z_0 + \left(\frac{\lambda + i\beta}{2} \right) |z_0|^2 \bar{z}_0 - \left(\frac{\lambda - i\beta}{2} \right) |z_0|^2 z_0)_{\mathbb{C}} \\ &= \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\lambda - i\beta}{2} \right) |z_0|^2 (z, \bar{z}_0)_{\mathbb{C}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Então $g_{[z_0]}(dp_{z_0}(z), dp_{z_0}(\lambda z_0^R + \beta z_0^I)) = 0$, então \mathcal{L} intersecta ortogonalmente a Q em z_0 .

Suponha agora que \mathcal{L} intersecta ortogonalmente a Q em $[z_0]$. Podemos supor que $|z_0| = 1$. Se $\mathcal{L} = \{[\lambda z_0 + \beta b] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$, como $(z_0, \bar{z}_0)_{\mathbb{C}} = 0$ então $b = \lambda z_0 + \beta \bar{z}_0 + w$, onde $(w, z_0)_{\mathbb{C}} = (w, \bar{z}_0)_{\mathbb{C}} = 0$, assim $b = (b, z_0)z_0 + (b, \bar{z}_0)\bar{z}_0 + w$.

Temos que $\operatorname{Re}(X, Y - (Y, z_0)z_0)_{\mathbb{C}} = 0$, para todo $X \in T_{z_0}Q$, $Y \in T_{z_0}l = l$.

Escolhemos $Y = b$, $X = b - (b, \bar{z}_0)\bar{z}_0$, então $Y \in T_{z_0}l$, $X \in T_{z_0}Q$ então

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(b - (b, \bar{z}_0)\bar{z}_0, b - (b, z_0)z_0) = \\ &= \operatorname{Re}(b - (b, \bar{z}_0)\bar{z}_0, b) - \overline{(b, z_0)}(b - (b, \bar{z}_0)\bar{z}_0, z_0) \\ &= |b|^2 - |(b, \bar{z}_0)|^2 - |(b, z_0)|^2 \\ &= |(b, z_0)|^2 + |(b, \bar{z}_0)|^2 + |w|^2 - |(b, \bar{z}_0)|^2 - |(b, z_0)|^2 = |w|^2 = 0 \end{aligned}$$

assim $b = (b, z_0)z_0 + (b, \bar{z}_0)\bar{z}_0$ e

$$\begin{aligned} \lambda z_0 + \beta b &= (\lambda + \beta(b, z_0))z_0 + \beta(b, \bar{z}_0)\bar{z}_0 \\ &= (\lambda + \beta(b, z_0) + \beta(b, \bar{z}_0))z_0^R + i(\lambda + \beta(b, z_0) - \beta(b, \bar{z}_0))z_0^I \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L} = \{[\lambda z_0^R + \beta z_0^I] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$ então $j[z_0] \in \mathcal{L} \cap Q$. ■

Lema 1.2.3. *Seja $[z_0] \in \mathcal{L} \cap Q$ e $j[z_0] \in \mathcal{L} \cap Q$. Então $\mathcal{L} \cap \Pi$ é uma linha projetiva real.*

Demostração. Temos que $\mathcal{L} = \{[\lambda z_0^R + \beta z_0^I] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$, onde $z = z_0^R + iz_0^I$ e $z_0^R, z_0^I \in \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $[z] \in \mathcal{L} \cap \Pi$.

$$[z] = [\lambda z_0^R + \beta z_0^I], \quad j[z] = [z] = [\bar{\lambda} z_0^R + \bar{\beta} z_0^I]$$

então $\lambda z_0^R + \beta z_0^I = \gamma(\lambda z_0^R + \beta z_0^I)$.

Podemos supor que $|z_0|^2 = 2|z_0^R|^2 = 2$ e $|\lambda z_0^R + \beta z_0^I|^2 = 1$ então $|\lambda z_0^R + \beta z_0^I| = |\lambda|^2 |z_0^R|^2 + |\beta|^2 |z_0^I|^2 = |\lambda|^2 + |\beta|^2 = 1$, logo $|\gamma| = 1$ e $\gamma = e^{i\theta}$, assim se $\lambda = |\lambda|e^{i\theta\lambda}$, $\beta = |\beta|e^{i\theta\beta}$ e $e^{i\theta\lambda} = e^{i\theta}e^{-i\theta\lambda}$, $e^{i\theta\beta} = e^{i\theta}e^{-i\theta\beta}$, temos que

$$2\theta_\lambda + 2k\pi = 2\theta_\beta$$

então $\theta_\lambda + k\pi = \theta_\beta$ e $e^{i\theta_\beta} = \pm e^{i\theta_\lambda}$ reemplazando temos que

$$\begin{aligned} \lambda z_0^R + \beta z_0^I &= \lambda z_0^R + \sqrt{1 - |\lambda|^2} (\pm e^{i\theta_\lambda}) z_0^I \\ &= \lambda z_0^R + \sqrt{1 - |\lambda|^2} \left(\pm \frac{\lambda}{|\lambda|} \right) z_0^I = \lambda \left(z_0^R \pm \frac{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}{|\lambda|} z_0^I \right) \end{aligned}$$

Obtendo $\mathcal{L} \cap \Pi = \{[\lambda z_0^R + \beta z_0^I] / \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$. ■

Proposição 1.2.1. *Seja $[z_0] \in \mathcal{L}_0$, $[z_1] \in \mathcal{L}_1$, onde $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ são linhas projetivas complexas tais que $[z_0], [z_1] \in Q$ e*

$$\mathcal{L}_i = \{[\lambda z_i + \beta \bar{z}_i] / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$$

para $i = 0, 1$.

Se $\mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$ então a interseção é um ponto só e pertence a Π .

Demostração. Como $\mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}_1$ então $[z_0] \neq [z_1]$. Se

$$U_i = \{\lambda z_i + \beta \bar{z}_i / \lambda, \beta \in \mathbb{C}\}, i = 0, 1.$$

Temos que $\mathcal{L}_i = \pi(U_i)$. Existe $[p] \in \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1$, então $\lambda z_0 + \beta \bar{z}_0 = \gamma(\lambda' z_1 + \beta' \bar{z}_1)$, isto quer dizer que $\{z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1\}$ são \mathbb{C} -linearmente dependentes.

$$3 \geq \dim_{\mathbb{C}}(U_0 + U_1) = \dim_{\mathbb{C}}U_0 + \dim_{\mathbb{C}}U_1 - \dim_{\mathbb{C}}(U_0 \cap U_1)$$

$$2 \geq \dim_{\mathbb{C}}U_0 \geq \dim_{\mathbb{C}}U_0 \cap U_1 \geq 1$$

Se $\dim_{\mathbb{C}}(U_0 \cap U_1) = 2$, teríamos que $U_0 = U_0 \cap U_1 = U_1$ e $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1$, é absurdo. Logo $\dim_{\mathbb{C}}U_0 \cap U_1 = 1$, então $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1 = [p]$.

Podemos ver que $\mathcal{L}_i = \{\lambda z_i^R + \beta z_i^I / \lambda, \beta \in \mathbb{C}, |\lambda|^2 + |\beta|^2 \neq 0\}$, $i = 0, 1$, $z_j = z_j^R + iz_j^I$, $z_j^R, z_j^I \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p = \lambda z_0^R + \beta z_0^I = a z_1^R + b z_1^I$, se $a = a^R + ia^I$, $b = b^R + ib^I$, $\lambda = \lambda^R + i\lambda^I$ e $\beta = \beta^R + i\beta^I$, então

$$\lambda^R z_0^R + \beta^R z_0^I = a^R z_1^R + b^R z_1^I = p^R$$

$$\lambda^I z_0^R + \beta^I z_0^I = a^I z_1^R + b^I z_1^I = p^I$$

Vemos que $\{z_0^R, z_0^I, z_1^R, z_1^I\}$ são \mathbb{R} -linearmente dependentes.

Suponha $b^R \neq 0$ então $z_1^I = t_1 z_0^R + t_2 z_0^I + t_3 z_1^R$. Logo

$$\begin{aligned} \lambda^R z_0^R + \beta^R z_0^I &= a^R z_1^R + b^R t_1 z_0^R + b^R t_2 z_0^I + b^R t_3 z_1^R \\ &= b^R t_1 z_0^R + b^R t_2 z_0^I + (a^R + b^R t_3) z_1^R \end{aligned}$$

Se $a^R + b^R t_3 \neq 0$, teremos $z_1^R \in \mathcal{L}_0$ e também $z_1^I \in \mathcal{L}_0$, resultando $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1$, é absurdo. Então $a^R + b^R t_3 = 0$, assim $p^R = b^R(t_1 z_0^R + t_2 z_0^I)$. Também

$$\begin{aligned} \lambda^I z_0^R + \beta^I z_0^I &= a^I z_1^R + b^I t_1 z_0^R + b^I t_3 z_1^R \\ &= b^I t_1 z_0^R + b^I t_2 z_0^I + (a^I + b^I t_3) z_1^R \end{aligned}$$

se $a^I + b^I t_3 \neq 0$, teremos $z_1^R \in \mathcal{L}_0$ e logo $z_1^I \in \mathcal{L}_0$, é absurdo. Então

$$\lambda^I z_0^R + \beta^I z_0^I = b^I t_1 z_0^R + b^I t_2 z_0^I = b^I (t_1 z_0^R + t_2 z_0^I) = p^I,$$

depois

$$[p] = [p^R + ip^I] = [(b^R + ib^I)(t_1 z_0^R + t_2 z_0^I)] = [(t_1 z_0^R + t_2 z_0^I)]$$

onde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, então $[p] \in \Pi$. ■

A métrica de Fubini Study define uma métrica hermitiana sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, e tem a propriedade que o grupo unitário $U(n+1) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}), A\bar{A}^t = I\}$ atua transitivamente por isometrias holomorfas sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. A distância na métrica de Fubini–Study em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ entre dois pontos $P, Q \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é igual à distancia na geometria esférica de S^{2n+1} entre os grandes círculos correspondentes. Para ver uma demonstração deste fato, pode-se consultar [9].

