O PRODUTO SEMI-CRUZADO E A DINÂMICA TOPOLÓGICA

João Alfredo Pereira Caminada

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Antônio Roberto da Silva

Rio de Janeiro
Julho de 2013

O PRODUTO SEMI-CRUZADO E A DINÂMICA TOPOLÓGICA

João Alfredo Pereira Caminada

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Examinada por:

Prof. Antônio Roberto da Silva, D.Sc.(presidente)

Prof. Nilson da Costa Bernardes Junior, D.Sc.

Prof. Alex Farah Pereira, D.Sc.

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Júnior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2013

C183p Caminada, João Alfredo Pereira.
O produto semi-cruzado e a dinâmica topológica / João Alfredo Pereira Caminada. -- Rio de Janeiro, 2013.
vi, 58 f.; 30 cm.

Orientador: Antônio Roberto da Silva

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2013.
Referências: f. 59

1. Dinâmica topológica. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Álgebra de operadores. I. Silva, Antônio Roberto da (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDD 512.55

Resumo

Estudamos as álgebras do produto cruzado e do produto semi-cruzado e demonstramos que dois sistemas dinâmicos são conjugados se, e somente se, seus produtos semi-cruzados são algebricamente isomorfos.

Palavras-chave: Produto Semi-Cruzado, Produto Cruzado, Dinâmica Topológica

Abstract

We study the crossed product algebra and the semi-crossed algebra and prove that two dynamical systems are conjugated if and only if their semi-crossed products are algebraically isomorphic.

Key-words: Semi-Crossed Product, Crossed Product, Topological Dynamics

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma relação entre o produto semi-cruzado e a dinâmica topológica. Mais precisamente, dizemos que um sistema dinâmico é um par (X, φ), onde X é um espaço localmente compacto e φ é uma aplicação em X contínua e própria. Se φ for homeomorfismo, contruímos uma C^*-álgebra associada ao sistema dinâmico chamada de produto cruzado e denotada por $C_0(X) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$. No caso em que φ não é bijetiva construímos uma álgebra de Banach associada ao sistema dinâmico, denotada por $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$ e chamada de produto semi-cruzado. Demonstramos que dois sistemas dinâmicos são conjugados se, e somente se, seus produtos semi-cruzados forem algebricamente isomorfos.

A noção de produto cruzado tem sua origem histórica nos trabalhos de Murray e Von Neumann, e apesar de já ser um tema clássico, continua sendo um tópico ativo de pesquisa. Como grande parte da teoria de C^*-álgebras, C^*-sistemas dinâmicos e o produto cruzado aparecem naturalmente no estudo de mecânica quântica como mostrado em [11], e esta é uma das motivações da introdução destes objetos no mundo de álgebra de operadores. Outra motivação para o estudo de tais álgebras é apresentada em [12], onde é demonstrado que o Produto Cruzado nos devolve as C^*-álgebras de grupo, que aparecem em análise harmônica, quando a C^*-álgebra em questão é o espaço $\mathbb{C}$ dos números complexos. Neste trabalho a motivação mais importante consiste em olhar para C^*-dinâmicos como generalizações de sistemas dinâmicos clássicos e definir o Produto Cruzado como uma realização algébrica destes sistemas como será devidamente explicado no Capítulo 1.

O produto cruzado apesar de ser uma ferramenta poderosa, não abrange o caso em que o sistema dinâmico é não conservativo. Com o intuito de sanar esta deficiência, recorremos ao produto semi-cruzado. O produto semi-cruzado tem origem nos trabalhos de Arveson e Josephson, mas foi apresentado em sua forma atual por Peters em [10]. Neste trabalho além de definir o produto semi-cruzado Peters mostrou que dados dois sistemas dinâmicos (X, φ) e (Y, ψ) com X e Y compactos e φ e ψ livres de pontos fixos, então (X, φ) é conjugado a (Y, ψ) se, e somente se, $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$ e $C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N}$ são isometricamente isomorfas. Posteriormente em [5], Hadwin e Hoover conseguiram retirar a hipótese sobre os pontos fixos das aplicações e a necessidade do isomorfismo ser isométrico. Finalmente, Davidson e Katsoulis publicaram no artigo [2] uma demonstração no caso geral e que é o principal teorema demonstrado neste texto.

A seguir indicaremos como o trabalho se organiza.

No Capítulo 1 partindo da noção de sistemas dinâmicos construímos o Produto Cruzado em sua forma mais geral. Definimos na Seção 1.2 C^*-sistemas dinâmicos, e os caracterizamos quando a C^*-álgebra em questão é comutativa. Na Seção 1.3 introduzimos as representações covariantes. Na Seção 1.4 definimos o produto cruzado. Na Seção 1.5 apresentamos alguns exemplos de produtos cruzados.

No Capítulo 2 introduzimos a noção de produto semi-cruzado e mostramos o teorema principal. Na Seção 2.2 discutimos a ideia de álgebras opostas que terá que ser usada na sequência. Na Seção 2.3 apresentamos as representações covariantes isométricas e a definição do produto semi-cruzado, além de obtermos uma relação entre o produto semi-cruzado e o produto cruzado. Na Seção 2.4 demonstramos que se dois sistemas dinâmicos são conjugados, então seus produtos semi-cruzados são isomericamente isomorfos. Na Seção 2.5 introduzimos a classe de álgebras de conjugação topológica, mostramos que o produto semi-cruzado faz parte desta classe e definimos ainda o que são discos analíticos. Na Seção 2.6 introduzimos os lápis de representações. Finalmente, na Seção 2.7 demonstramos que se os produtos semi-cruzados são isomorfos, então os respectivos sistemas dinâmicos são conjugados.

Capítulo 1

Produto Cruzado

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a ação de grupos topológicos localmente compactos em C^*-álgebras via automorfismos. O conjunto de dados formado pela C^*-álgebra, pelo grupo topológico e por sua ação será chamado de um C^*-sistema dinâmico. Estudaremos as chamadas representações covariantes do C^*-sistema dinâmico e a partir delas construiremos uma C^*-álgebra denominada de Produto Cruzado, álgebra esta que codifica a ação do grupo na C^*-álgebra original. Os conceitos e resultados básicos não encontrados aqui podem ser encontradas em [6], [3], [1], [8] e [12].

1.2 Sistemas Dinâmicos e C^*sistemas Dinâmicos

Salvo menção do contrário, todas as álgebras são por definição complexas.

Começaremos definindo o objeto básico do nosso estudo neste trabalho.

Definição 1.2.1. *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff e $\varphi : X \longrightarrow X$ uma função contínua e própria. Chamamos o par (X, φ) de um* ***sistema dinâmico****.*

Queremos entender agora como esse conceito se traduz no nível algébrico. Para isto, consideremos a álgebra de funções complexas contínuas em X que se anulam no infinito munida com a norma do supremo, que denotaremos por $C_0(X)$.

Observação 1.2.2. *Convencionamos que $*$-endomorfismos, ações de grupos topológicos e suas representações são contínuos por definição.*

Proposição 1.2.3. *A função $\varphi : X \longrightarrow X$ induz um $*$-endomorfismo em $C_0(X)$ via a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \alpha : C_0(X) & \longrightarrow & C_0(X) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

Se φ for sobrejetiva, então α é injetiva. Se φ é homeomorfismo, então α é um $*$-automorfismo.

Demonstração. Primeiramente, note que a aplicação α está bem definida. De fato, como φ é própria, temos que $f \circ \varphi \in C_0(X)$, $\forall f \in C_0(X)$. Mostraremos então que α é um $*$-endomorfismo. Para tal, considere f, $g \in C_0(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in X$. Temos

$$\alpha(f + \lambda g)(x) = (f + \lambda g)(\varphi(x)) = f(\varphi(z)) + \lambda g(\varphi(x)) = \alpha(f)(x) + \lambda\alpha(g)(x)$$

$$\alpha(fg)(x) = (fg)(\varphi(x)) = f(\varphi(x))g(\varphi(x)) = \alpha(f)(x)\alpha(g)(x) = (\alpha(f)\alpha(g))(x)$$

$$(\alpha(f^*))(x) = f^*(\varphi(x)) = \overline{f(\varphi(x))} = \overline{\alpha(f)(x)} = \alpha(f)^*(x).$$

A continuidade do endomorfismo segue, pois $\varphi(X) \subset X$, e portanto,

$$||\alpha(f)|| = \sup_{x\in X} |f(\varphi(x))| = \sup_{y\in\varphi(X)} |f(y)| \leq \sup_{y\in X} |f(y)| = ||f|| \, .$$

Suponha que φ é sobrejetiva. A desigualdade acima se torna uma igualdade e, assim, α é uma isometria, e portanto injetiva.

Suponha agora que φ é um homeomorfismo. Definindo o $*$-endomorfismo

$$\beta : C_0(X) \longrightarrow C_0(X),$$

onde

$$\beta(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x)), \quad \forall f \in C_0(X) \quad \text{e} \quad x \in X,$$

e notando que $\alpha(\beta(f)) = \beta(\alpha(f)) = f$, $\forall f \in C_0(X)$, segue que α é $*$-automorfismo.

□

Observação 1.2.4. *No caso em que X é compacto, $C_0(X) = C(X)$, onde $C(X)$ é o espaço das funções contínuas em X.*

Seja agora $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$. Em Sistemas Dinâmicos, estamos interessados em estudar a ação do semi-grupo $\mathbb{N}$ em X, dada por $n.x = \varphi^n(x)$, para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Pela proposição anterior esta ação induz uma ação de $\mathbb{N}$ em $C_0(X)$ via $*$-endomorfismos, dada por

$$(n.f)(x) = \alpha^n(f)(x) = f(\varphi^n(x)), \quad \forall f \in C_0(X) \quad \text{e} \quad \forall x \in X.$$

A Proposição 1.2.3 implica ainda que se a função φ é um homeomorfismo, podemos também estudar a ação de $\mathbb{Z}$ em X dada por $n.x = \varphi^n(x)$ que induz a ação de $\mathbb{Z}$ em $C_0(X)$ via $*$-automorfismos dada por

$$(n.f)(x) = \alpha^n(f)(x) = f(\varphi^n(x)), \quad \forall f \in C_0(X) \quad \text{e} \quad \forall x \in X$$

ou a ação dada por

$$(n.f)(x) = \alpha^n(f)(x) = f(\varphi^{-n}(x)), \quad \forall f \in C_0(X) \quad \text{e} \quad \forall x \in X.$$

Grande parte deste trabalho se dedicará ao estudo dos casos citados acima. Contudo a construção que faremos no presente capítulo pode ser feita em um contexto com grupos mais gerais. Para isto, precisamos de alguns resultados preliminares que serão apresentados agora.

Definição 1.2.5. *Seja A uma C^*-álgebra. Denotamos o conjunto dos $*$-automorfismos de A por Aut(A) e o munimos com a topologia da convergência pontual, ou seja, a topologia gerada pela base*

$$\mathcal{U}(\alpha, a, \varepsilon) = \{\beta \in A : ||\beta(a) - \alpha(a)|| < \varepsilon\},$$

para cada $\alpha \in Aut(A)$, cada $a \in A$ e cada $\varepsilon > 0$.

O seguinte critério de convergência de redes é útil.

Lema 1.2.6. *Seja A uma C^*-álgebra. Uma rede $(\alpha_i)_{i\in I}$ em $Aut(A)$ converge para $\alpha \in Aut(A)$ se, e somente se, $\alpha_i(a) \to \alpha(a)$ $\forall a \in A$.*

Demonstração. Suponha que a rede $(\alpha_i)_{i\in I}$ em $\mathrm{Aut}(A)$ convirja para $\alpha \in Aut(A)$ e fixe $a \in A$. Se $\varepsilon > 0$, tome $i_0 \in I$ tal que se $i \geq i_0$ então $\alpha_i \in \mathcal{U}(\alpha, a, \varepsilon)$, onde

$$\mathcal{U}(\alpha, a, \varepsilon) = \{\beta \in A : ||\beta(a) - \alpha(a)|| < \varepsilon\}.$$

Logo se $i > i_0$ então $||\alpha_i(a) - \alpha(a)|| < \varepsilon$. Portanto, $\alpha_i(a) \to \alpha(a)$.

Suponha que $\alpha_i(a) \to \alpha(a)$ $\forall a \in A$. Tome agora um elemento básico da topologia de $\mathrm{Aut}(A)$, digamos $\mathcal{U}(\beta, b, \varepsilon)$, que contenha α. Definindo

$$\delta = \varepsilon - ||\beta(b) - \alpha(b)||$$

segue que $\mathcal{U}(\alpha, b, \delta) \subset \mathcal{U}(\beta, b, \varepsilon)$. Considere $i_0 \in I$ tal que $i > i_0$ implique que $||\alpha_i(b) - \alpha(b)|| < \delta$. Obtemos que se $i > i_0$ então $\alpha_i \in \mathcal{U}(\alpha, b, \delta)$, e consequentemente, $\alpha_i \in \mathcal{U}(\beta, b, \varepsilon)$. Assim, $\alpha_i \to \alpha$ como queríamos demonstrar. □

Proposição 1.2.7. *Seja A uma C^*-álgebra. Então o espaço $Aut(A)$ é um grupo topológico.*

Demonstração. Que $\mathrm{Aut}(A)$ é um grupo e que pontos são fechados em $\mathrm{Aut}(A)$ é imediato. Mostraremos que a multiplicação e a inversão são operações contínuas.

Suponha que as redes $(\alpha_i)_{i\in I}$ e $(\beta_i)_{i\in I}$ em $\mathrm{Aut}(A)$ convirjam para α e β, respectivamente. Fixado $a \in A$, usando que $*$-automorfismos preservam normas, temos que

$$\begin{aligned} ||\beta_i(\alpha_i(a)) - \beta(\alpha(a))|| &\leq ||\beta_i(\alpha_i(a)) - \beta_i(\alpha(a))|| + ||\beta_i(\alpha(a)) - \beta(\alpha(a))|| \\ &= ||\alpha_i(a) - \alpha(a)|| + ||\beta_i(\alpha(a)) - \beta(\alpha(a))|| \to 0. \end{aligned}$$

Daí segue que a multiplicação em $\mathrm{Aut}(A)$ é contínua pelo Lema 1.2.6 e pelo fato de que redes convergem no espaço produto se, e somente se, cada uma de suas coordenadas converge.

Sob as mesmas considerações de antes temos que

$$\big|\big|\alpha_i^{-1}(a) - \alpha^{-1}(a)\big|\big| = \big|\big|\alpha_i(\alpha_i^{-1}(a)) - \alpha_i(\alpha^{-1}(a))\big|\big| = \big|\big|a - \alpha_i(\alpha^{-1}(a))\big|\big| \to 0.$$

Mostrando que a inversão é uma operação contínua em $\mathrm{Aut}(A)$. □

Sejam agora G um grupo topológico localmente compacto e X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Suponha que G aja continuamente em X pela esquerda. Para cada $s \in G$ obtemos um homeomorfismo de X dado por $x \mapsto s.x$. Temos um homomorfismo induzido de G em $\mathrm{Aut}(C_0(X))$

$$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(C_0(X))$$

definido por

$$\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}.x). \tag{1.1}$$

Note que

$$\alpha_{sr}(f)(x) = f((sr)^{-1}.x) = f(r^{-1}s^{-1}.x) = \alpha_r(f)(s^{-1}.x) = \alpha_s(\alpha_r(f))(x); \tag{1.2}$$

e se e é a identidade de G, temos $\alpha_e = id$, onde id é a identidade em $\mathrm{Aut}(C_0(X))$.

Observação 1.2.8. *A ação acima foi definida à esquerda por convenção, o que nos força a usar a definição 1.1 para garantir a validade da fórmula 1.2.*

Observação 1.2.9. *Nos restringimos a grupos localmente compactos devido à existência de medidas de Haar que serão essenciais mais a frente.*

Lema 1.2.10. *Suponha que o grupo topológico localmente compacto G aja pela esquerda em X, um espaço localmente compacto de Hausdorff. O homomorfismo α induzido, de G em $Aut(C_0(X))$ é contínuo.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $||\alpha_s(f) - f|| \to 0$ quando $s \to e$. Se isto não se verificasse, então existiriam $\varepsilon > 0$, uma rede em G, $s_i \to e$ e uma rede x_i em X tais que

$$|f(s_i^{-1}.x_i) - f(x_i)| \geq \varepsilon \quad \forall i. \tag{1.3}$$

Considere o conjunto compacto $K = \{x \in X; |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Para que 1.3 seja satisfeita, devemos ter que $x_i \in K$ ou $s_i^{-1}.x_i \in K$. Como, a partir de um certo índice, $s_i \in V$ uma vizinhança compacta de e, usando a continuidade da ação, concluímos que a partir de um certo índice, x_i pertence, em ambos os casos, ao conjunto compacto $V.K = \{s.x : s \in V \text{ e } x \in K\}$. Podemos assumir, tomando sub-redes se necessário, que $x_i \to x_0$ com $x_0 \in V.K$. Desta forma, $s_i^{-1}.x_i \to x_0$, o que contradiz 1.3. □

Definição 1.2.11. *Um C^*-**sistema dinâmico** é uma tripla (A, G, α), onde A é uma C^*-álgebra, G é um grupo localmente compacto e α é um homomorfismo contínuo de G em Aut(A). Denotaremos $\alpha(g)$ como α_g para $g \in G$.*

Exemplo 1. *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff e $\varphi : X \longrightarrow X$ um homeomorfismo. Considere a tripla $(C_0(X), \mathbb{Z}, \alpha)$, onde $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(C_0(X))$ é tal que*

$$\alpha_n(f)(x) = f(\varphi^{-n}(x)) \quad \forall f \in C_0(X), \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Estamos considerando, como é usual, $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta. Como, para $n, m \in \mathbb{Z}$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha_{n+m}(f)(x) &= f(\varphi^{-(n+m)}(x)) = f(\varphi^{-n}(\varphi^{-m}(x))) \\ &= \alpha_n(f)(\varphi^{-m}(x)) = \alpha_m(\alpha_n(f))(x), \end{aligned}$$

concluímos que a tripla $(C_0(X), \mathbb{Z}, \alpha)$ é um C^*-sistema dinâmico.

