



Sobre o tipo do semigrupo associado a um sistema viscoelástico abstrato

Juan Bladimiro Rodriguez Otazú

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Hugo D. Fernández Sare

Rio de Janeiro
Novembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

R696s Rodriguez Otazú, Juan Bladimiro.

Sobre o tipo do semigrupo associado a um sistema viscoelástico abstrato / Juan Bladimiro Rodriguez Otazú. - Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2011.

viii, 90 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências: f. 89-90

1. Análise funcional. 2. Espaços de Sobolev - Tese. I. Fernández Sare, Hugo Danilo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDD 515.782

Sobre o tipo do semigrupo associado a um sistema viscoelástico abstrato

Juan Bladimiro Rodriguez Otazú

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre.
Aprovada por:

Prof. Hugo Danilo Fernández Sare - IM/UFRJ
(Presidente)

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala - LNCC/MCT & IM/UFRJ

Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. Higidio Portillo Oquendo - UFPR

Prof. Pedro Gamboa Romero - UFRJ
(Suplente)

Rio de Janeiro
29 de novembro 2011

À minha mãe
Candelaria Otazú Canaza.
Às minhas irmãs
Guadalupe e Yanet.

Agradecimientos

Agradeço a Deus por cuidar da minha família e ter me dado forças para terminar este trabalho.

Ao Professor Hugo D. Fernández Sare pela orientação, pela paciência, pela confiança, pelos conselhos e pela forma como conduziu este trabalho, fazendo com que o mesmo fosse concluído com sucesso.

À minha mãe Candelaria Otazú Canaza e às minhas irmãs Guadalupe e Yanet, pelo apoio constante que sempre me deram, sem o qual não seria possível concluir meus estudos no Curso de Mestrado.

Aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica: professores da Universidad Nacional del Altiplano e da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Gostaria de agradecer em especial ao professor Ricardo Moreno Briones, por ter me motivado a fazer o Mestrado no Brasil e a sua esposa Nancy pelo carinho que sempre teve comigo.

A todos os amigos e colegas que encontrei nesta instituição, pelos momentos de alegria, pelas informações que trocamos, pelas conversas e pelo convívio agradável.

Finalmente agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Sobre o tipo do semigrupo associado a um sistema viscoelástico abstrato

Juan Bladimiro Rodriguez Otazú

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Neste trabalho, mostramos existência, unicidade e obtemos uma estimativa para o tipo de semigrupo associado com uma equação linear viscoelástica abstrata quando o núcleo da memória decai exponencialmente. Em particular, quando o núcleo é do tipo Maxwell, provamos que a propriedade de crescimento definida pelo espectro é válida. Além disso, o tipo do semigrupo é explicitamente dado por uma fórmula que depende dos parâmetros do núcleo e do menor valor espectral do correspondente operador elástico. Finalmente, apresentamos algumas aplicações dos resultados.

Palavras-chave: Tipo de semigrupo; Sistema viscoelástico abstrato; Semigrupo C_0 .

Rio de Janeiro
Novembro de 2011

Abstract

On the type of semigroup associated with the abstract viscoelastic system

Juan Bladimiro Rodriguez Otazú

Orientador: Hugo Danilo Fernández Sare

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

In this work we prove existence, uniqueness and obtain an estimate for the type of semigroup associated with the abstract equation of linear viscoelasticity when the memory kernel decays exponentially. In particular, when the kernel is of Maxwell type, we prove that the spectrum determined growth property holds. Moreover, the type of the semigroup is explicitly expressed by a formula which depends on the parameters of the kernel and the minimum spectrum point of the corresponding elastic operator. Finally we give some direct applications of the results.

Key-words: Type of semigroup; Abstract viscoelastic system; C_0 -semigroup.

Rio de Janeiro
Novembro de 2011

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Análise Funcional	5
1.2 Espaços de Sobolev	10
1.3 Operadores A^α	13
1.4 Semigrupos	14
1.5 EDP de Primeira Ordem	20
1.6 Polinômios de terceiro grau	22
2 O Sistema Viscoelástico Linear com Memória	24
2.1 Introdução	24
2.2 Existência e Unicidade do Sistema	26
2.3 Análise espectral e estimativa de $\omega_0(\mathcal{A})$	38
2.4 O valor exato de $\omega_0(\mathcal{A})$ para o núcleo de tipo Maxwell	58
2.4.1 Preliminares	58
2.4.2 O valor exato de $\omega_0(\mathcal{A})$	64
3 Aplicações	77
3.1 Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{1/2}$	79
3.2 Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/4}$	81

3.3	Caso $-\frac{d^2}{dx^2}$	82
3.4	Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/2}$	83
3.5	Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^2$	85
3.6	Comentários Finais	86
	Referências	88

Introdução

Seja H um espaço de Hilbert (real ou complexo). Em H consideremos o operador diferencial

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H, \quad (0.1)$$

sendo A um operador linear, não limitado, auto-adjunto e positivo definido.

Baseados nestas notações, neste trabalho estudaremos a equação integro-diferencial abstrata, definida sobre H , e dada pela seguinte expressão

$$u_{tt}(t) + A \left[g(0)u(t) + \int_0^\infty g'(s)u(t-s)ds \right] = 0, \quad (0.2)$$

onde a função $g(s)$ é chamada de *núcleo de memória* e verifica as seguintes hipóteses

$$(g1) \quad g \in C^2(0, \infty) \cap C[0, \infty), \quad g' \in L^1(0, \infty);$$

$$(g2) \quad g(s) > 0, \quad g'(s) < 0, \quad g''(s) > 0 \quad \text{para todo } s > 0;$$

$$(g3) \quad g(\infty) > 0;$$

$$(g4) \quad g''(s) + kg'(s) \geq 0 \quad \text{para algum } k > 0 \quad \text{e todo } s > 0.$$

Nosso interesse está dirigido, especificamente, ao estudo do comportamento assintótico das soluções do sistema (0.2). Nesta direção diversos autores estudaram o sistema (0.2) sob as hipóteses anteriores e mostraram que a energia deste sistema é exponencialmente estável, isto é, existem constantes $\mu > 0$ e $M_\mu > 0$, tais que

$$E(t) \leq M_\mu e^{-\mu t} E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (0.3)$$

Cabe mencionar também que existem diversos trabalhos onde os autores consideram hipóteses mais fracas que as estabelecidas em (g1) – (g4), nos quais são obtidos outras taxas

de decaimento para a energia do sistema estudado. Entre eles podemos mencionar, por exemplo, resultados obtidos em [14, 15] onde os autores consideram núcleos com taxas de decaimento polinomial e onde a energia decai com a mesma taxa polinomial que o núcleo. Para obter todos estes resultados (tanto o decaimento exponencial como o polinomial) os autores usam técnicas multiplicativas e estimativas a priori no espaço de soluções.

O objetivo deste trabalho é estudar o artigo de Liu K. e Liu Z. dado em [9], o qual estabelece um resultado mais forte que (0.3). De fato, com a ajuda da Teoria de Semigrupos Lineares estabeleceremos que o modelo (0.2) verifica a *Propriedade de Crescimento Definida pelo Espectro (PCDE)*¹, do qual poderemos deduzir a estimativa (0.3) sem necessidade de usar técnicas multiplicativas ou estimativas a priori para obter a estabilidade exponencial e estabelecer um valor ótimo para a constante $\mu > 0$. Para sermos mais claros, a seguir daremos uma breve descrição do que será feito no decorrer do trabalho.

A análise desenvolvida em [9] está baseada em aplicar a Teoria de Semigrupos ao modelo (0.2), isto é, re-escreveremos este modelo na forma do seguinte problema de evolução abstrato

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0.\end{aligned}$$

definido em um espaço de Hilbert X de tal forma que, a norma no espaço X e a energia $E(t)$ do modelo, estejam associados pela seguinte relação

$$E(t) = \frac{1}{2} \|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_X^2, \quad U_0 \in X,$$

onde $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ será o semigrupo gerado pelo operador \mathcal{A} .

Nestas condições sabemos que, a taxa de decaimento da energia $\mu > 0$ dada em (0.3), está associada ao *Tipo do semigrupo* $e^{t\mathcal{A}}$, definido por

$$\omega_0(\mathcal{A}) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{t\mathcal{A}}\|}{t}.$$

Especificamente temos que, a estimativa (0.3) é verdadeira se e somente se $\omega_0(\mathcal{A}) < 0$ e, além disso, temos que

$$\sup\{\mu > 0; (0.3) \text{ é verdadeiro}\} = -2\omega_0(\mathcal{A}). \quad (0.4)$$

¹Spectrum Determined Growth Property.

Por outro lado, seja a *Cota Espectral* do operador \mathcal{A} definida por

$$\sigma_0(\mathcal{A}) = \sup\{Re \lambda ; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

onde $\sigma(\mathcal{A})$ denota o espectro do operador \mathcal{A} . Da teoria de semigrupos sabemos que um semigrupo verifica a Propriedade de Crescimento Definido pelo Espectro (PCDE), quando verifica a igualdade

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}). \quad (0.5)$$

Esta propriedade fornece um critério pratico para estabelecer a estabilidade de um problema de evolução abstrato, já que podemos calcular o Tipo do Semigrupo a partir do cálculo da Cota espectral do operador \mathcal{A} . Mais ainda, ela fornece a taxa ótima de decaimento exponencial, dada através da formula (0.4). É por isto que, de forma alternativa, aqueles semigrupos que satisfizerem (0.5) são nomeados como semigrupos que possuem o *Tipo do Semigrupo Determinado pelo Espectro*, ou que o semigrupo verifica o *Principio de Estabilidade Linear*.

Da Teoria Clássica de Semigrupos Lineares sabemos que, em geral,

$$\omega_0(\mathcal{A}) \geq \sigma_0(\mathcal{A}),$$

e que, também em geral, a propriedade (0.5) é falsa. Contra-exemplos podem ser vistos em [18] e [24]. Por outro lado, a propriedade é verdadeira para uma classe regular de semigrupos, tais como analíticos e compactos. Mais ainda existem resultados onde a propriedade continua válida para semigrupos menos regulares, em particular, semigrupos associados a algumas equações diferenciais do tipo hiperbólico, ver por exemplo [19] ou [20].

Como mencionado anteriormente, nosso objetivo é mostrar que o semigrupo associado ao problema (0.2), verifica a Propriedade de Crescimento Definida pelo Espectro, isto é, verifica (0.5) para uma classe especial de núcleos de memória $g(s)$, conhecidos como *Núcleos do Tipo Maxwell*. Mais ainda, uma vez estabelecida esta igualdade, calcularemos o valor da constante $\omega_0(\mathcal{A})$, para o qual usaremos a caracterização

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \inf\{\sigma > \sigma_0(\mathcal{A}) ; \sup_{Re\lambda=\gamma} \|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty, \quad \text{para todo } \gamma \geq \sigma\}$$

dada em [17], [6]. Veremos claramente que o valor de $\omega_0(\mathcal{A})$ estará diretamente associado ao espectro do operador abstrato A , definido em (0.1). Em outras palavras, para poder calcular

a taxa ótica de decaimento exponencial $\mu > 0$, dada em (0.3), bastará estudar o conjunto espectral $\sigma(A)$, associada ao operador diferencial abstrato (0.1).

Para finalizar, daremos uma breve descrição do que será feito no decorrer do trabalho. No Capítulo 1 serão estabelecidas as principais ferramentas a serem usadas nos seguintes Capítulos. Os resultados principais sobre boa colocação do problema (0.2), assim como a propriedade PCDE para esta equação, serão formulados e provados no Capítulo 2. Já no Capítulo 3 veremos algumas aplicações diretas dos resultados obtidos, e concluímos com alguns comentários finais associados ao modelo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições e estabeleceremos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados nos livros ou artigos mencionados nas Referencias.

1.1 Análise Funcional

Seja X um espaço vetorial normado, com norma denotada por $\|\cdot\|$.

Definição 1.1 Dizemos que uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge a $x \in X$, e escrevemos

$$x_n \rightarrow x, \text{ se}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Definição 1.2 (i) Uma seqüência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ chama-se uma seqüência de Cauchy, quando para cada $\epsilon > 0$ existe um número natural $N > 0$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon \text{ para todo } n, m > N.$$

(ii) Dizemos que X é completo quando toda seqüência de Cauchy em X é convergente; isto é, se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é uma seqüência de Cauchy, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$.

(iii) O espaço X é dito de Banach se ele é completo.

Definição 1.3 Um espaço de Hilbert H é um espaço vetorial com produto interno (\cdot, \cdot) e completo em relação à norma induzida $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$.

Sejam E e F dois espaços vetoriais normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F , munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Tx\|_F.$$

Quando $E = F$ escreve-se simplesmente $\mathcal{L}(E)$.

Teorema 1.4 (Banach-Steinhaus) Sejam E e F dois espaços de Banach e $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F . Suponhamos que

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty \quad \text{para cada } x \in E.$$

Então

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| < \infty,$$

isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|T_\lambda x\| \leq C\|x\| \quad \text{para tudo } x \in E \quad \text{e para tudo } \lambda \in \Lambda.$$

Observação 1.5 Este teorema é conhecido também como **Princípio de Limitação Uniforme**.

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.6 (Teorema da Aplicação Aberta) Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear, contínuo e sobrejetivo de E em F . Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c),$$

onde $B_X(a, r) = \{y \in X; \|y - a\| < r\}$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Corolário 1.7 Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear, contínuo e bijetivo de E em F . Então T^{-1} é contínuo de F em E .

Demonstração: Ver [2]. ■

Definição 1.8 O gráfico de uma aplicação $\varphi : E \rightarrow F$ é o conjunto dos pontos $(x, \varphi(x)) \in E \times F$, isto é,

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in E \times F; y = \varphi(x)\}.$$

Teorema 1.9 (Teorema do Gráfico fechado) Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear de E em F . Suponhamos que a gráfica de T , $G(T)$, é fechada em $E \times F$. Então T é contínuo.

Demonstração: Ver [2]. ■

Observação 1.10 O recíproco é naturalmente verdadeiro, pois toda aplicação contínua (linear ou não linear) tem gráfica fechada.

Observação 1.11 No Teorema 1.9 e na Observação 1.10 devemos ter sempre a aplicação T definida em E , isto é, $T : E \rightarrow F$. Se T está definida em um espaço vetorial $\mathcal{D}(T) \subset E$, isto é, $T : \mathcal{D}(T) \subset E \rightarrow F$, então o Teorema 1.9 e a Observação 1.10 são verdade desde que $\mathcal{D}(T)$ seja fechado em E . Ver [8].

Denotamos por E' ou E^* o dual (topológico) de E , isto é, o espaço das funcionais lineares e contínuas sobre E ; E' está dotado da norma

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Quando $f \in E'$ e $x \in X$ denotaremos geralmente $\langle f, x \rangle$ no lugar de $f(x)$; dizemos que \langle, \rangle é o produto escalar na dualidade E', E .

Definição 1.12 Seja X um espaço de Banach e seja $M \subset X$ um subespaço vetorial. Então o conjunto

$$M^\perp = \{f \in X'; \langle f, x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\}$$

é denominado ortogonal de M . No caso onde $N \subset X'$ é um subespaço vetorial, então o conjunto

$$N^\perp = \{x \in X; \langle f, x \rangle = 0 \text{ para todo } f \in N\}$$

é dito o ortogonal de N .

Verifica-se que M^\perp e N^\perp são subespaços vetoriais fechados de X' e X respectivamente.

Definição 1.13 *Sejam E e F dois espaços de Banach. Denominamos **operador linear** de E em F a toda aplicação linear*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$$

*definida sobre o subespaço vetorial $\mathcal{D}(A) \subset E$ com valores em F . Aqui é denotado por $\mathcal{D}(A)$ o **domínio** do operador A .*

*Dizemos que o operador linear A é **limitado** se existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|Au\| \leq C\|u\| \quad \text{para todo } u \in \mathcal{D}(A).$$

Se A é limitado equivalentemente A é contínuo em $\mathcal{D}(A)$.

Definição 1.14 *Dizemos que um operador $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$ é **fechado** sempre que seu gráfico $G(A)$ seja fechado em $E \times F$.*

Definição 1.15 (Definição do adjunto A^*) *Sejam E e F espaços de Banach e*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow F$$

um operador não limitado com domínio denso. Vamos definir um operador não limitado

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$$

como segue:

Denotamos por $\mathcal{D}(A^)$, o conjunto*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in F'; \exists c \geq 0 \text{ tal que } |\langle v, Au \rangle| \leq c\|u\| \text{ para todo } u \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Claramente $\mathcal{D}(A^)$ é um subespaço vetorial de F' . Dado $v \in \mathcal{D}(A^*)$ considera-se a aplicação $g : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$g(u) = \langle v, Au \rangle, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

Nestas condições temos que

$$|g(u)| \leq c\|u\| \quad \text{para todo } u \in \mathcal{D}(A).$$

Logo, por densidade, g admite um único prolongamento $f \in E'$. Definimos

$$A^*v = f.$$

Claramente A^* é linear. Este operador $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset F' \rightarrow E'$ é chamado de **adjunto** do operador A , e verifica a seguinte relação fundamental:

$$\langle v, Au \rangle_{F',F} = \langle A^*v, u \rangle_{E',E} \quad \text{para todo } u \in \mathcal{D}(A) \quad \text{e para todo } v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Proposição 1.16 *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset E \rightarrow F$ um operador não limitado com domínio denso. Então A^* é fechado, isto é, $G(A^*)$ é fechado em $F' \times E'$.*

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.17 *Sejam E e F espaços de Banach, e $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Então*

$$\ker(A^*) = R(A)^\perp \quad \text{e} \quad \ker(A) = R(A^*)^\perp.$$

Demonstração: Ver [22]. ■

Corolário 1.18 *$R(A)$ é denso em F se e somente se A^* é injetiva.*

Demonstração: Ver [22]. ■

Seja H um espaço de Hilbert sobre \mathbb{K} onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Note que para cada $y \in H$ fixado, $(x, y) = \varphi(x)$ define uma funcional linear de x , isto é, uma aplicação linear de H em \mathbb{K} . Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\varphi(x)$ é limitado. Reciprocamente temos:

Teorema 1.19 (Teorema de Representação de Riesz-Frechet). *Seja $\varphi \in H'$, isto é, φ é um funcional linear limitado em H . Então existe um único $y \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, x \rangle = (x, y) \quad \text{para todo } x \in H.$$

Demonstração: Ver [2] ou [13]. ■

A seguinte generalização do teorema anterior foi dado por Milgram e Lax:

Teorema 1.20 (Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert, e*

$$a(x, y) : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

uma aplicação que verifica as seguintes propriedades:

(i) *Sesquilinear: para todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ e para todo $x, y, z \in H$, temos*

$$a(\alpha_1 x + \alpha_2 y, z) = \alpha_1 a(x, z) + \alpha_2 a(y, z)$$

$$a(x, \beta_1 y + \beta_2 z) = \overline{\beta_1} a(x, y) + \overline{\beta_2} a(x, z).$$

(ii) *Continua: existe uma constante c tal que para todo $x, y \in H$, temos*

$$|a(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|.$$

(iii) *Coerciva: existe uma constante $\alpha > 0$ tal que para todo $y \in H$ temos*

$$|a(y, y)| \geq \alpha \|y\|^2.$$

Então, para todo $\varphi \in H'$ existe um único $y \in H$ tal que

$$\langle \varphi, x \rangle = a(x, y) \quad \text{para todo } x \in H.$$

Demonstração: Ver [13]. ■

1.2 Espaços de Sobolev

No que segue Ω é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n . \mathbb{K} é o corpo dos números reais ou complexos. Supomos conhecidos os conceitos de função integrável, mensurável, conjunto de medida nula, etc. (tudo isso no sentido da medida de Lebesgue); ver por exemplo [21]. Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis sobre Ω , e escrevemos

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx,$$

que é a norma $L^1(\Omega)$ da função f .

Definição 1.21 Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; defina o espaço

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}; \quad f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$ definimos também

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}; \quad f \text{ é mensurável e existe uma cte. } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$$

com a norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|f(x)|.$$

Teorema 1.22 $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Teorema 1.23 (Lema de Riemann-Lebesgue) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de $L^1(\mathbb{R})$.

Então

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\omega x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \text{sen}(\omega x) dx = 0.$$

Equivalentemente, pode-se escrever

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\omega x} dx = 0.$$

Denotamos por $|\alpha| = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ as n -uplas de números inteiros não negativos e escrevemos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$. Denotamos também por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador derivação de ordem $|\alpha|$. No caso $0 = (0, 0, \dots, 0)$, D^0 será o operador identidade.

Definição 1.24 *Seja $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\},$$

onde a derivada é no sentido das distribuições. A norma de $u \in W^{m,p}(\Omega)$ está dado por

$$\|u\|_{W^{m,p}}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\omega} |D^\alpha u|^p dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Teorema 1.25 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver [1]. ■

Quando $p = 2$ representamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e este é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx.$$

Teorema 1.26 *Existe uma constante C (dependendo so de $|I| \leq \infty$, onde I é um intervalo) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \text{ para todo } u \in W^{1,p}(I) \text{ e para todo } 1 \leq p \leq \infty.$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Corolário 1.27 *Suponha que I é um intervalo não limitado e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{x \in I, |x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Introduzimos agora funções definidas em intervalos de reta com valores em espaços de Banach. De fato, seja X um espaço de Banach, $1 \leq p < \infty$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Então $L^p((a, b); X)$ denota o espaço das funciones mensuráveis $f : (a, b) \rightarrow X$ tal que a função $t \mapsto \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(a, b)$. O espaço $L^p((a, b); X)$ é de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^p((a,b);X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2((a, b); H)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(f, g)_{L^2((a, b); H)} = \int_a^b (f(t), g(t))_H dt.$$

Para $p = \infty$, $L^\infty((a, b); X)$ é o espaço das funções mensuráveis $f : (a, b) \rightarrow X$ tal que a função $t \mapsto \|f(t)\|_X$ pertence a $L^\infty(a, b)$. O espaço $L^\infty((a, b); X)$ é de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^\infty((a, b); X)} = \sup_{t \in (a, b)} \text{ess} \|f(t)\|_X.$$

Analogamente podemos definir os espaços de Sobolev com peso da seguinte forma:

Seja $h : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ uma função mensurável, $1 \leq p < \infty$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Então definimos o espaço $L_h^p((a, b), X)$ como sendo o conjunto:

$$L_h^p((a, b), X) = \left\{ f : (a, b) \rightarrow X \text{ mensurável ; } \int_a^b \|f(t)\|_X^p h(t) dt < \infty \right\}.$$

O espaço $L_h^p((a, b), X)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L_h^p((a, b), X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p h(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L_h^2((a, b); H)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(f, g)_{L_h^2((a, b); H)} = \int_a^b h(t) (f(t), g(t))_H dt.$$

1.3 Operadores A^α

Os resultados que enunciaremos nesta seção podem ser encontrados em [11].