Capítulo 2

Sobre a Geometria e Topologia das Quádricas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

2.1 A topologia das quádricas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Seja h um polinômio homogêneo de grau dois em $n+1$ variáveis complexas com um ponto crítico isolado em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$; sejam $\tilde{Q} = h^{-1}(0)$, $K = \tilde{Q} \cap \mathbb{S}^{2n+1}$ seu link, e seja $Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ sua projetivização, $Q = (\tilde{Q} - 0)/\mathbb{C}^*$, o qual é não singular por hipótese. Nesta seção demonstraremos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é difeomorfo ao espaço total do espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Começaremos com uns lemas.

Lema 2.1.1. *A hipersuperfície \tilde{Q} é isotópica à hipersuperfície dada pela equação do polinômio de Fermat $z_0^2 + \dots + z_n^2 = 0$. A afirmação análoga tem-se para a quádrlica projetivizada.*

Demonstração. Seja $d > 1$. Podemos identificar cada polinômio homogêneo de grau d , com um elemento de $\mathcal{P} = \mathbb{C}\mathbb{P}^N$, onde $N = \binom{n+d}{d} - 1$:

$$\begin{aligned} \{p(x)/p(x) \text{ é polinômio homogêneo de grau } d\} &\rightarrow \mathcal{P} \\ p(x) = \sum_{|I|=d} a_I x^I = \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_n=d} a_{\alpha_0\dots\alpha_n} x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} &\mapsto (a_I)_{|I|=d} \end{aligned}$$

Então \mathcal{P} é o espaço projetivo de coeficientes de polinômios homogêneos de grau d em $n+1$ variáveis.

Se $\varphi : \mathcal{P} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \{0, 1\}$ é dada por:

$$\varphi((a_I), z) = p_{a_I}(z) = \sum_{|I|=d} a_I z^I = \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_n=d} a_{\alpha_0\dots\alpha_n} z_0^{\alpha_0} \dots z_n^{\alpha_n},$$

Logo $\mathcal{X} = \varphi^{-1}(0)$ é hipersuperfície em $\mathcal{P} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Temos que a família de hipersuperfícies projetivas de grau d em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é dada pela função:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \quad \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{P} \\ ((a_I), z) &\mapsto (a_I) \end{aligned}$$

Sabemos que se f é polinômio homogêneo de grau d , então

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}(z_0, \dots, z_n) z_i = d \times f(z_0, \dots, z_n)$$

Se

$$\Sigma = \{(a_I) \in \mathcal{P} / \frac{\partial p_{a_I}}{\partial z_i}(z) = 0, \forall i, \text{ para algum } z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n\},$$

então Σ está formada pelos polinômios que definem hipersuperfícies singulares. Além disso, Σ é um hiperplano fechado.

Sabemos que \mathcal{P} é irredutível, logo $\mathcal{P} - \Sigma = \Omega$ é aberto e denso, então Ω é irredutível, logo é conexo.

Seja $\mathcal{X}^* = \{(a_\alpha, z) \in \mathcal{X}; (a_\alpha) \notin \Sigma\}$. Este conjunto está formado pelas hipersuperfícies não singulares em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Assim temos que

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{X}^*} : \mathcal{X}^* \rightarrow \Omega$$

é diferenciável, sobrejetivo, o diferencial tem posto constante igual a dimensão de Ω . Pelo lema de Ehresmann, $\mathcal{E}|_{\mathcal{X}^*}$ é a projeção de um fibrado localmente trivial sobre Ω . Todas as fibras são difeomorfas, mais ainda, se $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é hipersuperfície não singular de grau d então é isotópico à hipersuperfície X_0 , definida pelo polinômio de Fermat $\mathcal{F}_d^n := z_0^d + \dots + z_n^d$.

Isto é, a menos de isotopia, podemos supor que X é a projetivização da variedade afim $V := \{z_0^d + \dots + z_n^d = 0\}$, logo de remover a singularidade $0 \in V$. ■

Lema 2.1.2. *O complemento $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é difeomorfo ao espaço quociente F/\mathbb{Z}_2 da fibra de Milnor F pela monodromia da fibração de Milnor, a qual é cíclica de ordem 2.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} G : \quad \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (z_0, \dots, z_n, t) &\mapsto G(z_0, \dots, z_n, t) = (tz_0, \dots, tz_n). \end{aligned}$$

define uma ação, e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é o espaço de órbitas de G .

Temos que $G_t(z) \in V$, para todo $z \in V$. Assim V é invariante pela \mathbb{C}^* -ação. Então

tem-se

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n - X = (\mathbb{C}^{n+1} - V)/\mathbb{C}^*$$

como $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$, então

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n - X = (\mathbb{S}^{2n+1} - V \cap \mathbb{S}^{2n+1})/\mathbb{S}^1,$$

assim as órbitas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - X$ são $\mathcal{O}_z = \{G(z, e^{it}); t \in \mathbb{R}\}$ e $z \in \mathbb{S}^{2n+1} - V \cap \mathbb{S}^{2n+1}$.

Neste caso, $K = V \cap \mathbb{S}^{2n+1}$.

A função:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^{2n+1} \setminus K &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto \frac{\mathcal{F}_d^n(z)}{\|\mathcal{F}_d^n(z)\|} \end{aligned}$$

é a decomposição de um livro aberto (ver figura 2.1). Então ϕ é localmente da forma

$$\begin{aligned} \phi : K \times \mathbb{D} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\mapsto \frac{y}{|y|}. \end{aligned}$$

Assim

$$\phi^{-1}(e^{i\theta}) = K \times L_\theta = F_\theta,$$

onde $L_\theta = \{re^{i\theta}; 0 < r < 1\}$.

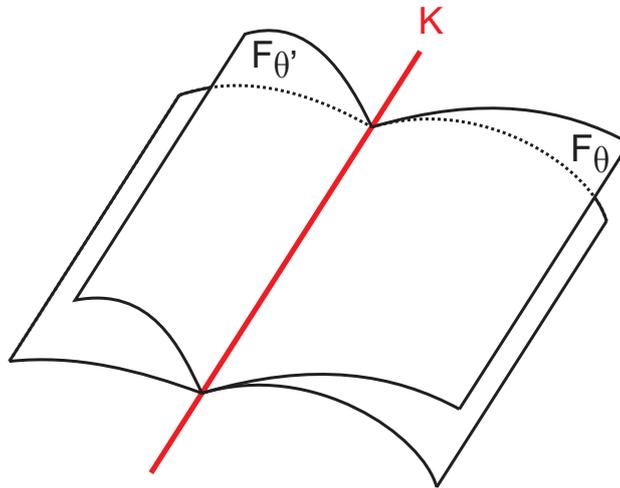


Figura 2.1: A decomposição de livro aberto.

Se $F = F_\theta$, a monodromia (ver figura 2.2) está dada por

$$\begin{aligned} \psi : F &\rightarrow F \\ (z_0, \dots, z_n) &\mapsto e^{2\pi i/d}(z_0, \dots, z_n). \end{aligned}$$

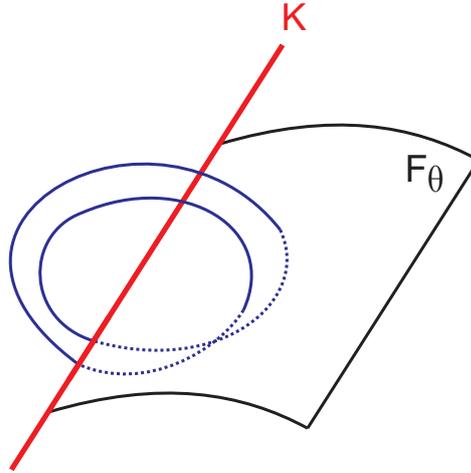


Figura 2.2: A aplicação de monodromia para $d = 2$.

As \mathbb{S}^1 -órbitas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - X$ são transversais as fibras de Milnor. Também a monodromia é cíclica de período d . Temos que $\bigcup_{\theta} F_{\theta} = \mathbb{S}^{2n+1} - K$, e $F/\psi = \bigcup_{\theta} F_{\theta}/\mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^{2n+1} - K)/\mathbb{S}^1$, então F é um recobrimento cíclico de d - folhas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - X$. ■

Lema 2.1.3. *Se F é a fibra de Milnor de h então seu link K é difeomorfo à variedade de Stiefel $V_{n+1,2}$ das 2-estruturas ortonormais em \mathbb{R}^{n+1} .*

Demonstração. A fibra de Milnor é difeomorfa à variedade afim $z_0^2 + \dots + z_n^2 = 1$, pois na decomposição de livro aberto as fibras são difeomorfas.

