

FLUXOS GEODÉSICOS: MÉTRICAS BUMPY E EXPANSIVIDADE

Freddy Pablo Castro Vicente

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Coorientador: Fernando Antonio de Araújo Carneiro

**Rio de Janeiro
Outubro 2013**

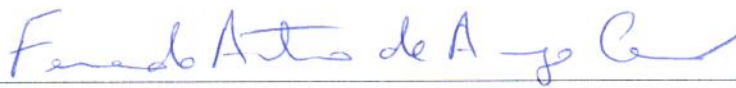
FLUXOS GEODÉSICOS: MÉTRICAS BUMPY E EXPANSIVIDADE

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

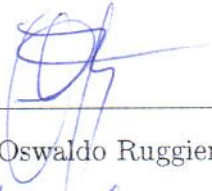
Aprovada em 25 de outubro de 2013:



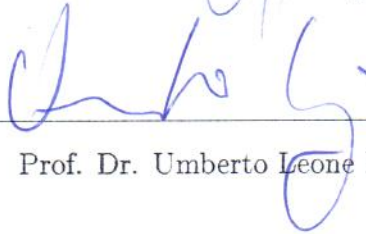
Orientador, Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza – IM/UFRJ



Coorientador, Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo Carneiro – UERJ



Prof. Dr. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez – PUC-Rio



Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz – IM/UFRJ

CIP - Catalogação na Publicação

C355
f Castro Vicente, Freddy Pablo
Fluxos geodésicos: métricas Bumpy e expansividade /
Freddy Pablo Castro Vicente. -- Rio de Janeiro,
2013.
79 f.

Orientador: Alexandre Eduardo Arbieto Mendoza.
Coorientador: Fernando Antonio de Araújo Carneiro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de
Pós-Graduação em Matemática, 2013.

1. Fluxos geodésicos - teses. 2. Variedades
riemannianas. I. Arbieto Mendoza, Alexandre
Eduardo, orient. II. Carneiro, Fernando Antonio
de Araújo, coorient. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer nestas linhas às pessoas e instituições que me deram apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço primeiramente a minha família e muito particularmente a minha mãe Maríá por sempre saber falar com sabedoria nos momentos mais indicados. Gostaria de agradecer muito ao professor Raúl Moisés por suas palavras que me fez decidir a cursar o mestrado.

Gostaria de agradecer aos professores de Instituto de Matemática da UFRJ. Quero agradecer especialmente ao professor Alexander, meu orientador, primeiro por ter aceito orientar-me neste caminho acadêmico; por ter-me ensinado Matemática de uma maneira nova, por sua disponibilidade e por ter tido muita paciência, sou muito grato mesmo.

Agradeço também ao professor Fernando, meu co-orientador, por ter tido sempre a disponibilidade de resolver minhas dúvidas, sou muito grato mesmo.

Agradeço a todos os meus amigos, acadêmicos e não acadêmicos, em especial a toda a galera da "salinha" pela amizade e a compreensão que tiveram comigo. Por todas as tardes de lazer das sextas feiras, e também pelas as atividades não acadêmicas.

Finalmente gostaria de agradecer ao Instituto de Matemática da UFRJ, e a CAPES e a FAPERJ pelo auxílios concedidos.

RESUMO

CASTRO VICENTE, Freddy Pablo. Fluxos Geodésicos: métricas Bumpy e expansividade. Rio de Janeiro, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

O objetivo deste trabalho é estudar algumas propriedades de fluxos geodésicos sobre uma variedade Riemanniana compacta suave M . Este trabalho é baseado nos artigos de Anosov [4] e Ruggiero [22].

Em relação ao primeiro artigo, iremos estudar um tipo de métrica Riemanniana chamada *métrica Bumpy*, que por definição está relacionada com os autovalores de órbitas periódicas do fluxo geodésico. Além disso, por definição, essas órbitas podem ser hiperbólicas ou elípticas. Anosov mostrou que o conjunto das métricas Bumpy é um conjunto genérico no espaço das métricas Riemannianas de classe C^k na topologia C^k (em particular forma, um conjunto denso) onde $2 \leq k \leq \infty$. Para este fim usamos resultados de Abraham [1] e Klingenberg [13], dos quais obtemos a densidade.

Em relação ao segundo artigo, iremos estudar dois tipos de métricas Riemannianas de classe C^2 , aquelas onde os fluxos geodésicos são aplicações expansivas, e as outras em que o fluxo geodésico é um fluxo de Anosov. Ruggiero mostrou que em superfícies compactas as métricas Riemannianas são C^2 -robustamente expansivas se, e somente se, seu fluxo geodésico é um fluxo de Anosov. Já que neste caso o fibrado tangente unitário tem dimensão 3, de fato usaremos os resultados devidos a M. Paternain [20] e [21]. Pela C^1 estruturalmente estável, devido a Anosov [3], temos que toda métrica é C^2 -robustamente expansiva, se seu fluxo geodésico é Anosov. Para a parte recíproca precisamos da estrutura simplética do fluxo geodésico, para esse fim usaremos os resultados devidos a Contreras [7], [9] e [10].

Palavras-chave: Métricas Bumpy, hiperbolicidade, robustez, genericidade.

ABSTRACT

CASTRO VICENTE, Freddy Pablo. Geodesic Flows: Bumpy metrics and expansiveness. Rio de Janeiro, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013

The objective of this work is to study some properties of geodesic flows on a compact smooth Riemannian manifold M . This work is based on the articles of Anosov [4] and Ruggiero [22].

Regarding the first article, we study a type of Riemannian metric called *Bumpy metric*, which by definition is related to the eigenvalues of periodic orbits of the geodesic flow. Furthermore, by definition, these orbits may be hyperbolic or elliptical. Anosov showed that the set of metrics Bumpy is a generic set in the space of Riemannian metrics class C^k topology C^k (in particular forms a dense set) where $2 \leq k \leq \infty$. To this end we use the results of Abraham [1] and Kligenberg [13], from which we obtain the density.

Regarding the second article, we will study the two types of Riemannian metrics of class C^2 , where those applications are expansive geodesic flows, and the other where the geodesic flow is an Anosov flow. Ruggiero showed that in compact surfaces Riemannian metrics are C^2 -robustly expansive if and only if its geodesic flow is an Anosov flow. Since in this case the unit tangent bundle has dimension 3, in fact we will use the results due to M. Paternain [20] and [21]. By, C^1 structurally stable due to Anosov[3], we have that every metric is C^2 -robustly expansive if its geodesic flow is Anosov. For the other direction we will need to use the symplectic structure of the geodesic flow, for this purpose we use the results due to Contreras [7], [9] and [10].

Key words: Bumpy metrics, hyperbolicity, robustness, genericity.

Sumário

Introdução	9
1 Geodésicas em Variedades Riemannianas	12
1.1 A equação diferencial das geodésicas	12
1.2 Aplicação exponencial e campos de Jacobi	16
2 O Campo Geodésico, a Métrica de Sasaki e a Estrutura Simplética	20
2.1 Fluxo Geodésico	20
2.2 Métrica de Sasaki	21
2.3 Espaços em coordenadas	24
2.4 Geometria Simplética	27
3 Teorema da Métrica Bumpy	32
3.1 Projetivização	32
3.2 Órbitas periódicas e Métricas Bumpy	35
3.3 Transversalidade e o Teorema de Abraham	38
3.4 Prova da Proposição 3.2.4: Abertura	39
3.5 Prova da Proposição 3.2.4: Densidade	40
4 Fluxos Expansivos em 3-variedades	45
4.1 Expansividade	45
4.2 Órbitas periódicas densas	47
5 Decomposição Hiperbólica dos fluxos simpléticos com decomposição dominada	50
5.1 Definições Prévias	50
5.2 Fluxos Quase-Anosov	52
5.3 Prova da Proposição 5.2.1	55
6 Fluxos Geodésicos em Superfícies Robustamente Expansivas	59
6.1 Órbitas Periódicas Hiperbólicas	59
6.2 Teorema Principal	63

7	Apêndice 1: Geometria em Variedades Suaves	67
7.1	Variedades Diferenciáveis	67
7.2	Geometria Riemanniana	74
8	Apêndice 2: Sequências Periódicas e Hiperbolicidade	81
8.1	Sequências Periódicas	82
8.2	O Lema de Franks para Fluxos Geodésicos	84
8.3	Hiperbolicidade de $\mathcal{E}^2M$	85
	Bibliografia	87

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de propriedades dinâmicas de fluxos geodésicos em variedades Riemannianas. Este trabalho de dissertação está baseado nos trabalhos de Anosov [4] e Ruggiero [22]. Para chegar aos resultados desta dissertação mais rapidamente, presumimos que o leitor é familiarizado com as noções básicas de Geometria Riemanniana. De qualquer forma, caso o leitor queira definições e informações mais precisas, elas estão contidas no apêndice.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Por definição, uma curva γ é uma geodésica em M se $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Neste caso, (γ, γ') são as órbitas do fluxo geodésico gerado por g ; este fluxo é definido sob o fibrado tangente unitário SM que depende de g . O primeiro resultado versa sobre o estudo de órbitas periódicas deste fluxo.

Considerando uma órbita periódica, sabemos que 1 sempre é autovalor do fluxo linearizado (derivada do fluxo). O teorema de Kupka-Smale, em [15] e [25], diz que existe um residual, na topologia C^k ($k \geq 1$), de campos de vetores nos quais para qualquer órbita periódica todos os outros autovalores (obviamente excetuando o 1) tem valor absoluto diferente de 1, isto é, todas as órbitas periódicas são hiperbólicas. A pergunta natural é se este mesmo resultado vale para um residual de métricas considerando seus fluxos geodésicos. Aparecem duas dificuldades, a primeira é a existência robusta de órbitas elípticas, o que diz que o análogo exato do teorema de Kupka-Smale é falso. A segunda dificuldade é que, ao se fazer uma perturbação local na métrica, o efeito na dinâmica do fluxo geodésico não é local.

Mesmo assim, usando um teorema de transversalidade, devido a R. Abraham e J. Robbin [2], Anosov mostrou um teorema similar no contexto das métricas Bumpy. Isto é, dizemos que g é uma métrica *Bumpy* se para toda órbita periódica do fluxo geodésico, o autovalor 1 só aparece uma vez para o fluxo linearizado.

Teorema. Existe um residual $\mathcal{R}$ de métricas Riemannianas na topologia C^k ($k \geq 2$) tal que se $g \in \mathcal{R}$ então g é Bumpy.

O segundo resultado desta dissertação versa sobre o estudo de fluxos geodésicos expansivos. De fato, a teoria de fluxos expansivos é bem extensa e forma um capítulo importante na teoria dos sistemas dinâmicos, ver [5]. Por exemplo, sabemos que todo fluxo Anosov é expansivo. Assim, podemos definir o conjunto de métricas Riemannianas g , de

classe C^k , tais que seu fluxo geodésico é expansivo (resp. Anosov), denotado por $\mathcal{E}^k M$ (resp. $\mathcal{A}^k(M)$). Mañé em [16], mostrou que todo difeomorfismo de classe C^1 , definido em M , é *Quasi-Anosov* se, e somente se, é C^1 -robustamente expansivo. Lembremos que se X é um espaço topológico e P é alguma propriedade, dizemos que $x \in X$ satisfaz *robustamente* a propriedade P se existe uma vizinhança V de x em X tal que todos os elementos de V verificam a propriedade P .

Ruggiero, em [22], mostrou um teorema similar ao de Mañé no caso de fluxos expansivos em superfícies. Neste caso dizemos que uma métrica g é C^2 -robustamente expansiva se existe uma vizinhança C^2 no espaço de métricas, tais que todo fluxo geodésico de uma métrica nesta vizinhança é expansivo.

Teorema. Se uma métrica Riemanniana g , de classe C^2 , é robustamente expansiva então o fluxo geodésico de g é Anosov.

Para tal fim, Ruggiero mostrou primeiro que, em variedades M sem bordo, se g é C^2 -robustamente expansiva, então o fecho do conjunto de órbitas periódicas do fluxo geodésico é um conjunto hiperbólico.

No primeiro capítulo apresentamos as preliminares de Geometria Riemanniana. Iremos estudar as geodésicas e algumas ferramentas como: a aplicação exponencial e o campos de Jacobi. Duas boas referências são Do Carmo [11] e Burns e Gidea [6].

No segundo capítulo estudamos o Campo Geodésico, este é o campo gerador do fluxo geodésico. Também estudamos a Métrica de Sasaki, que é uma métrica Riemanniana em TM . Finalizamos com uma pequena introdução à Geometria Simplética. De fato, uma forma simplética aparece de maneira natural, que se deduz da métrica de Sasaki. As referências são Sakai [24], G. Paternain [19] e H. Hofer and E. Zehnder [12].

O capítulo 3 está baseado no artigo de Anosov [4], neste capítulo definimos um tipo de métrica Riemanniana chamada *métrica Bumpy* e mostramos que o conjunto de métricas Bumpy é genérico no espaço $\mathcal{G}^k M$ de todas as métricas Riemannianas de classe C^k , dotada com a topologia C^k onde $2 \leq k \leq \infty$. Definimos objetos que independem da métrica, pois quando a métrica é perturbada temos que o fibrado tangente unitário SM muda. Usaremos o Teorema de Abraham [1] e os resultados devido a Klingenberg [13].

No capítulo 4 estudaremos fluxos expansivos em variedades de dimensão 3, já que em superfícies, temos que o fibrado tangente unitário SM tem dimensão 3. Usaremos os trabalhos de M. Paternain [20] e [21]. Neste capítulo mostramos que para um fluxo expansivo definido em uma variedade suave de dimensão 3, temos que se o conjunto de pontos não errantes é denso, então o conjunto das órbitas periódicas também é denso. Usaremos este resultado no capítulo 6.

No quinto capítulo, estudaremos fluxos simpléticos. Se este fluxo tem uma certa decomposição Lagrangeana, então ele tem uma decomposição dominada se, e somente

se, ele é hiperbólico. Para isso usaremos os trabalhos de Contreras [7], [9], e [10]. Este resultado será usado no capítulo 6.

O sexto capítulo é baseado no trabalho de Ruggiero [22]. Mostramos que em superfícies compactas, as métricas Riemannianas são C^2 -robustamente expansivas se, e somente se, seu fluxo geodésico é um fluxo Anosov. Para isso, usaremos os resultados feitos nos capítulos 4 e 5. Também usaremos os resultados de Klingenberg [13] e [14], Mañe [17] e Moser [18].

Finalizamos com dois apêndices. No primeiro apresentamos de maneira mais detalhada as propriedades básicas da teoria de variedades suaves e Riemannianas. No segundo apêndice nós fazemos alguns comentários sobre o Teorema de Mañe [17] usado no capítulo 6, do trabalho de Contreras [8], fazendo um esboço da prova.

Capítulo 1

Geodésicas em Variedades Riemannianas

Neste capítulo iremos estudar um tipo de curvas suaves em variedades Riemannianas, essas curvas são chamadas geodésicas. Iremos estabelecer as ferramentas relacionadas à geodésicas, principalmente à aplicação exponencial e os campos de Jacobi da geodésica. Qualquer livro de Geometria Riemanniana é uma boa referência, como Do Carmo [11] e K. Burns, M. Gidea [6].

Usaremos a convenção de Einstein. Para escrever a soma por exemplo, se tomamos $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}$ e $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, temos que a soma $\sum_{i=1}^k a^i v_i$ é denotado por $a^i v_i$; i.e. os super-índices e sub-índices fazem indicar a soma.

1.1 A equação diferencial das geodésicas

O objetivo desta seção é obter as equações diferenciais que formam as geodésicas de uma variedade Riemanniana. Primeiramente iremos dar algumas definições básicas. Ver apêndice para uma revisão de variedades suaves. Nós sempre usaremos M uma variedade suave de dimensão m .

1.1.1 Definição. *Uma métrica Riemanniana numa variedade suave M é uma aplicação suave g que a cada ponto $p \in M$ associa um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$. Dizemos que g é de classe C^k se a aplicação anterior é de classe C^k . A variedade M dotada com a métrica Riemanniana é chamada uma variedade Riemanniana.*

Note que

$$p \in M \xrightarrow{g} \langle \cdot, \cdot \rangle_p$$

é uma aplicação suave.

Mostra-se que esta definição não depende da escolha da parametrização local em M . Em coordenadas locais (x_i) , usando a base canônica de $T_p M$: $\{\frac{\partial}{\partial x_i} : 1 \leq i \leq m\}$, suponha que $X_p = u_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y_p = v_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}$ são dois campos de vetores suaves. Então

$$\langle X_p, Y_p \rangle = u_i(p)v_j(p)\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p$$

Portanto a métrica Riemanniana em p se escreve como

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p.$$

Matricialmente, escrevemos $g = (g_{ij})$.

Lembremos que $C^\infty(M)$ denota o conjunto de funções em M de classe C^∞ .

1.1.2 Definição (Conexão afim). *Uma Conexão afim em uma variedade M é uma aplicação suave que associa a cada par de campos de vetores suaves X e Y em M outro campo de vetores suave $\nabla_X Y$ em M , satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ temos $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$.
2. Para todo $f, g \in C^\infty(M)$ temos $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
3. Para todo $f \in C^\infty(M)$ temos $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Onde X, Y e Z são campos de vetores suaves em M .

Em coordenadas locais, como acima, façamos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. As funções Γ_{ij}^k são chamadas os símbolos de Christoffel da conexão, ou também ditas os coeficientes da conexão. De fato, para $X = u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ temos que

$$\nabla_X Y = \left(u_i v_j \Gamma_{ij}^k + u_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Um campo de vetores suave V ao longo da curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação suave $V : I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{c(t)}M$, para todo $t \in I$.

1.1.3 Proposição (Derivada covariante). *Dada uma conexão afim ∇ em M , existe uma única correspondência*

$$V \longmapsto \frac{DV}{dt}$$

que associa para todo campo de vetores suave V ao longo da curva $c : I \rightarrow M$ um campo de vetores suave $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , satisfazendo as propriedades:

1. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ temos que: $\frac{D(aV + bW)}{dt} = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt}$,

2. Para qualquer função suave f definida em alguma vizinhança de $c(I)$, se $\frac{df}{dt}$ denota $\frac{d(f \circ c)}{dt}$, temos que:

$$\frac{D(fV)}{dt} = f \frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt} V,$$

3. Compatibilidade com a conexão: se existe um campo de vetores suave Y em M tal que $V(t) = Y(c(t))$, então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

O campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ é chamado a derivada covariante de V ao longo de c .

Um campo de vetores V ao longo da curva c em M é dito *paralelo* sempre que

$$\frac{DV}{dt} \equiv 0.$$

1.1.4 Proposição. Dada uma conexão afim ∇ em M , uma curva $c : I \rightarrow M$, e um vetor tangente $V_{c(t_0)}$ no ponto $c(t_0)$ na curva, existe um único campo de vetores paralelo $V(t)$ ao longo de c que estende $V_{c(t_0)}$.

A proposição 1.1.4 induz a seguinte definição.

1.1.5 Definição. Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva em M e $c(t_0)$ um ponto na curva. A aplicação $P_{c(t), c(t_0)} : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ definida por $P_{c(t), c(t_0)} V_{c(t_0)} = V(t)$, onde $V_{c(t_0)} \in T_{c(t_0)}M$, e $V(t)$ é a única extensão de $V_{c(t_0)}$ para um campo de vetores paralelo ao longo de c , é chamado o transporte paralelo de $c(t_0)$ a $c(t)$.

As geodésicas são curvas em variedades que generalizam a ideia de linha reta no espaço Euclidiano. Uma caracterização das linhas retas é que elas localmente realizam o caminho mais curto entre dois pontos. Outra caracterização é que os vetores tangentes em todos os pontos são paralelos. Usaremos esta última como base para a definição de geodésica. Consideremos M uma variedade Riemanniana equipada com a conexão Riemanniana ∇ .

1.1.6 Definição. Uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ é chamada *geodésica* se seu campo de vetores velocidade é paralelo. A restrição de γ em algum intervalo fechado $[a, b] \subseteq I$ é chamada um *segmento de geodésica*.

Em geral, só consideramos geodésicas dadas por curvas regulares, i.e., curvas com $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$ em todo ponto. Se $\frac{d\gamma}{dt}$ é igual a 0 em algum ponto, então permanece zero, em tal caso γ é reduzido a um ponto. Note que uma curva γ é geodésica se, e somente se

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Podemos reescrever a equação (1.1) num sistema de coordenadas locais (x_i) . Se $(x_i(t))$ representa a geodésica, e usando a fórmula da derivada covariante em coordenadas, temos o sistema de segunda ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0,$$

onde $k = 1, 2, \dots, m$. O seguinte teorema diz que dados um ponto e uma direção, existe uma única geodésica que passa por esse ponto com essa direção.

1.1.7 Teorema (Existência e unicidade de geodésicas). *Para todo ponto p em M e para todo vetor tangente $v \in T_p M$, existe um número $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica $\gamma_{(p,v)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que*

$$\gamma_{(p,v)}(0) = p \text{ e } \frac{d\gamma_{(p,v)}}{dt}(0) = v.$$

A geodésica tem uma determinada parametrização mas é possível fazer uma mudança de parâmetro de modo que a curva resultante é ainda uma geodésica. Por exemplo, pode-se aumentar a velocidade ao longo da geodésica proporcionalmente diminuindo seu intervalo de definição, ou vice-versa.

1.1.8 Lema (Homogeneidade das geodésicas). *Sejam $p \in M$, $v \in T_p M$ e $\varepsilon > 0$, com $\gamma_{(p,v)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ a única geodésica tal que*

$$\gamma_{(p,v)}(0) = p \text{ e } \frac{d\gamma_{(p,v)}}{dt}(0) = v.$$

Então, para todo $a > 0$ existe uma única geodésica $\gamma_{(p,av)} : (-\varepsilon/a, \varepsilon/a) \rightarrow M$ com

$$\gamma_{(p,av)}(0) = p \text{ e } \frac{d\gamma_{(p,av)}}{dt}(0) = v.$$

Esta geodésica satisfaz

$$\gamma_{(p,av)}(t) = \gamma_{(p,v)}(at),$$

para todo $t \in (-\varepsilon/a, \varepsilon/a)$.

Dizemos que uma curva $c : [a, b] \rightarrow M$ é suave por partes se existe uma partição $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ tal que c é suave em (t_{i-1}, t_i) para $i = 1, \dots, k$. Chamamos c_i à curva c restringida a (t_{i-1}, t_i) para $i = 1, \dots, k$. Definimos o comprimento da curva c , denotado por $l(c)$, como a soma dos comprimentos das curvas suaves c_i para $i = 1, \dots, k$.

1.1.9 Definição. *A distância Riemanniana em M é a função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte maneira: dados $p, q \in M$, temos que $d(p, q)$ é o ínfimo dos comprimentos $l(c)$, onde $c : [0, 1] \rightarrow M$ são curvas suaves por partes com $c(0) = p$ e $c(1) = q$.*

Pode-se mostrar que o ínfimo na definição anterior é na verdade o mínimo i.e., existe uma geodésica c que vai de p a q de comprimento mínimo tal que $d(p, q) = l(c)$. Esta função distância faz de M um espaço métrico.

1.1.10 Teorema. *A função distância é contínua e define uma métrica cuja topologia coincide com a topologia da variedade.*

Do ponto de vista da topologia, é importante saber se o espaço métrico (M, d) é completo. Lembre-se que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.

1.1.11 Definição. *Uma variedade Riemanniana M é geodesicamente completa se para cada $p \in M$, cada geodésica $\gamma_{(p,v)} : I \rightarrow M$ através de p pode ser estendida para uma geodésica definida em todo $\mathbb{R}$.*

1.1.12 Teorema (Teorema de Hopf-Rinow). *Uma variedade Riemanniana é geodesicamente completa se, e somente se é completa com respeito à distância Riemanniana.*

1.2 Aplicação exponencial e campos de Jacobi

Consideremos sempre (M, g) uma variedade Riemanniana, vamos definir a aplicação exponencial e listar suas principais propriedades. A aplicação exponencial descreve a dependência das geodésicas saindo de um mesmo ponto e sua velocidade inicial.

1.2.1 Definição. *Para $p \in M$ considere o conjunto $V \subseteq T_p M$ de todos os vetores $v \in T_p M$ tal que $\gamma_{(p,v)}$ é definido numa vizinhança de $[0, 1]$. A aplicação exponencial $\exp_p : V \rightarrow M$ é definida por*

$$\exp_p(v) = \gamma_{(p,v)}(1).$$

Em geral, consideraremos a aplicação exponencial $\exp_p$ restringida à bola $B(0, \delta) \subseteq T_p M$, com $\delta > 0$. Enfatizamos que a bola $B(0, \delta)$ é definida em termos da métrica Riemanniana g .

1.2.2 Proposição. *A aplicação $\exp_p$ tem as seguintes propriedades:*

1. $\exp_p(0) = p$;
2. $D(\exp_p)_0(v) = v$, para todo $v \in T_p M$;
3. *Existem uma vizinhança U de 0_p em $T_p M$ e uma vizinhança V de p tal que $\exp_p$ leva U difeomorficamente sobre V . Tal vizinhança V é chamada vizinhança geodésica de p . Em particular, existe um $0 < \rho < \delta$ tal que*

$$\exp_p : B(0, \rho) \subseteq T_p M \longrightarrow \exp_p(B(0, \rho)) \subseteq M$$

é um difeomorfismo.

