Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Andrey Dione Ferreira

Problemas Inversos de Identificação de Potenciais em Equações Diferenciais Parciais

DISSERTAÇÃO

Orientador: Prof. Rolci de Almeida Cipolatti

Rio de Janeiro

Novembro de 2011

Problemas Inversos de Identificação de Potenciais em Equações Diferenciais Parciais

Andrey Dione Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rolci de Almeida Cipolatti

Rio de Janeiro

Novembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Ferreira, Andrey Dione.

Problemas Inversos de Identificação de Potenciais em Equações Diferenciais Parciais/ Andrey Dione Ferreira. - Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2011.

iv, 75f.

Orientador: Rolci de Almeida Cipolatti

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2011.

Referências Bibliográficas: f. 68-70.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Problemas Inversos.

I. Cipolatti, Rolci de Almeida. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

III. Título.

Problemas Inversos de Identificação de Potenciais em Equações Diferenciais Parciais

Andrey Dione Ferreira

Orientador: Rolci de Almeida Cipolatti

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Rolci de Almeida Cipolatti

PhD - IM - UFRJ - Orientador.

Prof. César Javier Niche Mazzeo

PhD - IM - UFRJ

Prof. Nilson Costa Roberty

PhD - COPPE - UFRJ

Rio de Janeiro

Novembro de 2011

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus pois sem ele não seria possível essa conquista.

À minha esposa, Débora, por sempre estar ao meu lado quando precisei, pela atenção a mim dada, por todo e carinho que sempre me deu, pelo cuidado e paciência comigo quando precisei e principalmente pelo seu amor que me fortalece a cada dia.

Aos meus pais, Tereza e Benedito, por tudo o que me ensinaram, pelos valores que colocaram em minha vida e pela imensa dedicação que sempre tiveram.

Aos meu irmãos, Leonardo e Monaliza, pela amizade, carinho e pela ajuda que sempre me deram.

Aos meus sogros, Dalva e Eden, que me apoiaram muito no início dessa caminhada.

Ao meu orientador, professor Rolci de Almeida Cipolatti, pelo imenso conhecimento que adiquiri nesse tempo de orientação e pelos conselhos que me foram dados quando precisei.

À banca examinadora, pela colaboração neste trabalho.

Aos amigos que consegui na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

A todos que estiveram ao meu lado, e colaboraram com essa minha vitória.

RESUMO

FERREIRA, Andrey Dione. Problemas Inversos de Identificação de Potenciais em Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

Neste trabalho consideramos os problemas inversos de identificação de potenciais para os problemas de Dirichlet, de EIT (*Electrical Impedance Tomography*) e de ondas. Para este último, tratamos tanto do caso conservativo quanto do dissipativo. Mais precisamente, provaremos que a unicidade dos parâmetros desses problemas é garantida em termos das medidas de fronteira.

Plavras chaves: Problemas inversos; operador de Dirichlet-Neumann; equação de Dirichlet; EIT (*Electrical Impedance Tomography*); equação de ondas.

ABSTRACT

FERREIRA, Andrey Dione. Problemas Inversos de Identificação de Potenciais em Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

We consider the inverse problems to identify potential for Dirichlet problems of EIT (*Electrical Impedance Tomography*) and wave. In the last case we present the conservative type as well as the dissipative one. More precisely, we prove that the uniqueness of the parameters of these problems are guaranteed in terms of boundary measurements.

Key Words: Inverse problems; Dirichlet-Neumann map; Dirichlet equation; EIT (*Electrical Impedance Tomography*); wave equation.

Sumário

Introdução

É usual denominar-se "Problemas Inversos" a área da Análise Matemática na qual se insere o tema desta Dissertação, a saber, a Determinação de Parâmetros em Equações Diferenciais Parciais. Interessam-nos, em especial, aqueles problemas que envolvem medições externas, que matematicamente sejam modelados pelo *Operador de Dirichlet-Neumann*.

A título de exemplo, podemos citar o problema de EIT (*Electrical Impedance Tomography*), cujo objetivo é determinar a condutividade elétrica de um corpo a partir de medições eletromagnéticas em sua superfície. Esse problema tem diversas aplicações, dentre as quais podemos citar as técnicas de mamografia.

Sendo mais precisos, considere um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que representa um dado corpo que possua a capacidade de conduzir eletricidade em seu interior e cujo coeficiente de condutividade elétrica seja $a(x)$, com $x \in \Omega$. Se assumirmos que este corpo é submetido a um potencial elétrico conhecido $\varphi(\sigma)$ com $\sigma \in \partial\Omega$, onde $\partial\Omega$ representa a fronteira de Ω, então o potencial elétrico $u(x)$ em Ω satisfaz a equação elítica:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u(x)\right) = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u(\sigma) = \varphi(\sigma) & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Nesse sentido, a intensidade (local) da corrente é representada por $a(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\sigma)$, onde $\frac{\partial u}{\partial \eta}(\sigma)$ denota a derivada normal exterior, e o total de energia elétrica necessária para manter o potencial φ na fronteira será

$$Q_a(\varphi) := \int_{\Omega} a(x)\left|\nabla u(x)\right|^2 dx = \int_{\partial\Omega} a(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma.$$

Assim, a questão que se coloca é a seguinte: a partir dessas informações, podemos determinar o coeficiente de condutividade $a(x)$? Essa questão nos leva naturalmente ao estudo do operador de

Dirichlet-Neumann

$$\varphi \xrightarrow{\Lambda_a} a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

e do operador

$$q \xrightarrow{\Lambda} \Lambda_a.$$

Algumas questões básicas inerentes ao estudo do operador Λ são:

1. Λ é injetivo (Identificação)?

2. Λ é contínuo (Estabilidade)?

3. Podemos descrever a imagem de Λ (Caracterização)?

4. Podemos determinar o potencial $a(x)$ a partir da caracterização de Λ_a (Reconstrução)?

As interrogações acima são algumas das questões básicas que nos interessam no contexto da área de Problemas Inversos e que abordaremos nesse trabalho. Mais precisamente, trataremos do Problema de Identificação para o problema de EIT, o problema de Dirichlet e as equações de ondas, tanto o caso conservativo quanto o dissipativo.

Para ser mais preciso, consideremos os seguintes problemas de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u \ + \ qu \ = \ 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u \ = \ \varphi \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(x)\nabla u(x)\right) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \qquad u(\sigma) = \varphi(\sigma) \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $q,\ a \in L^\infty(\Omega)$, $q \geqslant 0$ e $a \geqslant \varepsilon > 0$.

Os principais resultados referentes a esses problemas são:

Teorema 1: *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, um domínio limitado de classe $C^{1,1}$ e $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$, $q_j \geqslant 0,\ j = 1\ ,\ 2$. Se $\Lambda_{q_1} \equiv \Lambda_{q_2}$, então $q_1 = q_2$.*

Teorema 2: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, um domínio limitado de classe $C^{1,1}$ e $a_j \in W^{2,\infty}(\Omega)(j = 1, 2)$, tal que $a_j \geqslant \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Se $\Lambda_{a_1} \equiv \Lambda_{a_2}$ então $a_1 = a_2$.*

Esses resultados são válidos para $N = 2$ mas as técnicas de demonstração são diferentes das que apresentaremos aqui (ver [14]).

Definindo de modo análogo o operador de Dirichlet-Neumann para as equações de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu = 0, & \text{em } (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & \text{em } \Omega, \\ u(t,\sigma) = \varphi(t,\sigma), & \text{sobre } [0,T] \times \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

e

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu_t = 0, & \text{em } (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & \text{em } \Omega, \\ u(t,\sigma) = \varphi(t,\sigma), & \text{sobre } [0,T] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

temos o seguinte resultado:

Teorema 3: *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$. Se $T > \operatorname{diam} \Omega$, então $q_1 = q_2$.*

Organizamos a dissertação da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentaremos algumas definições e resultados básicos para a compreensão do texto, mais precisamente, apresentaremos as definições de alguns Espaços de Sobolev e propriedades desses, alguns resultados de Análise Funcional. No Capítulo 2 abordaremos o problema de identificação de potenciais para o problema de Dirichlet e de EIT, e no Capítulo 3 trataremos do problema de identificação de potenciais para as equações de ondas, tanto no caso conservativo quanto no caso dissipativo.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos necessários para a compreensão do texto, como definições de certos espaços funcionais e teoremas relacionados.

1.1 Definições e Teoremas Preliminares

No que se segue, quando falarmos de integral, estaremos nos referindo à Integral de Lebesgue e denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos reais ou o corpo dos complexos.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $m \in \mathbb{N}$.

Definimos,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K}; \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty, 1 \leqslant p < \infty \right\},$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K}; f \text{é mensurável e essencialmente limitada} \},$$

com as respectivas normas

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Observação: No caso de $p = 2$, L^p é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(v; u) = \int_\Omega v(x)\overline{u(x)} dx$$

Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço da funções testes em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuções sobre Ω. Consideramos também os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, onde

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com as derivadas de u no sentido das distribuições e a notação usual $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Para $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

No caso em que $p = 2$, denotamos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Proposição 1.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Denota-se $W_0^{m,p}$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}$. Se $1 \leqslant p < \infty$ e $1 < q \leqslant \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Podemos definir uma família de espaços entre $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$. Mas precisamente, se $s \in \mathbb{R}$, $0 < s < 1$ e $1 \leqslant p < \infty$, definimos

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s+(n/p)}} \in L^P(\Omega \times \Omega) \right\},$$

munido da norma de $L^p(\Omega \times \Omega)$, isto é,

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\iint |u(x) - u(y)|^p |x - y|^{-sp-n} dxdy \right)^{1/p}.$$

Definimos também

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega).$$

Para $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, definimos $W^{s,p}(\Omega)$ como segue. Escreva $s = m + \sigma$ com m sendo a parte inteira de s e defina

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega);\ D^\alpha u \ \in \ W^{\sigma,p}(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } |\alpha| = m\}.$$

1.1.1 O Teorema do Traço

A seguir apresentamos o teorema do traço que caracteriza o espaço ao qual pertence a restrição de uma função u de H^m, definida em um domínio Ω, sobre sua fronteira $\partial\Omega$. Consideraremos Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ bastante regular (ou seja, de classe C^k para todo $k = 1, 2, \ldots$).

Representaremos por $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ o espaço vetorial que consiste das funções reais w definidas em $\partial\Omega$ que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representamos por $\gamma_0 u$ a restrição de u a $\partial\Omega$.

Como $\partial\Omega$ tem medida nula no $\mathbb{R}^N$, a restrição de u a $\partial\Omega$ não está bem definida. Porém, é possível caracterizar o espaço Y onde está definida $\gamma_0 u$.

Observe que no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ podemos identificar $\partial\Omega = \left\{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^N\right\}$ com $\mathbb{R}^{N-1}$, identificando toda função u definida em $\partial\Omega$ com a função $x' \to u(x', 0)$ do $\mathbb{R}^{N-1}$ em

$\mathbb{R}$. Com essa identificação temos $\mathcal{D}(\partial\Omega) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ e $L^p(\partial\Omega) = L^p(\mathbb{R}^{N-1})$. E, nesse caso, definimos $H^s(\partial\Omega) = H^s(\mathbb{R}^{N-1}), s \geqslant 0, s \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2. *Vale a seguinte desigualdade*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}, \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}).$$

Demonstração. Ver [20]. □

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ com a topologia induzida por $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, a proposição acima afirma que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$$

é contínua. Além disso, como $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, essa aplicação se estende continuamente a uma aplicação linear contínua que permanecemos denotando por γ_0, onde

$$\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^N_+) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$$

é denominada *função traço* e seu valor $\gamma_0 u$ denomina-se o traço de u sobre $\mathbb{R}^{N-1}$.

Teorema 1.1. *A função traço aplica $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ sobre $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ e o núcleo de γ_0 é o espaço $H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$.*

Demonstração. Ver [20]. □

Observação: Temos que γ_0 é a única aplicação linear e contínua de $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ tal que

$$\gamma_0 u = u|_{\mathbb{R}^{n-1}}, \ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}).$$

Passaremos agora ao caso em que Ω é um aberto limitado bem regular. Para definir $H^s(\partial\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, considere

$$Q = \left\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; |y'_i| < 1, i = 1, 2, \ldots, n-1, |y_N| < 1\right\},$$

$$Q^+ = Q \cap \{y_N > 0\}, \Sigma = Q \cap \{y_N = 0\} = \{(y', 0); y' \in \mathbb{R}^{N-1}\}$$

e um conjunto de cartas locais $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \ldots, (U_n, \varphi_n)\}$ tais que, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$\begin{cases} \varphi_k(U_k) = Q, \varphi_k(U_k \cap \Omega) = Q^+, \varphi_k(U_k \cap \partial\Omega) = \Sigma. \\ \varphi_k, \varphi_k^{-1} \text{são de classe } C^\infty. \\ \text{Se } U_k \cap U_l \neq \emptyset \text{ então existe um homeomorfismo } J_{kl} \text{ de classe } C^\infty \\ \text{com jacobiano positivo de } \varphi_k(U_k \cap U_l) \text{ sobre } \varphi_l(U_k \cap U_l) \text{ tal que} \\ \varphi_l(x) = J_{kl}(\varphi_k(x)), \forall x \in U_k \cap U_l \text{(condição de compatibilidade).} \end{cases} \tag{1.1}$$

Considere funções testes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ do $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sigma_k \leqslant 1, k = 0, \ldots, n, \ \operatorname{supp} \sigma_0 \subset \Omega \\ \operatorname{supp}(\sigma_k) \subset U_k, k = 1, \ldots, n, \ \text{ e } \sum\limits_{k=0}^{n} \sigma_k(x) = 1, \forall x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dada uma função w definida em $\partial\Omega$ e $k = 1, \ldots, n$, seja

$$w_k(y') = \begin{cases} (\sigma_0 w)(\varphi_k^{-1}(y', 0)) & \text{se } \ y' \in \Omega_0 = (-1, 1)^{N-1} \\ 0 & \text{se } \ y' \in \mathbb{R}^{N-1} \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

Como $\operatorname{supp} w_k = \operatorname{supp}(\sigma_k \circ \varphi_k^{-1})|_\Sigma$, $(\operatorname{supp} \sigma_k) \cap \partial\Omega \subset U_k \cap \partial\Omega$ e φ_k aplica $U_k \cap \partial\Omega$ sobre Σ, temos que

$$\operatorname{supp} w_k \subset \Sigma.$$

Define-se o espaço $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ das funções C^∞ em $\partial\Omega$ como o espaço das funções $w : \partial\Omega \longmapsto \mathbb{K}$ tais que $w_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Temos que $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ coincide com o espaço das funções $\mathcal{F} = \{u|_{\partial\Omega}; u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})\}$ (ver [20]). Além disso, se $w : \partial\Omega \to \mathbb{K}$ é mensurável, como $\partial\Omega$ é limitado, então o suporte de w é compacto.