Se $z = (z_0, \dots, z_n) = (x_0 + iy_0, \dots, x_n + iy_n) = U + iV$, onde $U = (x_0, \dots, x_n)$, $V = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, logo a fibra de Milnor é

$$F = \{(U, V) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} / |U|^2 - |V|^2 = 1, U \perp V\},$$

$$\text{pois } 1 = (x_0 + iy_0)^2 + \dots + (x_n + iy_n)^2 = |U|^2 - |V|^2 + 2iU \cdot V$$

Vemos que

$$T\mathbb{S}^n = \{(p, v_p) / p \in \mathbb{S}^n, v_p \in T_p\mathbb{S}^n\} = \{(p, v) / p \in \mathbb{S}^n, p \cdot v = 0\}.$$

Definindo $F \rightarrow T\mathbb{S}^n$ por $(U, V) \mapsto (U/|U|, V)$, tem inversa $T\mathbb{S}^n \rightarrow F$ dada por $(p, v) \mapsto (\sqrt{1 + |v|^2}p, v)$, temos que a fibra de Milnor F é difeomorfa à $T\mathbb{S}^n$.

Podemos pensar em F como sendo o fibrado tangente disco unitário da esfera pois

$$\begin{aligned} T\mathbb{S}^n &\rightarrow \{(p, v) / |p| = 1, |v| < 1, p \cdot v = 0\} \\ (p, v) &\mapsto \left(p, \frac{v}{1 + |v|}\right) \end{aligned}$$

Então o link K é o fibrado tangente esfera unitária da esfera \mathbb{S}^n , pois K pode ser visto como o bordo de F .

$$\begin{aligned} K &= \{(p, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} / p \cdot v = 0, |v| = 1\} \\ &= \{(p, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} / p \cdot v = 0, |p| = 1, |v| = 1\} = V_{n+1,2} \end{aligned}$$

Logo K é difeomorfo à variedade de Stiefel $V_{n+1,2}$. ■

Lema 2.1.4. *A quádrlica $Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é difeomorfa à Grassmanniana $G_{n+1,2}$ dos 2-planos orientados em \mathbb{R}^{n+1} .*

Demostração. Temos que $\tilde{Q} = h^{-1}(0)$, $K = \tilde{Q} \cap \mathbb{S}^{2n+1}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^+ \times S^1$. Assim $Q = (\tilde{Q} - 0)/\mathbb{C}^* = (\tilde{Q} \cap \mathbb{S}^{2n+1})/S^1 = K/S^1 = V_{n+1,2}/S^1$.

Sabemos que $SO(2) = \{A \in O(2) / \det A = 1\}$ é difeomorfo a S^1 , logo $Q \cong V_{n+1,2}/SO(2)$, isto faz identificar todos os 2-referenciais que estão no mesmo 2-plano em \mathbb{R}^{n+1} . Obtemos que $Q \cong G_{n+1,2}$, a Grassmanniana. ■

Teorema 2.1.1. *Temos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é difeomorfo ao espaço total do espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.*

Demostração. Temos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é difeomorfo ao quociente de F , a fibra de Milnor, pela monodromia, a qual é cíclica de ordem 2.

Também sabemos que F é o espaço total do fibrado tangente $T\mathbb{S}^n$.

A monodromia é dada pela multiplicação por -1 : $(U, V) \mapsto (-U, -V)$, onde $(U, V) \in F$, e $U, V \in \mathbb{R}^{n+1}$

Então o quociente de F pela involução é o fibrado tangente do n -espaço projetivo real, assim $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q \cong F/\mathbb{Z}_2 \cong T\mathbb{S}^n / \sim \cong T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ (ver [6]). ■

Seja X_0 a projetivização da hipersuperfície afim definida pelo polinômio de Fermat $F_d^n := z_0^d + \dots + z_n^d$ e denotemos por $C_d^n := \mathbb{C}\mathbb{P}^n - X_0$. Também temos demonstrado o seguinte corolário.

Corolário 3. *Seja X uma hipersuperfície não singular de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de grau d . Então:*

- (i) *O par $(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, X)$ é isotópico ao par $(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, X_0)$, e*
- (ii) *A fibra de Milnor F de \mathcal{F}_d^n é uma recobrimento cíclico de d -folhas de C_d^n .*

2.2 O espaço $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ como um cilindro de aplicação dupla

Seja $Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ a hiperquádrlica, isto é, uma hipersuperfície dada por um polinômio homogêneo de grau 2, não singular em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ com equação

$$z_0^2 + \dots + z_n^2 = 0,$$

em coordenadas projetivas homogêneas. Seja a involução dada pela conjugação complexa:

$$j : \quad \mathbb{C}\mathbb{P}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ [z_0 : \dots : z_n] \mapsto [\bar{z}_0 : \dots : \bar{z}_n],$$

e seja Π o conjunto fixo de j , isto é, $\Pi \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Com efeito

$$\begin{aligned} [z_0, \dots, z_n] \in \Pi &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}^* / |z_k| e^{i\theta_k} = |\alpha| e^{i\theta_\alpha} |z_k| e^{-i\theta_k}, \forall k = 0, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha = e^{i\theta} / |z_k| e^{i2\theta_k} = |z_k| e^{i\theta} \Leftrightarrow \exists k_0 / 2\theta_{k_0} = \theta + 2n_0\pi \\ &\Leftrightarrow \exists \theta_{k_0} / |z_k| e^{i2\theta_k} = |z_k| e^{i(2\theta_{k_0} - 2n_0\pi)} \\ &\Leftrightarrow \exists \theta_{k_0} / |z_k| e^{i\theta_k} = |z_k| (-1)^{m_k} e^{i\theta_{k_0}} \\ &\Leftrightarrow \exists \theta_{k_0} / z = e^{i\theta_{k_0}} (t_0, \dots, t_n), (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \{0\} \end{aligned}$$

Seja $T_1(\Pi) = \{(p, v) / (p, v) \in T(\Pi), |v| = 1\}$ o fibrado tangente esfera unitária de Π .

Temos que

$$\begin{aligned} T(\Pi) - \Pi &\rightarrow T_1(\Pi) \times (0, 1) \\ (p, v) &\mapsto \left((p, \frac{v}{|v|}), \frac{|v|}{1 + |v|} \right) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Pelo teorema anterior $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é difeomorfo ao fibrado tangente $T(\Pi)$ e Π é a seção nula do fibrado. Por isso $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \sqcup \Pi)$ pode ser visto como o conjunto de vetores não nulos de Π , assim $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \sqcup \Pi)$ é difeomorfo ao cilindro $T_1(\Pi) \times (0, 1)$.

Em outras palavras temos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é obtido tomando o producto $T_1(\Pi) \times (0, 1)$ e anexando a ele, de algum jeito a quádrlica Q em uma extremidade e o espaço projetivo $\Pi = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ no outro extremo. Na seguinte proposição explica-se o anexamento.

Proposição 2.2.1. *O fibrado tangente esfera unitária $T_1(\Pi)$ é difeomorfo ao espaço homogêneo $SO(n+1, \mathbb{R}) / (SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2)$, e é portanto difeomorfo à $F_+^{n+1}(2, 1)$, a variedade bandeira (parcial) do 2-planos orientados em \mathbb{R}^{n+1} e linhas não orientadas em estes planos.*

Demonstração. Note que o grupo $SO(n+1, \mathbb{R})$ atua linearmente sobre \mathbb{C}^{n+1} e esta ação desce a uma ação em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ que preserva Q . Pois

$$[z] \in Q \Leftrightarrow |U|^2 - |V|^2 + 2iU.V = 0, \text{ onde } U + iV = z, U, V \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.2.1)$$

Se $A \in SO(n+1, \mathbb{R})$ temos que

$$|AU|^2 - |AV|^2 + 2iAU.AV = |U|^2 - |V|^2 + 2iU.V = 0 \Rightarrow [Az] \in Q.$$

Esta ação também deixa invariante o espaço projetivo real Π , onde esta atua via a ação induzida do $SO(n+1, \mathbb{R})$ sobre \mathbb{R}^{n+1} .

Temos que $F : SO(n+1, \mathbb{R}) \times \Pi \rightarrow \Pi$, dada por $F(A, [x]) = [Ax]$, é uma ação sobre Π .

Então $F_A : \Pi \rightarrow \Pi$ é dada por $[x] \mapsto [Ax]$, e $DF_A([x]) : T_{[x]}\Pi \rightarrow T_{[Ax]}\Pi$ é dada por $[v] \mapsto [Av]$. e $|Av| = |v| = 1$. Então temos a seguinte ação sobre $T_1(\Pi)$:

$$\begin{aligned} \tilde{F} : SO(n+1, \mathbb{R}) \times T_1(\Pi) &\rightarrow T_1(\Pi) \\ (A, [x, v]) &\mapsto [Ax, DF_A([x])v] = [Ax, Av] \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{F}_B \cdot \tilde{F}_A = \tilde{F}_{BA}$ e $\tilde{F}_I[x, v] = [x, v]$.

Afirmção: $SO(n+1, \mathbb{R})$ opera transitivamente em $T_1(\Pi)$, isto é, $T_1(\Pi)$ é $SO(n+1, \mathbb{R})$ -espaço homogêneo.