Sejam V e H dois espaços de Hilbert separáveis que satisfazem a seguinte imersão

$$V \hookrightarrow H \quad \text{continua e densa.}$$

O espaço V pode ser definido como o domínio de um operador Λ , que é não limitado, auto-adjunto e positivo definido em H , a norma de V sendo equivalente à norma do gráfico

$$\left(\|u\|_H^2 + \|\Lambda u\|_H^2 \right)^{1/2}, \quad u \in \mathcal{D}(\Lambda) = V.$$

Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ o conjunto dos u 's tal que a forma antilinear

$$v \longrightarrow (u, v)_V, \quad v \in V$$

é continua na topologia induzida por H . Então

$$(u, v)_V = (Au, v)_H, \tag{1.1}$$

define A como um operador não limitado em H , com domínio $\mathcal{D}(A)$.

Verificasse que $\mathcal{D}(A)$ é denso em H , A é auto-adjunto e estritamente positivo, pois,

$$(Av, v)_H = \|v\|_V^2 \geq (\text{constante})\|v\|_H^2.$$

Da mesma forma, usando a *decomposição espectral* de operadores auto-adjuntos, a potência A^α de A , $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou ainda $\alpha \in \mathbb{C}$), pode ser definido.

Em particular, usaremos

$$\Lambda = A^{1/2}. \tag{1.2}$$

O operador Λ é auto-adjunto e positivo definido em H , com domínio V . De (1.1) e (1.2) deduzimos que

$$(u, v)_V = (\Lambda u, \Lambda v)_H \quad \text{para todo } u, v \in V.$$

1.4 Semigrupos

Definição 1.28 *Seja X um espaço de Banach. Uma família parametrizada de operadores lineares limitados $T(t) : X \longrightarrow X$, onde $0 \leq t < \infty$, é chamada Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X se:*

- (i) $T(0) = I$, (I é operador identidade em X),
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (*propriedade de semigrupo*).

Um semigrupo de operadores lineares limitados, $T(t)$, é dito *Uniformemente Continuo* se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T(t) - I)\| = 0.$$

Definição 1.29 O operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$, $\mathcal{D}(A)$ é o domínio de A .

Teorema 1.30 Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se e somente se A é um operador linear limitado.

Demonstração: Ver [16]. ■

Teorema 1.31 Sejam $T(t)$ e $S(t)$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Suponha que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Ver [16]. ■

Definição 1.32 Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é dito Semigrupo Fortemente Contínuo de operadores lineares limitados (ou mas brevemente, um semigrupo de classe C_0 ou simplesmente semigrupo C_0) se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Observação 1.33 Se $S(t)$ é um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A , as vezes também denotamos $S(t)$ por e^{At} .

Teorema 1.34 Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 . Então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \quad \text{para todo } 0 \leq t < \infty.$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Corolário 1.35 *Se $T(t)$ é um semigrupo C_0 então para todo $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é uma aplicação contínua de $[0, \infty)$ em X .*

Demonstração: Ver [16]. ■

Definição 1.36 *Se $M = 1$ e $w = 0$, tal que $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, dizemos que $T(t)$ é um semigrupo C_0 de contrações ou simplesmente um semigrupo de contrações.*

Teorema 1.37 *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então se verificam*

(a) *Para todo $x \in X$, temos que*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(b) *Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(c) *Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Segue daqui que

$$u(t) = T(t)u_0$$

define a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

desde que o dado inicial $u_0 \in \mathcal{D}(A)$.

(d) *Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Corolário 1.38 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 então o domínio de A , $\mathcal{D}(A)$, é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Ver [16]. ■

Definição 1.39 (*Resolvente e Espectro*) *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear não limitado. O conjunto resolvente de A está definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X \text{ é bijetiva e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

$\rho(A) \neq \emptyset$ implica que A é fechado. Se A é fechado, então

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X \text{ é bijetiva}\}$$

pele teorema do gráfico fechado. Aqui I é o operador identidade em X . É usual escrever $\lambda - A$ no lugar de $\lambda I - A$. O operador linear $R(\lambda : A) = (\lambda - A)^{-1}$ chama-se operador resolvente de A . E finalmente o espectro de A está definido por

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Lema 1.40 (*A identidade do resolvente*) *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador fechado. Então para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$,*

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A); \quad (1.3)$$

daí $R(\lambda : A)$ e $R(\mu : A)$ comutam.

Teorema 1.41 (*Hille-Yosida*) *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear não limitado A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t), t \geq 0$ se e somente se*

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

(ii) Para todo $\lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Corolário 1.42 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t)$. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano direito aberto, isto é, $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ e para tais λ*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Seja X um espaço de Banach e seja X^* seu dual. Denotamos o valor de $x^* \in X^*$ calculado em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para todo $x \in X$ definimos o conjunto $F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) = \{x^*; x^* \in X^* \text{ e } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

Do teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 1.43 *Um operador linear A é dito Dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Quando X é um espaço de Hilbert a definição anterior se reduce a

Definição 1.44 *Seja H um espaço de Hilbert equipado com o produto interno $(,)$ e a norma induzida $\|\cdot\|$. Seja A um operador linear definido em H , isto é, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$. Se diz que A é dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$,*

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

Uma caracterização útil dos operadores dissipativos é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1.45 *Um operador linear A é dissipativo se e somente se*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \lambda > 0.$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Teorema 1.46 (Lumer-Phillips). *Seja X um espaço de Banach e A um operador linear com domínio denso $\mathcal{D}(A)$ em X .*

- (a) Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço X , isto é $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X .
- (b) Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e para todo $x^* \in F(x)$ temos que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Demonstração: Ver [16]. ■

Como corolário do teorema de Lumer-Phillips, temos o seguinte resultado freqüentemente usado.

Corolário 1.47 *Seja A um operador linear com domínio denso $\mathcal{D}(A)$ em um espaço de Hilbert H . Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, o conjunto resolvente de A , então A é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações em H .*

Demonstração: Ver [10]. ■

Os seguintes teoremas tem a ver com algumas propriedades dos operadores dissipativos.

Teorema 1.48 *Seja X um espaço de Banach e A um operador dissipativo em X . Se para algum $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - A) = X$ então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Ver [16]. ■

Teorema 1.49 *Seja A dissipativo com $R(I - A) = X$. Se o espaço de Banach X é reflexivo então $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Demonstração: Ver [16]. ■

Definição 1.50 *Um semigrupo C_0 gerado por A , e^{At} , é dito exponencialmente estável se existem constantes positivas α e $M \geq 1$ tais que*

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Definição 1.51 Seja e^{At} um semigrupo C_0 gerado por A . Dizemos que $\omega_0(A)$ é o tipo do semigrupo gerado por A se

$$\omega_0(A) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}.$$

Definição 1.52 Seja X um espaço de Hilbert e A um operador linear em X . Definimos a Cota Espectral do operador A , denotado por $\sigma_0(A)$, por a seguinte igualdade

$$\sigma_0(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda; \lambda \in \sigma(A)\},$$

onde $\sigma(A)$ é o espectro de A .

Definição 1.53 Seja e^{At} um semigrupo de classe C_0 gerado pelo operador A . Então dizemos que e^{At} possui a Propriedade de Crescimento Definido pelo Espectro, se

$$\omega_0(A) = \sigma_0(A).$$

1.5 EDP de Primeira Ordem

Nesta seção estudaremos as curvas características associadas à equação de primer ordem

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u|_{\gamma} &= f, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde γ e f são dados. Esta análise será usada no decorrer do trabalho.

Observe que na equação (1.4) a função incógnita u aparece so na parte principal da equação, isto simplifica um pouco a resolução. Parametrizando a curva inicial γ por $(\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, onde I é um intervalo aberto (limitado ou não), podemos enunciar o problema na forma

$$\begin{aligned} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y &= c(x, y), \\ u(\sigma(t), \rho(t)) &= f(t), \quad t \in I. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Suponha que as seguintes hipóteses valem:

- (i) A curva inicial plana γ é uma *curva suave*, isto é, as funções σ, ρ são continuamente diferenciáveis em I e $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$ para todo $t \in I$;
- (ii) $f \in C^1(I)$;

(iii) $a, b, c \in C^1(\Omega)$ e as funções a e b não se anulam simultaneamente em Ω , onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto contendo γ (a vizinhança onde estudaremos o problema está contida em Ω).

Para resolver o problema (1.5), primeiro devemos achar as *curvas características planas* da equação (1.4). Essas são curvas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total. Se \mathcal{C} é uma curva característica plana parametrizada por $(\alpha(s), \beta(s))$ então a derivada total de u ao longo de \mathcal{C} é, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s)); \quad (1.6)$$

por outro lado, a EDP (1.4) ao longo de \mathcal{C} resulta

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b(\alpha(s), \beta(s))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (1.7)$$

Portanto, se desejamos que o lado esquerdo da equação (1.7) seja igual a qualquer uma das expressões em (1.6), é necessário que, para cada s , exista um número real $\lambda(s) \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s); \end{aligned} \quad (1.8)$$

neste caso a equação (1.7) resulta em

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \lambda(s)c(\alpha(s), \beta(s)). \quad (1.9)$$

As condições (1.8) significam, geometricamente, que el vetor tangente á curva \mathcal{C} no ponto $(\alpha(s), \beta(s))$ é paralelo ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s), b(\alpha(s), \beta(s))\lambda(s))$.

A função $\lambda(s)$ é de fato desnecessária pois basta reparametrizar a curva convenientemente, ver [7]. Portanto as *curvas características planas* da equação (1.4) são as curvas suaves \mathcal{C} que admitem parametrização $(\alpha(s), \beta(s))$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= b(\alpha(s), \beta(s)); \end{aligned} \quad (1.10)$$

O sistema de EDO's dado por (1.10) tem uma infinidade de soluções, a unicidade esta dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.54 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, γ uma curva suave em Ω parametrizada por $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t))$, $t \in I$, $f \in C^1(I)$ e $a, b, c \in C^1(\Omega)$. Suponha que $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 \neq 0$, para todo $(x, y) \in \Omega$, e*

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Então o problema (1.5) tem uma única solução de classe C^1 em uma vizinhança da curva γ em Ω .

Demonstração: Ver [7]. ■

1.6 Polinômios de terceiro grau

Nesta seção apresentamos uma breve descrição do método de Cardano usado para calcular as raízes de um polinômio de grau três. Uma equação geral do terceiro grau na variável x , é dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

onde $a \neq 0$. Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{b}{3a}$, obtemos o seguinte polinômio simplificado

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1.11}$$

onde

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Nestas condições o número de soluções reais dependerá do sinal da discriminante

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Isto é:

- Para $D > 0$, teremos uma solução real e duas complexas,
- para $D < 0$, teremos três soluções reais distintas,
- para $D = 0$, teremos uma solução real de multiplicidade três quando $p = q = 0$; ou duas soluções reais (uma simples e uma de multiplicidade dois) quando $p^3 = -q^2 \neq 0$.

Pelo método de Cardano, ver por exemplo [3], as soluções da equação cúbica (1.11) estão dados por:

$$\begin{aligned}y_1 &= u + v \\y_2 &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v \\y_3 &= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v\end{aligned}$$

onde

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Observação 1.55 *Como a raiz cúbica de um número complexo são três números diferentes, se é possível, considere as raízes cúbicas reais u e v tais que $uv = -p$.*

Além disso, se a equação cúbica é real, quando $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ as soluções de (1.11) podem ser dadas por:

$$\begin{aligned}y_1 &= 2r \cos \frac{\varphi}{3} \\y_2 &= -2r \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right) \\y_3 &= -2r \cos\left(\frac{\pi + \varphi}{3}\right),\end{aligned}$$

onde $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ e $\cos \varphi = \frac{-q}{2r^3}$.

Capítulo 2

O Sistema Viscoelástico Linear com Memória

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a equação integro-diferencial abstrata definida num espaço de Hilbert H , dada pela seguinte equação

$$u_{tt}(t) + A \left[g(0)u(t) + \int_0^\infty g'(s)u(t-s)ds \right] = 0, \quad (2.1)$$

onde A é um operador linear, não limitado, auto-adjunto e positivo definido. Na prática o operador A é o correspondente operador elástico associado a algum fenômeno físico. Nestas condições, $g(s)$ é a função núcleo de memória e satisfaz as seguintes condições:

$$(g1) \quad g \in C^2(0, \infty) \cap C[0, \infty), \quad g' \in L^1(0, \infty);$$

$$(g2) \quad g(s) > 0, \quad g'(s) < 0, \quad g''(s) > 0 \quad \text{para todo } s > 0;$$

$$(g3) \quad g(\infty) > 0;$$

$$(g4) \quad g''(s) + kg'(s) \geq 0 \quad \text{para algum } k > 0 \quad \text{e todo } s > 0.$$

Referente a estas condições podemos mencionar que a condição (g1) permite a g' ser singular em $s = 0$. A condição (g2) significa que a memória é estritamente decrescente e a taxa de perda de memória é também decrescente. A condição (g3) implica que o material

é sólido viscoelástico. A condição (g4) restringe ao núcleo a satisfazer

$$-g'(s) \leq -g'(s_0)e^{-k(s-s_0)} \quad \text{para } s \geq s_0 > 0.$$

De fato, de (g4) podemos concluir que

$$\frac{g''(s)}{g'(s)} \leq -k,$$

logo, integrando

$$\int_{s_0}^s \frac{g''(t)}{g'(t)} dt \leq \int_{s_0}^s -k dt,$$

então

$$\ln |g'(s)| - \ln |g'(s_0)| \leq -k(s - s_0),$$

de onde temos

$$\frac{g'(s)}{g'(s_0)} \leq e^{-k(s-s_0)},$$

da última desigualdade, multiplicando ambos os lados por $-g'(s_0) > 0$, segue o desejado.

Exemplos.- Os exemplos clássicos de funções que verificam as condições (g1) – (g4) são as funções de tipo Maxwell, isto é:

$$g(s) = 1 + Me^{-ks} \quad \text{para algum } M, k > 0.$$

Além delas, temos outros exemplos de núcleos com singularidade na origem, dentre elas temos os núcleos da forma:

$$g(s) = C - M \int_0^s \frac{e^{-ks}}{s^c} ds, \quad \text{onde } C > -M \int_0^\infty \frac{e^{-ks}}{s^c} ds, \quad 0 < c < 1, \quad M, k > 0.$$

Voltando a nossa análise, a equação (2.1) pode-se reescrever como

$$u_{tt}(t) + A \left[g(\infty)u(t) - \int_0^\infty g'(s)(u(t) - u(t-s))ds \right] = 0. \quad (2.2)$$

Desde que $g(\infty) > 0$, sem perda de generalidade, assumiremos que $g(\infty) = 1$. Caso contrario, podemos definir $A = g(\infty)A$ e $g = g/g(\infty)$.

Neste Capítulo, na Seção 2.2 mostraremos a existência e unicidade de soluções do sistema (2.1) usando teoria de semigrupos. Na seção 2.3 damos uma estimativa para o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ onde \mathcal{A} será o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações

num espaço de Hilbert. Finalmente na seção 2.4 provamos a propriedade de crescimento determinada pelo espectro (PCDE), isto é,

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}).$$

quando o núcleo $g(s)$ é do tipo Maxwell. Para isto usaremos um resultado de [17] e [6], que afirma:

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \inf\{\sigma > \sigma_0(\mathcal{A}); \sup_{\text{Re}\lambda=\gamma} \|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \text{ para todo } \gamma \geq \sigma\}. \quad (2.3)$$

2.2 Existência e Unicidade do Sistema

Seguindo a estratégia de Dafermos [4], introduzimos as novas variáveis

$$v = u_t, \quad w(t, s) = u(t) - u(t - s). \quad (2.4)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} w_t &= u_t(t) - u_t(t - s) \\ w_s &= -u_t(t - s)(-1) = u_t(t - s). \end{aligned}$$

Portanto

$$w_t + w_s = u_t(t) \quad (2.5)$$

Note também que

$$w(t, 0) = w(0) = 0. \quad (2.6)$$

Então pondo $U = (u, v, w)^T$, de (2.2), (2.4) e (2.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0 = (u(0+), v(0+), u(0+) - u(-s)), \quad s > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \\ v - w'(s) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Seja

$$X = V \times H \times W, \quad \text{com } V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \quad \text{e} \quad W = L_{g'}^2(0, \infty; V),$$

onde os espaços V , W são espaços de Hilbert com produtos internos

$$(u, v)_V = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)_H \quad \text{e} \quad (f, h)_W = \int_0^\infty |g'(s)|(A^{\frac{1}{2}}f(s), A^{\frac{1}{2}}h(s))_H ds.$$

Então X é um espaço de Hilbert equipado com a norma

$$\|U\|_X^2 = \|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 + \|w\|_W^2.$$

Nosso objetivo é aplicar a teoria de semigrupos para poder estabelecer a boa colocação do problema. Para isso estabeleceremos primeiro três lemas que serão úteis na demonstração do resultado de existência e unicidade via semigrupos. Para começar, estabeleceremos o domínio do operador \mathcal{A} , definido usualmente por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in X; \mathcal{A}U \in X\}.$$

Este domínio está caracterizado pelo seguinte Lema

Lema 2.1 *O domínio do operador \mathcal{A} esta dado por*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A) \right\} \quad (2.9)$$

Demonstração: De fato, por definição temos que:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in X; \mathcal{A}U \in X\}.$$

Seja $U = (u, v, w) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então $U, \mathcal{A}U \in X = V \times H \times W$ isto é

$$u \in V, \quad v \in H, \quad w \in W$$

e

$$v \in V, \quad -A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \in H, \quad v - w'(s) \in W$$

então

$$\begin{cases} v \in V, \\ v - w'(s) \in W \Rightarrow w' \in W \text{ e } w(0) = 0, \quad \text{pois } v \in V \subset W, \\ A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \in H \Rightarrow u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

Por tanto

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A) \right\}$$

Reciprocamente, seja

$$U = (u, v, w) \in \left\{ z = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A) \right\}$$

então

$$v \in V, \quad w' \in W, \quad w(0) = 0, \quad u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A)$$

então

$$\begin{cases} v \in V, \\ A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \in H \\ v - w'(s) \in W, \quad \text{pois } v \in V \subset W. \end{cases}$$

isto é

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \\ v - w'(s) \end{pmatrix} \in X = V \times H \times W.$$

Além disso, é claro que $U = (u, v, w) \in X$. Portanto

$$\left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A) \right\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Isto mostra o desejado. ■

Queremos mostrar que o operador linear \mathcal{A} , definido por (2.8) e (2.9), gera um semigrupo de contrações em X . Para isso, serão úteis os seguintes dois lemas.

Lema 2.2 *Suponha que g satisfaz as condições (g1) – (g3). Então para todo $w \in W$ com $w(0) = 0$ e $w' \in W$, temos*

$$|sg'(s)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } s \downarrow 0, \quad (2.10)$$

e

$$|g'(s)| \|w(s)\|_V^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } s \downarrow 0. \quad (2.11)$$

Demonstração: Como g' é crescente e $g' \in L^1(0, \infty)$, afirmamos que

$$|sg'(s)| \rightarrow 0 \text{ quando } s \downarrow 0.$$

De fato, do contrario, pela definição de limite deve existir uma constante $\varepsilon > 0$ e uma seqüencia de números positivos $a_n \rightarrow 0$ tal que $|a_n g'(a_n)| \geq \varepsilon$ para todo n . Sendo g' crescente, para $0 < s < a_n$ temos que $g'(s) < g'(a_n)$ logo $|g'(s)| > |g'(a_n)|$, pois $g'(s) < 0$ para todo $s > 0$. Logo multiplicando por a_n a última desigualdade temos que

$$a_n |g'(s)| \geq \varepsilon \text{ para todo } s \in (0, a_n).$$

Integrando a última desigualdade de 0 a a_n temos que

$$a_n \varepsilon = \int_0^{a_n} \varepsilon ds \leq a_n \int_0^{a_n} |g'(s)| ds$$

de donde temos

$$\varepsilon \leq \int_0^{a_n} |g'(s)| ds \rightarrow 0$$

quando $a_n \rightarrow 0$, o qual é uma contradição. Isto prova (2.10).