Exemplo 2. *Mais geralmente, como vimos acima, se um grupo localmente compacto G age continuamente em um espaço X, temos o C^*-sistema dinâmico $(C_0(X), G, \alpha)$, onde*

$$\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}.x).$$

Finalizaremos esta seção, caracterizando os C^*-sistemas dinâmicos advindos de C^*-álgebras comutativas.

Definição 1.2.12. *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Chamaremos de Homeo(X), o espaço dos homeomorfismo de X em X com a topologia gerada pela subbase*

$$\mathcal{U}(K, K', V, V') = \{\varphi \in Homeo(X); \varphi(K) \subset V \quad e \quad \varphi^{-1}(K') \subset V'\}$$

onde K e K' são subconjuntos compactos de X e onde V e V' são subconjuntos abertos de X.

Lema 1.2.13. *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Uma rede $(\varphi_i)_{i\in I}$ em Homeo(X) converge para φ se, e somente se, para todo ponto $x \in X$ e toda rede $(x_i)_{i\in I}$ em X, convergindo para x, tenhamos que $\varphi_i(x_i) \to \varphi(x)$ e $\varphi_i^{-1}(x_i) \to \varphi^{-1}(x)$.*

Demonstração. Suponha que $\varphi_i \to \varphi$ e $x_i \to x$. Sejam V e V' vizinhanças abertas de $\varphi(x)$ e $\varphi^{-1}(x)$, respectivamente. Existe, pela continuidade de φ e φ^{-1} e pela compacidade local de X, vizinhança compactas de K de x tal que

$$\varphi(K) \subset V \quad \text{e} \quad \varphi^{-1}(K) \subset V'.$$

Segue que $\varphi \in \mathcal{U}(K, K, V, V')$. Por hipótese, existe $i_0 \in I$ para o qual $i > i_0$ implica que $x_i \in K$ e $\varphi_i \in \mathcal{U}(K, K, V, V')$. Concluímos, assim, que se $i > i_0$ temos que $\varphi_i(x_i) \in V$ e $\varphi_i^{-1}(x_i) \in V'$.

Assuma, agora, que $x_i \to x$ implique que $\varphi_i(x_i) \to \varphi(x)$ e $\varphi_i^{-1}(x_i) \to \varphi^{-1}(x)$, mas suponha, por contradição, que $\varphi_i \not\to \varphi$. Então passando a uma subrede, se necessário, podemos assumir que existem K, K' compactos e V, V' abertos, tais que $\varphi \in \mathcal{U}(K, K', V, V')$, mas $\varphi_i \notin \mathcal{U}(K, K', V, V')$ para todo $i \in I$. Isto implica na existência de uma rede x_i em $K \cap K'$, satisfazendo que $\varphi_i(x_i) \notin V$ e $\varphi_i^{-1}(x_i) \notin V'$. Tomando subredes uma vez mais, assumimos que $x_i \to x$. Por hipótese, $\varphi_i(x_i) \to \varphi(x) \in V$ e $\varphi_i^{-1}(x_i) \to \varphi^{-1}(x) \in V'$. □

Uma aplicação imediata do lema anterior mostra o seguinte resultado:

Lema 1.2.14. *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Com a topologia introduzida, Homeo(X) é um grupo topológico com respeito a operação de composição de funções.*

O seguinte resultado mostra que todos os automorfismos de uma C^*-álgebra comutativa são da forma da Proposiçao 1.2.3.

Lema 1.2.15. *Se $\alpha \in Aut(C_0(X))$ então existe $\varphi \in Homeo(X)$ tal que $\alpha(f)(x) = f(\varphi(x))$ para todo $f \in C_0(X)$. Mais ainda a aplicação $\alpha \mapsto \varphi$ é um isomorfismo de grupos topológicos.*

Demonstração. Seja Ω o espaço dos homomorfismos de $C_0(X)$ em $\mathbb{C}$ munido da topologia fraca-$*$ herdada de $C_0(X)^*$. Considere o homeomorfismo $x \mapsto ev_x$, onde

$$ev_x(f) = f(x), \quad \forall f \in C_0(X).$$

Denote por α^* o mapa adjunto de α, que é um homeomorfismo quando restrito à Δ. Se h é dado por $ev_{h(x)} = \alpha^* \circ ev_x$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\alpha^*} & \Omega \\ \big\downarrow ev & & \big\downarrow ev \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Tomando $f \in C_0(X)$, temos que

$$\alpha(f)(x) = ev_x \circ \alpha(f) = \alpha^* \circ ev_x(f) = ev_{\varphi(x)}(f) = f(\varphi(x)).$$

O diagrama mostra ainda que a aplicação é injetiva e a Proposição 1.2.3 mostra que a aplicação é sobrejetiva. É imediato checar que $\alpha \mapsto \varphi$ é homomorfismo.

Precisamos agora mostrar que a aplicação $\alpha \mapsto \varphi$ é um homeomorfismo. Tome uma rede α_i em $\mathrm{Aut}(C_0(X))$ de forma que $\alpha_i(f) = f \circ \varphi_i$, com $\varphi_i \in \mathrm{Homeo}(X)$. Suponha que $\alpha_i \to \alpha$. Queremos mostrar que $\varphi_i \to \varphi$, onde $\alpha(f) = f \circ \varphi$. Assuma por absurdo que exista $x_i \to x$ em X, tal que $\varphi_i(x_i) \not\to \varphi(x)$. Pela compacidade local de X, usando o Lema de Urysohn, existe uma função $f \in C_0(X)$ satisfazendo que $f(\varphi_i(x_i)) \not\to f(\varphi(x))$. Isto por outro lado, implica que $\alpha_i(f) \not\to \alpha(f)$, uma contradição. Usando, agora o fato de que $\alpha_i^{-1} \to \alpha^{-1}$ e trocando φ_i e φ por φ_i^{-1} e φ^{-1}, respectivamente, obtemos um resultado análogo. Logo, $\varphi_i \to \varphi$ em $\mathrm{Homeo}(X)$.

Assuma que $\varphi_i \to \varphi$ em $\mathrm{Homeo}(X)$. Devemos mostrar que $f \circ \varphi_i \to f \circ \varphi$ em $C_0(X)$. Se isto não se verificar, pelo Lema 1.2.6, podemos tomar uma sub-rede de maneira que exista $x_i \in X$ satisfazendo que

$$|f(\varphi_i(x_i)) - f(\varphi(x_i))| \geq \varepsilon > 0 \quad \forall i \in I. \tag{1.4}$$

Passando novamente a uma sub-rede, se preciso, podemos assumir que $\{\varphi_i(x_i)\}$ ou $\{\varphi(x_i)\}$ esteja contido no conjunto compacto $K = \{x \in X; |f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Suponha, primeiramente, que $\{(\varphi_i(x_i))\} \subset K$. Então passando, ainda mais uma vez, a uma sub-rede, assumimos que $\varphi_i(x_i) \to y \in K$. Teremos desta forma que

$$x_i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(x_i)) \to \varphi^{-1}(y).$$

Pela continuidade de φ e f, chegamos a conclusão de que

$$\varphi(x_i) \to y \quad \text{e} \quad f(\varphi_i(x_i)) \to f(y),$$

o que contradiz 1.4. Se assumirmos em contrapartida que $\{\varphi(x_i)\} \subset K$, tomando sub-rede podemos supor que $\varphi(x_i) \to y \in K$, e que portanto $x_i \to \varphi^{-1}(y)$. Como consequência $\varphi_i(x_i) \to y$, e raciocinando como antes, obtemos novamente uma contradição com 1.4. $\square$

Por outro lado, $*$-endomorfismos que não são automorfismos podem não possuir esta caracterização. Considere, por exemplo, o espaço $X = \{0, 1\}$ com a sua topologia discreta. Considere o $*$-endomorfismo α caracterizado por

$$\alpha(f)(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0, & \text{se} & x = 0 \\ f(1), & \text{se} & x \neq 1 \end{array} \right. , \quad \forall f \in C_0(X).$$

Tomando $f \equiv 1$, é fácil ver que não existe função $\varphi : X \to X$ satisfazendo que $\alpha(f) = f \circ \varphi$.

Concluímos esta seção com o teorema abaixo, que caracteriza todos os C^*-sistemas dinâmicos com C^*-álgebras comutativas.

Teorema 1.2.16. *Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff. Suponha que $(C_0(X), G, \alpha)$ seja um C^*-sistema dinâmico. Então existe uma ação de G em X tal que*

$$\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}.x).$$

Demonstração. Pelo Lema 1.2.15 existe $\varphi_s \in \text{Homeo}(X)$ tal que

$$\alpha_s(f)(x) = f(\varphi_s(x)),$$

e tal que o mapa $s \mapsto \alpha_s \mapsto \varphi_s$, sendo a composição de homomorfismos contínuos, é um homomorfismo contínuo. Defina a ação de G em X por

$$s.x = \varphi_s^{-1}(x) = \varphi_{s^{-1}}(x).$$

A aplicação $(s, x) \mapsto s.x$ é contínua devido à topologia que introduzimos em $\text{Homeo}(X)$. $\square$

1.3 Representações Covariantes

Dado um espaço de Banach $\mathcal{D}$ denotaremos por $B(\mathcal{D})$ o espaço de operadores em $\mathcal{D}$ limitados e por $K(\mathcal{D})$ o espaço dos operadores compactos em $\mathcal{D}$ com sua topologia usual. Dado agora um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, denotamos por $U(\mathcal{H})$ o conjunto de seus operadores unitários, munido da topologia forte herdada de $B(\mathcal{H})$.

Antes de iniciarmos devemos demonstrar uma propriedade do espaço dos operadores unitários em um espaço de Hilbert.

Proposição 1.3.1. *Dado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, $U(\mathcal{H})$ é um grupo topológico.*

Demonstração. Como $B(\mathcal{H})$ é Hausdorff na topologia forte, $U(\mathcal{H})$ também será. É imediato checar, também, que $U(\mathcal{H})$ é um grupo. Mostraresmos que as operações de grupo são contínuas.

Considere as redes $(U_i)_{i\in I}, (V_i)_{i\in I}$ em $U(\mathcal{H})$ que convergem respectivamente para U e V. Temos que para qualquer $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} ||V_iU_ih - VUh|| &\leq ||V_iU_ih - V_iUh|| + ||V_iUh - VUh|| \\ &= ||U_ih - Uh|| + ||V_iUh - VUh|| \,. \end{aligned}$$

Como o lado direito converge para zero segue que $V_iU_i \to VU$. Agora usando que U_i é isometria para todo $i \in I$, segue que

$$\left|\left|U_i^{-1}h - U^{-1}h\right|\right| \quad = \quad \left|\left|h - U_i U^{-1}h\right|\right|$$

que converge para zero, donde concluímos que $U_i^{-1} \to U^{-1}$. □

Como é comumente feito nas teorias de grupos e de C^*-álgebras, usaremos as representações destes objetos para definirmos o produto-cruzado. Certamente, se quisermos que o produto-cruzado carregue informação da dinâmica em questão devemos impor condições nas representações que iremos considerar. De fato, consideraremos somente as chamadas representações covariantes.

Definição 1.3.2. *Seja (A, G, α) um C^*-sistema dinâmico. Uma* ***representação covariante*** *do (A, G, α) é um par (π, U) onde $\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ é uma representação de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $U : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ é uma representação unitária de G no mesmo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, as quais satisfazem*

$$\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_s^* \quad \forall a \in A \quad e \quad \forall s \in G. \tag{1.5}$$

Aqui usamos a notação $U_s = U(s)$.

Observação 1.3.3. *Ainda na notação da definição, temos*

$$U_s^* = U_s^{-1} = U_{s^{-1}}.$$

Exemplo 3. *Considere G, um grupo localmente compacto, agindo à esquerda em si mesmo, e seja $l : G \longrightarrow C_0(G)$ a ação induzida em $C_0(G)$. Seja $L^2(G)$ o espaço das funções quadrado integráveis com relação a alguma medida de Haar em G. Considere a representação $M : C_0(G) \longrightarrow B(L^2(G))$ dada por*

$$M(f)h(s) = f(s)h(s),$$

para toda $f \in C_0(G)$, $h \in L^2(G)$ e todo $s \in G$. E seja $\lambda : G \longrightarrow U(L^2(G))$ a representação unitária dada por

$$\lambda(r)h(s) = h(r^{-1}s)$$

para $h \in L^2(G)$ e $r, s \in G$. O par (M, λ) é uma representação covariante do C^*-sistema dinâmico $(C_0(G), G, l)$.

De fato, note que para $f \in C_0(G)$, $h \in L^2(G)$ e $r, s \in G$ temos que

$$M(l_r(f))h(s) = l_r(f)(s)h(s) = f(r^{-1}s)h(s)$$

e também que

$$\lambda_r M(f)\lambda_r^* h(s) = M(f)\lambda_r^* h(r^{-1}s) = f(r^{-1}s)\lambda_r^* h(r^{-1}s) = f(r^{-1}s)h(s).$$

Exemplo 4. *Sejam $\mathbb{T}$ o círculo unitário complexo, ou seja, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ e $h \in$ Homeo($\mathbb{T}$) definida por*

$$h(z) = e^{2\pi i\theta}z$$

chamada de rotação pelo ângulo θ. Seja $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$ o C^*-sistema dinâmico correspondente, ou seja,

$$\alpha_n(f)(z) = f(e^{-2\pi in\theta}z).$$

(i) Seja $M : C(\mathbb{T}) \longrightarrow B(L^2(\mathbb{T}))$ a representação dada por

$$M(f)h(z) = f(z)h(z).$$

e $U : \mathbb{Z} \longrightarrow U(L^2(\mathbb{T}))$ a representação unitária dada por

$$U_n h(z) = h(e^{-2\pi in\theta}z).$$

Então, como

$$M(\alpha_n(f))h(z) = \alpha_n(f)h(z) = f(e^{-2\pi in\theta}z)h(z)$$

e

$$\begin{aligned} U_n M(f)U_n^* h(z) &= M(f)U_n^* h(e^{-2\pi in\theta}z) \\ &= f(e^{-2\pi in\theta}z)U_n^* h(e^{-2\pi in\theta}z) = f(e^{-2\pi in\theta}z)h(z) \end{aligned}$$

segue que o par (M, U) é uma representação covariante para $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$.

(ii) Fixe agora $w \in \mathbb{T}$ e seja λ a representação unitária de $\mathbb{Z}$ em $L^2(\mathbb{Z})$ dada por $\lambda_n(\xi(m)) = \xi(m - n)$. Defina a representação $\pi_w : C(\mathbb{T}) \longrightarrow B(L^2(\mathbb{Z}))$ por

$$\pi_w(f)\xi(n) = f(e^{2\pi in\theta}w)\xi(n).$$

O par (π_w, λ) é uma representação covariante de $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$. De fato,

$$\pi_w(\alpha_n(f))\xi(m) = \alpha_n(f)(e^{2\pi im\theta}w)\xi(m) = f(e^{2\pi i(m-n)\theta}w)\xi(m).$$

e

$$\lambda_n \pi_w(f) \lambda_n^* \xi(m) = f(e^{2\pi i(m-n)\theta} w) \xi(m).$$

Não está claro que dado um C^*-sistema dinâmico sempre existirá uma representação covariante do mesmo. Usando a construção de Gelfand-Naimark-Segal (veja [6]), e os próximos dois lemas, vemos que sempre existem representações covariantes não degeneradas. Antes porém precisamos da seguinte definição.

Definição 1.3.4. *Dado um espaço vetorial topológico $\mathcal{D}$ e X um espaço localmente compacto de Hausdorff, definimos o espaço vetorial $C_c(X, \mathcal{D})$, onde*

$$C_c(X, \mathcal{D}) = \{f : X \longrightarrow \mathcal{D}; f \text{ contínua e } supp(f) \text{ compacto}\}.$$

Se X é compacto, $C_c(X, \mathcal{D}) = C(X, \mathcal{D})$, onde

$$C(X, \mathcal{D}) = \{f : X \longrightarrow \mathcal{D}; f \text{ contínua}\}.$$

Se $\mathcal{D}$ é um espaço de Banach e X possui uma medida μ, definimos para $0 < p \leq \infty$, os espaços $L^p(X, \mathcal{D})$ como os completamentos de $C_c(X, \mathcal{D})$ com respeito às normas

$$||f||_p = \left(\int_X ||f(x)||^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad se \quad p < \infty$$

e

$$||f||_\infty = \sup_{s \in X} ||f(s)|| \, .$$

Como de costume, quando $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ escrevemos $C_c(X)$ e $L^p(X)$. Quando precisarmos explicitar que a medida em questão é μ, escreveremos, $L^p(X, D)_\mu$.

Observação 1.3.5. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, em $C_c(X, \mathcal{H})$ temos o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_X \langle f(s), g(s) \rangle d\mu(s).$$

Portanto, $L^2(X, \mathcal{H})$ é um espaço de Hilbert.

Em geral, estaremos interessados nos espaços $L^p(G, D)$, onde G é um grupo localmente compacto e μ é uma medida de Haar em G.

Lema 1.3.6. *Suponha que D seja um espaço de Banach e que G seja um grupo localmente compacto. Se $f \in C_c(G, D)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V de e em G tal que* *se* $sr^{-1} \in V$ *ou* $s^{-1}r \in V$ *então*

$$||f(r) - f(s)|| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Demonstração. Seja W uma vizinhança compacta e simétrica de e, e seja $K = supp(f)$. Suponha que $||f(s) - f(r)|| > 0$ e que $sr^{-1} \in W$. Claramente, devemos ter que $r \in K$ ou $s \in K$. Se $r \in K$, então $s \in W.K$. Agora, se $s \in K$, então $r \in s^{-1}W \subset K^{-1}.W = W.K$.

Por contradição, assuma que o resultado seja falso. Logo existe um $\varepsilon > 0$ tal que para toda vizinhança de e, $U \subset W$, existem sempre s_U e r_U satisfazendo que

$$||f(s_U) - f(r_U)|| > \varepsilon. \tag{1.7}$$

Ordenando as vizinhanças de e contidas em W de forma que

$$U > U' \quad \text{se, e somente se,} \quad U \subset U'$$

vemos que (s_U) e (r_U) são redes satisfazendo que $s_U r_U^{-1} \to e$. Usando que $W.K$ é compacto e tomando subredes, se necessário, podemos assumir que $s_U, r_U \to r$. Mas pela continuidade de f isto contradiz 1.7. É possível obter, assim uma vizinhança V' de e, tal que se $sr^{-1} \in V'$ temos 1.6.