4. *Existem uma vizinhança W de p e um número $\eta > 0$ tais que para cada $q \in W$, $\exp_q$ é um difeomorfismo de $B(0, \eta)$ para $\exp_q(B(0, \eta))$. Além disso, $\exp_q$ depende suavemente de $q \in W$. Tal vizinhança W é chamada vizinhança uniformemente geodésica de p .*

Na Proposição 1.2.2, $\exp_p(B(0, \rho))$ é chamada a bola geodésica com centro em p e raio ρ e é denotada por $B(p, \rho)$. A fronteira da bola geodésica é chamada de esfera geodésica e denotada por $S(p, \rho)$. O significado de raio neste contexto é que a longitude de arco de qualquer segmento geodésico que une p a qualquer ponto da esfera $S(p, \rho)$ é igual a ρ . A longitude de arco de qualquer geodésica de p a um ponto q dentro da bola geodésica $B(p, \rho)$ é menor que ρ . Pode-se mostrar que toda geodésica saindo de p é ortogonal a $S(p, \rho)$, para isso precisamos do seguinte lema.

1.2.3 Lema (Lema de Gauss). *Seja $p \in M$. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $\exp_p$ é definida em $B(0, \delta)$. Sejam $u, v \in T_p M$ com $|v| < \delta$. Identificamos $T_v(T_p M)$ por $T_p M$. Então*

$$\langle D(\exp_p)_v(v), D(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

1.2.4 Corolário. *As geodésicas através de p são ortogonais a qualquer esfera geodésica $S(p, r)$ centrada em p com raio $0 < r < \delta$, onde δ é como no Lema de Gauss (lema 1.2.3).*

Quando uma geodésica desliza-se através de uma variedade de modo que todas as posições intermediárias são ainda geodésicas, a velocidade que as geodésicas próximas possuem talvez, define um campo de vetores ao longo da geodésica inicial. Este campo de vetores contém toda as informações sobre o tensor de curvatura ao longo da geodésica. Lembre que o tensor de curvatura é dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde X , Y e Z são campos de vetores suaves em M , para mais detalhes ver apêndice.

1.2.5 Definição. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica e $\varepsilon > 0$. A variação de γ através de geodésicas é uma aplicação suave*

$$(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow \Gamma(s, t) \in M,$$

tal que

1. $\Gamma(0, \cdot) = \gamma$,
2. $\Gamma(s, \cdot)$ é uma geodésica para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

A fim de medir a velocidade em cada ponto da geodésica original, tal como varia através das geodésicas, definimos

$$J(t) = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \right|_{s=0} (s, t).$$

Cada $J(t)$ é um vetor tangente a curva $s \mapsto \Gamma(s, t)$, portanto $t \mapsto J(t)$ define um campo de vetores ao longo de γ . Já que a família de curvas Γ é suave, o campo de vetores J é também suave. O seguinte teorema mostra a relação entre este campo de vetores e o tensor curvatura.

1.2.6 Teorema. *Sejam γ uma geodésica e Γ uma variação de γ através de geodésicas. O campo de vetores J ao longo de γ satisfaz*

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

Isto conduz à seguinte definição.

1.2.7 Definição. *Um campo de vetores J ao longo de uma geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado um campo de Jacobi se satisfaz a equação diferencial de segunda ordem*

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

1.2.8 Proposição. *Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica e $p = \gamma(t_0)$ um ponto em γ , para qualquer par $v, w \in T_p M$, existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ tal que $J(t_0) = v$ e $\frac{DJ}{dt}(t_0) = w$.*

Temos a seguinte consequência fácil.

1.2.9 Corolário. *Os campos de Jacobi ao longo de uma geodésica γ formam um espaço vetorial de dimensão $2m$.*

As variações através de geodésicas dão origem a campos de Jacobi.

1.2.10 Teorema. *Todo campo de Jacobi ao longo da geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ pode ser obtido por uma variação de γ através de geodésicas.*

Finalizamos este capítulo definindo as coordenadas normais de *Fermi* de uma geodésica; para isso suponha que a variedade Riemanniana (M, g) tem dimensão $m + 1$.

Tome uma geodésica γ de M definida numa vizinhança de $[0, 1]$ sem auto-interseções. Em $T_{\gamma(0)}M$ escolha um conjunto vetores $e^1, \dots, e^m$ tal que

$$\left\{ \frac{d\gamma}{dt}(0), e^1, \dots, e^m \right\},$$

é uma base ortonormal de $T_{\gamma(0)}M$. Lembre que $\frac{d\gamma}{dt}$ é um campo de vetores paralelos ao longo de γ . Dado $t \in [0, 1]$, pela Proposição 1.1.4 existe o transporte paralelo desta base:

$$\left\{ \frac{d\gamma}{dt}(t), e^1(t), \dots, e^m(t) \right\}.$$

Não é difícil mostrar que este é um conjunto de vetores ortonormais (pois os transportes paralelos preservam os ângulos entre os vetores), e assim forma uma base de $T_{\gamma(t)}M$, i.e. é um referencial móvel ao longo de γ . Usando a aplicação exponencial, podemos definir $\Phi : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \rightarrow M$ por

$$\Phi(t, x_i) = \exp_{\gamma(t)} \left[\sum_{i=1}^m x_i e^i(t) \right].$$

Como esta aplicação tem posto máximo no ponto $(t, 0)$, pelo Teorema da Função Inversa para variedades, temos que existem vizinhanças de γ e $[0, 1] \times \{0\}$ onde tal aplicação é um difeomorfismo e assim definimos um sistema de coordenadas (t, x_i) na vizinhança de γ . Estas são as coordenadas normais de *Fermi*.

Uma das propriedades mais importantes deste sistema de coordenadas é que a geodésica é uma linha “horizontal”, i.e., $\gamma(t) = (t, 0)$.

Capítulo 2

O Campo Geodésico, a Métrica de Sasaki e a Estrutura Simplética

Neste capítulo iremos estudar o fluxo geodésico, sabemos que todo fluxo é gerado por um campo de vetores suave, o campo correspondente ao fluxo geodésico é chamado campo geodésico. Se (M, g) é uma variedade Riemanniana, iremos definir uma métrica Riemanniana em TM , chamada a métrica de Sasaki, i.e. com esta nova métrica temos que TM é uma variedade Riemanniana. Para definir esta métrica precisamos de uma decomposição de TM em soma direta, os subfibrados da decomposição são chamados subfibrado "horizontal" e "vertical", os quais iremos escrever em coordenadas, para uma boa referência ver T. Sakai [24]. Terminamos este capítulo fazendo uma revisão muito rápida de Geometria Simplética, iremos estudar a estrutura simplética natural do fluxo geodésico, para uma boa referência ver G.P. Paternain [19] e H. Hofer, E. Zehnder [12].

2.1 Fluxo Geodésico

Seja M uma variedade Riemanniana completa, denote por $\theta = (p, v)$ um ponto em TM e γ_θ a única geodésica com $\gamma_\theta(0) = p$ e $\frac{d\gamma_\theta}{dt}(0) = v$. O fluxo geodésico é um fluxo no fibrado tangente de uma variedade.

2.1.1 Definição. O fluxo $\phi : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$ na fibra tangente TM de M definido por

$$\phi_t(\theta) = \left(\gamma_\theta(t), \frac{d\gamma_\theta}{dt}(t) \right),$$

é chamado o fluxo geodésico.

As propriedades do fluxo, $\phi_0(\theta) = \theta$ e $\phi_t(\phi_s(\theta)) = \phi_{t+s}(\theta)$, são satisfeitas devido à unicidade das geodésicas com respeito às suas condições iniciais. O fato do fluxo geodésico atuar sobre o fibrado tangente TM e não em M implica que suas linhas de fluxo são campos de vetores ao longo de geodésicas, e não só geodésicas. Como as geodésicas tem

velocidade constante, se a velocidade inicial de uma geodésica é $|v| = 1$, então $|\frac{d\gamma_\theta}{dt}(t)| = 1$ para todo t . Seja SM o fibrado tangente unitário i.e.

$$SM = \{(p, v) \in TM : |v| = 1\}.$$

O fibrado tangente unitário é invariante por ϕ . Considere sempre a restrição do fluxo geodésico ϕ para SM , i.e., $\phi_t : SM \rightarrow SM$. Denote por $(T_p M)^\times$ o espaço $T_p M$ sem o elemento neutro 0_p , e considere também $T' M$ como o fibrado dos espaços $(T_p M)^\times$ para todo $p \in M$, i.e

$$T' M = \coprod_{p \in M} (T_p M)^\times.$$

Tome (x_i, v_i) um sistema de coordenadas locais em torno de $\theta = (p, v) \in TM$. Lembrando que a forma local da geodésica é

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0,$$

e pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = v_k, \\ \frac{dv_k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k v_i v_j. \end{cases}$$

para todo $k = 1, \dots, m$. Assim temos a forma local de um sistema de equações diferenciais no fibrado tangente TM que é gerado por algum campo de vetores.

2.1.2 Lema. *Existe um único campo de vetores suave G em TM cujas trajetórias são da forma $t \mapsto \phi_t(\theta)$, onde ϕ é o fluxo geodésico.*

Chamemos o campo de vetores suave G campo geodésico de M . Se a dimensão de M é m , sabe-se que o fibrado tangente TM é uma variedade suave de dimensão $2m$, logo pode-se considerar o fibrado tangente de TM , denotado naturalmente por TTM . Considerando a aplicação projeção natural de TM ,

$$\varpi : TTM \longrightarrow TM,$$

temos que $\varpi \circ G(\theta) = \theta$ para cada $\theta \in TM$.

2.2 Métrica de Sasaki

Seja M uma variedade Riemanniana, iremos decompor TTM como soma de dois subfibrados que chamamos de subfibrados horizontal e vertical. Estes subfibrados tem um papel semelhante ao dos eixos coordenados no plano cartesiano.

Considere sempre $\theta = (p, v) \in TM$ e ξ um vetor tangente a TM em θ , i.e., $\xi \in T_\theta TM$. Como a projeção a M é suave, pode-se falar de

$$D\pi_\theta : T_\theta TM \longrightarrow T_p M.$$

Dizemos que ξ é um *vetor vertical* em θ se $D\pi_\theta(\xi) = 0$, denote V_θ , o subfibrado vertical em θ , e V , subfibrado vertical, como

$$V_\theta := \ker(D\pi_\theta) \text{ e } V := \coprod_{\theta \in TM} V_\theta.$$

Em outras palavras, ξ é um vetor vertical em θ se, e somente se existem $v, w \in T_p M$ tal que ξ é vetor tangente na curva $\sigma(t) = (p, v + tw)$ em $t = 0$. Como $w = \frac{d\sigma}{dt}(0)$, se segue que V_θ é linearmente isomorfo a $T_p M$.

Definamos agora o subfibrado horizontal: considere a seguinte aplicação de conexão

$$K : TTM \longrightarrow TM,$$

tal que para $\theta \in TM$, temos

$$K_\theta : T_\theta TM \longrightarrow T_p M.$$

Dado $\xi \in T_\theta TM$, tome uma curva $V(t)$ em TM tal que $V(0) = \theta$ e $\frac{dV}{dt}(0) = \xi$. A curva $V(t)$ pode ser considerada como um campo de vetores ao longo da curva $h(t) = \pi \circ V(t)$ em M .

2.2.1 Lema. *A derivada covariante $\frac{DV}{dt}(0)$ ao longo de $h(t) = \pi \circ V(t)$ é independente da escolha da curva $V(t)$ em TM tal que*

$$\begin{cases} V(0) = \theta, \\ \frac{dV}{dt}(0) = \xi \end{cases}$$

Definimos a aplicação de conexão K de θ em ξ como

$$K_\theta(\xi) = \frac{DV}{dt}(0),$$

onde V é alguma curva em TM tal que $V(0) = \theta$ e $\frac{dV}{dt}(0) = \xi$. Do Lema 2.2.1, segue que $K_\theta(\xi)$ está bem definido. Dizemos que ξ é um *vetor horizontal* em θ se $K_\theta(\xi) = 0$. Denote H_θ , o subfibrado horizontal em θ , e H , o subfibrado horizontal, como

$$H_\theta := \ker(K_\theta) \text{ e } H := \coprod_{\theta \in TM} H_\theta.$$

Outra maneira de definir é: ξ é um *vetor horizontal* em θ se, e somente se existe um vetor $w \in T_p M$ e obtemos o campo de vetores $V(t)$ por transporte paralelo de v ao longo da geodésica $\gamma_{(p,w)}$ que é uma curva em TM , tal que $\xi = \frac{dV}{dt}(0)$.

Cada tal curva em TM é completamente determinada pela velocidade inicial de $\gamma_{(p,w)}$, já que o campo de vetores paralelos ao longo desta geodésica é unicamente determinado por seu vetor inicial v , que é fixo. Assim, H_θ é linearmente isomorfo a $T_p M$.

Como o único $\xi \in T_\theta TM$ que é tanto vetor horizontal como vetor vertical, é o vetor zero, e como $\dim H_\theta + \dim V_\theta = \dim T_\theta TM$,

$$T_\theta TM = H_\theta + V_\theta.$$

Assim todo vetor $\xi \in T_\theta TM$ pode-se escrever em termos de suas componentes horizontal e vertical, denotado como

$$\xi = \{\xi_h, \xi_v\},$$

com $\xi_h \in H_\theta$ e $\xi_v \in V_\theta$.

2.2.2 Lema. A aplicação $i_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_p M \times T_p M$ definida por

$$i_\theta(\xi) = (D\pi_\theta(\xi), K_\theta(\xi))$$

é um isomorfismo linear.

2.2.3 Lema. O subespaço $\ker(K_\theta)$ é linearmente isomorfo a $\text{Im}(D\pi_\theta)$.

Podemos identificar a componente horizontal ξ_h com o vetor $D\pi_\theta(\xi) \in T_p M$, e a componente vertical ξ_v com $K_\theta(\xi) \in T_p M$.

Definimos uma métrica Riemanniana na variedade TM , como

$$\langle \xi, \eta \rangle_\theta = \langle D\pi_\theta(\xi), D\pi_\theta(\eta) \rangle_p + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_p,$$

para $\xi, \eta \in T_\theta TM$. Esta é chamada a *métrica de Sasaki*. Esta métrica faz

$$T_\theta TM = H_\theta \oplus V_\theta.$$

Seja γ_θ geodésica, lembre que G é o campo geodésico de M , então

$$G_\theta = \frac{d}{dt}\phi_t(\theta)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t))|_{t=0},$$

onde $\gamma'_\theta(t) = \frac{d\gamma_\theta}{dt}(t)$. Pensando $\phi_t(\theta)$ como uma curva em TM , temos que

$$D\pi_\theta(G_\theta) = \gamma'_\theta(0) = v$$

e observe que $\gamma'_\theta(t)$ representa o transporte paralelo do v ao longo de γ_θ , portanto $K(G_\theta) = 0$. Logo o campo geodésico $G : TTM \rightarrow TM$ que gera o fluxo geodésico, usando a identificação i_θ , tem a forma

$$G_\theta = \{v, 0\}.$$

Podemos fazer tudo o que fizemos anteriormente nos restringindo a SM . Os espaços horizontais e verticais restritos a SM são denotados da mesma forma, i.e., $T_\theta SM = H_\theta \oplus V_\theta$ para $\theta \in SM$, assim temos o seguinte resultado:

2.2.4 Teorema. *Dado um vetor $\xi = \{v, w\} \in T_\theta SM$, existe um único campo de Jacobi $J = J_{\{v, w\}}(t)$ ao longo de γ_θ cujas condições iniciais são $J(0) = v$ e $J'(0) = w$, tal que*

$$D_\theta \phi_t(\xi) = \{J(t), J'(t)\}$$

em coordenadas de $T_{\phi_t(\theta)} SM$.

Defina $N_\theta = \{\xi \in T_\theta SM : \langle \xi, G_\theta \rangle_\theta = 0\}$ com $\theta \in SM$. Temos que N_θ é invariante pelo fluxo geodésico, para todo $\theta \in SM$.

2.2.5 Teorema. *Para cada $\theta \in SM$, temos que*

$$D_\theta \phi_t(N_\theta) = N_{\phi_t(\theta)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

2.3 Espaços em coordenadas

Nesta seção iremos estabelecer os subfibrados horizontal e vertical em coordenadas locais. Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$, $v \in T_p M$, identifique $\theta = (p, v)$ e $\xi \in T_\theta TM$ considere os seguintes sistemas de coordenadas locais: (x_i) em torno de p , (x_i, v_i) em torno de θ , (x_i, v_i, X_i, ξ_i) em torno de ξ . Logo a projeção ϖ em coordenadas escreve-se como

$$\varpi : (x_i, v_i, X_i, \xi_i) \mapsto (x_i, v_i),$$

e a derivada $D\pi_\theta$ em coordenadas como

$$D\pi_\theta : (x_i, v_i, X_i, \xi_i) \mapsto (x_i, X_i).$$

O espaço $T_p M$ é uma subvariedade de dimensão m de TM e $T_v T_p M$ é subespaço de dimensão m de $T_\theta TM$ que coincide com $\ker(D\pi_\theta)$. Por outro lado como $T_p M$ é um

espaço vetorial, podemos identificar $T_v T_p M$ com $T_p M$. Com respeito aos sistemas locais anteriores temos $T_v T_p M = \{(x_i, v_i, 0, \xi_i) : (\xi_i) \in \mathbb{R}^m\}$ e

$$j_v : (x_i, v_i, 0, \xi_i) \in T_v T_p M \longmapsto (x_i, \xi_i) \in T_p M$$

dá a identificação. Observe que

$$V_\theta = \{(x_i, v_i, 0, \xi_i) : (\xi_i) \in \mathbb{R}^m\}$$

é o espaço vertical em θ em coordenadas locais. Agora vejamos o espaço horizontal em θ em coordenadas locais, usaremos a segunda definição, i.e., $\xi \in H_\theta$ se, e somente se existe $w \in T_p M$ e obtemos o campo de vetores $V(t)$ por transporte paralelo de v ao longo da geodésica $\gamma_{(p,w)}$ que é uma curva em TM , tal que $\xi = \frac{dV}{dt}(0)$; considerando $w = X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V(t) = v_i(t) \frac{\partial \gamma_{(p,w)}}{\partial x_i}(t)$ com $v_i = v_i(0)$ e $x_i(t) = x_i(\gamma_{(p,w)}(t))$, temos que

$$0 = K_\theta(\xi) = \frac{DV}{dt}(0) = v'_i + \Gamma_{jk}^i v_k x'_j$$

e então identifica-se ξ com $(x_i, v_i, X_i, -\Gamma_{jk}^i v_k X_j)$. Logo

$$H_\theta = \{(x_i, v_i, X_i, -\Gamma_{jk}^i v_k X_j) : (X_i) \in \mathbb{R}^m\}$$

é o espaço horizontal em θ em coordenadas locais.

Definamos para $\theta \in TM$ a aplicação $\tilde{K}_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_p M$ por

$$\tilde{K}_\theta(\xi) = j_v(\xi_v),$$

lembre que $\xi_v \in V_\theta$.

2.3.1 Proposição. *A aplicação $\tilde{K} : TTM \rightarrow TM$ é suave e satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\pi \circ \varpi = \pi \circ \tilde{K} = D\pi \circ \pi$.
2. A restrição de $\tilde{K}$ a $T_v T_p M$ coincide com j_v .
3. $\tilde{K}(H_\theta) = 0_p$ e $D\pi_\theta : H_\theta \rightarrow T_p M$ é um isomorfismo linear.
4. Se X é um campo de vetores, então $\tilde{K}(DX_\theta) = \nabla_v X$.

É fácil observar da Proposição 2.3.1 que a aplicação $\tilde{K}$ coincide com a aplicação de conexão K .

Com a notação usada acima, considere $a, b, c, d \in \mathbb{R}^m$ tais que $(x_i, v_i, X_i, \xi_i)(p) = (a, b, c, d)$, como $\xi = \{\xi_h, \xi_v\}$, então $\xi_h = (x_i, v_i, X_i, -\Gamma_{jk}^i v_k X_j)$ e $\xi_v = (x_i, v_i, 0, \xi_i +$

$\Gamma_{jk}^i v_k X_j$). Denotemos $\Gamma_{jk}^i|_p$ por $\Gamma(a)$, ver apêndice para lembrar as parametrizações locais, temos o seguinte lema.

2.3.2 Lema. *Sejam φ_α e Φ_α parametrizações locais de p em M e de θ em TM respectivamente, assim temos o seguinte*

1. $\varphi_\alpha(\xi_h) = (a, b)$,
2. $\varphi_\alpha(\xi_v) = (a, d + \Gamma(a) \cdot (c, b))$,
3. $\Phi_\alpha(\{\xi_h, 0\}) = (a, b, c, -\Gamma(a) \cdot (c, b))$,
4. $\Phi_\alpha(\{0, \xi_v\}) = (a, b, 0, d + \Gamma(a) \cdot (c, b))$.

Denotemos por $\mathcal{G}^k M$ o conjunto de todas as métricas Riemanniana de classe C^k onde $2 \leq k \leq \infty$, dotado com a topologia C^k . Como agora temos um conjunto de métricas, temos que sobrecarregar as notações para distinguir com que métrica trabalhamos.

Sejam $g \in \mathcal{G}^k M$, $p \in M$, $v \in T_p M$ e $\theta = (p, v)$. A geodésica passando por p e velocidade v em M será denotada por γ_θ^g , o fibrado tangente unitário por

$$SM^g = \{\theta = (p, v) \in TM : g(v, v) = 1\}$$

e o fluxo geodésico por

$$\phi_t^g(\theta) = \left(\gamma_\theta^g(t), \frac{d\gamma_\theta^g}{dt}(t) \right),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dados $t \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, denotemos

$$\begin{aligned} \Theta(t, \varepsilon) &:= \phi_t^{g+\varepsilon\delta g}(\theta), & \Theta(t) &:= \Theta(t, 0), \\ \theta(t, \varepsilon) &:= \pi \circ \Theta(t, \varepsilon) \quad e \quad \theta(t) &:= \theta(t, 0), \end{aligned}$$

observe que $\theta(t, \varepsilon), \theta(t) \in M$, $\theta(t, \varepsilon) = \gamma_\theta^{g+\varepsilon\delta g}(t)$ e $\theta(t) = \gamma_\theta^g(t)$. Dado $\varepsilon > 0$, denotando δ a derivada $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$, segue que

$$\delta\Theta(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \Theta(t, \varepsilon) \quad e \quad \delta\theta(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \theta(t, \varepsilon).$$

Temos que $\Theta(t), \delta\theta(t) \in T_{\theta(t)} M$ e $\delta\Theta(t) \in T_{\Theta(t)} TM$.

2.3.3 Lema. $\delta\Theta(t) = \{\delta\theta(t), \frac{D}{dt}\delta\theta(t)\}$.

Demonstração. Fixamos t , considere φ_α um sistema de coordenadas em torno de $\theta(t)$ e tome $a(t, \varepsilon) = \varphi_\alpha(\theta(t, \varepsilon))$. Como $\Theta(t, \varepsilon) = (\theta(t, \varepsilon), \theta'(t, \varepsilon))$, então

$$\Phi_\alpha(\Theta(t, \varepsilon)) = (\varphi_\alpha(\theta(t, \varepsilon)), D\varphi_\alpha(\theta'(t, \varepsilon))) = (a(t, \varepsilon), a'(t, \varepsilon)),$$

i.e., $\Phi_\alpha(\Theta) = (a, a')$. Por outro lado, como

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Theta(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a_i(t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a'_i(t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial v_i},$$

temos

$$\Phi_\alpha(\delta\Theta) = \Phi_\alpha \left(\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Theta(t, \varepsilon) \right) = \left(a(t, \varepsilon), a'(t, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a(t, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} a'(t, \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Logo,

$$\Phi_\alpha(\delta\Theta) = (a, a', \delta a, \delta a') \text{ e } \varphi_\alpha(\delta\theta) = (a, \delta a).$$

Do Lema 2.3.2, temos que $\varphi_\alpha((\delta\Theta)_h) = (a, \delta a)$ implica que

$$(\delta\Theta)_h = \delta\theta,$$

e $\varphi_\alpha((\delta\Theta)_v) = (a, \delta a' + \Gamma(a) \cdot (a', \delta a))$ implica que

$$(\delta\Theta)_v = \frac{D}{dt} \delta\theta.$$

□

2.4 Geometria Simplética

Nesta seção iremos dar uma pequena introdução à Geometria Simplética, e mostraremos a estrutura simplética do fluxo geodésico. Considere a matriz de ordem $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

onde I e 0 são as matrizes identidade e zero de ordem $n \times n$, respectivamente. Agora definamos em $\mathbb{R}^{2n}$ a seguinte forma: dados $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ colocamos

$$\omega_0(v, w) := \langle Jv, w \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^{2n}$. Como

$$J^T = J^{-1} = -J,$$

temos que $\omega_0(v, w) = -\omega_0(w, v)$ (anti-simetria) e para todo $v \neq 0$ existe w tal que $\omega_0(v, w) \neq 0$ (não-degenerado). Assim o par $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é chamado de espaço vetorial simplético, em geral temos:

2.4.1 Definição. Um espaço vetorial simplético é um par (V, ω) onde V é um espaço vetorial de dimensão par e ω é uma forma bilinear, anti-simétrica e não-degenerada

Na definição acima só precisamos de um espaço vetorial V de dimensão finita e depois mostra-se que tem dimensão par. A forma Ω é chamada forma simplética. Lembre que com as coordenadas $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{2n}$, temos que

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

onde $(dx_i \wedge dy_j)(v, w) = v_i w_j - v_j w_i$ para $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ e $1 \leq i, j \leq n$. Note também que

$$J^2 = -I,$$

assim, $\omega_0(v, Jw) = \langle v, w \rangle$, para todo $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$. Logo J dá uma estrutura complexa em $\mathbb{R}^{2n}$ compatível com a métrica Euclidiana. Agora, iremos estudar aplicações que deixam as formas simpléticas invariantes.