Com isso, dado $s \in \mathbb{R}, s \geqslant 0$, define-se $H^s(\partial\Omega)$ como o espaço das funções $w : \partial\Omega \to \mathbb{K}$ tais que $w_k \in H^s(\mathbb{R}^{N-1})$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, munido do produto escalar

$$(w; v)_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} (w_k, v_k)_{H^s(\mathbb{R}^{N-1})}, \tag{1.3}$$

para todo par de funções $w, v \in H^s(\partial\Omega)$. Denotando a norma desse espaço por $\| \cdot \|_{H^s(\partial\Omega)}$, temos

$$\|w\|^2_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} \|w_k\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Tem-se que $H^s(\partial\Omega)$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{D}(\partial\Omega)$ é denso em $H^s(\partial\Omega)$.

Vale salientar que se tivermos outro sistema de cartas locais $\mathcal{V}$ satisfazendo (1.1) então o novo produto escalar para $H^s(\partial\Omega)$, definido da mesma maneira que em (1.3), produz uma norma equivalente à norma do sistema $\mathcal{U}$, de forma que a definição do espaço $H^s(\partial\Omega)$ não depende da escolha do sistema de cartas.

Se $u \in H^1(\Omega)$ então $u = \sum\limits_{k=0}^{n} \sigma_k u$ quase sempre em Ω. Para $K = 1, \ldots, n$, define-se a função

$$v_k(y', y_N) = \begin{cases} (\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', y_N)) & \text{se} \quad (y', y_N) \in Q^+ \\ 0 & \text{se} \quad (y', y_N) \in \mathbb{R}^N_+ \backslash Q^+. \end{cases} \tag{1.4}$$

Se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, denota-se por $\gamma_0 u$ à restrição de u a $\partial\Omega$.

Proposição 1.3. *Existe uma constante $C > 0$, que independe de $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [20]. □

Novamente, da proposição (1.3) concluímos que podemos estender continuamente γ_0 a $H^1(\Omega)$, obtendo assim a aplicação linear e contínua

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Temos ainda que

$$\|\gamma_0 u\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \sum_{k=1}^{n} [(\gamma_0\sigma_k)(\gamma_0 u)]^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\,, \ \forall u \in H^1(\Omega).$$

Teorema 1.2. *O núcleo de γ_0 coincide com $H^1_0(\Omega)$ e γ_0 é sobrejetora.*

Por fim, trataremos do caso geral do teorema do traço, ou seja o caso em que $u \in H^m(\Omega)$, $m \geqslant 2$. Começando com o caso em que $u \in H^m(\mathbb{R}^N_+)$, identificamos como antes a fronteira $\partial\Omega$ de $\mathbb{R}^N_+$ com $\mathbb{R}^{N-1}$.

Seja $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Define-se

$$(\gamma_j u)(x') = (D^j_N)(x', 0) = \gamma_0(D^j_N u)(x')$$

para $j = 0, 1, \ldots m-1$ e $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, onde $D_N = \frac{\partial}{\partial x_N}$. Considere o espaço de Hilbert

$$X = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$$

com a norma

$$\|w\|^2_X = \sum_{j=0}^{m-1} \|w_j\|^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})},$$

onde $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1})$. Tem-se que $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}))^m$ é denso em X. Daí, segue o teorema do traço para $H^m(\mathbb{R}^N_+)$.

Teorema 1.3. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. A aplicação linear*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & X \\ \varphi & \longmapsto & (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, \ldots, \gamma_{m-1}\varphi) \end{array}$$

estende-se continuamente a uma aplicação linear e contínua γ em $H^m(\Omega), m \geqslant 1$, sobre X, cujo núcleo é o espaço $H^m_0(\Omega)$. Além disso, γ possui uma inversa à direita linear e contínua, isto é, existe uma aplicação Λ linear e contínua de X em $H^m(\Omega)$ tal que $\gamma(\Lambda w) = w$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Ver [20]. $\square$

Considere agora Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ bem regular, e seja $\eta(x)$ a normal unitária exterior em $x \in \partial\Omega$. Para $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$Q_{\delta\epsilon} = \left\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; |y'_i| < \delta, i = 1, 2, \ldots, N-1, -\varepsilon < y - N < \varepsilon\right\}$$

e

$$Q^+_{\delta\varepsilon} = Q_{\delta\varepsilon} \cap \{y_N > 0\}, \Sigma_\delta = Q_{\delta\varepsilon} \cap \{y_N = 0\}.$$

É possível escolher um sistema de cartas locais $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \ldots, (U_n, \varphi_n)\}$, para $\partial\Omega$, que, além das propriedades em (1.1), com $Q = Q_{\delta\varepsilon}$, satisfaz, para todo $k = 1, 2, \ldots n$,

$$\frac{\partial^m}{\partial y_N^m} v_k(y', 0) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \eta^m} (\sigma_k u)(\varphi_k^{-1}(y', 0))$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $(y', 0) \in \Sigma$ e $m = 1, 2, \ldots$, onde as funções σ_k e v_k são definidas em (1.2) e (1.4), respectivamente.

Define-se a aplicação linear

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{D}(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & Y \\ u & \longmapsto & \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u), \end{array} \tag{1.5}$$

onde $\gamma_j u$ é a restrição a $\partial\Omega$ da função $\frac{\partial^j u}{\partial \eta^j}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, e Y é o espaço de Hilbert

$$Y = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

com a norma

$$\|\xi\|_Y^2 = \sum_{j=0}^{m-1} \|\xi_j\|^2_{H^{m-j-\frac{1}{2}}},$$

sendo $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in Y$.

Do teorema (1.3) e com o auxílio de cartas locais, tem-se o teorema do traço para funções $u \in H^m(\Omega)$.

Teorema 1.4. *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^N$ e m um inteiro, $m \geqslant 1$. A aplicação γ definida em (1.5) prolonga-se continuamente a uma aplicação linear contínua, ainda denotada por γ, de $H^m(\Omega)$ sobre $Y = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, cujo núcleo é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Além disso, γ possui uma inversa à direita linear e contínua.*

1.1.2 Espaços de Sobolev Vetoriais

Para $p \in [1, \infty]$, I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e X um espaço de Banach, denotamos por $L^p(I, X)$ o espaço vetorial das aplicações $f : I \to X$ tais que a função $t \to \|f(t)\|_X$ pertence a $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I, X)$, definimos

$$\|f\|_{L^p(I,X)} = \left\{ \int_I \|f(t)\|_X^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ se } p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(I,X)} = \operatorname*{supess}_{t \in I} \|f(t)\|_X.$$

Definimos também $\mathcal{D}(I, X) = C_c^\infty(I, X)$ o espaço das funções $C^\infty(I, X)$ com suporte compacto em I.

Observação: O espaço $L^p(I, X)$ possui a maioria das propriedades do espaço $L^p(I) = L^p(I, \mathbb{R})$, com essencialmente as mesmas provas. Em particular, verifica-se facilmente os seguintes resultados.

1. $L^p(I, X)$ munido da norma $\|\cdot\|_{L^p(I,X)}$ é um espaço de Banach. Se $p < \infty$, então $\mathcal{D}(I, X)$ é denso em $L^p(I, X)$

2. Se $f \in L^p(I, X)$ e $\varphi \in L^q(I)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leqslant 1$, então $\varphi f \in L^r(I, X)$ e temos

$$\|\varphi f\|_{L^r(I,X)} \leqslant \|f\|_{L^p(I,X)} \|\varphi\|_{L^q(I)}.$$

3. Se $f \in L^1(I, X)$ e $\int_I f(s)\varphi(s)ds = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(I, X)$, então $f(t) = 0$ quase sempre em I.

Denotaremos por $\mathcal{D}'(I,X)$ o espaço das distribuições sobre I que assumem valores em X, mais precisamente, o espaço das aplicações lineares e contínuas $\mathcal{D}(I) \to X$, onde X é munido da topologia fraca.

Um elemento $f \in L^1_{loc}(I,X)$ define uma distribuição $T_f : \mathcal{D}(I) \to X$ pela fórmula

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_I f(t)\varphi(t)dt, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Definimos a n-ésima derivada $T_f^{(n)}$ de uma distribuição T_f por

$$\left\langle T_f^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \int_I f(t) \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} dt, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, denotamos por $W^{1,p}(I,X)$ conjunto das funções $f \in L^p(I,X)$ tais que $f' \in L^p(I,X)$, no sentido de $\mathcal{D}'(I,X)$. Para $f \in W^{1,p}(I,X)$ definimos a norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(I,X)} = \|f\|_{L^p(I,X)} + \|f'\|_{L^p(I,X)}.$$

Definimos, para $m \in \mathbb{N}$, o espaço

$$W^{m,p}(I,X) = \left\{ f \in L^p(I,X); \frac{d^j f}{dt^j} \in L^p(I,X) \text{ para todo} j \in \{1, \cdots, m\} \right\}.$$

Quando $p = 2$ escrevemos $W^{m,2}(I,X) = H^m(I,X)$. Além disso, definimos de modo análogo o espaço $H_0^1(I,X)$ e seu dual topológico $H^{-1}(I,X)$

Lema 1.1. *O operador* $\partial_t : L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \longrightarrow H^{-1}\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ *é contínuo.*

Demonstração. É claro que

$$u \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \Rightarrow T_u \in \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \Rightarrow T_u' \in \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Seja $\{\varphi_n\}_n$ uma sequência em $\mathcal{D}(0,T)$ que converge para φ na topologia de $\mathcal{D}(0,T)$, isto é, $\varphi_n - \varphi$ converge uniformente para zero sobre os compactos de $(0,T)$ assim como todas as suas derivadas. Então, por definição,

$$\big(\langle T_u'; \varphi_n \rangle; \Phi\big)_2 \to \big(\langle T_u'; \varphi \rangle; \Phi\big)_2, \quad \forall \Phi \in L^2(\Omega).$$

Por outro lado,
$$\big(\langle T'_u;\varphi\rangle;\Phi\big)_2 = -\int_\Omega\left(\int_0^T u(t,x)\varphi'(t)\,dt\right)\Phi(x)\,dx.$$
de onde se conclui que

$$\left|\big(\langle T'_u;\varphi\rangle;\Phi\big)_2\right| \le \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\varphi'\|_{L^2(0,T)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, $T'_u:\mathcal{D}(0,T)\to L^2(\Omega)$ é operador linear contínuo para a topologia forte de $L^2(\Omega)$ e

$$\|\langle T'_u;\varphi\rangle\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\varphi'\|_{L^2(0,T)}.$$

Como $\|\varphi'\|_{L^2(0,T)} \le \|\varphi\|_{H_0^1(0,T)}$, tem-se

$$\|T'_u\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|\langle T'_u;\varphi\rangle\|_{L^2(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(0,T)}} \le \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

□

Os resultados sobre espaços de Sobolev aqui mencionados podem ser encontrados em [1], [6], [18], [20], [26] e [27], dentre outros clássicos.

1.1.3 Desigualdades e Resultados Básicos de Análise Funcional

Lema 1.2. (Desigualdades de Gronwall):

1. **(Forma diferencial)** *Seja η uma função não negativa e absolutamente contínua em $[0,T]$ tal que, em quase todo ponto, η satisfaz*

$$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

onde ϕ e ψ são funções não negativas e integráveis em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)dx\right), \quad \forall t\in[0,T].$$

2. **(Forma integral)** *Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa e integrável em $[0,T]$ tal que, em quase todo ponto, η satisfaz*
$$\eta(t) \leqslant C_1 + C_2 \int_0^t \eta(s)ds$$
para constantes $C_1, C_2 \geqslant 0$. Então
$$\eta(t) \leqslant C_1 e^{C_2 t}$$
para quase todo $t \in [0,T]$.

Demonstração. Ver [9]. □

Lema 1.3. (Desigualdade de Poicaré-Friedrichs). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Se $f \in H_0^1(\Omega)$, então*
$$\|f\|_2 \leqslant C\|\nabla f\|_2,$$
onde a constante $C > 0$ só depende de Ω.