De maneira análoga, existe V'' tal que se $s^{-1}r \in V''$ então vale 1.6. Tome $V = V' \cap V''$ para concluir. □

Lema 1.3.7. *Dado um C^*-sistema dinâmico (A, G, α) e uma representação de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, $\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$, existe uma representaçao covariante $(\tilde{\pi}, U)$ de (A, G, α) em $L^2(G, \mathcal{H})$, induzida por π.*

Demonstração. Defina as representações $\tilde{\pi} : A \longrightarrow B(L^2(G, \mathcal{H}))$ e $U : G \longrightarrow U(L^2(G, \mathcal{H}))$ dadas por

$$\tilde{\pi}(a)f(r) = \pi(\alpha_r^{-1}(a))(f(r)) \quad \text{e} \quad U_s f(r) = f(s^{-1}r)$$

para $f \in C_c(G, \mathcal{H})$ e estendidas por densidade.

Note que o homomorfismo $U : G \longrightarrow U(L^2(G, \mathcal{H}))$ é contínuo. De fato, se $f \in C_c(G, \mathcal{H})$ e $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V de e que satisfaça o Lema 1.3.6 para

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu(supp(f))}}.$$

Tomando $s \in V$ temos que

$$\begin{aligned} ||U_s f - f||_2^2 &= \int_G \left|\left|f(s^{-1}r) - f(r)\right|\right|^2 d\mu \\ &= \int_{supp(f)} \left|\left|f(s^{-1}r) - f(r)\right|\right|^2 d\mu < \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Que a representação acima é unitária segue da invariância de μ por translações, pois dados $f, g \in C_c(G, \mathcal{H})$ e $s \in G$ temos que

$$\begin{aligned} \int_G \big\langle U_s f(r), g(r)\big\rangle d\mu(r) &= \int_G \big\langle f(s^{-1}r), g(r)\big\rangle d\mu(r) \\ &= \int_G \big\langle f(r), g(sr)\big\rangle d\mu(r). \end{aligned}$$

E claramente o operador linear $W : G \longrightarrow U(L^2(G, \mathcal{H}))$ dado por

$$W_s f(r) = f(sr).$$

satisfaz $W = U^{-1}$.

Observe que

$$\begin{aligned} U_s \tilde{\pi}(a) U_s^* f(r) &= \tilde{\pi}(a) U_s^* f(s^{-1}r) \\ &= \pi(\alpha_{s^{-1}r}^{-1}(a))(U_s^* f(s^{-1}r)) \\ &= \pi(\alpha_r^{-1}(\alpha_s(a)))(f(r)) \\ &= \tilde{\pi}(\alpha_s(a)) f(r) \end{aligned}$$

Usando que $C_c(G, \mathcal{H})$ é denso em $L^2(G, \mathcal{H})$ o teorema está demonstrado. □

1.4 O Produto Cruzado

Nesta seção fixaremos um C^*-sistema dinâmico (A, G, α) e uma medida de Haar em G com função modular Δ.

Denotaremos por $C_c(G, A, \alpha)$ o espaço $C_c(G, A)$ munido com as operações:

$$f * g(s) = \int_G f(r) \alpha_r(g(r^{-1}s)) d\mu(r)$$

$$f^*(s) = \Delta(s^{-1}) \alpha_s(f(s^{-1})^*).$$

E dotado da norma

$$||f||_1 = \int_G ||f(s)||\, d\mu(s).$$

Proposição 1.4.1. *O espaço $C_c(G, A, \alpha)$ é uma $*$-álgebra normada com multiplicação e involução definidas como $f * g$ e f^*, respectivamente, e norma $||.||_1$.*

Demonstração. Sejam $f, g, h \in C_c(G, A, \alpha)$. Primeiro, devemos mostrar que $f * g \in C_c(G, A, \alpha)$. Observe que se $s, r \in G$, então

$$\begin{aligned} f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s)) \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad r \in supp(f) \quad \text{e} \quad r^{-1}s \in supp(g) \\ &\Longleftrightarrow \quad r \in supp(f) \quad \text{e} \quad s \in r.supp(g). \end{aligned}$$

Logo

$$supp(f * g) \subset supp(f)supp(g),$$

o que mostra que $supp(f * g)$ é compacto.

Devemos mostrar então que $f * g$ é aplicação contínua. Com efeito, tome $s_0 \in G$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 1.3.6 para qualquer $\kappa > 0$ existe uma vizinhança V de e em G que satisfaz que

$$||g(s) - g(r)|| < \kappa,$$

sempre que $s^{-1}r \in V$ ou $sr^{-1} \in V$. Tome $s \in s_0V$. Temos

$$\begin{aligned} ||f * g(s) - f * g(s_0)|| &= \left|\left| \int_G f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s) - g(r^{-1}s_0))d\mu(r) \right|\right| \\ &\leq \int_G ||f(r)||\, \big|\big|\alpha_r(g(r^{-1}s) - g(r^{-1}s_0))\big|\big| d\mu(r) \\ &= \int_G ||f(r)||\, \big|\big|g(r^{-1}s) - g(r^{-1}s_0)\big|\big| d\mu(r) \\ &< \kappa\, ||f||_1 . \end{aligned}$$

Escolhendo $\kappa = \frac{\varepsilon}{||f||_1}$, concluímos que $f * g$ é contínua.

Usando o Teorema de Fubini e a invariância por translação de μ, temos que

$$\begin{aligned}
(f*g)*h(s) &= \int_G (f*g)(r)\alpha_r(h(r^{-1}s))d\mu(r) \\
&= \int_G \left(\int_G f(t)\alpha_t(g(t^{-1}r))d\mu(t)\right)\alpha_r(h(r^{-1}s))d\mu(r) \\
&= \int_G\int_G f(t)\alpha_t(g(t^{-1}r))\alpha_r(h(r^{-1}s))d\mu(t)d\mu(r) \\
&= \int_G f(t)\alpha_t\bigg(\int_G g(t^{-1}r)\alpha_{t^{-1}r}(h((t^{-1}r)^{-1}t^{-1}s))d\mu(r)\bigg)d\mu(t) \\
&= \int_G f(t)\alpha_t\bigg(\int_G g(r)\alpha_r(h(r^{-1}t^{-1}s))d\mu(r)\bigg)d\mu(t) \\
&= \int_G f(t)\alpha_t(g*h(t^{-1}s))d\mu(t) \\
&= f*(g*h)(s).
\end{aligned}$$

Segue também que

$$\begin{aligned}
f^* * g^*(s) &= \int_G f^*(r)\alpha_r(g^*(r^{-1}s))d\mu(r) \\
&= \int_G \Delta(r^{-1})\alpha_r(f(r^{-1})^*)\Delta(s^{-1}r)\alpha_r(\alpha_{r^{-1}s}(g(s^{-1}r)^*))d\mu(r) \\
&= \Delta(s^{-1})\int_G \alpha_r(f(r^{-1})^*)\alpha_s(g(s^{-1}r)^*)d\mu(r) \\
&= \Delta(s^{-1})\int_G \alpha_{sr}(f(r^{-1}s^{-1})^*)\alpha_s(g(r)^*)d\mu(r) \\
&= \Delta(s^{-1})\alpha_s\bigg(\bigg(\int_G g(r)\alpha_r(f(r^{-1}s^{-1}))d\mu(r)\bigg)^*\bigg) \\
&= \Delta(s^{-1})\alpha_s((g*f(s^{-1}))^*) \\
&= (g*f)^*(s).
\end{aligned}$$

Com respeito à norma temos que

$$\begin{aligned}
||f^*||_1 &= \int_G ||f^*(s)||\,d\mu(s) \\
&= \int_G \left|\left|\Delta(s^{-1})\alpha_r(f(s^{-1})^*)\right|\right|\,d\mu(s) \\
&= \int_G \Delta(s^{-1})\left|\left|f(s^{-1})^*\right|\right|\,d\mu(s) \\
&= \int_G \Delta(s^{-1})\Delta(r)\,||f(s)^*||\,d\mu(s) \\
&= \int_G ||f(s)||\,d\mu(s) \\
&= ||f||_1\,,
\end{aligned}$$

e mais ainda que

$$\begin{aligned}
||f * g||_1 &= \int_G ||f * g(s)||\, d\mu(s) \\
&= \int_G \left|\left| \int_G f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s))d\mu(r) \right|\right| d\mu(s) \\
&\leq \int_G \left(\int_G ||f(r)||\, \left|\left|g(r^{-1}s)\right|\right| d\mu(r) \right) d\mu(s) \\
&= \int_G ||f(r)|| \left(\int_G \left|\left|g(r^{-1}s)\right|\right| d\mu(s) \right) d\mu(r) \\
&= ||g||_1 \int_G ||f(r)||\, d\mu(r) \\
&= ||f||_1\, ||g||_1 \,.
\end{aligned}$$

As outras condições são de fácil verificação. □

Definição 1.4.2. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um $*$-homomorfismo*

$$\pi : C_c(G, A, \alpha) \longrightarrow B(\mathcal{H})$$

*é chamado de uma **representação** de $C_c(G, A, \alpha)$ em $\mathcal{H}$.*

Observação 1.4.3. *Dada uma C^*-álgebra A denotaremos por $\mathcal{M}(A)_s$ a álgebra de multiplicadores de A munida da chamada topologia estrita, ou seja, a topologia induzida pela família de seminormas $\{||.||_a\,; a \in A\}$, onde*

$$||b||_a = ||ba|| + ||ab||\,, \quad \forall b \in \mathcal{M}(A)_s.$$

Proposição 1.4.4. *Suponha que (π, U) seja uma representação covariante de (A, G, α) em $\mathcal{H}$. Então temos uma representação induzida $\pi \rtimes U$ definida por*

$$\pi \rtimes U(f) = \int_G \pi(f(s))U_s d\mu(s).$$

Tal representação satisfaz ainda que $||\pi \rtimes U(f)|| \leq ||f||_1$.

Demonstração. Denotaremos como $B(\mathcal{H})_s$ o espaço $B(\mathcal{H})$ visto como a álgebra de multiplicadores sobre $K(\mathcal{H})$ com a topologia estrita. A aplicação $s \mapsto \pi(f(s))U_s$ pertence ao espaço $C_c(G, B(\mathcal{H})_s)$. Logo a integral acima está bem definida.

Mostraremos que $\pi \rtimes U$ é $*$-homomorfismo. A linearidade segue trivialmente. Note que

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U(f)^* &= \left(\int_G \pi(f(s))U_s d\mu(s)\right)^* \\
&= \int_G (\pi(f(s))U_s)^* d\mu(s) \\
&= \int_G U_{s^{-1}}\pi(f(s)^*) d\mu(s) \\
&= \int_G \Delta(s^{-1})U_s\pi(f(s^{-1})^*) d\mu(s) \\
&= \int_G U_s\pi(\Delta(s^{-1}f(s^{-1})^*)) d\mu(s) \\
&= \int_G \pi(\Delta(s^{-1})\alpha_s(f(s^{-1})^*))U_s d\mu(s) \\
&= \int_G \pi(f^*(s))U_s d\mu(s) \\
&= \pi \rtimes U(f^*).
\end{aligned}$$

Temos também, usando o teorema de Fubini e a invariância por translação de μ que

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U(f * g) &= \int_G\int_G \pi(f(r)\alpha_r(g(r^{-1}s)))U_s d\mu(r) d\mu(s) \\
&= \int_G\int_G \pi(f(r))U_r\pi(g(r^{-1}s))U_{r^{-1}s} d\mu(r) d\mu(s) \\
&= \int_G \pi(f(r))U_r\left(\int_G \pi(g(s))U_s d\mu(s)\right) d\mu(r) \\
&= \pi \rtimes U(f) \circ \pi \rtimes U(g).
\end{aligned}$$

Tome agora $h, k \in \mathcal{H}$ unitários. Usando o teorema de Fubini e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
|\langle \pi \rtimes U(f)h, k\rangle| &= \left|\left\langle\left(\int_G \pi(f(s))U_s d\mu(s)\right)h, k\right\rangle\right| \\
&= \left|\int_G \langle \pi(f(s))U_s h, k\rangle d\mu(s)\right| \\
&\leq \int_G |\langle \pi(f(s))U_s h, k\rangle| d\mu(s) \\
&\leq \int_G ||\pi(f(s))||\, ||U_s h||\, ||k||\, d\mu(s) \\
&= \int_G ||f(s)||\, d\mu(s) \\
&= ||f||_1 .
\end{aligned}$$

Como h, k foram tomados arbitrariamente, segue que $||\pi \rtimes U(f)|| \leq ||f||_1$. $\square$

Fixado $r \in G$ vamos definir a aplicação $i_G(r) : C_c(G, A, \alpha) \longrightarrow C_c(G, A, \alpha)$ dada por $i_G(r)f(s) = \alpha_r(f(r^{-1}s))$. Note que se (π, U) é representação covariante de (A, G, α) então

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U(i_G(r)f) &= \int_G \pi(i_G(r)f(s))U_s d\mu(s) \\
&= \int_G \pi(\alpha_r(f(r^{-1}s)))U_s d\mu(s) \\
&= U_r \int_G \pi(f(r^{-1}s))U_{r^{-1}s} d\mu(s) \\
&= U_r \circ \pi \rtimes U(f). \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Lema 1.4.5. *Fixada $f \in C_c(G, A, \alpha)$, a aplicação $(s, r) \in G \times G \mapsto \alpha_r(f(s)) \in A$ é contínua.*

Demonstração. Tome redes $(s_i)_{i \in I}, (r_i)_{i \in I}$ tais que $r_i \to r$ e $s_i \to s$. Note que,

$$\begin{aligned}
||\alpha_{r_i}(f(s_i)) - \alpha_r(f(s))|| &\leq ||\alpha_{r_i}(f(s_i)) - \alpha_{r_i}(f(s))|| + ||\alpha_{r_i}(f(s)) - \alpha_r(f(s))|| \\
&= ||f(s_i) - f(s)|| + ||\alpha_{r_i}(f(s)) - \alpha_r(f(s))|| .
\end{aligned}$$

Como a expressão acima converge para zero, o resultado segue. □

Lema 1.4.6. *Sejam π uma representação injetiva de A em $\mathcal{H}$ e $(\tilde{\pi}, U)$ a representação covariante induzida por π. Então $\pi \rtimes U$ é representação injetiva de $C_c(G, A, \alpha)$ em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Considere $f \neq 0$ em $C_c(G, A, \alpha)$ e tome $r \in G$ tal que $f(r) \neq 0$. Por (1.4), $||\tilde{\pi} \rtimes U(f)|| = ||\tilde{\pi} \rtimes U(i_G(r)(f))||$. Logo podemos assumir, trocando f por $i_G(r^{-1})f$, que $r = e$. Como π é injetiva, podemos encontrar vetores $h, k \in \mathcal{H}$ tais que

$$\langle \pi(f(e))h, k \rangle \neq 0.$$

Pelo Lema 1.4.5 temos que existe uma vizinhança simétrica V de e em G tal que se $r, s \in V$ temos

$$|\langle \pi(\alpha_r^{-1}(f(s)))h, k \rangle - \langle \pi(f(e))h, k \rangle| < \frac{|\langle \pi(f(e))h, k \rangle|}{2}.$$

Tome φ função não negativa em $C_c(G)$ cujo suporte esteja contido em uma vizinhança simétrica W de e satisfazendo que $W.W \subset V$. Suponha ainda que

$$\int_G \int_G \varphi(s^{-1}r)\varphi(r) d\mu(r) d\mu(s) = 1.$$

Observe que se $s \notin V$ ou $r \notin V$ temos que $\varphi(s^{-1}r)\varphi(r) = 0$. Defina, ξ e η em $C_c(G, \mathcal{H}) \subset L^2(G, \mathcal{H})$ como

$$\xi(s) = \varphi(s)h \quad \text{e} \quad \eta(s) = \varphi(s)k.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&|\langle \tilde{\pi}(f)\xi, \eta\rangle - \langle \pi(f(e))h, k\rangle| \\
&\quad = \left| \int_G \langle \tilde{\pi} \rtimes U(f)\xi(r), \eta(r)\rangle d\mu(r) - \langle \pi(f(e))h, k\rangle \right| \\
&\quad = \left| \int_G \int_G \langle \tilde{\pi}(f(s))U_s\xi(r), \eta(r)\rangle d\mu(s)d\mu(r) - \langle \pi(f(e))h, k\rangle \right| \\
&\quad = \left| \int_G \int_G \langle \pi(\alpha_r^{-1} f(s))\xi(s^{-1}r), \eta(r)\rangle d\mu(s)d\mu(r) - \langle \pi(f(e))h, k\rangle \right| \\
&\quad = \left| \int_G \int_G \varphi(s^{-1}r)\varphi(r)\langle \pi(\alpha_r^{-1} f(s))h, k\rangle d\mu(s)d\mu(r) - \langle \pi(f(e))h, k\rangle \right| \\
&\quad = \left| \int_G \int_G \varphi(s^{-1}r)\varphi(r)(\langle \pi(\alpha_r^{-1} f(s))h, k\rangle - \langle \pi(f(e))h, k\rangle)d\mu(s)d\mu(r) \right| \\
&\quad \leq \int_G \int_G \varphi(s^{-1}r)\varphi(r)|\langle \pi(\alpha_r^{-1} f(s))h, k\rangle - \langle \pi(f(e))h, k\rangle| d\mu(s)d\mu(r) \\
&\quad < \frac{|\langle \pi(f(e))h, k\rangle|}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\tilde{\pi} \rtimes U(f) \neq 0$. □

Teorema 1.4.7. *Dado o C^*-sistema dinâmico (A, G, α) então*

$$||f|| = sup\{||\pi \rtimes U(f)|| : (\pi, U) \textit{ é representação covariante de } (A, G, \alpha)\}. \tag{1.9}$$

define uma norma C^* em $C_c(G, A, \alpha)$.