Com efeito. Sejam $[x, v], [y, w] \in T_1(\Pi)$, como $\Pi = \mathbb{S}^n / \sim$, então $T(\Pi) = \{[U, V] / (U, V) \in T\mathbb{S}^n\}$, $[U, V] = \{(U, V), (-U, -V)\}$, então $x \cdot v = 0$, $y \cdot w = 0$, logo $\{\frac{x}{|x|}, v\}$ e $\{\frac{y}{|y|}, w\}$ são linearmente independentes, complementamos cada um a uma $n+1$ -base, logo existe $A \in \mathcal{O}(n+1, \mathbb{R})$ tal que $A(\frac{x}{|x|}) = \frac{y}{|y|}$, $Av = w$. Se $\det A = -1$, trocamos o último da primeira base por sua antípoda, logo a nova matriz A tem determinante um. Assim existe $A \in SO(n+1, \mathbb{R})$ tal que $\tilde{F}(A, [x, v]) = [y, w]$. Portanto $T_1(\Pi)$ é um espaço $SO(n+1, \mathbb{R})$ -homogêneo. A afirmação está demonstrada.

Seja $[x, v] \in T_1(\Pi)$, logo $H_{[x, v]} = \{A \in SO(n+1, \mathbb{R}) / F(A, [x, v]) = [x, v]\}$ é o subgrupo de isotropia correspondente a $[x, v]$. Vejamos como é H , escolhemos $x_0 = e_n$, $v_0 = e_{n+1}$, então $[(e_n, e_{n+1})] = \{(e_n, e_{n+1}), (-e_n, -e_{n+1})\} \in T_1(\Pi)$, existe $A \in SO(n+1, \mathbb{R})$ tal que $Ae_n = e_n$ e $Ae_{n+1} = e_{n+1}$ ou $Ae_n = -e_n$, $Ae_{n+1} = -e_{n+1}$. Suponha que $Ae_n = e_n$, $Ae_{n+1} = e_{n+1}$, logo como $AA^t = I$, temos que

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \text{ e } A_{n-1}A_{n-1}^t = I \text{ com } \det A_{n-1} = 1.$$

no outro caso temos

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}, \text{ onde } A_{n-1} \in SO(n-1, \mathbb{R}).$$

Assim temos que $H \cong SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto $T_1(\Pi) \cong \frac{SO(n+1, \mathbb{R})}{SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2}$ (ver [11 : 436]).

Por outro lado $F_+^{n+1}(2, 1) = \{[V_1, V_2] / V_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ é subespaço vetorial, } \dim V_i = i, V_2 \text{ é orientado e } V_1 \subset V_2\}$. Defino

$$\begin{aligned} G : SO(n+1, \mathbb{R}) \times F_+^{n+1}(2, 1) &\rightarrow F_+^{n+1}(2, 1) \\ (A, [V_1, V_2]) &\mapsto [AV_1, AV_2] \end{aligned}$$

Vejamos que $F_+^{n+1}(2, 1)$ é homogêneo.

Sejam $[V_1, V_2], [W_1, W_2] \in F_+^{n+1}(2, 1)$. Seja $\{v_1\}$ base ortonormal de V_1 e $\{v_1, v_2\}$ base ortonormal de V_2 , análogamente $\{w_1, w_2\}$ base ortonormal correspondente a $[W_1, W_2]$. Completamos cada uma das bases a bases ortonormais. Logo existe $A \in \mathbb{O}(n+1, \mathbb{R})$ que leva a primeira base na segunda base. Se $\det A = -1$, trocamos o último elemento da primeira base por sua antípoda e temos assim que $\det A = 1$, temos que existe $A \in SO(n+1, \mathbb{R})$ tal que $G(A, [V_1, V_2]) = [W_1, W_2]$. Por lo tanto $F_+^{n+1}(2, 1)$ é homogêneo.

Seja $V_1 = \langle e_n \rangle, V_2 = \langle e_n, e_{n+1} \rangle$, então

$$H = \{A \in SO(n+1, \mathbb{R}) / \langle Ae_n \rangle = \langle e_n \rangle, \langle Ae_n, Ae_{n+1} \rangle = \langle e_n, e_{n+1} \rangle\}$$

e seu grupo de isotropía. Como $|Av| = |v|$, temos que $Ae_n = e_n$ ou $Ae_n = -e_n$. Se $Ae_n = e_n$, como $Ae_{n+1} \cdot Ae_n = e_{n+1} \cdot e_n = 0$, então $Ae_{n+1} = \pm e_{n+1}$. Pela orientação de V_2 , devemos de tener que $Ae_{n+1} = e_{n+1}$, logo $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, com $A_{n-1} \in SO(n-1, \mathbb{R})$.

Se $Ae_n = -e_n$, devemos tener $Ae_{n+1} = -e_{n+1}$, assim $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, com $A_{n-1} \in SO(n-1, \mathbb{R})$. Por tanto $H = SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$. Então $F_+^{n+1}(2, 1) = \frac{SO(n+1, \mathbb{R})}{SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2}$.

Portanto $T_1(\Pi) \cong \frac{SO(n+1, \mathbb{R})}{SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2} \cong F_+^{n+1}(2, 1)$. ■

Na variedade bandeira $F_+^{n+1}(2, 1)$, cada ponto é um plano orientado em \mathbb{R}^{n+1} e uma linha neste plano. Se nos esquecermos do 2-plano e nos ficamos com a linha, obtemos uma função de $F_+^{n+1}(2, 1)$ no $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Similarmente se esquecermos a linha e nos ficamos com o 2-plano, obtemos uma projeção à Grassmanniana $G_{n+1,2}$, o qual é difeomorfo à quádrlica Q , pelo teorema 3.1.1.

Assim um obtém uma dupla fibração

$$\begin{array}{ccc} & F_+^{n+1}(2, 1) & \\ & (P, l) & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ Q & & \mathbb{R}\mathbb{P}^n \\ P & & l \end{array} \quad (2.2.2)$$

onde P é o plano orientado e l é a reta contida em P não orientada.

Formamos a correspondente função cilindro dupla $(F_+^{n+1}(2, 1) \times [0, 1]) / \sim$, onde \sim identifica um ponto $((P_0, l_0), 0) \in F_+^{n+1}(2, 1) \times \{0\}$ com $\pi_1(P_0, l_0) = P_0$ em $G_{n+1,2} \cong Q$, $((P_1, l_1), 1) \in F_+^{n+1}(2, 1) \times \{1\}$ com $\pi_2(P_1, l_1) = l_1 \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Temos que $Q \cap \Pi = \emptyset$ e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \sqcup \Pi)) \sqcup Q \sqcup \Pi$. Também $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \sqcup \Pi)$ é difeomorfo a $T_1(\Pi) \times (0, 1)$, e éste é difeomorfo a $F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1)$.

Como

$$[P] = \{(P, l, 0) / (P, l) \in F_+^{n+1}(2, 1)\} = [(P, l, 0)],$$

$$[l] = \{(P, l, 1) / (P, l) \in F_+^{n+1}(2, 1)\} = [(P, l, 1)]$$

$$F_+^{n+1}(2, 1) \times [0, 1] / \sim \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

$$[(P, l, t)] \mapsto \begin{cases} (P, l, t) \text{ "€"} \mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \sqcup \Pi) & t \neq 0, 1 \\ P \text{ "€"} Q & t = 0 \\ l \in \Pi & t = 1 \end{cases}$$

Temos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é homeomorfo a $F_+^{n+1}(2, 1) \times [0, 1] / \sim$. O cilindro de aplicação aberta de $\pi_1 : F_+^{n+1}(2, 1) \rightarrow Q$ é $F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1) \sqcup_{\pi_1} Q \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \sqcup \Pi) \sqcup_{\pi_1} Q = \mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$ enquanto o cilindro de aplicação aberta de $\pi_2 : F_+^{n+1}(2, 1) \rightarrow \Pi$ é $F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1) \sqcup_{\pi_2} \Pi \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$.

Lema 2.2.1. $SO(n+1)/(SO(2) \times SO(n-1))$ é difeomorfo a $G(2, n+1)$.

Demonstração. Sabemos que $[Z] \in Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ se $|U| = |V|$ e $\langle U, V \rangle_{\mathbb{R}} = 0$, onde $Z = U + iV$ e $U, V \in \mathbb{R}^{n+1}$. A $[Z]$ podemos associar o 2-plano orientado em \mathbb{R}^{n+1} , $\mathcal{P}_{[Z]}$, gerado por $\{U, V\}$.

Se $\mathcal{P}_{[Z]}$ é um 2-plano orientado em \mathbb{R}^{n+1} , tem uma base ortonormal ordenada, digamos $\{U, V\}$. Se $\{A, B\}$ é outra base ortonormal de $\mathcal{P}_{[Z]}$ com a mesma orientação, existem constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$U = aA + bB, \quad V = cA + dB$$

Temos $|U|^2 = a^2 + b^2 = 1$, $|V|^2 = c^2 + d^2 = 1$, então $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$. Também $\langle U, V \rangle_{\mathbb{R}} = ac + bd = 0$, logo

$$\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta = \cos(\theta - \beta) = 0,$$

assim $\theta - \beta = (2k - 1)\pi/2$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Também

$$ad - bc = \cos\theta\sin\beta - \sin\theta\cos\beta = \sin(\theta - \beta) > 0,$$

por tanto $\theta - \beta = (4k - 1)\pi/2$, logo $c = -\sin(\theta)$ e $d = \cos(\theta)$.