2.4.2 Definição. Se (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) são dois espaços vetoriais simpléticos, chamamos a aplicação linear $A : V_1 \rightarrow V_2$ simplética se $A^* \omega_2 = \omega_1$, i.e.

$$\omega_2(Av, Aw) = \omega_1(v, w)$$

para todo $v, w \in V_1$

No caso de $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2n}$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, dizer que A é uma aplicação simplética é equivalente a

$$A^T J A = J,$$

e se $n = 1$ temos que $\det A = 1$. Denotemos por $Sp(n)$ o espaço de matrizes simpléticas em $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$, o qual é um grupo de Lie com a multiplicação de matrizes.

É natural seguir com definições mais gerais, por exemplo se $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um difeomorfismo, dizemos que F é simplético se $F(0) = 0$ e $F^* \omega_0 = \omega_0$ onde, por definição, o pullback de uma 2-forma ω é

$$(F^* \omega)_p(v, w) = \omega_{F(p)}(DF(p) \cdot v, DF(p) \cdot w)$$

para $p \in \mathbb{R}^{2n}$ e para todos $v, w \in T_p \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$. Assim podemos dar a definição nas variedades. Primeiro estabelecemos o conceito de variedade simplética onde podem ser definidas estas aplicações.

2.4.3 Definição. Uma estrutura simplética numa variedades suave N de dimensão par é uma 2-forma ω em N satisfazendo:

1. $d\omega = 0$, i.e., ω é uma forma fechada,
2. ω é não-degenerada, i.e., para todo $p \in N$ e $u \in T_p N$ com $u \neq 0$, existe $v \in T_p N$ tal que $\omega(u, v) \neq 0$.

O par (N, ω) é chamado variedade simplética.

Toda variedade simplética é localmente como $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, devido a [Darboux].

2.4.4 Teorema (Darboux). *Se ω é uma 2-forma não-degenerada numa variedade N de dimensão $2n$, então $d\omega = 0$ se e somente se para cada $p \in N$ existem coordenadas (U, φ) onde $\varphi(x_i, y_i) \in U \subset N$ é tal que $\varphi(0) = p$ e*

$$\varphi^* \omega = \omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Agora sim iremos definir as aplicações simpléticas.

2.4.5 Definição. *Se (N, ω) e (M, Ω) são duas variedades simpléticas, chamamos a aplicação diferenciável $F : N \rightarrow M$ simplética se $F^* \Omega = \omega$, i.e.,*

$$\Omega_{F(p)}(DF(p) \cdot v, DF(p) \cdot w) = \omega_p(v, w)$$

para todo $p \in N$ e $v, w \in T_p N$.

Já que ω é não-degenerada, temos que $DF(p)$ é injetora, para todo $p \in N$, assim $\dim N \leq \dim M$. Se $\dim N = \dim M$, temos que F é localmente um difeomorfismo.

Uma estrutura quase complexa numa variedade N associa para cada $p \in N$ uma aplicação linear $J_p : T_p N \rightarrow T_p N$, satisfazendo

$$J_p^2 = -I.$$

2.4.6 Proposição. *Se (N, ω) é uma variedade simplética, existem uma estrutura quase complexa J em N e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em N satisfazendo*

$$\omega_p(v, J_p w) = \langle v, w \rangle_p$$

para todo $p \in N$ e $v, w \in T_p N$. Da simetria da métrica segue que $\omega_p(J_p v, J_p w) = \langle v, w \rangle_p$ i.e., J_p é uma aplicação simplética do espaço vetorial simplético $(T_p N, \omega_p)$. Além disso,

$$J_p^* = J_p^{-1} = -J_p,$$

onde J_p^* é o adjunto de J no espaço com produto interno $(T_p N, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$.

Agora iremos estudar a estrutura simplética do fluxo geodésico. Considere o fluxo geodésico $\phi_t : SM \rightarrow SM$ e sempre $\theta \in SM$, tome como antes N_θ , e os espaços $H_\theta \cap N_\theta$ e $V_\theta \cap N_\theta$ denotados, de novo, por H_θ e V_θ respectivamente, também considere o fibrado N onde as fibras são N_θ . Assim temos que $\dim(H_\theta) = \dim(V_\theta) = m - 1$ e $N_\theta = H_\theta \oplus V_\theta$, i.e.,

$$T_\theta SM = H_\theta \oplus V_\theta \oplus \langle G_\theta \rangle,$$

onde G é o campo geodésico. Definamos $\mathcal{J} : N \rightarrow N$ pondo para $\{v, w\} \in N_\theta$,

$$\mathcal{J}\{v, w\} = \{-w, v\}.$$

Note que $\mathcal{J}^2 = -I$ nos dá a estrutura quase complexa e portanto uma estrutura simplética em N . Definamos a 2-forma como segue

$$\Omega_\theta(\xi, \eta) := \langle \xi, \mathcal{J}(\eta) \rangle_\theta,$$

onde $\xi, \eta \in N_\theta$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ é a métrica de Sasaki, que é uma métrica Riemanniana em SM . Assim temos que (N, Ω) é um espaço simplético, onde $\Omega(\theta) = \Omega_\theta$, logo temos que ϕ_t é uma aplicação simplética.

2.4.7 Proposição. *Para cada $\theta \in SM$ temos que*

$$\phi_t^*(\Omega_{\phi_t(\theta)}) = \Omega_\theta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Deduzimos que

$$(D_\theta \phi_t)^* \cdot \mathcal{J} \cdot (D_\theta \phi_t) = \mathcal{J},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ onde $(D_\theta \phi_t)^*$ é o operador adjunto de $D_\theta \phi_t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora considere $\mathcal{O}_\theta$ uma órbita periódica, i.e. $\mathcal{O}_\theta = \{\phi_t(\theta) : 0 \leq t \leq t_0\}$, para algum $t_0 > 0$. Vamos definir a aplicação de Poincaré. Como N_θ é ortogonal a G_θ com respeito à métrica de Sasaki, onde G é o campo geodésico, temos que existe uma vizinhança Σ_θ de θ em N_θ , chamada seção, tal que existe $T : \Sigma_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ suave e $\mathcal{P}_\theta : \Sigma_\theta \rightarrow \Sigma_\theta$ tal que $\mathcal{P}_\theta(\vartheta) = \phi_{T(\vartheta)}(\vartheta)$, que é chamada a aplicação de Poincaré.

Sejam X, Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$. Dizemos f e g são *conjugadas* se existe $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$.

2.4.8 Proposição. *Seja $\theta \in SM$ fixo. Se $\mathcal{P}_\theta : \Sigma_\theta \rightarrow \Sigma_\theta$ e $\mathcal{P}'_\theta : \Sigma'_\theta \rightarrow \Sigma'_\theta$ são aplicações de Poincaré de seções diferentes, então $\mathcal{P}_\theta$ e $\mathcal{P}'_\theta$ são conjugadas.*

Assim podemos supor que existe uma única aplicação de Poincaré quando falamos sobre as propriedades que são invariantes sob conjugação.

Capítulo 3

Teorema da Métrica Bumpy

Neste capítulo iremos estudar uma classe de métricas Riemannianas chamada métrica Bumpy, que está relacionada as órbitas periódicas do fluxo geodésico. O principal resultado é que o conjunto das métricas Bumpy é genérico (em particular denso) em $\mathcal{G}^k M$, que é devido ao trabalho do Anosov [4]. Sabemos que ao perturbar a métrica de uma variedade mudamos o fibrado unitário que é onde o fluxo geodésico é definido, assim, nós precisamos de novos objetos relacionados ao fluxo geodésico, mas que independam da métrica.

3.1 Projetivização

Usaremos sempre M variedade compacta Riemanniana e g a métrica Riemanniana de classe C^k , onde $2 \leq k \leq \infty$. Estaremos interessados em estudar propriedades das órbitas periódicas dos fluxos geodésicos de métricas próximas a g . Porém, é importante observar que a própria definição do fibrado unitário depende de g . Ou seja, perturbando a métrica g , o novo fluxo geodésico estaria definido em outra variedade! Para evitar este problema, iremos relacionar cada um destes fluxos com outros fluxos, com mesma dinâmica, porém todos estes definidos na mesma variedade. Este processo é conhecido como projetivização, que explicaremos a seguir.

3.1.1 Definição. *Sejam $v, w \in T_p M$ não nulos, dizemos que v está relacionado com w , e escrevemos $v \sim w$, se existe um $t > 0$ tal que $w = tv$.*

É fácil mostrar que " $\sim$ " é uma relação de equivalência e denotamos por ν a classe de equivalência $[v] = \mathbb{R}^+ v$, e por $\mathbb{T}_p M$ o conjunto quociente $(T_p M)^{\times} / \sim$ onde $(T_p M)^{\times} = T_p M \setminus \{0_p\}$. Considere o fibrado

$$\mathbb{T}M = \coprod_{p \in M} \mathbb{T}_p M.$$

Tome $T'M$ a união dos espaços $(T_p M)^\times$ para todo $p \in M$, i.e. se $\theta = (p, v) \in T'M$ temos $v \neq 0$ e identificaremos $[\theta]$ por $[v]$, i.e.,

$$\nu = [v] = [\theta].$$

Considere as seguintes projeções naturais:

$$\rho : TM \longrightarrow M$$

definida por $\rho(\nu) = p$, onde $\nu = [\theta] = [(p, v)]$ e

$$\varrho : T'M \longrightarrow TM$$

definida por $\varrho(\theta) = [\theta] = \nu$. Como $SM^g \subset T'M$, denotemos por ϱ_g a restrição de ϱ para SM^g , e observe que $\varrho_g : SM^g \rightarrow TM$ é uma bijeção, note que SM^g depende da métrica g e TM não.

Denote por $I_g = \varrho_g^{-1}$ como a inclusão $I_g : TM \hookrightarrow SM^g$. Lembre que

$$\phi = \phi^g : \mathbb{R} \times TM \longrightarrow TM$$

é o fluxo geodésico de M e $G = G^g$ é o campo geodésico de M que depende da métrica g . Definamos um fluxo em TM :

$$\psi^g : \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM$$

definido por

$$\psi_t^g = \varrho \circ \phi_t^g \circ I_g,$$

(i.e., $\psi_t^g \circ \varrho = \varrho \circ \phi_t^g$) que é chamado fluxo geodésico projetivizado.

A suavidade do fluxo geodésico ϕ^g depende da suavidade dos símbolos de Christoffel, que são de classe C^{k-1} , pois dependem da métrica g que é de classe C^k . Analogamente o fluxo geodésico projetivizado ψ^g é de classe C^{k-1} .

Denotemos $\phi_t^g(\theta)$ por $\Phi(\theta, t, g)$ e $\psi_t^g(\nu)$ por $\Psi(\nu, t, g)$, além disso, $\mathbb{G}^g$ denotará o campo de vetores do fluxo ψ^g .

3.1.2 Teorema. $g \mapsto \mathbb{G}^g$ é de classe C^∞ .

Para provar este teorema iremos obter algumas relações entre o fluxo projetivizado e o original.

3.1.3 Lema. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\phi_t^g(\lambda\theta) = \lambda\phi_{(\lambda t)}^g(\theta)$.

Demonstração. Considere a geodésica γ_θ e $\gamma(t) = \gamma_\theta(\lambda t)$. Como γ_θ e γ são curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, então γ é geodésica, e é claro que

$$\gamma'_\theta(t) = \phi_t^g(\theta), \quad \gamma'(t) = \lambda \gamma'_\theta(\lambda t)$$

e $\gamma'(t) = \lambda \phi_{(\lambda t)}^g(\theta)$. Por outro lado como $\gamma'(0) = \lambda \theta$, então $\gamma'(t) = \phi_t^g(\lambda \theta)$, logo

$$\phi_t^g(\lambda \theta) = \lambda \phi_{(\lambda t)}^g(\theta).$$

□

Seja $\lambda = |v|$ com $v \neq 0$. No Lema 3.1.3 substituindo θ por $\lambda^{-1}\theta$, temos que

$$\phi_t^g(\theta) = \lambda \phi_{(\lambda t)}^g(\lambda^{-1}\theta).$$

Vejamos algumas relações dos fluxos geodésicos, lembre que $\varrho \circ \phi_t^g = \psi_t^g \circ \varrho$, $I_g = \varrho^{-1}$ e $[(q, w)] = [\lambda(q, w)]$ para todo $(q, w) \in T'M$.

3.1.4 Lema. *Com as notações anteriores, temos*

1. $\varrho\Phi(\theta, t, g) = \Psi(\varrho\theta, t|v|, g),$
2. $\Phi(\theta, t, g) = |v|I_g \circ \Psi(\varrho\theta, t|v|, g).$

Demonstração. Usando as notações

1. $\varrho \circ \phi_t^g(\theta) = \varrho \circ (\lambda \phi_{(\lambda t)}^g(\lambda^{-1}\theta)) = \varrho \circ \phi_{(\lambda t)}^g(\lambda^{-1}\theta) = \psi_{(\lambda t)}^g \circ \varrho(\lambda^{-1}\theta) = \psi_{(\lambda t)}^g \circ \varrho(\theta),$ e
2. $\phi_t^g(\theta) = \lambda \phi_{(\lambda t)}^g(\lambda^{-1}\theta) = \lambda I_g \circ \psi_{(\lambda t)}^g \circ \varrho(\lambda^{-1}\theta) = \lambda I_g \circ \psi_{(\lambda t)}^g \circ \varrho(\theta).$

□

Prova do Teorema 3.1.2. Lembre-se que $\mathbb{G}^g$ é o campo de vetores do fluxo ψ^g , seja $\nu \in \mathbb{T}M$ e fixe $g_0 \in \mathcal{G}^\infty M$ tal que $\theta = I_{g_0}(\nu)$. Agora derivando 1. do Lema 3.1.4 com respeito a t , temos

$$D\varrho \cdot G_{(\phi_t^g(\theta))}^g = \lambda \mathbb{G}_{(\psi_{(t\lambda)}^g \circ \varrho(\theta))}^g,$$

onde $\lambda = |v|$ com $\theta = (p, v)$, para $t = 0$, $D\varrho \cdot G_\theta^g = \lambda \mathbb{G}_{(\varrho(\theta))}^g$. Logo, identificando $|\theta|$ por $|v|$, temos

$$\mathbb{G}_\nu^g = \frac{1}{|I_{g_0}(\nu)|} D\varrho \cdot G_{(I_{g_0}(\nu))}^g.$$

Considerando o campo de vetores de SM^{g_0} , $\mathcal{Q}_\theta^g = \frac{1}{|\theta|} G_\theta^g$, temos que

$$\mathbb{G}_\nu^g = D\varrho \cdot \mathcal{Q}_{(I_{g_0}(\nu))}^g.$$

Em verdade $\mathcal{Q}^g$ é uma seção da fibra $TTM|SM^{g_0} = \{\xi \in TTM : \varpi(\xi) \in SM^{g_0}\}$, e como g_0 é fixa, $\mathcal{Q}^g$ só depende de g . Denotando por $\Gamma^l E$ o espaço de seções de classe C^l da fibra de vetores E , (ver apêndice) então

$$\mathcal{Q}^g \in \Gamma^{k-1}(TTM|SM^{g_0}),$$

onde $2 \leq k < \infty$.

Por outro lado, como $\pi_{TM} \circ D\varrho = \varrho \circ \varpi$, onde $\pi_{TM} : TTM \rightarrow TM$ é a projeção natural, usando o fato que $\mathcal{Q}^g$ é um campo de vetores, temos que

$$\pi_{TM} \circ \mathbb{G}_\nu^g = \pi_{TM} \circ D\varrho \cdot \mathcal{Q}_{(I_{g_0}(\nu))}^g = \varrho \circ \varpi \circ \mathcal{Q}_{I_{g_0}(\nu)}^g = \varrho \circ I_{g_0}(\nu) = \nu,$$

para todo $\nu \in TM$. Logo $\pi_{TM} \circ \mathbb{G}^g = id_{TM}$, e assim $\mathbb{G}^g \in \Gamma^{k-1}(TTM)$. Portanto

$$\mathcal{G}^k M \longrightarrow \Gamma^{k-1}(TTM) : g \longmapsto \mathbb{G}^g$$

é a composição das aplicações

$$\mathcal{G}^k M \longrightarrow \Gamma^{k-1}(TTM|SM^{g_0}) : g \longmapsto \mathcal{Q}^g$$

de classe C^∞ (pois $g \mapsto \mathbb{G}^g$ é de classe C^∞) e

$$\Gamma^{k-1}(TTM|SM^{g_0}) \longrightarrow \Gamma^{k-1}(TTM) : \sigma \longmapsto D\varrho \cdot \sigma \circ I_{g_0}$$

que é um operador linear limitado. Isto completa a prova do teorema. □

3.2 Órbitas periódicas e Métricas Bumpy

Nesta seção iremos definir a métrica Bumpy e enunciar o resultado principal deste capítulo, também iremos dar uma propriedade importante a respeito das órbitas, quando a métrica varia.

Nós precisamos lembrar de algumas definições em relação às órbitas periódicas. Dados $F_t : M \rightarrow M$ um fluxo na variedade M e uma órbita $\mathcal{O}_p = \{F_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$, dizemos que $\mathcal{O}_p$ é uma órbita periódica se existe $t_0 > 0$ tal que $F_{t_0}(p) = p$, chamamos t_0 o período de $\mathcal{O}_p$ e dizemos que o período é minimal se t_0 é o mínimo $t \in \mathbb{R}$ tal que $F_t(p) = p$.

O próximo lema diz que um fluxo geodésico robustamente não tem órbitas periódicas com período minimal pequeno.

3.2.1 Lema. *Se $g_0 \in \mathcal{G}^k M$ então existem uma vizinhança $\mathcal{U}_0$ de g_0 e $\alpha > 0$ tal que para toda $g \in \mathcal{U}_0$ o fluxo ψ^g não tem órbitas periódicas com período minimal menor ou igual do que α .*

Demonstração. Considere uma métrica Riemanniana em $\mathbb{T}M$. Como

$$\mathbb{G}^{g_0} : \mathbb{T}M \rightarrow T\mathbb{T}M$$

é contínua e $\mathbb{T}M$ é compacto, podemos considerar $c > 0$ tal que $|\mathbb{G}^{g_0}(\nu)| < c$, para todo $\nu \in \mathbb{T}M$, (com respeito à métrica Riemanniana em $\mathbb{T}M$). Usando o fato que $g \mapsto \mathbb{G}^g$ é contínua, como $c > 0$, existe $\mathcal{U}$ vizinhança de g_0 , tal que $g \mapsto \mathbb{G}^g$ leva $\mathcal{U}$ a $B_c(\mathbb{G}^{g_0})$ (bola aberta de raio c e centro $\mathbb{G}^{g_0}$). Se $g \in \mathcal{U}$ e $\nu \in \mathbb{T}M$, então

$$\begin{aligned} |\mathbb{G}^g(\nu)| &\leq |\mathbb{G}^g(\nu) - \mathbb{G}^{g_0}(\nu)| + |\mathbb{G}^{g_0}(\nu)| \\ &\leq \|\mathbb{G}^g - \mathbb{G}^{g_0}\| + |\mathbb{G}^{g_0}(\nu)|, \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma das aplicações $\mathcal{G}^k M \rightarrow \Gamma^{k-1}(T\mathbb{T}M)$ induzida pela $|\cdot|$ métrica Riemanniana de $\mathbb{T}M$. Logo, $|\mathbb{G}^g(\nu)| < 2c$, para todo $\nu \in \mathbb{T}M$ e para todo $g \in \mathcal{U}$. Mostraremos que $\mathcal{U}$ é a vizinhança $\mathcal{U}_0$ do enunciado. Suponha que não, i.e., para todo $\alpha > 0$ existe $g_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\psi_t^{g_\alpha}$ tem órbitas periódicas com período menor ou igual do que α . Se tomamos $\alpha = \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$, existem $g_n \in \mathcal{U}$, $\nu_n \in \mathbb{T}M$, e $t_n \in \mathbb{R}$ com $0 \leq t_n \leq \frac{1}{n}$ tais que

$$\psi_{t_n}^{g_n} \nu_n = \nu_n.$$

Como $\mathbb{T}M$ é compacto, existe uma subsequência convergente de (ν_n) denotada da mesma maneira tal que $\nu_n \rightarrow \nu_0$. Seja ς a distância em $\mathbb{T}M$ induzida pela métrica Riemanniana de $\mathbb{T}M$,

$$\varsigma(\nu_1, \nu_2) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt,$$

onde γ é a geodésica que une ν_1 e ν_2 em $\mathbb{T}M$. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixo, $t = qt_n + r$ com $0 \leq r < t_n$. Temos que

$$\begin{aligned} \varsigma(\psi_t^{g_n}(\nu_n), \nu_n) &= \varsigma(\psi_t^{g_n}(\nu_n), \psi_{qt_n}^{g_n}(\nu_n)) \\ &\leq \varsigma(\psi_{(q+1)t_n}^{g_n}(\nu_n), \psi_{qt_n}^{g_n}(\nu_n)) \\ &= \int_0^{t_n} |(\psi_t^{g_n})'(\nu_n)| dt \\ &= \int_0^{t_n} \left| \mathbb{G}_{\psi_t^{g_n}(\nu_n)}^{g_n} \right| dt \\ &< 2ct_n. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $\varsigma(\psi_t^{g_0}(\nu_0), \nu_0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, logo

$$\psi_t^{g_0}(\nu_0) = \nu_0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e temos que

$$\mathbb{G}_{\nu_0}^{g_0} = \mathbb{G}_{\psi_t^{g_0}(\nu_0)}^{g_0} = (\psi_t^{g_0})'(\nu_0) = 0,$$

de modo que $G_{I_{g_0}(\nu_0)}^{g_0} = 0$, o que é uma contradição, pois $G_{I_{g_0}(\nu)}^{g_0} = \{D\pi \cdot I_{g_0}(\nu), 0\}$ e $D\pi \cdot I_{g_0} \neq 0$.

□

Os autovalores de $DF_{t_0}(p)$ são chamados *multiplicadores* da órbita periódica $\mathcal{O}_p$, e dizemos que a órbita periódica $\mathcal{O}_p$ é *não degenerada* se têm só um multiplicador (contando multiplicidade) igual a 1. Para mais detalhes ver apêndice.

3.2.2 Definição. *Sejam $g \in \mathcal{G}^k M$ e $\theta = (p, v) \in SM^g$, considere a geodésica fechada $\mathcal{O}_p^g = \{\gamma_\theta^g(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$.*

1. *Dizemos $\mathcal{O}_p^g$ é não degenerada se é correspondente a uma órbita periódica*

$$\{\psi_t^g(\nu) : 0 \leq t \leq t_0\}$$

não degenerada do fluxo geodésico projetivizado em TM .

2. *Dizemos que a métrica g é Bumpy se todas as geodésicas fechadas são não degeneradas.*

Todos, menos um dos multiplicadores de uma geodésica fechada de uma métrica bumpy (isto é, todos menos um dos multiplicadores das órbitas correspondentes a SM ou TM) não são raízes da unidade (de qualquer ordem).

Dizemos que R é um conjunto *residual* de um espaço métrico (X, d) se R é a interseção de uma quantidade enumerável de abertos e densos em X .

O principal teorema deste capítulo é o seguinte:

3.2.3 Teorema (Teorema da métrica Bumpy). *O conjunto das métricas bumpy é residual em $\mathcal{G}^k M$.*

Demonstração. Seja $0 < a \leq b$, e denotemos por $\mathcal{G}^k(a, b)$ o conjunto de todas as métricas $g \in \mathcal{G}^k M$ tais que toda órbita periódica do fluxo ψ^g com período menor ou igual do que b , tendo período minimal menor ou igual do que a , é não degenerada. Vejamos algumas propriedades simples.

1. Se $0 < a' < b'$ onde $a \leq a'$ e $b \leq b'$, temos que $\mathcal{G}^k(a', b') \subseteq \mathcal{G}^k(a, b)$.

2. Se $k \leq l$, temos que $\mathcal{G}^l(a, b) = \mathcal{G}^k(a, b) \cap \mathcal{G}^l M$.

É claro que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}^k(n, n)$$

é o conjunto das métricas bumpy's.

Logo, para mostrar o teorema basta provar a seguinte proposição:

3.2.4 Proposição. $\mathcal{G}^k(a, a)$ é aberto e denso em $\mathcal{G}^k M$ para todo $a > 0$.

□

A prova da proposição acima será dada nas próximas seções.

3.3 Transversalidade e o Teorema de Abraham

Nesta seção iremos estudar propriedades de transversalidade relacionadas com as órbitas periódicas do fluxo geodésico projetivizado. Também iremos enunciar o Teorema de Abraham envolvendo propriedades de transversalidade que nós iremos usar nas próximas seções.