A prova de (2.11) é similar. Suponhamos que a afirmação não acontece, então existe $\varepsilon > 0$ e uma seqüencia de números positivos $s_n \rightarrow 0$ tal que

$$|g'(s_n)| \|w(s_n)\|_V^2 \geq \varepsilon \text{ para todo } n.$$

Segue de

$$w(s_n) = \int_0^{s_n} w'(\tau) d\tau$$

e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \|w(s_n)\|_V^2 &= \left\| \int_0^{s_n} w'(\tau) d\tau \right\|_V^2 \leq \left(\int_0^{s_n} \|w'(\tau)\|_V d\tau \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{s_n} 1^2 d\tau \right) \left(\int_0^{s_n} \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \right) = s_n \int_0^{s_n} \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau. \end{aligned}$$

Desde que g' é crescente, $-g'(s) = |g'(s)|$ é decrescente, então para $0 < \tau < s_n$ temos que $|g'(s_n)| < |g'(\tau)|$ logo temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |g'(s_n)| \|w(s_n)\|_V^2 \leq s_n |g'(s_n)| \int_0^{s_n} \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \\ &= s_n \int_0^{s_n} |g'(s_n)| \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \leq s_n \int_0^{s_n} |g'(\tau)| \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $s_n \rightarrow 0$, o qual é uma contradição. Isto prova (2.11). ■

Lema 2.3 *Suponha que g satisfaz as condições (g1) – (g3). Então para todo $w \in W$ com $w(0) = 0$ e $w' \in W$, temos*

$$\int_0^\infty g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds < \infty, \quad (2.12)$$

e

$$|g'(s)| \|w(s)\|_V^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } s \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Demonstração: Usando (g2) e (2.11) afirmamos que, para todo $a > 0$, $\int_a^\infty g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds < \infty$. De fato

$$\begin{aligned} & \int_a^T g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds = \\ &= g'(T) \|w(T)\|_V^2 - g'(a) \|w(a)\|_V^2 - \int_a^T g'(s) \frac{d}{ds} \|w(s)\|_V^2 ds \\ &\leq -g'(a) \|w(a)\|_V^2 - \int_a^T g'(s) \{(w'(s), w(s))_V + (w(s), w'(s))_V\} ds \\ &= -g'(a) \|w(a)\|_V^2 + 2 \int_a^T |g'(s)| \operatorname{Re}(w(s), w'(s))_V ds \\ &\leq -g'(a) \|w(a)\|_V^2 + 2 \int_a^T |g'(s)| |(w(s), w'(s))_V| ds \\ &\leq -g'(a) \|w(a)\|_V^2 + 2 \int_a^T |g'(s)| \|w(s)\|_V \|w'(s)\|_V ds \\ &\leq |g'(a)| \|w(a)\|_V^2 + \int_a^T |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds + \int_a^T |g'(s)| \|w'(s)\|_V^2 ds, \end{aligned}$$

logo fazendo $T \uparrow \infty$ e $a \downarrow 0$, temos que $\int_0^\infty g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds < \infty$, isto prova (2.12). Em particular, $\int_a^\infty g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds < \infty$ para todo $a > 0$.

Seja agora

$$f(s) = g'(s) \|w(s)\|_V^2,$$

como $w \in W$, temos que $f \in L^1(a, \infty)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos também que

$$f'(s) = g''(s) \|w(s)\|_V^2 + 2g'(s) \operatorname{Re}(w(s), w'(s))_V$$

pertence a $L^1(a, \infty)$, pois

$$\begin{aligned}
& \int_a^\infty |f'(s)| ds \leq \\
& \leq \int_a^\infty g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds + 2 \int_a^\infty |g'(s)| |\operatorname{Re}(w(s), w'(s))_V| ds \\
& \leq \int_a^\infty g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds + \int_a^\infty |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds + \int_a^\infty |g'(s)| \|w'(s)\|_V^2 ds < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 1.27 do Capítulo 1, temos que

$$f(s) = g'(s) \|w(s)\|_V^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } s \rightarrow \infty.$$

O qual prova (2.13). ■

Com a ajuda destes lemas, estamos em condições de estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2.4 *O operador linear \mathcal{A} , definido por (2.8) e (2.9), gera um semigrupo de contrações em X .*

Demonstração: Primeiro mostraremos que o operador \mathcal{A} é dissipativo. De fato, para

$U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
Re(\mathcal{A}U, U)_X &= Re \left(\begin{pmatrix} v \\ -A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \\ v - w'(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right)_X = \\
&= Re \left\{ (v, u)_V + \left(-A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right), v \right)_H + (v - w'(s), w)_W \right\} \\
&= Re \left\{ (v, u)_V - \left(A^{\frac{1}{2}} \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right), A^{\frac{1}{2}}v \right)_H + (v - w'(s), w)_W \right\} \\
&= Re \left\{ (v, u)_V - (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)_H + \left(A^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty g'(s)w(s)ds, A^{\frac{1}{2}}v \right)_H + (v - w'(s), w)_W \right\} \\
&= Re \left\{ \overline{(u, v)}_V - (u, v)_V + \left(A^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty g'(s)w(s)ds, A^{\frac{1}{2}}v \right)_H + (v - w'(s), w)_W \right\} \\
&= Re \left\{ \left(\int_0^\infty g'(s)A^{\frac{1}{2}}w(s)ds, A^{\frac{1}{2}}v \right)_H + (v, w)_W - (w'(s), w)_W \right\} \\
&= Re \left\{ - \int_0^\infty |g'(s)|(A^{\frac{1}{2}}w(s), A^{\frac{1}{2}}v)_H ds + (v, w)_W - (w'(s), w)_W \right\} \\
&= Re \left\{ -(w(s), v)_W + \overline{(w, v)}_W - \int_0^\infty |g'(s)|(A^{\frac{1}{2}}w'(s), A^{\frac{1}{2}}w)_H ds \right\} \\
&= Re \int_0^\infty g'(s)(w'(s), w)_V ds = \int_0^\infty g'(s)Re(w'(s), w)_V ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \frac{d}{ds} \|w(s)\|_V^2 ds = \frac{1}{2} (g'(s)\|w(s)\|_V^2|_0^\infty - \frac{1}{2} \int_0^\infty g''(s)\|w(s)\|_V^2 ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty g''(s)\|w(s)\|_V^2 ds \leq 0. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Donde usamos os Lemas 2.2 e 2.3. Assim o operador \mathcal{A} é dissipativo. Em seguida mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, ou seja, temos que mostrar que o operador

$$\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow X$$

é bijetivo e que $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ para $\lambda = 0$.

De fato, para cada $F = (f_1, f_2, f_3) \in X$ consideremos a equação resolvente

$$-\mathcal{A}U = F \tag{2.15}$$

ou seja

$$- \begin{pmatrix} v \\ -A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \\ v - w'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$-v = f_1 \in V, \quad (2.16)$$

$$A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) = f_2 \in H, \quad (2.17)$$

$$-v + w'(s) = f_3 \in W. \quad (2.18)$$

Por (2.16) existe um único $v = -f_1 \in V$. Por (2.18) temos que

$$w'(s) = v + f_3 \in W \quad (\text{pois } v \in V \subset W)$$

e que

$$w(s) = \int_0^s (v + f_3(\tau))d\tau = sv + \int_0^s f_3(\tau)d\tau. \quad (2.19)$$

É claro que $w(0) = 0$, logo w é único, e temos também que $w' \in W$. Mostraremos agora que $w \in W$. De fato, sejam $T > 0$, $\varepsilon > 0$, usando a hipótese (g4) temos que

$$\begin{aligned} & \int_\varepsilon^T |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds \leq \\ & \leq \frac{1}{k} \int_\varepsilon^T g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds \\ & = \frac{1}{k} g'(T) \|w(T)\|_V^2 - \frac{1}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - \frac{2}{k} \int_\varepsilon^T g'(s) \operatorname{Re}(w(s), w'(s))_V ds \\ & \leq -\frac{1}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{2}{k} \int_\varepsilon^T |g'(s)| |(w(s), w'(s))_V| ds \\ & \leq -\frac{1}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{2}{k} \int_\varepsilon^T |g'(s)| \|w(s)\|_V \|w'(s)\|_V ds \\ & \leq -\frac{1}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{2}{k} \int_\varepsilon^T |g'(s)| \left(\frac{k \|w(s)\|_V^2}{4} + \frac{\|w'(s)\|_V^2}{k} \right) ds \\ & = -\frac{1}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^T |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds + \frac{2}{k^2} \int_\varepsilon^T |g'(s)| \|w'(s)\|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assim,

$$\int_\varepsilon^T |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds \leq -\frac{2}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{4}{k^2} \int_\varepsilon^T |g'(s)| \|w'(s)\|_V^2 ds. \quad (2.21)$$

Além disso, da demonstração do Lema 2.2, podemos concluir que

$$-\frac{2}{k} g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Então, voltando á desigualdade (2.21) e fazendo $T \uparrow \infty$ e $\varepsilon \downarrow 0$, temos que $w \in W$ e

$$\|w\|_W^2 \leq \frac{4}{k^2} \int_0^\infty |g'(s)| \|w'(s)\|_V^2 ds. \quad (2.23)$$

Finalmente mostraremos que existe um único $u \in V$, tal que,

$$u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A),$$

para o qual usamos a equação (2.17). De fato, para resolver (2.17) consideremos a aplicação sesquilinear

$$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

definido por, $a(x, y) = (x, y)_V = (A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y)_H$, e a aplicação linear

$$T : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que para todo $x \in V$, $\langle T, x \rangle = (x, f_2)_H$. Então temos que

- a é sesquilinear, pois a é um produto interno.
- a é contínua, isto pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.
- a é coerciva, pois

$$a(x, x) = (x, x)_V = \|x\|_V^2, \quad \text{para todo } x \in V.$$

- T é contínua (isto é, $T \in V'$), pois

$$\begin{aligned} |\langle T, x \rangle| &= |(x, f_2)_H| \leq \|x\|_H \|f_2\|_H \\ &\leq C_1 \|f_2\|_H \|x\|_V = C \|x\|_V, \quad (\text{usando que } V \hookrightarrow H). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1.20 (Lax-Milgram) do Capítulo 1, existe um único $y \in V$ tal que

$$a(x, y) = \langle T, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}).$$

isto é,

$$(A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}y)_H = (x, f_2)_H, \quad \text{para todo } x \in V.$$

Como $V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V'$ podemos considerar

$$\langle x, Ay \rangle_{V, V'} = \langle x, f_2 \rangle_{V, V'}, \quad \text{para todo } x \in V.$$

Então $Ay = f_2$ em V' , mas como $f_2 \in H$ temos que $Ay \in H$, logo $y \in \mathcal{D}(A)$. Afirmamos que $\int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in V$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right\|_V^2 &\leq \left(\int_0^\infty |g'(s)| \|w(s)\|_V ds \right)^2 = \left(\int_0^\infty |g'(s)|^{\frac{1}{2}} |g'(s)|^{\frac{1}{2}} \|w(s)\|_V ds \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^\infty |g'(s)| ds \right) \left(\int_0^\infty |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds \right) < \infty, \end{aligned}$$

de onde finalmente, lembrando que $\mathcal{D}(A) \subset V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, temos que existe um único

$$u := y + \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in V,$$

tal que

$$y = u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in \mathcal{D}(A).$$

Assim, temos provado que (2.15) possui uma única solução com $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, isto é, $-\mathcal{A}$ é bijetiva.

Observação 2.5 *Note que, da demonstração anterior, temos também que o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ é bijetiva.*

Além disso, por (2.16), (2.17), (2.18) e (2.23) existe uma constante positiva C independente de $U = (u, v, w)^T$ tal que

$$\|U\|_X \leq C\|F\|_X$$

isto é,

$$\|u\|_V^2 + \|v\|_H^2 + \|w\|_W^2 \leq C^2(\|f_1\|_V^2 + \|f_2\|_H^2 + \|f_3\|_W^2). \quad (2.24)$$

De fato, por (2.16), temos que

$$\|v\|_H^2 = \|f_1\|_H^2 \leq C_1\|f_1\|_V^2, \quad \text{pois } V \hookrightarrow H. \quad (2.25)$$

De (2.18) temos

$$\begin{aligned} \|w\|_H^2 &\leq \frac{4}{k^2}\|w'\|_W^2 = \frac{4}{k^2}\|f_3 - f_1\|_W^2 \\ &\leq \frac{4}{k^2}(\|f_1\|_W + \|f_3\|_W)^2 \\ &\leq \frac{8}{k^2}(\|f_1\|_W^2 + \|f_3\|_W^2) \\ &\leq C_2(\|f_1\|_V^2 + \|f_3\|_W^2), \quad \text{pois } V \hookrightarrow W. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Agora, tomando o produto interno de (2.17) com u , temos

$$\left(A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right), u \right)_H = (f_2, u)_H,$$

isto é

$$(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u)_H - \left(\int_0^\infty g'(s)A^{\frac{1}{2}}w(s)ds, A^{\frac{1}{2}}u \right)_H = (f_2, u)_H,$$

logo

$$\|A^{\frac{1}{2}}u\|_H^2 + \int_0^\infty |g'(s)|(A^{\frac{1}{2}}w(s), A^{\frac{1}{2}}u)_H ds = (f_2, u)_H,$$

do qual podemos deduzir que

$$\|u\|_V^2 = (f_2, u)_H - (w(s), u)_W,$$

que implica nas seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|u\|_V^2 &\leq \|f_2\|_H \|u\|_H + \|w\|_W \|u\|_W \\ &\leq \tilde{C}(\|f_2\|_H \|u\|_V + \|w\|_W \|u\|_V) \\ &= \tilde{C}(\|f_2\|_H + \|w\|_W) \|u\|_V \\ &\leq \frac{1}{2}[\tilde{C}(\|f_2\|_H + \|w\|_W)]^2 + \frac{1}{2}\|u\|_V^2, \end{aligned}$$

pois $V \hookrightarrow H$ e $V \hookrightarrow W$. Portanto

$$\|u\|_V^2 \leq \tilde{C}_1(\|f_2\|_H^2 + \|w\|_W^2) \leq C_3(\|f_2\|_H^2 + \|f_1\|_V^2 + \|f_3\|_W^2). \quad (2.27)$$

De (2.25), (2.26) e (2.27), obtemos (2.24), isto é

$$\|(-\mathcal{A})^{-1}F\|_X \leq \|F\|_X, \quad \text{para todo } F \in X.$$

de onde $(-\mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Portanto $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Observação 2.6 De $(-\mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ segue que \mathcal{A} é um operador fechado. De fato, se $(-\mathcal{A})^{-1}$ é um operador limitado definido em X , então $(-\mathcal{A})^{-1}$ é fechado pela observação 1.10, então $-\mathcal{A}$ é também fechado, de onde \mathcal{A} é fechado.

Finalmente, mostraremos que o operador \mathcal{A} é densamente definido. De fato, seja $\lambda\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|\lambda\mathcal{A}^{-1}\| < 1$ então $\lambda\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{I}$ é invertível, logo das igualdades

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} = (\lambda\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} - \mathcal{A})^{-1} = [(\lambda\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{I})\mathcal{A}]^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\lambda\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{I})^{-1}$$

temos que $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ é invertível para $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$. Assim,

$$\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X \text{ é invertível para } |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1},$$

logo $R(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) = X$ para $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ e sendo \mathcal{A} dissipativo segue que

$$R(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) = X \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Isto pelo Teorema 1.48 do Capítulo 1. Além disso, sendo \mathcal{A} dissipativo com $R(\mathcal{I} - \mathcal{A}) = X$ e X reflexivo, pelo Teorema 1.49 do Capítulo 1, temos que

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = X.$$

Portanto, sendo \mathcal{A} um operador linear densamente definido num espaço de Hilbert X e além disso, sendo \mathcal{A} dissipativo com $0 \in \rho(\mathcal{A})$, pelo Corolário 1.47 do Teorema de Lumer-Phillips do Capítulo 1, segue que \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações em X . Isto termina a prova do teorema. ■

Observação 2.7 *Para finalizar esta seção, mostraremos que de fato, a equação integro-diferencial original (2.2) e a equação de evolução (2.7), usando as transformações (2.4), são equivalentes.*

Por construção é claro que se u é uma solução da equação (2.2), então por (2.4) e (2.5) temos que $U = (u, v, w)$ satisfaz (2.7).

Reciprocamente, se $U = (u, v, w)$ é solução de (2.7), temos que

$$\begin{aligned} u_t &= v \\ v_t &= -A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) \\ w_t &= v - w'(s). \end{aligned}$$

de onde temos

$$\begin{aligned} u_{tt} + A \left(u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right) &= 0 \\ w_t + w_s - u_t &= 0. \end{aligned}$$

Para ver que w satisfaz a igualdade $w(t, s) = u(t) - u(t - s)$, da Seção 1.5 do Capítulo 1, observamos que as curvas características da equação $w_t + w_s = u_t$ satisfazem

$$\alpha'(\tau) = a(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = 1$$

$$\beta'(\tau) = b(\alpha(\tau), \beta(\tau)) = 1$$

logo

$$\alpha(\tau) = \tau + c_1$$

$$\beta(\tau) = \tau + c_2$$

Portanto as curvas características são as retas da forma $t = s + c$, onde c é uma constante. Parametrizando as retas por $s \rightarrow (s + c, s)$, temos

$$w_s(s + c, s) = u_t(s + c)$$

logo, integrando sobre $[0, s]$ e usando que $w(\cdot, 0) = 0$ temos que

$$w(s + c, s) = u(s + c) - u(c).$$

Logo, pondo $c = t - s$ temos finalmente o desejado. Então a equivalência entre (2.2) e (2.7) segue.

2.3 Análise espectral e estimativa de $\omega_0(\mathcal{A})$

O objetivo nesta seção é mostrar uma estimativa para o tipo do semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$. Mais precisamente: Supondo que temos $\sigma < k/2$ satisfazendo

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \geq -\sigma\} \subset \rho(\mathcal{A}) \text{ e}$$

$$\sigma < \frac{k}{2} C(\sigma)(1 + g(0) + C(\sigma))^{-1},$$

onde $C(\sigma) = \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})|g'(s)|ds$, mostraremos que $\omega_0(\mathcal{A}) < -\sigma$.

Para isto, provaremos primeiro três Lemas que serão usadas na prova da estimativa.

Lema 2.8 *Suponha que $f \in W$, $\operatorname{Re}\lambda > -k/2$, $g(s)$ satisfaz as condições (g1) – (g4) e*

$$w(s) = \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Então

(a) $|sg'(s)| \rightarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, e $f \in L^2(0, T; V)$ para todo $T > 0$;

(b) $w \in W \cap C([0, \infty), V)$, $w' \in W$ e

$$\|w\|_W^2 \leq \frac{1}{\delta}(2\operatorname{Re}\lambda + k - \delta)^{-1} \|f\|_W^2, \quad \text{para } \delta \in (0, 2\operatorname{Re}\lambda + k), \quad (2.28)$$

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty g'(s)(w'(s), w(s))_V ds \leq -\frac{k}{2} \|w\|_W^2; \quad (2.29)$$

(c) $\|g'(s)w(s)\|_V \rightarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, e $\|g'(s)w(s)\|_V \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$.

Demonstração:

(a) Note que a convergência

$$|sg'(s)| \rightarrow 0 \text{ quando } s \downarrow 0$$

já foi mostrado no Lema 2.2. Para mostrar que $f \in L^2(0, T; V)$ para todo $T > 0$, notemos que de $0 < s < T$ temos $|g'(s)| > |g'(T)|$, logo $|g'(T)| \|f(s)\|_V^2 \leq |g'(s)| \|f(s)\|_V^2$, de onde integrando de 0 a T temos que

$$|g'(T)| \int_0^T \|f(s)\|_V^2 dx \leq \int_0^T |g'(s)| \|f(s)\|_V^2 dx \leq \|f\|_W^2 \quad (2.30)$$

de onde $f \in L^2(0, T; V)$ para todo $T > 0$. Isto prova a parte (a).

(b) De (a) segue que $f \in L^1(0, T; V)$ para todo $T > 0$ (Pois $L^2(0, T; V) \hookrightarrow L^1(0, T; V)$ para todo $T > 0$). Vejamos agora, usando a definição de $w(s)$, que $w \in C([0, \infty), V) \cap H^1(0, T; V)$ para todo $T > 0$ e que

$$w'(s) + \lambda w(s) = f(s), \quad \text{q.s. em } (0, \infty). \quad (2.31)$$

De fato, para todo $s \geq 0$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $s + h > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
& \|w(s+h) - w(s)\|_V \\
&= \left\| e^{-\lambda(s+h)} \int_0^{s+h} e^{\lambda\tau} f(\tau) d\tau - e^{-\lambda s} \int_0^s e^{\lambda\tau} f(\tau) d\tau \right\|_V \\
&= \left\| (e^{-\lambda(s+h)} - e^{-\lambda s}) \int_0^s e^{\lambda\tau} f(\tau) d\tau + e^{-\lambda(s+h)} \int_s^{s+h} e^{\lambda\tau} f(\tau) d\tau \right\|_V \\
&\leq |e^{-\lambda(s+h)} - e^{-\lambda s}| \int_0^s \|e^{\lambda\tau} f(\tau)\|_V d\tau + e^{-\operatorname{Re}\lambda(s+h)} \int_s^{s+h} \|e^{\lambda\tau} f(\tau)\|_V d\tau \\
&\leq |e^{-\lambda(s+h)} - e^{-\lambda s}| \int_0^s e^{\operatorname{Re}\lambda\tau} \|f(\tau)\|_V d\tau + e^{-\operatorname{Re}\lambda(s+h)} \int_s^{s+h} e^{\operatorname{Re}\lambda\tau} \|f(\tau)\|_V d\tau \\
&\leq C |e^{-\lambda(s+h)} - e^{-\lambda s}| \int_0^s \|f(\tau)\|_V d\tau \\
&\quad + e^{-\operatorname{Re}\lambda(s+h)} \left(\int_s^{s+h} e^{2\operatorname{Re}\lambda\tau} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^{s+h} \|f(\tau)\|_V^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade acima usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Assim fazendo $h \rightarrow 0$, temos que

$$\|w(s+h) - w(s)\|_V \rightarrow 0 \text{ para todo } s \geq 0,$$

isto é, $w \in C([0, \infty), V)$. Da continuidade de w segue que

$$\int_0^T \|w(s)\|_V^2 ds < \infty$$

isto é, $w \in L^2(0, T; V)$. Agora derivando distribucionalmente $w(s)$ temos que

$$w'(s) = e^{-\lambda s} e^{\lambda s} f(s) - \lambda w(s) = f(s) - \lambda w(s)$$

ou seja,

$$w'(s) + \lambda w(s) = f(s), \quad \text{q.s. em } (0, \infty)$$

de onde segue também que $w' \in L^2(0, T; V)$, pois $w, f \in L^2(0, T; V)$. Portanto concluímos que

$$w \in C([0, \infty), V) \cap H^1(0, T; V) \text{ para todo } T > 0.$$

Isto será útil para mostrar (2.28) e (2.29). De fato, começaremos mostrando (2.29). Para isso, como $w(s) = \int_0^s w'(\tau)d\tau$, temos que

$$\begin{aligned}
|g'(s)| \|w(s)\|_V^2 &= |g'(s)| \left\| \int_0^s w'(\tau)d\tau \right\|_V^2 \\
&\leq |g'(s)| \left(\int_0^s \|w'(\tau)\|_V d\tau \right)^2 \\
&\leq |g'(s)| \left(\int_0^s 1^2 d\tau \right) \left(\int_0^s \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \right) \\
&= |sg'(s)| \int_0^s \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \downarrow 0. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

onde usamos Cauchy-Schwarz e o ítem (a). Logo, usando a condição (g4), temos que

$$\begin{aligned}
&-k \int_\varepsilon^T g'(s) \|w(s)\|_V^2 ds \\
&\leq \int_\varepsilon^T g''(s) \|w(s)\|_V^2 ds \\
&= (g'(s) \|w(s)\|_V^2)|_\varepsilon^T - \int_\varepsilon^T g'(s) \frac{d}{ds} \|w(s)\|_V^2 ds \\
&= (g'(s) \|w(s)\|_V^2)|_\varepsilon^T - \int_\varepsilon^T g'(s) \{ (w'(s), w(s))_V - (w(s), w'(s))_V \} ds \\
&= g'(T) \|w(T)\|_V^2 - g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - \int_\varepsilon^T g'(s) 2\operatorname{Re}(w'(s), w(s))_V ds \\
&= g'(T) \|w(T)\|_V^2 - g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - 2\operatorname{Re} \int_\varepsilon^T g'(s) (w'(s), w(s))_V ds \\
&\leq -g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - 2\operatorname{Re} \int_\varepsilon^T g'(s) (w'(s), w(s))_V ds \tag{2.33}
\end{aligned}$$

para $T > \varepsilon > 0$. Na última desigualdade usamos que $g'(T) < 0$. Portanto (2.29) segue de (2.33), fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ e $T \uparrow \infty$, e lembrando (g2) e (2.32).