Demonstração. Tome, $f \in C_c(G, A, \alpha)$, e (π, U). Da Proposição 1.4.4 segue que $||f|| \leq ||f||_1$. Mais ainda, pelo Lema 1.4.6, temos que se $f \neq 0$ então existe representação covariante (π, U) tal que $\pi \rtimes U(f) \neq 0$ e portanto, $||f|| \neq 0$. Para cada representação covariante (π, U) temos que $||\pi \rtimes U(f)\pi \rtimes U(f^*)|| = ||\pi \rtimes U(s)||\,||\pi \rtimes U(f^*)||$, donde concluímos que $||ff^*|| = ||f||\,||f^*||$. Daí obtemos que $||.||$ é uma norma C^* em $C_c(G, A, \alpha)$. □

Definição 1.4.8. *O completamento da álgebra $C_c(G, A, \alpha)$ com respeito à norma 1.9, como no teorema acima, é a C^*-álgebra $A \rtimes_\alpha G$ chamada de* ***Produto Cruzado de*** *A* ***por*** *G.*

Note que podemos estender a norma 1.9 aos elementos de $L^1(G, A, \alpha)$ e pensar no produto cruzado como o completamento de $L^1(G, A, \alpha)$ com respeito a essa norma. A escolha de trabalhar com $C_c(G, A, \alpha)$ deve-se ao fato de que para termos uma visão concreta de elementos de $L^1(G, A, \alpha)$ (como funções integráveis de G em A) é preciso alguns resultados técnicos de teoria da medida.

Observação 1.4.9. *O caso em que $G = \mathbb{Z}$ não apresenta tal dificuldade e é particularmente* *importante aqui. Temos que* $L^1(\mathbb{Z}, A, \alpha)$ *é o espaço das funções* $f : \mathbb{Z} \to A$ *que satisfazem*

$$\int_{\mathbb{Z}} ||f|| d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} ||f(n)|| < \infty.$$

Um elemento $f \in L^1(\mathbb{Z}, A, \alpha)$*, que satisfaz que* $f(n) = a_n$*, pode ser escrito como*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \otimes \delta_n,$$

onde

$$a_n \otimes \delta_n(m) = \begin{cases} a_n, & se \quad m = n, \\ 0, & se \quad m \neq n. \end{cases}$$

Como dada uma ação de $\mathbb{Z}$ *em A, ela é implementada por um único automorfismo* $\alpha \in$ *Aut(A), ou seja,* $\alpha_n = \alpha^n$*, o produto induzido em* $L^1(\mathbb{Z}, A, \alpha)$ *é dado por*

$$f * g(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\alpha_m(g(n-m)) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\alpha^m(g(n-m)) \tag{1.10}$$

ou se escrevermos

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \otimes \delta_n$$

reescrevemos 1.10 como

$$f * g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \alpha^m(b_{n-m})) \otimes \delta_n. \tag{1.11}$$

A involução é dada por

$$f^*(n) = \alpha^n(f(-n)^*),$$

ou seja,

$$f^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^n(a_{-n}^*) \otimes \delta_n.$$

Em geral quando estivermos falando de produtos cruzados por $\mathbb{Z}$ usaremos livremente qualquer uma das duas definições de produto cruzado.

Naturalmente espera-se que um grupo com uma estrutura simples dê origem a produtos cruzados cuja estrutura também será simples. No caso de $\mathbb{Z}$ isso é verdade. De fato, usando os resultados em [12] 7.13 e [8] 7.7.5 obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 1.4.10. *Seja A uma C^*-álgebra e π uma representação injetiva de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então para $f \in A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ temos que $||f|| = ||\tilde{\pi} \rtimes U(f)||$, onde $(\tilde{\pi}, U)$ é a representação induzida do Lema 1.3.7, ou seja,*

$$\tilde{\pi}(a)(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\pi(\alpha^n(a))h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

e

$$U(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (h_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

onde identificamos $L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ com o espaço das sequência em $\mathcal{H}$ munido da sua norma l_2.

Terminaremos esta discussão sobre produtos cruzados por $\mathbb{Z}$ provando o seguinte resultado:

Proposição 1.4.11. *Existe uma $*$-imersão isométrica da C^*-álgebra A em $A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Considere o $*$-homomorfismo injetivo

$$\begin{array}{rcl} j : A & \longrightarrow & A \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & a \otimes \delta_0. \end{array}$$

Como j é injetivo, será automaticamente isométrico e o resultado está demonstrado. $\square$

Observação 1.4.12. *Para grupos localmente compactos gerais não existe uma imersão como na Proposição 1.4.11.*

1.5 Exemplos

Nesta seção trataremos de alguns exemplos de produtos cruzados.

Exemplo 5. *Seja G um grupo finito de ordem n, digamos $G = \{s_i; i = 1, ..., n\}$, agindo sobre si mesmo pela esquerda, como no Exemplo 3. Adotamos a topologia discreta em G, como de costume. Note também que neste caso a medida de Haar é simplesmente a medida de contagem. Tomamos a representação $L = M \rtimes \lambda$ de $C(G, l, C(G))$ em $L^2(G)$ onde (M, λ) é a representação covariante dada no Exemplo 3. Consideramos $C(G, l, C(G))$ com sua estrutura herdada de $C(G) \rtimes_l G$. Observe primeiramente que podemos identificar isometricamente $L^2(G)$ com $\mathbb{C}^n$ via o mapa que leva $\delta_i \mapsto e_i$, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^n$ e*

$$\delta_i(s_j) = \begin{cases} 1, & se \quad i = j, \\ 0, & se \quad i \neq j. \end{cases}$$

Se $f \in C(G, l, C(G))$ temos que

$$\begin{aligned} L(f)h(s_i) &= \sum_{k=1}^{n} M(f(s_k))\lambda_{s_k} h(s_i) = \sum_{k=1}^{n} f(s_k)(s_i)h(s_k^{-1}s_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(s_i s_k^{-1})(s_i)h(s_k) \end{aligned}$$

Em particular, se considerarmos $h = \delta_j$ teremos que

$$L(f)\delta_j(s_i) = f(s_i s_j^{-1})(s_i).$$

Usando o resultado acima, obtemos um $*$-homomorfismo de $C(G, l, C(G))$ no espaço das matrizes $n \times n$, $M_n(\mathbb{C})$ dado por $f \mapsto M^f = (m^f_{i,j})$, onde $m^f_{i,j} = f(s_i s_j^{-1})(s_i)$. Denotaremos tal identificação por $\tilde{L}$. Note que $\tilde{L}$ é um $*$-isomorfismo de $C(G, l, C(G))$ em $M_n(\mathbb{C})$ no sentido algébrico.

Se $f \in C(G, l, C(G))$ então

$$\left|\left|\tilde{L}(f)\right|\right| = ||L(f)|| \leq ||f||$$

pois L é representação covariante de $C(G, l, C(G))$. Agora dada uma representação π qualquer de $C(G) \rtimes_l G$, usando que mapas entre C^*-álgebras são sempre contrações, obtemos que

$$||\pi(f)|| = \left|\left|\pi(\tilde{L}^{-1}(\tilde{L}(f)))\right|\right| \leq \left|\left|\tilde{L}(f)\right|\right|$$

donde concluímos que $||f|| = \left|\left|\tilde{L}(f)\right|\right|$. Temos assim que $C(G) \rtimes_l G$ é $*$-isomorfo a $M_n(\mathbb{C})$.

Exemplo 6. *Voltemos agora ao exemplo 4 e consideremos o produto cruzado $A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ chamado de álgebra de rotação. Este exemplo é recorrente no campo de Geometria Não Comutativa e foi extensamente estudado. Tais álgebras, possuem estruturas bastante interessantes, principalmente quando θ é um número irracional. Abaixo iremos dar uma construção mais concreta de tais álgebras neste caso. Antes contudo precisamos de três lemas.*

Lema 1.5.1. *Todo subgrupo próprio e fechado do grupo $\mathbb{T}$ é finito.*

Demonstração. Suponha que H seja um subgrupo próprio e fechado de $\mathbb{T}$ que seja infinito. Seja U um aberto de $\mathbb{T}$ tal que $U \cap H = \emptyset$. Como H é infinito e compacto existe sequência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em H tal que $h_n \to h$ e $h_n \neq h$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Considerando o grupo isomorfo a H, $h^{-1}.H$ podemos considerar que $h_n \to 1$ e que $h_n \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Escreva $h_n = e^{2\pi i\theta_n}$, onde $\theta_n \in (0, 1)$. Como também temos que $h_n^{-1} \to 1$ sempre que $\theta_n > \frac{1}{2}$ podemos substituir h_n por h_n^{-1} e, tomando uma subsequência se necessário, assumir que $\theta_n \to 0$. Escolha agora algum $z = e^{2\pi i\theta} \in U$, com $\theta \in (0,1)$. Como U é aberto existo um certo $\varepsilon > 0$ para o qual $e^{2\pi i\psi} \in U$ sempre que $\psi \in (\theta, \theta+\varepsilon)$. Mas se $\theta_n < \varepsilon$, existe um $m \in \mathbb{Z}$ para o qual $m\theta_n \in (\theta, \theta+\varepsilon)$. Isto por outro lado implica que $h_n^m \in U$ contradizendo a nossa escolha de U. $\square$

Lema 1.5.2. *Seja θ um número irracional, $\rho = e^{2\pi i\theta}$ e $z \in \mathbb{T}$. Então o conjunto $\{\rho^n z; n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{T}$.*

Demonstração. Seja H o fecho do conjunto $\{\rho^n z; n \in \mathbb{Z}\}$. Claramente H é um subgrupo fechado de $\mathbb{T}$. Basta mostrar pelo Lema 1.5.1 que H é infinito. De fato se $n \neq m$ então

$$(\rho^n z)(\rho^m z)^{-1} = \rho^{n-m} = e^{2\pi(n-m)i\theta}.$$

Mas $e^{2\pi(n-m)i\theta} = 1$ se, e somente se, $(n-m)\theta \in \mathbb{Z}$. Como estamos assumindo que θ é irracional, segue que $\rho^n z \neq \rho^m z$, donde se conclui que H é infinito. $\square$

Dado um subconjunto S em uma C^*-álgebra A denotamos como $C^*(S)$ a C^*-álgebra gerada por S.

Proposição 1.5.3. *Se θ é irracional então a álgebra de rotação irracional A_θ é gerada por dois elementos unitários u e v que satisfazem $uv = \rho vu$. Mais ainda, se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e se U e V são operadores unitários em $B(\mathcal{H})$ tais que $UV = \rho VU$, então existe uma representação*

$$L : A_\theta \longrightarrow B(\mathcal{H}).$$

A representação L é um $*$-isomorfismo de A_θ em $C^*(U,V)$

Demonstração. Temos que $A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ é o completamento da $*$-álgebra $C(\mathbb{Z}\times\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{Z}, C(\mathbb{T}))$ com o produto de convolução

$$f * g(n,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m,z) g(n-m, \rho^{-m} z)$$

e com involução

$$f^*(n,z) = \overline{f(-n, \rho^{-n} z)},$$

completamento este com respeito à norma do produto cruzado.

Se $\varphi \in C(\mathbb{T})$ e $h \in C_c(\mathbb{Z})$, então $\varphi \otimes h \in C(\mathbb{Z}\times\mathbb{T})$ é a função $\varphi \otimes h(n,z) = \varphi(n)h(z)$. Defina

$$\delta_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad m = n, \\ 0, & \text{se} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Temos que A_θ tem unidade em $C(\mathbb{Z} \times \mathbb{T})$ dada por $e = 1_\mathbb{T} \otimes \delta_0$, onde $1_\mathbb{T}(z) = 1 \; \forall z \in \mathbb{T}$. De fato, se $f \in C(\mathbb{Z} \times \mathbb{T})$ então

$$e * f(n,z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_0(m) f(n-m, \rho^{-m} z) = f(n,z)$$

e também

$$f * e(n,z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m,z) \delta_0(n-m) = f(n,z)$$

Temos, portanto os unitários,

$$u = 1_\mathbb{T} \otimes \delta_1 \; \text{ e } \; v = i_\mathbb{T} \otimes \delta_0.$$

onde $i_\mathbb{T}(z) = z \; \forall z \in \mathbb{T}$. Observe que

$$\begin{aligned} u * u^*(n,z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_1(m) u^*(n-m, \rho^{-m} z) \\ &= u^*(n-1, \rho z) = \delta_1(1-n) \\ &= 1_\mathbb{T} \otimes \delta_0(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^* * u(n,z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} u^*(m,z) \delta_1(n-m) \\ &= u^*(n-1, \rho z) = \delta_1(1-n) \\ &= 1_\mathbb{T} \otimes \delta_0(n). \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} v * v^*(n,z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} z \delta_0(m) v^*(n-m, \rho^{-m} z) \\ &= z v^*(n,z) = z \overline{z} \delta_0(-n) \\ &= 1_\mathbb{T} \otimes \delta_0(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^* * v(n,z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} v^*(m,z) \rho^{-m} z \delta_0(n-m) \\ &= v^*(n,z) z = \overline{z} z \delta_0(n) \\ &= 1 \otimes \delta_0(n). \end{aligned}$$

Observe ainda que,

$$
\begin{aligned}
u * v(n,z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_1(m) v(n-m, \rho^{-m}z) = v(n-1, \rho^{-1}z) = \rho^{-1}z\delta_0(n-1) \\
&= \rho^{-1}z\delta_1(n).
\end{aligned}
$$

e que,

$$
v * u(n,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z\delta_0(m) u(n-m, \rho^{-m}z) = zu(n,z) = z\delta_1(n).
$$

Logo, $u * v = \rho v * u$.

Mostraremos que $A_\theta = C^*(u,v)$.

Começamos observando que $u^n = 1 \otimes \delta_n$.

Se $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Seja $i_{C(\mathbb{T})}(\varphi) = \varphi \otimes \delta_0$, que é um $*$-homomorfismo de $C(\mathbb{T})$ em $C(\mathbb{Z}\times\mathbb{T}) \subset A_\theta$. Note que

$$
\begin{aligned}
i_{C(\mathbb{T})}(\varphi) * u^n(m,z) &= \varphi \otimes \delta_0 * u^n(m,z) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(z)\delta_0(l) u^n(m-l, \rho^{-l}z) \\
&= \varphi(z) u^n(m,z). \\
&= \varphi(z)\delta_n(m) \\
&= \varphi \otimes \delta_n(m,z).
\end{aligned}
$$

De [12] Lema 1.87 segue que o conjunto

$$
\{i_{C(\mathbb{T})}(\varphi) * u^n; \varphi \in C(\mathbb{T}) \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}
$$

gera uma subálgebra densa de $C(\mathbb{Z}\times\mathbb{T})$ e portanto de A_θ.

O Teorema de Stone-Weierstrass implica que o conjunto $\{v^n; n \in \mathbb{Z}\}$ gera uma subálgebra densa de $i_{C(\mathbb{T})}(C(\mathbb{T}))$. Logo, u e v geram A_θ como C^*-álgebra.

Suponha agora que $U, V \in B(\mathcal{H})$ satisfaçam que $UV = \rho VU$. Como V é unitário, segue que $\sigma(V) \in \mathbb{T}$, onde $\sigma(V)$ é o espectro do operador $V \in B(\mathcal{H})$. Para tal operador temos que $\sigma(V) = \mathbb{T}$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(V) &\iff V - \lambda I \text{ não é inversível} \\
&\iff U^n(V - \lambda I) \text{ não é inversível} \\
&\iff (\rho^n V - \lambda I)U^n \text{ não é inversível} \\
&\iff (\rho^n V - \lambda I) \text{ não é inversível} \\
&\iff \rho^{-n}\lambda \in \sigma(V).
\end{aligned}
$$

Segue do Lema 1.5.2 que o conjunto $\sigma(V)$ é denso em $\mathbb{T}$. Como $\sigma(V)$ é fechado temos que $\sigma(V) = \mathbb{T}$.

Usando o cálculo funcional para operadores unitários, existe um $*$-isomorfismo $\pi : C(\mathbb{T}) \longrightarrow C^*(V) \subset C^*(U,V)$ tal que $\pi(i_{\mathbb{T}}) = V$. Seja $W : \mathbb{Z} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ dado por $W_n = (U^*)^n$. Obtemos assim que

$$W_n \pi(i_{\mathbb{T}}) W_n^* = (U^*)^n V U^n = \rho^{-n} V = \pi(\rho^{-n} i_{\mathbb{T}}) = \pi(\alpha_n(i_{\mathbb{T}})).$$

Note que

$$\rho^{-n} i_{\mathbb{T}}(z) = \rho^{-n} z = i_{\mathbb{T}}(\rho^{-n} z) = \alpha_n(i_{\mathbb{T}})(z).$$

Já que $i_{\mathbb{T}}$ gera $C(\mathbb{T})$, o par (π, W) é uma representação covariante de $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$. Mais ainda,

$$\pi \rtimes W(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \pi(u(m,.)) W_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \pi(\delta_1(m) 1_{\mathbb{T}}) W_m = \pi(1_{\mathbb{T}}) W_1 = U^*$$

e também

$$\pi \rtimes W(v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \pi(v(m,.)) W_m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \pi(\delta_0(m) i_{\mathbb{T}}) W_m = \pi(i_{\mathbb{T}}) = V.$$

Como U^* e V geram $C^*(U,V)$ e u e v geram A_θ, segue o resultado. □

Exemplo 7. *Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$, defina os operadores unitários em $\mathcal{H}$*

$$U(f)(z) = z f(z)$$

e

$$V(f)(z) = f(\overline{\rho} z).$$

Note que

$$UV(f)(z) = zV(f)(z) = z f(\overline{\rho} z) = \rho U(f)(\overline{\rho} z) = \rho V U(f)(z).$$

Pela Proposição 1.5.3, $C^*(U,V) \cong A_\theta$.

Capítulo 2

Produtos Semi-Cruzados e Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Neste capítulo, introduziremos o conceito de Produto Semi-Cruzado assim como feito em [10]. O produto semi-cruzado é uma álgebra de Banach obtida quando deixamos o semigrupo $\mathbb{N}$ agir sobre uma C^*-álgebra A através de um $*$-endomorfismo α e tomamos uma norma sobre $L^1(\mathbb{N}, A)$ relacionada com uma certa classe de representações chamadas de representações covariantes isométricas para (A, α). No final do capítulo demonstramos um resultado de Davidson e Katsoulis, que afirma que dois sistemas dinâmicos são conjugados se, e somente se, seus respectivos produtos semi-cruzados são isomorfos.