Substituindo temos $U + iV = aA + bB + i(-bA + aB) = (a - ib)A + (b + ia)B = (a - ib)(A + iB)$. Assim $[U + iV] = [A + iB]$.

Então a função

$$Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow G(2, n+1) = SO(n+1)/(SO(2) \times SO(n-1))$$

$$[U + iV] \mapsto \mathcal{P}_{[U+iV]},$$

onde $G(2, n+1)$ é o conjunto de 2-planos orientados em \mathbb{R}^{n+1} , é um difeomorfismo, onde $G(2, n+1)$ tem estrutura diferenciável da derivada como espaço homogêneo.

Se

$$\begin{aligned} SO(n+1) \times G(2, n+1) &\rightarrow G(2, n+1) \\ A, \mathcal{P}_{[U+iV]} &\mapsto \mathcal{P}_{[AU+iAV]} \end{aligned}$$

então $\mathcal{P}_{[e_0+ie_1]} = \mathcal{P}_{[Ae_0+iAe_1]}$ se e só se

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

onde $B \in SO(n-1)$, então $A \in SO(2) \times SO(n-1)$, logo

$$\begin{aligned} SO(n+1)/(SO(2) \times SO(n-1)) &\rightarrow G(2, n+1) \\ A &\mapsto \mathcal{P}_{[Ae_0+iAe_1]} \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. ■

Temos as projeções

$$\begin{array}{ccc} & F_+^{n+1}(2, 1) & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ Q & & \mathbb{RP}^n \end{array} \quad (2.2.3)$$

e obtemos o double mapping cylinder

$$(Q + F_+^{n+1}(2, 1) \times [0, 1] + \Pi) / \sim$$

onde $(P, l, 0) \sim P$ e $(P, l, 1) \sim l$, l é reta não orientada contida no 2-plano orientado $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 : F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1) + Q &\rightarrow Q \\ (P, l, t) &\mapsto P \\ P &\mapsto P \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1^{-1}(P_0) &= P_0 + \{(P_0, l, t)\}_{l \subset P_0, 0 < t < 1}, \quad (P_0, l, 0) \sim P_0 \\ &= \{(P_0, l, t)\}_{l \subset P_0, 0 \leq t < 1} = \{(P_0, l)\}_{l \subset P_0} \times [0, 1) \\ &= P_0 \times \mathbb{RP}^1 \times [0, 1) = P_0 \times S^1 \times [0, 1) = P_0 \times \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Assim $\mathbb{CP}^n \setminus \Pi = \bigcup_{P_0 \in Q} P_0 \times \mathbb{R}^2 = Q \times \mathbb{R}^2$, ver figura 2.3.

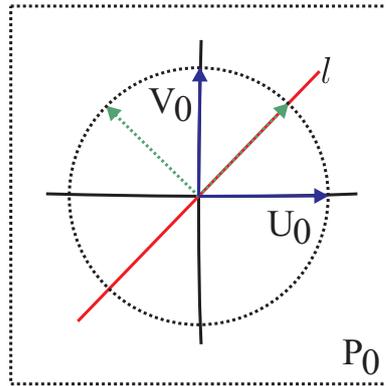


Figura 2.3: P_0 plano orientado gerado pela base orientada U, V .

Agora, se

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_2 : F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1) + \Pi &\rightarrow \Pi \\ (P, l, t) &\mapsto l \\ l &\mapsto l \end{aligned}$$

Temos $\tilde{\Pi}_2^{-1}(l_0) = l_0 + \{(P, l_0, t)\}_{l_0 \subset P}, (P, l_0, 1) \sim l_0$.

Suponha $l_0 = \{\lambda z_0\}_{\lambda \in \mathbb{R}}, |z_0| = 1$, então

$$l_0 \subset \begin{array}{c} \mathcal{P}_{[U+iz_0]} \\ |U|=1 \\ \langle U, z_0 \rangle_{\mathbb{R}}=0 \end{array}, \begin{array}{c} \mathcal{P}_{[z_0+iU]} \\ |U|=1 \\ \langle U, z_0 \rangle_{\mathbb{R}}=0 \end{array}$$

logo $\tilde{\Pi}_2^{-1}(l_0) = \{(P, l_0)\}_{l_0 \subset P} \times (0, 1] = \{\mathcal{P}_{[U+iz_0]}\}_{\substack{|U|=1 \\ \langle U, z_0 \rangle_{\mathbb{R}}=0}} \times (0, 1] \cup \{\mathcal{P}_{[z_0+iU]}\}_{\substack{|U|=1 \\ \langle U, z_0 \rangle_{\mathbb{R}}=0}} \times (0, 1]$

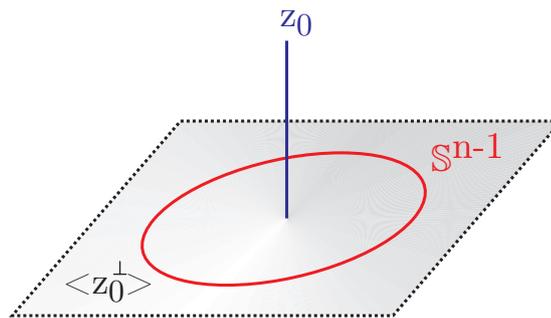
Pero se $|U| = 1$ e $\langle z_0, U \rangle = 0$ então $U \in z_0^\perp \cap \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ (ver figura 2.4). Como $-i(U + iz_0) = z_0 - iU$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_2^{-1}(l_0) &= \{\mathcal{P}_{[z_0+iU]}\}_{U \in \mathbb{S}^{n-1}} \times (0, 1] = \{[z_0 + iU]\}_{U \in \mathbb{S}^{n-1}} \times (0, 1] \\ &= [z_0] \times \mathbb{S}^{n-1} \times (0, 1] = [z_0] \times D^n \end{aligned}$$

onde D^n é disco de dimensão n e $[z_0] \in \mathbb{RP}^n \cong \Pi$.

Assim $\mathbb{CP}^n \setminus Q = \bigcup_{[z_0] \in \Pi} [z_0] \times D^n = \Pi \times D^n$.

Teorema 2.2.2. *O espaço projetivo \mathbb{CP}^n é o cilindro de aplicação dupla da dupla fibração (3.2.2). Se removermos Q de \mathbb{CP}^n obtemos uma variedade difeomorfa ao espaço total do fibrado normal de $\Pi \cong \mathbb{RP}^n$ em \mathbb{CP}^n . Recíprocamente, se removemos Π de \mathbb{CP}^n , o que obtemos é difeomorfo ao espaço total do fibrado normal de Q em \mathbb{CP}^n . Se removermos $Q \sqcup \Pi$ de \mathbb{CP}^n o que obtemos é difeomorfo a $F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1)$.*

Figura 2.4: $\Pi_2^{-1}(l_0)$

Demostração. Sabemos pelo teorema 2.1.1 que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é difeomorfo ao espaço total do fibrado tangente do n -espaço projetivo e que logo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q \sqcup \Pi$ é o fibrado tangente de Π sem a seção nula.

$$T\Pi \setminus \Pi = \bigcup_{\substack{p \in \Pi \\ v \in T_p\Pi \\ v \neq 0}} \{(p, v)\} = \bigcup_{\substack{p \in \Pi \\ r > 0}} \{p\} \times \partial B_p(r)$$

onde $\partial B_p(r) = \{v \in T_p\Pi / \|v\| = r\}$, para alguma métrica sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Temos que

$$T_p\mathbb{C}\mathbb{P}^n = T_p\Pi \oplus (T_p\Pi)^\perp, \quad \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\mathbb{P}^n = 2n, \quad \dim_{\mathbb{R}}T_p\Pi = n.$$

Seja $u_1(p), \dots, u_n(p), v_1(p), \dots, v_n(p)$ base ortonormal de $T_p\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ tal que $u_1(p), \dots, u_n(p)$ é base de $T_p\Pi$, $v_1(p), \dots, v_n(p)$ é base de $(T_p\Pi)^\perp$

Se $u = \sum \alpha_i u_i(p) \in T_p\Pi$, fazemos $u^\perp = \sum \alpha_i v_i(p)$, então $\|u\| = \|u^\perp\|$.

Se $\partial B_p(r)^\perp = \{v \in (T_p\Pi)^\perp / \|v\| = r\}$, temos que é difeomorfo a $\partial B_p(r)$ e

$$\bigcup_{r>0} \{p\} \times \partial B_p(r)^\perp = \bigcup_{r>0} \partial(T_r\Pi)^\perp = (T\Pi)^\perp \setminus \Pi$$

Então $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus Q$ é difeomorfo ao fibrado normal de $\Pi \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Vejamus que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi$ é difeomorfo ao fibrado normal de Q em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Seja

$$\mathcal{N}_Q : \nu Q \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (p, v) \mapsto \exp_p(v) ,$$

a função normal, onde νQ é o fibrado normal de Q em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, e $\exp_p : T_p\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é a função exponencial.

Se $\mathcal{N}_Q : \widetilde{\nu Q} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi$, onde $\widetilde{\nu Q}$ é o fibrado normal de Q e os vetores tem norma menor que $\frac{\pi}{2}$, é bijetiva, então é difeomorfismo.