Agora mostraremos (2.28). Substituindo $w'(s)$, dado em (2.31), em (2.33) obtemos

$$\begin{aligned}
-k \int_{\varepsilon}^T g'(s) \|w(s)\|_V^2 ds &\leq -g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - 2Re \int_{\varepsilon}^T g'(s) (f(s), w(s))_V ds \\
&\quad + 2Re \int_{\varepsilon}^T g'(s) (\lambda w(s), w(s))_V ds \\
&= -g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - 2Re \int_{\varepsilon}^T g'(s) (f(s), w(s))_V ds \\
&\quad + 2Re\lambda \int_{\varepsilon}^T g'(s) \|w(s)\|_V^2 ds,
\end{aligned}$$

logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}
(2Re\lambda + k) \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds &\leq \\
&\leq -g'(\varepsilon) \|w(\varepsilon)\|_V^2 - 2Re \int_{\varepsilon}^T g'(s) (f(s), w(s))_V ds \\
&= |g'(\varepsilon)| \|w(\varepsilon)\|_V^2 + 2 \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| Re(f(s), w(s))_V ds \\
&\leq |g'(\varepsilon)| \|w(\varepsilon)\|_V^2 + 2 \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| |(f(s), w(s))_V| ds \\
&\leq |g'(\varepsilon)| \|w(\varepsilon)\|_V^2 + 2 \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| \|f(s)\|_v \|w(s)\|_V ds \\
&\leq |g'(\varepsilon)| \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \delta \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| \left(\|w(s)\|_V^2 + \frac{1}{\delta^2} \|f(s)\|_v^2 \right) ds
\end{aligned}$$

para todo $\delta > 0$. Por hipótese, $2Re\lambda + k > 0$, logo podemos escolher δ suficientemente pequeno tal que

$$2Re\lambda + k - \delta > 0.$$

Assím

$$\begin{aligned}
(2Re\lambda + k - \delta) \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds &\leq |g'(\varepsilon)| \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{1}{\delta} \int_{\varepsilon}^T |g'(s)| \|f(s)\|_v^2 ds \\
&\leq |g'(\varepsilon)| \|w(\varepsilon)\|_V^2 + \frac{1}{\delta} \|f\|_W^2. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ e $T \uparrow \infty$, e lembrando (2.32), temos que (2.34) implica (2.28) e consequentemente $w \in W$, logo $w \in W \cap C([0, \infty), V)$. Além disso, por (2.31), segue que

$w' \in W$. Isto completa a prova da parte (b).

(c) Como $w(s) = \int_0^s w'(\tau)d\tau$ e usando o fato de que $|g'|$ é decrescente, temos

$$\begin{aligned}
\|g'(s)w(s)\|_V &= \left\| g'(s) \int_0^s w'(\tau)d\tau \right\|_V \\
&\leq |g'(s)|^{\frac{1}{2}} \int_0^s |g'(s)|^{\frac{1}{2}} \|w'(\tau)\|_V d\tau \\
&\leq |g'(s)|^{\frac{1}{2}} \int_0^s |g'(\tau)|^{\frac{1}{2}} \|w'(\tau)\|_V d\tau \\
&\leq |g'(s)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s 1^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s |g'(\tau)| \|w'(\tau)\|_V^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |sg'(s)|^{\frac{1}{2}} \|w'\|_W.
\end{aligned}$$

de onde $\|g'(s)w(s)\|_V \rightarrow 0$ quando $s \downarrow 0$ por (a). Além disso, de (g4) temos que

$$-g'(s) \leq -g'(s_0)e^{-k(s-s_0)} \quad \text{para } s \geq s_0 > 0.$$

Logo

$$|sg'(s)| \leq |g'(s_0)| \frac{s}{e^{k(s-s_0)}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty.$$

Portanto pelas desigualdades acima temos também que

$$\|g'(s)w(s)\|_V \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty.$$

O que mostra (c). ■

Em seguida, daremos uma descrição parcial do espectro $\sigma(\mathcal{A})$. Denotamos por

$$\Lambda_k := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > -\frac{k}{2} \right\}, \tag{2.35}$$

$$\Delta(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} + g(0) + \widehat{g}'(\lambda),$$

onde $\widehat{g}'(\lambda) = \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s} ds$. Para todo $\lambda \in \Lambda_k$, a integral anterior esta bem definida e $\Delta(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$. A última afirmação segue do fato de que A^{-1} é limitado. De fato, sendo A auto-adjunto ele é fechado, logo sua inversa $A^{-1} : H \rightarrow H$ também é fechado, então pelo Teorema 1.9 (Teorema do Gráfico Fechado) no Capítulo 1, temos que A^{-1} é limitado.

Lema 2.9 Para o operador \mathcal{A} definido em (2.8)-(2.9) temos que

$$\Lambda_k \cap \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \Lambda_k; R(\Delta(\lambda)) = H\}, \quad (2.36)$$

$$\Lambda_k \cap \sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \Lambda_k; -\frac{1}{\lambda^2}(g(0) + \widehat{g}'(\lambda)) \in \sigma(A^{-1}) \right\}, \quad (2.37)$$

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}, \quad (2.38)$$

onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de \mathcal{A} .

Demonstração: Mostraremos primeiro (2.36) por dupla inclusão. Logo (2.37) e (2.38) seguem como consequencia.

Antes disso, definimos o operador $L : W \rightarrow V$ tal que

$$Lw(\cdot) := - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds.$$

Desde que $g' \in L^1(0, \infty)$ tem-se que $L \in \mathcal{L}(W, V)$. De fato

$$\begin{aligned} \|Lw\|_V &= \left\| \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \right\|_V \leq \int_0^\infty |g'(s)| \|w(s)\|_V ds \\ &= \int_0^\infty |g'(s)|^{\frac{1}{2}} |g'(s)|^{\frac{1}{2}} \|w(s)\|_V ds \leq \left(\int_0^\infty |g'(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |g'(s)| \|w(s)\|_V^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \|w\|_W. \end{aligned}$$

Agora, para $\lambda \in \Lambda_k$, resolveremos a equação resolvente

$$\begin{cases} (\lambda - \mathcal{A})U = F = (f, f_1, h) \in X \\ U = (u, v, w) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \end{cases} \quad (2.39)$$

isto é,

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \in V, \\ \lambda v + A(u + Lw) = f_1 \in H, \\ \lambda w(s) - v + w'(s) = h(s) \in W, \\ (u, v, w) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{cases} \quad (2.40)$$

Afirmamos pelo Lema 2.8, que (2.39) é equivalente a

$$\begin{cases} w(s) = \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) + \lambda u - f)d\tau, \\ v = \lambda u - f, \\ \Delta(\lambda)u = A^{-1}(f_1 + \lambda f) - L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) - f)d\tau, \\ u \in V, F \in X. \end{cases} \quad (2.41)$$

De fato, é claro que a primeira equação em (2.40) é equivalente a $v = \lambda u - f \in V$. Da terceira equação de (2.40) temos que

$$\begin{cases} w'(s) + \lambda w(s) = v + h(s) \in W, & \text{pois } v \in V \subset W, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

de onde, multiplicando por $e^{\lambda s}$, temos

$$\begin{aligned} e^{\lambda s}(w'(s) + \lambda w(s)) &= e^{\lambda s}(v + h(s)) \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}(e^{\lambda s}w(s)) &= e^{\lambda s}(v + h(s)) \\ \Rightarrow \int_0^s \frac{d}{d\tau}(e^{\lambda\tau}w(\tau))d\tau &= \int_0^s e^{\lambda\tau}(v + h(\tau))d\tau \\ \Rightarrow e^{\lambda s}w(s) &= \int_0^s e^{\lambda\tau}(h(\tau) + \lambda u - f)d\tau, & \text{pois } w(0) = 0 \\ \Rightarrow w(s) &= \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) + \lambda u - f)d\tau. \end{aligned}$$

Reciprocamente se $w(s) = \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) + \lambda u - f)d\tau$ o Lema 2.8 mostra que a terceira equação em (2.40) vale com $w, w' \in W$. Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned} \lambda v + A(u + Lw) &= f_1 \\ \Leftrightarrow A(u + Lw) &= f_1 - \lambda(\lambda u - f) \\ \Leftrightarrow A(u + Lw) &= f_1 + \lambda f - \lambda^2 u \\ \Leftrightarrow (u + Lw) &= A^{-1}(f_1 + \lambda f) - \lambda^2 A^{-1}u \\ \Leftrightarrow \lambda^2 A^{-1}u + u &= -Lw + A^{-1}(f_1 + \lambda f) \\ \Leftrightarrow \lambda^2 A^{-1}u + u &= -L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) + \lambda u - f)d\tau + A^{-1}(f_1 + \lambda f) + A^{-1}(f_1 + \lambda f) \\ \Leftrightarrow \lambda^2 A^{-1}u + u &= -L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) - f)d\tau - L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}\lambda u d\tau + A^{-1}(f_1 + \lambda f). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} -L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}\lambda u d\tau &= -\lambda L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}d\tau u \\ &= -L(1 - e^{-\lambda s})u = \int_0^\infty g'(s)(1 - e^{-\lambda s})uds \\ &= \left(\int_0^\infty g'(s)ds - \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}ds \right) u = u - g(0)u - \widehat{g}'(\lambda)u. \end{aligned}$$

Substituindo isto na equivalência acima, teremos

$$\begin{aligned}
& \lambda v + A(u + Lw) = f_1 \\
\Leftrightarrow & \lambda^2 A^{-1}u + u = u - g(0)u - \widehat{g}'(\lambda)u - L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) - f)d\tau + A^{-1}(f_1 + \lambda f) \\
\Leftrightarrow & \lambda^2 A^{-1}u + g(0)u + \widehat{g}'(\lambda)u = A^{-1}(f_1 + \lambda f) - L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) - f)d\tau \\
\Leftrightarrow & \Delta(\lambda)u = A^{-1}(f_1 + \lambda f) - L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}(h(\tau) - f)d\tau,
\end{aligned}$$

isto é, (2.39) e (2.41) são equivalentes. Com a ajuda desta equivalência mostraremos (2.36) por dupla inclusão.

Seja $\lambda \in \Lambda_k \cap \rho(\mathcal{A})$. Então para qualquer $F \in X$ existe uma única solução $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ de (2.39). Em particular, para $f = f_1 = 0$ e

$$h(s) = \frac{\lambda}{d(\lambda)}x, \quad \text{onde } x \in V \quad \text{e} \quad d(\lambda) \equiv 1 - g(0) - \widehat{g}'(\lambda) \neq 0,$$

existe uma única $u \in V$ satisfazendo (2.41), isto é, $\Delta(\lambda)u = x$ e $\Delta(\lambda)A^{\frac{1}{2}}u = A^{\frac{1}{2}}x$, para todo $x \in V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, de fato

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda)u &= -L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}h(\tau)d\tau = -L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}\frac{\lambda}{d(\lambda)}xd\tau \\
&= -\frac{\lambda}{d(\lambda)}L \int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}d\tau x = -\frac{1}{d(\lambda)}L(1 - e^{-\lambda s})x \\
&= \frac{1}{d(\lambda)} \int_0^\infty g'(s)(1 - e^{-\lambda s})x ds = \frac{1}{d(\lambda)} \left[\int_0^\infty g'(s)dsx - \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}dsx \right] \\
&= \frac{1}{d(\lambda)} [(1 - g(s))x - \widehat{g}'(\lambda)x] = x.
\end{aligned}$$

Desde que A^{-1} e $A^{\frac{1}{2}}$ comutam no domínio $V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ temos que $A^{\frac{1}{2}}$ comuta com $\Delta(\lambda)$, logo de acima segue que

$$\Delta(\lambda)A^{\frac{1}{2}}u = A^{\frac{1}{2}}x.$$

Daqui concluímos que

$$R(\Delta(\lambda)) = H.$$

De fato, sabemos que o operador

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H \quad \text{é bijetivo,}$$

então para todo $f \in H$ existe um $y \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$Ay = f, \text{ isto é, } A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}y = f,$$

ou seja, para todo $f \in H$ existe um $x = A^{\frac{1}{2}}y \in V$ tal que $A^{\frac{1}{2}}x = f$. Logo, para este $x \in V$, existe um único $u \in V$ tal que

$$\Delta(\lambda)A^{\frac{1}{2}}u = A^{\frac{1}{2}}x = f,$$

o qual mostra o desejado. Se

$$d(\lambda) = 1 - g(0) - \widehat{g}'(\lambda) = 1 - g(0) - \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s} ds = 0$$

então como $g'(s)e^{-sRe\lambda}$ é estritamente crescente, pois

$$\frac{d}{ds}g'(s)e^{-sRe\lambda} = (g''(s) - Re\lambda g'(s))e^{-sRe\lambda} > 0,$$

desde que $g''(s) - Re\lambda g'(s) > g''(s) + kg'(s) \geq 0$ por (g4), temos que

$$\begin{aligned} Im d(\lambda) &= Im \left\{ 1 - g(0) - \int_0^\infty g'(s)e^{-sRe\lambda} (\cos(sIm\lambda) - i\sin(sIm\lambda)) ds \right\} \\ &= - \int_0^\infty g'(s)e^{-sRe\lambda} \sin(sIm\lambda) ds = 0 \end{aligned}$$

implica $Im\lambda = 0$. Assim, temos novamente que

$$R(\Delta(\lambda)) = R(\lambda^2 A^{-1} + g(0) + \widehat{g}'(\lambda) - 1 + 1) = R(I + \lambda^2 A^{-1}) = H.$$

Por outro lado, se $Re\lambda > -\frac{k}{2}$ e $R(\Delta(\lambda)) = H$, sendo A auto-adjunto segue que A^{-1} é também auto-adjunto, logo

$$\begin{aligned} Ker(\Delta(\lambda)) &= \{x \in H; \lambda^2 A^{-1}x + (g(0) + \widehat{g}'(\lambda))x = 0\} \\ &= \{x \in H; A^{-1}x = -\frac{1}{\lambda^2}(g(0) + \widehat{g}'(\lambda))x\} \\ &= \{x \in H; A^{-1}x = (A^{-1})^*x = -\frac{1}{(\bar{\lambda})^2}(g(0) + \widehat{g}'(\bar{\lambda}))x\} \\ &= Ker(\Delta(\bar{\lambda})) \\ &= Ker[\Delta(\lambda)]^* \\ &= \{0\} \text{ se e somente se } \overline{R(\Delta(\lambda))} = H. \end{aligned} \tag{2.42}$$

onde usamos que

$$(\Delta(\lambda))^* = (\lambda^2 A^{-1})^* + (g(0)\mathcal{I})^* + (\widehat{g}'(\lambda)\mathcal{I})^* = (\bar{\lambda})^2 A^{-1} + g(0) + \widehat{g}'(\bar{\lambda}) = \Delta(\bar{\lambda}),$$

e o Corolário 1.18 do Capítulo 1, desde que $\Delta(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$. Portanto, a inversa $\Delta(\lambda)$ existe e pertence a $\mathcal{L}(H)$. (Note que $\mathcal{L}(H)$ é um algebra de Banach). Assim, pela construção de (2.41) temos que para todo $F \in X$, a equação (2.39) tem uma única solução $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, isto é, a aplicação

$$(\lambda - \mathcal{A}) : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$$

é bijetiva. Logo, sendo \mathcal{A} fechado, pela Definição 1.39 do Capítulo 1 temos que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Isto termina a prova de (2.36).

A igualdade (2.37) segue de (2.36) e (2.42). De fato, $\lambda \in \Lambda_k \cap \sigma(\mathcal{A})$ se e somente se $\lambda \in \Lambda_k$ e $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ (isto é $\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$), isto equivale a que

$$\lambda \notin \Lambda_k \cap \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \Lambda_k; R(\Delta(\lambda)) = H\}$$

que equivale a que, $\overline{R(\Delta(\lambda))} \neq H$ (por (2.42) e a demonstração de (2.36)), que equivale a $Ker(\Delta(\lambda)) \neq \{0\}$, isto equivale a que o operador

$$\Delta(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} + g(0) + \widehat{g}'(\lambda)$$

não é inversível, isto é,

$$-\frac{1}{\lambda^2}(g(0) + \widehat{g}'(\lambda)) \in \sigma(A^{-1}).$$

Finalmente, (2.38) é verdadeiro desde que $\gamma\lambda^2 + g(0) + \widehat{g}'(\lambda) \neq 0$ para todo $\gamma \geq 0$ e $Re\lambda \geq 0$. De fato, seja $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda \geq 0\}$, como $Re\lambda \geq 0 > -\frac{k}{2}$ temos que $\lambda \in \Lambda_k$. Se $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, está resolvido e se $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, de $\sigma(A^{-1}) \subset [0, \infty)$ e (2.37) temos que

$$\gamma = -\frac{1}{\lambda^2}(g(0) + \widehat{g}'(\lambda)) \in \sigma(A^{-1}),$$

isto é, $\gamma\lambda^2 + g(0) + \widehat{g}'(\lambda) = 0$ para todo $\gamma \geq 0$ e $Re\lambda \geq 0$. Contradição. ■

O seguinte Lema é o principal resultado deste trabalho, ele será usada para obter a estimativa de $\omega_0(\mathcal{A})$ no Teorema 2.11 e além disso esta estimativa será usada para mostrar a propriedade de crescimento definida pelo espectro, isto é, $\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A})$ na seguinte seção.

Lema 2.10 *Suponha que temos $\sigma < k/2$ satisfazendo*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda \geq -\sigma\} \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{2.43}$$

e

$$\sigma < \frac{k}{2}C(\sigma)(1 + g(0) + C(\sigma))^{-1}, \quad (2.44)$$

onde $C(\sigma) = \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})|g'(s)|ds$. Então

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| = M_\sigma < \infty. \quad (2.45)$$

Além disso, (2.45) vale para todo $\gamma \leq \sigma$.