Demonstração. Ver [20]. □

Se E é um espaço vetorial normado, denotaremos por E^* o dual topológico de E, isto é
$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K}; f \text{ é linear e contínua}\}.$$

Teorema 1.5. Hahn-Banach. *Seja $A \subset E$ e $B \subset E$ dois subconjuntos convexos, não vazios de um espaço vetorial normado E tal que $A \cap B = \emptyset$. Assuma que A é fechado e B compacto. Então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in E^*$ tais que $f(x) < \alpha \, \forall x \in A$ e $f(x) > \alpha \, \forall x \in B$.*

Demonstração. (Ver [3]) □

Corolário 1.1. *Seja $F \subset E$ um subespaço de E tal que $\overline{F} \neq E$. Então existe $f \in E^*$, $f \not\equiv 0$, tal que $\langle f, x \rangle = 0 \, \forall \, x \in F$.*

Demonstração. (Ver [3]) $\square$

Observação: O corolário 1.1 é usualmente utilizado para provar que um subespaço vetorial $F \subset E$ é denso em E. Para isso basta mostrar que se $\forall f \in E^*$ tal que $\left\langle f; x \right\rangle = 0 \, \forall x \in F$, tem-se $f \equiv 0$.

Uma ferramenta importante para o estudo dos problemas tratados aqui, é a transformada de Fourier, cuja definição se dá como segue:

Definição 1. *Dada uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, define-se a transformada de Fourier de f por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-\mathrm{i}x \cdot \xi) f(x) \, dx.$$

Definimos a transformada inversa de f por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(\mathrm{i}x \cdot \xi) f(\xi) \, d\xi.$$

Usaremos as vezes a notação $\widehat{f}$ para representar $\mathcal{F}(f)$.

Teorema 1.6. **(Plancherel)** *As aplicações*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \longmapsto L^2(\mathbb{R}^N) \;\; e \;\; \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N) \longmapsto L^2(\mathbb{R}^N)$$

são isomorfismos isométricos de espaços de Hilbert. Mais que isso, têm-se

$$(\mathcal{F}(f); \mathcal{F}(g))_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (f; g)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left(\mathcal{F}^{-1}(f); \mathcal{F}^{-1}(g)\right)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

para todo par $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, onde $(\cdot\ ;\ \cdot)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ denota o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Capítulo 2

Identificação de Potenciais para Equações Elíticas

Em seu famoso artigo [5], A. P. Caldéron fez a seguinte pergunta: é possível determinar a condutividade térmica de um objeto a partir de medidas do fluxo de calor na sua fronteira? Em 1984, R. KOHN & M. VOGELIUS estudaram esse problema em seu trabalho intitulado *Determining conductivity by boundary measurements* (ver [16]).

Neste capítulo trataremos da questão de identificação de potenciais para o problema de Dirichlet e para o problema de EIT (Eletrical Impedance Tomography) citado na introdução. Esses problemas foram estudados em [14], [16], [17], [21] e [24].

2.1 O problema de Dirichlet

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 2$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz. Seja $q \in L^\infty(\Omega)$ tal que $q(x) \geqslant 0$ quase sempre em Ω. Então, para cada $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, existe uma única $u \in H^1(\Omega)$

solução de

$$\begin{cases} -\Delta u \;+\; qu \;=\; 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u \;=\; \varphi \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Para a prova da existência de solução da equação (2.1) veja [3].

Considere o operador de Dirichlet-Neumann (D-N) $\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ definido por

$$\Lambda_q(\varphi)(\tau) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(\tau), \quad \tau \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ é a derivada na direção da normal unitária exterior a Ω. Então o problema de identificação de q consiste no seguinte:

Problema 2.1. *Se $\Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi)$ para todo $\varphi \in A \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$ implica $q_1 = q_2$?*

Provaremos que, no caso em que $A = H^{1/2}(\partial\Omega)$, a resposta do problema (2.1) é afirmativa.

Lema 2.1. *Λ_q é um operador simétrico, isto é,*

$$\langle \Lambda_q(\varphi_1); \varphi_2 \rangle = \langle \Lambda_q(\varphi_2); \varphi_1 \rangle, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

onde $\langle \,.\,;\,.\, \rangle$ denota o produto de dualidade entre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ e o seu dual $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, ou seja,

$$\langle \Lambda_q(\varphi_1); \varphi_2 \rangle = \int_{\partial\Omega} \Lambda_q(\varphi_1)\varphi_2 \, d\tau \,.$$

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 as soluções de (2.1) correspondentes a φ_1 e φ_2 respectivamente. Multiplicando a equação em u_1 por u_2 e a em u_2 por u_1 obtemos,

$$\begin{cases} -u_2(\Delta u_1 + qu_1) = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ -u_1(\Delta u_2 + qu_2) = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Integrando em Ω temos

$$\int_\Omega -u_2 \Delta u_1 \, dx + \int_\Omega q u_1 u_2 \, dx = \int_\Omega -u_1 \Delta u_2 \, dx + \int_\Omega q u_2 u_1 \, dx = 0.$$

Pela identidade de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 dx - \int_{\partial\Omega} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\, d\tau = -\int_\Omega u_2 \Delta u_1\, dx = -\int_\Omega q u_1 u_2\, dx$$
$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx - \int_{\partial\Omega} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \eta}\, d\tau = -\int_\Omega u_1 \Delta u_2\, dx = -\int_\Omega q u_2 u_1\, dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 dx + \int_\Omega q u_1 u_2\, dx = \int_{\partial\Omega} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\, d\tau = \langle \Lambda_q(\varphi_1); \varphi_2 \rangle$$
$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega q u_2 u_1\, dx = \int_{\partial\Omega} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \eta}\, d\tau = \langle \Lambda_q(\varphi_2); \varphi_1 \rangle,$$

de onde se conclui

$$\langle \Lambda_q(\varphi_1); \varphi_2 \rangle = \langle \Lambda_q(\varphi_2); \varphi_1 \rangle.$$

□

Lema 2.2. *Sejam $q_j \in L^\infty(\Omega), q_j \geqslant 0, j = 1,2$. Suponhamos que $\Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi)$, para algum $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Consideremos u a solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1 u = 0 & em\, \Omega, \\ \qquad\quad u = \varphi & sobre\, \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

e $v \in H^1(\Omega)$ satisfazendo $-\Delta v + q_2 v = 0$ em Ω. Então

$$\int_\Omega uv(q_1 - q_2)\, dx = 0.$$

Demonstração. Seja ψ o traço de v sobre $\partial\Omega$. De (2.4) segue que

$$\int_\Omega -v\Delta u\, dx + \int_\Omega v q_1 u\, dx = 0 \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\tau + \int_\Omega q_1 v u\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega q_1 v u \, dx = \int_{\partial\Omega} \psi \Lambda_{q_1}(\varphi) \, d\tau = \langle \psi ; \Lambda_{q_1}(\varphi) \rangle . \tag{2.5}$$

Da mesma forma, temos que

$$\int_\Omega -u\Delta v \, dx + \int_\Omega q_2 uv \, dx = 0 \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} \, d\tau + \int_\Omega q_2 uv \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx + \int_\Omega q_2 uv \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \Lambda_{q_2}(\psi) \, d\tau = \langle \varphi ; \Lambda_{q_2}(\psi) \rangle . \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6), segue que

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) uv \, dx = \langle \Lambda_{q_1}(\varphi); \psi \rangle - \langle \Lambda_{q_2}(\psi); \varphi \rangle \overset{Lema\, 2.1}{=} \langle \Lambda_{q_1}(\varphi); \psi \rangle - \langle \Lambda_{q_2}(\varphi); \psi \rangle =$$

$$\left\langle \underbrace{\Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi)}_{=0} ; \psi \right\rangle = 0.$$

$\square$

Corolário 2.1. *Sejam* $q_j \in L^\infty(\Omega), q_j \geqslant 0, j = 1, 2,$ *tais que* $\Lambda_{q_1} \equiv \Lambda_{q_2}$. *Consideremos* $u_j \in H^1(\Omega)$ *satisfazendo* $-\Delta u_j + q_j u_j = 0$. *Então*

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx = 0.$$

Observação: Seja $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tal que $\Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi)$ e u solução de (2.4). Consideremos o espaço vetorial

$$E_{q_2} = \text{span} \left\{ uv \, ; v \in H^1(\Omega), -\Delta v + q_2 v = 0 \right\} .$$

Se E_{q_2} é denso em $L^1(\Omega)$, então podemos concluir do lema 2.2 que $q_1 = q_2$. A nosso conhecimento, o problema da densidade de E_{q_2} é ainda um problema em aberto.

De forma análoga, se $\Lambda_{q_1} \equiv \Lambda_{q_2}$ e o espaço vetorial

$$E_{q_1,q_2} = \text{span} \left\{ u_1 u_2 ; u_j \in H^1(\Omega), -\Delta u_j + q_j u_j = 0, j = 1, 2 \right\}$$

é denso em $L^1(\Omega)$, então, segue do Corolário 2.1 que $q_1 = q_2$. De fato, se $\overline{E_{q_1,q_2}} = L^1(\Omega)$ e $\Lambda_{q_1} \equiv \Lambda_{q_2}$, pelo Corolário 2.1, denotando $q = (q_1 - q_2) \in L^\infty(\Omega) = \big(L^1(\Omega)\big)^*$, temos

$$\langle\, q\,; w\,\rangle = 0 \quad \forall w \in E_{q_1,q_2} \Rightarrow \langle\, q\,; f\,\rangle = 0 \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

2.2 Densidade do espaço E_{q_1,q_2}.

Nesta seção provaremos a densidade do espaço E_{q_1,q_2} em $L^1(\Omega)$ definido anteriormente. Com isso, resolveremos o problema 2.1. Com exceção do último teorema, os resultados dessa seção são devidos à [11].

Seja $Q = (-R, R)^N$ o cubo em $\mathbb{R}^N$ de raio R com centro na origem.

Definição 2. *Uma função $u : R^N \to \mathbb{C}$ é Q-periódica se*

$$u(x + 2Re_k) = u(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad k = 1, ..., N,$$

onde$\{e_1, ..., e_N\}$ é a base canônica do R^N.

Vamos denotar o espaço das funções $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ que são Q-periódicas por $H^1_{per}(Q)$.

Seja

$$Z_* = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^n; \frac{\alpha_1 R}{\pi} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}, \frac{\alpha_j R}{\pi} \in \mathbb{Z} \ \text{para} j \geqslant 2\right\}$$

Observe que se $\alpha \in Z_*$, então $\alpha_1 \neq 0$ e escrevendo $\frac{\alpha_1 R}{\pi} - \frac{1}{2} = z$ onde $z \in \mathbb{Z}$, então $|\alpha_1| = \left|\frac{2\pi z+1}{2R}\right| \geqslant \frac{\pi}{2R}$.

Além disso, podemos escrever

$$Z_* = \frac{\pi}{2R} e_1 + \frac{\pi}{R}\mathbb{Z}^N.$$

Definição 3. *Dizemos que uma função* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *é* Z_**-periódica se a aplicação*

$$x \mapsto \exp(-\mathrm{i}\pi x_1/2R)u(x)$$

é Q-periódica. Denotaremos o espaço das funções de $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *que são* Z_**-periódicas por* $H^1_{Z_*}$.

Lema 2.3. *Para cada* $\alpha \in Z_*$ *seja* φ_α *a função definida por*

$$\varphi_\alpha(x) = (2R)^{-N/2} \exp(\mathrm{i}\alpha \cdot x).$$

Então φ_α *é* Z_**-periódica e satisfaz* $\nabla\varphi_\alpha = \mathrm{i}\alpha\varphi_\alpha$ *e* $\Delta\varphi_\alpha = -|\alpha|^2 \varphi_\alpha$. *Além disso,* $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ *é uma base de Hilbert para* $L^2(Q)$.

Demonstração.

1. Por um cálculo direto, temos

$$\nabla\varphi_\alpha = \nabla\left((2R)^{-\frac{N}{2}} \exp(i\alpha \cdot x)\right) = (2R)^{-\frac{N}{2}} \nabla\left(\exp(\mathrm{i}\alpha \cdot x)\right) = \mathrm{i}\alpha\varphi_\alpha.$$

2. Analogamente

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_j} = (2R)^{-N/2} \exp(\mathrm{i}\alpha \cdot x)\mathrm{i}\alpha_j,$$
$$\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_j^2} = (2R)^{-N/2} \exp(\mathrm{i}\alpha \cdot x)i^2\alpha_j^2$$
$$\Rightarrow \Delta\varphi_\alpha = -\varphi_\alpha \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j^2) = -|\alpha|^2 \varphi_\alpha.$$

3. Provemos que φ_α é Z_*- periódica.

$$x \longmapsto \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x) \quad \text{é Q} - \text{periódica se, e somente se,}$$

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi(x_1+2R)}{2R}\right)\varphi_\alpha(x + 2Re_1) = \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x), \\ \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x + 2Re_k) = \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x) \quad \forall k = 2, \ldots, N. \end{cases}$$

De fato, seja $k \in \{2, \ldots, N\}$

$$\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x+2Re_k) = \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)(2R)^{-\frac{N}{2}}\exp\big(\mathrm{i}\alpha\cdot(x+2Re_k)\big)$$

$$= \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x)\exp(\mathrm{i}\alpha\cdot 2Re_k).$$

Escrevendo $\alpha = \frac{\pi}{2R}e_1 + \frac{\pi}{R}(z_1, \ldots, z_N) \in Z_*$ temos

$$\exp(\mathrm{i}\alpha\cdot 2Re_k) = \exp(\mathrm{i}2z_k\pi) = 1, \text{ se } k \neq 1.$$

Se $k = 1$, temos que

$$\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi(x_1+2R)}{2R}\right)\varphi_\alpha(x+2Re_1)$$

$$= \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\exp(\mathrm{i}\pi)\,(2R)^{-\frac{N}{2}}\exp\big(\mathrm{i}\alpha.(x+2Re_1)\big)$$

$$= \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x)\exp(\mathrm{i}\pi)\exp(\mathrm{i}\pi) = \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi x_1}{2R}\right)\varphi_\alpha(x).$$

Portanto φ_α é Z_*-periódica.