Assim obtemos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi$ é difeomorfo a qualquer vizinhança tubular de Q em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, de raio menor que $\frac{\pi}{2}$.

Seja \mathcal{L} uma linha projetiva complexa em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ortogonal a Q , pela métrica de Fubini–Study. Por um lema anterior, \mathcal{L} é definida por equações com coeficientes reais, é invariante sob conjugação, a qual é isométrica, então é totalmente geodésico em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ pois é uma linha projetiva complexa. Também temos que \mathcal{L} intersecta Π em uma linha projetiva real. A distancia de um ponto $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n - (\Pi \cup Q)$ a Q é exatamente o comprimento do único segmento de geodésica que une p e o único ponto $q \in Q$ tal que este segmento é ortogonal a Q . Por isso toda vizinhança tubular de Q em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, de diâmetro menor que $\frac{\pi}{2}$, é difeomorfo a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$. ■

Observação 2.2.1. *A fibra de Milnor \mathcal{F}_2^n pode ser visto como o cilindro de aplicação aberta da fibração*

$$V_{n+1,2} \cong SO(n+1, \mathbb{R})/SO(n-1, \mathbb{R}) \rightarrow SO(n+1, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^n.$$

Pois se $G_1 : SO(n+1, \mathbb{R}) \times V_{n+1,2} \rightarrow V_{n+1,2}$ dado por $G_1(A, [v_1, v_2]) = [Av_1, Av_2]$ então $H_{e_1, e_2} \cong SO(n-1, \mathbb{R})$ então $V_{n+1,2} \cong SO(n+1, \mathbb{R})/SO(n-1, \mathbb{R})$ e se $G_2 : SO(n+1, \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ dado por $G_2(A, v) = Av$, então $H_{e_1} \cong SO(n, \mathbb{R})$, logo $SO(n+1, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^n$, então se $V_{n+1,2} \times (0, 1) \sqcup_{\tau} \mathbb{S}^n = T\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^n \sqcup_{\tau} \mathbb{S}^n = T\mathbb{S}^n = \mathcal{F}_2^n$.

2.3 Folheações sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Agora vamos olhar com mais cuidado a decomposição de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ resultante da dupla fibração 2.2.3.

Seja a folheação \mathcal{F}_1 definida sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$, derivada da fibração definida em 2.2.3

Temos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus (Q \cup \Pi) \cup Q \cong T_1(\Pi) \times (0, 1) \cup Q = F_+^{n+1}(2, 1) \times (0, 1) \sqcup Q = \bigcup_{p \in Q} \tilde{\pi}_1^{-1}(p) = \bigcup_{p \in Q} \{p\} \times \mathbb{R}^2 = \bigcup_{p \in Q} \widetilde{\nu Q_p}$. As folhas da primeira folheação \mathcal{F}_1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$ são as fibras de $\tilde{\pi}_1$, as quais são discos de dimensão 2 transversais a Q . Por construção, cada folha de \mathcal{F}_1 é transversal a todas as variedades $F_+^{n+1}(2, 1) \times t \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ para $t \in (0, 1)$, a interseção da folha com a variedade é uma copia de $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ e se aproxima a Π quando $t \rightarrow 1$. Vejamos outra construção para a folheação. Temos em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ a métrica de Fubini–Study. Do teorema 3.2.1 sabemos que a função normal \mathcal{N}_Q de Q induz um difeomorfismo entre o fibrado disco aberto de raio $\pi/2$ e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$. As folhas de \mathcal{F}_1 são as imagens dos discos normais. Desde que a conjugação $j : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma isometria, temos que a linha projetiva \mathcal{L} em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ intersecta Q em dois pontos conjugados se, e somente se, é ortogonal a Q , e isto acontece se, e somente se, \mathcal{L} pode ser definido por equações com coeficientes reais. Chamemos estas de $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linhas. Se dois $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linhas distintas se intersectam, a interseção é apenas um ponto em $\Pi \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Além de isso, cada $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linha \mathcal{L} atinge Π numa linha projetiva real, a qual é um equador de \mathcal{L} . Como todas

as linhas complexas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ são totalmente geodésicas, a linha projetiva real $\mathcal{L} \cap \Pi$ é uma geodésica em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, e encontra-se a igual distância $\pi/2$ de ambos pontos de interseção em $\mathcal{L} \cap Q$. Isto divide \mathcal{L} em dois discos de diâmetro máximo, ortogonal a Q . Pode-se demonstrar que através de cada ponto em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$ passa uma única $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linha, daí estas linhas folheiam este espaço. Portanto os discos abertos os quais as $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linhas se dividem enchem todo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$, são totalmente geodésicos em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e ortogonais a Q , assim provê uma decomposição do fibrado vetorial de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$, equivalente ao fibrado disco aberto do fibrado normal $\nu(Q)$ de Q em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Por construção, a clausura de cada folha em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é obtido anexando à folha a linha projetiva real $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \subset \Pi$, o qual é sua fronteira (o conjunto limite). Este círculo (a linha projetiva real em Π) é invariante por conjugação e é um equador da única $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linha, portanto é também uma geodésica fechada pela métrica Fubini–Study de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ (ver figura 2.5).

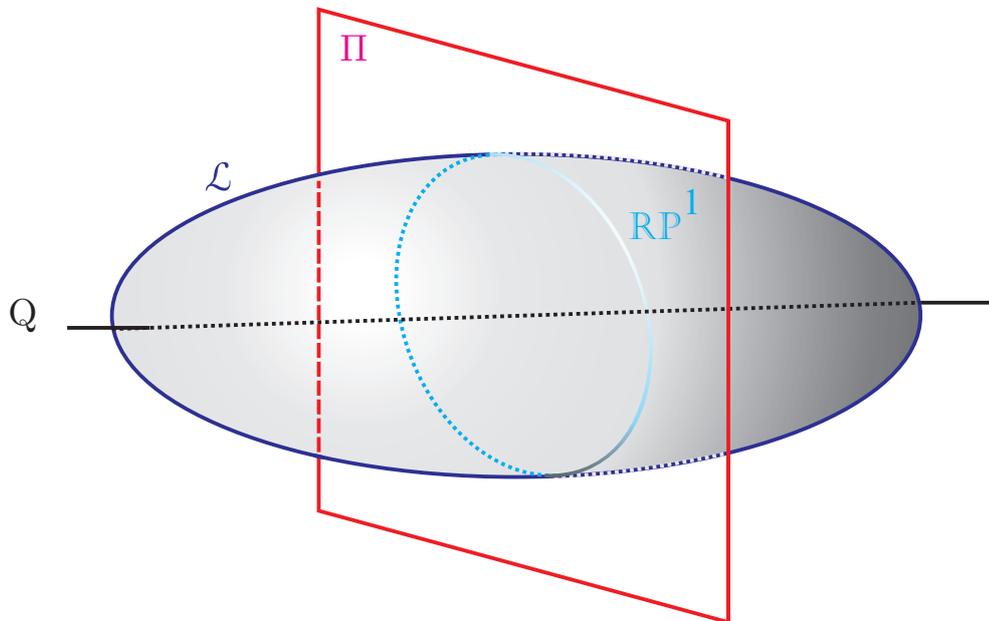


Figura 2.5: Folheação \mathcal{F} em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi$.

Seja a folheação \mathcal{F}_2 definida sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$. No caso da folheação \mathcal{F}_2 , suas folhas são fibras de π_2 , salvo isotopia. Elas são transversais a $F_+^{n+1}(2, 1) \times t$, para cada $t \in (0, 1)$, e estas folhas também são transversais a Π . Podemos definir esta folheação como segue. Dado $z \in \Pi$, seja \mathcal{P}_z o pencil de linhas projetivas reais em Π passando por z . Os vetores tangentes em z às linhas de este pencil são o espaço tangente de Π em z . Seja l_z uma de estas linhas do pencil \mathcal{P}_z . Sua complexificação é uma linha projetiva L_z em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ definido por uma equação com coeficientes reais, invariante sob conjugação. Isto implica que L_z intersecta Q em dois pontos w_1 e w_2 , os quais são conjugados; a interseção $L_z \cap Q$ é necessariamente ortogonal e l_z é um equador em L_z . Assim, existe um segmento \widehat{l}_z , metade

de uma linha projetiva real (um círculo) em L_z , juntando os pontos w_1 , z e w_2 . Esta linha é ortogonal a Π e a Q , é geodésica em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e tem comprimento π , pela minimalidade de L_z . Fazendo isto para todas as linhas no pencil \mathcal{P}_z , obtemos um n -disco aberto de raio $\pi/2$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, ortogonal a Π em z , enchido de geodésicas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de comprimento $\pi/2$ e intersectando Q ortogonalmente. Assim a função normal \mathcal{N}_Π é regular para vetores de norma $< \pi/2$. As folhas de \mathcal{F}_2 são a imagem sob \mathcal{N}_Π das fibras do fibrado disco aberto normal de $\Pi \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de raio $\pi/2$ (ver 2.6).