Demonstração: Suponhamos que (2.45) não é verdade. Então, existem seqüências $\omega_n \rightarrow \infty$ e $U_n = (u_n, v_n, w_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com

$$\|U_n\|_X^2 = \|u_n\|_V^2 + \|v_n\|_H^2 + \|w_n\|_W^2 = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad (2.46)$$

tal que

$$(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})U_n \rightarrow 0 \quad \text{em } X, \quad (2.47)$$

De fato, se (2.45) não é verdade, pela continuidade da resolvente, existe uma seqüência $\omega_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\|(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})^{-1}\| \rightarrow \infty,$$

isto é,

$$\sup_{F \in X, F \neq 0} \frac{\|(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})^{-1}F\|_X}{\|F\|_X} \rightarrow \infty,$$

então existe uma seqüência de vetores não nulos (F_n) tal que

$$\frac{\|(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})^{-1}F_n\|_X}{\|F_n\|_X} \rightarrow \infty,$$

logo

$$\frac{\|F_n\|_X}{\|(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})^{-1}F_n\|_X} \rightarrow 0.$$

Pondo $\tilde{U}_n = (-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})^{-1}F_n$ segue que

$$\frac{\|(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})\tilde{U}_n\|_X}{\|\tilde{U}_n\|_X} \rightarrow 0,$$

portanto existem vetores unitários $U_n = \frac{\tilde{U}_n}{\|\tilde{U}_n\|_X}$ em X tal que

$$\|(-\sigma + i\omega_n - \mathcal{A})U_n\|_X \rightarrow 0.$$

Seja $\lambda_n = -\sigma + i\omega_n$, então (2.47) é equivalente a

$$\lambda_n u_n - v_n = f_n \rightarrow 0 \quad \text{em } V, \quad (2.48)$$

$$\lambda_n v_n + A \left(u_n - \int_0^\infty g'(s) w_n(s) ds \right) = f_{1n} \rightarrow 0 \quad \text{em } H, \quad (2.49)$$

$$\lambda_n w_n(s) - v_n + w_n'(s) = h_n(s) \rightarrow 0 \quad \text{em } W. \quad (2.50)$$

Note que, por (2.46), as seqüências $\|u_n\|_V$, $\|w_n\|_H$, $\|w_n\|_W$ são limitadas. Então, tomando produto interno de (2.48) com v_n em H , temos

$$\lambda_n (u_n, v_n)_H - \|v_n\|_H^2 = (f_n, v_n)_H \rightarrow 0, \quad (2.51)$$

pois,

$$|(f_n, v_n)_H| \leq \|f_n\|_H \|v_n\|_H \leq C \|f_n\|_V \|v_n\|_H \rightarrow 0.$$

Como $\lambda_n \rightarrow \infty$ então $\frac{1}{\lambda_n} \rightarrow 0$, logo de (2.51) temos que

$$(u_n, v_n)_H - \frac{1}{\lambda_n} \|v_n\|_H^2 \rightarrow 0$$

é claro também que

$$\frac{1}{\lambda_n} \|v_n\|_H^2 \rightarrow 0$$

então, somando as duas últimas convergências acima, segue

$$(u_n, v_n)_H \rightarrow 0. \quad (2.52)$$

Tomando produto interno de (2.49) com u_n em H , temos

$$\lambda_n (v_n, u_n)_H + \left(A \left(u_n - \int_0^\infty g'(s) w_n(s) ds \right), u_n \right)_H = (f_{1n}, u_n)_H \rightarrow 0,$$

pois, $|(f_{1n}, u_n)_H| \leq \|f_{1n}\|_H \|u_n\|_H \leq C \|u_n\|_V \|f_{1n}\|_H \rightarrow 0$. Logo

$$\lambda_n (v_n, u_n)_H + \left(A^{\frac{1}{2}} \left(u_n - \int_0^\infty g'(s) w_n(s) ds \right), A^{\frac{1}{2}} u_n \right)_H \rightarrow 0,$$

então

$$\lambda_n (v_n, u_n)_H + (A^{\frac{1}{2}} u_n, A^{\frac{1}{2}} u_n)_H - \left(\int_0^\infty g'(s) A^{\frac{1}{2}} w_n(s) ds, A^{\frac{1}{2}} u_n \right)_H \rightarrow 0,$$

então

$$\lambda_n (v_n, u_n)_H + (u_n, u_n)_V - \int_0^\infty g'(s) (A^{\frac{1}{2}} w_n(s), A^{\frac{1}{2}} u_n)_H ds \rightarrow 0,$$

de onde

$$\lambda_n(v_n, u_n)_H + \|u_n\|_V^2 + (w_n(s), u_n)_W \rightarrow 0. \quad (2.53)$$

Segue de (2.48) e (2.50) que

$$w_n'(s) + \lambda_n w_n(s) = \lambda_n u_n - f_n + h_n(s) \in W$$

e pela demonstração do Lema 2.8 temos que

$$\begin{aligned} w_n(s) &= \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} (\lambda_n u_n - f_n + h_n(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} (h_n(\tau) - f_n) d\tau + \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} \lambda_n u_n d\tau \\ &= \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} (h_n(\tau) - f_n) d\tau + \left(\int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} d\tau \right) \lambda_n u_n \\ &= \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} (h_n(\tau) - f_n) d\tau + (1 - e^{-\lambda_n s}) u_n. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Assim, usando (2.28) do Lema 2.8 temos que

$$\begin{aligned} \|w_n - (1 - e^{-\lambda_n s}) u_n\|_W^2 &= \left\| \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)} (h_n(\tau) - f_n) d\tau \right\|_W^2 \\ &\leq \frac{1}{\delta} (2Re\lambda_n + k - \delta)^{-1} \|h_n - f_n\|_W^2 \\ &\leq \frac{1}{\delta} (2\sigma + k - \delta)^{-1} (\|h_n\|_W + \|f_n\|_W)^2 \\ &\leq \frac{1}{\delta} (2\sigma + k - \delta)^{-1} (\|h_n\|_W + C\|f_n\|_V)^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Desde que

$$\begin{aligned}
& \|w_n - (1 - e^{-\lambda_n s})u_n\|_W \\
& \geq \left| \|w_n\|_W - \|(1 - e^{-\lambda_n s})u_n\|_W \right| \\
& = \left| \|w_n\|_W - \left(\int_0^\infty |g'(s)| \|(1 - e^{-\lambda_n s})u_n\|_V^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\
& = \left| \|w_n\|_W - \left(\int_0^\infty |g'(s)| |1 - e^{-\lambda_n s}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \right| \\
& = \left| \|w_n\|_W - \left(\int_0^\infty |g'(s)| |1 - e^{\sigma s} (\cos(\omega_n s) - i \operatorname{sen}(\omega_n s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \right| \\
& = \left| \|w_n\|_W - \left(\int_0^\infty |g'(s)| ((1 - e^{\sigma s} \cos(\omega_n s))^2 + (e^{\sigma s} \operatorname{sen}(\omega_n s))^2) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \right| \\
& = \left| \|w_n\|_W - \left(\int_0^\infty |g'(s)| (1 + e^{2\sigma s} - 2e^{\sigma s} \cos(\omega_n s)) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \right| \\
& = \left| \|w_n\|_W - \left(\int_0^\infty |g'(s)| (1 + e^{2\sigma s}) ds - 2 \int_0^\infty |g'(s)| e^{\sigma s} \cos(\omega_n s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \right|
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \left| \|w_n\|_W - \left(C(\sigma) - 2 \int_0^\infty |g'(s)| e^{\sigma s} \cos(\omega_n s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \right| \\
& \leq \|w_n - (1 - e^{-\lambda_n s})u_n\|_W,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

então por (2.55) temos que

$$\|w_n\|_W - \left(C(\sigma) - 2 \int_0^\infty |g'(s)| e^{\sigma s} \cos(\omega_n s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V \rightarrow 0,$$

por outro lado, desde que as seqüências $\|u_n\|_V$ e $\|w_n\|_W$ são limitadas por (2.46), temos que

$$\|w_n\|_W + \left(C(\sigma) - 2 \int_0^\infty |g'(s)| e^{\sigma s} \cos(\omega_n s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_V$$

é limitado, logo temos que

$$\|w_n\|_W^2 - \left(C(\sigma) - 2 \int_0^\infty |g'(s)| e^{\sigma s} \cos(\omega_n s) ds \right) \|u_n\|_V^2 \rightarrow 0.$$

Além disso, pelo Lema de Riemann-Lebesgue (ver Teorema 1.23, do Capítulo 1) temos que

$$\left(-2 \int_0^\infty |g'(s)| e^{\sigma s} \cos(\omega_n s) ds \right) \|u_n\|_V^2 \rightarrow 0,$$

assim, somando as duas ultimas convergências acima, obtemos que

$$\|w_n\|_W^2 - C(\sigma)\|u_n\|_V^2 \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

Substituindo (2.54) em (2.53), temos

$$\lambda_n(v_n, u_n)_H + \|u_n\|_V^2 + \left(\int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)}(h_n(\tau) - f_n)d\tau, u_n \right)_W + ((1 - e^{-\lambda_n s})u_n, u_n)_W \rightarrow 0,$$

onde, por (2.55)

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)}(h_n(\tau) - f_n)d\tau, u_n \right)_W \right|^2 &\leq \left\| \int_0^s e^{-\lambda_n(s-\tau)}(h_n(\tau) - f_n)d\tau \right\|_W^2 \|u_n\|_W^2 \\ &= \|w_n - (1 - e^{-\lambda_n s})u_n\|_W^2 \|u_n\|_W^2 \\ &\leq C_1 \|u_n\|_V^2 \|w_n - (1 - e^{-\lambda_n s})u_n\|_W^2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

logo

$$\lambda_n(v_n, u_n)_H + \|u_n\|_V^2 + ((1 - e^{-\lambda_n s})u_n, u_n)_W \rightarrow 0,$$

onde também

$$\begin{aligned} ((1 - e^{-\lambda_n s})u_n, u_n)_W &= \int_0^\infty |g'(s)| ((1 - e^{-\lambda_n s})u_n, u_n)_V ds \\ &= \left(\int_0^\infty |g'(s)|(1 - e^{-\lambda_n s})ds \right) (u_n, u_n)_V \\ &= \left(- \int_0^\infty g'(s)ds - \int_0^\infty g'(s)e^{-(\sigma+i\omega_n)s}ds \right) \|u_n\|_V^2 \\ &= \left(-(1 - g(0)) - \int_0^\infty g'(s)e^{\sigma s}e^{-i\omega_n s}ds \right) \|u_n\|_V^2 \\ &= -\|u_n\|_V^2 + g(0)\|u_n\|_V^2 - \left(\int_0^\infty g'(s)e^{\sigma s}e^{-i\omega_n s}ds \right) \|u_n\|_V^2 \end{aligned}$$

logo, pelo lema de Riemann-Lebesgue novamente, temos

$$\lambda_n(v_n, u_n)_H + g(0)\|u_n\|_V^2 \rightarrow 0,$$

tomando seu conjugado temos que

$$\overline{\lambda_n}(u_n, v_n)_H + g(0)\|u_n\|_V^2 \rightarrow 0.$$

Somando este último com (2.51), resulta

$$(2\operatorname{Re}\lambda_n)(u_n, v_n)_H + g(0)\|u_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2 \rightarrow 0,$$

mas, por (2.52), segue que

$$(2\operatorname{Re}\lambda_n)(u_n, v_n)_H = -2\sigma(u_n, v_n)_H \rightarrow 0,$$

então concluímos finalmente que

$$g(0)\|u_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2 \rightarrow 0. \quad (2.58)$$

Multiplicando (2.57) por $g(0)$ e (2.58) por $C(\sigma)$ logo somando, obtemos

$$g(0)\|w_n\|_W^2 - C(\sigma)\|v_n\|_H^2 \rightarrow 0,$$

somando isto com (2.57), resulta

$$(1 + g(0))\|w_n\|_W^2 + C(\sigma)(-\|u_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2) \rightarrow 0,$$

isto é, por (2.46), que

$$(1 + g(0) + C(\sigma))\|w_n\|_W^2 - C(\sigma) \rightarrow 0,$$

assim obtemos que

$$\|w_n\|_W^2 \rightarrow C(\sigma)(1 + g(0) + C(\sigma))^{-1}. \quad (2.59)$$

Por outro lado, de (2.29) e (2.14), temos

$$\begin{aligned} -\sigma + \frac{k}{2}\|w_n\|_W^2 &\leq -\sigma - \operatorname{Re} \int_0^\infty g'(s)(w'_n(s), w_n(s))_V ds \\ &= \operatorname{Re}\lambda_n - \operatorname{Re}(\mathcal{A}U_n, U_n)_X \\ &= \operatorname{Re}\lambda_n(U_n, U_n)_X + \operatorname{Re}(-\mathcal{A}U_n, U_n)_X \\ &= \operatorname{Re}(\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n, U_n)_X \\ &\leq |(\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n, U_n)_X| \\ &\leq \|(\lambda_n - \mathcal{A})U_n\|_X \|U_n\|_X \\ &= \|(\lambda_n - \mathcal{A})U_n\|_X. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.60), por (2.47) e (2.59), temos

$$-\sigma + \frac{k}{2}C(\sigma)(1 + g(0) + C(\sigma))^{-1} \leq 0, \quad (2.61)$$

isto é

$$\sigma \geq \frac{k}{2}C(\sigma)(1 + g(0) + C(\sigma))^{-1}.$$

Isto contradiz (2.44). Portanto (2.45) é verdadeiro.

Agora, mostraremos que (2.45) é verdade para todo $\gamma \leq \sigma$. Se $\gamma \leq \sigma$ é claro que $\gamma < k/2$ e

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \geq -\gamma\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \geq -\sigma\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

pois $-\gamma \geq -\sigma$. Então, é suficiente mostrar que (2.44) vale para todo $\gamma \leq \sigma$ uma vez que vale para σ . Seja então a função

$$G(\gamma) = \gamma(1 + g(0) + C(\gamma)) - \frac{k}{2}C(\gamma), \quad (2.62)$$

afirmamos que ela é estritamente crescente em $(-\infty, \frac{k}{2})$. De fato

$$\begin{aligned} G'(\gamma) &= 1 + g(0) + C(\gamma) + \gamma C'(\gamma) - \frac{k}{2}C'(\gamma) \\ &= 1 + g(0) + \int_0^\infty (1 + e^{2\gamma s})|g'(s)|ds + \int_0^\infty 2\gamma s e^{2\gamma s}|g'(s)|ds \\ &\quad - \frac{k}{2} \int_0^\infty 2s e^{2\gamma s}|g'(s)|ds \\ &= 1 + g(0) + \int_0^\infty |g'(s)|ds + \int_0^\infty (1 + 2\gamma s - ks)e^{2\gamma s}|g'(s)|ds \\ &> 1 + \int_0^\infty (1 + 2\gamma s)e^{2\gamma s}|g'(s)|ds - \int_0^\infty kse^{2\gamma s}|g'(s)|ds \\ &> 1 - \int_0^\infty (1 + 2\gamma s)e^{2\gamma s}g'(s)ds - \int_0^\infty se^{2\gamma s}g''(s)ds \\ &= 1 - \int_0^\infty (1 + 2\gamma s)e^{2\gamma s}g'(s)ds - \left[(se^{2\gamma s}g'(s))\Big|_0^\infty \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty (1 + 2\gamma s)e^{2\gamma s}g'(s)ds \right] \\ &= 1 + (s|g'(s)|e^{2\gamma s})\Big|_0^\infty = 1 > 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde usamos (g4) e (2.10) do Lema 2.2. Além disso, note que de (g4) temos que

$$|g'(s)| \leq |g'(s_0)|e^{-k(s-s_0)} \quad \text{para } s \geq s_0 > 0,$$

logo segue que

$$s|g'(s)|e^{2\gamma s} \leq |g'(s_0)|se^{-k(s-s_0)}e^{2\gamma s} = |g'(s_0)|e^{-ks_0} \frac{s}{e^{(k+2\gamma)s}} \rightarrow 0.$$

Assim, sendo $G(\gamma)$ estritamente crescente, temos que

$$\gamma(1 + g(0) + C(\gamma)) - \frac{k}{2}C(\gamma) = G(\gamma) \leq G(\sigma) = \sigma(1 + g(0) + C(\sigma)) - \frac{k}{2}C(\sigma) < 0$$

isto é,

$$\gamma < \frac{k}{2}C(\gamma)(1 + g(0) + C(\gamma))^{-1} \quad \text{para todo } \gamma \leq \sigma.$$

■

Teorema 2.11 *Nas condições do Lema 2.10 temos que $\omega_0(\mathcal{A}) < -\sigma$.*

Demonstração: Sabemos que se o operador $(\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é tal que

$$\|(\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| < 1$$

então o operador

$$[I - (\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}]^{-1}$$

existe e é limitado em X . Logo

$$\begin{aligned} (-\gamma + i\omega - \mathcal{A})^{-1} &= [(-\sigma + i\omega - \mathcal{A}) + (\sigma - \gamma)]^{-1} \\ &= [(I + (\sigma - \gamma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1})(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})]^{-1} \\ &= (-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1} [I - (\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}]^{-1} \in \mathcal{L}(X) \end{aligned} \quad (2.64)$$

para todo $\gamma \in [\sigma, \sigma + \frac{1}{M_\sigma})$, onde M_σ é dado em (2.45).

Então de (2.64) e da hipótese (2.43) temos que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \geq -\sigma - \frac{1}{M_\sigma}\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

logo notando que

$$-\sigma - \frac{1}{M_\sigma} < -\sigma - \frac{1}{2M_\sigma},$$

temos que

$$\sigma_0(\mathcal{A}) = \sup\{\operatorname{Re}\lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < -\sigma - \frac{1}{2M_\sigma} \quad (2.65)$$

e podemos deduzir também que, para todo $\gamma \in [\sigma, \sigma + \frac{1}{2M_\sigma}]$, as seguintes desigualdades valem:

$$\begin{aligned}
\|(-\gamma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| &= \left\| (-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1} [I - (\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}]^{-1} \right\| \\
&\leq \|(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| \left\| (I - (\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1})^{-1} \right\| \\
&\leq M_\sigma \left\| \sum_{j=0}^{\infty} [(\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}]^j \right\| \\
&\leq M_\sigma \sum_{j=0}^{\infty} \|(\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\|^j \\
&= M_\sigma \frac{1}{1 - \|(\gamma - \sigma)(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\|} \\
&= M_\sigma \frac{1}{1 - |\gamma - \sigma| \|(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\|} \\
&\leq M_\sigma \frac{1}{1 - |\gamma - \sigma| M_\sigma} \\
&\leq 2M_\sigma,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

onde usamos o fato que

$$1 - |\gamma - \sigma| \|(-\sigma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| \geq 1 - |\sigma - \gamma| M_\sigma \geq \frac{1}{2},$$

desde que $\gamma \in [\sigma, \sigma + \frac{1}{2M_\sigma}]$ e temos (2.45).

Lembremos agora que

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \inf\{\sigma > \sigma_0(\mathcal{A}); \sup_{\operatorname{Re}\lambda=\gamma} \|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty, \text{ para todo } \gamma \geq \sigma\}. \tag{2.67}$$

Resumindo, de (2.65) e (2.66) temos que

$$-\sigma - \frac{1}{2M_\sigma} > \sigma_0(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \|(-\gamma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| \leq 2M_\sigma$$

para todo $\gamma \in [\sigma, \sigma + \frac{1}{2M_\sigma}]$, isto é, para todo

$$-\sigma - \frac{1}{2M_\sigma} \leq -\gamma \leq -\sigma.$$

Além disso por (2.45) temos que

$$\|(-\gamma + i\omega - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M_\gamma$$

para todo $-\gamma \geq -\sigma$. Portanto, usando (2.67) temos que

$$\omega_0(\mathcal{A}) \leq -\sigma - \frac{1}{2M_\sigma} < -\sigma,$$

o qual mostra o resultado. ■

Corolário 2.12 $\omega_0(\mathcal{A}) < 0$, isto é, o semigrupo e^{tA} é exponencialmente estável.

2.4 O valor exato de $\omega_0(\mathcal{A})$ para o núcleo de tipo Maxwell

O objetivo nesta seção é mostrar que o semigrupo e^{At} gerado por \mathcal{A} verifica a Propriedade de Crescimento Definida pelo Espectro para uma classe de núcleos $g(s)$. Especificamente mostraremos que

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}) = \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}, \quad (2.68)$$

onde λ_1 é o menor valor espectral do operador A , quando o núcleo $g(s)$ é do tipo Maxwell, isto é,

$$g(s) = 1 + Me^{-ks} \quad \text{para algum } M, k > 0.$$

Isto sera feito nas seguintes subseções. Na subseção 2.4.1 estabeleceremos alguns Lemas e resultados que serão usadas na demonstração de (2.68). Por último, na subseção (2.4.2) mostraremos as duas igualdades de (2.68).

2.4.1 Preliminares

Consideremos o núcleo de tipo Maxwell

$$g(s) = 1 + Me^{-ks}, \quad k, M > 0. \quad (2.69)$$

Então, a função $C(\sigma)$ dado no Teorema 2.30, para o núcleo de tipo Maxwell (2.69) está dado por

$$\begin{aligned}
C(\sigma) &= \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})|g'(s)|ds = \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})kMe^{-ks}ds \\
&= kM \left[\int_0^\infty e^{-ks}ds + \int_0^\infty e^{-(k-2\sigma)s}ds \right] \\
&= kM \left[\left(\frac{e^{-ks}}{-k} \right) \Big|_0^\infty + \left(\frac{e^{-(k-2\sigma)s}}{-(k-2\sigma)} \right) \Big|_0^\infty \right] \\
&= kM \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k-2\sigma} \right] = kM \left[\frac{k-2\sigma+k}{k(k-2\sigma)} \right] \\
&= \frac{2M(k-\sigma)}{k-2\sigma}, \quad \text{para } \sigma < \frac{k}{2}. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Lema 2.13 Para $C(\sigma)$ dado em (2.70) com $\sigma < \frac{k}{2}$, temos que (2.44) vale se e somente se

$$\sigma < \frac{k}{2} \frac{M}{1+M}. \tag{2.71}$$

Demonstração: De fato, quando $\sigma < \frac{k}{2}$, (2.44) é equivalente a

$$\begin{aligned}
0 &> \sigma - \frac{k}{2}C(\sigma)(1 + g(0) + C(\sigma))^{-1} \\
&= \sigma - \frac{k}{2} \frac{2M(k-\sigma)}{k-2\sigma} \left(1 + 1 + M + \frac{2M(k-\sigma)}{k-2\sigma} \right)^{-1} \\
&= \sigma - \frac{kM(k-\sigma)}{k-2\sigma} \left(\frac{(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)}{k-2\sigma} \right)^{-1} \\
&= \sigma - \frac{kM(k-\sigma)}{(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)} \\
&= \frac{\sigma[(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)] - kM(k-\sigma)}{(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)} \\
&= \frac{\sigma(2+M)(k-2\sigma) + 2\sigma M(k-2\sigma) + 2\sigma^2 M - kM(k-2\sigma) - kM\sigma}{(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)} \\
&= \frac{[2\sigma + \sigma M + 2\sigma M - kM](k-2\sigma) + (2\sigma - k)\sigma M}{(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)} \\
&= \frac{(k-2\sigma)[2\sigma(1+M) - kM]}{(2+M)(k-2\sigma) + 2M(k-\sigma)}. \tag{2.72}
\end{aligned}$$

É claro que (2.72) vale se e somente se $2\sigma(1+M) - kM < 0$ isto é $\sigma < \frac{k}{2} \frac{M}{1+M}$. ■

Para calcular $\sigma_0(\mathcal{A})$, usaremos (2.37) do Lema 2.9 e resolveremos a equação

$$\gamma\lambda^2 + g(0) + \widehat{g}'(\lambda) = 0 \quad (2.73)$$

em Λ_k para todo $\gamma \in \sigma(A^{-1})$. De fato, para o núcleo particular $g(s) = 1 + Me^{-ks}$, $k, M > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \widehat{g}'(\lambda) &= \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s} ds = - \int_0^\infty kMe^{-ks}e^{-\lambda s} ds \\ &= -kM \frac{e^{-(k+\lambda)s}}{-(k+\lambda)} \Big|_0^\infty = -kM \left(\frac{1}{k+\lambda} \right) = -\frac{kM}{k+\lambda}, \end{aligned}$$

onde usamos que $|e^{-(k+\lambda)s}| = e^{-(\operatorname{Re}\lambda+k)s} \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$, pois $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{k}{2}$. Logo, para este núcleo particular a equação (2.73) chega a ser

$$\gamma\lambda^2 + 1 + M - \frac{kM}{k+\lambda} = 0, \quad \gamma \in \sigma(A^{-1}), \quad \operatorname{Re}\lambda > -\frac{k}{2}. \quad (2.74)$$

A solução de (2.74) depende do valor de $\gamma \in \sigma(A^{-1})$. Para resolver isto dividimos nossa análise em dois casos:

Caso 1 Para $\gamma = 0 \in \sigma(A^{-1})$ (pois, $(-A^{-1})^{-1} = -A$ não é limitado, logo $0 \notin \rho(A)$), obtemos

$$1 + M - \frac{kM}{k+\lambda} = 0 \quad \text{de onde} \quad \frac{k+\lambda}{kM} = \frac{1}{1+M},$$

logo

$$\lambda = -\frac{k}{1+M} \quad \text{para} \quad M > 1, \quad (2.75)$$

onde $M > 1$ pois devemos ter $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{k}{2}$.