4. Resta provarmos que $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ é uma base de Hilbert para $L^2(Q)$.

   (a) Claramente $\varphi_\alpha \in L^2(Q)$.

   (b)

$$\|\varphi_\alpha\|_{L^2(Q)} = \left(\int\limits_Q \left|(2R)^{-\frac{N}{2}}\exp(\mathrm{i}\alpha\cdot x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2R)^{-N}\int\limits_Q dx = \frac{(2R)^N}{(2R)^N} = 1.$$

   Além disso, por um cálculo direto, se $\alpha_1 \neq \alpha_2$,

$$(\varphi_{\alpha_1};\varphi_{\alpha_2}) = \int\limits_Q (2R)^{-N}\exp(\mathrm{i}(\alpha_1-\alpha_2)\cdot x)dx = 0.$$

(c) Vejamos que o espaço gerado por $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ é denso em $L^2(Q)$.

De fato, observando que

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha^1(x)\varphi_\alpha^2(x)\ldots\varphi_\alpha^n(x),$$

onde $\varphi_\alpha^j(x) = (2R)^{-\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}\alpha_j x_j)$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, sendo α_j a j-ésima coordenada de $\alpha \in Z_*$ e x_j a j-ésima coordenada de $x \in Q = (-R,R)^N$, se provarmos para o caso $N = 1$ o caso $N \geqslant 2$ segue por argumentos simples de teoria de espaços de Hilbert (ver [4] proposição 8.29).

Se $f \in L^2\Big((-R,R)\Big)$ então f tem em $L^2\Big((-R,R)\Big)$ a série de Fourier

$$f(t) = \sum_{\alpha\in\frac{\pi}{R}\mathbb{Z}} \tilde{f}(\alpha)\frac{\exp(\mathrm{i}\alpha\mathrm{t})}{\sqrt{2R}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n)\frac{1}{\sqrt{2R}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}n\pi\mathrm{t}}{R}\right),$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\alpha) = \Big(f,\varphi_\alpha\Big) &= \int_{-R}^{R} f(t)\frac{1}{\sqrt{2R}}\exp(-\mathrm{i}\alpha\mathrm{t})\,dt\\ = \tilde{f}(n) &= \int_{-R}^{R} f(t)\frac{1}{\sqrt{2R}}\exp\left(\frac{-\mathrm{i}n\pi\mathrm{t}}{\mathrm{R}}\right)dt.\end{aligned}$$

De onde se conclui o caso $N = 1$.

$\square$

Lema 2.4. *Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{C})$ funções Q-periódicas. Então:*

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\overline{v(x)}dx = -\int_Q u(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)}dx;$$

$$\int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t)\overline{v(t)}dt = \int_{\partial Q} u(t)\overline{\frac{\partial u}{\partial \nu}(t)}dt = 0; \tag{2.7}$$

$$\int_Q \Delta u(x)\overline{v(x)}dx = \int_Q u(x)\overline{\Delta v(x)}dx.$$

Demonstração. Como u e v são funções Q-periódicas, então $u(xf_k - Re_k) = u(xf_k + Re_k)$, onde f_k denota o vetor cuja k-ésima coordenada é zero e as outras são iguais a um.

1. Utilizando integração por partes, temos que

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial u}{\partial x_j}\overline{v}dx_j = \underbrace{uv(xf_j + Re_j) - uv(xf_j - Re_j)}_{=0} - \int_{-R}^{R} u\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j}dx_j.$$

Daí,

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\overline{v(x)}dx = -\int_Q u(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)}dx.$$

2. Pela identidade de Green, temos que

$$\int_Q \overline{v}\Delta u + \nabla\overline{v}\nabla u dx = \int_{\partial Q} \overline{v(t)}\frac{\partial u}{\partial \nu}(t)dt.$$

Mas

$$\int_Q \overline{v}\Delta u + \nabla\overline{v}\nabla u dx = \sum_{i=1}^{n}\int_Q \overline{v}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Utilizando novamente integração por partes temos que

$$\int_{-R}^{R} \overline{v}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}dx_i + \int_{-R}^{R} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i =$$

$$\underbrace{\overline{v}\frac{\partial u}{\partial x_i}(xf_j + Re_j) - \overline{v}\frac{\partial u}{\partial x_i}(xf_j - Re_j)}_{=0}\ \underbrace{-\int_{-R}^{R} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i + \int_{-R}^{R} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i}_{=0}.$$

Daí,

$$\sum_{i=1}^{n}\int_Q \overline{v}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \Longrightarrow \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t)\overline{v(t)}dt = 0.$$

Da mesma forma temos que

$$\int_{\partial Q} u(t)\overline{\frac{\partial u}{\partial \nu}(t)}dt = 0.$$

3. Pela segunda identidade de Green e por 2 segue que

$$\int_Q \overline{v}\Delta u - u\Delta\overline{v}dx = \int_{\partial Q} \overline{v}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \overline{v}}{\partial \nu}dt = 0.$$

De onde,

$$\int_Q \Delta u(x)\overline{v(x)}dx = \int_Q u(x)\overline{\Delta v(x)}dx.$$

□

Proposição 2.1. *Seja* $s \in \mathbb{R}, s \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^N$ *tal que* $\xi \cdot e_1 = 0$ *e seja* $\zeta = i\xi + se_1$. *Então para cada* $f \in L^2(Q)$ *existe uma única* $\Phi \in H^1_{Z_*} \cap H^2(Q)$ *solução de*

$$-\Delta\Phi - 2\zeta \cdot \nabla\Phi = f. \tag{2.8}$$

Além disso,

$$\|\Phi\|_{L^2} \leqslant \frac{R}{\pi\,|s|}\|f\|_{L^2} \tag{2.9}$$

Demonstração. Como $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ é uma base de Hilbert para $L^2(Q)$, temos

$$f = \sum_{\alpha \in Z_*} (f; \varphi_\alpha)\varphi_\alpha.$$

Assumindo que a solução de (2.8) é periódica, multiplicando (2.8) por $\overline{\varphi_\alpha}$ e integrando em Q, temos

$$\int\limits_Q (-\Delta\Phi - 2\zeta \cdot \nabla\Phi)\overline{\varphi_\alpha}dx = \int\limits_Q f\overline{\varphi_\alpha}dx.$$

Pelo lema 2.4, segue que

$$\int\limits_Q f\overline{\varphi_\alpha} = \int\limits_Q -\Phi\overline{\Delta\varphi_\alpha} + \Phi 2\zeta \cdot \overline{\nabla\varphi_\alpha}dx.$$

Daí, pelo lema 2.3,

$$(f;\varphi_\alpha) = \int_Q |\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha\Phi\overline{\varphi_\alpha}dx = \left(|\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha\right)(\Phi;\varphi_\alpha).$$

Como

$$i\zeta\cdot\alpha = is\alpha_1 - \xi\cdot\alpha,$$

temos que

$$\left||\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha\right| \geqslant \left|\mathrm{Im}(|\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha)\right| = |2s\alpha_1| = |s||2k+1|\frac{\pi}{R}.$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$

Assim

$$\left||\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha\right| \geqslant |s|\frac{\pi}{R} > 0.$$

Portanto, como $|\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha \neq 0$, podemos escrever

$$(\Phi;\varphi_\alpha) = \frac{(f;\varphi_\alpha)}{\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha}$$

e consequentemente

$$\Phi = \sum_{\alpha\in Z_*}\left[\frac{(f;\varphi_\alpha)}{|\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha}\right]\varphi_\alpha.$$

Como $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ é uma base de Hilbert para $L^2(Q)$, segue da identidade de Parserval que

$$\|\Phi\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{\alpha\in Z_*}\frac{|(f;\varphi_\alpha)|^2}{||\alpha|^2 - 2i\zeta\cdot\alpha|^2} \leqslant \frac{R^2}{|s|^2\pi^2}\|f\|^2_{L^2(Q)}.$$

Logo, $\Phi \in L^2(Q)$.

Para concluir que $\Phi \in H^2(Q)$, recorremos a resultados de regulariade para equações elíticas (ver [2], [3]). □

Corolário 2.2. *Seja $\zeta = \eta + i\xi$, onde $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ satisfazem $\xi \cdot \eta = 0, \eta \neq 0$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $(N \geqslant 2)$, um domínio limitado. Então existe um operador linear e contínuo $B_\zeta : L^2(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow H^2(\Omega;\mathbb{C})$ tal que*

$$\|B_\zeta(f)\|_2 \leqslant \tfrac{c}{|\eta|}\|f\|_2, \qquad \forall f \in L^2(\Omega;\mathbb{C}), \tag{2.10}$$

onde $c > 0$ não depende da escolha de ζ e η. Além disso, a função $\Phi = B_\zeta(f)$ é solução de

$$-\Delta\Phi - 2\zeta \cdot \nabla\Phi = f.$$

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$, já que o operador $-\Delta - 2\zeta.\nabla$ é invariante por translações. Sendo Ω limitado, existe $R > 0$ tal que

$$T(\Omega) \subset (-R, R)^N, \ \ \forall \ \ \text{rotação} \ \ T \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N.$$

Fixe uma rotação T tal que $Te_1 = \frac{\eta}{|\eta|}$. Pela proposição 2.1, existe $v(y) \in H^1_{Z_*} \cap H^2(Q)$, tal que

$$-\Delta v - 2\underbrace{(iT^{-1}\xi + |\eta|e_1)}_{\zeta} \cdot \nabla v = g,$$

onde

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & \text{se } y \in T(\Omega) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja

$$\Phi(x) = v\left(T(x)\right).$$

Então, usando o fato de que o laplaciano é invariante por rotações, que T é linear e que $T^t = T^{-1}$, onde T^t é a transposta de T, temos pela regra da cadeia que

$$\Delta\Phi(x) = \Delta\big(v(Tx)\big) = \Delta v(x) \ \ e \ \ \nabla\Phi(x) = T^t(\nabla v(Tx)) = T^{-1}(\nabla v(Tx)).$$

Observe ainda que $\zeta = \mathrm{i}T^{-1}\xi + |\eta|e_1 \Rightarrow T\zeta = \mathrm{i}\xi + |\eta|\frac{\eta}{|\eta|} = \mathrm{i}\xi + \eta$.

Portanto, se $y = T(x)$, temos

$$-\Delta\Phi(x) - 2\zeta \cdot \nabla\Phi(x) = -\Delta v(Tx) - 2\zeta \cdot T^{-1}(\nabla v(Tx)) = -\Delta v(y) - 2\zeta.\nabla v(y) = g(y).$$

Assim, pela proposição 2.1,

$$\|B_\zeta(f)\|_2 \leqslant \tfrac{c}{|\eta|}\|f\|_2, \qquad \forall f \in L^2(\Omega; \mathbb{C}),$$

de onde se conclui que o operador

$$\begin{array}{rccc} B_\zeta : & L^2(\Omega, \mathbb{C}) & \longmapsto & H^2(\Omega, \mathbb{C}) \\ & f & \longmapsto & \Phi, \end{array}$$

onde Φ é solução de $-\Delta\Phi - 2\zeta.\nabla\Phi = f$, é um operador linear e contínuo que satisfaz (2.10). $\square$

Proposição 2.2. *Seja $\zeta = \eta + i\xi$, onde $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ são tais que $\eta \neq 0$ e $\xi \cdot \eta = 0$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) um domínio limitado e $q \in L^\infty(\Omega)$. Então existe uma constante $c_0 > 0$ e para $|\eta| \geqslant c_0$ existe um operador linear contínuo $M_\zeta : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ tal que para qualquer $f \in L^2(\Omega)$, a função $\psi = M_\zeta(f)$ satisfaz, $\psi \in H^2(\Omega)$ e*

$$-\Delta\psi - 2\zeta.\nabla\psi + q\psi = f. \tag{2.11}$$

Além disso,

$$\|\psi\|_2 = |M_\zeta(f)|_2 \leqslant \frac{c}{|\eta|}\|f\|_2\,, \tag{2.12}$$

onde $c > 0$ independe de ζ e f.