Sabemos que

$$\Psi : \mathbb{T}M \times \mathbb{R} \times \mathcal{G}^k M \longrightarrow \mathbb{T}M : (\nu, t, g) \longmapsto \psi_t^g(\nu),$$

e do Teorema 3.1.2, sabemos que Ψ é de classe C^{k-1} . Como

$$\mathbb{T}M \times \mathcal{G}^k M \longrightarrow TM : (\nu, g) \longmapsto I_g(\nu)$$

é suave e da parte 2. do Lema 3.1.4, temos que

$$\Phi : TM \times \mathbb{R} \times \mathcal{G}^k M \longrightarrow TM : (\theta, t, g) \longmapsto \phi_t^g(\theta)$$

é de classe C^{k-1} . Se $\delta\Theta \in T_{\Theta}TM$, $\delta t \in T\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$ e $\delta g \in T_g\mathcal{G}^k M$, então

$$D\Phi(\Theta, t, g) \cdot (\delta\Theta, \delta t, \delta g) = D_1\Phi(\Theta, t, g) \cdot \delta\Theta + D_2\Phi(\Theta, t, g) \cdot \delta t + D_3\Phi(\Theta, t, g) \cdot \delta g$$

pode ser expressado como $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} \Phi(\Theta_{\varepsilon}, t_{\varepsilon}, g_{\varepsilon})$, onde $t_{\varepsilon} = t + \varepsilon\delta t$, $g_{\varepsilon} = g + \varepsilon\delta g$ e Θ_{ε} depende suavemente de ε com $\Theta(0) = \theta$ e $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} \Theta_{\varepsilon} = \delta\Theta$.

3.3.1 Lema. *Com as notações acima temos que*

1. $D_1\Phi(\theta, t, g) \cdot \delta\Theta = D\phi_t^g\theta \cdot \delta\Theta$,
2. $D_2\Phi(\theta, t, g) \cdot \delta t = \delta t \cdot G_{\phi_t^g\theta}^g$,

$$3. D_3\Phi(\theta, t, g) \cdot \delta g = \{\delta\theta(t), \frac{D}{dt}\delta\theta(t)\}.$$

Considere a aplicação

$$F : \mathbb{T}M \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}^k M \longrightarrow \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M$$

definida por

$$F(\nu, t, g) = (\nu, \Psi(\nu, t, g)). \quad (3.1)$$

Pelo visto acima F é de classe C^{k-1} .

Lembre que Δ denota a diagonal de $\mathbb{T}M$. Nós vamos aceitar o seguinte lema.

3.3.2 Lema. *Suponha que $F(\nu, t_0, g) \in \Delta$.*

1. *Se uma órbita periódica $\{\psi_t^g(\nu)\}$ com período t_0 é não degenerada, então*

$$F \pitchfork_{(\nu, t_0, g)} \Delta.$$

2. *Se uma órbita periódica $\{\psi_t^g(\nu)\}$ tem período minimal t_0 , então*

$$F \pitchfork_{(\nu, t_0, g)} \Delta.$$

Ver apêndice para detalhes da definição de transversalidade ($\pitchfork$).

Terminamos esta seção enunciando o Teorema de Abraham, devido a [1], que será usado posteriormente. Sejam $\mathcal{A}$, X e Y variedades de classe C^s . Denotemos por $\mathcal{C}^s(X, Y)$ o espaço das aplicações de $\varphi : X \rightarrow Y$ de classe C^s . A aplicação $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}^s(X, Y)$ é dita C^s -representação se a aplicação “avaliação”

$$ev_\sigma : \mathcal{A} \times X \longrightarrow Y : (a, x) \longmapsto \sigma_a(x)$$

é de classe C^s . Considere W subvariedade de Y e defina

$$\mathcal{A}_W = \{a \in \mathcal{A} : \sigma_a \pitchfork W\}.$$

3.3.3 Teorema (Teorema de Abraham). *Se $\mathcal{A}$ e X são segundo contáveis, $s > \max\{0, \dim X - \text{codim} W\}$ e $ev_\sigma \pitchfork W$, então $\mathcal{A}_W$ é residual em $\mathcal{A}$.*

3.4 Prova da Proposição 3.2.4: Abertura

Nesta seção mostraremos que os conjuntos $\mathcal{G}^k(a, b)$, para $0 < a \leq b$, são abertos. Para isso, basta mostrar o seguinte lema.

3.4.1 Lema. *Se $0 < a \leq b$, então $\mathcal{G}^k(a, b)$ é aberto em $\mathcal{G}^k M$.*

Demonstração. A demonstração é feita em dois casos.

Primero caso: $2 \leq k < \infty$. Nesse caso, suponha que o resultado é falso, i.e., existe $g_0 \in \mathcal{G}^k(a, b)$ e $g_0 \notin \text{int}(\mathcal{G}^k(a, b))$. Então existe $g_n \notin \mathcal{G}^k(a, b)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $g_n \rightarrow g_0$, isto é, existem $(\nu_n) \subseteq \mathbb{T}M$, $0 < t_n \leq a$ e $(k_n) \subseteq \mathbb{N}$ com $k_n t_n \leq b$, tal que

$$\psi_{t_n}^{g_n}(\nu_n) = \nu_n$$

e $D\psi_{k_n t_n}^{g_n}(\nu_n)$ tem o autovalor 1 mais de uma vez. Pelo Lema 3.2.1, existem $\mathcal{U}_0$ vizinhança de g_0 e $\alpha > 0$, e uma subsequência a qual também indicaremos por (g_n) , $(g_n) \subseteq \mathcal{U}_0$, e como $\psi_t^{g_n}(\nu_n)$ é uma órbita periódica com período t_n , temos que $t_n \in (\alpha, a]$. Como $\mathbb{T}M$ é compacto podemos supor que $\nu_n \rightarrow \nu_0$. Tomando também uma subsequência, se for necessário, tal que $t_n \rightarrow t_0 \in [0, a]$, $k_n = k_0$ e $k_0 t_0 \leq b$, temos que

$$\psi_{t_0}^{g_0}(\nu_0) = \nu_0,$$

e assim $\psi_t^{g_0}(\nu_0)$ é uma órbita periódica com período minimal menor ou igual do que a e $D\psi_{k_0 t_0}^{g_0}(\nu_0)$ tem o autovalor 1 mais de uma vez, além de $k_0 t_0 \leq b$. Então $g_0 \notin \mathcal{G}^k(a, b)$, o que é uma contradição.

Segundo caso: $k = \infty$. Se $s < \infty$, considere $\mathcal{G}^\infty M$ e $\mathcal{G}^s M$ tomado com as topologias C^∞ e C^s respectivamente, e a inclusão

$$\mathcal{G}^\infty M \hookrightarrow \mathcal{G}^s M,$$

que é contínua, como $\mathcal{G}^s(a, b)$ é aberto, então $\mathcal{G}^\infty(a, b)$ é aberto.

□

3.5 Prova da Proposição 3.2.4: Densidade

Nesta seção iremos mostrar que os conjuntos $\mathcal{G}^k(a, a)$ são densos em $\mathcal{G}^k M$, para $a > 0$. Nós faremos a demonstração em dois casos, para $2 < k < \infty$ e $k = 2, \infty$, mas precisamos de alguns lemas prévios.

Primeiro começamos com $2 < k < \infty$.

3.5.1 Lema. *A restrição da aplicação F a $\mathbb{T}M \times (0, 2a) \times \mathcal{G}^k(a, 2a)$ intercepta-se transversalmente à diagonal de $\mathbb{T}M$, i.e.,*

$$F|_{\mathbb{T}M \times (0, 2a) \times \mathcal{G}^k(a, 2a)} \pitchfork \Delta,$$

onde F é definido em (3.1).

Demonstração. Seja $(\nu, t_0, g) \in \mathbb{T}M \times (0, 2a) \times \mathcal{G}^k(a, 2a)$.

Se $F(\nu, t_0, g) \notin \Delta$, não há nada a mostrar.

Se $F(\nu, t_0, g) \in \Delta$, então $\psi_{t_0}^g(\nu) = \nu$ com $t_0 \in (0, 2a)$.

- Se t_0 é o período minimal, por 2. do Lema 3.3.2, temos que $F \pitchfork_{(\nu, t_0, g)} \Delta$.
- Se t_0 não é período minimal, seu período minimal é menor ou igual que $\frac{t_0}{2} < a$. Como $g \in \mathcal{G}^k(a, 2a)$, $\psi_t^g(\nu)$ é uma órbita periódica com período menor ou igual do que $2a$ e como o período minimal é menor ou igual do que a , então $\psi_t^g(\nu)$ é não degenerada. Logo por 1. do Lema 3.3.2 temos que $F \pitchfork_{(\nu, t_0, g)} \Delta$.

□

O seguinte lema é uma consequência do Teorema de Abraham (Teorema 3.3.3).

3.5.2 Lema. $\mathcal{G}^k(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}) \cap \mathcal{G}^k(a, 2a)$ é denso em $\mathcal{G}^k(a, 2a)$.

Demonstração. Usaremos o Teorema de Abraham para

$$\mathcal{A} = \mathcal{G}^k M, \quad X = \mathbb{T}M \times (0, 2a), \quad Y = \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M \text{ e } W = \Delta.$$

Sabe-se que $F : \mathbb{T}M \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}^k M \rightarrow \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M : (\nu, t, g) \mapsto (\nu, \psi_t^g(\nu))$ é de classe C^{k-1} .

Fixando $g \in \mathcal{A}$, temos que

$$F^g : \mathbb{T}M \times (0, 2a) \longrightarrow \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M : (\nu, t) \longmapsto (\nu, \psi_t^g(\nu))$$

é de classe C^{k-1} , i.e., $F^g \in C^{k-1}(X, Y)$. Definamos as aplicações

$$\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow C^{k-1}(X, Y) : g \longmapsto F^g \quad e$$

$$ev_\sigma(g, \nu, t) := \sigma_g(\nu, t) = F^g(\nu, t) = (\nu, \psi_t^g(\nu)) = F(\nu, t, g).$$

Então $ev_\sigma = F$, $ev_\sigma \in C^{k-1}$, σ é uma representação de classe C^{k-1} e pelo Lema 3.5.1 temos que $ev_\sigma \pitchfork \Delta$.

Afirmção: σ é injetiva.

Prova da Afirmção. Se $\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2}$, então $F^{g_1} = F^{g_2}$, e $\psi_t^{g_1}(\nu) = \psi_t^{g_2}(\nu)$. Como $\pi \circ I_g = \rho$, temos que

$$\pi \circ \phi_t^g \circ I_g(\nu) = \pi \circ I_g \circ \psi_t^g(\nu) = \rho \circ \psi_t^g(\nu) \quad e$$

$$\begin{aligned} I_g(\nu) &= D\pi\{I_g(\nu), 0\} = D\pi \cdot G_{I_g(\nu)}^g \\ &= D\pi \cdot G_{\phi_t^g(I_g(\nu))}^g \Big|_{t=0} \\ &= D\pi \cdot (\phi_t^g)'(I_g(\nu)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\rho \circ \psi_t^g(\nu)). \end{aligned}$$

Temos que

$$I_{g_1}(\nu) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\rho \circ \psi_t^{g_1}(\nu)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\rho \circ \psi_t^{g_2}(\nu)) = I_{g_2}(\nu),$$

logo $I_{g_1} = I_{g_2}$, e assim as esferas unitárias com respeito a g_1 e g_2 coincidem em todo o espaço tangente. Portanto $g_1 = g_2$, o que mostra a afirmação. $\square$

Considere

$$\mathcal{A}_\Delta = \{g \in \mathcal{A} : \sigma_g \pitchfork \Delta\} = \{g \in \mathcal{G}^k M : F^g \pitchfork \Delta\}.$$

Vejamos que se cumprem as condições do Teorema de Abraham. Como $\dim X = \dim \mathbb{T}M + 1$ e $\text{codim } W = \dim \mathbb{T}M$, então temos que $\max\{0, \dim X - \text{codim } W\} = 1$. Já que $k \geq 3 > 2$, temos que $k - 1 > \max\{0, \dim X - \text{codim } W\}$. Portanto, pelo Teorema de Abraham, temos que $\mathcal{A}_\Delta$ é residual (e portanto denso) em $\mathcal{A}$. Então $\{g \in \mathcal{G}^k M : F^g \pitchfork \Delta\}$ é denso em

$$\mathcal{B} = \{g \in \mathcal{G}^k M : \text{toda órbita periódica do fluxo } \psi_t^g \text{ tem período } \leq 2a\}.$$

Assim, o conjunto das métricas $g \in \mathcal{G}^k M$ tais que toda órbita periódica de ψ_t^g com período menor ou igual do que $2a$ é não degenerada, é denso em $\mathcal{B}$. Isto mostra o lema. $\square$

Seja $g_0 \in \mathcal{G}^k(a, a)$. O conjunto das órbitas periódicas do fluxo $\psi_t^{g_0}$, com período minimal menor ou igual do que a que são não degeneradas é, um conjunto contável, e como $\mathbb{T}M$ é compacto, só existem um número finito de tais órbitas, a saber

$$\psi_t^{g_0}(\nu_i) \quad \text{com período minimal } t_i \leq a \quad \text{para } i = 1, \dots, N.$$

Devido a um resultado padrão na teoria de equações diferenciais, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de g_0 , $\nu_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{T}M$ e $t_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$, contínuos para todo $i = 1, \dots, N$, tais que

$$\nu_i(g_0) = \nu_i, \quad t_i(g_0) = t_i \quad \text{e} \quad \psi_t^g(\nu_i(g)) \quad \text{é uma órbita periódica com período } t_i(g).$$

Mas, já que as órbitas $\psi_t^{g_0}(\nu_i)$ são não degeneradas como órbitas periódicas com período $t_i \leq a$, existem $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ vizinhança de g_0 e $V \subseteq \mathbb{T}M$ vizinhança do conjunto

$$\bigcup_{t,i} \psi_t^{g_0}(\nu_i)$$

tais que se $g \in \mathcal{V}$ e a órbita $\psi_t^g(\nu)$ através do ponto $\nu \in V$, é periódica com período $\leq a$, então coincide com uma das órbitas

$$\{\psi_t^g(\nu_i(g)) : 0 \leq t \leq t_i(g)\} \quad \text{onde } i = 1, \dots, N.$$

3.5.3 Lema. *Existe $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ vizinhança de g_0 tal que se $g \in \mathcal{W}$, o fluxo ψ_t^g não tem órbitas periódicas com período $\leq a$, com exceção das órbitas $\{\psi_t^g(\nu_i(g)) : 0 \leq t \leq t_i(g)\}$ onde $i = 1, \dots, N$.*

Demonstração. Suponha que o lema é falso, então existem as sequências $(\omega_n) \subseteq \mathbb{T}M$, $(g_n) \subseteq \mathcal{V}$ com $g_n \rightarrow g_0$, $(t_n) \subseteq (0, a]$ tais que

$$\psi_{t_n}^{g_n}(\omega_n) = \omega_n$$

e ω_n não reside em nenhuma das órbitas mencionadas no lema. Temos que $(\omega_n) \subseteq \mathbb{T}M \setminus V$. Do Lema 3.2.1, temos que existem $\mathcal{U}_0$ vizinhança de g_0 e $\alpha > 0$. Podemos assumir que $(g_n) \subseteq \mathcal{U}_0$, de modo que $t_n > \alpha$. Passando à subsequências apropriadas, temos que $\omega_n \rightarrow \omega_0$ e $t_n \rightarrow t_0 \in [\alpha, a]$. Assim

$$\psi_{t_0}^{g_0}(\omega_0) = \omega_0,$$

e então, $\psi_t^{g_0}(\omega_0)$ é periódica com período $\leq a$. Portanto $\omega_0 \in \bigcup_{t,i} \psi_t^{g_0}(\nu_i) \subseteq V$, o que é uma contradição. □

O seguinte lema nos dá a densidade.

3.5.4 Lema. $\mathcal{G}^k(a, 2a)$ é denso em $\mathcal{G}^k(a, a)$.

Demonstração. Sejam $g_0 \in \mathcal{G}^k(a, a)$ e $\mathcal{U}$ vizinhança de g_0 qualquer. Mostraremos que

$$\mathcal{G}^k(a, 2a) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

Considere $\mathcal{W}$ e $\nu_i(g)$ como no Lema 3.5.3. Por Klingenberg [13], existe $g \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ arbitrariamente perto de g_0 , tal que toda órbita periódica, com período menor ou igual do que $2a$ é não degenerado. Mas como $g \in \mathcal{W}$, toda órbita $\psi_t^g(\nu)$ periódica com período minimal menor ou igual do que a , então pelo Lema 3.5.3 temos que $t_i(g) \leq a$. Logo $g \in \mathcal{G}^k(a, 2a)$, e então

$$g \in \mathcal{G}^k(a, 2a) \cap \mathcal{U}.$$

□

Dos Lemas 3.5.2 e 3.5.4 temos que $\mathcal{G}^k(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$ é denso em $\mathcal{G}^k(a, a)$. Indutivamente, tem-se que $\mathcal{G}^k((\frac{3}{2})^n a, (\frac{3}{2})^n a)$ é denso em $\mathcal{G}^k(a, a)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dados $0 < a \leq b$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq (\frac{3}{2})^{n_0} a$, e então $\mathcal{G}^k(b, b)$ é denso em $\mathcal{G}^k(a, a)$. Sejam $g_0 \in \mathcal{G}^k M$, $\mathcal{U}_0$ e a como no Lema 3.2.1. Então $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{G}^k(a, a)$ e

$$\mathcal{G}^k(a, a) \text{ é denso em } \mathcal{G}^k M.$$

Dado $b > 0$, se $b \geq a$, então $\mathcal{G}^k(b, b)$ é denso em $\mathcal{G}^k(a, a)$, de modo que $\mathcal{G}^k(b, b)$ é denso em $\mathcal{G}^k M$. Se $0 < b < a$, então $\mathcal{G}^k(a, a) \subseteq \mathcal{G}^k(b, b)$, e também temos que $\mathcal{G}^k(b, b)$ é denso em $\mathcal{G}^k M$. Assim, para todo $b > 0$, temos que

$$\mathcal{G}^k(b, b) \text{ é denso em } \mathcal{G}^k M.$$

Agora, mostraremos que $\mathcal{G}^k(a, a)$ é denso em $\mathcal{G}^k M$ para $k = 2, \infty$.

Caso $k = 2$: a inclusão natural $\mathcal{G}^3 M \hookrightarrow \mathcal{G}^2 M$ é contínua, com suas respectivas topologias C^3 e C^2 . Sua imagem é densa em $\mathcal{G}^2 M$ e como $\mathcal{G}^3(a, a)$ é densa em $\mathcal{G}^3 M$, então $\mathcal{G}^3(a, a)$ é densa em $\mathcal{G}^2 M$. Como $\mathcal{G}^3(a, a) \subseteq \mathcal{G}^2(a, a)$, temos que

$$\mathcal{G}^2(a, a) \text{ é denso em } \mathcal{G}^2 M.$$

Caso $k = \infty$: Seja $g_0 \in \mathcal{G}^\infty M$. As vizinhanças de g_0 da forma $\mathcal{V} \cap \mathcal{G}^\infty M$, onde $\mathcal{V}$ pertence a um sistema fundamental de vizinhanças de g_0 em $\mathcal{G}^k M$ com $k \geq 2$; formam um sistema de vizinhanças de g_0 em $\mathcal{G}^k M$. Sejam $k \geq 2$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}^k M$ vizinhança de g_0 . Então $\mathcal{V} \cap \mathcal{G}^k(a, a) \neq \emptyset$ é aberto em $\mathcal{G}^k M$, logo $\mathcal{G}^\infty M$ é denso em $\mathcal{G}^k M$. Portanto $\mathcal{G}^\infty M \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{G}^k(a, a) \neq \emptyset$, então $\mathcal{V} \cap \mathcal{G}^\infty(a, a) \neq \emptyset$. Assim

$$\mathcal{G}^\infty(a, a) \text{ é denso em } \mathcal{G}^\infty M.$$

Capítulo 4

Fluxos Expansivos em 3-variedades

Neste capítulo só trabalharemos com variedades suaves de dimensão 3. Em consequência usaremos resultados que envolvem tais variedades, como por exemplo os resultados de M. Paternain [20] feitos em sua tese de doutorado e também em [21]. Na primeira seção damos as definições prévias e enunciamos o resultado que precisamos, e na segunda seção mostraremos que os fluxos expansivos com o conjunto de pontos não errantes denso têm o conjunto de órbitas periódicas, também denso.

4.1 Expansividade

Primeiramente vamos estabelecer as definições que precisamos. Em todo este capítulo considere N uma variedade compacta de dimensão 3 que tem uma distância d .

4.1.1 Definição. *Sejam $\{\psi_t\}$ um fluxo de N e $p \in N$. Dizemos que p é um ponto não errante do fluxo $\{\psi_t\}$ se para toda vizinhança V de p em N , existe $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| = +\infty$ tal que*

$$\psi_{t_n}(V) \cap V \neq \emptyset,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora vamos definir o importante conceito de fluxo expansivo, mas antes introduziremos algumas notações.

Seja $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e analogamente os conjuntos $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e $C(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^-)$. Definimos

$$B = \{h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$$

e

$$B^+ = \{h \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) : h(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ \text{ e } h(0) = 0\}.$$

Analogamente definimos B^- .

4.1.2 Definição. *Seja $\{\psi_t\}$ um fluxo em N com $\psi_t : N \rightarrow N$ homeomorfismo, para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\{\psi_t\}$ é expansivo se existe $\varepsilon > 0$ tal que todo $p \in N$ satisfaz a seguinte propriedade:*

- *se $q \in N$ e existe $h_q \in B$ com $d(\psi_t(p), \psi_{h_q(t)}(q)) \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ dependendo de ε, p, q , com $t_0 \rightarrow 0$ se $d(p, q) \rightarrow 0$ temos que $q = \psi_{t_0}(p)$.*

Quando $t \in \mathbb{Z}$, $h_q(t) = t$ e $t_0 = 0$.

4.1.3 Definição. *Sejam $\{\psi_t\}$ um fluxo em N com $\psi_t : N \rightarrow N$ contínuo, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $p \in N$. Dado $\varepsilon > 0$, denote por $\tilde{S}_\varepsilon(p)$ o conjunto dos pontos $q \in N$ com a seguinte propriedade:*

- *existe $h \in B^+$ tal que $d(\psi_t(p), \psi_{h(t)}(q)) \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Analogamente, denote por $\tilde{U}_\varepsilon(p)$ o conjunto dos pontos $q \in N$ com a seguinte propriedade:

- *existe $h \in B^-$ tal que $d(\psi_t(p), \psi_{h(t)}(q)) \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}^-$.*

Devido a Paternain, sabemos que se o fluxo $\{\psi_t\}$ for expansivo e sem singularidades, sempre existem os conjuntos $\tilde{S}_\varepsilon(p)$ e $\tilde{U}_\varepsilon(p)$ e eles são chamados conjuntos ε -estável e ε -instável do ponto $p \in N$.

Por outro lado, note que $\tilde{S}_\varepsilon(p)$ é invariante para frente por ψ_t no seguinte sentido:

- para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \tilde{S}_\varepsilon(p)$ existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\psi_{t_0}(q) \in \tilde{S}_\varepsilon(\psi_t(p))$.

Similarmente, $\tilde{U}_\varepsilon(p)$ é invariante para frente por ψ_{-t} no seguinte sentido:

- para todo $t \in \mathbb{R}^-$ e $q \in \tilde{U}_\varepsilon(p)$ existe $t_1 \in \mathbb{R}^-$ tal que $\psi_{t_1}(q) \in \tilde{U}_\varepsilon(\psi_t(p))$.

O seguinte teorema nos dá a importante estrutura de produto local.

4.1.4 Teorema. *Seja $\psi_t : N \rightarrow N$ um fluxo expansivo sem singularidades com constante de expansividade $\varepsilon > 0$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\tilde{S}_\delta(\theta)$ e $\tilde{U}_\delta(\theta)$ são conjuntos não triviais e conexos, para todo $\theta \in N$ (i.e. eles contém pontos que não estão na órbita de θ).*

2. *Seja*

$$\Sigma_\theta = \exp_\theta\{w \in T_\theta N : |w| < \varepsilon \text{ e } \langle w, X(\theta) \rangle = 0\},$$

onde $\langle, \rangle$ é a métrica de N e $X(\theta)$ é a direção do fluxo em θ . Então existem pontos periódicos η_i , $i = 1, \dots, n$, tais que se $\tilde{N}$ é o conjunto

$$N - \bigcup \{\psi_t(\eta_i) : t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$

então para todo ponto $\theta \in \tilde{N}$ existe uma vizinhança aberta V_θ de θ com diâmetro menor que $\varepsilon/2$ tal que, para $\zeta \in \Sigma_\theta \cap V_\theta$, os conjuntos

$$S_\delta(\zeta) = \Sigma_\theta \cap V_\theta \cap \tilde{S}_\delta(\zeta)$$

e

$$U_\delta(\zeta) = \Sigma_\theta \cap V_\theta \cap \tilde{U}_\delta(\zeta)$$

são curvas conexas satisfazendo a estrutura de produto local: existe um homeomorfismo

$$F : (0, 1)^2 \rightarrow \Sigma_\theta \cap V_\theta,$$

tal que

- i. $F(0, 0) = \theta$,
- ii. $F_x(z) \in S_\delta(F(x, z))$,
- iii. $F^z(x) \in U_\delta(F(x, z))$,

para todo $x, z \in (0, 1)$, onde $F_x : (0, 1) \rightarrow \Sigma_\theta \cap V_\theta$ e $F^z : (0, 1) \rightarrow \Sigma_\theta \cap V_\theta$ são as aplicações $F_x(z) = F^z(x) = F(x, z)$.