2.2 Álgebras Opostas

Antes de prosseguirmos introduziremos nesta seção uma noção essencial para conectar o Capítulo 1 com este capítulo.

Definição 2.2.1. *Seja A uma álgebra. Definimos um novo produto $\odot$ em A tal que para $a, b \in A$*

$$a \odot b = ba.$$

*Chamamos a nova álgebra obtida de **álgebra oposta** de A e a denotamos como A_{op}.*

Está claro, com esta definição, que se A é álgebra normada, $*$-álgebra, álgebra de Banach ou C^*-álgebra, A_{op} também será. Basta, para isto, definirmos a mesma norma e mesma involução de A em A_{op}.

Em geral não sabemos se uma álgebra é isomorfa a sua álgebra oposta. De fato, existem exemplos de álgebras que não satisfazem essa propriedade. No caso de uma $*$-álgebra A, a involução fornece um anti-isomorfismo entre A e A_{op}, mas mesmo assim podemos ter A não $*$-isomorfa à A_{op}. De fato, [9] apresenta um exemplo de um produto cruzado que não é $*$-isomorfo à sua álgebra oposta. Apesar disso, é fácil ver que duas álgebras são isomorfas se, e somente se, suas álgebras opostas também o são. Podemos enunciar este resultado numa proposição para usarmos posteriormente.

Proposição 2.2.2. *Sejam A e B duas álgebras. Então A e B são $*$-isomorfas, isometricamente isomorfas, ou simplesmente isomorfas se, e somente se, A_{op} e B_{op} são *-isomorfas, isometricamente isomorfas, ou isomorfas, respectivamente.*

Ainda discutindo relações opostas, observemos que no Capítulo 1 uma representação covariante (π, U) de (A, G, α) deveria satisfazer a equação $U_s\pi(a)U_s^* = \pi(\alpha_s(a))$, ou equivalentemente, $U_s\pi(a) = \pi(\alpha_s(a))U_s$. Contudo, é natural especular quais consequências existiriam em definir esta relação como $\pi(a)U_s = U_s\pi(\alpha_s(a))$.

Definição 2.2.3. *Dado um C^*-sistema dinâmico (A, G, α) chamaremos de **representação covariante oposta** um par (π, U), onde π é uma representação de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e U é uma representação unitária de G no mesmo espaço $\mathcal{H}$ satisfazendo que $\pi(a)U_s = U_s\pi(\alpha_s(a))$.*

Existe uma relação imediata entre representações covariantes e representação covariante opostas, (π, U) é uma representação covariante se, e somente se, (π, U^*) é representações covariantes oposta. Logo, o Lema 1.3.7 garante a existência de representações covariantes opostas.

Introduza um produto em $C_c(G, A)$ da seguinte forma:

$$f * g(s) = \int_G \alpha_r(f(sr^{-1}))g(r)d\mu(r).$$

Denotaremos a álgebra formada desta forma por $C_c(G, A, \alpha)^{\#}$. Com a mesma norma e mesma involução definidas em $C_c(G, A, \alpha)$ obtemos que $C_c(G, A, \alpha)^{\#}$ é uma $*$-álgebra.

Agora, dada uma representação covariante oposta (π, U) de (A, G, α), temos portanto uma representação de $C_c(G, A, \alpha)^{\#}$ dada por

$$\pi \ltimes U(f) = \int_G U_s\pi(f(s))d\mu(s).$$

A representação satisfaz que $||\pi \ltimes U(f)|| \leq ||f||_1$. Mais ainda, é possível obter uma representação deste tipo injetiva.

As demonstrações destes fatos são similares às demonstrações da Proposição 1.4.4 e do Lema 1.4.6 e serão omitidas.

Podemos então estabelecer a seguinte definição:

Definição 2.2.4. *A álgebra $A \ltimes_\alpha G$ é definida como o completamento de $C_c(G, A, \alpha)^\#$ com relação à norma*

$$||f|| = sup\{||\pi \ltimes U(f)|| : (\pi, U) \text{ é representação covariante oposta de } (A, G, \alpha)\}.$$

Observação 2.2.5. *Chamaremos de $L^1(G, A, \alpha)^\#$ o completamento de $C_c(G, A, \alpha)^\#$ com relação à norma $||.||_1$.*

Teorema 2.2.6. *Se G é comutativo, as álgebras $A \ltimes_\alpha G$ e $A \rtimes_\alpha G$ são $*$-isomorfas.*

Demonstração. Seja Δ a função modular de G. Defina a aplicação $\Psi : C_c(G, A, \alpha)^\# \longrightarrow C_c(G, A, \alpha)$ tal que

$$\Psi(f)(s) = \Delta(s^{-1})\alpha_s(f(s^{-1})).$$

É imediato que Ψ é linear e sobrejetiva.

Temos que

$$\begin{aligned}
\Psi(f^*)(s) &= \Delta(s^{-1})\alpha_s(f^*(s^{-1})) \\
&= \Delta(s^{-1})\alpha_s(\Delta(s)\alpha_{s^{-1}}(f(s)^*)) \\
&= \Delta(s^{-1})\alpha_s(\Delta(s)\alpha_{s^{-1}}(f(s))^*) \\
&= \Delta(s^{-1})\alpha_s(\Psi(f)(s^{-1})^*) \\
&= \Psi(f)^*(s).
\end{aligned}$$

Mais ainda, temos

$$\begin{aligned}
\Psi(f) * \Psi(g)(s) &= \int_G \Psi(f)(r)\alpha_r(\Psi(g)(r^{-1}s))d\mu(r) \\
&= \int_G \Delta(r^{-1})\alpha_r(f(r^{-1}))\Delta(s^{-1}r)\alpha_s(g(s^{-1}r)) \\
&= \Delta(s^{-1})\int_G \alpha_r(f(r^{-1}))\alpha_s(g(s^{-1}r)).
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\Psi(f * g)(s) &= \Delta(s)^{-1}\alpha_s(\int_G \alpha_r(f(s^{-1}r^{-1}))g(r)d\mu(r)) \\
&= \Delta(s^{-1})\int_G \alpha_s r(f((rs)^{-1}))\alpha_s(g(r))d\mu(r) \\
&= \Delta(s^{-1})\int_G \alpha_s r(f((sr)^{-1}))\alpha_s(g(r))d\mu(r) \\
&= \Delta(s^{-1})\int_G \alpha_r(f(r^{-1}))\alpha_s(g(s^{-1}r)).
\end{aligned}$$

Precisamos mostrar finalmente que Ψ é isometria. Com efeito, se (π, U) é representação covariante de (A, G, α) obtemos que

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U(\Psi(f)) &= \int_G \Delta(s^{-1})\pi(\alpha_s(f(s^{-1})))U_s d\mu(s) \\
&= \int_G \Delta(s^{-1})U_s \pi(f(s^{-1}))d\mu(s) \\
&= \int_G U_s^* \pi(f(s))d\mu(s).
\end{aligned}$$

Como (π, U^*) é representação covariante oposta de (A, G, α) e, como todas as representações covariantes opostas são desta forma, segue o resultado. □

Usando a demonstração do teorema acima e o Teorema 1.4.10 obtemos:

Corolário 2.2.7. *Seja π uma representação injetiva de uma C^*-álgebra A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então se $f \in A \ltimes_\alpha \mathbb{Z}$ então $||f|| = ||\hat{\pi} \ltimes U_+||$, onde*

$$\hat{\pi}(a)(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\alpha^n(a)h_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

e

$$U_+(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (h_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.10 e pela proposição acima, sabemos que se $f \in A \ltimes_\alpha \mathbb{Z}$ então

$$||f|| = ||\Psi(f)|| = ||\tilde{\pi} \rtimes U_+(\Psi(f))||.$$

Note, porém, que $||\tilde{\pi} \rtimes U_+(\Psi(f))|| = \left|\left|\hat{\pi} \rtimes U_+^*(\Psi(f))\right|\right|$.
Logo,

$$||f|| = \left|\left|\hat{\pi} \rtimes U_+^*(\Psi(f))\right|\right| = ||\hat{\pi} \ltimes U_+(f)||.$$

□

2.3 Representações Covariantes Isométricas e O Produto Semi Cruzado

Suponha que (X, φ) seja um sistema dinâmico. Vimos no Capítulo 1 que se φ fosse um homeomorfismo existiria uma C^*-álgebra associada a este sistema dinâmico, $C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, onde α era o automorfismo induzido por φ, como na Proposição 1.2.3. Ocorre frequentemente que estamos interessados neste sistema dinâmico mesmo quando φ não seja inversível.

Neste caso, chamamos a dinâmica de não-conservativa, em oposição ao caso onde φ é um homeomorfismo, onde chamamos a dinâmica de conservativa. Claramente, não podemos aplicar os resultados do último capítulo neste caso, mas mesmo assim queremos encontrar alguma álgebra de operadores análoga à álgebra do Produto Cruzado.

Suponha que tenhamos uma C^*-álgebra A e um $*$-endomorfismo α em A. Fixaremos o par (A, α) para o restante da seção. Analogamente às representações covariantes, temos a seguinte definição:

Definição 2.3.1. *Sejam π uma representação de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e V uma isometria no mesmo espaço $\mathcal{H}$. Se $V\pi(\alpha(a)) = \pi(a)V$ $\forall a \in A$ dizemos que (π, V) é uma **representação covariante isométrica** do par (A, α).*

Novamente não existe garantia, *a priori*, que representações covariantes isométricas existam. A próxima proposição garante que de fato elas existem.

Observação 2.3.2. *Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quando escrevermos um elemento da forma $x_k = 0$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $k < 0$ assumiremos sempre que $x_k = 0$.*

Proposição 2.3.3. *Todo par (A, α) admite uma representação covariante isométrica $(\tilde{\pi}, U_+)$.*

Demonstração. Seja $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$ visto como o espaço de Hilbert das sequências $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}$ que satisfazem que $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||h_n||^2 < \infty$. Seja π uma representação de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Considere a representação $\tilde{\pi}$ de A em $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$ dada por

$$\tilde{\pi}(a)(h) = (\pi(\alpha^n(a))h_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

onde $a \in A$ e $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Considere agora a isometria U_+ em $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$ dada por

$$U_+h = (h_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} U_+\tilde{\pi}(\alpha(a))h &= U_+(\pi(\alpha^{n+1}(a))h_n) = (\pi(\alpha^n(a))h_{n-1}) \\ &= \tilde{\pi}(a)(h_{n-1}) = \tilde{\pi}(a)U_+(h_{n-1}). \end{aligned}$$

□

Aplicações isométricas como U_+ acima aparecerão constantemente na teoria de produtos semi-cruzados e portanto vale a pena isolar esta classe de tais aplicações lineares.

Definição 2.3.4. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador linear U_+ em $L^2(\mathbb{N},\mathcal{H})$ satisfazendo*

$$U_+(h_n) = (h_{n-1}) \quad \forall (h_n) \in L^2(\mathbb{N},\mathcal{H})$$

*é chamado de um **operador de translação**.*

Colocaremos agora sobre $L^1(\mathbb{N},A)$ uma estrutura de álgebra. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{N},A)$, seguindo a Observação 1.4.9, podemos definir o produto como

$$f * g(l) = \sum_{n+m=l} f(n)\alpha^n(g(m)) \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Por razões técnicas, seguiremos [10] e definiremos seu produto de maneira invertida como

$$f * g(l) = \sum_{n+m=l} \alpha^m(f(n))g(m) \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

O produto introduzido dá ao espaço $L^1(\mathbb{N},A)$ uma estrutura de álgebra de Banach. Para ver isto, suponha que $f, g \in C_c(\mathbb{N},A)$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual, se $n \geq N$, temos que $a_n = b_n = 0$. Observe que

$$\begin{aligned} ||f * g||_1 &= \sum_{l=0}^{N} \left|\left| \sum_{n+m=l} \alpha^m(a_n)b_m \right|\right| \leq \sum_{l=0}^{N} \sum_{n+m=l} ||\alpha^m(a_n)b_m|| \\ &\leq \sum_{l=0}^{N} \sum_{n+m=l} ||a_n|| \, ||b_m|| = ||f||_1 \, ||g||_1 \, . \end{aligned}$$

Usando que $C_c(\mathbb{N},A)$ é denso em $L^1(\mathbb{N},A)$, segue o resultado.

Definição 2.3.5. *A álgebra de Banach acima será denotada por $L^1(\mathbb{N},A,\alpha)$.*

Note que $L^1(\mathbb{N},A,\alpha)$ pode ser imersa isometricamente na álgebra $L^1(\mathbb{Z},A,\alpha)^{\#}$.

No que segue, usaremos a álgebra de Banach $L^1(\mathbb{N},A,\alpha)$ para construir o Produto Semi-Cruzado. Como foi feito na Observação 1.4.9 escrevemos os elementos de $L^1(\mathbb{N},A,\alpha)$ como

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \otimes \delta_n,$$

onde

$$a_n(m) \otimes \delta_n = \begin{cases} a_n, & \text{se} \quad m = n, \\ 0, & \text{se} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Definição 2.3.6. *Uma **representação** de $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um homomosfismo contínuo $\varphi : L^1(\mathbb{N}, A, \alpha) \to B(\mathcal{H})$ entre álgebras de Banach.*

No novo contexto podemos, também, considerar a forma integrada de uma representação isométrica covariante. A proposição a seguir resume esta ideia.

Proposição 2.3.7. *Dada (π, V) uma representação isométrica covariante de (A, α) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, temos uma representação $\pi \times V$ induzida, de $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Seja $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \otimes \delta_n \in L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$. Defina $\pi \times V$ como

$$\pi \times V(f) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n \pi(a_n).$$

A linearidade de $\pi \times V$ é imediata da definição. A continuidade também é verificada, pois se $h \in \mathcal{H}$ com $||h|| \leq 1$,

$$\begin{aligned} ||\pi \times V(f)h|| &= \left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} V^n \pi(a_n)h\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||V^n \pi(a_n)h|| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n|| = ||f||_1 \end{aligned}$$

Como se $a, b \in A$ temos

$$\begin{aligned} (\pi \times V(a \otimes \delta_n))(\pi \times V(b \otimes \delta_m)) &= V^n \pi(a) V^m \pi(b) \\ &= V^{n+m} \pi(\alpha^m(a))\pi(b) \\ &= V^{n+m} \pi(\alpha^m(a)b) \\ &= \pi \times V(\alpha^m(a)b \otimes \delta_{n+m}) \\ &= \pi \times V((a \otimes \delta_n)(b \otimes \delta_m)) \end{aligned}$$

segue que $\pi \times V$ é um homomorfismo. □

Lema 2.3.8. *Suponha que π seja uma representação injetiva de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então a representação $\tilde{\pi} \times U_+$ é representação covariante isométrica injetiva de (A, α).*

Demonstração. Suponha que $f \in L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ e $f \neq 0$. Para $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$ temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} \times U_+(f)(h) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} U_+^n \tilde{\pi}(a_n)h \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\pi(\alpha^{m-n}(a_n)h_{m-n}))_{m\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Suponha que $j \in \mathbb{N}$ seja o menor número natural tal que $a_j \neq 0$. Como π é injetiva existe $k \in \mathcal{H}$ tal que $\pi(a_j)k \neq 0$. Tome $h \in l^2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$ tal que $h_j = k$. Segue

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} \times U_+(f)(h) &= \sum_{n \geq j} (\pi(\alpha^{m-n}(a_n)h_{m-n}))_{m\in\mathbb{N}} \\ &= (0, ..., 0, \pi(a_j)k, ...) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Vamos dotar a álgebra $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ com a seguinte norma

$$||f|| = \sup\{||\pi \times V(f)|| : \ (\pi, V) \text{ é representação covariante isométrica de } (A, \alpha)\}. \quad (2.1)$$

Com as proposições acima e no espírito do Capítulo 1 vemos que a expressão 2.1 nos dá de fato uma norma.

Definição 2.3.9. *Chamaremos de* ***produto semi-cruzado*** *o completamento da álgebra $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ munida da norma 2.1. Denotaremos esta álgebra por $A \times_\alpha \mathbb{N}$.*

O produto semi-cruzado em geral é apenas uma álgebra de Banach sem involução, a próxima proposição mostra, porém, que podemos enxergar A como uma C^*-subálgebra de $A \times_\alpha \mathbb{N}$.

Proposição 2.3.10. *Existe uma imersão isométrica de A em $A \times_\alpha \mathbb{N}$ dada por $a \mapsto a \otimes \delta_0$.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} j: \ & A \to A \times_\alpha \mathbb{N} \\ & a \mapsto a \otimes \delta_0 \quad . \end{aligned}$$

A única condição que não é imediata é que j preserve a norma. Mas dada uma representação covariante isométrica (π, V) de (A, α), temos

$$\begin{aligned} ||\pi \times V(j(a))|| &= ||\pi \times V(a \otimes \delta_0)|| \\ &= ||\pi(a)|| \\ &\leq ||a|| \, . \end{aligned}$$

Agora, se π acima for injetiva, teremos que

$$||\pi \times V(j(a))|| = ||a|| \, .$$

Portanto segue que $||a \otimes \delta_0|| = ||a||$. □

Demonstraremos agora dois resultados sobre isometrias em espaços de Hilbert que são essencialmente o resultado clássico conhecido com Teorema de Decomposição de Wold. Eles auxiliarão na busca de uma caracterização da norma 2.1.

Definição 2.3.11. *Uma isometria V em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é chamada de uma* ***isometria pura*** *se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathcal{H} = \emptyset$*

Proposição 2.3.12. *Dada uma representação covariante (π, V) do par (A, α) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, temos uma decomposição $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ onde $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são invariantes por V e onde, se $\mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ temos que $V_1 = V|_{\mathcal{H}_1}$ é unitário e se $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ temos que $V_2 = V|_{\mathcal{H}_2}$ é uma isometria pura. Mais ainda, $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são invariantes por $\pi(A)$ e, se $\pi_i = \pi|_{\mathcal{H}_i}$ para $i = 1, 2$, podemos escrever $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. Além disso, as relações $V_i\pi_i(\alpha(a)) = \pi_i(a)V_i$ para todo $a \in A$ são satisfeitas para $i = 1, 2$.*

Demonstração. Defina $\mathcal{H}_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^{\perp}$.