Demonstração. Observe que ψ satisfaz (2.11) se, e somente se,

$$\psi = B_\zeta(f) - B_\zeta(q\psi), \tag{2.13}$$

onde B_ζ é o operador definido pelo Corolário 2.2. Mostremos que para $|\eta|$ suficientemente grande, a aplicação $\psi \xmapsto{\mathcal{F}} B_\zeta(f) - B_\zeta(q\psi)$ é uma contração de $L^2(\Omega)$, o que implica que ela tem um único ponto fixo e, consequentemente, as equações (2.11) e (2.13) têm uma única solução. De fato, se $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$, então

$$\|\mathcal{F}(\psi_1) - \mathcal{F}(\psi_2)\|_2 = \|B_\zeta(q\psi_2) - B_\zeta(q\psi_1)\|_2 = \|B_\zeta\big(q(\psi_2 - \psi_1)\big)\|_2.$$

Como

$$B_\zeta(q\psi) \leqslant \frac{c}{|\eta|}\|q\|_\infty\|\psi\|_2, \ \forall\, \psi \in L^2(\Omega),$$

então

$$\|\mathcal{F}(\psi_1) - \mathcal{F}(\psi_2)\|_2 \leqslant \frac{c}{|\eta|}\|q\|_\infty\|\psi_1 - \psi_2\|_2.$$

Portanto se $|\eta| \geqslant 2c\|q\|_\infty$, então $\|\mathcal{F}(\psi_1) - \mathcal{F}(\psi_2)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|\psi_1 - \psi_2\|_2$ e a equação (2.11) tem uma única solução.

Seja $A_\zeta(\psi) := B_\zeta(q\psi)$. Então para $|\eta| > 2c\|q\|_\infty$, temos que $\|A_\zeta\| \leqslant 1/2$ e, portanto, a aplicação $\psi \longmapsto A_\zeta(\psi)$ é linear e contínua.

Assim, se $M_\zeta = (I - A_\zeta)^{-1}B_\zeta$, temos que

$$\psi = (I - A_\zeta)^{-1}B_\zeta(f)$$

e

$$\|\psi\|_2 \leqslant \|(I - A_\zeta)^{-1}\|\|B_\zeta(f)\|_2 \leqslant \frac{2c}{|\eta|}\|f\|_2.$$

Pelos mesmos argumentos de regularidade da proposição anterior aplicados a equação (2.11), segue que $\psi \in H^2(\Omega)$.

$\square$

Teorema 2.1. *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega), q_j \geqslant 0, j = 1, 2$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 3$, é aberto limitado com fronteira Lipschitz e $\Lambda_{q_1} \equiv \Lambda_{q_2}$, então E_{q_1,q_2} é denso em $L^1(\Omega)$. Em particular $q_1 = q_2$.*

Demonstração. Para mostrar que E_{q_1,q_2} é denso em $L^1(\Omega)$, basta provar, de acordo com o corolário 1.1, que se para todo $v \in (L_1(\Omega))^*$ tal que

$$\big\langle v(x); w(x) \big\rangle = \int\limits_{\Omega} v(x)w(x)dx = 0 \quad \forall w \in E_{q_1,q_2} \Longrightarrow v \equiv 0. \tag{2.14}$$

Seja $\xi \in \mathbb{R}^N, \xi \neq 0$. Como $N \geqslant 3$, podemos escolher $\omega, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ tais que $|\omega| = 1$, $\eta \cdot \xi = \omega \cdot \xi = \eta \cdot \omega = 0$ e $|\eta|^2 = |\xi|^2 + t^2$. Sejam

$$\zeta_1 = \eta + i(\xi + t\omega),\ \zeta_2 = -\eta + i(\xi - t\omega)$$

e $\psi_j (j = 1, 2)$ a solução de 2.11 com $f = -q_j$, isto é, ψ_j é a solução de

$$-\Delta\psi_j - 2\zeta_j \nabla\psi_j + q_j\psi_j = -q_j.$$

Como $\zeta_j \cdot \zeta_j = 0$, podemos verificar que $u_j = (1 + \psi_j)e^{\zeta_j \cdot x}$ é solução de

$$-\Delta u_j + q_j u_j = 0.$$

Consequentemente $u_1u_2 \in E_{q_1q_2}$.

Fazendo $w = u_1u_2$ em 2.14 temos que

$$\int\limits_{\Omega} v(x)u_1(x)u_2(x)dx = \int\limits_{\Omega} v(x)\Big(1 + \psi_1(x)\Big)\Big(1 + \psi_2(x)\Big)e^{((\zeta_1+\zeta_2)\cdot x)}dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} v(x)\Big(1 + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_1(x)\psi_2(x)\Big)e^{(2i\xi\cdot x)}dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\Omega} v(x)e^{2i\xi\cdot x}dx = -\int\limits_{\Omega} v(x)\Big(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_1(x)\psi_2(x)\Big)e^{2i\xi\cdot x}dx.$$

Portanto,

$$\left|\int\limits_{\Omega} v(x)e^{2i\xi\cdot x}dx\right| = \left|\int\limits_{\Omega} v(x)\Big(\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_1(x)\psi_2(x)\Big)e^{2i\xi\cdot x}dx\right|$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |v(x)|\Big(|\psi_1(x)| + |\psi_2(x)| + |\psi_1(x)\psi_2(x)|\Big)\underbrace{|e^{2i\xi\cdot x}|}_{=1}\,dx$$
$$\leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\|\psi_1 + \psi_2 + \psi_1\psi_2\|_{L^1(\Omega)}$$
$$\leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(K(\|\psi_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}) + \|\psi_1\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_2\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Onde $K = \sqrt{medida(\Omega)}$.

Usando a estimativa em 2.12,

$$\|\psi_j\|_2 \leqslant \frac{c}{|\eta|}\|q_j\|_2\,,$$

e o fato de $|\eta| \geqslant t$, temos

$$\left|\int\limits_{\Omega} v(x)e^{2i\xi\cdot x}dx\right| \leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\left(K\Big(\frac{c}{t}\|q_1\|_{L^2} + \frac{c}{t}\|q_2\|_{L^2}\Big) + \frac{c}{t}\|q_1\|_{L^2}\frac{c}{t}\|q_2\|_{L^2}\right).$$

Portanto, fazendo $t \to +\infty$, segue que

$$\int\limits_{\Omega} v(x)e^{2i\xi\cdot x}dx = 0 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \tilde{v}(x)e^{2i\xi\cdot x}dx,$$

onde

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Ou seja, a transformada de Fourier de $\tilde{v}(x)$ é zero, donde se conclui que $v \equiv 0$.

Portanto, E_{q_1,q_2} é denso em $L^1(\Omega)$ e assim $q_1 = q_2$.

□

Note que foi necessário considerar $N \geqslant 3$ para a escolha de ξ, ω e η no teorema acima. O caso $N = 2$ foi provado por Kang (ver [14]) usando métodos diferentes do apresentado aqui.

2.3 O problema de EIT

Nesta seção trataremos do problema de EIT. Veremos que esse caso pode ser resolvido baseado no problema de Dirichlet da seção anterior.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geqslant 2$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz e $a \in L^\infty(\Omega)$ tal que $a(x) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ quase sempre em Ω. Então, para cada $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ existe uma única $u \in H^1(\Omega)$ solução de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = 0 & \text{em}\,\Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.15}$$

A prova da existência e unicidade da solução da equação (2.15) pode ser encontrada em [10].

Considerando o operador de Dirichlet- Neumann, $\pounds_a : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ definido por

$$\pounds_a(\varphi)(\sigma) = a(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \eta}(\sigma), \quad \sigma \in \partial\Omega, \tag{2.16}$$

temos o seguinte problema:

Problema 2.2. *Se $\pounds_{a_1}(\varphi) = \pounds_{a_2}(\varphi)$ para todo $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ então $a_1 = a_2$?*

A resposta para esse problema é sim, desde que tenhamos certas condições satisfeitas. Por exemplo, suponha que $a \in W^{2,\infty}(\Omega)$ e considere $v = \sqrt{a}u$, onde u é solução de (2.15).

Assim, temos que

$$\Delta v = \Delta(\sqrt{a})u + 2\nabla\sqrt{a}\nabla u + \sqrt{a}\Delta u$$

e

$$\operatorname{div}(a\nabla u) = a\Delta u + \nabla a\nabla u = a\Delta u + \frac{2}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\nabla a\nabla u$$

$$= a\Delta u + 2\nabla\sqrt{a}\nabla u = \sqrt{a}\sqrt{a}\Delta u + 2\nabla\sqrt{a}\nabla u.$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(a\nabla u) = \sqrt{a}\left(\Delta v - qv\right),$$

onde

$$q = \frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}. \tag{2.17}$$

Além disso, na fronteira $\partial\Omega$ temos que

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \sqrt{a}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{2\sqrt{a}}\frac{\partial a}{\partial \eta} = a^{-\frac{1}{2}}\pounds_a(\varphi) + \frac{1}{2\sqrt{a}}\varphi\frac{\partial a}{\partial \eta}.$$

Assim, se $\pounds_{a_1} = \pounds_{a_2}$, temos que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, desde que

$$a_1(\sigma) = a_2(\sigma) \ e \ \frac{\partial a_1}{\partial \eta}(\sigma) = \frac{\partial a_2}{\partial \eta}(\sigma), \ \ \forall \sigma \in \partial\Omega.$$

Onde $q_j, j \in \{1, 2\}$, é definido por (2.17) com $a = a_j$.

E se esse for o caso, pelo Teorema 2.1, temos que $q_1 = q_2$ e, consequentemente, $a_1 = a_2$.

Assim, o problema a ser resolvido se torna o seguinte:

Problema 2.3. *Se $\pounds_{a_1}(\varphi) = \pounds_{a_2}(\varphi)$ para todo $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tem-se que*

$$a_1(\sigma) = a_2(\sigma) \ e \ \frac{\partial a_1}{\partial \eta}(\sigma) = \frac{\partial a_2}{\partial \eta}(\sigma), \ \ \forall \sigma \in \partial\Omega?$$

O seguinte resultado devido a J. Sylvester e G. Uhlmann ([24]) responde a esta questão.

Teorema 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, um domínio limitado de classe $C^{1,1}$ e $a_j \in W^{2,\infty}(\Omega)(j = 1, 2)$, tal que $a_j \geqslant \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Se $\pounds_{a_1}(\varphi) = \pounds_{a_2}(\varphi)$ para todo $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ então*

$$a_1(\sigma) = a_2(\sigma) \ e \ \frac{\partial a_1}{\partial \eta}(\sigma) = \frac{\partial a_2}{\partial \eta}(\sigma), \ \ \forall \sigma \in \partial\Omega.$$

Não apresentaremos a prova do resultado acima. Essa prova pode ser encontrada em [15].

Observação: Os resultados apresentados nesse capítulo sobre a determinação de coeficientes a partir de dados na fronteira, isto é, a partir do conhecimento do operador de Dirichlet-Neumann, não são válidos em dimensão $N = 1$, conforme podemos ver pelo seguinte exemplo:

Exemplo 1: Para $\Omega = (0, 1)$, considere o problema de contorno

$$\begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = 0, x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.18}$$

onde $a \in C\big([0,1];\mathbb{R}\big) \cap C^1\big((0,1);\mathbb{R}\big)$ satisfaz $a(x) \geqslant \varepsilon > 0, \forall x \in [0,1]$. Neste caso, o operador de Dirichlet-Neumann em a é:

$$\begin{aligned} \Lambda_a : \quad \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (u_0, u_1) &\longmapsto \big(-u'(0), u'(1)\big). \end{aligned}$$

Integrando a equação (2.18), obtemos

$$a(x)u'(x) = c \ \forall x \in [0,1].$$

Em particular:

$$u'(1) = \frac{a(0)}{a(1)}u'(0)$$

Além disso,

$$u'(x) = \frac{c}{a(x)} \Rightarrow u(x) = u_0 + c\int_0^x \frac{ds}{a(s)}.$$

Vale observar que $a(s) \geqslant \varepsilon > 0, \forall s \in [0,x]$, implica que $x \mapsto \int_0^x \frac{ds}{a(s)}$ está bem definida em $[0,1]$. Portanto,

$$c = \frac{u_1 - u_0}{\int_0^1 \frac{ds}{a(s)}}$$

de modo que

$$\Lambda_a(u_0, u_1) = \frac{u_1 - u_0}{\left(\int_0^1 \frac{ds}{a(s)}\right)}\left(-\frac{1}{a(0)}, \frac{1}{a(1)}\right).$$

Para concluir que o operador Λ não é injetivo, basta verificar que $\Lambda_a = \Lambda_{\tilde{a}}$ quaisquer que sejam a e $\tilde{a}$, $a \not\equiv \tilde{a}$, tais que $a(0) = \tilde{a}(0), a(1) = \tilde{a}(1)$,

$$\int_0^1 \frac{ds}{a(s)} = \int_0^1 \frac{ds}{\tilde{a}(s)}.$$

Considere, por exemplo,

$$a(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) + 2 \ \text{ e } \ \tilde{a}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi x) + 2.$$

Então, é fácil verificar que $a \not\equiv \tilde{a}$, $a(0) = \tilde{a}(0), a(1) = \tilde{a}(1)$ e

$$\int_0^1 \frac{ds}{a(s)} = \int_0^1 \frac{ds}{\tilde{a}(s)}.$$

Assim, pelo que vimos, temos $\Lambda_a = \Lambda_{\tilde{a}}$ mas $a \not\equiv \tilde{a}$.

Vale ainda observar que se considerarmos a mudança $v = \sqrt{a}u$, sendo u a solução de (2.15), concluímos que o resultado de identificação de potenciais para o problema de Dirichlet também não é válido para o caso $N = 1$, pois nesse caso temos que o potencial q para a equação de Dirichlet é dado por $q = \frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, onde a é o potencial em (2.15).