Caso 2 Quando $0 \neq \gamma \in \sigma(A^{-1})$. Neste caso definimos a nova variável $\mu = 1/\gamma$. Assim obtemos de (2.74) a equação cúbica com parâmetro μ , dada por

$$\gamma\lambda^3 + \gamma k\lambda^2 + \lambda + k + \lambda M + kM - kM = 0.$$

Logo, reescrevemos esta equação na forma

$$P(\lambda, \mu) = \lambda^3 + k\lambda^2 + \mu(1+M)\lambda + \mu k = 0. \quad (2.76)$$

Assim, (2.37) pode ser escrita na forma

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \Lambda_k = \Lambda_k \cap \left[\left\{ \frac{-k}{1+M} \right\} \cup \{ \lambda; P(\lambda, \mu) = 0, \mu \in \sigma(A) \} \right]. \quad (2.77)$$

Estudaremos a seguir a equação (2.76). Note que esta é uma equação cúbica da forma

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0.$$

Usando o método de Cardano estabelecida na seção 1.2, a substituição $\lambda = x - \frac{b}{3a} = x - \frac{k}{3}$ transforma a equação (2.76) na forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2.78}$$

onde

$$p = p(\mu) = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3\mu(1 + M) - k^3}{3} = (1 + M)\mu - \frac{k^2}{3}.$$

$$q = q(\mu) = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2}{27}k^3 - \frac{1}{3}k(1 + M)\mu + k\mu.$$

Logo, as raízes de (2.78) são dados por

$$x_1 = u + v$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v$$

onde

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Além disso, como a equação (2.78) possui coeficientes reais, quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ as soluções de (2.78) podem ser dados também por

$$x_1 = 2r \cos \frac{\varphi}{3}$$

$$x_2 = -2r \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right)$$

$$x_3 = -2r \cos\left(\frac{\pi + \varphi}{3}\right)$$

onde $\cos \varphi = \frac{-q}{2r^3}$.

Para obter mais informação da equação cúbica (2.76), derivamos ela respeito de λ . Veremos que em um caso (caso **(c)** em baixo) uma raiz de (2.76) coincide com uma raiz da

equação $P'_\lambda(\lambda, \mu)$, onde a derivada é respeito de λ . De fato, usando a formula de $p = p(\mu)$, temos

$$P'_\lambda(\lambda, \mu) = 3\lambda^2 + 2k\lambda + \mu(1 + M) = 3\lambda^2 + 2k\lambda + \frac{k^2}{3} + p,$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = -\frac{k}{3} + \sqrt{\frac{-p}{3}} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{k}{3} - \sqrt{\frac{-p}{3}}.$$

Denotemos por:

$$Q(\mu) = (p/3)^3 + (q/2)^2;$$

$$B_\pm = B_\pm(\mu) = \left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{Q(\mu)}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{para } Q(\mu) \geq 0; \quad (2.79)$$

$$P'_\lambda(\lambda, \mu) = 3(\lambda - \xi_+)(\lambda - \xi_-); \quad (2.80)$$

$$\xi_\pm = \xi_\pm(\mu) = -\frac{k}{3} \pm \sqrt{-p/3}.$$

Seja $l(\mu)$ ($\mu > 0$) a menor raiz real da equação cúbica (2.76). Deduziremos agora que as outras duas raízes estão dadas pela formula:

$$l_\pm(\mu) = -\frac{k + l(\mu)}{2} \pm \sqrt{-p - \frac{3}{4} \left(l(\mu) + \frac{k}{3}\right)^2}. \quad (2.81)$$

De fato, notemos que (2.76) pode ser reescrito como:

$$\lambda^3 + k\lambda^2 + \mu(1 + M)\lambda + \mu k = \left(\lambda^2 + (k + l(\mu))\lambda - \frac{\mu k}{l(\mu)}\right) (\lambda - l(\mu)),$$

logo as raízes do fator quadrático são

$$l_\pm(\mu) = -\frac{k + l(\mu)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(k + l(\mu))^2 + \frac{4\mu k}{l(\mu)}}.$$

Além disso, da equação (2.76) e da formula de $p = p(\mu)$, temos que

$$l(\mu)^3 + kl(\mu)^2 + \mu(1 + M)l(\mu) + \mu k = 0 \quad \text{e} \quad \mu(1 + M) = p + \frac{k^2}{3},$$

o qual implica que

$$l(\mu)^2 + kl(\mu) + p + \frac{k^2}{3} + \frac{\mu k}{l(\mu)} = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
l_{\pm}(\mu) &= -\frac{k+l(\mu)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(k+l(\mu))^2 - \left(l(\mu)^2 + kl(\mu) + p + \frac{k^2}{3}\right)} \\
&= -\frac{k+l(\mu)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}l(\mu)^2 + \frac{1}{2}kl(\mu) + \frac{1}{4}k^2 - l(\mu)^2 - kl(\mu) - p - \frac{k^2}{3}} \\
&= -\frac{k+l(\mu)}{2} \pm \sqrt{-p - \frac{1}{12}k^2 - \frac{1}{2}kl(\mu) - \frac{3}{4}l(\mu)^2} \\
&= -\frac{k+l(\mu)}{2} \pm \sqrt{-p - \frac{3}{4}\left(l(\mu)^2 + \frac{2}{3}kl(\mu) + \frac{1}{9}k^2\right)} \\
&= -\frac{k+l(\mu)}{2} \pm \sqrt{-p - \frac{3}{4}\left(l(\mu) + \frac{k}{3}\right)^2},
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Agora sim, vejamos como são as raízes da equação (2.76). Sabemos que, o número de raízes reais da equação (2.76) depende do sinal do discriminante

$$Q(\mu) = (p/3)^3 + (q/2)^2.$$

Então, por as soluções da equação cúbica (2.78), a análise das soluções da equação cúbica (2.76) podem ser divididos nos seguintes três casos:

(a) $Q(\mu) > 0$. Neste caso a equação (2.76) tem uma raiz real

$$l(\mu) = -\frac{k}{3} + B_+ + B_-,$$

e um par de raízes complexas

$$l_{\pm}(\mu) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+ + B_-}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{B_+ - B_-}{2}.$$

(b) $Q(\mu) < 0$. Neste caso a equação (2.76) tem três raízes reais distintas. A maior delas é

$$l_+(\mu) = -\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \text{onde} \quad \cos\alpha = \frac{-q}{2\sqrt{-(p/3)^3}},$$

e as outras duas são

$$l_-(\mu), l(\mu) = -\frac{k}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\pi \pm \alpha}{3},$$

onde $-\pi < \alpha < \pi$.

(c) $Q(\mu) = 0$. Neste caso a equação (2.76) tem uma raiz real

$$-\frac{k}{3} + 2\left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

e uma raiz real dupla

$$-\frac{k}{3} - \left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} \xi_-(\mu), & q \leq 0 \\ \xi_+(\mu), & q \geq 0, \end{cases}$$

onde $\xi_-(\mu)$ e $\xi_+(\mu)$ estão definidos em (2.80). Note que neste caso, a raiz real dupla coincide com uma raiz de $P'_\lambda(\lambda, \mu)$, pois

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Resumindo os resultados acima, temos

$$\sigma_+(\mu) \equiv \operatorname{Re} l_+(\mu) = \begin{cases} -\frac{k}{3} - \frac{B_+ + B_-}{2}, & Q(\mu) > 0 \text{ ou } Q(\mu) = 0 \text{ com } q \geq 0 \\ -\frac{k}{3} + 2\left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, & Q(\mu) = 0 \text{ com } q < 0 \\ -\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, & Q(\mu) < 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

2.4.2 O valor exato de $\omega_0(\mathcal{A})$

Agora já temos as ferramentas necessárias para mostrar a seguinte igualdade

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}) = \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}.$$

A demonstração deste resultado será dividido em dois teoremas.

Teorema 2.14 *Seja o núcleo $g(s) = 1 + Me^{-ks}$ para algum $M, k > 0$. Então*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}) \quad (2.83)$$

Demonstração: Da teoria de semigrupos sabemos que

$$\omega_0(\mathcal{A}) \geq \sigma_0(\mathcal{A}),$$

então basta mostrar que também é válida a desigualdade

$$\omega_0(\mathcal{A}) \leq \sigma_0(\mathcal{A}),$$

o qual será conseqüência do Teorema 2.11 da seção anterior.

De fato, observando as raízes

$$\xi_{\pm} = \xi_{\pm}(\mu) = -\frac{k}{3} \pm \sqrt{-p/3}$$

do polinômio $P'_{\lambda}(\lambda, \mu)$ dado em (2.80), temos que:

Se $p = p(\mu) > 0$ então as raízes ξ_{\pm} são complexas, isto é, $P'_{\lambda}(\lambda, \mu)$ não possui raízes reais, isto é

$$P'_{\lambda}(\lambda, \mu) > 0 \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{se } p(\mu) > 0.$$

Reciprocamente, quando $p(\mu) < 0$, $P'_{\lambda}(\lambda, \mu)$ tem duas raízes reais, logo

$$P'_{\lambda}(\lambda, \mu) \begin{cases} > 0, & \lambda \in (-\infty, \xi_{-}) \cup (\xi_{+}, \infty) \\ < 0, & \lambda \in (\xi_{-}, \xi_{+}) \end{cases} \quad \text{se } p(\mu) \leq 0,$$

isto é, $P(\lambda, \mu)$ é crescente nos intervalos $(-\infty, \xi_{-}) \cup (\xi_{+}, \infty)$ e decrescente no intervalo (ξ_{-}, ξ_{+}) .

Verificasse também que

$$P(-k, \mu) = -\mu k M < 0$$

e

$$P\left(-\frac{k}{1+M}, \mu\right) = \frac{k^3 M}{(1+M)^3} > 0,$$

para todo $\mu \in (0, \infty)$. Ou seja, $P(\lambda, \mu)$ tem uma raiz entre $-k$ e $-\frac{k}{1+M}$ para todo $\mu \in (0, \infty)$.

Além disso, vejamos que, de (2.80)

$$-k < \xi_{-}(\mu) \quad \text{se } p(\mu) \leq 0. \quad (2.84)$$

De fato, se $p = p(\mu) \leq 0$ temos que

$$\xi_{+}(\mu) + \frac{k}{3} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \geq 0$$

então

$$-k < -\frac{k}{3} \leq \xi_{+}(\mu),$$

e mais ainda

$$P'_{\lambda}(-k, \mu) = 3k^2 - 2k^2 + (1+M)\mu = k^2 + (1+M)\mu > 0 \quad \text{para todo } \mu \in (0, \infty),$$

isto é, $P(\lambda, \mu)$ é crescente em $-k$ para todo $\mu \in (0, \infty)$, de onde segue (2.84).

Portanto, devemos ter

$$-k < l(\mu) < -\frac{k}{1+M}, \quad \text{para todo } \mu \in (0, \infty). \quad (2.85)$$

Finalmente, combinando (2.81) e (2.85) os núcleos de tipo Maxwell verificam as hipóteses do teorema (2.11), isto nos levará a mostrar que $\omega_0(\mathcal{A}) \leq \sigma_0(\mathcal{A})$. De fato, note que

$$\begin{aligned} \sigma_0(\mathcal{A}) &= \sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} \geq \sigma_+(\lambda_1) \equiv Rel_+(\lambda_1) \\ &\geq -\frac{k+l(\lambda_1)}{2} = -\frac{k}{2} - \frac{l(\lambda_1)}{2} > -\frac{k}{2} + \frac{k}{2(1+M)} \\ &= -\frac{k}{2} \left(1 - \frac{1}{1+M}\right) = -\frac{k}{2} \left(\frac{M}{1+M}\right) > -\frac{k}{2}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

isto é, para todo $-\sigma > \sigma_0(\mathcal{A})$, temos que

$$\sigma < \frac{k}{2} \left(\frac{M}{1+M}\right) < \frac{k}{2}.$$

Logo, do lema 2.13, temos que vale a condição (2.44). Além disso é claro que (2.43) também se verifica, pois

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda \geq -\sigma > \sigma_0(\mathcal{A})\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Portanto, pelo Teorema (2.11)

$$\omega_0(\mathcal{A}) < -\sigma, \quad \text{para todo } -\sigma > \sigma_0(\mathcal{A}).$$

Em particular escolhendo $-\sigma = \sigma_0(\mathcal{A}) + \frac{1}{n}$, temos que

$$\omega_0(\mathcal{A}) < \sigma_0(\mathcal{A}) + \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos que

$$\omega_0(\mathcal{A}) \leq \sigma_0(\mathcal{A}).$$

Com o qual podemos concluir que $\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A})$. ■

Teorema 2.15 *Seja o núcleo $g(s) = 1 + Me^{-ks}$ para algum $M, k > 0$. Então*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_0(\mathcal{A}) = \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}, \quad (2.87)$$

onde λ_1 é o menor valor espectral do operador A , e $\sigma_+(\cdot)$ está definido em (2.82).

Demonstração: No Teorema anterior já mostramos a primeira igualdade. Para mostrar a segunda igualdade, observemos que de (2.77) e (2.86), temos que:

$$-\frac{k}{1+M} \in \sigma(\mathcal{A}) \cap \Lambda_k \subset \sigma(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \sigma_+(\lambda_1) \equiv \text{Rel}_+(\lambda_1) \leq \sigma_0(\mathcal{A}),$$

logo podemos concluir que

$$\max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\} \leq \sigma_0(\mathcal{A}). \quad (2.88)$$

Portanto, para mostrar (2.87), basta mostrar que:

$$\sigma_0(\mathcal{A}) \leq \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}.$$

Para isto, mostraremos primeiro que a função que define a menor raiz real da equação (2.76), $l(\mu)$ ($\mu > 0$) é injetiva. Mais precisamente mostraremos que $l(\mu)$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$, o qual nos ajudará a mostrar a igualdade acima.

Afirmção.- $l(\mu)$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$.

Prova da Afirmção.- De fato, por (2.85), temos que

$$(1+M)l(\mu) + k < 0 \quad \text{para todo} \quad \mu \in (0, \infty).$$

Disto concluímos que $l(\mu)$ é uma função injetiva de $(0, \infty)$ a $l(0, \infty) \subset (-k, -k/(1+M))$. De fato, suponhamos que $l(\mu_1) = l(\mu_2)$, então substituindo estas raízes na equação (2.76) temos que

$$\mu_1[(1+M)l(\mu_1) + k] = \mu_2[(1+M)l(\mu_2) + k]$$

de onde segue facilmente que $\mu_1 = \mu_2$.

Agora vamos mostrar que $l(\mu)$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$. Para isto começaremos mostrando que a função $l(\mu)$ é de classe C^1 para todo $\mu > 0$ tal que $P'_\lambda(l(\mu), \mu) \neq 0$, e que verifica

$$\frac{dl(\mu)}{d\mu} = -\frac{(1+M)l(\mu) + k}{P'_\lambda(l(\mu), \mu)}. \quad (2.89)$$

De fato, da equação (2.76) temos que

$$l(\mu)^3 + kl(\mu)^2 + \mu(1+M)l(\mu) + \mu k = 0,$$

derivando obtemos

$$[3l(\mu)^2 + 2kl(\mu) + \mu(1+M)] l'(\mu) = -k - (1+M)l(\mu),$$

lembrando que $p = (1 + M)\mu - \frac{k^2}{3}$, temos

$$\left[3l(\mu)^2 + 2kl(\mu) + \frac{k^2}{3} + p \right] l'(\mu) = -k - (1 + M)l(\mu),$$

logo

$$3(l(\mu) - \xi_-)(l(\mu) - \xi_+)l'(\mu) = -k - (1 + M)l(\mu) \quad \text{onde} \quad \xi_{\pm} = -\frac{k}{3} \pm \sqrt{\frac{-p}{3}},$$

de onde temos que

$$l'(\mu) = -\frac{(1 + M)l(\mu) + k}{P'_\lambda(l(\mu), \mu)}.$$

Assim, a função $l(\mu)$ é diferenciável para todo $\mu > 0$ tal que $P'_\lambda(l(\mu), \mu) \neq 0$, logo podemos concluir que $l(\mu)$ é de classe C^1 , para todo $\mu > 0$ tal que $P'_\lambda(l(\mu), \mu) \neq 0$. Além disso, se existir um ponto de descontinuidade μ_0 de $l(\mu)$ ele deve satisfazer

$$P'_\lambda(l(\mu_0), \mu_0) = 0,$$

o qual equivale a afirmar que

$$p(\mu_0) \leq 0, \quad Q(\mu_0) = 0, \quad q(\mu_0) \leq 0. \quad (2.90)$$

Esta equivalência pode ser mostrada da seguinte forma. Como

$$P'_\lambda(l(\mu_0), \mu_0) = 3(l(\mu_0) - \xi_+)(l(\mu_0) - \xi_-) = 0$$

então a menor raiz $l(\mu_0)$ ou é igual a $\xi_+(\mu_0)$ ou é igual a $\xi_-(\mu_0)$. Isto acontece, da análise das soluções da equação cúbica (2.76) caso **(c)** feita na subseção 2.4.1, quando

$$Q(\mu_0) = \left(\frac{p(u_0)}{3} \right)^3 + \left(\frac{q(u_0)}{2} \right)^2 = 0$$

que por sua vez implica que $p(\mu_0) \leq 0$. Além disso, se for $q(\mu_0) \geq 0$, então pelo caso **(c)** da subseção 2.4.1 a raiz $\xi_+(\mu_0)$ seria a maior raiz da equação (2.76), logo não poderíamos ter $l(\mu_0) = \xi_+(\mu_0)$, então necessariamente temos que $l(\mu_0) = \xi_-(\mu_0)$ que novamente pelo caso **(c)** da subseção 2.4.1 implica que $q(\mu_0) \leq 0$. Adicionalmente, da fórmula de $q = q(\mu_0)$ temos que a condição $q(\mu_0) \leq 0$ acontece sempre que $M > 2$.

Seja agora o conjunto

$$D_0 = \{ \mu \in (0, \infty); \quad p(\mu) \leq 0, \quad Q(\mu) = 0, \quad q(\mu) \leq 0 \}.$$

Como $Q(\mu)$ é um polinômio de terceiro grau, temos que a cardinalidade de D_0 é menor ou igual a 3. Note também que

$$l(\mu) \notin (\xi_-(\mu), \xi_+(\mu)), \text{ quando } p(\mu) \leq 0,$$

pois, caso contrário $l(\mu)$ não seria a menor raiz de $P(\lambda, \mu)$ dada por (2.76), como pode ser visto no gráfico de $P(\lambda, \mu)$ a seguir

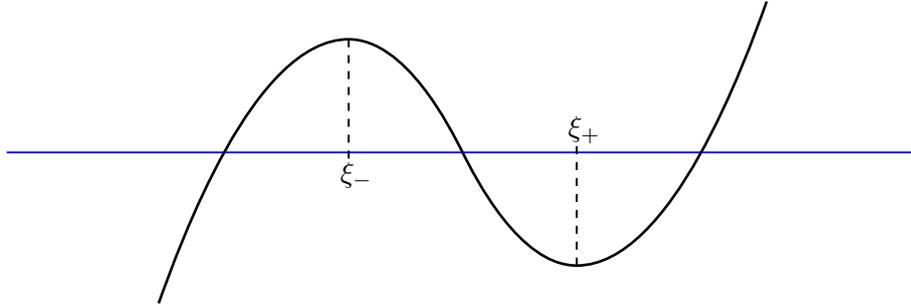


Figura 1

Assim, da figura 1 e da equação (2.80), temos que $P'_\lambda(l(\mu), \mu) > 0$, sempre que $\mu \notin D_0$, isto é:

$$\frac{dl(\mu)}{d\mu} > 0, \text{ para todo } \mu \in (0, \infty) \setminus D_0. \quad (2.91)$$

Logo $l(\mu)$ é estritamente crescente em $(0, \infty) \setminus D_0$. Para concluir a prova da afirmação vejamos o comportamento de $l(\mu)$ nos pontos onde $l(\mu)$ pode ser descontínua, isto é nos pontos $\mu_0 \in D_0$. Nestes casos, para ver que $l(\mu)$ é estritamente crescente em $\mu_0 \in D_0$, bastará mostrar que

$$l(\mu_0-) := \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^-} l(\mu) \leq l(\mu_0+) := \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^+} l(\mu).$$

De fato, seja $\mu_0 \in D_0$, então da definição de $Q(\mu)$ e das condições do conjunto D_0 podemos concluir que

$$Q'(\mu_0) = \left(\frac{p(\mu_0)}{3}\right)^2 p'(\mu_0) + \left(\frac{q(\mu_0)}{2}\right) q'(\mu_0) \geq 0$$

e a igualdade $Q'(\mu_0) = 0$ vale se e somente se $p(\mu_0) = q(\mu_0) = 0$, pois

$$p'(\mu_0) = 1 + M > 0$$

$$q'(\mu_0) = -\frac{1}{3}k(1 + M) + k = \frac{k}{3}(2 - M) < 0, \text{ se } M > 2.$$

Portanto, se $\mu < \mu_0$ e $\mu_0 \in D_0$, então

$$Q(\mu) < Q(\mu_0) = 0.$$

Logo, como

$$Q(\mu_0) = \left(\frac{p(\mu_0)}{3}\right)^3 + \left(\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^2 = 0$$

então temos que $\left|\frac{q(\mu_0)}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{p(\mu_0)}{3}\right)^3}$ logo, como $q(\mu_0) \leq 0$, temos

$$\frac{-q(\mu_0)}{2\sqrt{\left(-\frac{p(\mu_0)}{3}\right)^3}} = 1 \quad \text{e} \quad \left(-\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{-\frac{p(\mu_0)}{3}}.$$

Além disso, do caso **(c)** da subseção 2.4.1, como $q(\mu_0) \leq 0$, temos que

$$l(\mu_0) = -\frac{k}{3} - \left(-\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e do caso **(b)** da subseção 2.4.1, para $\mu < \mu_0$ temos que

$$\alpha(\mu) = \arccos\left(\frac{-q(\mu)}{2\sqrt{\left(-\frac{p(\mu)}{3}\right)^3}}\right)$$

que é uma função contínua, logo tomando limite $\mu \rightarrow \mu_0^-$, temos que

$$\alpha(\mu_0) = \arccos\left(\frac{-q(\mu_0)}{2\sqrt{\left(-\frac{p(\mu_0)}{3}\right)^3}}\right) = \arccos(1) = 0.$$

Assim, quando $Q(\mu) < Q(\mu_0) = 0$ ($\mu < \mu_0$), dos casos **(b)** e **(c)** da subseção 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^-} l(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^-} \left(-\frac{k}{3} - 2\sqrt{-\frac{p(\mu)}{3}} \cos \frac{\pi \pm \alpha(\mu)}{3}\right) \\ &= -\frac{k}{3} - 2\sqrt{-\frac{p(\mu_0)}{3}} \cos \frac{\pi \pm \alpha(\mu_0)}{3} \\ &= -\frac{k}{3} - 2\sqrt{-\frac{p(\mu)}{3}} \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{k}{3} - \left(-\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = l(\mu_0). \end{aligned}$$

Por outro lado, para o caso $\mu_0 < \mu$, teremos $0 = Q(\mu_0) < Q(\mu)$, logo do caso **(a)** da subseção 2.4.1

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0^+} l(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0^+} \left(-\frac{k}{3} + B_+ + B_-\right) = -\frac{k}{3} + 2\left(-\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Concluimos então que

$$l(\mu_{0-}) = l(\mu_0) = -\frac{k}{3} - \left(-\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \leq -\frac{k}{3} + 2 \left(-\frac{q(\mu_0)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = l(\mu_{0+}), \quad (2.92)$$

pois $q(\mu_0) \leq 0$.