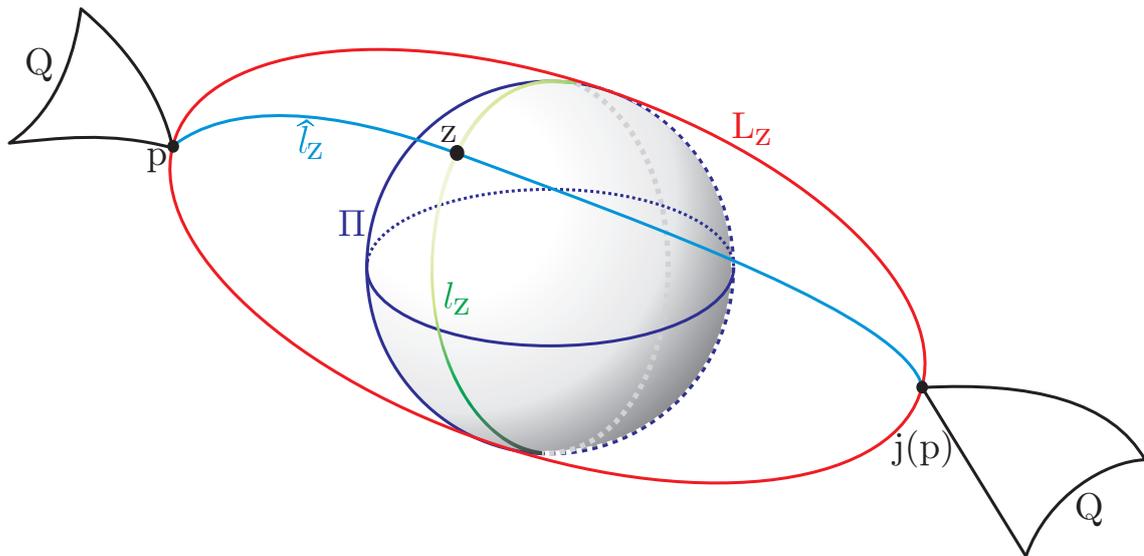


Figura 2.6: Folheação \mathcal{F} em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus Q$.

Pelo corolário 3.1.2 temos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$ é a fibra de Milnor $F := \{z_0^2 + \dots + z_n^2 = 1\}$ dividido pela monodromia que é dada pela multiplicação por -1 . A fibra F é o fibrado vetorial da n -esfera, assim ele tem uma folheação natural por folhas difeomorfas aos n -planos. Descrevamos estes planos. Se $Z = U + iV \in \mathbb{C}^{n+1}$, então $F = \{(U, V) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} / |U|^2 - |V|^2 = 1 \text{ e } U \perp V\}$. Se $|U| = 1$ então estamos na n -esfera e $|V| = 0$. Dado $U_0 \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ seu “espaço tangente” é o plano definido como segue: para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > 1$, seja $\mathbb{S}_\lambda(U_0) = \mathbb{S}^n \cap \langle \lambda U_0 \rangle$ a $(n-1)$ -esfera no n -plano afim perpendicular a λU_0 , se $z = \lambda U_0 + iV \in \mathbb{S}_r^{n-1} \cap T_{\lambda U_0} \mathbb{S}_\lambda^n$, então $r = \sqrt{\lambda^2 - 1}$. E se $z = U + iV \in F$, então $v \in T_U \mathbb{S}^n_{\sqrt{|u|^2 - 1}}$, $U + V \in \mathbb{S}^{n-1}_{\sqrt{|U|^2 - 1}} \cap T_U \mathbb{S}^n_{|U|}$. O raio da esfera $\mathbb{S}_\lambda(U_0)$ cresce com λ , mais se $\lambda = 1$ a correspondente esfera é um ponto só. Ver figura 2.7.

Seja $U_0 \in \mathbb{S}^n$, denotemos por $\mathcal{L}(U_0) = \bigcup_{\lambda \geq 1} \mathbb{S}_\lambda(U_0) \cong \mathbb{R}^n$, a união de todas estas $(n-1)$ -esferas $\mathbb{S}_\lambda(U_0)$, para todo $\lambda \geq 1$. Por tanto $\lambda U_0 + V \in \mathcal{L}(U_0)$ se e só se $\lambda U_0 + iV \in F$. Então $\mathcal{L}(U_0)$ é uma copia de \mathbb{R}^n mergulhado em F como uma componente do hiperboloide de duas folhas consistente de $\mathcal{L}(U_0) \cup \mathcal{L}(-U_0)$. A função monodromia intercambia estas duas folhas do hiperboloide, pois $F/\mathbb{Z}_2 = \{\lambda U_0 + iV, -\lambda U_0 + iV \in \mathcal{L}(U_0)\} \cap \mathcal{L}(-U_0)$, assim suas imagens em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma variedade difeomorfa a um plano, que denotamos por

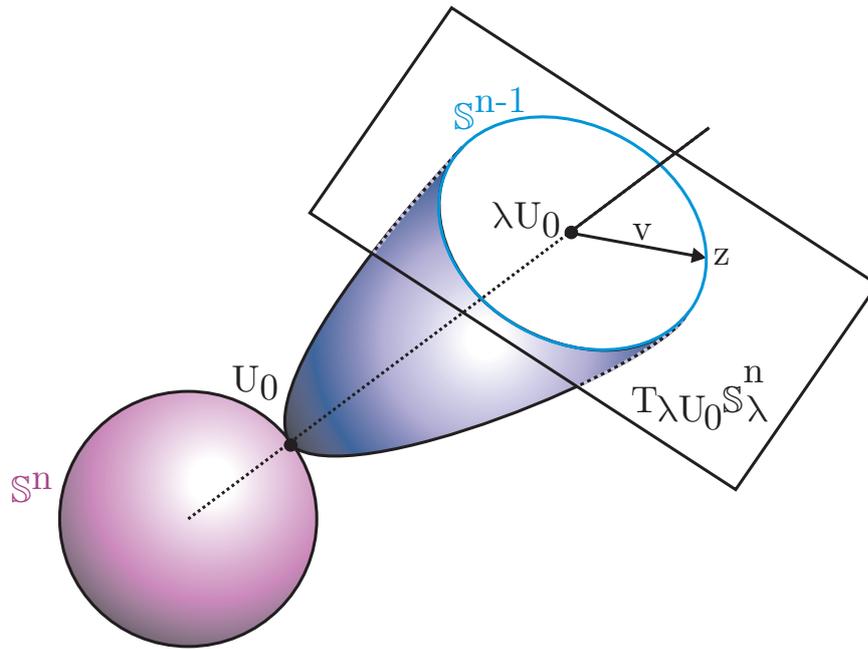


Figura 2.7: Descrição do conjunto $\mathcal{L}(U_0)$.

$\mathcal{F}(U_0) = \mathcal{L}(U_0) \cap \mathcal{L}(-U_0)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}^n$. Temos que $F/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{S}^n/\sim \times \mathbb{R}^n = \Pi \times \mathbb{R}^n = \nu\Pi$. Pela unicidade da vizinhança tubular, estas são as folhas de \mathcal{F}_2 , salvo isotopia.

Temos assim que as folhas de \mathcal{F}_2 aproximam-se a Q . De fato, denotemos por $\mathbb{S}'_\lambda(U_0)$ a imagem da esfera $\mathbb{S}_\lambda(U_0) \subset \mathcal{F}(U_0)$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Seja $\gamma_\lambda(U_0)$ a interseção da esfera unitária $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ com metade do cone real sobre $\mathbb{S}_\lambda(U_0)$ com vértice em 0. A imagem de $\gamma_\lambda(U_0)$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é também $\mathbb{S}'_\lambda(U_0)$. A esfera $\gamma_\lambda(U_0)$ é o conjunto de vetores $(\frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda^2-1}}U_0, \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2-1}}V)$ com $(\lambda U_0, V) \in \mathbb{S}_\lambda(U_0)$. Como $|V| = \sqrt{\lambda^2 - 1}$

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda(U_0) &= \{(c\lambda U_0, cV); |c(\lambda(U_0 + V))| = 1\} \\ &= \{(c\lambda U_0, cV); c = 1/\sqrt{\lambda^2 + |v|^2} = 1/\sqrt{2\lambda^2 - 1}\} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda^2 - 1}} \right) (\lambda U_0, V); (\lambda U_0, V) \in \mathbb{S}_\lambda(U_0) \right\} \end{aligned}$$

Portanto o limite de $\gamma_\lambda(U_0)$ é o conjunto de vetores $(\frac{1}{\sqrt{2}}U_0, \frac{1}{\sqrt{2}}v)$ onde v é $V/|V|$, com V como acima. Desde que os vetores $\frac{1}{\sqrt{2}}U_0$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}v$ tem igual comprimento, a imagem $\Lambda(U_0)$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de este conjunto limite esta em Q , e é uma $(n-1)$ -esfera. Por continuidade, o conjunto limite de $\mathbb{S}'_\lambda(U_0)$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é também $\Lambda(U_0)$. Desde que o conjugado do vetor (U, V) é $(U, -V)$, os conjuntos $\gamma_\lambda(U_0)$ e seus conjuntos limites, são invariantes sob conjugação. Por isso $\Lambda(U_0)$ é também invariante por conjugação. Temos assim demonstrado a seguinte proposição.