Capítulo 3

Identificação de Potenciais para a Equação de Ondas

Neste capítulo consideramos o problema de identificação de coeficientes para a equação de ondas, tanto no caso em que a energia do sistema é conservada, quanto no caso onde ocorre dissipação de energia. Essas questões foram abordadas por R. Cipolatti, [7], e por R. Cipolatti & Ivo F. Lopez, [8]. Em [8], além de obterem um resultado de identificação para o caso dissipativo, os autores obtêm estimativas de estabilidade considerando todas as medidas de fronteira.

A prova de existência e unicidade das soluções dos problemas tratados aqui podem ser encontradas em [22].

3.1 O caso conservativo

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $q \in L^\infty(\Omega)$ e $T > 0$. Então para cada $\varphi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$, existe $u \in C^1\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap C\big([0,T]; H^1(\Omega)\big)$

solução única de

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \Delta u + qu = 0, & \text{em } (0,T) \times \Omega, \\
u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & \text{em } \Omega, \\
u(t,\sigma) = \varphi(t,\sigma), & \text{sobre } [0,T] \times \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.1}
$$

Considerando o operador de Dirichlet-Neumann

$$\Lambda_q : C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right) \longmapsto C\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)$$

definido por $\Lambda_q(\varphi)(t,\sigma) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(t,\sigma), (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega$, o problema a ser resolvido é:

Problema 3.1. *Se $\Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi)$, para toda $\varphi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$ então $q_1 = q_2$?*

Observe que se denotarmos $\tilde{f}(t,x) = f(T-t,x)$, então $v(t,x) = \tilde{u}(t,x)$ é solução de

$$
\begin{cases}
v_{tt} - \Delta v + qv = 0, & \text{em } (0,T) \times \Omega, \\
v(T,x) = v_t(T,x) = 0, & \text{em } \Omega, \\
v(t,\sigma) = \psi(t,\sigma), & \text{sobre } [0,T] \times \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.2}
$$

se, e somente se, u é solução de (3.1), onde $\psi(t,\sigma) = \varphi(T-t,\sigma)$.

Assim, (3.2) é o problema adjunto associado a (3.1).

Para (3.2) considere o operador de Dirichlet-Neumann

$$\Lambda_q^* : C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right) \longmapsto C\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)$$

definido por

$$\Lambda_q^*(\psi)(t,\sigma) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(t,\sigma), (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega.$$

No que se segue denotemos por $\langle \cdot\,; \cdot \rangle$ a integral de superfície sobre $\partial\Omega$.

Lema 3.1. *Para toda $\varphi, \psi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$ temos*

$$\int_0^T \langle \Lambda_q(\varphi); \psi \rangle \, dt = \int_0^T \left\langle \Lambda_q^*(\psi); \varphi \right\rangle dt.$$

Demonstração. Pela identidade de Green, temos que

$$\left\langle \Lambda_q^*(\psi);\varphi \right\rangle - \left\langle \Lambda_q(\varphi);\psi \right\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}\varphi d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\psi d\sigma =$$

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int\limits_{\Omega} (uv_{tt} - vu_{tt})\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} (uv_t - vu_t)\, dx.$$

Portanto,

$$\int\limits_0^T \left\langle \Lambda_q^*(\psi);\varphi \right\rangle - \left\langle \Lambda_q(\varphi);\psi \right\rangle dt = \int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} (uv_t - vu_t)\, dxdt =$$

$$\int\limits_{\Omega} u(T,x)\underbrace{v_t(T,x)}_{=0} - \underbrace{v(T,x)}_{=0} u_t(T,x)dx - \int\limits_{\Omega} \underbrace{u(0,x)}_{=0} v_t(0,x) - v(0,x)\underbrace{u_t(0,x)}_{=0} dx = 0$$

Assim,

$$\int\limits_0^T \left\langle \Lambda_q(\varphi);\psi \right\rangle dt = \int\limits_0^T \left\langle \Lambda_q^*(\psi);\varphi \right\rangle dt.$$

□

Lema 3.2. *Sejam* $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$. *Então* $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ *se, e somente se,* $\Lambda_{q_1}^* = \Lambda_{q_2}^*$.

Demonstração. Se u é solução de (3.1) com $u = \varphi$ sobre $\partial\Omega$ e v é solução de (3.2) com $v = \tilde{\varphi} = \psi$ sobre $\partial\Omega$, então $v = \tilde{u}$.

Em particular,

$$\Lambda_q^*(\tilde{\varphi}) = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \widetilde{\Lambda_q(\varphi)}.$$

Como $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ se, e somente se, $\Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi)$ para toda φ, temos que

$$\Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi) \Longleftrightarrow \widetilde{\Lambda_{q_1}(\varphi)} = \widetilde{\Lambda_{q_2}(\varphi)} \Longleftrightarrow \Lambda_{q_1}^*(\tilde{\varphi}) = \Lambda_{q_2}^*(\tilde{\varphi}).$$

□

Lema 3.3. *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ e $\varphi, \psi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$. Se u é solução de (3.1) com $q = q_1$ tal que $u = \varphi$ sobre $\partial\Omega$ e v é solução de (3.2) com $q = q_2$ tal que $v = \psi$ sobre $\partial\Omega$, então*

$$\int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi); \psi \rangle \, dt = \int_0^T \int_\Omega (q_1(x) - q_2(x)) u(t,x) v(t,x) dx dt.$$

Demonstração. Multiplicando a equação em (3.1) por v e a equação em (3.2) por u, temos que

$$u\Delta v = uv_{tt} + uvq_2 \quad \text{e} \quad v\Delta u = vu_{tt} + uvq_1. \tag{3.3}$$

Donde,

$$v\Delta u - u\Delta v = ((q_1 - q_2)uv) + (vu_{tt} - uv_{tt}).$$

Integrando em Ω e depois em $[0,T]$ temos,

$$\int_0^T \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx dt = \int_0^T \int_\Omega ((q_1 - q_2)uv) \, dx dt - \underbrace{\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (vu_t - uv_t) dx dt}_{=0}.$$

Pela identidade de Green,

$$\int_0^T \int_\Omega ((q_1 - q_2)uv) \, dx dt = \int_0^T \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u \right) d\sigma =$$

$$\int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi); \psi \rangle \, dt - \int_0^T \left\langle \Lambda^*_{q_2}(\psi); \varphi \right\rangle dt.$$

Aplicando o Lema 3.1 na última integral temos,

$$\int_0^T \int_\Omega ((q_1 - q_2)uv) \, dx dt = \int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi); \psi \rangle \, dt - \int_0^T \langle \Lambda_{q_2}(\varphi); \psi \rangle \, dt = \int_0^T \left\langle \Lambda_{q_1(\varphi)} - \Lambda_{q_2}(\varphi); \psi \right\rangle dt.$$

$\square$

Corolário 3.1. *Se $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, então para todo u_1 solução de (3.1) com $q = q_1$ e v_2 solução de (3.2) com $q = q_2$, tem-se*

$$\int_0^T \int_\Omega (q_1(x) - q_2(x))u_1(t,x)v_2(t,x)dxdt = 0.$$

De forma análoga ao problema de identificação de potenciais para a equação de Dirichlet, se

$$E_{q_1,q_2} = \operatorname{span}\left\{u_1v_2; u_1 \text{ e } v_2 \text{ são, respectivamente, soluções de } (3.1) \text{ e } (3.2)\right\},$$

o Corolário (3.1), nos indica que ao provarmos a densidade de E_{q_1,q_2} em $L^1(\Omega)$, resolve-se o problema de identificação dos potenciais q_1 e q_2.

Proposição 3.1. *Seja $\omega \in \mathbb{R}^N$ um vetor unitário e $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que*

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} = \emptyset, \\ &(\operatorname{supp}\psi - T\omega) \cap \overline{\Omega} = \emptyset. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Então para cada $\lambda > 0$, existem $R_{1,\lambda}$ e $R_{2,\lambda}$ satisfazendo

$$\int_0^T \int_\Omega |R_{j,\lambda}(t,x)|^2 dxdt \leqslant \frac{C_1}{\lambda^2}, (j = 1, 2),$$

onde $C_1 > 0$ independe de λ. Além disso as funções u_1, v_2 definidas por

$$u_1(t,x) = \varphi(x + t\omega)\exp\left(\mathrm{i}\lambda(x.\omega + t)\right) + R_{1,\lambda}(t,x)$$

$$v_2(t,x) = \psi(x + t\omega)\exp\left(-\mathrm{i}\lambda(x.\omega + t)\right) + R_{2,\lambda}(t,x)$$

são soluções de (3.1) com $q = q_1$ e de (3.2) com $q = q_2$, respectivamente.

Demonstração. Sejam $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ e R a solução de

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R + qR = -\exp\left(\mathrm{i}\lambda(x.\omega + t)\right)z(t,x), \\ R(0,x) = R_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ R(t,\sigma) = 0, \quad \sigma \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde
$$z(t,x) = \sum_{j,k=1}^{N} \omega_j\omega_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x+t\omega) - \Delta\varphi(x+t\omega) + q(x)\varphi(x+t\omega).$$

Seja
$$u(t,x) = \varphi(x+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R(t,x). \tag{3.5}$$

Se escrevermos $F(t,x) = \varphi(x+t\omega)$ e $g_j = x_j + t\omega_j$ ($j = 1,\dots,n$), então
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + F(t,x)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))\mathrm{i}\lambda + R_t,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + 2\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{i}\lambda\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) - \lambda^2 F(t,x)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{tt},$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial g_j}\frac{\partial g_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\omega_j\frac{\partial\varphi}{\partial g_j} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial g_j g_k}\right)$$
e
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}.$$
Assim,
$$u_{tt} = \left(\sum_{j,k=1}^{n}\omega_j\omega_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\right)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + 2\mathrm{i}\lambda\sum_{j=1}^{n}\omega_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\mathbf{exp}(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))$$
$$-\lambda^2\varphi(x+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{tt}$$

e
$$\Delta u = \Delta\varphi\exp(\mathrm{i}(x\cdot\omega+t)) + 2\mathrm{i}\lambda\sum_{j=1}^{n}\omega_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) - \lambda^2\varphi(x+t\omega)\exp(\mathrm{i}(x\cdot\omega+t)) + \Delta R.$$

Portanto
$$u_{tt} - \Delta u + qu = \left(\sum_{j,k=1}^{n}\omega_j\omega_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} - \Delta\varphi + q\varphi\right)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{tt} - \Delta R + qR = 0.$$

Além disso, como $\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, se $x \in \Omega$ temos que
$$u(0,x) = \underbrace{\varphi(x)}_{=0}\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega)) + \underbrace{R(0,x)}_{=0} = 0,$$

$$u_t(0,x)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)}_{=0}\exp(\mathrm{i}\lambda x\cdot\omega)+\underbrace{\varphi(x)}_{=0}\exp(\mathrm{i}\lambda x\cdot\omega)\mathrm{i}\lambda+\underbrace{R_t(0,x)}_{=0}=0$$

e

$$u(t,\sigma)=\varphi(\sigma+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(\sigma\cdot\omega+t))+\underbrace{R(t,\sigma)}_{=0},\ \sigma\in\partial\Omega.$$

Ou seja, a função u definida em (3.5) satisfaz

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+qu=0, \\ u(0,x)=u_t(0,x)=0, \quad x\in\Omega, \\ u(t,\sigma)=\varphi(\sigma+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(\sigma\cdot\omega+t)), \quad \sigma\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Considere agora

$$\begin{cases} w(t,x)=\int_o^t R(\tau,x)d\tau, \\ h(t,x)=-\int_0^t \exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau))z(\tau,x)d\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

Então,

$$w_t=R(t,x)-R(0,x)=R(t,x)\Longrightarrow w_{tt}=R_t(t,x)=\int_0^t R_{tt}(\tau,x)d\tau$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2}(\tau,x)d\tau \Longrightarrow \Delta w=\int_0^t \Delta R d\tau.$$

Ou seja, w satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt}-\Delta w+qw=h, \\ w(0,x)=w_t(0,x)=0, & x\in\Omega, \\ w(t,\sigma)=0, & \sigma\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Agora, utilizando integração por partes, temos que

$$h(t,x) = -z(\tau,x)\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau))\Big|_0^t + \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\int\limits_0^t \exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau))z_t(\tau,x)d\tau.$$

Portanto, tomando a norma em $L^\infty\big((0,T)\times\Omega\big)$, temos que

$$\|h\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left\| z(\tau,x)\exp\big(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau)\big)\Big|_0^t\right\|_{L^\infty} + \frac{1}{\lambda}\left\|\int\limits_0^t \exp\big(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau)\big)z_t(\tau,x)d\tau\right\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{\lambda}C_1,$$

onde $C_1 > 0$ depende apenas de $\|\varphi\|_{L^\infty\big((0,t)\times\Omega\big)}$ e de $\|q\|_{L^\infty\big((0,t)\times\Omega\big)}$.