- 3. $\tilde{S}_\delta(\theta)$ contrai uniformemente se t vai para $+\infty$ (respectivamente $\tilde{U}_\delta(\theta)$ contrai com $t \rightarrow -\infty$). Em outras palavras, para todo $t > 0$ e $0 < \alpha \leq \delta$, existe $T > 0$ tal que

$$\psi_t(\tilde{S}_\delta(\theta)) \subseteq \bigcup_{r \leq t} \tilde{S}_\alpha(\psi_r(\theta)),$$

para todo $t \geq T$ e para todo $\theta \in \tilde{N}$.

Em particular, $S_\delta(\theta)$ e $U_\delta(\theta)$ são curvas conexas com interseção só em θ , e dependem continuamente de $\theta \in \tilde{N}$. Assumiremos como certo o Teorema 4.1.4

4.2 Órbitas periódicas densas

Nesta seção mostraremos o seguinte resultado que usaremos nos capítulos posteriores.

4.2.1 Teorema. *Seja ψ_t um fluxo expansivo de N . Se o conjunto de pontos não errantes do fluxo ψ_t é denso em N , então o conjunto de órbitas periódicas de ψ_t também é denso.*

Demonstração. Sejam $\theta \in \tilde{N}$, V_θ e Σ_θ como no Teorema 4.1.4. De 2. do Teorema 4.1.4 existem as projeções

$$\Pi_s : \Sigma_\theta \cap V_\theta \longrightarrow S_\delta(\theta)$$

e

$$\Pi_u : \Sigma_\theta \cap V_\theta \longrightarrow U_\delta(\theta),$$

definidas por $\Pi_s(\zeta) = S_\delta(\theta) \cap U_\delta(\zeta)$, $\Pi_u(\zeta) = U_\delta(\theta) \cap S_\delta(\zeta)$ para todo $\zeta \in \Sigma_\theta \cap V_\theta$.

Observe também que $F[(0, 1)^2] = \Sigma_\theta \cap V_\theta$ é homeomorfo a $S_\delta(\theta) \times U_\delta(\theta)$: para todo $\zeta \in \Sigma_\theta \cap V_\theta$ existem coordenadas bem definidas

$$\zeta \longmapsto (\Pi_s(\zeta), \Pi_u(\zeta)).$$

Suponha que θ é um ponto não errante. Seja $\mathcal{P}_\theta : \Sigma_\theta \cap V_\theta \rightarrow \Sigma_\theta \cap V_\theta$ a aplicação de Poincaré do fluxo ψ_t . Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{1/m}(\theta) \subseteq V_\theta$, para todo $m \geq m_0$ e como θ é um ponto não errante, existe $(t_{m,n}) \subseteq \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_{m,n}| = +\infty$ tal que

$$\psi_{t_{m,n}}(B_{1/m}(\theta)) \cap B_{1/m}(\theta) \neq \emptyset,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq m_0$. Tomando a diagonal $t_{n,n}$, para todo $n \geq m_0$, temos que existe $(\theta_n) \subseteq \Sigma_\theta$ tal que

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ e } (\psi_{-t_{n,n}}(\theta_n)) \subseteq \Sigma_\theta \text{ tal que } \psi_{-t_{n,n}}(\theta_n) \longrightarrow \theta$$

e então existe $(k_n) \subseteq \mathbb{Z}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |k_n| = +\infty$ tal que $\mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_n) = \psi_{-t_{n,n}}(\theta_n)$. Denotemos $-t_{n,n}$ por t_n . Sem perda de generalidade podemos supor que $k_n \geq 0$ e $t_n \geq 0$ para todo n . Assim temos que

$$\mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_n) \longrightarrow \theta.$$

Considere $\alpha > 0$ tal que $\overline{B_\alpha(\theta)} \subseteq V_\theta$. De 3. do Teorema 4.1.4 temos que existe n_0 tal que

- i. $d(\mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_n), \theta) < \frac{\alpha}{4}$ para todo $n \geq n_0$,
- ii. $d\left(\overline{\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n))}, \mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_n)\right) < \frac{\alpha}{4}$ para todo $n \geq n_0$,
- iii. $U_\delta(\zeta) \subseteq \mathcal{P}_\theta^{k_n}(U_\delta(\zeta))$, e $n \geq n_0$, para todo $\zeta \in \tilde{N}$.

Temos que

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n)), \theta) &= d\left(\overline{\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n))}, \theta\right) \\ &\leq d\left(\overline{\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n))}, \mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_n)\right) + d(\mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_n), \theta) \\ &< \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

logo

$$\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n)) \subset B_\alpha(\theta) \tag{4.1}$$

para todo $n \geq n_0$.

Denotemos $\hat{\Pi}_s$ a restrição de Π_s para $S_\delta(\theta_n)$ de iii. e de (4.1), temos que a aplicação Π_s está bem definida no conjunto $\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n)) = \mathcal{P}_\theta^{k_n}(\hat{\Pi}_s^{-1}(S_\delta(\theta)))$ e

$$\Pi_s(\mathcal{P}_\theta^{k_n}(S_\delta(\theta_n))) \subset S_\delta(\theta).$$

Assim, temos que a aplicação $\Pi_s \circ \mathcal{P}_\theta^{k_n} \circ \hat{\Pi}_s^{-1} : S_\delta(\theta) \rightarrow S_\delta(\theta)$ tem um ponto fixo θ_0 tal que, de acordo com a construção, satisfaz

$$\theta_0 \in U_\delta(\mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_0)) \cap B_\alpha(\theta),$$

e então

$$U_\delta(\theta_0) = U_\delta(\mathcal{P}_\theta^{k_n}(\theta_0)) \subset \mathcal{P}_\theta^{k_n}(U_\delta(\theta_0))$$

por iii. Logo, a aplicação

$$\mathcal{P}_\theta^{-k_n} : U_\delta(\theta_0) \rightarrow U_\delta(\theta_0)$$

tem um ponto fixo θ_1 e como $\mathcal{P}_\theta$ é a aplicação de Poincaré, temos que a órbita de θ_1 é periódica. Já que α é arbitrário e os pontos não errantes são densos, então as órbitas periódicas também são densas. $\square$

Capítulo 5

Decomposição Hiperbólica dos fluxos simpléticos com decomposição dominada

Neste capítulo iremos estudar fluxos simpléticos com decomposição Lagrangiana. Mostraremos que tais fluxos têm decomposição dominada se e só se têm decomposição hiperbólica. De fato, toda decomposição hiperbólica é dominada. Em geral, a recíproca não é verdadeira, mas ela será com as hipóteses deste fluxo. Para isso, primeiro mostraremos que tais fluxos com decomposição dominada são quase-Anosov, logo mostramos que os quase-Anosov são hiperbólicos. Os resultados são devido a Contreras [7], [9] e [10]. Começamos estabelecendo as definições que precisamos, lembrando a seção 2.4 de capítulo 2.

5.1 Definições Prévias

Nestas seção daremos todas as definições prévias. Para isso, considere sempre Σ uma variedade Riemanniana compacta e considere também o fluxo $\{\psi_t\}$ de Σ .

5.1.1 Definição. *Seja X um subconjunto ψ_t -invariante de Σ , sem singularidades. Uma decomposição ψ_t -invariante de $T\Sigma$:*

$$T_\theta \Sigma = S_\theta \oplus U_\theta,$$

para todo $\theta \in X$, é dominada se existem $0 < \delta < 1$ e $\tau > 0$, tais que

$$\|D\psi_\tau(\theta)|_{S_\theta}\| \cdot \|D\psi_{-\tau}(\psi_\tau(\theta))|_{U_{\psi_\tau(\theta)}}\| \leq \delta.$$

5.1.2 Definição. *Seja X um subconjunto compacto ψ_t -invariante de Σ . Uma decomposição ψ_t -invariante de $T\Sigma$:*

$$T_\theta \Sigma = E_\theta^s \oplus E_\theta^u,$$

para todo $\theta \in X$, é hiperbólica se existem $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ tais que

- 1. $\|D\psi_t(\theta)|_{E_\theta^s}\| \leq C\lambda^t$; para todo $t \geq 0$ e $\theta \in X$,*
- 2. $\|D\psi_t(\theta)|_{E_\theta^u}\| \leq C\lambda^{-t}$; para todo $t \leq 0$ e $\theta \in X$.*

Quando $X = \Sigma$ o fluxo é chamado Fluxo de Anosov.

Não é difícil mostrar que toda decomposição hiperbólica é dominada, mas a recíproca não é verdadeiro em geral. Para o recíproco, precisamos de mais condições. Assim, primeiro estabeleceremos mais definições.

5.1.3 Definição. *Seja X um subconjunto de Σ . Dizemos que o fluxo $\{\psi_t\}$ é Quase-Anosov em X se*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |D\psi_t(\theta) \cdot v| = +\infty,$$

para todo $\theta \in X$ e $v \in T_\theta \Sigma$.

Dotemos Σ de uma forma simplética Ω , i.e., (Σ, Ω) é uma variedade simplética.

5.1.4 Definição. *Dizemos que o fluxo $\{\psi_t\}$ é um fluxo simplético se $\psi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é uma aplicação simplética, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Na verdade $\{\psi_t\}$ é um cociclo, mas nosso caso chamaremos de fluxo, dado que pode ser visto como um fluxo esquecendo a direção de seu campo de vetores. Além disso, no Capítulo 6 onde usamos os resultados deste Capítulo, o Σ vai ter dimensão par, assim faz sentido usar variedades simpléticas.

Agora vamos definir o espaço Lagrangiano e a decomposição Lagrangiana de espaços simpléticos.

5.1.5 Definição. *Seja $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ um espaço simplético linear. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}^{2n}$ é um subespaço Lagrangiano se*

- 1. $\dim X = n$, e*
- 2. para todo $u \in X$, temos que $\omega(u, v) = 0$ se, e somente se, $v \in X$.*

Assumiremos como certo o seguinte resultado, que caracteriza os espaços Lagrangianos:

5.1.6 Lema. *Um subespaço X de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ é Lagrangiano se, e somente se,*

- 1. $\omega(u, v) = 0$ para todo $u, v \in X$ e*

2. existe um subespaço Y de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $X \oplus Y = \mathbb{R}^{2n}$ e $\omega(u, v) = 0$ para todo $u, v \in Y$.

5.1.7 Definição. Sabemos que (Σ, Ω) é um espaço simplético.

1. Seja $A \subset \Sigma$. Uma fibra Lagrangiana sob A é uma aplicação que associa a cada $\theta \in A$ um L_θ subespaço Lagrangiano de $T_\theta \Sigma$, i.e.,

$$\theta \mapsto L_\theta.$$

2. Uma decomposição $T_\theta \Sigma = S_\theta \oplus U_\theta$ sob A é Lagrangiana se $\theta \mapsto S_\theta$ e $\theta \mapsto U_\theta$ são fibras Lagrangianas sob A .

Nas seções restantes, assumamos sempre que Σ é uma variedade Riemanniana e simplética, e também que $\{\psi_t\}$ é um fluxo simplético de Σ .

5.2 Fluxos Quase-Anosov

Agora podemos enunciar o resultado principal deste capítulo.

5.2.1 Proposição. Seja $X \subseteq \Sigma$ um compacto ψ_t -invariante sem singularidades. Se a decomposição

$$T_\theta \Sigma = S_\theta \oplus U_\theta,$$

para todo $\theta \in X$, é Lagrangiana, contínua e ψ_t -invariante, então a decomposição é dominada se, e somente se, a decomposição é hiperbólica, onde

1. S_θ é uma contração para frente de ψ_t e
2. U_θ é uma contração para trás de ψ_t .

Note que, das definições, é fácil mostrar que toda decomposição hiperbólica é dominada. Nós só mostraremos a outra implicação. Nesta seção mostraremos que, nas condições da proposição 5.2.1, todo fluxo com decomposição dominada é um fluxo quase-Anosov.

5.2.2 Observação. Da definição da decomposição dominada, temos que para $k \in \mathbb{N}$ e $\theta \in X$,

$$\begin{aligned} \|D\psi_{k\tau}(\theta)|_{S_\theta}\| \cdot \|D\psi_{-k\tau}(\psi_{k\tau}(\theta))|_{U_{\psi_{k\tau}(\theta)}}\| &= \|D\psi_\tau^k(\theta)|_{S_\theta}\| \cdot \|D\psi_{-\tau}^k(\psi_\tau^k(\theta))|_{U_{\psi_\tau^k(\theta)}}\| \\ &= \|(D\psi_\tau(\theta)|_{S_\theta})^k\| \cdot \|(D\psi_{-\tau}(\psi_\tau(\theta))|_{U_{\psi_\tau(\theta)}})^k\| \\ &\leq \prod_{i=1}^{k-1} \|D\psi_\tau(\psi_\tau^i(\theta))|_{S_{\psi_\tau^i(\theta)}}\| \cdot \|D\psi_{-\tau}(\psi_\tau^{i+1}(\theta))|_{U_{\psi_\tau^{i+1}(\theta)}}\| \\ &\leq \lambda^{k-1}, \end{aligned}$$

e assim, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D\psi_{k\tau}(\theta)|_{S_\theta}\| \cdot \|D\psi_{-k\tau}(\psi_{k\tau}(\theta))|_{U_{\psi_{k\tau}(\theta)}}\| = 0.$$

Da observação acima temos o seguinte lema:

5.2.3 Lema. *Seja a decomposição $T_\theta\Sigma = S_\theta \oplus U_\theta$ dominada sob o subconjunto X de Σ . Temos que para cada $\theta \in X$:*

1. $\inf_{t \geq 0} \|D\psi_t(\theta)|_{S_\theta}\| \cdot \|D\psi_{-t}(\psi_t(\theta))|_{U_{\psi_t(\theta)}}\| = 0$ e
2. $\inf_{t \geq 0} \|D\psi_t(\psi_{-t}(\theta))|_{S_{\psi_{-t}(\theta)}}\| \cdot \|D\psi_{-t}(\theta)|_{U_\theta}\| = 0.$

O seguinte lema é de suma importância para obter que o fluxo seja Quase-Anosov.

5.2.4 Lema. *Sejam $\theta \in X$ e $(t_k) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$. Temos que*

1. *Se $\liminf_{l \rightarrow \infty} \|D\psi_{t_k}(\psi_{-t_k}(\theta))|_{S_{\psi_{-t_k}(\theta)}}\| = 0$, então para todo $\mathfrak{s} \in S_\theta \setminus \{0\}$,*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_{-t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}| = +\infty. \quad (5.1)$$

2. *Se $\liminf_{l \rightarrow \infty} \|D\psi_{-t_k}(\psi_{t_k}(\theta))|_{U_{\psi_{t_k}(\theta)}}\| = 0$, então para todo $\mathfrak{u} \in U_\theta \setminus \{0\}$,*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{u}| = +\infty. \quad (5.2)$$

3. *Considere o conjunto*

$$\mathfrak{B}_\theta = \{v \in T_\theta\Sigma : \sup_{t \in \mathbb{R}} |D\psi_t(\theta) \cdot v| < +\infty\}.$$

Se as condições (5.1) e (5.2) cumprem-se, então $\mathfrak{B}_\theta = \{0\}$.

Demonstração. Do Lema 5.2.3 temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D\psi_{t_k}(\theta)|_{S_\theta}\| \cdot \|D\psi_{-t_k}(\psi_{t_k}(\theta))|_{U_{\psi_{t_k}(\theta)}}\| = 0 \quad (5.3)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D\psi_{t_k}(\psi_{-t_k}(\theta))|_{S_{\psi_{-t_k}(\theta)}}\| \cdot \|D\psi_{-t_k}(\theta)|_{U_\theta}\| = 0. \quad (5.4)$$

Temos que

1. Se $\mathfrak{s} \in S_\theta \setminus \{0\}$, então

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|\mathfrak{s}|}{|D\psi_{-t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|} &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|D\psi_{t_k}(\psi_{-t_k}(\theta)) \cdot D\psi_{-t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|}{|D\psi_{-t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|D\psi_{t_k}(\psi_{-t_k}(\theta))|_{S_{\psi_{-t_k}(\theta)}}\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Se $\mathbf{u} \in U_\theta \setminus \{0\}$, então

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{u}|}{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|} &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|D\psi_{-t_k}(\psi_{t_k}(\theta)) \cdot D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|}{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|D\psi_{-t_k}(\psi_{t_k}(\theta))|_{U_{\psi_{t_k}(\theta)}}\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. De (5.1) e (5.2) temos que $\mathfrak{B}_\theta \cap S_\theta = \{0\}$ e $\mathfrak{B}_\theta \cap U_\theta = \{0\}$.

Seja $v = \mathfrak{s} + \mathbf{u} \in T_\theta \Sigma = S_\theta \oplus U_\theta$, tal que $\mathfrak{s} \neq 0$ e $\mathbf{u} \neq 0$. De (5.3) temos que

$$\frac{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|}{|\mathfrak{s}|} \cdot \frac{|\mathbf{u}|}{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|} = \frac{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|}{|\mathfrak{s}|} \cdot \frac{|D\psi_{-t_k}(\psi_{t_k}(\theta)) \cdot D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|}{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|} \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$, e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|}{|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}|} = 0.$$

Usando (5.2), temos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_{t_k}(\theta) \cdot v| \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} (|D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathbf{u}| - |D\psi_{t_k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}|) = +\infty. \quad (5.5)$$

Então $v \notin \mathfrak{B}_\theta$.

□

Considere

$$\mathfrak{S}_\theta := \{\mathfrak{s} \in S_\theta : \forall \mathbf{u} \in U_\theta, \Omega_\theta(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) = 0\},$$

$$\mathfrak{U}_\theta := \{\mathbf{u} \in U_\theta : \forall \mathfrak{s} \in S_\theta, \Omega_\theta(\mathbf{u}, \mathfrak{s}) = 0\}.$$

Nas condições da Proposição 5.2.1, temos que se $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_\theta$, como U_θ é um subespaço Lagrangiano, para $\mathbf{u} \in U_\theta$, temos que $\Omega_\theta(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) = 0$, então $\mathfrak{s} \in U_\theta$. Logo $\mathfrak{s} \in S_\theta \cap U_\theta = \{0\}$, e portanto $\mathfrak{S} = \{0\}$. Analogamente temos que $\mathfrak{U} = \{0\}$.

5.2.5 Lema. *Assuma as condições da Proposição 5.2.1. Se $\theta \in X$ e $v \in T_\theta \Sigma \setminus \{0\}$, então*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |D\psi_t(\theta) \cdot v| = +\infty.$$

I.e., o fluxo $\{\psi_t\}$ é Quase-Anosov em X .

Demonstração. É suficiente mostrar que $\mathfrak{B}_\theta = \{0\}$, onde o conjunto $\mathfrak{B}_\theta$ é definido em 3. do Lema 5.2.4. Seja $\mathbf{u} \in U_\theta \setminus \{0\}$. Como $\mathfrak{U}_\theta = \{0\}$, existe $\mathfrak{s} \in S_\theta$ tal que $\Omega_\theta(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) = 1$. Assim, para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$1 = \Omega_\theta(\mathfrak{s}, \mathbf{u}) = \Omega_\theta(D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{s}, D\psi_k(\theta) \cdot \mathbf{u}) \leq |D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{s}| \cdot |D\psi_k(\theta) \cdot \mathbf{u}|,$$

lembre que ψ_t é uma aplicação simplética, donde segue que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{s}| = 0 \implies \limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{u}| = +\infty. \quad (5.6)$$

De (5.3), temos que

$$\frac{|D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{s}|}{|\mathfrak{s}|} \cdot \frac{|\mathfrak{u}|}{|D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{u}|} = \frac{|D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{s}|}{|\mathfrak{s}|} \cdot \frac{|D\psi_{-k}(\phi_k(\theta)) \cdot D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{u}|}{|D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{u}|} \longrightarrow 0, \quad (5.7)$$

quando $k \rightarrow \infty$, de modo que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{s}| > 0 \implies \limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{u}| = +\infty. \quad (5.8)$$

De (5.6) e (5.8), temos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_k(\theta) \cdot \mathfrak{u}| = +\infty, \quad (5.9)$$

para todo $\mathfrak{u} \in U_\theta \setminus \{0\}$. Analogamente temos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |D\psi_{-k}(\theta) \cdot \mathfrak{s}| = +\infty, \quad (5.10)$$

para todo $\mathfrak{s} \in S_\theta \setminus \{0\}$. Então por (5.9), (5.10) e 3. do Lema 5.2.4 temos $\mathfrak{B}_\theta = \{0\}$. $\square$

5.3 Prova da Proposição 5.2.1

Nesta seção mostraremos que, nas condições da Proposição 5.2.1, o fluxo Quase-Anosov tem decomposição hiperbólica.

Considere

$$E_\theta^s := \{v \in T_\theta \Sigma : \sup_{t \geq 0} |D\psi_t(\theta) \cdot v| < +\infty\},$$

$$E_\theta^u := \{v \in T_\theta \Sigma : \sup_{t \geq 0} |D\psi_{-t}(\theta) \cdot v| < +\infty\}.$$

Usando o Lema 5.2.5, temos que $E_\theta^s \cap E_\theta^u = \{0\}$, para todo $\theta \in X$.

5.3.1 Lema. *Assuma as condições da Proposição 5.2.1. Se $\theta \in X$, então $E_\theta^s = S_\theta$ e $E_\theta^u = U_\theta$.*

Demonstração. Fixe $\theta \in X$ e seja $\mathfrak{u} \in U_\theta \cap E_\theta^s \setminus \{0\}$. Temos que (5.9) contradiz o fato que $\mathfrak{u} \in E_\theta^s$, donde segue

$$U_\theta \cap E_\theta^s = \{0\}.$$

Analogamente, tem-se que $S_\theta \cap E_\theta^u = \{0\}$.

Seja $v \in E_\theta^s \setminus \{0\}$, com $v = \mathfrak{s} + \mathfrak{u} \in T_\theta \Sigma = S_\theta \oplus U_\theta$, e suponha que $\mathfrak{u} \neq 0$. Se $\mathfrak{s} = 0$, então $v = \mathfrak{u} \in U_\theta \cap E_\theta^s \setminus \{0\}$ o que é uma contradição. Se $\mathfrak{s} \neq 0$, então (5.5) contradiz o fato que $v \in E_\theta^s$. Assim, temos que $\mathfrak{u} = 0$, logo $v = \mathfrak{s} \in S_\theta$, e portanto

$$E_\theta^s \subseteq S_\theta.$$

Analogamente tem-se que $E_\theta^u \subseteq U_\theta$.

Por outro lado, suponha que existe $v \in S_\theta$ tal que $v \notin E_\theta^s$. Assim, existe $(t_k) \subset \mathbb{R}^+$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |D\psi_{t_k}(\theta) \cdot v| = +\infty.$$

Defina $s_k \in [0, t_k]$ por

$$|D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v| = \max_{0 \leq t \leq t_k} |D\psi_t(\theta) \cdot v|,$$

é bem definida devido ao Lema 5.2.5. Então $|D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v| \geq |D\psi_{t_k}(\theta) \cdot v| \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow \infty$, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty.$$

Sejam $u_k = \frac{D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v}{|D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v|}$, $\theta_k = \psi_{s_k}(\theta)$. Para $-s_k \leq t \leq 0$, temos que

$$|D\psi_t(\theta_k) \cdot u_k| = \frac{|D\psi_t(\theta_k) \cdot D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v|}{|D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v|} = \frac{|D\psi_{t+s_k}(\theta) \cdot v|}{|D\psi_{s_k}(\theta) \cdot v|} \leq 1.$$

Como X é compacto e $|u_k| = 1$, tomando subsequências, temos que $\theta_k \rightarrow \theta \in X$ e $u_k \rightarrow u \in T_\theta \Sigma$ quando $k \rightarrow \infty$. Note que $|u| = 1$. Então

$$|D\psi_t(\theta) \cdot u| \leq 1 \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Usando a continuidade de $\theta \mapsto S_\theta$, temos que

$$u \in \lim_{k \rightarrow \infty} S_{\theta_k} \cap E_\theta^u = S_\theta \cap E_\theta^u \subseteq S_\theta \cap U_\theta = \{0\}.$$

Isso contradiz o fato que $u \neq 0$, e assim temos que $S_\theta \subseteq E_\theta^s$.

Analogamente tem-se que $U_\theta \subseteq E_\theta^u$.

□

Do Lema 5.3.1 temos que S_θ vai ser o espaço estável e U_θ vai ser o espaço instável na decomposição hiperbólica, para cada $\theta \in X$.

5.3.2 Lema. *Assuma as condições da Proposição 5.2.1. Existe $C > 0$ tal que*

$$\sup_{t \geq 0} \|D\psi_t(\theta)|_{E_\theta^s}\| < C,$$

para todo $\theta \in X$.