Claramente, $V\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$. Note que se $h \in \mathcal{H}_1$, então $V^*h \in \mathcal{H}_1$. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $h_n \in \mathcal{H}$ satisfazendo que $h = V^n h_n$. Temos desta forma que, se $n \in \mathbb{N}$

$$k = V^*h = V^*V^n h_n = V^{n-1}h_n.$$

Agora, é simples ver que V_1 é unitário, pois se $h \in \mathcal{H}_1$, podemos escrever $h = Vh_1$, como acima e veremos que

$$V_1V_1^*h = VV^*Vh_1 = Vh_1 = h.$$

Para mostrarmos que $\mathcal{H}_2$ é invariante por V, tomemos $h \in \mathcal{H}_1$ e $k \in \mathcal{H}_2$ e observemos que

$$\big\langle Vk, h\big\rangle = \big\langle k, V^*h\big\rangle = 0,$$

pois $V^*h \in \mathcal{H}_1$. Da definição de $\mathcal{H}_2$ é fácil ver que V_2 é isometria pura.

Considere agora $a \in A$. Segue que se $h \in \mathcal{H}_1$ temos $h = V^n h_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto

$$\pi(a)h = \pi(a)V^n h_n = V^n\pi(\alpha^n(a))h_n.$$

Se agora $k \in \mathcal{H}_2$, temos

$$\big\langle \pi(a)k, h\big\rangle = \big\langle k, \pi(a^*)h\big\rangle = 0.$$

O que mostra que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são invariantes por $\pi(A)$.

As outras afirmações são imediatas. ☐

Proposição 2.3.13. *Dada uma representação covariante isométrica (π, V) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com V uma isometria pura. Então existe um subespaço fechado $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ e uma aplicação unitária $W : L^2(\mathbb{N}, \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo que*

$$VW = WU_+$$

e

$$W\tilde{\pi}(a) = \pi(a)W$$

onde U_+ é o operador de translação em $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{K})$ e $\tilde{\pi}$ é a representação induzida por π como na Proposição 2.3.3.

Demonstração. Começamos definindo $\mathcal{K} = (V\mathcal{H})^{\perp}$. Mostraremos que $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$, onde $\mathcal{K}_n = V^n\mathcal{K}$. Assumiremos este resultado momentaneamente. Definimos W de forma que $W(k_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} V^n k_n$. Claramente, W é uma isometria sobrejetiva e, portanto, W é unitário.

Note que

$$\begin{aligned} WU_+(k_0, k_1, k_2, ...) &= W(0, k_0, k_1, k_2, ...) \\ &= Vk_0 + V^2k_1 + V^3k_2 + ... \\ &= V(\sum_{n=1}^{\infty} V^n k_n) \\ &= VW(k_0, k_1, k_2, ...) \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} W\tilde{\pi}(a)(k_0, k_1, k_2, ...) &= W(\pi(a)k_0, \pi(\alpha(a))k_1, \pi(\alpha^2(a))k_2, ...) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} V^n \pi(\alpha^n(a))k_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(a)V^n k_n \\ &= \pi(a)W(k_0, k_1, k_2, ...) \end{aligned}$$

Exibiremos agora a decomposição de $\mathcal{H}$, como afirmado no início da prova. Fazemos primeiramente a observação que $V^n\mathcal{K} \perp V^m\mathcal{K}$ se $n > m$. Com efeito, se $k, h \in \mathcal{K}$

$$\left\langle V^n k, V^m h \right\rangle = \left\langle (V^m)^* V^n k, h \right\rangle = \left\langle V^{n-m} k, h \right\rangle = 0.$$

Pela própria definição de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_0$ temos que $\mathcal{H} = V\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}_0$, e portanto, $\mathcal{H} = V^2\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_0$. Por indução, obtemos ainda que $\mathcal{H} = V^n\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}_{n-1} \oplus ... \oplus \mathcal{K}_0$. Fixe, assim, um elemento $h \in \mathcal{H}$ e seja $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a sequência em $\mathcal{K}$ que satisfaz que dado um $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $h = h_{n+1} + V^n k_n + V^{n-1}k_{n-1} + ... + k_0$ com $h_{n+1} \in V^{n+1}\mathcal{H}$. Como

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\left|V^j k_j\right|\right|^2 = \left|\left|\sum_{j=1}^{n} V^j k_j\right|\right|^2 \leq ||h||^2$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ podemos, desta forma, definir o elemento $\bar{h} = \sum_{j=1}^{\infty} V^j k_j$. Basta assim mostrar que $\bar{h} = h$. Isto decorre facilmente, uma vez que

$$h - \bar{h} = h_{n+1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} V^j k_j \in V^n\mathcal{H} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o que por hipótese implica que $h - \bar{h} = 0$. □

Corolário 2.3.14. *Seja (π, V) uma representação covariante isométrica de (A, α) com V uma isometria pura. Então $\pi \times V$ é equivalente à $\tilde{\pi} \times U_+$, definida como na Proposição 2.3.13 no sentido que $||\pi \times V(f)|| = ||\tilde{\pi} \times U_+(f)||$ $\forall f \in A \times_\alpha \mathbb{N}$.*

Lema 2.3.15. *Dada uma C^*-álgebra A e um $*$-endomorfismo injetivo α em A, existe uma C^*-álgebra B contendo A como uma C^*-subálgebra e β um $*$-automorfismo em B estendendo α.*

Demonstração. Considere a sequência direta de C^*-álgebras (A_n, γ_n), onde $A_n = A$ e $\gamma_n = \alpha$. Seja B o limite direto desta sequência (veja [6]). Como $\gamma_0 = \alpha$ é injetivo a aplicação natural γ^n de $A_n = A$ em B é uma $*$-imersão isométrica. Denotaremos a imagem $\gamma^n(A_n)$ como A_n e a aplicação induzida por α denotaremos por β_n. Escreveremos ainda como j_n a inclusão de A_n em A_{n+1}. Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
A_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "j_n"'] & A_n \arrow[d, "j_n"'] \\
A_{n+1} \arrow[r, "\beta_{n+1}"] \arrow[d] & A_{n+1} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

Como β_{n+1} estende β_n, podemos definir uma aplicação β em $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, estendendo cada β_n, em particular β_0. Agora, segue que $\beta(A_n) = \beta_n(A_n) =$

A_{n-1}, o que mostra que β é sobrejetivo. Mais ainda, β é isometria, pois cada β_n é injetivo e portanto isometria. Usando que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso em B obtemos o $*$-automorfismo desejado, estendendo β a B. $\square$

Teorema 2.3.16. *Nas condições acima $A \times_\alpha \mathbb{N}$ é isometricamente isomorfa à uma subálgebra de $B \rtimes_\beta \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como $A \subset B$ e β estende α, $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ pode ser imersa em $L^1(\mathbb{Z}, B, \alpha)^{\#}$, e temos também a imersão de $L^1(\mathbb{Z}, B, \alpha)^{\#}$ em $A \ltimes_\alpha \mathbb{Z}$, obtemos a cadeia de homomorfismos

$$L^1(\mathbb{N}, A, \alpha) \longrightarrow L^1(\mathbb{Z}, B, \alpha)^{\#} \longrightarrow A \ltimes_\alpha \mathbb{Z}.$$

Chamemos o homomorfismo resultante de ι. Pelo Teorema 2.2.6 e pelo fato de $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ ser densa em $A \times \mathbb{N}$ é suficiente mostrar que ι é uma isometria.

Já que toda representação covariante oposta de $(B, \mathbb{Z}, \beta)$ se restringe a uma representação covariante isométrica de (A, α) segue que $||f|| \geq ||\iota(f)||$ para $f \in L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$. Devemos provar a desigualdade inversa.

Considere uma representação covariante isométrica (π, V). Pela Proposição 2.3.12, podemos isolar os casos em que V é unitário ou isometria pura. Suponha que V seja unitário. Pela demonstração do lema anterior, podemos ver que a álgebra $\bar{B}$ gerada pelos conjuntos da forma $\beta^{-n}(A)$, com $n \in \mathbb{N}$ é densa em B. Estenda π a $\bar{B}$ fazendo $\bar{\pi}(a) = V^n \pi(\beta(a))(V^*)^n$ se $\beta^n(a) \in A$. Observe que se $\beta^n(a), \beta^m(a) \in A$ e $n \geq m$ temos

$$\begin{aligned}
V^n \pi(\beta^n(a))(V^*)^n &= V^n(\beta^{n-m}(\beta^m(a)))(V^*)^n \\
&= V^n(\alpha^{n-m}(\beta^m(a)))(V^*)^n \\
&= V^m(\beta^m(a))V^{n-m}(V^*)^n \\
&= V^m(\beta^m(a))(V^*)^m
\end{aligned}$$

o que garante que $\bar{\pi}$ está bem definida. Dado, $a \in B$, tal que $\beta^n(a) \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(\beta(a)) &= V^{n-1}\pi(\beta^{n-1}(\beta(a)))(V^*)^{n-1} \\
&= V^* V^n \pi(\beta^n(a))(V^*)^n V \\
&= V^* \bar{\pi}(a) V
\end{aligned}$$

Já que $||\bar{\pi}(a)|| = ||\pi(\beta^n(a))|| \leq ||\beta^n(a)|| = ||a||$, podemos estender $\bar{\pi}$ a B. É simples ver que $(\bar{\pi}, V)$ é representação covariante oposta de $(B, \mathbb{Z}, \beta)$.

Suponha agora que V seja uma isometria pura. Pela Proposição 2.3.14 podemos substituir (π, V) pela representação covariante $(\tilde{\pi}, U_+)$ no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{K})$. Por [6] 5.5.1 existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ contendo $\mathcal{K}$ como subespaço e uma representação ρ de B em $\mathcal{H}$ estendendo π. Defina a representação covariante $(\tilde{\rho}, U)$ de $(B, \mathbb{Z}, \beta)$ em

$L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ satisfazendo que

$$\tilde{\rho}(a)(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\rho(\beta^n(a))h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

e

$$U(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (h_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Já sabemos que $(\tilde{\rho}, U)$ é representação covariante oposta de $(B, \mathbb{Z}, \beta)$. É imediato checar que $\tilde{\pi}$ e U_+ são as restrições de $\tilde{\rho}$ e U, respectivamente, a $L^2(\mathbb{N}, \mathcal{K})$ visto como subespaço de $L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$.

Desta forma, obtemos também que $||f|| \leq ||\iota(f)||$ para $f \in A \times \mathbb{N}$. $\square$

Este último resultado é importante por si só, mas para nós será importante principalmente porque fornece uma imersão isométrica do produto semi-cruzado $A \times_\alpha \mathbb{N}$, com α injetivo, em um produto cruzado $B \rtimes_\beta \mathbb{Z}$, que como sabemos pelo Teorema 1.4.10 possui uma estrutura razoavelmente simples. Claro que temos a restrição de que este resultado só vale quando o $*$-endomorfismo α em questão é injetivo. Queremos corrigir aqui esta deficiência. Para isto precisamos de um objeto novo.

Definição 2.3.17. *Dado um $*$-endomorfismo α de uma C^*-álgebra A definimos α-**radical** de A como*

$$R_\alpha = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} ker(\alpha^n)}.$$

Podemos fazer alguma observações sobre o α-radical. Primeiro, podemos notar que $(ker(\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma sequência crescente de ideais auto-adjuntos, isto é, se $a \in R_\alpha$ então $a^* \in R_\alpha$. Logo, R_α é ideal auto-adjunto de A. Segundo, existe um $*$-endomorfismo injetivo α' em A/R_α, definido como $\alpha'(a + R_\alpha) = \alpha(a) + R_\alpha$. E por fim temos o lema:

Lema 2.3.18. *Seja (π, V) uma representação covariante isométrica de (A, α) então existe uma representação covariante isométrica induzida (π', U) de $(A/R_\alpha, \alpha')$ satisfazendo que para todo $f \in L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$*

$$||\pi \times U(f)|| = ||\pi' \times U(f + R_\alpha)||,$$

onde $(f + R_\alpha)$ é o elemento de $L^1(\mathbb{N}, A/R_\alpha, \alpha')$ satisfazendo que $(f + R_\alpha)(n) = f(n) + R_\alpha$.

Demonstração. Afirmamos que $R_\alpha \subset ker(\pi)$. De fato, se $a \in ker(\alpha^n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\pi(a) = V^n\pi(\alpha^n(a))(V^*)^n = 0.$$

Como $ker(\pi)$ é fechado, a afirmação está provada.

Defina $\pi'(a + R_\alpha) = \pi(a)$. O resto da demonstração é imediato. $\square$

Podemos agora obter uma nova caracterização da norma do produto semi-cruzado.

Proposição 2.3.19. *Para todo $f \in A \times_\alpha \mathbb{N}$ vale que $||f|| = \sup\{||\pi \times V(f)||\,;\ V$ é isometria pura$\}$.*

Demonstração. Começamos supondo que o resultado vale para todo $f \in L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$.

Para $f \in A \times_\alpha \mathbb{N}$ defina

$$||f||_* = \sup\{||\pi \times V(f)|| : V \text{ é isometria pura}\}.$$

Temos imediatamente que $||f||_* \leq ||f||$. Mostraremos a desigualdade oposta.

Sejam (π, V) representação covariante isométrica de (A, α) com V isometria pura e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$ convergindo para f e $\varepsilon > 0$. Tomando n grande o suficiente temos que $||f_n - f|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e assim,

$$\begin{aligned} |\,||\pi \times V(f_n)|| - ||\pi \times V(f)||\,| &\leq ||\pi \times V(f_n - f)|| \\ &\leq ||f_n - f|| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$||\pi \times V(f_n)|| \leq ||\pi \times V(f)|| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando supremo sobre as representações covariantes isométricas com V isometria pura, obtemos

$$||f|| \leq ||f_n|| + \frac{\varepsilon}{2} \leq ||f||_* + \varepsilon.$$

Agora usando Proposição 2.3.12 e o resultado acima, é suficiente mostrar que fixado $\varepsilon > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{N}, A, \alpha)$, e dada uma representação covariante isométrica (π, V) com V unitário, existe uma representação covariante isométrica (ω, U_+) com U_+ isometria pura satisfazendo que

$$||\pi \times V(f)|| \leq ||\omega \times U_+(f)|| + \varepsilon.$$

Consideremos, para este fim, o par $(A/R_\alpha, \alpha')$ como no Lema 2.3.18. Pela demonstração do Teorema 2.3.16, $A/R_\alpha \times_{\alpha'} \mathbb{N}$ pode ser imersa isometricamente no produto cruzado $B \ltimes_\beta \mathbb{Z}$ via uma aplicação ι. Se ρ é representação injetiva de B em um espaço de Hilbert

$\mathcal{H}$, então

$$||f|| = ||\hat{\rho} \rtimes U(f)||\,,$$

pelo Corolário 2.2.7.

Temos, novamente fazendo uso do Lema 2.3.18 que

$$\begin{aligned} ||\pi \times V(f)|| &= ||\pi' \times V(f + R_\alpha)|| \\ &\leq ||f + R_\alpha|| \\ &= ||\hat{\rho} \rtimes U(\iota(f + R_\alpha))||\,. \end{aligned}$$

Tome a sequência crescente de subespaços de $L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, $(\mathcal{H})_n$, onde

$$\mathcal{H}_n = \{(h_k)_{k\in\mathbb{Z}} : h_k = 0 \quad \text{se} \quad k < -n\}.$$

Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ é denso em $L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ e cada $\mathcal{H}_n$ é invariante por $\hat{\rho} \rtimes (\iota(A/R_\alpha \times_{\alpha'} \mathbb{N}))$ podemos encontrar n grande o suficiente para que

$$||\hat{\rho} \rtimes U(\iota(f + R_\alpha))|_{\mathcal{H}_n}|| > ||f + R_\alpha|| - \varepsilon.$$

Basta definir para $a \in A$, $\omega(a) = \hat{\rho}(a + R_\alpha)|_{\mathcal{H}_n}$ e $U_+ = U|_{\mathcal{H}_n}$. □

2.4 Um Teorema Sobre Isomorfismos de Produtos Semi Cruzados

Nas seções anteriores mencionamos várias vezes como a teoria de sistemas dinâmicos topológicos motivam a definição e o estudo da álgebra do produto semi-cruzado, contudo não apresentamos nenhum resultado rigoroso que justificasse o que foi dito. Na verdade existem diversos resultados que relacionam os dois campos. Nas seções que seguem mostraremos um resultado importante que diz que o produto semi-cruzado é um invariante completo de um sistema dinâmico em um sentido que faremos preciso mais adiante. Mostraremos nesta seção a parte fácil do teorema: se dois sistemas dinâmicos são conjugados então os respectivos produtos semi-cruzados são isomorfos. Depois começaremos a construir o aparato, seguindo [2], para demonstrar a recíproca deste teorema.

Consideramos agora uma C^*-álgebra comutativa $A = C_0(X)$, onde X é um espaço localmente compacto, e $\varphi : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e própria. Se $\alpha(f) = f \circ \varphi$ para $f \in C_0(X)$ substituiremos, por simplicidade, α por φ. Utilizaremos, portanto, a seguinte notação

$$C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N} = C_0(X) \times_\alpha \mathbb{N}.$$

Da mesma forma, escrevemos

$$L^1(\mathbb{Z}, C_0(X), \varphi) = L^1(\mathbb{Z}, C_0(X), \alpha).$$

Nesta seção mostraremos que se os sistemas dinâmicos (X, φ) e (Y, ψ) são conjugados, então $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$ e $C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N}$ são isomorfos.

Definição 2.4.1. *Sejam (X, φ) e (Y, ψ) dois sistemas dinâmicos. Dizemos que (X, φ) e (Y, ψ) são* ***conjugados*** *se existe um homeomorfismo γ de X em Y fazendo o diagrama*

comutativo. Chamamos a aplicação γ de uma ***conjugação*** *entre (X, φ) e (Y, ψ).*

Teorema 2.4.2. *Sejam (X, φ) e (Y, ψ) dois sistemas dinâmicos e γ uma conjugação de (X, φ) em (Y, ψ). Então existe um isomorfismo isométrico $\Gamma : C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N} \longrightarrow C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$.*

Demonstração. Defina a aplicação Γ em $L^1(\mathbb{N}, C_0(Y), \psi)$ como

$$\Gamma(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \otimes \delta_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n \circ \gamma) \otimes \delta_n$$

e a aplicação auxiliar $\hat{\gamma}$ de $C_0(Y)$ em $C_0(X)$ dada por $\hat{\gamma}(f) = f \circ \gamma$. Como γ é própria e contínua, a aplicação Γ está bem definida. Claramente, Γ é linear.