Multiplicando 3.7 por $\overline{w_t}$, integrando em Ω, e tomando a parte real temos

$$\Re\left(\int\limits_\Omega w_{tt}\overline{w_t} - \Delta w\overline{w_t} + qw\overline{w_t}dx\right) = \Re\left(\int\limits_\Omega h\overline{w_t}dx\right)$$

$$\Rightarrow \Re\left(\int\limits_\Omega w_{tt}\overline{w_t}dx + \int\limits_\Omega \nabla w.\nabla\overline{w_t}dx + \int\limits_\Omega qw\overline{w_t}dx\right) \leqslant \int_\Omega |h||\overline{w_t}|dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |w_t|^2\,dx + \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega q\,|w|^2\,dx\right) \leqslant \int_\Omega |h||w_t|dx$$

$$\underset{(C.S.)}{\leqslant} \|h(t,\cdot)\|_2\,\|w_t(t,\cdot)\|_2 \underset{(Yang)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|h(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|_2^2.$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\|w_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla w(t,\cdot)\|_2^2 + \|\sqrt{q}w(t,\cdot)\|_2^2\Big) \leqslant \|h(t,\cdot)\|_2^2 + \|w_t(t,\cdot)\|_2^2.$$

Assim se $E(t) = \|w_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla w(t,\cdot)\|_2^2 + \big\|\sqrt{q}w(t,\cdot)\big\|_2^2$, integrando de 0 a t, com $0 < t < T$, e usando as condições iniciais, temos que

$$E(t) \leqslant \int_0^t \|h(s,\cdot)\|_2^2 + \|w_s(s,\cdot)\|_2^2\,ds, \text{ para todo } 0 < t < T.$$

$$\Rightarrow \|w_t(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant E(t) \leqslant T.\frac{C_1}{\lambda^2} + \int_0^t |w_s(s,\cdot)\|_2^2\,ds.$$

Segue da desigualdade de Gronwall, que

$$\|w_t(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \frac{C_1 T}{\lambda^2}\mathrm{e}^T.$$

Enfim, por (3.6), temos que

$$\|R\|_2^2 \leqslant \frac{CT}{\lambda^2}\mathrm{e}^T.$$

De forma análoga, sejam $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $(\mathrm{supp}\psi - T\omega) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ e R a solução de

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R + qR = \exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t))z(t,x), \\ R(T,x) = R_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ R(t,\sigma) = 0, \quad \sigma \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde

$$z(t,x) = \sum_{j,k=1}^n \omega_j\omega_k \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}(x+t\omega) - \Delta\psi(x+t\omega) + q(x)\psi(x+t\omega).$$

Assim, definindo

$$v(t,x) = \psi(x+t\omega)\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t)) + R(t,x),$$

usando o fato de que $(\mathrm{supp}\psi - T\omega) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, um cálculo direto nos dá que v satisfaz

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v + qv = 0, \\ v(T,x) = v_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ v(t,\sigma) = \psi(\sigma + t\omega)\exp(-\mathrm{i}\lambda(\sigma\cdot\omega + t)), \quad \sigma \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Defina

$$\begin{cases} w^*(t,x) = \int\limits_t^T R(\tau,x)d\tau, \\ h^*(t,x) = \int\limits_t^T \exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + \tau))z(\tau,x)d\tau. \end{cases}$$

Então w^* satisfaz

$$\begin{cases} w^*_{tt} - \Delta w^* + qw^* = h^*(t,x) \\ w^*(T,x) = w^*_t(T,x) = 0, \qquad x \in \Omega \\ w^*(t,\sigma) = 0, \qquad \sigma \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Enfim, basta usar para w^* e h^* o mesmo processo que foi utilizado para estimar w e h definidas em (3.6). Desse modo, segue o resultado. □

Corolário 3.2. *Se $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$, então para todo vetor unitário $\omega \in \mathbb{R}^N$ e para todo $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (3.4), temos*

$$\int_0^T \int_\Omega (q_1(x) - q_2(x))\, \varphi(x + t\omega)\psi(x + t\omega) dx dt = 0.$$

Demonstração. Aplicando o Corolário 3.1 para as funções u_1 e v_2 definidas pela Proposição 3.1, temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(q_1 - q_2\Big) \Big(\big(\varphi(x+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{1,\lambda}\big) \big(\psi(x+t\omega)\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{2\lambda}\big)\Big) dx dt = 0.$$

Logo,

$$\int_0^T \int_\Omega (q_1 - q_2)\varphi\psi dx dt =$$

$$-\int_0^T \int_\Omega (q_1 - q_2)\Big(\varphi \exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t))R_{2,\lambda} + \psi \exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t))R_{1,\lambda} + R_{1,\lambda}R_{2,\lambda}\Big) dx dt$$

e

$$\left| \int_0^T \int_\Omega (q_1 - q_2)\varphi\psi dx dt \right| \leqslant \|q_1 - q_2\|_\infty \int_0^T \int_\Omega |\varphi||R_{2,\lambda}| + |\psi||R_{1,\lambda}| + |R_{1,\lambda}||R_{2,\lambda}| dx dt$$

$$\leqslant C\int_0^T\int_\Omega (|R_{2,\lambda}|+|R_{1,\lambda}|)\,dxdt + C\int_0^T\int_\Omega |R_{1,\lambda}||R_{2,\lambda}|dxdt,$$

onde $C = C\big(\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty, \|q_1-q_2\|_\infty\big)$.

Utilizando Cauchy-Schwarz, temos por (3.1) que

$$0 \leqslant \left|\int_0^T\int_\Omega (q_1-q_2)\varphi\psi dxdt\right| \leqslant C\left(\sqrt{T\text{medida}(\Omega)}\big(\|R_{1,\lambda}\|_2+\|R_{2,\lambda}\|_2\big)+\|R_{1,\lambda}\|_2\|R_{2,\lambda}\|_2\right)$$

$$\leqslant C\left(\sqrt{T\text{medida}(\Omega)}\left(2\frac{\sqrt{CTe^T}}{\lambda}\right)+\frac{CTe^T}{\lambda^2}\right)\underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

onde $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$.

Portanto,

$$\int_0^T\int_\Omega (q_1(x)-q_2(x))\,\varphi(x+t\omega)\psi(x+t\omega)dxdt = 0,$$

para todo $\varphi,\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (3.4).

$\square$

Teorema 3.1. *Sejam* $q_1,q_2\in L^\infty(\Omega)$ *tais que* $\Lambda_{q_1}=\Lambda_{q_2}$. *Se* $T>\operatorname{diam}\Omega$, *então* $q_1=q_2$.

Demonstração.

Sejam $\omega\in\mathbb{R}^N$ um vetor unitário, $\varepsilon=(T-\operatorname{diam}\Omega)/2$ e

$$\Omega_\varepsilon = \left\{x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}; d\,(x,\Omega)<\epsilon\right\}.$$

Se $\varphi,\psi\in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$, então $\operatorname{supp}\varphi\cap\overline{\Omega}=\emptyset$. Por outro lado, se $x\in\operatorname{supp}\psi\subset\Omega_\varepsilon\Rightarrow x\notin\overline{\Omega}$ e $d(x,\Omega)<\varepsilon=(T-\operatorname{diam}\Omega)/2\Rightarrow d(x-T\omega,\Omega)=\inf_{z\in\Omega}|x-T\omega-z|\geqslant T-d\,(x,\Omega)\geqslant T-(T-\operatorname{diam}\Omega)/2=(T+\operatorname{diam}\Omega)/2>0$. Logo $(\operatorname{supp}\psi-T\omega)\cap\overline{\Omega}=\emptyset$.

Assim, se

$$\rho(x)=\begin{cases} q_1(x)-q_2(x), & \text{se } \ x\in\Omega\\ 0, & \text{se } \ x\notin\Omega,\end{cases}$$

temos pelo Corolário 3.2 que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\varphi(x+t\omega)\psi(x+t\omega)dxdt = 0.$$

Considerando a mudança de variáveis $y = x + t\omega \Leftrightarrow x = y - t\omega$ temos

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y-t\omega)\varphi(y)\psi(y)dydt = 0. \tag{3.9}$$

Seja

$$\Phi_\omega(y) = \int_0^T \rho(y-t\omega)dt,$$

então por Fubini temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y)\psi(y)\Phi_\omega(y)dy = 0,$$

para toda $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Visto que $C_c^\infty(\Omega_\epsilon)$ é denso em $L^2(\Omega_\epsilon)$, segue que $\Phi_\omega(y) = 0$ quase sempre em Ω_ϵ para todo vetor unitário ω.

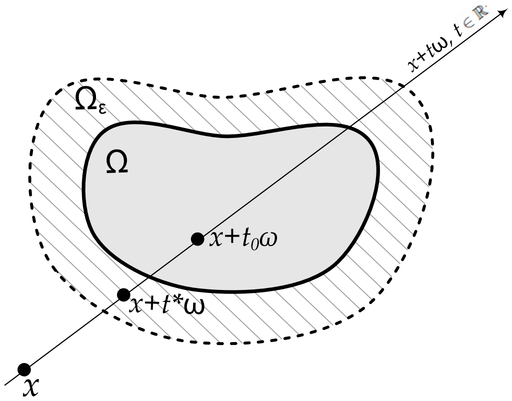
Em particular

$$\int_{-T}^T \rho(y+t\omega)dt = \Phi_\omega(y) + \Phi_{-\omega}(y) = 0$$

quase sempre em Ω_ε.

Mas se $t > T$ e $y \in \Omega_\varepsilon \Rightarrow d(y+t\omega, \Omega) = \inf_{z\in\Omega} |y+t\omega - z| = \inf_{z\in\Omega} |t\omega - (z-y)| \geqslant |t| - d(y,\Omega) > T - \varepsilon = T - (T - \operatorname{diam}\Omega)/2 = (T + \operatorname{diam}\Omega)/2 > 0$. Ou seja, $y + t\omega \notin \Omega$, donde, $\rho(y+t\omega) = 0$ para todo $y \in \Omega_\varepsilon$ e $|t| > T$. Portanto

$$\int_{-\infty}^\infty \rho(y+t\omega)dt = 0 \tag{3.10}$$



quase sempre em Ω_ε.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$. Se para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ $x+t_0\omega \in \Omega$, então existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $y = x+t^*\omega \in \Omega_\varepsilon$.

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x+t\omega)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\Big(y+(t-t^*)\omega\Big)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y+s\omega)ds \underset{(por\, 3.10)}{=} 0.$$

Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(y+t\omega)dt = 0 \tag{3.11}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$.

Como $\rho \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$, temos, pela transformada inversa de Fourier,

$$\rho(y+t\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}(\xi) \exp\Big(\mathrm{i}(y+t\omega)\cdot\xi\Big)d\xi\cdot$$

Integrando de $-L$ à L em relação à t , para $L > 0$, temos

$$\int_{-L}^{L} \rho(y+t\omega)dt = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}(\xi) \exp\big(\mathrm{i}y\cdot\xi\big) \left(\int_{-L}^{L} \exp(\mathrm{i}t\omega\cdot\xi)dt \right) d\xi$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} \rho(y+t\omega)dt = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\rho}(\xi) \exp\big(\mathrm{i}y\cdot\xi\big) \frac{2\,\mathrm{sen}(L\omega\cdot\xi)}{\omega\cdot\xi} d\xi. \tag{3.12}$$

Mas como $\rho(y+t\omega)=0$ se $y+t\omega\notin\Omega$ e Ω é limitado, para cada $y\in\mathbb{R}^N$ existe $L_y>0$ tal que

$$\int_{-L_y}^{L_y} \rho(y+t\omega)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y+t\omega)dt.$$

Assim, para todo $L \geqslant L_y$

$$\int_{-L}^{L} \rho(y+t\omega)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y+t\omega)dt \underset{por\,3.11}{=} 0$$

e por (3.12)

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\widehat{\rho}(\xi) \frac{2\,\mathrm{sen}(L\omega\cdot\xi)}{\omega\xi} \right) \exp\big(\mathrm{i}y\cdot\xi\big) d\xi = 0.$$

Ou seja, a transformada de Fourier inversa de $g\in L^2(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$g(\xi) = \widehat{\rho}(\xi)\frac{2\,\mathrm{sen}(L\omega\cdot\xi)}{\omega\cdot\xi},$$

é nula. Assim, $g=0$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^N$.

Como $\big(2\,\mathrm{sen}(L\omega\cdot\xi)\big)/\omega\cdot\xi \neq 0$ em quase todo ponto, temos que $\widehat{\rho}=0$ e usando o fato de que $\mathcal{F}\colon\ L^2(\mathbb{R}^N) \longmapsto L^2(\mathbb{R}^N)$ é uma isometria de espaços de Hilbert, temos que $\rho=0$.

Portanto $q_1=q_2$.

$\square$

3.2 O caso dissipativo

Nesta seção apresentaremos a solução para o problema de identificação de potenciais para a equação de ondas com dissipação dada por

$$u_{tt} - \Delta u + qu_t = 0.$$

Os argumentos usados aqui são semelhantes aos do caso conservativo.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $T > 0$, $\varphi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$ e $q \in L^\infty(\Omega)$.

Seja $u \in C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,T]; H^1(\Omega)\right)$ a única solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu_t = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u(t,\sigma) = \varphi(t,\sigma) & \text{sobre} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.13}$$

Considere

$$\Lambda_q : C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right) \longrightarrow C\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right) \tag{3.14}$$

definido por

$$\Lambda_q(\varphi)(t,\sigma) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in [0,T]\times\partial\Omega.$$

Como no caso conservativo, se definirmos $\tilde{f}(t,x) = f(T-t,x)$, então $v(t,x) = \tilde{u}(t,x)$ é solução do problema adjunto associado a (3.13), ou seja, v é solução de

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v - qv_t = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega, \\ v(T,x) = v_t(T,x) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ v(t,\sigma) = \psi(t,\sigma) & \text{sobre} \quad [0,T]\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Da mesma forma, o operador adjunto de Λ_q associado a (3.15) é dado por

$$\begin{array}{cccc} \Lambda_q^* : & C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right) & \longrightarrow & C\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right) \\ & \psi(t,\sigma) & \longmapsto & \frac{\partial v}{\partial \eta}(t,\sigma), \end{array}$$

$(t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega$.