Demonstração. Suponha que a conclusão é falsa. Então para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $\theta_k \in X$, $t_k \geq 0$ e $v_k \in E_{\theta_k}^s$ com $|v_k| = 1$, tais que

$$\sup_{k \geq 0} |D\psi_{t_k}(\theta_k) \cdot v_k| = +\infty. \quad (5.11)$$

Como $v_k \in E_{\theta_k}^s$, temos que $\sup_{s \geq 0} |D\psi_s(\theta_k) \cdot v_k| < +\infty$. Tome $s_k > 0$ tal que

$$|D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k| > \frac{1}{2} \sup_{s \geq 0} |D\psi_s(\theta_k) \cdot v_k| \geq \frac{1}{2} |D\psi_{t_k}(\theta_k) \cdot v_k|.$$

De (5.11), temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty$. Sejam $\vartheta_k := \psi_{s_k}(\theta_k)$ e

$$w_k := \frac{D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k}{|D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k|} \in E_{\vartheta_k}^s.$$

Então $|w_k| = 1$ e se $t > -s_k$, temos que

$$\begin{aligned} |D\psi_t(\vartheta_k) \cdot w_k| &= \frac{|D\psi_t(\vartheta_k) \cdot D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k|}{|D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k|} \\ &= \frac{|D\psi_{t+s_k}(\theta_k) \cdot v_k|}{|D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k|} \\ &\leq \frac{2|D\psi_{t+s_k}(\theta_k) \cdot v_k|}{|D\psi_{s_k}(\theta_k) \cdot v_k|} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Como $|w_k| = 1$ e $\vartheta \in X$, existe uma subsequência $(\vartheta_k, w_k) \rightarrow (\vartheta, w)$ e teríamos que $\vartheta \in X$, $w \in E_\vartheta$, $|w| = 1$, e

$$|D\psi_t(\vartheta) \cdot w| \leq 2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim $0 \neq w \in \mathfrak{B}_\vartheta = \{0\}$, o que é uma contradição. □

Com o seguinte lema concluímos que a decomposição é hiperbólica em X .

5.3.3 Lema. *Existe $\mathfrak{t} > 0$ tal que, para todo $\theta \in X$,*

$$\|D\psi_{\mathfrak{t}}(\theta)|_{E_\theta^s}\| < \frac{1}{2} \quad e \quad \|D\psi_{\mathfrak{t}}(\theta)|_{E_\theta^u}\| < \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Como as duas desigualdades mostram-se da mesma maneira, só mostraremos a primeira. Suponha que ela seja falsa. Então existem $\theta_k \in X$, $v_k \in E_{\theta_k}^s$, $|v_k| = 1$ tais que

$$|D\psi_k(\theta_k) \cdot v_k| \geq \frac{1}{2},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sejam $\vartheta_k := \psi_k(\theta_k)$ e $w_k := D\psi_k(\vartheta_k) \cdot v_k$. Usando o Lema 5.3.2, temos que $\frac{1}{2} \leq |w_k| \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$|D\psi_t(\vartheta_k) \cdot w_k| = |D\psi_t(\vartheta_k) \cdot D\psi_k(\theta_k) \cdot v_k| = |D\psi_{t+k}(\theta_k) \cdot v_k| \leq C,$$

para todo $t \geq -k$. Como X é compacto, existem uma subsequência convergente de $(\vartheta_k, w_k) \rightarrow (\vartheta, w)$, e temos que $\vartheta \in X$, $w \in N_{\vartheta}$, $|w| \geq \frac{1}{2}$ e

$$|D\psi_t(\vartheta) \cdot w| \leq C,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como antes, isso é uma contradição.

□

Capítulo 6

Fluxos Geodésicos em Superfícies Robustamente Expansivas

Neste capítulo nós iremos estudar fluxos geodésicos de superfícies compactas e mostraremos que tais fluxos são de Anosov se, e somente se, são C^1 -robustamente expansivos. Nossa principal referência é Ruggiero [22].

Usaremos sempre que M é uma variedade completa, e $\mathcal{G}^k M$ denotará o conjunto das métricas Riemannianas de classe C^k . Para cada $g \in \mathcal{G}^k M$, denotemos $SM = SM^g$ o fibrado tangente unitário, $\phi_t = \phi_t^g$ o fluxo geodésico definido em SM^g e $G = G^g$ o campo geodésico definido em SM^g .

Lembremos que cada $g \in \mathcal{G}^k M$ gera uma outra métrica Riemanniana no fibrado tangente TSM^g chamada a métrica de Sasaki, i.e., TSM é uma variedade Riemanniana. Dado $\theta \in SM^g$, sabe-se que N_θ^g é perpendicular à direção do fluxo no ponto θ e lembre que é invariante pelo fluxo geodésico $\{\phi_t^g\}$.

Sejam $g \in \mathcal{G}^k M$ e $X \subset SM^g$ compacto e ϕ_t^g -invariante. Dizemos que X é hiperbólico se N^g tem uma decomposição hiperbólica sob X . Quando $X = SM^g$ o fluxo é chamado Fluxo de Anosov.

Denotemos por:

1. $\mathcal{E}^k M$ o conjunto das métricas $g \in \mathcal{G}^k M$ tais que o fluxo geodésico ϕ_t^g é expansivo.
2. $\mathcal{A}(M)$ o conjunto das métricas $g \in \mathcal{G}^k M$ tais que o fluxo geodésico ϕ_t^g é de Anosov.

6.1 Órbitas Periódicas Hiperbólicas

Nesta seção iremos estudar o conjunto $\text{int}(\mathcal{E}^2 M)$ e mostraremos que toda órbita periódica é hiperbólica para métricas nesse conjunto. Para isso precisamos de algumas propriedades simpléticas da aplicação de Poincaré.

Denotemos por $Diff(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ o espaço dos difeomorfismos simpléticos em $\mathbb{R}^{2n}$. Para k inteiro não negativo fixo, dados $f, g \in Diff(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, dizemos que

$$f \sim_k g \text{ se os polinômios de Taylor de grau } k \text{ em zero são iguais.}$$

A relação $\sim_k$ é uma relação de equivalência. Definamos o k -jet de f como a classe de equivalência de $f \in Diff(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e o espaço dos k -jets simpléticos, denotado por $J_s^k(n)$, como o espaço quociente de $Diff(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ pela relação de equivalência $\sim_k$; quando $k = 1$, podemos identificar $J_s^1(n)$ com $Sp(n)$.

Dizemos que $Q \subset J_s^k(n)$ é invariante se

$$\sigma \cdot Q \cdot \sigma = Q,$$

para todo $\sigma \in J_s^k(n)$. Devido a Klingenberg e Takens [14], temos o seguinte.

6.1.1 Teorema. *Seja $Q \subset J_s^k(n)$ aberto, denso e invariante. Então a seguinte propriedade P_Q é C^k genérica em $\mathcal{G}^k M$: o fluxo geodésico de g tem a propriedade P_Q se a aplicação de Poincaré de toda órbita periódica pertence a Q .*

Tambem podemos mostrar este resultado via os métodos do Capítulo 3, trocando a seguinte propriedade: a parte linear da aplicação de Poincaré não tem autovalor igual a 1, pela propriedade: a aplicação de Poincaré pertence a Q .

Enunciaremos outro resultado devido a Klingenberg [13].

6.1.2 Lema. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, e $P : U \rightarrow U$ um difeomorfismo simplético com $P(0) = 0$. Se $\bar{P} = DP(0)$ e*

$$V^s \oplus V^u \oplus V^{ce}$$

é uma decomposição em soma direta de $\mathbb{R}^{2n}$ em subespaços estável, instável e central, respectivamente, com respeito a $\bar{P}$, então existem variedades mergulhadas em $\mathbb{R}^{2n}$, W^s , W^u e W^{ce} , onde $\dim(W^s) = p$, $\dim(W^u) = p$ e $\dim(W^{ce}) = 2q$, tais que

$$T_0 W^s = V^s, T_0 W^u = V^u \text{ e } T_0 W^{ce} = V^{ce}.$$

Elas são chamados variedades estável, instável e central respectivamente.

Se P é de classe C^k , as variedades são de classe C^k e enquanto W^s e W^u são únicos, W^{ce} em geral não é único.

Assim, temos que a aplicação de Poincaré de uma órbita periódica, existe uma variedade central (que pode ser um ponto) da mesma classe diferencial que a aplicação. Chamemos de P_{ce} a restrição de P a W^{ce} .

Definamos a aplicação do tipo *twist*. Para isso temos que dar algumas definições prévias.

6.1.3 Definição. *Seja $\overline{P}$ uma aplicação linear simplética. Sabemos que tem $2n$ autovalores (contando multiplicidade), um conjunto de n são chamados autovalores principais se:*

ρ é autovalor principal se

1. $|\rho| < 1$ ou
2. $\rho = \exp(2\pi ia)$ com $0 \leq a \leq 1/2$ e aqui vamos dar apenas metade do ρ em caso $a = 0$ ou $a = 1/2$.

Dizemos que $\overline{P}$ é elementar se seus autovalores são todos distintos.

Seja N um inteiro positivo, dizemos que $\overline{P}$ é N -elementar se um conjunto $\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ de autovalores principais de $\overline{P}$ satisfaz a seguinte condição. Se $k_1, \dots, k_n$ são inteiros com $1 \leq \sum_j |k_j| \leq N$, então

$$\prod_j \rho_j^{k_j} \neq 1.$$

Note que 1-elementar diz que 1 não é autovalor de $\overline{P}$, enquanto que 4-elementar diz que não existem autovalores que são raízes da unidade de ordem ≤ 4 e que não existe autovalores com multiplicidade maior que 1.

Daremos o importante resultado devido a Birkhoff.

6.1.4 Lema (Forma Normal de Birkhoff). *Seja P como no lema anterior de classe C^1 e de classe C^3 na origem. Assuma que $\overline{P}$ tem só autovalores de módulo um e é 4-elementar. Então existem coordenadas complexas-conjugadas simpléticas real analíticas $(z, \bar{z})$ perto de zero tais que*

$$(z^*)^k = z^k \exp 2\pi i \left(a^k + \sum_l b_l^k z^l \bar{z}^l \right) + w^k(z, \bar{z}).$$

Aqui, $w^k(z, \bar{z})$ é de classe C^1 com derivada nula até ordem 3 em zero, a^k e b_l^k são reais com $\rho_k = \exp(2\pi i a^k)$ um autovalor principal. Se escolhermos a^k estritamente crescente, a matriz (b_l^k) é unicamente determinada. Em particular, a propriedade $\det(b_l^k) \neq 0$ é independente da escolha da forma normal.

Com as notações anteriores, note que P_{ce} satisfaz as condições da forma normal de Birkhoff.

6.1.5 Definição. *Dizemos que $P : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, com $P(0) = 0$ é do tipo *twist* se*

1. $\overline{P}$ é não hiperbólico,

2. $\bar{P}$ é elementary,
3. $\bar{P}$ é 4-elementary,
4. Se

$$(z^*)^k = z^k \exp 2\pi i \left(a^k + \sum_l b_l^k z^l \bar{z}^l \right) + w^k(z, \bar{z}),$$

é a forma normal de Birkhoff de P_{ce} , temos que $\det(b_l^k) \neq 0$.

Note que 1., 2. e 3. são C^1 -genérico, e 4. é C^3 -genérico. Uma consequência do resultado de Klingenberg e Takens [14] é a seguinte.

6.1.6 Lema. *Sejam $\mathcal{O}_\theta$ uma órbita periódica, $\gamma_\theta(t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$ a geodésica, e $\mathcal{P}_\theta$ a aplicação de Poincaré. Se $\bar{\mathcal{P}}_\theta$ tem $2q$ autovalores no círculo unitário, então numa vizinhança tubular arbitrariamente pequena de γ_θ existem perturbações arbitrariamente pequenas de g suportadas nessas vizinhanças tais que, para as métricas perturbados γ_θ ainda é uma geodésica, a aplicação de Poincaré associada é C^3 -perto de $\mathcal{P}_\theta$ e sua restrição para W_θ^{ce} é do tipo twist.*

Por outro lado, temos a versão geral do Teorema do Ponto Fixo de Birkhoff-Lewis, devido a Moser [18].

6.1.7 Teorema. *Se $P : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $P(0) = 0$ é um difeomorfismo simplético local do tipo twist sem parte hiperbólica, então em toda vizinhança de zero existem infinitas órbitas periódicas. O número de órbitas periódicas de período $\leq k$ é finito para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Agora mostraremos o resultado principal desta seção.

6.1.8 Proposição. *Se $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$, então toda órbita periódica é hiperbólica.*

Demonstração. Provaremos por absurdo, i.e., suponha que existem $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$ e $\theta \in SM$ tais que a $\mathcal{O}_\theta$ órbita periódica é não hiperbólica. Então sua aplicação de Poincaré $\mathcal{P}_\theta$ é não hiperbólica, isto é, sua parte linear tem algum autovalor em S^1 . Denotemos $\mathcal{P}_\theta$ por $\mathcal{P}$. Aplicando o Lema 6.1.6 a $\mathcal{P}_{ce}$, existem perturbações arbitrariamente pequenas g_n de g e uma sequência $\mathcal{O}_{\theta_m}^n$ de órbitas periódicas do fluxo geodésico de g_n

$$\phi_t^n : (SM, g_n) \rightarrow (SM, g_n)$$

tais que $\phi_t(\theta)$ é uma órbita periódica de ϕ_t^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, para $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ fixos, do Teorema 6.1.7 temos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$, então

$$d_{g_n}(\phi_s^n(\theta_m), \phi_s^n(\theta)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} d_{g_n}(\phi_s^n(\theta_m), \phi_s^n(\theta)) < \varepsilon$$

e portanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} d_{g_n}(\phi_s^n(\theta_m), \phi_s^n(\theta)) = 0.$$

Então $g_n \notin \mathcal{E}^2 M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição pois $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$. $\square$

Denotemos por $\mathcal{F}^k M$ o conjunto das métricas $g \in \mathcal{G}^k M$ tais que existe uma vizinhança V de g , com toda órbita periódica de ϕ_t^h hiperbólica para todo $h \in V_g$.

6.1.9 Corolário. $\text{int}(\mathcal{E}^2 M) \subseteq \mathcal{F}^1 M$.

Demonstração. Se $g \in \text{int}(\mathcal{E}^1 M)$ então existe uma vizinhança V de g tal que $V \subseteq \mathcal{E}^1 M$. Se $h \in V$, pela Proposição 6.1.8 toda órbita periódica de ϕ_t^h é hiperbólica, e então $g \in \mathcal{F}^1 M$. $\square$

6.2 Teorema Principal

Nesta seção enunciamos e mostramos nosso principal resultado deste capítulo, onde fazemos uso dos Capítulos 4. e 5. Dado $g \in \mathcal{G}^k M$ fixo, denotamos por $\mathcal{P}(g)$ o conjunto de todas as órbitas periódicas do fluxo geodésico ϕ_t^g . Note que da métrica de Sasaki e da forma simplética Ω definida na seção 2.4 segue que SM^g é uma variedade Riemanniana e simplética.

Nós aceitaremos o seguinte teorema, devido a Mañé [17].

6.2.1 Teorema. *Se $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$, então existe $\mathcal{U}$ vizinhança de g e constantes $K > 0$, $D > 0$ e $0 < \lambda < 1$, tais que*

1. *Se $h \in \mathcal{U}$ e $\theta \in \mathcal{P}(h)$ tem período minimal, $T \geq D$, então*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|D\phi_{-iD}^h(\phi_{-iD}^h(\theta))\|_{E_{\phi_{-iD}^h(\theta)}^u} \leq K\lambda^k$$

e

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|D\phi_D^h(\phi_{iD}^h(\theta))\|_{E_{\phi_{iD}^h(\theta)}^s} \leq K\lambda^k,$$

onde $E_\vartheta^s \oplus E_\vartheta^u \oplus E_\vartheta = T_\vartheta SM$ é uma decomposição hiperbólica para $\vartheta \in \mathcal{O}_\theta$, e onde $k = \lceil \frac{T}{D} \rceil$ e E_ϑ é a direção do fluxo no ϑ .

2. *Existe uma decomposição contínua para $T_\theta SM = F_\theta^s \oplus F_\theta^u \oplus E_\theta$, para $\theta \in \overline{\mathcal{P}(g)}$ com*

$$\|D\phi_D(\theta)\|_{F_\theta^s} \cdot \|D\phi_{-D}(\phi_D(\theta))\|_{F_{\phi_D(\theta)}^u} \leq \lambda.$$

Além disso, $F_\theta^s = E_\theta^s$, $F_\theta^u = E_\theta^u$ se $\theta \in \mathcal{P}(g)$.

Observe que 2. do Teorema 6.2.1 diz que N_θ^g tem uma decomposição dominada sob $\overline{\mathcal{P}(g)}$. A fim de utilizar os resultados do Capítulo 5., mostraremos que as aplicações

$$\theta \longmapsto F_\theta^s \quad \text{e} \quad \theta \longmapsto F_\theta^u$$

são fibrados Lagrangianos sob $\overline{\mathcal{P}(g)}$.

6.2.2 Lema. *Temos que $\theta \mapsto F_\theta^s$ é uma fibra Lagrangiana para $\theta \in \overline{\mathcal{P}(g)}$.*

Demonstração. Já que a fibra é contínua em $\overline{\mathcal{P}(g)}$ só mostraremos que a fibra é Lagrangiana em $\mathcal{P}(g)$. Sejam $\mathcal{O}_\theta$ uma órbita periódica com período minimal $T > 0$ e

$$F_{\phi_t(\theta)}^s \oplus F_{\phi_t(\theta)}^u \oplus E_{\phi_t(\theta)} = T_{\phi_t(\theta)}SM$$

a decomposição. Lembre que existem $K(\theta) > 0$ e $0 < \lambda(\theta) < 1$ tais que

1. $|D\phi_t(\theta) \cdot u| \leq K(\theta)\lambda(\theta)^t|u|$, para todo $t \geq 0$ e $u \in F_\theta^s = E_\theta^s$ e
2. $|D\phi_t(\theta) \cdot v| \leq K(\theta)\lambda(\theta)^{-t}|v|$, para todo $t \geq 0$ e $v \in F_\theta^u = E_\theta^u$.

Afirmção E_θ^s e E_θ^u são perpendiculares a E_θ , para todo $\theta \in \overline{\mathcal{P}(g)}$.

Prova da afirmação. Se $u \in E_\theta^s$ é da forma $u = \alpha + \beta$, onde $\alpha \in N_\theta$ e $\beta \in E_\theta$, como $D\phi_t(\theta) \cdot (N_\theta) = N_{\phi_t(\theta)}$ e $D\phi_t(\theta) \cdot G_\theta = G_{\phi_t(\theta)}$, então $D\phi_t(\theta) \cdot (E_\theta) = E_{\phi_t(\theta)}$, além disso como $G_\theta = G_{(p,v)} = \{v, 0\}$, temos que

$$|D\phi_t(\theta) \cdot G_\theta|_\theta = |G_{\phi_t(\theta)}|_\theta = |\{\gamma'_\theta(t), 0\}|_\theta = |\gamma'_\theta(t)|_p = |v|_p = |\{v, 0\}|_\theta = |G_\theta|_\theta,$$

onde $|\cdot|_\theta$ é a norma da métrica de Sasaki no fibrado tangente SM e $|\cdot|_p$ é a métrica Riemanniana na variedade M . Assim, temos que $|D\phi_t(\theta) \cdot v|_\theta = |v|_\theta$ para todo $v \in E_\theta$. Logo,

$$|D\phi_t(\theta) \cdot u|_\theta^2 = |D\phi_t(\theta) \cdot \alpha|_\theta^2 + |D\phi_t(\theta) \cdot \beta|_\theta^2 \geq |D\phi_t(\theta) \cdot \beta|_\theta^2 = |\beta|_\theta^2.$$

Assim,

$$|\beta|_\theta \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |D\phi_t(\theta) \cdot u|_\theta = 0,$$

e desta forma $E_\theta^s \subset N_\theta$. Então E_θ^s é perpendicular a E_θ . O resultado para E_θ^u é análogo.

□

Já que $\mathcal{J}$ é uma isometria, temos que $|D\phi_t(\theta) \cdot u| = |\mathcal{J}(D\phi_t(\theta) \cdot u)|$. Assim, se $u, v \in E_\theta^s$ temos que

$$\begin{aligned} |\Omega_\theta(u, v)| &= |\Omega_\theta(D\phi_t(\theta) \cdot u, D\phi_t(\theta) \cdot v)| = |\langle D\phi_t(\theta) \cdot u, \mathcal{J}(D\phi_t(\theta) \cdot v) \rangle| \\ &\leq |D\phi_t(\theta) \cdot u| \cdot |\mathcal{J}(D\phi_t(\theta) \cdot v)| = |D\phi_t(\theta) \cdot u| \cdot |D\phi_t(\theta) \cdot v| \\ &\leq K(\theta)^2 \lambda(\theta)^{2t} |u| \cdot |v|, \text{ para todo } t \geq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\Omega_\theta(u, v)| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} K(\theta)^2 \lambda(\theta)^{2t} |u| \cdot |v| = 0,$$

e então $\Omega_\theta(u, v) = 0$, para todo $u, v \in E_\theta^s$. Analogamente temos que $\Omega_\theta(u, v) = 0$, para todo $u, v \in E_\theta^u$. Usando o Lema 5.1.6 para $X = E_\theta^s, Y = E_\theta^u$ e $(N_\theta, \Omega_\theta)$ concluímos a prova do lema. $\square$

É claro que $\overline{\mathcal{P}(g)}$ é compacto e ϕ_t^g -invariante em SM^g . Como o campo geodésico G^g não tem singularidades e pelo Lema 6.2.2, temos que N_θ^g tem uma decomposição Lagrangiana e contínua sob $\overline{\mathcal{P}(g)}$. Além disso, por 1. do Teorema 6.2.1, temos que a decomposição Lagrangiana de N_θ^g é ϕ_t^g -invariante. Assim, pela Proposição 5.2.1, para $X = \overline{\mathcal{P}(g)}, S_\theta = F_\theta^s$ e $U_\theta = F_\theta^u$, temos que N_θ^g tem uma decomposição hiperbólica sob $\overline{\mathcal{P}(g)}$, de modo que $\overline{\mathcal{P}(g)}$ é um conjunto hiperbólico. Portanto, temos mostrado o seguinte.

6.2.3 Teorema. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Se $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$, então $\overline{\mathcal{P}(g)}$ é um conjunto hiperbólico.*

Até agora nós não falamos da dimensão, de modo que todo o feito vale em qualquer dimensão. Agora vamos supor que (M, g) é uma superfície compacta, i.e., uma variedade Riemanniana compacta de dimensão 2. Vamos enunciar nosso resultado principal.

6.2.4 Teorema (Teorema Principal). *Se M é uma superfície compacta então*

$$\text{int}(\mathcal{E}^2 M) = \mathcal{A}(M).$$

Demonstração. Seja $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$, pelo teorema 6.2.3, temos que $\overline{\mathcal{P}(g)}$ é um conjunto hiperbólico. Por outro lado, denotemos por $\Omega(g)$ o conjunto de pontos não errantes do fluxo geodésico ϕ_t^g . Sabe-se que existe uma medida em SM , chamada medida de Liouville, a qual deixa invariante o fluxo geodésico. Nestas condições podemos usar o Teorema de Recorrência de Poincaré para mostrar que $SM = \overline{\Omega(g)}$, i.e., o conjunto dos pontos não errantes do fluxo geodésico ϕ_t^g é denso em SM^g . Sabe-se que a dimensão de SM^g é 3, e pelo Teorema 4.2.1 temos que $\mathcal{P}(g)$ é também denso em SM^g . Logo SM^g é um conjunto hiperbólico, e assim o fluxo geodésico ϕ_t^g é um fluxo de Anosov. Então, $g \in \mathcal{A}(M)$. Reciprocamente, dado $g \in \mathcal{A}(M)$ sabe-se que todo fluxo geodésico ϕ_t^g de Anosov em uma

variedade compacta é expansivo, i.e., $g \in \mathcal{E}^2 M$. Além disso, pela C^1 estruturalmente estável de [3], temos que $g \in \text{int}(\mathcal{E}^2 M)$, o que conclui a prova do Teorema Principal.

□

Capítulo 7

Apêndice 1: Geometria em Variedades Suaves

Neste apêndice iremos estabelecer as principais ferramentas da geometria em variedades suaves. Qualquer livro de geometria Riemanniana é uma boa referência, assim como Do Carmo [11] ou K. Burns, M. Gidea [6].

7.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção iremos dar a definição de variedade suave e suas principais ferramentas.

7.1.1 Definição. *Uma variedade suave de dimensão m é um conjunto M junto com uma coleção de aplicações $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, com cada U_α um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *cada aplicação $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é injetiva;*
2. *se $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, então existe uma aplicação suave*

$$\theta_{\alpha\beta} : \varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

tal que $\varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ \theta_{\alpha\beta}$;

3. $M = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha)$.

As aplicações $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ são chamadas parametrizações locais e as aplicações inversas $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ são chamadas sistemas de coordenadas ou cartas.

Note que $\theta_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ em $\varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\theta_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ em $\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \subseteq \mathbb{R}^m$, e assim $\theta_{\beta\alpha} = \theta_{\alpha\beta}^{-1}$. Quando todas as mudanças de coordenadas $\theta_{\alpha\beta}$ são de classe C^k , dizemos que M é uma variedade de classe C^k . Por simplicidade, iremos considerar variedades de classe C^∞ chamadas variedades suaves.

Iremos supor sempre que M tem as seguintes propriedades:

- A topologia da variedade M é Hausdorff.
- A topologia da variedade M tem uma base enumerável de conjuntos abertos.

Consideraremos sempre variedades suaves M de dimensão m e N de dimensão n . A classe natural de aplicações entre variedades é a classe de aplicações suaves. Como suavidade é uma condição local, podemos expressá-la em coordenadas locais.

7.1.2 Definição. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação entre as variedades suaves M e N . Dizemos que f é diferenciável se para todo ponto $p \in M$ existe uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow V$ para M com $p \in V$, e uma parametrização local $\psi : U' \rightarrow V'$ para N com $f(p) \in V'$, tal que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$.*

Dizemos que f é de classe C^k se $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é de classe C^k para qualquer escolha de ψ e φ . Consideremos apenas aplicações de classe C^∞ chamadas aplicações suaves. Um difeomorfismo é uma aplicação suave bijetiva com inversa suave. Só existem difeomorfismos entre variedades suaves de mesma dimensão.