Note que se (π, V) é representação covariante isométrica de $L^1(\mathbb{N}, C_0(X), \psi)$ então $(\pi \circ \hat{\gamma}, V)$ é representação covariante isométrica de $L^1(\mathbb{N}, C_0(Y), \varphi)$. De fato,

$$\begin{aligned} V\pi(\hat{\gamma}(f \circ \psi)) &= V\pi(f \circ \psi \circ \gamma) \\ &= V\pi(f \circ \gamma \circ \varphi) \\ &= \pi(f \circ \gamma)V \\ &= \pi(\hat{\gamma}(f))V. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \left\| \pi \times V(\Gamma(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \otimes \delta_n)) \right\| &= \left\| \pi \times V(\sum_{n=0}^{\infty} (f_n \circ \gamma) \otimes \delta_n) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} V^n \pi(f_n \circ \gamma) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} V^n (\pi \circ \hat{\gamma})(f_n) \right\|. \end{aligned}$$

É simples ver que toda representação covariante isométrica de $L^1(\mathbb{N}, C_0(Y), \varphi)$ é da forma $(\pi \circ \hat{\gamma}, V)$, o que garante que Γ é isometria.

Além disso, Γ é homomorfismo, pois

$$\begin{aligned} \Gamma([f \otimes \delta_n][g \otimes \delta_m]) &= \Gamma((f \circ \psi^m) g \otimes \delta_{n+m}) \\ &= (f \circ \psi^m \circ \gamma)(g \circ \gamma) \otimes \delta_{n+m} \\ &= (f \circ \gamma \circ \varphi^m)(g \circ \gamma) \otimes \delta_{n+m} \\ &= [(f \circ \gamma) \otimes \delta_n][(g \circ \gamma) \otimes \delta_m] \\ &= \Gamma(f \otimes \delta_n)\Gamma(g \otimes \delta_m). \end{aligned}$$

Por fim, note que $\Gamma(L^1(\mathbb{N}, C_0(Y), \varphi)) = L^1(\mathbb{N}, C_0(X), \psi)$. Estendendo Γ a $C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N}$, usando que sua imagem é densa em $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$ e que Γ é uma isometria, o resultado do teorema se verifica. □

O resultado acima, na verdade fornece mais que prometemos, já que a conjugação dos sistemas dinâmicos garante na verdade um isomorfismo isométrico entre os respectivos produtos semi-cruzados.

2.5 Álgebras de conjugação topológica

Nesta seção introduziremos uma classe de álgebras de operadores chamadas álgebras de conjugação topológica.

Definição 2.5.1. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $\varphi : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Definimos a álgebra $\mathcal{P}(X, \varphi)$ como a* ***álgebra dos polinômios*** *$\sum_{n=0}^{N} f_n U^n$, onde $f_n \in C(X)$, com a multiplicação definida por*

$$Uf = (f \circ \varphi)U \tag{2.2}$$

para todo $f \in C(X)$.

Seja A uma álgebra de Banach satisfazendo que:

1. $P(X, \varphi)$ é uma subálgebra densa de A.

2. $C(X) \subset \mathcal{P}(X, \varphi) \subset A$ é subálgebra fechada, e existe um homomorfismo E_0 de A em $C(X)$ tal que, $E_0(f) = f$ para todo $f \in C(X)$ e $ker(E_0) = AU$.

3. U não é divisor de 0.

Lema 2.5.2. *Todo homomorfismo ω de uma álgebra de Banach A em uma C^*-álgebra comutativa é contínuo.*

Demonstração. Tome $a \in A$ e seja $r(a)$ seu raio espectral. Assim,

$$||\omega(a)|| = r(\omega(a)) \leq r(a) \leq ||a||\,.$$

□

O Lema acima mostra que E_0 é homomorfismo contínuo, e em particular, AU é fechado. Considere, portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} S : A &\longrightarrow AU \\ a &\longmapsto aU. \end{aligned}$$

Claramente, S é sobrejetiva e contínua. Pela condição 3 acima, temos que S é também injetiva. Usando o Teorema da Aplicação Inversa, obtemos uma aplicação inversa T contínua. Definimos as aplicações lineares contínuas em A como

$$E_n = E_0(T(I - E_0))^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com a definição acima, vemos imediatamente que se $a = \sum_{n=0}^{N} f_n U^n \in \mathcal{P}(X, \varphi)$, então

$$E_j(a) = \begin{cases} f_j, & \text{se} \quad j \leq N \\ 0, & \text{se} \quad j > N \end{cases}$$

Possuímos, assim, as noções necessárias para introduzir a classe de álgebras de operadores que estudaremos neste capítulo.

Definição 2.5.3. *Sejam X é um espaço compacto de Hausdorff, φ é aplicação contínua de X em X e A é uma álgebra de Banach satisfazendo as condições 1, 2 e 3. Dizemos que A é uma **álgebra de conjugação topológica** de (X, φ) se*

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} (||E_n||\,||U^n||)^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Definição 2.5.4. *Chamamos de **álgebra de séries de potências**, a álgebra composta pelos elementos $\sum_{n=0}^{\infty} f_n U^n$, onde $f \in C(X)$, com o produto definido por 2.2. Denotaremos esta álgebra por $\mathcal{P}^{\infty}(X,\varphi)$.*

Pelo que foi visto acima, se A é álgebra de conjugação topológica para o par (X,φ), temos o homomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F}: A & \longrightarrow & \mathcal{P}^{\infty}(X,\varphi) \\ a & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n(a)U^n.\end{array}$$

A definição acima é deficiente pois não compreende os casos em que o espaço X, em questão, é localmente compacto, mas não é compacto. Neste caso, consideramos a compactificação de um ponto de X, que denotaremos por $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$. Identificaremos $C(\hat{X})$ com a unitalização de $C_0(X)$ estendendo cada $f \in C_0(X)$ a uma função contínua $\hat{f}$ em $C(\hat{X})$, fazendo $\hat{f}(\omega) = 0$ e $\hat{f}(x) = f(x)$ para $x \in X$. Com esta identificação, temos ainda, que toda aplicação contínua φ de X em X se estende a uma aplicação $\hat{\varphi}$ de $\hat{X}$ em $\hat{X}$, fazendo $\hat{\varphi}(\omega) = \omega$ e $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para $x \in X$.

Definição 2.5.5. *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff não compacto e $\varphi : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e própria. Seja $\hat{A}$ uma álgebra de conjugação topológica de $(\hat{X},\hat{\varphi})$. Então a álgebra de Banach A dada pelo completamento dos polinômios em $\mathcal{P}(\hat{X},\hat{\varphi})$ com coeficientes em $C_0(X)$ será chamada de uma **álgebra de conjugação topológica** de (X,φ). Chamaremos $\hat{A}$ de unitalização canônica de A.*

Sejam $\hat{E}_n$ as aplicações da álgebra de conjugação topológica $\hat{A}$ como definido acima. Com a definição acima, temos que $\hat{E}_n(a) \in C_0(X)$ se $a \in A$. Podemos então definir os mapas contínuos $E_n = \hat{E}_n|_A$.

Exemplo 8. *Embora esperemos que o exemplo a ser apresentado seja o produto semi-cruzado, devemos ressaltar que $Uf = (f \circ \varphi)U$ é a relação oposta que usamos para definir o produto semi-cruzado. Contudo, seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff e $\varphi : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e própria, mostraremos que $(C_0(X) \times_{\varphi} \mathbb{N})_{op}$ é uma álgebra de conjugação topológica de (X,φ).*

Tome π uma representação injetiva de $C_0(X)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $h \in \mathcal{H}$ tal que $||h|| \leq 1$. Seja $F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \otimes \delta_n \in L^1(\mathbb{N}, C_0(X), \varphi)$. Temos que

$$(\pi \times U_+)(F)(h,0,0,...) = (\pi(f_0)h, \pi(f_1)h, \pi(f_2)h, ...).$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||F|| &\geq ||(\pi \times U_+)(F)(h,0,0,...)|| \\ &= ||(\pi(f_0)h, \pi(f_1)h, \pi(f_2)h, ...)|| \\ &= (\sum_{n=0}^{\infty} ||\pi(f_n)h||^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq ||\pi(f_n)h|| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Tomando o supremo sobre todos os* $h \in \mathcal{H}$ *com* $||h|| = 1$, *obtemos que* $||F|| \geq ||f_n||$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Suponha agora que X *seja um espaço compacto de Hausdorff. Identificamos* $\mathcal{P}(X, \varphi)$ *com* $C_c(\mathbb{N}, C(X), \varphi)_{op}$ *fazendo*

$$\sum_{n=0}^{N} f_n U^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n \otimes \delta_n.$$

Claramente, as condições 1, 2 e 3 são satisfeitas por $(C(X) \times_\varphi \mathbb{N})_{op}$, *ainda mais, temos pelo que foi mostrado acima que* $||E_n|| \leq 1$. *Que* $||U^n|| \leq 1$ *também é imediato, pois toda representação covariante isométrica leva* U^n *em um operador* V^n, *onde* V *é uma isometria.*

Como $(C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N})_{op}$ *pode ser vista como uma subálgebra de* $(C(\hat{X}) \times_{\hat{\varphi}} \mathbb{N})_{op}$ *gerada pelas funções de suporte compacto de* $\mathbb{N}$ *tomando valores em* $C_0(X) \subset C(\hat{X})$, *segue que* $(C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N})_{op}$ *é uma álgebra de conjugação topológica para* (X, φ).

Desenvolveremos, agora, algumas ferramentas para obtermos a prova do resultado principal deste capítulo. Daqui para frente, fixamos um sistema dinâmico (X, φ).

Precisamos do chamado Teorema de Fatoração de Cohen. A demonstração pode ser encontrada em [7] 5.2.2.

Teorema 2.5.6. *Seja* A *uma álgebra de Banach com uma unidade aproximada à direita com norma limitada por uma constante* M. *Seja* π *uma anti-representação de* A *em um espaço de Banach* D. *Então para cada* $d \in \overline{span}(\pi(A)D)$ *e cada* $\varepsilon > 0$, *existem elementos* $a \in A$ *e* $d' \in D$ *satisfazendo que:*

1. $d' = \pi(a)d$;
2. $||a|| \leq M$;
3. $||d - d'|| < \varepsilon$;
4. $d' \in \overline{\pi(a)d}$.

Logo, $\pi(A)D = \overline{\pi(A)D}$.

Proposição 2.5.7. *Sejam A uma álgebra de conjugação topológica para (X,φ), B uma álgebra e $\rho : A \longrightarrow B$ um homomorfismo. Se $C_0(X)U \subset ker(\rho)$, temos que $\rho(a) = \rho(E_0(a))$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Se $a \in A$, então

$$a = E_0(a) + E_1(a)U + bU^2.$$

para algum $b \in A$.

Seja $(e_i)_{i\in I}$ a unidade aproximada de $C_0(X)$ formada por todas as funções positivas com norma menor ou igual a 1, com suporte compacto com a ordenação ponto-a-ponto, isto é, $e_i \geq e_j$ se, e somente se, $e_i(x) \geq e_j(x)$ para todo $x \in X$. Note que $(e_i \circ \varphi)_{i\in I}$ também é identidade aproximada, portanto se $a = \sum_{n=0}^{N} f_n U^n \in A$, então

$$\begin{aligned} aU^2 e_i &= (\sum_{n=0}^{N} f_n U^{n+2}) e_i \\ &= \sum_{n=0}^{N} f_n (e_i \circ \varphi) U^{n+2} \end{aligned}$$

e claro, teremos que $\lim_i aU^2 e_i = aU^2$. Obtemos que

$$\overline{span}(AU^2 C_0(X)) = AU^2.$$

Isto implica que a multiplicação à direita em AU^2 por elementos de $C_0(X)$ é uma anti-representação, e podemos aplicar o Teorema 2.5.6. Chegamos ao resultado que

$$\overline{span}(AU^2 C_0(X)) = span(AU^2 C_0(X)) = AU^2.$$

Assim, existem $a_n \in A$ e $g_n \in C_0(X)$ tais que $bU^2 = \sum_{n=0}^{N} a_n U^2 g_n$. Desta forma,

$$\rho(bU^2) = \sum_{n=0}^{N} \rho(a_n U)\rho(U g_n) = \sum_{n=0}^{N} \rho(a_n U)\rho((g_n \circ \varphi)U) = 0.$$

□

Dada uma álgebra de conjugação topológica A de (X,φ), denotaremos o espaço de homomorfismos em $\mathbb{C}$ por $\Omega(A)$, e muniremos este espaço com a topologia fraca-$*$. Particionaremos $\Omega(A)$ em conjuntos $\Omega(A)_x$, para $x \in X$, onde

$$\Omega(A)_x = \{\rho \in \Omega(A) : \rho(f) = f(x) \ \forall f \in C_0(X)\}.$$

Proposição 2.5.8. *Seja A uma álgebra de conjugação topológica de (X,φ). Se $x \in X$*

não é ponto fixo de φ, então $\Omega(A)_x$ é um conjunto unitário.

Demonstração. Para qualquer $f, g \in C_0(X)$, temos que

$$fUg = (g \circ \varphi)fU$$

Logo, se $\theta \in \Omega(A)_x$

$$\theta(fU)g(x) = \theta(fUg) = \theta((g \circ \varphi)fU) = g(\varphi(x))\theta(fU).$$

E, portanto, $C_0(X) \subset ker(\theta)$. Pela Proposição 2.5.7, $\theta(a) = \theta(E_0(a))$, para todo $a \in A$. Pela hipótese do teorema, $\theta(a) = E_0(a)(x)$ para todo $a \in A$. □

Definição 2.5.9. *Nas condições do teorema acima, denotaremos o único homomorfismo em $\Omega(A)_x$ por $\theta_{x,0}$.*

Na sequência denotaremos por $\mathbb{D}_r$ o disco fechado complexo de raio r centrado na origem.

Proposição 2.5.10. *Seja A uma álgebra topológica de (X, φ), com X compacto e x um ponto fixo de φ. Então o espectro de U satisfaz a igualdade $\sigma(U) = \mathbb{D}_r$, onde r é o raio espectral de U, ou seja, $r = \lim_{n\to\infty} ||U^n||^{\frac{1}{n}}$. Mais ainda, existe um homeomorfismo de $\Omega(A)_x$ em $\sigma(U)$.*

Demonstração. Seja T a aplicação linear inversa da aplicação $S(a) = aU$ de A em AU, como acima. Se 1 é a função satisfazendo $1(x) = 1$ para todo $x \in X$, temos que $T^nU^n = 1$, donde $||U^n||\,||T||^n \geq ||1||$, ou seja, $||U^n|| \geq ||T||^{-n}\,||1||$. Obtemos, portanto, que existe

$$r = \lim_{n\to\infty} ||U^n||^{\frac{1}{n}} \geq ||T||^{-1} \geq 0.$$

Dado $a \in A$ considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} E_n(a)(x)z^n$. Pela Definição 2.5.3, o raio de convergência desta série de potências é maior que r. Para cada $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$ defina para cada $a \in A$

$$\theta_{x,z}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(a)(x)z^n.$$

Afirmamos que $\theta_{x,z}$ é um homomorfismo de A em $\mathbb{C}$. Para mostrarmos isto, começamos definindo a aplicação $\eta_{x,z}$ de $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{P}^\infty(X, \varphi)$ em $\mathbb{C}$ dada por

$$\eta_{x,z}(\sum_{n=0}^{\infty} f_nU^n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)z^n,$$

onde $\mathcal{F}$ é como na Definição 2.5.4. Segue que $\eta_{x,z}$ é um homomorfismo. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\eta_{x,z}([\sum_{n=0}^{\infty} f_n U^n][\sum_{n=0}^{\infty} g_n U^n]) &= \eta_{x,z}(\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{l+m=n} f_l(g_m \circ \varphi^l)]U^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{l+m=n} f_l(x)g_m(\varphi^l(x))]z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{l+m=n} f_l(x)g_m(x))z^n \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)z^n) \\
&= \eta_{x,z}(\sum_{n=0}^{\infty} f_n U^n)\eta_{x,z}(\sum_{n=0}^{\infty} g_n U^n).
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\theta_{x,z} = \eta_{x,z} \circ \mathcal{F}.$$

Como $\theta_{x,z}(U) = z$, para $|z| < r$, temos $\sigma(U) = \mathbb{D}_r$.

Defina a aplicação de $\Omega(A)_x$ em $\sigma(U)$ dado por $\theta \mapsto \theta(U)$. Pela definição da topologia de $\Omega(A)_x$, segue que esta aplicação é contínua. Pelo que foi visto acima, a imagem desta aplicação é densa em $\sigma(U)$. Além disso, esta aplicação é injetiva. De fato, suponha que $\theta, \eta \in \Omega(A)_x$ e $\theta(U) = \eta(U)$, então

$$\begin{aligned}
\theta(\sum_{n=0}^{N} f_n U^n) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\theta(U)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\eta(U)^n \\
&= \eta(\sum_{n=0}^{N} f_n U^n).
\end{aligned}$$

Usando a densidade de $\mathcal{P}(X, \varphi)$ em A, obtemos que $\theta = \eta$.

Finalmente, já que $\Omega(A)$ e $\sigma(U)$ são compactos, concluímos que a aplicação é um homeomorfismo. $\square$

No que segue denotaremos a aplicação de $\sigma(U)$ em $\Omega(A)$ (a aplicação inversa da construída acima) como Θ_x.