Conseqüentemente por (2.91) e (2.92) temos que

$$l(\mu) \text{ é estritamente crescente em } (0, \infty).$$

O que prova nossa Afirmação.

Finalmente, com a ajuda da afirmação anterior, mostraremos a desigualdade desejada, isto é

$$\sigma_0(\mathcal{A}) \leq \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}. \quad (2.93)$$

Para isto mostraremos que em todos os casos possíveis de sinal do discriminante $Q(\mu)$, a parte real das raízes $l_{\pm}(\mu)$, $l(\mu)$ são limitadas por $-\frac{k}{1+M}$ ou por $\sigma_+(\lambda_1)$ para todo $\mu \geq \lambda_1$. Note que por (2.85) já temos que

$$-k < l(\mu) < -\frac{k}{1+M}, \text{ para todo } \mu \in (0, \infty).$$

Para as raízes $l_{\pm}(\mu)$, isto será feito nos seguintes casos:

(i) $Q(\mu) > 0$, $\mu \geq \lambda_1$. Então, pelo caso (a) da subseção (2.4.1) e usando a afirmação anterior temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} l_+(\mu) &= \operatorname{Re} l_-(\mu) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+ + B_-}{2} \\ &= -\frac{k}{3} - \frac{l(\mu) + k/3}{2} = -\frac{k}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{l(\mu)}{2} \\ &= -\frac{l(\mu) + k}{2} \leq -\frac{l(\lambda_1) + k}{2} \\ &= \operatorname{Re} l_+(\lambda_1) = \sigma_+(\lambda_1). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\operatorname{Re} l_-(\mu), \operatorname{Re} l_+(\mu) \leq \sigma_+(\lambda_1), \text{ para todo } \mu \geq \lambda_1. \quad (2.94)$$

(ii) $Q(\mu) < 0$, $\mu \geq \lambda_1$. Este caso é mais delicado. Começemos definindo o conjunto

$$D = \{\mu \in (\lambda_1, \infty); Q(\mu) < 0\}. \quad (2.95)$$

Primeiro note que D é um conjunto aberto, pois $Q(\mu)$ é um polinômio (logo contínuo) e (λ_1, ∞) é aberto. Logo, temos que mostrar (2.93) para todo $\mu \in D$. Vejamos, para cada $\mu \in D$, a equação (2.76) tem três raízes reais distintas. A maior delas, $l_+(\mu)$, deve estar no intervalo $(\xi_+(\mu), 0)$, pois, tendo (2.76) três raízes reais distintas, necessariamente $\xi_+(\mu) < l_+(\mu)$ como podemos ver no gráfico de $P(\lambda, \mu)$ dado por

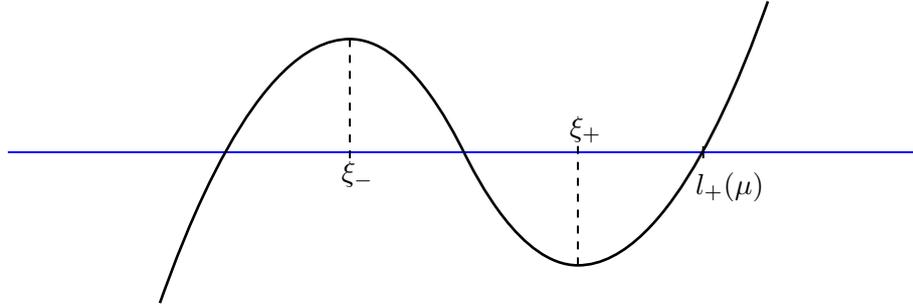


Figura 2

Por outro lado,

$$Q(\mu) = \left(\frac{p(\mu)}{3}\right)^3 + \left(\frac{q(\mu)}{2}\right)^2 < 0$$

implica $p(\mu) < 0$, logo de

$$p(\mu) = (1 + M)\mu - \frac{k^2}{3},$$

temos que $p(\mu) + \frac{k^2}{3} = (1 + M)\mu > 0$, logo $\frac{k^2}{3} > -p(\mu) > 0$, então $\left(\frac{k}{3}\right)^2 > \frac{-p(\mu)}{3} > 0$, assim $\frac{k}{3} > \sqrt{\frac{-p(\mu)}{3}} > 0$, de onde concluímos que

$$\xi_+(\mu) = -\frac{k}{3} + \sqrt{\frac{-p(\mu)}{3}} < 0.$$

Notemos também que na equação (2.76) temos que $P(0, \mu) = \mu k > 0$, de onde concluímos que

$$\xi_+(\mu) < l_+(\mu) < 0.$$

Logo temos que $P'_\lambda(l_+(\mu), \mu) > 0$ para todo $\mu \in D$ e também que

$$\frac{dl_+(\mu)}{d\mu} = -\frac{l_+(\mu)(1 + M) + k}{P'_\lambda(l_+(\mu), \mu)} \begin{cases} > 0, & l_+(\mu) < -\frac{k}{1 + M} \\ < 0, & l_+(\mu) > -\frac{k}{1 + M} \end{cases} \quad (2.96)$$

para todo $\mu \in D$. Desta análise vemos que, $l_+(\mu)$ é estritamente monótona em cada subconjunto conexo de D . De fato, $l_+(\mu)$ é contínua em D , em particular é contínua

numa componente conexa D_i de D , se existirem $\mu_1, \mu_2 \in D_i$ tal que

$$l(\mu_1) < -\frac{k}{1+M} < l(\mu_2),$$

pelo Teorema do Valor Intermediário existiria um $\mu_0 \in D_i$ tal que $l(\mu_0) = -\frac{k}{1+M}$, o qual é uma contradição, pois $P(-\frac{k}{1+M}, \mu) > 0$ para todo $\mu > 0$ como tínhamos visto no Teorema anterior.

Identifiquemos agora a fronteira do conjunto D , ∂D . Se $\mu \in D$ então existe $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon) \subset D$, logo $u \notin \partial D$. Se

$$\mu \in \{\mu \in (\lambda_1, \infty); Q(\mu) > 0\}$$

então existe

$$(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon) \subset \{\mu \in (\lambda_1, \infty); Q(\mu) > 0\}$$

então também $u \notin \partial D$. Daí, todo ponto da fronteira de D está no conjunto $\{\lambda_1\} \cup \{\mu \geq \lambda_1; Q(\mu) = 0\}$, isto é $\partial D = \{\lambda_1\} \cup \{\mu \geq \lambda_1; Q(\mu) = 0\}$ este conjunto tem no máximo quatro pontos pois $Q(\mu)$ é um polinômio de tercer grau, segue disto que D tem no máximo dois componentes conexas como pode ser visto no seguinte gráfico.

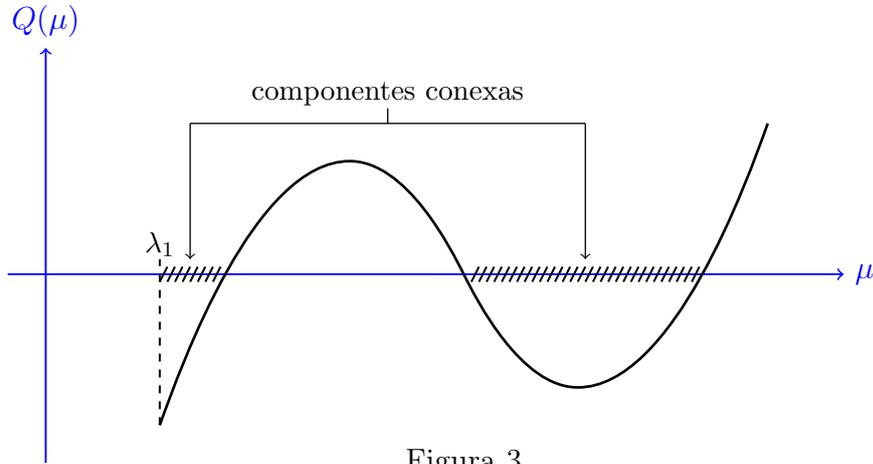


Figura 3

Nas componentes conexas onde $l_+(\mu)$ é estritamente crescente o problema esta resolvido, pois neste caso temos

$$l_-(\mu) < l_+(\mu) < -\frac{k}{1+M} \text{ para todo } \mu \in D_i.$$

Seja então $D_1 = (\mu_1, \beta)$ uma componente de D onde $l_+(\mu)$ é estritamente decrescente, isto é, $l_+(\mu) > -\frac{k}{1+M}$. Denotemos por

$$l_0 = \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^+} l_+(\mu),$$

então

$$0 = P(l_+(\mu), \mu) \rightarrow P(l_0, \mu_1), \quad \text{quando } \mu \rightarrow \mu_1^+, \quad (2.97)$$

e

$$\xi_+(\mu_1) \leq l_0 < 0, \quad l_0 > -\frac{k}{1+M}, \quad Q(\mu_1) \leq 0, \quad (2.98)$$

onde (2.98) segue fazendo $\mu_1 \rightarrow \mu_1^+$ nas desigualdades $\xi_+(\mu) < l_+(\mu) < 0$, $l_+(\mu) > -\frac{k}{1+M}$, e $Q(\mu) < 0$.

Note que de (2.98) temos que $Q(\mu_1) \leq 0$, então estudaremos dois subcasos: $Q(\mu_1) < 0$ e $Q(\mu_1) = 0$.

(iia) $Q(\mu_1) < 0$. Então μ_1 é um ponto fronteira que não satisfaz

$$Q(\mu_1) = 0,$$

logo necessariamente $\mu_1 = \lambda_1$. Pelo caso **(c)** da subseção 2.4.1, $l_0 > \xi_+(\mu)$ pois a igualdade pode acontecer so se $Q(\mu_1) = 0$. Além disso, tendo $Q(\mu) < 0$, temos que

$$\begin{aligned} l_+(\mu) &< l_0 = \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^+} l_+(\mu) \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^+} \left(-\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p(\mu)}{3}} \cos \frac{\alpha(\mu)}{3} \right) \\ &= -\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p(\mu_1)}{3}} \cos \frac{\alpha(\mu_1)}{3} \\ &= l_+(\mu_1) = l_+(\lambda_1) = \sigma_+(\lambda_1), \quad \text{para todo } \mu \in D_1. \end{aligned}$$

Isto é,

$$l_+(\mu) < l_0 = l_+(\mu_1) = l_+(\lambda_1) = \sigma_+(\lambda_1), \quad \text{para todo } \mu \in D_1. \quad (2.99)$$

(iib) $Q(\mu_1) = 0$. Então a equação (2.76) tem uma raiz dupla quando $\mu = \mu_1$. Se l_0 é uma raiz dupla então de $\xi_+(\mu) < l_+(\mu) < 0$ temos que $l_0 = -\frac{k}{3} - \left(-\frac{q(\mu_1)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \xi_+(\mu_1)$ implicando pelo caso (c) da subseção (2.4.1) que $q(\mu_1) \geq 0$, então a menor raiz é $l(\mu_1) = -\frac{k}{3} + 2\left(-\frac{q(\mu_1)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Segue daí que

$$\begin{aligned} l_0 &= \xi_+(\mu_1) = l_+(\mu_1) = l_-(\mu_1) = -\frac{k}{3} - \left(-\frac{q(\mu_1)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{k + l(\mu_1)}{2} \leq -\frac{k + l(\lambda_1)}{2} = \operatorname{Re} l_+(\lambda_1) = \sigma_+(\lambda_1). \end{aligned}$$

Isto é, no caso quando l_0 é uma raiz dupla temos também a desigualdade desejada, isto é

$$l_+(\mu) < l_0 = \xi_+(\mu_1) = l_+(\mu_1) = l_-(\mu_1) \leq \sigma_+(\lambda_1), \quad \text{para todo } \mu \in D_1. \quad (2.100)$$

Para finalizar suponha que l_0 não é uma raiz dupla. Neste caso pelo caso (c) da subseção (2.4.1) temos que

$$l_0 = -\frac{k}{3} + 2\left(-\frac{q(\mu_1)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p(\mu_1)}{3}}. \quad (2.101)$$

A segunda igualdade em (2.101) segue do fato de que $Q(\mu_1) = 0$ e $q(\mu_1) \leq 0$ como pode-se ver na demonstração da Afirmação acima.

Afirmamos que $Q(\mu) < 0$ quando $\mu \rightarrow \mu_1^-$. De fato, caso contrario quando $\mu \rightarrow \mu_1^-$ teríamos que

$$\begin{aligned} -\frac{k}{1+M} > l(\mu) &= -\frac{k}{3} + B_+(\mu) + B_-(\mu) \rightarrow -\frac{k}{3} + 2\left(-\frac{q(\mu_1)}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= l_0 > -\frac{k}{1+M}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Contradição. Assim existe outra componente de D , $D_2 = (\mu_2, \mu_1)$. Tendo $Q(\mu) < 0$ em D_2 , novamente pelo caso (b) da subseção (2.4.1), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^-} l_+(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow \mu_1^-} \left(-\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p(\mu)}{3}} \cos \frac{\alpha(\mu)}{3} \right) \\ &= -\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p(\mu_1)}{3}} \cos \frac{\alpha(\mu_1)}{3} \\ &= -\frac{k}{3} + 2\sqrt{-\frac{p(\mu_1)}{3}} \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$= l_0 > -\frac{k}{1+M}, \quad (2.104)$$

onde $Q(\mu_1) = 0$ e $q(\mu_1) \leq 0$ implicam $\alpha(\mu_1) = 0$ como na demonstração da afirmação acima. Daqui $l_+(\mu) > -\frac{k}{1+M}$ em D_2 , isto é, $l_+(\mu)$ é também estritamente decrescente em D_2 . Isto segue também do Teorema do Valor Intermediário como foi visto acima. Agora para ver que neste caso também temos que $l_+(\mu) < l_0 \leq \sigma_+(\lambda_1)$, para todo $\mu \in D_1$. Basta seguir os argumentos desenvolvidos para D_1 , fazendo agora $\mu_1 := \mu_2$, isto é, denotamos $l'_0 = \lim_{\mu \rightarrow \mu_2^+} l_+(\mu)$. A discussão é igual exceto no caso quando l'_0 não é a raiz dupla em **(iib)** o qual não acontece de novo, pois D só tem dois componentes conexas. Concluimos daí que

$$l_+(\mu) < l_0 < l'_0 \leq \sigma_+(\lambda_1) \quad \text{para todo } \mu \in D_1. \quad (2.105)$$

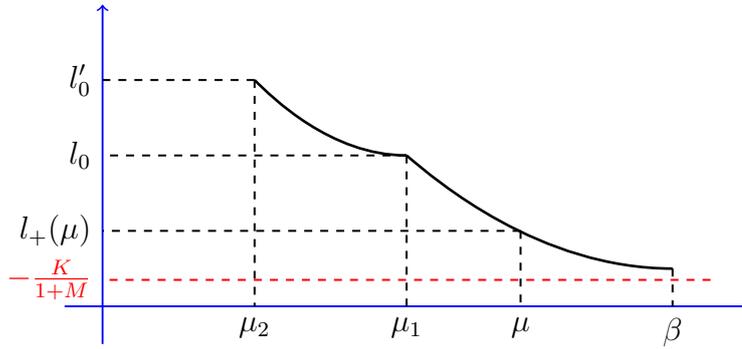


Figura 4

Portanto, em todos os casos temos que

$$l_+(\mu) \leq \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\} \quad \text{para todo } \mu \in D. \quad (2.106)$$

- (iii)** $Q(\mu) = 0$. Então o conjunto $\widehat{D} = \{\mu \geq \lambda_1; Q(\mu) = 0\}$ tem no máximo três pontos. Pelas formulas de Cardano e a continuidade de $p(\mu)$ e $q(\mu)$ temos que (2.106) também vale para $\mu \in \widehat{D}$

Finalmente da discussão em **(i)-(iii)** temos que

$$\operatorname{Re} l_{\pm}(\mu), \operatorname{Re} l(\mu) \leq \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\} \quad \text{para todo } \mu \geq \lambda_1.$$

Daí segue que

$$\sigma_0(\mathcal{A}) \leq \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}.$$

Portanto, desta desigualdade e de (2.88) concluimos que

$$\sigma_0(\mathcal{A}) = \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1) \right\}.$$

■

Capítulo 3

Aplicações

Um exemplo típico para os operadores A dados em (2.1) é

$$A = -\Delta, \quad H = L^2(0, L), \quad V = H_0^1(0, L)$$

e

$$\mathcal{D}(A) = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L).$$

Os autovalores do Laplaciano para o problema de Dirichlet no caso unidimensional

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{em } [0, L] \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

são

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e as autofunções correspondentes são

$$u_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Assim, o menor valor espectral do operador $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ é $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}$. No decorrer deste capítulo consideramos o operador

$$A^\alpha = \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

o qual é um operador auto-adjunto e positivo definido. Logo os autovalores deste operador para o problema de Dirichlet são da forma

$$\lambda_n^\alpha = \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então o menor valor espectral do operador $A^\alpha = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^\alpha$ será

$$\lambda_1^\alpha = \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)^\alpha.$$

Por simplicidade vamos supor que $L = 1$, logo o menor valor espectral do operador A^α será dado por

$$\lambda_1^\alpha = \pi^{2\alpha}. \quad (3.1)$$

Para este operador $A^\alpha = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^\alpha$ no lugar do operador A no problema (2.1), vamos usar o Teorema 2.15 para calcular $\omega_0(\mathcal{A})$. Isto é, estamos interessados em determinar o valor de

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max \left\{ -\frac{k}{1+M}, \sigma_+(\lambda_1^\alpha) \right\}, \quad (3.2)$$

para núcleos de tipo Maxwell $g(s) = 1 + Me^{-ks}$, $k, M > 0$. Onde λ_1^α é dado por (3.1), e $\sigma_+(\cdot)$ está definido em (2.82).

Assim, de (2.82), temos que o valor de

$$\sigma_+(\lambda_1^\alpha) = \sigma_+(\pi^{2\alpha}) = \text{Re} l_+(\pi^{2\alpha})$$

depende do sinal $Q(\pi^{2\alpha})$, como pode ser visto em (2.82). Portanto devemos começar estudando a função $Q(\mu)$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} Q(\mu) &= \frac{1}{27}p(\mu)^3 + \frac{1}{4}q(\mu)^2 \\ &= \frac{1}{27} \left[(1+M)\mu - \frac{k^2}{3} \right]^3 + \frac{1}{4} \left[\frac{2}{27}k^3 - \frac{1}{3}k(1+M)\mu + k\mu \right]^2 \\ &= \frac{1}{27} \left[(1+M)^3\mu^3 - 3(1+M)^2\mu^2\frac{k^2}{3} + 3(1+M)\mu\frac{k^4}{9} - \frac{1}{27}k^6 \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{4}{27^2}k^6 + \frac{1}{9}k^2(1+M)^2\mu^2 + k^2\mu^2 - \frac{4}{81}k^4(1+M)\mu + \frac{4}{27}k^4\mu - \frac{2}{3}k^2(1+M)\mu^2 \right] \\ &= \frac{1}{27}(1+M)^3\mu^3 - \frac{1}{27}(1+M)^2\mu^2k^2 + \frac{1}{81}(1+M)k^4\mu - \frac{1}{27^2}k^6 \\ &\quad + \frac{1}{27^2}k^6 + \frac{1}{36}k^2(1+M)^2\mu^2 + \frac{1}{4}k^2\mu^2 - \frac{1}{81}k^4(1+M)\mu + \frac{1}{27}k^4\mu - \frac{1}{6}k^2(1+M)\mu^2 \\ &= \frac{1}{27}(1+M)^3\mu^3 - \frac{1}{108}k^2\mu^2(1+M)^2 + \frac{1}{4}k^2\mu^2 + \frac{1}{27}k^4\mu - \frac{1}{6}k^2\mu^2(1+M). \end{aligned}$$

Por simplicidade vamos supor

$$k = 1 + M = \pi,$$

isto é, vamos considerar o núcleo de tipo de Maxwell da forma

$$g(s) = 1 + (\pi - 1)e^{-\pi s}.$$

Nestas condições temos que

$$Q(\mu) = \frac{1}{27}\pi^3\mu^3 - \frac{1}{108}\pi^4\mu^2 + \frac{1}{4}\pi^2\mu^2 + \frac{1}{27}\pi^4\mu - \frac{1}{6}\pi^3\mu^2. \quad (3.3)$$

Vamos considerar em (3.2) os casos onde $\alpha = 1/2, 3/4, 1, 3/2, 2$. Para isso, devemos calcular primeiro $Q(\mu)$ e conseqüentemente $\sigma_+(\mu)$ em $\mu = \lambda_1^\alpha = \pi^{2\alpha}$.