7.1.3 Definição. *Seja $p \in M$. Dizemos que v é um vetor tangente de M no ponto p , se existe uma curva suave $\alpha : I \rightarrow M$, i.e., uma aplicação suave, com $0 \in I \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.*

Não é difícil mostrar que v independe da curva α . Em coordenadas locais podemos escrever v por $(v_i) = (v_1, \dots, v_m)$. O vetor v é unicamente determinado por suas coordenadas locais e independente da escolha da parametrização local. A chave é que a aplicação mudança de coordenadas é um difeomorfismo.

Denotamos o conjunto de todos os vetores tangente para M no ponto p por $T_p M$. O conjunto de vetores tangentes $T_p M$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial.

7.1.4 Proposição. *O espaço tangente $T_p M$, dotado com as operações de adição e multiplicação escalar, é um espaço vetorial de dimensão m . Uma base deste espaço é $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p \right\}$, definida com respeito à alguma parametrização local φ em torno de p .*

Agora, consideremos o fibrado tangente TM , a qual consiste de todos os espaços tangentes dos pontos de M coladas de uma maneira natural, denotado por:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M.$$

7.1.5 Proposição. *O fibrado tangente TM tem uma estrutura natural de variedade suave de dimensão $2m$.*

Para cada parametrização local $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V_\alpha \subseteq M$ em M , definimos a parametrização local em TM como $\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ por

$$\Phi_\alpha(x_i, v_i) = \Phi_\alpha(x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_m) = (p, v),$$

onde p é o ponto $\varphi_\alpha(x_i) \in M$, e v é o vetor em p cujas coordenadas locais, com respeito a φ_α , são (v_i) . Assim, se $q \in V_\alpha$ e $w \in T_q M$ então $w = w_i \partial_i x(q)$. Agora podemos considerar TM como uma variedade suave de dimensão $2m$ e naturalmente obter seu fibrado tangente TTM . Se $\sqcup \subseteq U \times \mathbb{R}^m$, definamos a parametrização local em TTM , como $\Theta_\alpha : \sqcup \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow TTM$ por

$$\Theta_\alpha(x_i, v_i, X_i, \xi_i) = \xi,$$

onde $\xi \in T_{(p,v)} TM$. Assim se $(q, w) \in \Phi_\alpha(\sqcup)$ e $\eta \in T_{(q,w)} TM$ então $\eta = X_i \partial_i x(q, w) + \xi_i \partial_i v(q, w)$.

A derivada de uma aplicação suave em um ponto representa a aproximação linear da aplicação perto do ponto. Seja f uma aplicação suave das variedades suaves M e N .

7.1.6 Definição. A derivada de f no ponto $p \in M$ é a aplicação $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definido por

$$Df_p \left(\frac{dc}{dt}(0) \right) = \frac{d(f \circ c)}{dt}(0),$$

onde $c : I \rightarrow M$ é uma curva suave em M com $c(0) = p$.

Note que $\frac{dc}{dt}(0)$ representa um vetor tangente para M em $p = c(0)$, e $\frac{d(f \circ c)}{dt}(0)$ representa um vetor para N em $f(p)$, já que $f \circ c : I \rightarrow N$ é uma curva suave em N com $(f \circ c)(0) = f(p)$. A derivada está bem definida e é linear. Aplicando Df_p para os vetores da base padrão $\{\partial_i x\}$ de $T_p M$, temos os vetores $\{Df_p(\partial_i x)\}$ em N . Nós expressamos esses vetores como combinações lineares da base $\{\partial_i y\}$ de $T_{f(p)} N$ como

$$Df_p(\partial_j x) = a^{ij} \partial_i y$$

para todo $j = 1, \dots, m$. A matriz $n \times m$ feita com esses coeficientes $(Jf)_p = (a^{ij})$ é chamada a matriz de Jacobi de f em p . As entradas da matriz dependem dos sistemas coordenadas locais (x_i) e (y_i) em torno de p e $f(p)$, respectivamente, mas seu posto é independente deles. Os vetores $Df_p(\partial_j x)$, $j = 1, \dots, m$, formurão uma base de $T_{f(p)} N$ se, e somente se $m = n$ e a matrix $(Jf)_p$ é invertível.

7.1.7 Proposição. Seja $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ duas aplicações suaves. Então

$$D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p.$$

Se M e N são duas variedades suaves de mesma dimensão, uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ é chamada um difeomorfismo local em $p \in M$ se f leva alguma vizinhança aberta V de p difeomorficamente sobre alguma vizinhança aberta W de $f(p)$.

7.1.8 Proposição. *Suponha que M e N são duas variedades suaves de mesma dimensão, $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave, e $p \in M$ com Df_p não singular. Então f é um difeomorfismo local em p .*

Vamos agora explorar as consequências da derivada injetiva e sobrejetiva.

7.1.9 Definição. *Suponha que M e N são variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave.*

1. *A aplicação f é chamada imersão se Df_p é injetiva para cada ponto p , isto é, o posto da Jacobiana $(Jf)_p$ é igual a m em todo ponto $p \in M$.*
2. *A aplicação f é chamada mergulho se f é imersão e é um homeomorfismo sobre sua imagem.*
3. *A aplicação f é chamada submersão se Df_p é sobrejetiva para cada ponto p , isto é, o posto da Jacobiana $(Jf)_p$ é igual a n em todo ponto $p \in M$.*

Note que para uma imersão devemos ter $m \leq n$, para um mergulho devemos ter $m = n$ e para uma submersão devemos ter $m \geq n$. O seguinte teorema indica que qualquer imersão é localmente a mesma que a imersão canônica

7.1.10 Teorema (Teorema da Imersão). *Se $f : M \rightarrow N$ é uma imersão, então para todo ponto $p \in M$ existem parametrizações locais φ em torno de p e ψ em torno de $f(p)$ tais que*

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

7.1.11 Teorema (Teorema do Mergulho). *Se $f : M \rightarrow N$ é um mergulho, então a imagem $f(M)$ com a estrutura suave induzida por f é uma subvariedade de N .*

Em particular, toda subvariedade é a imagem da inclusão canônica, que é claramente uma imersão. Toda submersão é localmente a mesma que a submersão canônica.

7.1.12 Teorema (Teorema da Submersão). *Se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão, então para todo ponto $p \in M$ existem parametrizações locais ϕ em torno de p e ψ em torno de $f(p)$ tais que*

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

Os Teoremas da imersão e submersão são corolários de um teorema mais geral, o Teorema do posto. Toda variedade está imersa em algum espaço euclidiano; é um resultado devido a Whitney.

7.1.13 Definição. *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e P uma subvariedade de N . Dizemos que f é transversal a P , denotamos por $f \pitchfork P$, se*

$$(df)_q(T_q M) + T_{f(q)}P = T_{f(q)}N$$

para todo $q \in f^{-1}(P)$.

Se $f(M) \cap P = \emptyset$ ou $P = N$ então $f \pitchfork P$. Agora temos uma das principais características da transversalidade.

7.1.14 Teorema. *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e $P \subseteq N$ uma subvariedade de N . Se $f \pitchfork P$, então $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade de M , sempre que $f^{-1}(P) \neq \emptyset$. A codimensão de $f^{-1}(P)$ em M é igual a codimensão de P em N .*

Considere o caso especial quando M é uma subvariedade de N , e a aplicação é o mergulho canônico de M a N , $i_M : M \hookrightarrow N$.

7.1.15 Definição. *Se M, P são duas subvariedades de N , então dizemos que M é transversal a P , e denotamos por $M \pitchfork P$, se*

$$T_p M + T_p P = T_p N$$

sempre que $p \in M \cap P$.

Se $M \cap P = \emptyset$ então $M \pitchfork P$.

7.1.16 Corolário. *A intersecção $M \cap P \neq \emptyset$ de duas subvariedades transversais M e P de N é uma subvariedade de N . Além disso,*

$$\text{codim}(M \cap P) = \text{codim}M + \text{codim}P.$$

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua de espaços topológicos, uma homotopia de f é uma aplicação contínua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F_0 = F(\cdot, 0) = f$. Se f é uma aplicação suave entre duas variedades, é natural considerar a homotopia F que é também suave. Uma propriedade de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita uma propriedade estável se para qualquer homotopia suave F de f , existe $\varepsilon > 0$ tal que $F_t = F(\cdot, t)$ tem a mesma propriedade, para todo $0 \leq t \leq \varepsilon$.

7.1.17 Proposição. *A propriedade de uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ ser uma imersão (ou submersão ou mergulho) de uma variedade compacta M em uma variedade N é uma propriedade estável.*

7.1.18 Corolário. *A propriedade de uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ ser um difeomorfismo é uma propriedade estável.*

7.1.19 Proposição. *A propriedade de uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ da variedade compacta M na variedade N ser transversal a uma subvariedade P de N é uma propriedade estável.*

Enquanto a transversalidade é uma propriedade estável, a não-transversalidade é, ao contrário, é não-estável. Se P é uma subvariedade de N , então quase toda aplicação $f : M \rightarrow N$ é transversal a P .

7.1.20 Teorema (Teorema da Transversalidade). *Suponha que M , N e S são variedades suaves, e $F : M \times S \rightarrow N$ é transversal a uma subvariedade P de N . Então o conjunto de todos os elementos s com $F_s = F(\cdot, s) : M \rightarrow N$ transversal a P é residual em S .*

7.1.21 Definição. *Um campo de vetores suave X na variedade M é uma aplicação suave tal que todo ponto $p \in M$ associa um vetor X_p em $T_p M$.*

Equivalentemente, um campo de vetores suave é uma aplicação suave $X : M \rightarrow TM$ tal que $X(p) \in T_p M$ para todo $p \in M$, ou também se consideramos a aplicação projeção natural de M , $\pi : TM \rightarrow M$, temos que $\pi \circ X(p) = p$. Pode-se escrever o campo de vetores suave como

$$X = v_i \partial_i x,$$

onde (x_i) são as coordenadas locais, e as componentes vetoriais $v_i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves para todo $i = 1, \dots, m$.

Vejamos o Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias em variedades.

7.1.22 Definição. *Um fluxo no espaço topológico M é uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que satisfaz as seguintes condições:*

$$\begin{aligned}\phi(0, x) &= x, \\ \phi(t_1 + t_2, x) &= \phi(t_1, \phi(t_2, x)),\end{aligned}$$

para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in M$. Dizemos que o fluxo ϕ define, no espaço topológico M , um sistema dinâmico de tempo contínuo.

Dado um fluxo ϕ , denotamos por ϕx a trajetória $\phi x : \mathbb{R} \rightarrow M$ com $\phi x(t) = \phi_t x = \phi(t, x)$ e ϕ_t o homeomorfismo (ou difeomorfismo no caso suave) $\phi_t : M \rightarrow M$ com $\phi_t(x) = \phi_t x = \phi(t, x)$. Dado um campo de vetores suave X na variedade suave M , definimos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = X(x).$$

7.1.23 Teorema (Existência e unicidade de soluções de equações diferenciais em variedades). *Sejam M uma variedade suave e X um campo de vetores suave em M . Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de 0 e uma curva suave $\phi p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t p = X_{\phi_t p}, \\ \phi_0 p = p. \end{cases}$$

A solução ϕp é única no sentido que se $\psi p : (-\varepsilon', \varepsilon') \rightarrow M$ satisfaz o sistema anterior, então $\phi_t p = \psi_t p$ em seu intervalo comum de definição.

A solução depende continuamente da condição inicial p .

Existe um intervalo aberto maximal I_p no qual a solução ϕp está definida. A aplicação $\phi : \{(t, p) \mid p \in M \text{ e } t \in I_p\} \rightarrow M$ é um fluxo local, tal que $\phi(0, p) = p$ e $\phi(t_1 + t_2, p) = \phi(t_1, \phi(t_2, p))$ sempre que $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I_p$ para todo p . Se X tem suporte compacto (por exemplo, se M é compacta), então o fluxo é definido globalmente em $\mathbb{R} \times M$.

Denotemos

$$\mathcal{O}_p := \{\phi_t(p) : t \in I_p\}$$

a trajetória de p . Os pontos onde um campo de vetores se anula são notáveis: as trajetórias correspondentes são reduzidas a um ponto. De especial interesse são também os pontos cujas trajetórias retornam à sua posição original após um determinado período de tempo.

7.1.24 Definição. Um ponto p é chamado ponto crítico do campo de vetores X se $X_p = 0$, é chamado um ponto fixo do fluxo ϕ se $\phi_t p = p$ para todo t e p é chamado ponto periódico do fluxo ϕ se $\phi_{t_0} p = p$ para algum $t_0 > 0$. A trajetória de um ponto periódico é chamada trajetória fechada ou órbita periódica. O menor t_0 com esta propriedade é chamado período principal.

Seja $\mathcal{O}_p = \{\phi_t(p) : 0 \leq t \leq t_0\}$ uma órbita periódica, denotemos por $D\phi_t p$ a derivada de $\phi_t p$ com respeito à variável p . Usando as propriedades básicas do fluxo é possível mostrar que 1 é sempre autovalor de $D\phi_{t_0} p$ com seu respectivo autovetor canônico X_p , i.e.,

$$D\phi_{t_0} p \cdot X_p = X_p.$$

Os autovalores de $D\phi_{t_0} p$ são chamados *multiplicadores* da órbita periódica $\mathcal{O}_p$ e dizemos que a órbita periódica $\mathcal{O}_p$ é *não degenerada* se tem só um multiplicador (contando multiplicidade) igual a 1. Em verdade, $D\phi_t p : TM \rightarrow TM$ induz um fluxo em TM . As equações diferenciais das órbitas de fluxo ϕ descrevem o fluxo $D\phi$ sob essa órbita.

Seja S_p uma subvariedade suave de codimensão um da variedade compacta M , transversal ao fluxo ϕ em p , i.e., S_p é ortogonal a X_p e existe uma vizinhança Σ_p de p em S_p tal que se $q \in \Sigma_p$, $\mathcal{O}_q$ é ainda transversal a S_p , e existe $T(q)$ perto de t_0 tal que $\phi_{T(q)}(q) \in \Sigma_p$. Em resumo, existem $T : \Sigma_p \rightarrow \mathbb{R}$ suave e $\mathcal{P}_p : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$ tal que $\mathcal{P}_p(q) = \phi_{T(q)}(q)$. A aplicação $\mathcal{P}_p$ é chamada a *aplicação de Poincaré* da órbita $\mathcal{O}_p$.

7.1.25 Teorema. *Seja X um campo de vetores suave na variedade suave M , tal que $X_{p_0} \neq 0$ em algum ponto p_0 . Então existe um sistema de coordenadas locais em torno de p_0 tal que as trajetórias do fluxo local de X , nestas coordenadas locais, são linhas retas paralelas.*

As seções são mais gerais que os campos de vetores. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial, dizemos que σ é uma *seção de classe C^k* na fibra vetorial E , se a aplicação $\sigma : M \rightarrow E$ é de classe C^k e $\pi \circ \sigma = id_M$. Denotemos por $\Gamma^k E$ o espaço de todas as seções de classe C^k na fibra vetorial E , em particular $\Gamma^k(TM)$ denota o espaço dos campos de vetores de classe C^k . Agora, podemos definir um novo fluxo considerando o espaço de campos de vetores de classe C^k . Considere a aplicação $F : M \times \mathbb{R} \times \Gamma(TM) \rightarrow M : (p, t, X) \mapsto F(p, t, X)$, onde $\partial_2 F(p, t, X) = X_{F(p, t, X)}$ e $F(p, 0, X) = p$. Tome uma métrica em TM , cuja existência será garantida mais à frente, e defina a norma do campo de vetores X como $\|X\| = \sup_{p \in M} \|X_p\|$. Dado $a > 0$, denote por Γ_a^k o conjunto de todos os campos de vetores X tal que $\|X\| < a$. Da teoria local de equações diferenciais, temos que dado $p \in M$ existem $U = U_p$ vizinhança de p e $\varepsilon = \varepsilon_p > 0$ tal que $F|U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Gamma_\varepsilon^k$ é de classe C^k . Além disso, obtemos as propriedades de fluxo $F(p, t + s, X) = F(F(p, t, X), s, X)$ e $F(p, \lambda t, X) = F(p, t, \lambda X)$.

7.1.26 Definição. *O colchete de Lie de dois campos de vetores X e Y é o campo de vetores suave denotado por $[X, Y]$ e definido por*

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

para qualquer $f \in C^\infty(M)$.

Em coordenadas locais, se $(v_i(p))$ são as componentes locais de X_p e $(w_i(p))$ as componentes locais de Y_p , temos

$$[X, Y](f) = \left(v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \partial_j f.$$

É fácil ver que $[\partial_i x, \partial_j x] = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq m$. É claro que $[X, Y]_p$ não só depende de X_p e Y_p , mas também depende das primeiras derivadas de X e Y em p .

7.2 Geometria Riemanniana

Uma métrica Riemanniana é um produto interno suave definido em cada espaço tangente da variedade. Um produto interno num espaço vetorial V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, simétrica e definida positiva.

7.2.1 Definição. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade suave M é uma aplicação g que associa a cada ponto $p \in M$, um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$,*

dependendo suavemente de p , no sentido que, para qualquer dois campos de vetores suaves X e Y , a função

$$p \in M \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

é suave. Se $k \in \mathbb{N}$, dizemos que g é de classe C^k se a função anterior é de classe C^k . A variedade M dotada da métrica Riemanniana é chamada uma variedade Riemanniana.

Esta definição não depende da escolha da parametrização local em M . Expressamos a aplicação g em coordenadas locais: se (x_i) um sistema de coordenadas locais em torno de p , a base canônica de $T_p M$ é $\{\partial_i x : 1 \leq i \leq m\}$. Suponha que $X_p = v_i(p)\partial_i x$ e $Y_p = w_i(p)\partial_i x$ são dois campos de vetores suaves. Então

$$\langle X_p, Y_p \rangle = v_i(p)w_j(p)\langle \partial_i x, \partial_j x \rangle.$$

Portanto a métrica Riemanniana em p pode-se escrever em termos das funções

$$g_{ij}(p) = g_{ij}(x_1, \dots, x_m) = \langle \partial_i x, \partial_j x \rangle.$$

Estas funções formam uma matriz $m \times m$ $(g_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ e temos que:

1. $\langle X, Y \rangle = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdot & g_{1m} \\ & \ddots & \\ g_{m1} & \cdot & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$
2. $g_{ij} = g_{ji}$, para todo $i, j = 1, \dots, m$ e
3. $g_{ij}v_i v_j > 0$ para todo $(v_1, \dots, v_m) \neq 0$.

Em particular a matriz (g_{ij}) é invertível, também denotaremos por g tal matriz. Toda variedade suave pode ser dotada de pelo menos uma métrica Riemanniana, com ajuda da partição da unidade:

7.2.2 Teorema. *Toda variedade suave tem pelo menos uma métrica Riemanniana.*

O comprimento de um vetor tangente $v \in T_p M$ é definido por

$$|v| := \langle v, v \rangle^{1/2}.$$

Do ponto de vista diferenciável, duas variedades são as mesmas se elas são difeomorfas. Qualquer duas variedades são localmente as mesmas, uma vez que suas cartas são cópias difeomorfas de $\mathbb{R}^m$. Em contraste, duas variedades Riemannianas não necessariamente são localmente os mesmos com respeito a suas próprias métricas.

7.2.3 Definição. *Sejam M e N duas variedades Riemannianas.*

1. Dizemos que M é isométrica a N se existe um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ tal que para todo $u, v \in T_p M$

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}.$$

Tal aplicação é chamada uma isometria.

2. Dizemos que M é localmente isométrica a N se para todo ponto $p \in M$ existe uma isometria $f : U \rightarrow V$ de uma vizinhança U de p em M para uma vizinhança V de $f(p)$ em N .

Lembremos a Definição 1.1.2 que diz respeito à conexão afim. Podemos expressar uma conexão afim em coordenadas locais (x_i) . Como $\nabla_{\partial_i x} \partial_j x$ é um campo de vetores, seu valor em cada ponto pode ser expressado como uma combinação linear de vetores da base do espaço tangente

$$\nabla_{\partial_i x} \partial_j x = \Gamma_{ij}^k \partial_k x.$$

As m^3 funções suaves Γ_{ij}^k são chamadas os símbolos de Christoffel e eles determinam unicamente a conexão afim. De fato, se

$$X = u_i \partial_i x, \quad Y = v_j \partial_j x,$$

são dois campos de vetores suaves, então

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{(u_i \partial_i x)} (v_j \partial_j x) = u_i \nabla_{\partial_i x} (v_j \partial_j x) \\ &= u_i v_j \nabla_{\partial_i x} \partial_j x + u_i \partial_{x_i} v_j \partial_j x \\ &= u_i v_j (\Gamma_{ij}^k \partial_k x) \partial_j x + u_i \partial_{x_i} v_k \partial_k x \\ &= (u_i v_j \Gamma_{ij}^k + u_i \partial_{x_i} v_k) \partial_k x. \end{aligned}$$

Este cálculo mostra que $\nabla_X Y$ em p depende só do vetor tangente X_p em p e do campo de vetores Y .

Isto mostra também que toda variedade suave admite pelo menos uma conexão afim. De fato, dada qualquer carta, podemos escolher m^3 funções suaves Γ_{ij}^k como deseja, e logo definir a conexão afim como na última igualdade do cálculo anterior. Depois, colamos essas conexões afins locais usando partições da unidade.

Lembrando a definição 1.1.3 da derivada covariante e o campo dos vetores paralelos ao longo de uma curva, temos a seguinte definição.

7.2.4 Definição. *Sejam $c : I \rightarrow M$ uma curva em M e $c(t_0)$ um ponto na curva. A aplicação $P_{c(t), c(t_0)} : T_{c(t_0)} M \rightarrow T_{c(t)} M$ definida por $P_{c(t), c(t_0)} V_{c(t_0)} = V(t)$, onde $V_{c(t_0)} \in T_{c(t_0)} M$, e $V(t)$ é a única extensão de $V_{c(t_0)}$ para um campo de vetores paralelo ao longo de c , é chamada o transporte paralelo de $c(t_0)$ a $c(t)$.*

7.2.5 Proposição (Transporte Paralelo). *O transporte paralelo $P_{c(t),c(t_0)} : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ é um isomorfismo linear. Se $V(t)$ é um campo de vetores ao longo da curva $c(t)$,*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{c(t_0),c(t)}V(t) - V_{c(t_0)}}{t - t_0} = \frac{D_c V}{dt}.$$

Tudo o que foi introduzido para as conexões afins é independente da estrutura Riemanniana. O transporte paralelo, em geral, não preserva ângulos, como no caso das superfícies. Para isto precisamos considerar conexões afins inteiramente relacionados com a métrica Riemanniana.

7.2.6 Definição. *Sejam ∇ uma conexão afim e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana numa variedade Riemanniana M . Dizemos que a conexão afim é compatível com a métrica se para toda curva $c : I \rightarrow M$ e todo par de campo de vetores paralelos V, W ao longo de c , o produto interno $\langle V, W \rangle$ é constante.*

Isto é equivalente a dizer que todos os vetores de um campo de vetores paralelos têm o mesmo comprimento e o ângulo entre qualquer par de campos de vetores paralelos é constante.

7.2.7 Proposição. *Uma conexão afim ∇ é compatível à métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se, para qualquer curva $c : I \rightarrow M$, e para qualquer par de campos de vetores V, W ao longo de c , temos que*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

.

7.2.8 Corolário. *Uma conexão afim ∇ é compatível à métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todos campos de vetores suaves X, Y, Z em M .

7.2.9 Definição. *Uma conexão afim ∇ numa variedade suave M é chamada simétrica se*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos campos de vetores suaves X, Y, Z em M .

No caso em que $X = \partial_i x$ e $Y = \partial_j x$, relativo a algum sistema de coordenadas local (x_i) , temos $\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k x$, enquanto $[X, Y] = 0$. Portanto, ∇ é simétrica se, e somente se $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, para todos i, j e k .

Considere uma superfície parametrizada em M , i.e., uma aplicação suave $s : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ de um conjunto aberto U em $\mathbb{R}^2$ para M . Um campo de vetores suave ao

longo de s é uma função suave que assina todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor tangente $V_{s(x,y)} \in T_{s(x,y)}M$. Os campos de vetores ∂_x e ∂_y em $\mathbb{R}^2$ são levados pela diferencial ds de s em dois campos de vetores suaves $\partial s / \partial x = ds(\partial_x)$ e $\partial s / \partial y = ds(\partial_y)$ na superfície. Dado um ponto $(x_0, y_0) \in U$, considere duas curvas na superfície, $x \rightarrow s(x, y_0)$, definida para x dentro de algum intervalo em torno de x_0 , e $y \rightarrow s(x_0, y)$, definida para y dentro de algum intervalo em torno de y_0 . Para qualquer campo de vetores suave V ao longo da superfície, definimos $\frac{DV}{dx}$ como a derivada covariante de V ao longo da curva $x \rightarrow s(x, y_0)$. A derivada covariante $\frac{DV}{dy}$ é definido similarmente.

7.2.10 Proposição. *A conexão afim ∇ é simétrica se, e somente se, para qualquer superfície parametrizada s em M , temos*

$$\frac{D}{dx} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{D}{dy} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

7.2.11 Teorema (Teorema Fundamental da geometria Riemanniana). *Dada uma variedade Riemanniana, existe uma única conexão afim que é simétrica e compatível à métrica Riemanniana. Esta conexão afim é chamada a conexão Riemanniana da variedade (também chamada a conexão Levi-Civita).*

Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k correspondentes à conexão Riemanniana, com respeito a um sistemas de coordenadas locais (x_i) , são

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk}$$

onde (g^{kl}) é a matriz inversa de (g_{kl}) representando a métrica. Esta fórmula também mostra que a conexão Riemanniana é unicamente determinada pela métrica.