Definição 2.5.11. *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e conexo. Dizemos que uma aplicação $\Theta : D \longrightarrow \Omega(A)$ é **pontualmente analítico**, se para qualquer $a \in A$, a função $z \in D \mapsto \Theta(z)(a) \in \mathbb{C}$ é analítica.*

Proposição 2.5.12. *Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff, φ uma aplicação em X contínua e própria e x um ponto fixo de φ. Se A é uma álgebra topológica de (X, φ), então existe um homeomorfismo $\Theta_x : \sigma(U) \longrightarrow \Omega(A)_x$ que é pontualmente analítico em $\sigma(U)^\circ$ e satisfaz que $\Theta_x(z)(fU) = f(x)z$ para todo $f \in C_0(X)$.*

Demonstração. A Proposição 2.5.10 prova o caso compacto. No caso não-compacto usaremos a unitalização $\hat{A}$ de A e a aplicação $\Theta_x : \sigma(U) \longrightarrow \Omega(\hat{A})_x$. A demonstração termina se mostrarmos que cada homomorfismo de $\Omega(\hat{A})_x$ é uma extensão de um homomorfismo de $\Omega(A)_x$.

Tome $\theta \in \Omega(A)_x$ e seja $(e_i)_{i\in I}$ a unidade aproximada formada pelas funções de suporte compacto com norma menor ou igual a 1. Defina

$$\lambda = \lim_i \theta(e_i U).$$

Este limite de fato existe pois $e_i(y) = 1$ em uma vizinhança de x em X para $i > i_0$ para algum $i_0 \in I$. Logo, se $i, j > i_0$ tome $g \in C_0(X)$ satisfazendo que $g(e_i - e_j) = e_i - e_j$ e $g(x) = 0$. A existência de g está garantida pelo Lema de Urysohn. Sob estas condições,

$$\theta((e_i - e_j)U) = \theta(g(e_i - e_j)U) = \theta(g)\theta((e_i - e_j)U) = 0.$$

Note que λ satisfaz que

$$\begin{aligned} |\lambda|^n &= \lim_i |\theta((e_i U)^n)| \\ &= \lim_i |\theta((\prod_{m=0}^{n-1} e_i \circ \varphi^m) U^n)| \\ &\leq M\, ||U^n||, \end{aligned}$$

onde M é a norma da imersão de $C(\hat{X})$ em A. Daí obtemos que

$$|\lambda| \leq \lim_{n\to\infty} (M\, ||U^n||)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} ||U^n||^{\frac{1}{n}},$$

e portanto, $\lambda \in \sigma(U)$.

Para $f \in C_0(X)$ temos que

$$\theta(fU^n) = \lim_i (fU^{n-1} e_i U) = \theta(fU^{n-1})\lambda$$

para $n \in \mathbb{N}$. Por indução, $\theta(fU^n) = f(x)\lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclui-se que $\theta = \theta_{x,\lambda} = \Theta_x(\lambda)$.

Que Θ_x é pontualmente analítica segue do que foi demonstrado. □

Utilizaremos a notação $\Omega(A)_x^\circ = \Theta_x(\sigma(U)^\circ)$.

Definição 2.5.13. *Chamamos um subconjunto de $\Omega(A)$ de um* ***disco analítico*** *se for a imagem de uma aplicação pontualmente analítica e injetiva $\Phi : \mathbb{D}_s^\circ \longrightarrow \Omega(A)$.*

Proposição 2.5.14. *Todo disco analítico de $\Omega(A)$ está contido em $\Omega(A)_x$ para algum $x \in X$ ponto fixo de φ. Além disso, $\Omega(A)_x^\circ$ é um disco analítico maximal, isto é, não está contido propriamente em nenhum disco analítico.*

Demonstração. Seja $\Phi : \mathbb{D}_s^\circ \longrightarrow \Omega(A)$ uma aplicação pontualmente analítica e injetiva. Para qualquer $f \in C_0(X)$ temos que $\Phi(z)(\overline{f}) = \overline{\Phi(z)(f)}$. Como uma função e sua conjugada são analíticas se, e somente se, esta função é constante, obtemos que existe $x \in X$ tal que $\Phi(z) \in \Omega(A)_x$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pela Proposição 2.5.8 e injetividade de Φ obtemos que x é ponto fixo de φ.

Aplicando Teorema da Aplicação Aberta para funções analíticas à aplicação $z \mapsto \Phi(z)(U)$, obtemos que $\Phi(\mathbb{D}_s^\circ) \subset \Omega(A)_x^\circ$. Além disso, pela Proposição 2.5.12, $\Omega(A)_x^\circ$ é disco analítico. $\square$

Observação 2.5.15. *Na realidade, foi demonstrado que todo disco analítico maximal é da forma $\Omega(A)_x^\circ$ para algum $x \in X$.*

2.6 Representações de Álgebras de Conjugação Topológicas

Fixaremos um sistema dinâmico (X, φ) e A uma álgebra de conjugação topológica de (X, φ).

Definição 2.6.1. *Chamaremos um homomorfismo π de A em $B(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, de uma representação de A. Denotaremos por $rep_{\mathfrak{T}_2}A$ o conjunto das representações sobrejetivas de A nas matrizes triangulares superiores em $\mathbb{C}^2$.*

Dada uma representação $\pi \in \mathrm{rep}_{\mathfrak{T}_2}A$ associamos dois homomorfismos de A em $\mathbb{C}$, $\theta_{\pi,1}$ e $\theta_{\pi,2}$ dados por

$$\theta_{\pi,i}(a) = \big\langle \pi(a)\epsilon_i, \epsilon_i \big\rangle, \quad a \in A, \quad i = 1, 2$$

onde $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^2$.

Definição 2.6.2. *Para $x_1, x_2 \in X$ definimos*

$$rep_{x_1,x_2}A = \{\pi \in rep_{\mathfrak{T}_2}A : \theta_{\pi,i} \in \Omega(A)_{x_i},\ i = 1, 2\}.$$

Observação 2.6.3. *Claramente, todo $\pi \in rep_{\mathfrak{T}_2}A$ satisfaz que $\pi \in rep_{x_1,x_2}A$ para algum par $x_1, x_2 \in X$.*

Lema 2.6.4. *Se $x_1, x_2 \in X$ não são pontos fixos de φ e $\pi \in rep_{x_1,x_2}A$, então $x_2 = \varphi(x_1)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.5.8 temos que $\theta_{\pi,i} = \theta_{x_i,0}$ e portanto

$$\theta_{\pi,i}(fU) = 0$$

para toda função $f \in C_0(X)$. Desta forma, para cada $f \in C_0(X)$ existe $z_f \in \mathbb{C}$ tal que

$$\pi(fU) = \begin{pmatrix} 0 & z_f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Certamente existe $f \in C_0(X)$ tal que $z_f \neq 0$. Isto é verdade, pois caso contrário, pela Proposição 2.5.7, a imagem de π satisfaria a igualdade $\pi(A) = \pi(E_0(A))$ e assim seria comutativa, contrariando a sobrejetividade de π. Fixe uma função $f \in C_0(X)$ tal que $z_f \neq 0$.

Para qualquer $g \in C_0(X)$ temos

$$\pi(fUg) = \pi((g \circ \varphi)fU).$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} 0 & z_f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1) & z_g \\ 0 & g(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\varphi(x_1)) & z_{g\circ\varphi} \\ 0 & g(\varphi(x_2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z_g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por conseguinte, $z_f g(x_2) = z_f g(\varphi(x_1))$, ou seja, $g(x_2) = g(\varphi(x_1))$. Como dados dois pontos distintos $x, y \in X$ existe $g \in C_0(X)$ tal que $g(x) \neq g(y)$, concluímos que $g(x_2) = g(\varphi(x_1))$. $\square$

Mostraremos que se $x \in X$ não é ponto fixo de φ, então o conjunto $\mathrm{rep}_{x,\varphi(x)}A$ é não vazio.

Exemplo 9. *Se $f \in C_0(X)$ defina*

$$\rho(f) = \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(\varphi(x)) \end{pmatrix},$$

$$\rho(fU) = \begin{pmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\rho(fU^n) = 0$ se $n \geq 2$. Agora estenda ρ a $\mathcal{P}^\infty(X, \varphi)$. Mostraremos que ρ é um *homomorfismo. Observe que*

$$\begin{aligned}
\rho([\sum_{n=0}^{\infty} f_n U^n][\sum_{n=0}^{\infty} g_n U^n]) &= \rho(\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{l+m=n} f_l(g_m \circ \varphi^l)]U^n) \\
&= \begin{pmatrix} f_0(x)g_0(x) & f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(\varphi(x)) \\ 0 & f_0(\varphi(x))g_0(\varphi(x)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \\ 0 & f_0(\varphi(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(x) & g_1(x) \\ 0 & g_0(\varphi(x)) \end{pmatrix} \\
&= \rho(\sum_{n=0}^{\infty} f_n U^n)\rho(\sum_{n=0}^{\infty} g_n U^n)
\end{aligned}$$

Finalmente definimos a representação $\pi = \rho \circ \mathcal{F} : A \longrightarrow \mathfrak{T}_2$. Como $\varphi(x) \neq x$ temos que π é sobrejetiva.

Para demonstrarmos o Lema 2.6.4 precisamos o usar que x_2 não era ponto fixo de φ. Para contornarmos esta limitação introduziremos a seguinte definição:

Definição 2.6.5. *Suponha que $x_1, x_2 \in X$ satisfaçam que $\varphi(x_1) \neq x_1$ e $\varphi(x_2) = x_2$. Um **lápis de representações** de A é um conjunto $\mathfrak{P}_{x_1,x_2} \subset rep_{x_1,x_2}A$ satisfazendo que*

$$\{\theta_{\pi,2} : \pi \in \mathfrak{P}_{x_1,x_2}\} = \Omega(A)^{\circ}_{x_2}.$$

Podemos demonstrar o lema:

Lema 2.6.6. *Se $\mathfrak{P}_{x_1,x_2}$ é um lápis de representações de A então $x_2 = \varphi(x_1)$.*

Demonstração. Pela definição de lápis de representações existe $\pi \in \mathfrak{P}_{x_1,x_2}$ satisfazendo que $\theta_{\pi,i} = \theta_{x_i,0}$ $i = 1, 2$. O restante da prova é idêntica à do Lema 2.6.4. $\square$

Exemplo 10. *Suponha que $x \in X$ satisfaça que $\varphi(x) \neq x$ e $\varphi^2(x) = \varphi(x)$. Tomando a compactificação de X, se necessário, podemos assumir que X seja compacto. Para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$ definimos a representação π_z como*

$$\pi_z(a) = \begin{pmatrix} E_0(a)(x) & \sum_{n=0}^{\infty} E_n(a)(x)z^n \\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty} E_n(a)(\varphi(x))z^n \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\pi_z(U^n) &= \begin{pmatrix} 0 & z^n \\ 0 & z^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix}^n \\
&= \pi(U)^n,
\end{aligned}$$

e que também,

$$\begin{aligned}
\pi_z(U)\pi_z(f) &= \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) & 0 \\ 0 & f(\varphi(x)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(\varphi(x)) & 0 \\ 0 & f(\varphi(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f(\varphi(x)) & 0 \\ 0 & f(\varphi^2(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & z \end{pmatrix} \\
&= \pi_z(f \circ \varphi)\pi_z(U)
\end{aligned}$$

donde conclui-se que π_z é um homomorfismo. Construímos o lápis de representações

$$\mathfrak{P}_{x,\varphi(x)} = \{\pi_z : z \in \sigma(U)\}.$$

2.7 Um Teorema Sobre Conjugação de Sistemas Dinâmicos

Temos as ferramentas para demonstrar a recíproca do Teorema 2.4.2.

Teorema 2.7.1. *Seja A uma álgebra de conjugação topológica de (X, φ) e B uma álgebra de conjugação topológica de (Y, ψ). Se Γ é um isomorfismo entre A e B temos que os sistemas dinâmicos (X, φ) e (Y, ψ) são conjugados.*

Demonstração. Começamos definindo as aplicações

$$\begin{aligned}
\Gamma_h : \Omega(A) &\longrightarrow \Omega(B) \\
\theta &\longmapsto \theta \circ \Gamma^{-1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_r : \mathrm{rep}_{\mathfrak{T}_2} A &\longrightarrow \mathrm{rep}_{\mathfrak{T}_2} B \\
\pi &\longmapsto \pi \circ \Gamma^{-1}
\end{aligned}$$

Note que $\Gamma_h(\theta_{\pi,i}) = \theta_{\Gamma_r(\pi),i}$.

A aplicação Γ_h é um homeomorfismo que preserva discos analíticos, como podemos verificar. Isto implica que Γ_h é uma bijeção entre os conjuntos, $\{\Omega(A)_x : x \in X\}$ e $\{\Omega(B)_y : y \in Y\}$. Consequentemente, para cada $x \in X$ existe $\gamma(x) \in Y$ tal que

$$\Gamma_h(\Omega(A)_x) = \Omega(B)_{\gamma(x)} \tag{2.3}$$

Mostraremos que γ é conjugação entre (X, φ) e (Y, ψ), ou seja, que

$$\gamma(\varphi(x)) = \psi(\gamma(x)). \tag{2.4}$$

Observe que se $f \in C_0(Y)$

$$f(\gamma(x)) = \theta_{\gamma(x),0}(f) = \Gamma_h(\theta_{x,0})(f) = \theta_{x,0}(\Gamma^{-1}(f))$$

Primeiro, devemos checar que γ é aplicação contínua. Para este fim, tome uma rede $(x_i)_{i \in I}$ de X convergindo para um ponto $x \in X$. Assim

$$\begin{aligned} \lim_i f(\gamma(x_i)) &= \lim_i \theta_{x_i,0}(\Gamma^{-1}(f)) \\ &= \theta_{x,0}(\Gamma^{-1}(f)) \\ &= f(\gamma(x)). \end{aligned}$$

O que mostra que γ é contínua. Aplicando o mesmo raciocínio para γ^{-1}, obtemos que γ é um homeomorfismo.

Pela Proposição 2.5.14 e como Γ_h preserva discos analíticos, γ mapeia pontos fixos de φ, bijetivamente, nos pontos fixos de ψ. Para tais pontos, a equação 2.4 é imediatamente verificada.

Suponha, portanto, que $\varphi(x) \neq x \in X$. Afirmamos, neste caso que

$$\Gamma_r(\mathrm{rep}_{x,\varphi(x)} A) \subset \mathrm{rep}_{\gamma(x),\gamma(\varphi(x))} B. \tag{2.5}$$

Tome $\pi \in \mathrm{rep}_{x,\varphi(x)}$. Então $\theta_{\Gamma_r(\pi),1} = \Gamma_h(\theta_{\pi,1}) = \Gamma_h(\theta_{x,0})$. Por 2.3, $\Gamma_h(\theta_{x,0}) \in \Omega(B)_{\gamma(x)}$ e daí obtemos que $\theta_{\Gamma_r(\pi),1} \in \Omega(B)_{\gamma(x)}$. Por um argumento análogo, concluímos que $\theta_{\Gamma_r(\pi),2} \in \Omega(B)_{\gamma(\varphi(x))}$. Assim mostramos ser verdadeira a afirmação.

Se $\varphi^2(x) \neq \varphi(x)$, tome uma representação π em $\mathrm{rep}_{x,\varphi(x)}$. Usando o que foi mostrado acima obtemos que $\Gamma_r(\pi) \in \mathrm{rep}_{\gamma(x),\gamma(\varphi(x))}$, com $\psi(\gamma(x)) \neq \gamma(x)$ e $\psi(\gamma(\varphi(x))) \neq \gamma(\varphi(x))$. Pelo Lema 2.6.4, segue que $\gamma(\varphi(x)) = \psi(\gamma(x))$.

Por fim, suponha que $\varphi^2(x) = \varphi(x)$ e seja $\mathfrak{P}_{x,\varphi(x)}$ ser um lápis de representações de A. Por 2.5, podemos escrever

$$\Gamma_r(\mathfrak{P}_{x,\varphi(x)}) \subset \mathrm{rep}_{\gamma(x),\gamma(\varphi(x))} B.$$

Já que Γ_h preserva discos analíticos, vale necessariamente que $\Gamma_r(\mathfrak{P}_{x,\varphi(x)}) = \mathfrak{P}_{\gamma(x),\gamma(\varphi(x))}$. Pelo Lema 2.6.6, vale que $\gamma(\varphi(x)) = \psi(\gamma(x))$. □

Como um corolário do teorema acima obtemos o resultado que queríamos mostrar.

Corolário 2.7.2. *Os sistemas dinâmicos (X, φ) e (Y, ψ) são conjugados se, e somente se, seus produtos semi-cruzados $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$ e $C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N}$ são isomorfos.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.2, se os sistemas dinâmicos (X, φ) e (Y, ψ) são conjugados, temos que os produtos semi-cruzados $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}$ e $C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N}$ são isomorfos. Suponha agora que os respectivos produtos semi-cruzados sejam isomorfos. Pela Proposição 2.2.2 e o Exemplo 8, obtemos álgebras de conjugação topológicas dos sistemas dinâmicos, as álgebras $C_0(X) \times_\varphi \mathbb{N}_{op}$ e $C_0(Y) \times_\psi \mathbb{N}_{op}$, isomorfas. O corolário está completo usando o Teorema 2.7.1, acima. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Davidson, K., C^*-Algebras by Examples, American Mathematical Society, 1996.

[2] Davidson, K. Katsoulis E., Isomorphisms between Topological Conjugacy Algebras, J.Reine Angew, n. 621, 29-51, 2008.

[3] Dixmier, J., C^*-Algebras, Elsevier, 1979

[4] Fillmore P., Notes on Operator Theory, Van Nostrand, 1970.

[5] Hadwin D., Hoover T., Operator Algebras and the Conjugacy of Transformation, J. Functional Analysis, n. 77, 112-122, 1988.

[6] Murphy G., C^*-Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.

[7] Palmer T., Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras, Cambridge University Press, 1994.

[8] Pedersen G., C^*-Algebras and Their Automorphism Groups, Academic Press, 1979.

[9] A simple separable exact C^*-algebra not anti-isomorphic to itself, Ann. Math., to appear (arXiv: 1001.3890v1 [math.OA]).

[10] Peters J., Semi-Crossed Products of C^*-Algebras, J. Functional Analysis, n. 59, 498-534, 1984.

[11] Raeburn, I., Dynamical Systems and Operator Algebras, Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., n. 36, 109-120, 1999.

[12] Williams, D., Crossed Products of C^*-Algebras, American Mathematical Society, 2007.