3.1 Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{1/2}$.

Para este caso temos que

$$A^\alpha = A^{1/2} = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{1/2} = \frac{d}{dx},$$

então a equação (2.1) terá a forma

$$u_{tt} + g(0)u_x + \int_0^\infty g'(s)u_x(t-s)ds = 0. \quad (3.4)$$

O espaço X onde está definida a equação de evolução

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U$$

$$U(0) = U_0.$$

associado à equação (3.4) está dada por $X = V \times H \times W$, onde

$$V = \mathcal{D}(A^{\alpha/2}) = \mathcal{D}(A^{1/4}) = H^{1/2}(0, L), \quad H = L^2(0, 1) \quad \text{e} \quad W = L_{g'}^2(0, \infty; V).$$

Além disso,

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ u_x - \int_0^\infty g'(s)w_x(s)ds \\ v - w'(s) \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in H_0^1(0, L) \right\}$$

Como \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações como visto na seção 2.2, pela teoria de semigrupos sabemos que para todo $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe uma única solução

$$u(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C^1([0, \infty), X) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

onde $e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A} .

Nosso objetivo agora é calcular o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ gerado por \mathcal{A} a partir da fórmula (3.2). De fato para $\alpha = 1/2$ temos que o menor valor espectral de $A^\alpha = A^{1/2}$ é

$$\lambda_1^\alpha = \lambda_1^{1/2} = \pi.$$

Então em (3.3) temos que

$$Q(\lambda_1^{1/2}) = Q(\pi) = \frac{1}{27}\pi^6 - \frac{1}{108}\pi^6 + \frac{1}{4}\pi^4 + \frac{1}{27}\pi^5 - \frac{1}{6}\pi^5 \approx 11.388 > 0$$

Então por (2.82) temos que

$$\begin{aligned} \sigma_+(\lambda_1^{1/2}) &= \sigma_+(\pi) = \operatorname{Re} l_+(\pi) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+(\pi) + B_-(\pi)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi)}{2} + \sqrt{Q(\pi)}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi)}{2} - \sqrt{Q(\pi)}} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}q(\mu) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{27}k^3 - \frac{1}{3}k(1+M)\mu + k\mu \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{27}\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^2\mu + \pi\mu \right] \\ &= -\frac{1}{27}\pi^3 + \frac{1}{6}\pi^2\mu - \frac{1}{2}\pi\mu \end{aligned} \tag{3.5}$$

de onde

$$-\frac{1}{2}q(\pi) = -\frac{1}{27}\pi^3 + \frac{1}{6}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi^2 \approx -0.915.$$

Então podemos verificar que

$$\sigma_+(\lambda_1^{1/2}) = \sigma_+(\pi) \approx -0.909$$

Portanto

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{-1, \sigma_+(\lambda_1^{1/2})\} = \max\{-1, \sigma_+(\pi)\} = \sigma_+(\pi).$$

Observação 3.1 Podemos observar neste caso ($\alpha < 1$), o valor de $\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_+(\pi)$ depende do espectro do operador elástico $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{1/2}$.

3.2 Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/4}$.

Para este caso temos que

$$A^\alpha = A^{3/4} = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/4} = \partial_x^{3/2},$$

então a equação (2.1) terá a forma

$$u_{tt} + g(0)\partial_x^{3/2}u + \int_0^\infty g'(s)\partial_x^{3/2}u(t-s)ds = 0. \quad (3.6)$$

O espaço X onde está definida a equação de evolução

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0. \end{aligned}$$

associado à equação (3.6) está dada por $X = V \times H \times W$, onde

$$V = \mathcal{D}(A^{\alpha/2}) = \mathcal{D}(A^{3/8}) = H^{3/4}(0, L), \quad H = L^2(0, 1) \quad \text{e} \quad W = L_{g'}^2(0, \infty; V).$$

Além disso,

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \partial_x^{3/2}u - \int_0^\infty g'(s)\partial_x^{3/2}w(s)ds \\ v - w'(s) \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in H^{3/4}(0, L) \right\}.$$

Como \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações como visto na seção 2.2, pela teoria de semigrupos sabemos que para todo $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe uma única solução

$$u(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C^1([0, \infty), X) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

onde $e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A} .

Nosso objetivo agora é calcular o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ gerado por \mathcal{A} a partir da fórmula (3.2). De fato para $\alpha = 3/4$ temos que o menor valor espectral de $A^\alpha = A^{3/4}$ é

$$\lambda_1^\alpha = \lambda_1^{3/4} = \pi^{3/2}.$$

Então em (3.3) temos que

$$Q(\lambda_1^{3/4}) = Q(\pi^{3/2}) = \frac{1}{27}\pi^{15/2} - \frac{1}{108}\pi^7 + \frac{1}{4}\pi^5 + \frac{1}{27}\pi^{11/2} - \frac{1}{6}\pi^6 \approx 106.668 > 0$$

Então por (2.82) temos que

$$\begin{aligned} \sigma_+(\lambda_1^{3/4}) &= \sigma_+(\pi^{3/2}) = \operatorname{Re} l_+(\pi^{3/2}) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+(\pi^{3/2}) + B_-(\pi^{3/2})}{2} \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^{3/2})}{2} + \sqrt{Q(\pi^{3/2})}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^{3/2})}{2} - \sqrt{Q(\pi^{3/2})}} \approx -0.995 \end{aligned}$$

Portanto

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{-1, \sigma_+(\lambda_1^{3/4})\} = \max\{-1, \sigma_+(\pi^{3/2})\} = \sigma_+(\pi^{3/2}).$$

Observação 3.2 Novamente neste caso ($\alpha < 1$) podemos observar que o valor de $\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_+(\pi)$ depende do espectro do operador elástico $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/4}$.

3.3 Caso $-\frac{d^2}{dx^2}$.

Para este caso temos que

$$A^\alpha = A = -\frac{d^2}{dx^2},$$

então a equação (2.1) terá a forma

$$u_{tt} - g(0)u_{xx} - \int_0^\infty g'(s)u_{xx}(t-s)ds = 0. \quad (3.7)$$

O espaço X onde está definida a equação de evolução

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U$$

$$U(0) = U_0.$$

associado à equação (3.7) está dada por $X = V \times H \times W$, onde

$$V = \mathcal{D}(A^{\alpha/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_0^1(0, L), \quad H = L^2(0, 1) \quad \text{e} \quad W = L_{g'}^2(0, \infty; V).$$

Além disso,

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xx} + \int_0^\infty g'(s)w_{xx}(s)ds \\ v - w'(s) \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in H^2 \cap H_0^1(0, L) \right\}$$

Como \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações como visto na seção 2.2, pela teoria de semigrupos sabemos que para todo $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe uma única solução

$$u(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C^1([0, \infty), X) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

onde $e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A} .

Nosso objetivo agora é calcular o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ gerado por \mathcal{A} a partir da fórmula (3.2). De fato para $\alpha = 1$ temos que o menor valor espectral de $A^\alpha = A$ é

$$\lambda_1^\alpha = \lambda_1 = \pi^2.$$

Então em (3.3) temos que

$$Q(\lambda_1) = Q(\pi^2) = \frac{1}{27}\pi^9 - \frac{1}{108}\pi^8 + \frac{1}{4}\pi^6 + \frac{1}{27}\pi^6 - \frac{1}{6}\pi^7 \approx 788.756 > 0$$

Então por (2.82) temos que

$$\begin{aligned} \sigma_+(\lambda_1) &= \sigma_+(\pi^2) = \operatorname{Re} l_+(\pi^2) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+(\pi^2) + B_-(\pi^2)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^2)}{2} + \sqrt{Q(\pi^2)}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^2)}{2} - \sqrt{Q(\pi^2)}} \approx -1.032 \end{aligned}$$

Portanto

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{-1, \sigma_+(\lambda_1)\} = \max\{-1, \sigma_+(\pi^2)\} = -1.$$

Observação 3.3 Neste caso ($\alpha = 1$) podemos observar que o valor de $\omega_0(\mathcal{A}) = -1$ depende dos coeficientes do Núcleo de Maxwell $g(s) = 1 + (\pi - 1)e^{-\pi s}$.

3.4 Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/2}$.

Para este caso temos que

$$A^\alpha = A^{3/2} = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{3/2} = -\frac{d^3}{dx^3},$$

então a equação (2.1) terá a forma

$$u_{tt} - g(0)u_{xxx} - \int_0^\infty g'(s)u_{xxx}(t-s)ds = 0. \quad (3.8)$$

O espaço X onde está definida a equação de evolução

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0. \end{aligned}$$

associado à equação (3.8) está dada por $X = V \times H \times W$, onde

$$V = \mathcal{D}(A^{\alpha/2}) = \mathcal{D}(A^{3/4}) = H^{3/2}(0, L), \quad H = L^2(0, 1) \quad \text{e} \quad W = L_{g'}^2(0, \infty; V).$$

Além disso,

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxx} + \int_0^\infty g'(s)w_{xxx}(s)ds \\ v - w'(s) \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in H^3 \cap H_0^1(0, L) \right\}$$

Como \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações como visto na seção 2.2, pela teoria de semigrupos sabemos que para todo $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe uma única solução

$$u(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C^1([0, \infty), X) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

onde $e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A} .

Nosso objetivo agora é calcular o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ gerado por \mathcal{A} a partir da fórmula (3.2). De fato para $\alpha = 3/2$ temos que o menor valor espectral de $A^\alpha = A^{3/2}$ é

$$\lambda_1^\alpha = \lambda_1^{3/2} = \pi^3.$$

Então em (3.3) temos que

$$Q(\lambda_1^{3/2}) = Q(\pi^3) = \frac{1}{27}\pi^{12} - \frac{1}{108}\pi^{10} + \frac{1}{4}\pi^8 + \frac{1}{27}\pi^7 - \frac{1}{6}\pi^9 \approx 30880.892 > 0$$

Então por (2.82) temos que

$$\begin{aligned} \sigma_+(\lambda_1^{3/2}) &= \sigma_+(\pi^3) = \operatorname{Re} l_+(\pi^3) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+(\pi^3) + B_-(\pi^3)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^3)}{2} + \sqrt{Q(\pi^3)}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^3)}{2} - \sqrt{Q(\pi^3)}} \approx -1.059 \end{aligned}$$

Portanto

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{-1, \sigma_+(\lambda_1^{3/2})\} = \max\{-1, \sigma_+(\pi^3)\} = -1.$$

Observação 3.4 Novamente neste caso ($\alpha = 3/2$) podemos observar que o valor de $\omega_0(\mathcal{A}) = -1$ depende dos coeficientes do Núcleo de Maxwell $g(s) = 1 + (\pi - 1)e^{-\pi s}$.

3.5 Caso $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^2$.

Para este caso temos que

$$A^\alpha = A^2 = \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^2 = \frac{d^4}{dx^4},$$

então a equação (2.1) terá a forma

$$u_{tt} + g(0)u_{xxxx} + \int_0^\infty g'(s)u_{xxxx}(t-s)ds = 0. \quad (3.9)$$

O espaço X onde está definida a equação de evolução

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0. \end{aligned}$$

associado à equação (3.9) está dada por $X = V \times H \times W$, onde

$$V = \mathcal{D}(A^{\alpha/2}) = \mathcal{D}(A) = H_0^2(0, L), \quad H = L^2(0, 1) \quad \text{e} \quad W = L_{g'}^2(0, \infty; V).$$

Além disso,

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ u_{xxxx} - \int_0^\infty g'(s)w_{xxxx}(s)ds \\ v - w'(s) \end{pmatrix}$$

com

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u, v, w) \in X; v \in V, w' \in W, w(0) = 0, u - \int_0^\infty g'(s)w(s)ds \in H^4 \cap H_0^2(0, L) \right\}$$

Como \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações como visto na seção 2.2, pela teoria de semigrupos sabemos que para todo $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe uma única solução

$$u(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C^1([0, \infty), X) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

onde $e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A} .

Nosso objetivo agora é calcular o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ gerado por \mathcal{A} a partir da fórmula (3.2). De fato para $\alpha = 2$ temos que o menor valor espectral de $A^\alpha = A^2$ é

$$\lambda_1^\alpha = \lambda_1^2 = \pi^4.$$

Então em (3.3) temos que

$$Q(\lambda_1^2) = Q(\pi^4) = \frac{1}{27}\pi^{15} - \frac{1}{108}\pi^{12} + \frac{1}{4}\pi^{10} + \frac{1}{27}\pi^8 - \frac{1}{6}\pi^{11} \approx 1027584.201 > 0$$

Então por (2.82) temos que

$$\begin{aligned} \sigma_+(\lambda_1^2) &= \sigma_+(\pi^4) = \operatorname{Re} l_+(\pi^4) = -\frac{k}{3} - \frac{B_+(\pi^4) + B_-(\pi^4)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^4)}{2} + \sqrt{Q(\pi^4)}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{-\frac{q(\pi^4)}{2} - \sqrt{Q(\pi^4)}} \approx -1.067 \end{aligned}$$

Portanto

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{-1, \sigma_+(\lambda_1^2)\} = \max\{-1, \sigma_+(\pi^4)\} = -1.$$

Observação 3.5 *Novamente neste caso ($\alpha = 2$) podemos observar que o valor de $\omega_0(\mathcal{A}) = -1$ depende dos coeficientes do Núcleo de Maxwell $g(s) = 1 + (\pi - 1)e^{-\pi s}$.*

3.6 Comentários Finais

Finalizamos esta Capítulo com comentários relacionados às Aplicações e comentários sobre a aplicação do método para outros tipos de núcleos.

1. Podemos observar nos casos acima que para $\alpha \geq 1$, o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ é sempre

$$\omega_0(\mathcal{A}) = -1,$$

e não depende do espectro do operador A^α . Enquanto que para os casos

$$0 < \alpha < 3/4 = 12/16$$

o tipo de semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$ depende do espectro de A^α e não dos parâmetros do núcleo, isto é

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sigma_+(\lambda_1^\alpha).$$

Além disso, considerando o caso $\alpha = 13/16$ se verifica que

$$\sigma_+(\lambda_1^{13/16}) = \sigma_+(\pi^{13/8}) \approx -1.007$$

Portanto

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \max\{-1, \sigma_+(\lambda_1^{13/16})\} = \max\{-1, \sigma_+(\pi^{13/8})\} = -1.$$

Assim, podemos concluir que o tipo do semigrupo $\omega_0(\mathcal{A})$, para o núcleo de memória da forma $g(s) = 1 + (\pi - 1)e^{-\pi s}$, está dado por

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \begin{cases} \sigma_+(\lambda_1^\alpha) & \text{para } 0 < \alpha \leq 12/16 \\ -1 & \text{para } \alpha \geq 13/16. \end{cases}$$

Portanto, podemos concluir que o valor de α onde acontece a mudança do valor de $\omega_0(\mathcal{A})$ está localizado no intervalo $[3/4, 13/16]$.

2. Vejamos agora a aplicabilidade do método para outros tipos de núcleo.

Neste trabalho temos mostrado que a propriedade de crescimento determinada pelo espectro (PCDE) vale para o sistema viscoelástico (2.1) no caso particular em que o núcleo é do tipo Maxwell, isto é,

$$g(s) = 1 + Me^{-ks}, \quad (k, M > 0).$$

Em outros casos a propriedade do (PCDE) é uma questão em aberto, já que o método estabelecido não se aplica diretamente. Para ver isto consideremos um núcleo da forma

$$g_1(s) = 1 + M_1e^{-k_1s} + M_2e^{-k_2s}, \quad \text{com } k_1, k_2 \geq k > 0 \text{ e } M_1, M_2 > 0, \quad (3.10)$$

isto é um núcleo com uma pequena modificação em relação aos núcleos do tipo Maxwell. Note que $g_1(s)$ verifica as hipóteses (g1) – (g4) facilmente. Assim como na subseção 2.4.1, para $\sigma < \frac{k}{2}$ temos que

$$\begin{aligned} C(\sigma) &= \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})|g'(s)|ds \\ &= \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})(k_1M_1e^{-k_1s} + k_2M_2e^{-k_2s})ds \\ &= \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})k_1M_1e^{-k_1s}ds + \int_0^\infty (1 + e^{2\sigma s})k_2M_2e^{-k_2s}ds \\ &= \frac{2M_1(k_1 - \sigma)}{k_1 - 2\sigma} + \frac{2M_2(k_2 - \sigma)}{k_2 - 2\sigma}. \end{aligned}$$

Supondo que podemos mostrar um lema análogo ao Lema 2.13, agora para encontrar $\sigma_0(\mathcal{A})$ usaríamos (2.37) e resolveríamos a equação

$$\gamma\lambda^2 + g(0) + \widehat{g}'(\lambda) = 0 \quad (3.11)$$

em Λ_k para todo $\gamma \in \sigma(A^{-1})$, onde agora o núcleo g seria da forma (3.10). Então teríamos

$$\begin{aligned} \widehat{g}'(\lambda) &= \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s} ds \\ &= -\int_0^\infty k_1 M_1 e^{-k_1 s} e^{-\lambda s} ds - \int_0^\infty k_2 M_2 e^{-k_2 s} e^{-\lambda s} ds \\ &= -k_1 M_1 \int_0^\infty e^{-(k_1+\lambda)s} ds - k_2 M_2 \int_0^\infty e^{-(k_2+\lambda)s} ds \\ &= -\frac{k_1 M_1}{k_1 + \lambda} - \frac{k_2 M_2}{k_2 + \lambda} \end{aligned}$$

Note que $Re\lambda > -\frac{k}{2} > -k \geq -k_1, -k_2$. O resultado segue como na subseção (2.4.1). Logo em (3.11) teríamos que

$$\gamma\lambda^2 + 1 + M_1 + M_2 - \frac{k_1 M_1}{k_1 + \lambda} - \frac{k_2 M_2}{k_2 + \lambda} = 0, \quad \gamma \in \sigma(A^{-1}), \quad Re\lambda > -\frac{k}{2}.$$

No caso 1, quando $\gamma = 0 \in \sigma(A^{-1})$, obtemos a seguinte equação quadrática

$$(1 + M_1 + M_2)(\lambda + k_1)(\lambda + k_2) - (\lambda + k_2)k_1 M_1 - (\lambda + k_1)k_2 M_2 = 0$$

Enquanto que no caso 2, quando $0 \neq \gamma \in \sigma(A^{-1})$, definindo a nova variável $\mu = \frac{1}{\gamma}$, temos uma equação de quarto grau com parâmetro μ da forma

$$\lambda^2(\lambda + k_1)(\lambda + k_2) + \mu(1 + M_1 + M_2)(\lambda + k_1)(\lambda + k_2) - \mu(\lambda + k_1)k_1 M_1 - \mu(\lambda + k_1)k_2 M_2 = 0.$$

Logo, para a aplicação do método, teríamos que fazer uma análise das equações de quarto grau, que não possuem um método estabelecido como para o caso de equações de terceiro grau (Método de Cardano).

Referências

- [1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.
- [2] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.
- [3] BRONSHTEIN, I. N. and SEMENDYAYEV, K. A. **Handbook of mathematics**. Van Nostrand Reinhold Co. 1985.
- [4] DAFERMOS, C. M. **Asymptotic Stability in viscoelasticity**. Arch. Rat. Mech. Anal., 37, pp 297-308, 1970.
- [5] GEARHART, L. **Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Space**. Trans. Amer. Math. Soc., 236, pp 385-394, 1978.
- [6] HUANG, F. L. **Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces**. Ann. of Diff. Eqs. 1(1), 43-56, 1985.
- [7] ÍÓRIO, V. **EDP Um curso de graduação**. INSTITUTO DE MATEMATICA PURA E APLICADA, 1991.
- [8] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. JOHN WILEY & SONS, 1978.
- [9] LIU, K. and LIU, Z. **On the type of C_0 -semigroup associated with the abstract linear viscoelastic system**. Z. angew. Math. Phys. 47, p. 1-15 (1996).
- [10] LIU, Z. and ZHENG, S. **Semigroups associated with dissipative systems**. CHAPMAN and HALL/CRC, 1999.
- [11] LIONS, J. L. and MAGENES, E. **Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.

- [12] LAGNESE, J. **Boundary Stabilization of thin plates**. Vol. 10 of SIAM Studies in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1989.
- [13] LAX, P. D. **Functional Analysis**. WILEY-INTERSCIENCE, 2002.
- [14] MUÑOZ RIVERA, J. E. and CABANILLAS LAPA, E. **Decay rates of solutions of an anisotropic inhomogeneous n-dimensional viscoelastic equation with polynomial decaying kernels**. Comm. Math. Phys. 177(1), 583-602, 1996.
- [15] MUÑOZ RIVERA, J. E. , CABANILLAS LAPA, E. and KAMEI BARRETO, R. **Decay rates for viscoelastic plates with memory**. Journal of Elasticity. 44(1), 61-87, 1996.
- [16] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [17] PRÜSS, J. **On the Spectrum of C_0 -Semigroups**. Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro. 2, pp 847-857, 1984.
- [18] RENARDY, M. **On the Type of Certain C_0 -Semigroups**. Commun. in Partial Diferential Equations, 18(7-8), pp 1299-1307, 1993.
- [19] RENARDY, M. **On linear stability of hyperbolic PDEs and viscoelastic flows**. Z. angew Math. Phys. 45, 854-865, 1994.
- [20] RENARDY, M. , HRUSA, W. and NOHEL, J. **Mathematical Problems in Viscoelasticity**. Longman Scientific & Technical, 1987.
- [21] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw Hill, 2da edição, 1974.
- [22] RUDIN, W. **Functional Analysis**. McGraw Hill, 2da edição, 1991.
- [23] YOSIDA, K. **Functional Analysis**. Springer-Verlang Berlin Heidelberg New York, Third Edition, 1971.
- [24] ZABCZYK, J. **A note on C_0 -semigroup**. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., 23, 895-898, 1975.