Agora vamos a definir curvatura de uma variedade Riemanniana e listar suas principais propriedades. A curvatura é uma medição da dependência do caminho do transporte paralelo. Considere ∇ a conexão Riemanniana.

7.2.12 Definição. *A curvatura Riemanniana é uma aplicação R tal que dado X, Y e Z campos de vetores, temos outro campo de vetores $R(X, Y)Z$ satisfazendo*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Pela definição da curvatura, R é suave. Em verdade R é chamado também o *tensor curvatura* já que é C^∞ -linear em suas variáveis e seu valor no ponto $p \in M$ só depende dos vetores X_p, Y_p e Z_p .

7.2.13 Proposição. *A curvatura Riemanniana R satisfaz as seguintes propriedades, dados $f_1, f_2 \in C^\infty$ e $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2, Z, Z_1, Z_2$ campos de vetores, temos:*

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
2. $R(f_1X_1 + f_2X_2, Y)Z = f_1R(X_1, Y)Z + f_2R(X_2, Y)Z$,
3. $R(X, f_1Y_1 + f_2Y_2)Z = f_1R(X, Y_1)Z + f_2R(X, Y_2)Z$,
4. $R(X, Y)(f_1Z_1 + f_2Z_2) = f_1R(X, Y)Z_1 + f_2R(X, Y)Z_2$.

Expressaremos a curvatura R em coordenadas. Seja (x_i) um sistema de coordenadas de p em M . Dados X, Y e Z campos vetoriais, expressamos em coordenadas: $X = u^i \partial_i$, $Y = v^j \partial_j$ e $Z = x^k \partial_k$. Assim, temos que

$$R(X, Y)Z = u^i v^j w^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k.$$

Se $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$, temos que

$$R(X, Y)Z = u^i v^j w^k R_{ijk}^l \partial_l,$$

e observe que da equação acima, R só depende dos vetores X_p, Y_p e Z_p . Por outro lado, usando o fato que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, podemos expressar R_{ijk}^l em termos dos símbolos de Christoffel,

$$R_{ijk}^l = \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^l - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^l + \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l.$$

Fazendo

$$\langle R(\partial_i, \partial_j) \partial_k, \partial_l \rangle = R_{ijkl},$$

podemos deduzir que $R_{ijkl} = R_{ijk}^h g_{hl}$. Mais geralmente, podemos definir a função

$$R(X, Y, Z, V) = \langle R(X, Y)Z, V \rangle,$$

onde X, Y, Z e V são campos de vetores. É claro que essa função é um tensor e que em coordenadas expressa-se como

$$R(X, Y, Z, V) = u^i v^j w^k s^l R_{ijkl},$$

onde $V = s^l \partial_l$. Este tensor e seus coeficientes R_{ijkl} satisfazem algumas relações de simetrias.

7.2.14 Proposição. *As seguintes identidades são satisfeitas:*

1. $\langle R(X, Y)Z, V \rangle = -\langle R(Y, X)Z, V \rangle$ ou $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.
2. $\langle R(X, Y)Z, V \rangle = -\langle R(X, Y)V, Z \rangle$ ou $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.
3. $\langle R(X, Y)Z, V \rangle = \langle R(V, Z)X, Y \rangle$ ou $R_{ijkl} = R_{klij}$.

4. *Bianchi*: $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ ou $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

Para um campo de vetores ao longo de uma superfície mergulhada numa variedade Riemanniana, o tensor de curvatura mede a não comutatividade da derivada covariante de segunda ordem, calculada em duas direções independentes.

7.2.15 Proposição. *Sejam U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$, $(t, s) \in U \rightarrow f(t, s) \in M$ uma superfície mergulhada em M e V um campo de vetores ao longo da superfície. Então*

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) V.$$

Sejam $p \in M$, $v, w \in T_p M$ linearmente independentes, e π o plano gerado por v e w . A área determinado por v e w é dada por

$$A(v, w) = \sqrt{|v|^2 |w|^2 - \langle v, w \rangle^2}.$$

7.2.16 Definição. *A curvatura seccional de M em p , determinada por π , é*

$$K(\pi) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{A(v, w)}.$$

A definição de curvatura seccional depende do plano π mas não depende dos vetores v e w que geram o plano. Se $m = 2$, existe só uma curvatura seccional em todos os pontos, que é a curvatura Gaussiana. Se $m > 2$, a curvatura seccional de p ao longo de π é a curvatura Gaussiana da superfície formada por todas as pequenas geodésicas saindo de p com velocidade em π .

7.2.17 Proposição. *Sejam $p \in M$, π um plano em $T_p M$, e U uma vizinhança de 0 em $T_p M$ onde $\exp_p$ é bem definida. A curvatura seccional $K(\pi)$ é igual à curvatura Gaussiana K_p da superfície $S_\pi = \exp_p(\pi \cap U)$.*

A curvatura R determina todas as curvaturas seccionais K , e a recíproca também é verdade, i.e., a curvatura seccional K determina unicamente a curvatura R .

7.2.18 Proposição. *Assuma que R_1 e R_2 são dois tensores em M satisfazendo as quatro propriedades de simetrias da curvatura, i.e., tensores de curvatura. Se $\langle R_1(X, Y)Y, X \rangle = \langle R_2(X, Y)Y, X \rangle$ para todo campos de vetores X e Y em M , então $R_1 = R_2$.*

Obtemos imediatamente:

7.2.19 Corolário. *Sejam R_1 e R_2 dois tensores de curvatura em M . Assuma que para todo $p \in M$ e todo plano π em $T_p M$, temos que $K_1(\pi) = K_2(\pi)$. Então $R_1 = R_2$.*

Capítulo 8

Apêndice 2: Sequências Periódicas e Hiperbolicidade

Na prova do Teorema 6.2.3, usamos um resultado muito interessante e importante que obtém hiperbolicidade de um certo conjunto a partir da presença robusta de hiperbolicidade de órbitas periódicas. Este teorema foi mostrado por Mañé no importante trabalho [17], onde ele mostra a conjectura da estabilidade.

O teorema de Mañé foi provado primeiramente para difeomorfismos. Ele tem duas partes, a primeira é o mesmo resultado porém no contexto linear e a segunda é o Lema de Franks.

Vamos fazer alguns comentários sobre a primeira parte. Note que uma órbita periódica com período n de um difeomorfismo dá origem a n aplicações lineares $A_1, \dots, A_n$, a saber a derivada do difeomorfismo ao longo da órbita. Como o ponto é periódico podemos pensar nessas matrizes como uma sequência periódica de matrizes com período n .

A definição de hiperbolicidade de uma órbita periódica se traduz como a hiperbolicidade da matriz gerada pelo produto dos A_i 's. Mais ainda, se temos um outro difeomorfismo próximo então a órbita periódica tem continuação para este difeomorfismo e sua derivada em cada ponto da órbita é uma aplicação linear próxima da original. Ou seja, para um difeomorfismo próximo temos uma outra sequência periódica de aplicações lineares $B_1, \dots, B_n$. Note que o período é o mesmo.

Assim, se todas órbitas periódicas de um difeomorfismo f são hiperbólicas, podemos associar ao difeomorfismo uma família, indexada pelo conjunto de órbitas periódicas, de sequências periódicas hiperbólicas de matrizes. Mais ainda, *se todas as órbitas periódicas persistem* para um difeomorfismo g próximo, então associado a g temos outra família, indexada pelo mesmo conjunto de órbitas periódicas, de sequências periódicas de matrizes dadas pelas continuações das órbitas periódicas como visto acima.

Daí, é natural definir o conceito de uma família de sequências periódicas estavelmente hiperbólicas. Isto é, definindo uma métrica natural no conjunto de tais famílias, vamos

exigir que qualquer família próxima nesta métrica seja hiperbólica (como no exemplo do parágrafo anterior).

Por outro lado, mesmo que em uma família todas as sequências periódicas sejam hiperbólicas, isto não quer dizer que as constantes de hiperbolicidade são as mesmas para duas tais sequências distintas. Quando isto ocorrer, diremos que a família é uniformemente hiperbólica.

A versão matricial do teorema de Mañé (ver Contreras [8]) diz que se uma família de sequências periódicas estavelmente hiperbólica tem várias propriedades que famílias uniformemente hiperbólicas possuem, por exemplo dominação. Porém, se supormos além disso que as matrizes dessas famílias são formadas por matrizes simpléticas (que é o que ocorre no caso geodésico), então de fato podemos garantir que a família será uniformemente hiperbólica.

Sobre a segunda parte, o Lema de Franks essencialmente permite reduzir o problema não-linear para a sua versão linear. A versão mais simples do lema diz o seguinte: se um ponto fixo p de um difeomorfismo f tem derivada A , e B é uma matriz muito próxima de A , então existe um difeomorfismo g próximo de f que *realiza* B como derivada, isto é, p ainda é um ponto fixo de g e sua derivada é B .

Outra maneira de entender este enunciado é a seguinte: considere uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f e a seguinte aplicação $g \mapsto Dg(p)$. A imagem desta aplicação contém a matriz A (pois é imagem de f). Então o lema de Franks pode ser entendido assim: A está no interior da imagem deste mapa.

No caso em que estamos lidando as perturbações são feitas na métrica e não no fluxo. Ou seja, o domínio da aplicação semelhante ao do parágrafo anterior é o espaço de métricas e não o espaço de fluxos. Isto torna a prova do lema de Franks extremamente mais intrincada. Este problema foi resolvido por Contreras em [8].

Finalmente, o conjunto $\mathcal{E}^2 M$ se encaixa neste contexto e a hiperbolicidade deste vem como acima. De fato, se não podemos aplicar a versão simplética do teorema de Mañé então existe uma família próxima com uma sequência periódica não hiperbólica. Porém, pelo Lema de Franks, esta sequência estaria associada a uma órbita periódica de um fluxo geodésico de uma métrica próxima, contradição com a definição de $\mathcal{E}^2(M)$.

No que segue, definiremos e enunciaremos estes conceitos e resultados de maneira mais precisa.

8.1 Sequências Periódicas

Lembramos que uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *hiperbólica* se não tem autovalores de módulo 1, ou seja, se existe uma decomposição $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ e uma constante $M \in \mathbb{N}$

tais que $T(E^s) = E^s$, $T(E^u) = E^u$ e

$$\|T^M|_{E^s}\| < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \|(T|_{E^u})^{-M}\| < \frac{1}{2}.$$

Neste caso, os subespaços E^s e E^u são chamados *subespaço estável* e *subespaço instável* de T , respectivamente.

Dizemos que uma sequência $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow Sp(n)$ é *periódica* se existe $m \geq 1$ tal que $\xi_{i+m} = \xi_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Ela é *hiperbólica* se a aplicação linear $\prod_{i=1}^m \xi_i$ é hiperbólica.

Neste caso, os subespaços estáveis e instáveis de $\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}$ são denotados por $E_j^s(\xi)$ e $E_j^u(\xi)$, respectivamente.

Uma família $\xi = \{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de sequências em $Sp(n)$ é *limitada* se existe $\mathcal{Q} > 0$ tal que $\|\xi_i^\alpha\| < \mathcal{Q}$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Dadas duas famílias de sequências periódicas em $Sp(n)$, $\xi = \{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\eta = \{\eta^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, dizemos que elas são *periodicamente equivalentes* se têm os mesmos conjuntos de índices $\mathcal{A}$ e para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ os períodos de ξ^α e η^α coincidem.

Dadas duas famílias periodicamente equivalentes de sequências periódicas em $Sp(n)$, $\xi = \{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\eta = \{\eta^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, definimos a distância entre elas por:

$$d(\xi, \eta) = \sup\{\|\xi_n^\alpha - \eta_n^\alpha\| : \alpha \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dizemos que uma família ξ é *hiperbólica* se para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, a sequência periódica ξ^α é hiperbólica. Dizemos que uma família periódica hiperbólica ξ é *estavelmente hiperbólica* se existe $\varepsilon > 0$ tal que qualquer família periodicamente equivalente η que satisfaz $d(\xi, \eta) < \varepsilon$ é também hiperbólica.

Finalmente, dizemos que uma família de sequências periódicas é *uniformemente hiperbólica* se existem $M \in \mathbb{Z}$ e subespaços $E_i^s(\xi^\alpha)$, $E_i^u(\xi^\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ tais que

$$\xi_j^\alpha(E_j^\tau(\xi^\alpha)) = E_{j+1}^\tau(\xi^\alpha) \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{Z} \quad \tau \in \{s, u\}$$

e

$$\left\| \prod_{i=0}^M \xi_{i+j}^\alpha|_{E_j^s(\xi^\alpha)} \right\| < \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \left\| \left(\prod_{i=0}^M \xi_{i+j}^\alpha|_{E_j^u(\xi^\alpha)} \right)^{-1} \right\| < \frac{1}{2},$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Equivalentemente, existem $K > 0$, $0 < \lambda < 1$ e subespaços invariantes $E_i^s(\xi^\alpha)$, $E_i^u(\xi^\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\left\| \prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}^\alpha|_{E_j^s(\xi^\alpha)} \right\| < K\lambda^m \quad \text{e} \quad \left\| \left(\prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}^\alpha|_{E_j^u(\xi^\alpha)} \right)^{-1} \right\| < K\lambda^m,$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Note neste caso que a seqüência ξ^α é hiperbólica e os subespaços $E_i^s(\xi^\alpha)$, $E_i^u(\xi^\alpha)$ necessariamente coincidem com os subespaços estável e instável da aplicação $\prod_{j=0}^{m-1} \xi_{i+j}^\alpha$.

Com as notações anteriores, Contreras em [8] obteve o seguinte resultado.

8.1.1 Teorema. *Se $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é uma família estavelmente hiperbólica de seqüências periódicas de aplicações lineares simpléticas limitadas, então ela é uniformemente hiperbólica.*

8.2 O Lema de Franks para Fluxos Geodésicos

Dada $g \in \mathcal{G}^2(M)$, definimos a seguinte aplicação

$$K^g : SM^g \longrightarrow \mathcal{S}(n)/\mathcal{O}(n)$$

por $K^g(\theta) = [K]$, onde

$$K_{ij} = \langle R^g(\theta, e_i)\theta, e_j \rangle_{\pi(\theta)},$$

$\mathcal{S}(n)$ e $\mathcal{O}(n)$ são as variedades das matrizes simétricas e ortogonais, respectivamente, $\{\theta, e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_{\pi(\theta)}M$ e R^g é o tensor curvatura de g .

Consideremos $h : \mathcal{S}(n)/\mathcal{O}(n) \longrightarrow [0, +\infty[$ a função definida por

$$h([K]) := \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de K .

Finalmente, considere $H : \mathcal{G}^2(M) \longrightarrow [0, +\infty[$ definido por

$$H(g) := \min_{\theta \in SM^g} \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} h(K^g(\phi_t^g(\theta))).$$

O seguinte resultado foi mostrado por Contreras em [8] e é fundamental na prova de um lema do tipo Franks para fluxos geodésicos.

8.2.1 Teorema. *A função $H : \mathcal{G}^2(M) \rightarrow [0, +\infty[$ é contínua, o conjunto*

$$\mathcal{V} := \{g \in \mathcal{G}^2(M) : H(g) > 0\}$$

é aberto em $\mathcal{G}^2(M)$ e $\mathcal{V} \cap \mathcal{G}^\infty(M)$ é denso em $\mathcal{G}^\infty(M)$.

Seja $\gamma = \{\phi_t^g(\theta) : t \in [0, 1]\}$ um pedaço de órbita com comprimento 1 do fluxo geodésico ϕ_t^g da métrica $g \in \mathcal{G}^\infty(M)$. Sejam Σ_0 e Σ_t seções transversais de ϕ_t^g em $\theta \in SM^g$ e $\phi_t^g(\theta)$

respectivamente. Denotemos por $\mathcal{P}^g(\Sigma_0, \Sigma_t, \gamma)$ a aplicação de Poincaré de Σ_0 para Σ_t . Podemos escolher Σ_0 e Σ_t tal que a aplicação linear de Poincaré

$$P^g(\gamma)(t) := D\mathcal{P}^g(\Sigma_0, \Sigma_t, \gamma)(\theta)$$

é uma aplicação simplética de $\mathcal{N} := N(\theta) \oplus N(\theta)$ para $\mathcal{N}_t := N(\phi_t^g(\theta)) \oplus N(\phi_t^g(\theta))$ e

$$P^g(\gamma)(t)(J(0), \dot{J}(0)) = (J(t), \dot{J}(t)),$$

onde J é um campo de Jacobi ortogonal ao longo da geodésica $\pi \circ \gamma$ e $\dot{J}$ denota a derivada covariante ao longo da geodésica.

Fixe um conjunto de coordenadas de Fermi ao longo de $\pi \circ \gamma$. Então podemos identificar o conjunto de todas as aplicações lineares simpléticas de $\mathcal{N}_0$ para $\mathcal{N}_t$ com o grupo simplético $Sp(n)$.

Suponha que a geodésica $\pi \circ \gamma$ não tem auto-interseções em $[0, 1]$, e seja W uma vizinhança tubular desta. Denotamos por $\mathcal{G}^\infty(\gamma, g, W)$ o conjunto de métricas $\bar{g} \in \mathcal{G}^\infty(M)$, onde γ é uma pedaço de órbita de longitude 1, $\bar{g} = g$ em $\gamma([0, 1])$ e tal que o suporte de $\bar{g} - g$ está em W .

Dado qualquer conjunto finito de segmentos geodésicos sem auto-interseções $\mathcal{F} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$, definidos em $[0, 1]$, com as seguintes propriedades:

1. Os pontos extremos de η_i não estão contidos em W ;
2. O segmento $\pi \circ \gamma|_{[0, 1]}$ intercepta cada η_i transversalmente;

denote por $\mathcal{G}^\infty(g, g, W, \mathcal{F})$ o conjunto de métricas $\bar{g} \in \mathcal{G}^\infty(\gamma, g, W)$ tal que $\bar{g} = g$ em uma vizinhança pequena de $W \cap \bigcup_{i=1}^m \eta_i([0, 1])$.

Considere a aplicação $S : \mathcal{G}^\infty(\gamma, g, W) \rightarrow Sp(n)$ definida por $S(\bar{g}) = P_{\bar{g}}(\gamma)(1)$. O seguinte resultado, obtido por Contreras em [8], é o análogo para fluxo geodésico da parte infinitesimal do lema de Franks. Usamos $\mathcal{V}$ obtido no Teorema 8.2.1.

8.2.2 Teorema. *Seja $g_0 \in \mathcal{V} \cap \mathcal{G}^r(M)$, $4 \leq r \leq \infty$. Dado $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}^2(M)$ uma vizinhança de g_0 , existe $\delta = \delta(g_0, \mathcal{U}) > 0$ tal que dados $g \in \mathcal{U}$, γ , W e $\mathcal{F}$ como acima, a imagem de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{G}^r(\gamma, g, W, \mathcal{F})$ sob a aplicação S contém a bola de raio δ e centro em $S(g_0)$.*

8.3 Hiperbolicidade de $\mathcal{E}^2 M$

Dados um subconjunto $A \subset SM$ e $g \in \mathcal{G}^\infty(M)$, seja $\mathcal{P}(g, A)$ o conjunto das órbitas periódicas γ para ϕ^g tais que $\gamma(R) \subset A$. Defina

$$Per(g, A) := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}(g, A)} \gamma(\mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{H} := \{g \in \mathcal{G}^\infty(M) : \gamma \text{ é hiperbólico, para todo } \gamma \in \mathcal{P}(g, A)\},$$

e

$$\mathfrak{F}^2(A) := \text{int}_{C^2} \mathfrak{H}(A).$$

Sejam $g \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{F}^2(A)$ e l o raio de injetividade de g . Para cada $\alpha \in \mathcal{A} := \mathcal{P}(g, A)$ seja $T = T(\alpha)$ o período de α , e escolha $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T(\alpha)$ tais que $t_{i+1} - t_i \in [\frac{1}{4}l, \frac{1}{2}l]$. Então $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é injetiva. Seja

$$\mathcal{N}(i, \alpha) := \{v \in T_{\alpha(i)}SM : \langle v, \dot{\alpha}(t_i) \rangle_g = 0\}. \quad (8.1)$$

8.3.1 Teorema. *A família $\xi = \{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é estavelmente hiperbólica.*

Demonstração. Se ξ não é estavelmente hiperbólica, então existe uma família periodicamente equivalente η com $d(\eta, \xi)$ arbitrariamente pequena a qual não é hiperbólica. Modificando η , se necessário, podemos assumir que existe uma única sequência não hiperbólica em η , denotada por η^{α_0} .

Já que $g \in \mathcal{V}$ e $d(\xi_{\alpha_0}, \eta_{\alpha_0})$ é arbitrariamente pequena, pelo Teorema 8.2.2, existe uma métrica $g_1 \in \mathcal{G}^\infty(M)$, a qual é C^∞ , tal que g_1 está C^2 arbitrariamente próxima de g (e portanto $g_1 \in \mathfrak{H}(A)$). Também, α_0 ainda é uma órbita periódica para g_1 . De fato, $g_1 = g$ em $\alpha(\mathbb{R})$ (portanto o mesmo subespaço $\mathcal{N}(i, a)$ satisfaz (8.1) para g_1). Finalmente, temos também que

$$\eta_i^{\alpha_0} = D\phi_{t_{i+1}-t_i}^{g_1} : \mathcal{N}(i, \alpha_0) \longrightarrow \mathcal{N}(i+1, \alpha_0)$$

para todo $0 \leq i \leq m(\lambda_0)$. Como η^{α_0} é não hiperbólica e $\alpha_0(\mathbb{R}) \subset A$, isso contradiz o fato que $g_1 \in \mathfrak{H}(A)$.

□

Bibliografia

- [1] R. Abraham, Transversality in manifolds of mapping, Bull. Am. Math. Soc. 69 (1963), 470-474.
- [2] R. Abraham, J. Robbin, Transversal mapping and flows, Benjamin, New York 1967.
- [3] D. Anosov, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. Trudy Mat. Inst. Steklova 90 (1967) pp. 235.
- [4] D. Anosov, On generic properties of closed geodesic, Math. USSR Izv. 21 (1983), 1-29.
- [5] N. Aoki, K. Hiraide, Topological Theory of Dynamical Systems, Volume 52, Recent Advances, North-Holland Mathematical Library (1994) pp. 416.
- [6] K. Burns, M. Gidea, Differential Geometry and Topology with a view to Dynamical Systems, Studies in advanced mathematics (2005) pp. 389.
- [7] G. Contreras-Barandiarán, Partially hyperbolic geodesic flows are Anosov, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Ser. I 334 (2002) 585-590.
- [8] G. Contreras, Geodesic flows with positive topological entropy, twist maps and hyperbolicity, Ann. Math. Vol. 172 (2010) 761-808.
- [9] G. Contreras, R. Iturriaga, Convex Hamiltonians without conjugate points, Ergodic Theory Dynamic Systems 19 (1999) 901-952.
- [10] G. Contreras-Barandiarán, G.P. Paternain, Genericity of geodesic flows with positive topological entropy on S^2 , J. Differential Geom. 61 (2002), 1-49.
- [11] M. Do Carmo, Geometria Riemmaniana, IMPA, Projeto Euclides, 1979. pp. 332.
- [12] H. Hofer, E. Zehnder, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser (1994) pp. 341.
- [13] W. Klingenberg, Lectures on closed geodesic. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 230, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978 pp. 227.

- [14] W. Klingenberg, F. Takens, Generic properties of geodesic flows. *Mat. Ann.* 197 (1972) 323-334.
- [15] I. Kupka. Contribution à la theorie des champs génériques. (French) *Contributions to Differential Equations 2* (1963) pp. 457-484
- [16] R. Mañe, Quasi-Anosov diffeomorphisms. *Lecture Notes in Math.* Vol. 468 pp.27-29. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977.
- [17] R. Mañe, A proof of the C^1 stability conjecture. *Publications Mathématiques de l'IHES* (1987) 66,721-724.
- [18] J. Moser, Proof of a generalised form of a fixed point theorem due to G. D. Birkhoff. *Lectures notes in Math.* Vol. 597 pp. 464-549. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977.
- [19] G.P. Paternain, *Geodesic Flows*, *Progress in Mathematics*, 180, Birkhäuser, boston, 1999.
- [20] M. Paternain, *Expansive flows and the fundamental group*. Tese de Doutorado. IMPA (1990).
- [21] M. Paternain, *Expansive geodesic flows on surface*, *Ergod. Th. Dynam.Sys.* 13 (1993) 153-165.
- [22] R.O. Ruggiero, *Persistently expansive geodesic flows*, *Commun. Math. Phys.* 140(1) (1991) 203-215.
- [23] R.O. Ruggiero, *Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points*. *Soc. Bras. Mat.* Vol. 12 (2007) pp. 181.
- [24] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, translation of *Math. Mon.* Vol. 149, Am. Math. Soc. (1996) pp. 358.
- [25] S. Smale, *Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms*. *Topologia Differenziale. Centro Internaz. Mat. Estivo*, 1 (1962), Lezione pp. 4-31 Edizioni Cremonese, Rome.
- [26] S. Smale, *The Ω -stability theorem*. *Proc. Symp. Pure Math.* 14 (1970). Am. Math. Soc., pp. 289-298.