Proposição 2.3.1. *A dupla fibração (3.2.2) induz dois folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 tais que:*

- (i) A primeira folheação \mathcal{F}_1 é definida sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$, suas folhas são copias mergulhadas de \mathbb{R}^2 ortogonais a Q , as quais são as imagens da função normal de Q das fibras do fibrado disco normal de Q de raio menor que $\frac{\pi}{2}$. O fecho de cada tal folha é um 2-disco fechado que encontra Π ortogonalmente em uma linha projetiva a qual é uma geodésica fechada em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Para cada par de pontos conjugados em Q , as correspondentes folhas são juntadas colando elas naturalmente ao longo de seu conjunto limite em Π , formando uma linha projetiva complexa definida por coeficientes reais.
- (ii) A segunda folheação \mathcal{F}_2 é definida sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - Q$; suas folhas são n -discos mergulhados, ortogonais a Π , as quais são as imagens da função normal de Π das fibras do fibrado disco normal de Π de raio menor que $\frac{\pi}{2}$. O fecho de cada tal folha é um n -disco fechado que encontra Q ortogonalmente em uma $(n-1)$ -esfera, invariante sob conjugação complexa.

Aqui, por conjunto limite de uma folha \mathcal{L} queremos dizer a diferença $\overline{\mathcal{L}} - \mathcal{L}$, onde $\overline{\mathcal{L}}$ é seu fecho topológico.

Proposição 2.3.2. *O espaço projetivo real $\Pi \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, consistente de pontos em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ com coordenadas reais homogêneas, é o conjunto de pontos focais da quádrlica Q definido por o polinômio de Fermat $z_0^2 + \dots + z_n^2 = 0$. Reciprocamente, a quádrlica Q é o conjunto de pontos focais de Π .*

2.4 A ação de $SO(n+1, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Consideremos a ação de $SO(n+1, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Esta ação deixa invariante Q e também por isometrias com respeito à métrica de Fubini–Study. Uma isometria de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ que deixa Q invariante necessariamente carrega o conjunto de pontos focais de Q nele mesmo. Por isso Π é também um conjunto invariante pela ação de $SO(n+1, \mathbb{R})$. Já sabemos que Q é a Grassmanniana $G_{n+1,2} \cong SO(n+1, \mathbb{R}) / (SO(n-1, \mathbb{R}) \times SO(2, \mathbb{R}))$, assim a ação de $SO(n+1, \mathbb{R})$ é transitivo sobre Q . Assim Q é uma órbita só, e também é Π . Vejamos a órbita de um ponto $w \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \cup \Pi)$. Afirmamos que sua órbita é a variedade $(F_+^{n+1}(2, 1) \times t)$ passando por w . Para isto usemos a função normal

$$\mathcal{N}_Q : \nu(Q) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n.$$

Esta função é um difeomorfismo do fibrado disco aberto em $\nu(Q)$ de raio $\frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n - \Pi$ e a imagem das fibras são as folhas de \mathcal{F}_1 . Por isso cada ponto $w \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n - (Q \cup \Pi)$ está na imagem da função normal \mathcal{N}_Q , isto é, existe um único vetor $v_w \in \nu(Q)$ normal a Q , tal que $w = \mathcal{N}_Q(v_w)$; a norma de v_w é igual a distância $d_w = d(w, Q)$ de w a Q , a qual é positiva e menor que $\pi/2$. Isto é, w corresponde, via \mathcal{N}_Q , a um ponto no fibrado da

esfera $S_{d_w}(\nu(Q))$ de raio d_w em $\nu(Q)$. As $SO(n+1, \mathbb{R})$ -órbitas \mathcal{O}_w de w é a imagem do fibrado na esfera, isto é, $\mathcal{O}_w = \mathcal{N}_Q(S_{d_w}(Q))$. Vemos que o grupo $SO(n+1, \mathbb{R})$ também atua sobre o fibrado tangente $T(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ via o diferencial, esta ação preserva a separação $C^\infty T(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)|_Q \cong TQ \oplus \nu(Q)$. Isto induz uma ação de $SO(n+1, \mathbb{R})$ sobre o fibrado normal $\nu(Q)$ de Q , e esta ação é isométrica e comuta com \mathcal{N}_Q . Logo as $SO(n+1, \mathbb{R})$ -órbitas são todas as variedades $(F_+^{n+1}(2, 1) \times t)$, para algum $t \in (0, 1)$, com duas órbitas excepcionais as quais são Q e Π , correspondentes a $t = 0$ e $t = 1$. Por [8:1.1], isto implica que Q e Π são subvariedades mínimas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, Q é uma subvariedade complexa. As órbitas de dimensão máxima, que neste caso são difeomorfas a $F_+^{n+1}(2, 1)$, chamadas de *órbitas principais*.

Então temos que cada $SO(n+1, \mathbb{R})$ -órbita em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ está a uma distância constante de Q e também de Π , e estas distâncias variam de 0 a $\pi/2$. Isto demonstra que o espaço de $SO(n+1, \mathbb{R})$ -órbitas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, com as duas orbitas especiais correspondentes aos pontos extremos do intervalo. Consideremos a geodésica \widehat{l}_z descrita anteriormente na construção da folheação \mathcal{F}_2 . Na verdade, estamos interessados na metade do segmento geodésico. Para a construção desta “metade do segmento geodésico”, denotemos por \check{l} , podemos empezar com qualquer $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linha projetiva complexa \mathcal{L} . Esta linha intersecta Π numa linha projetiva real, e esta encontra Q ortogonalmente em dois pontos conjugados, digamos w e \bar{w} . Agora escolhemos $z_0 \in \Pi \cap \mathcal{L}$. Então \check{l} é a geodésica de comprimento $\frac{\pi}{2}$ em \mathcal{L} unindo os pontos z_0 e w , e é uma geodésica em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ porque \mathcal{L} é totalmente geodésica. Esta geodésica \check{l} começa em z_0 e termina em $w \in Q$. Por isso ela encontra cada $SO(n+1, \mathbb{R})$ -órbita ortogonalmente em exatamente um ponto, desde que as órbitas são os conjuntos de nível da função distância a Π . Por isso \check{l} parametriza as órbitas de $SO(n+1, \mathbb{R})$. Isto mostra que a $SO(n+1, \mathbb{R})$ -ação sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma ação isométrica hiperpolar de cohomogeneidade 1. Cohomogeneidade 1 significa que as órbitas principais têm codimensão 1. Uma ação isométrica é chamada de *polar* se existe uma subvariedade conexa e fechada Σ que intersecta todas as órbitas ortogonalmente, em nosso caso a geodésica completa em \mathcal{L} determinado por \check{l} . Tal variedade é chamado de *seção*. Se podemos escolher tal seção que seja também plana, dizemos que a ação é hiperpolar, nosso caso a seção é uma geodésica.

Assim temos demonstrado o seguinte:

Teorema 2.4.1. (i) *A ação natural $SO(n+1, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é isométrico, hiperpolar de cohomogeneidade 1, com espaço de órbitas o intervalo $[0, \pi/2]$. Uma seção para esta ação (isto é, uma subvariedade que intersecta transversalmente cada órbita em exatamente um ponto) pode ser construída considerando algum (qualquer) $\mathbb{C}\mathbb{R}$ -linha \mathcal{L} , escolhendo um ponto $z \in \mathcal{L} \cap \Pi$ e tomando a geodésica (o círculo) em \mathcal{L} que passa através de z e os dois pontos onde \mathcal{L} encontra Q .*

- (ii) *Existem três tipos de órbitas: dois órbitas especiais, Q e Π , as quais correspondem a os pontos finais $\{0, \pi/2\}$, e as órbitas principais, as quais são copias da variedade bandeira parcial,*

$$F_+^{n+1}(2, 1) \cong SO(n+1, \mathbb{R}) / (SO(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2),$$

de 2-planos orientados em \mathbb{R}^{n+1} e linhas em este espaço.

A variedade $F_+^{n+1}(2, 1)$ é difeomorfa ao fibrado normal esfera unitária de Q em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, e também difeomorfa ao fibrado tangente esfera unitária de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Cada uma das duas órbitas especiais é o conjunto de pontos focais do outro, e eles são subvariedades mínimas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Referências

- [1] Lionel Bérard-Bergery. Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein. In *Institut Élie Cartan, 6*, volume 6 of *Inst. Élie Cartan*, pages 1–60. Univ. Nancy, Nancy, 1982.
- [2] C. Camacho and A.L. Neto. *Geometry Theory of Foliations*. Projeto Euclides. Birkhäuser Boston, 1984.
- [3] A. Verjovsky D.T. Lê, J. Seade. Quadrics, orthogonal actions and involutions in complex projective spaces. *Enseign. Math.*, 2:173–203, 2003.
- [4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.
- [5] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. 2009.
- [7] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1976.
- [8] Wu-yi Hsiang and H. Blaine Lawson, Jr. Minimal submanifolds of low cohomogeneity. *J. Differential Geometry*, 5:1–38, 1971.
- [9] A.I. Kostrikin and I.U.I. Manin. *Linear algebra and geometry*. Algebra logic and applications/R.Gobel. Gordon and Breach Science Publishers, 1997.
- [10] S. Lefschetz. *Algebraic topology*. Colloquium Publications - American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1942.
- [11] W.S. Massey. *A basic course in algebraic topology*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1991.
- [12] J.W. Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. (Am-61). Annals of Mathematics Studies : No. 61. University Press, 1968.
- [13] Paul S. Mostert. On a compact Lie group acting on a manifold. *Ann. of Math. (2)*, 65:447–455, 1957.
- [14] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

- [15] J. Seade. *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*. Progress in mathematics. Birkhäuser Verlag, 2006.
- [16] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971.