Denotaremos por $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ a integral de superfície sobre $\partial\Omega$.

Lema 3.4. *Para toda $\varphi, \psi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$, temos*

$$\int_0^T \langle \Lambda_q(\varphi); \psi \rangle \, dt = \int_0^T \left\langle \Lambda_q^*(\psi); \varphi \right\rangle dt.$$

Demonstração. Multiplicando a equação em (3.13) por v, a equação em (3.15) por u e aplicando a identidade de Green, temos que

$$\left\langle \Lambda_q^*(\psi); \varphi \right\rangle - \langle \Lambda_q(\varphi); \psi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \varphi d\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \psi d\sigma =$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_\Omega (uv_{tt} - vu_{tt})\, dx - \int_\Omega (quv_t + qvu_t)\, dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega (uv_t - vu_t)\, dx - \int_\Omega (quv)\, dx \right)$$

Assim,

$$\int_0^T \left\langle \Lambda_q^*(\psi); \varphi \right\rangle - \langle \Lambda_q(\varphi); \psi \rangle \, dt = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (uv_t - vu_t)\, dxdt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (quv)\, dxdt.$$

$$= \int_\Omega u(T,x)\, \underbrace{v_t(T,x)}_{=0} - \underbrace{v(T,x)}_{=0}\, u_t(T,x) dx - \int_\Omega \underbrace{u(0,x)}_{=0}\, v_t(0,x) - v(0,x)\, \underbrace{u_t(0,x)}_{=0}\, dx$$

$$-\left(\int\limits_{\Omega} qu(T,x)\underbrace{v(T,x)}_{=0}dx - \int\limits_{\Omega} q\underbrace{u(0,x)}_{=0}v(0,x)dx\right) = 0.$$

Portanto,

$$\int\limits_0^T \left\langle \Lambda_q(\varphi);\psi\right\rangle dt = \int\limits_0^T \left\langle \Lambda_q^*(\psi);\varphi\right\rangle dt.$$

$\square$

Lema 3.5. *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$. Então $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ se, e somente se, $\Lambda_{q_1}^* = \Lambda_{q_2}^*$.*

Demonstração. Seja u solução de (3.13) com $u = \varphi$ sobre $\partial\Omega$ e v solução de (3.15) com $v = \tilde{\varphi}$ sobre $\partial\Omega$. Então $v = \tilde{u}$ e, em particular,

$$\Lambda_q^*(\tilde{\varphi}) = \widetilde{\Lambda_q(\varphi)}.$$

Assim,

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2} \Leftrightarrow \Lambda_{q_1}(\varphi) = \Lambda_{q_2}(\varphi)\forall\,\varphi \Leftrightarrow \widetilde{\Lambda_{q_1}(\varphi)} = \widetilde{\Lambda_{q_2}(\varphi)} \Leftrightarrow \Lambda_{q_1}^*(\tilde{\varphi}) = \Lambda_{q_2}^*(\tilde{\varphi})\,\forall\varphi \Leftrightarrow \Lambda_{q_1}^* = \Lambda_{q_2}^*.$$

$\square$

Lema 3.6. *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ e $\varphi, \psi \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)$. Se u é solução de (3.13) com $q = q_1$ e v é solução de (3.15) com $q = q_2$, então*

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi);\psi\right\rangle dt &= \int_0^T\int_\Omega \big(q_1(x) - q_2(x)\big)u_t(t,x)v(t,x)dxdt\\ &= \int_0^T\int_\Omega \big(q_2(x) - q_1(x)\big)u(t,x)v_t(t,x)dxdt.\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação em (3.13) por v e a equação em (3.15) por u temos que

$$u\Delta v = uv_{tt} - quv_t \;\text{ e }\; v\Delta u = vu_{tt} + qvu_t,$$

de onde se deduz que

$$v\Delta u - u\Delta v = vu_{tt} - uv_{tt} + q_1vu_t + q_2uv_t.$$

Integrando em Ω e em $[0,T]$ e aplicando a identidade de Green

$$\int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi);\psi\rangle\, dt - \int_0^T \left\langle \Lambda^*_{q_2}(\psi);\varphi\right\rangle dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}v - \frac{\partial v}{\partial \eta}u\right) d\sigma dt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega v\Delta u - u\Delta v dxdt = \underbrace{\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \big(vu_t - uv_t\big)dxdt}_{=0} + \int_0^T \int_\Omega \big(q_1vu_t + q_2uv_t\big)dxdt.$$

Pelo Lema 3.5 temos que

$$\int_0^T \left\langle \Lambda^*_{q_2}(\psi);\varphi\right\rangle dt = \int_0^T \langle \Lambda_{q_2}(\varphi);\psi\rangle\, dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi);\psi\rangle\, dt = \int_0^T \int_\Omega \big(q_1vu_t + q_2uv_t\big)dxdt.$$

Utilizando integração por partes temos, que

$$\int_0^T vu_t dt = \underbrace{vu\Big|_0^T}_{=0} - \int_0^T uv_t dt,$$

$$\Rightarrow \int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi);\psi\rangle\, dt = \int_0^T \int_\Omega \big(q_2(x) - q_1(x)\big)u(t,x)v_t(t,x)dxdt.$$

Por outro lado, usando novamente integração por partes,

$$\int_0^T uv_t = \underbrace{vu\Big|_0^T}_{=0} - \int_0^T u_t v dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi); \psi\rangle\, dt = \int_0^T \int_\Omega \big(q_1(x) - q_2(x)\big) u_t(t,x) v(t,x) dx dt.$$

$\square$

Corolário 3.3. *Se* $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$*, então para toda* u_1 *solução de (3.13) com* $q = q_1$ *e para todo* v_2 *solução de (3.15) com* $q = q_2$ *tem-se*

$$\int_0^T \int_\Omega \big(q_1(x) - q_2(x)\big) \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) v_2(t,x) dx dt = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.6,

$$\int_0^T \langle \Lambda_{q_1}(\varphi) - \Lambda_{q_2}(\varphi); \psi\rangle\, dt = \int_0^T \int_\Omega \big(q_1(x) - q_2(x)\big) \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) v_2(t,x) dx dt.$$

Portanto, se $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ então

$$\int_0^T \int_\Omega \big(q_1(x) - q_2(x)\big) \frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) v_2(t,x) dx dt = 0.$$

$\square$

Lema 3.7. *Sejam* $\lambda > 0$*,* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *um vetor unitário,* $\phi_1 \in L^2\big((0,T); L^2(\Omega)\big)$ *e* $q \in L^\infty(\Omega)$*. Considere* R *a solução de*

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R + q R_t = \frac{1}{\lambda} h_1 \\ R(0,x) = R_t(0,x) = 0, \quad \text{em } \Omega \\ R(t,\sigma) = 0, \qquad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $h_1(t,x) = \phi_1(t,x)\exp(\mathrm{i}\lambda(x \cdot \omega + t))$*. Então, existe uma constante* $C > 0$*, que depende apenas de* $\|\phi_1\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ *e* $\|q\|_\infty$*, tal que*

$$\|R_t\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + \|R\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$

Demonstração. Multiplicando a equação em (3.16) por $\overline{R_t}$, integrando em Ω e tomando a parte real, temos

$$\Re\left(\int_\Omega \overline{R_t}R_{tt} - \Delta R\overline{R_t} + qR_t\overline{R_t}dx\right) = \Re\left(\int_\Omega \frac{1}{\lambda}h_1\overline{R_t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega |R_t|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla R|^2\,dx\right) \leqslant \int_\Omega \frac{h_1}{\lambda}|R_t| + q|R_t|^2dx$$

$$\underset{(C.S.)}{\leqslant} \frac{1}{\lambda^2}\|h_1(t,\cdot)\|_2\|R_t(t,\cdot)\|_2 + \|q\|_\infty\|R_t(t,\cdot)\|_2^2 \underset{(Yang)}{\leqslant} \frac{1}{2\lambda^2}\|h_1(t,\cdot)\|_2^2 + \left(\frac{1+2\|q\|_\infty}{2}\right)\|R_t(t,\cdot)\|_2^2,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\|R_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2^2\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\|h_1(t,\cdot)\|_2^2 + (1+2\|q\|_\infty)\|R_t(t,\cdot)\|_2^2.$$

Integrando de 0 a t e usando as condições iniciais em (3.16), segue que

$$\|R_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \int_0^t \frac{1}{\lambda^2}\|h_1(t,\cdot)\|_2^2 + (1+2\|q\|_\infty)\|R_t(t,\cdot)\|_2^2dt$$

$$\leqslant \frac{\|h_1\|^2_{L^2(0,T;\Omega)}}{\lambda^2} + (1+2\|q\|_\infty)\int_0^t \|R_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2^2dt.$$

Assim, pela desigualdade de Gronwall, temos que

$$\|R_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \frac{\|h_1\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{(1+2\|q\|_\infty)T},$$

ou seja

$$\|R_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\lambda^2},$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende de $\|\phi_1\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ e $\|q\|_\infty$. Em particular

$$\|R_t(t,\cdot)\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{C}}{\lambda} \text{ e } \|\nabla R(t,\cdot)\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{C}}{\lambda} \Rightarrow \|R_t(t,\cdot)\|_2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2 \leqslant 2\frac{\sqrt{C}}{\lambda}.$$

Por fim, como $R \in C\big([0,T];H_0^1(\Omega)\big)$, segue pela desigualdade de Poincaré-Friedrichs que existe uma constante K, que depende apenas de Ω (que podemos supor maior que 1) tal que

$$\|R(t,.)\|_2 \leqslant K\|\nabla R(t,\cdot)\|_2.$$

Portanto

$$\|R_t(t,\cdot)\|_2 + \|R(t,\cdot)\|_2 \leqslant K(\|R_t(t,\cdot)\|_2 + \|\nabla R(t,\cdot)\|_2) \leqslant 2K\frac{\sqrt{C}}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \|R_t\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + \|R\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} \leqslant 2K\frac{\sqrt{C}}{\lambda}T.$$

$\square$

Lema 3.8. *Sejam $\lambda > 0, \omega \in \mathbb{R}^n$, um vetor unitário, $\phi_2 \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que $\phi_2(0,x) = 0$ e $q \in L^\infty(\Omega)$. Seja R a solução de*

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R + qR_t = h_2 \\ R(0,x) = R_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ R(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.17}$$

onde $h_2(t,x) = \phi_2(t,x)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t))$. Então existe uma constante $C > 0$, que não depende de λ tal que

$$\|R_t\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$

Demonstração. Seja $w(t,x) = \int_0^t R(\tau,x)d\tau$ e $h(t,x) = \int_0^t h_2(\tau,x)d\tau$, onde R é solução de (3.17). Então um cálculo direto nos dá que w satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + qw_t = h \\ w(0,x) = w_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ w(x,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

Utilizando integração por partes e o fato de que $\phi_2(0,x) = 0$, temos que

$$h(t,x) = \frac{1}{i\lambda}\left(\phi_2(t,x)\exp\big(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t)\big) - \int_0^t \phi_{2t}(\tau,x)\exp\big(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau)\big)d\tau\right).$$

Multiplicando a equação em (3.18) por $\overline{w_t}$, integrando em Ω, tomando a parte real e utilizando o mesmo procedimento do Lema 3.7, obtemos que

$$\|w_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|\nabla w(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\lambda^2},$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de $\|\phi_2\|_{H^1(0,T);L^2(\Omega)}$ e de $\|q\|_\infty$.

Em particular,

$$\|R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \|w_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{\sqrt{C}}{\lambda}T \tag{3.19}$$

e

$$\|\nabla w(t,\cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{\sqrt{C}}{\lambda}T.$$

Como o operador $\frac{\partial}{\partial t} : L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \longrightarrow H^{-1}\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ é contínuo (veja Lema 1.1.2), existe $K > 1$ tal que

$$\|R_t\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant K\|R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant K\frac{\sqrt{C}}{\lambda}T. \tag{3.20}$$

Portanto, de (3.19) e de (3.20), segue que

$$\|R_t\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant 2K\frac{\sqrt{C}}{\lambda}T.$$

□

Corolário 3.4. *Sejam $\lambda > 0, \omega \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário, $\phi_2 \in H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ tal que $\phi_2(T,x) = 0$ e $q \in L^\infty(\Omega)$. Seja ainda R a solução de*

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R - qR_t = h_2 \\ R(T,x) = R_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ R(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.21}$$

onde $h_2(t,x) = \phi_2(t,x)\exp\big(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t)\big)$. Então, existe uma constante $C > 0$ que não depende de λ tal que

$$\|R_t\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|R_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$

Demonstração. Basta observar que se $\widetilde{R}(t,x) = R(T-t,x)$ o problema (3.21) é o problema adjunto associado ao problema (3.17), ou seja $\widetilde{R}(t,x)$ é solução de (3.21) se, e somente se, $R(t,x)$ é solução de (3.17).

Verifica-se facilmente que as normas de $\widetilde{R}(t,x)$ e de $R(t,x)$, soluções de (3.17) e (3.21) respectivamente, em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ coincidem.

Usando novamente o fato de que $\frac{\partial}{\partial t} : L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \longrightarrow H^{-1}\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ é contínuo, segue o resultado. $\square$

Lema 3.9. *Sejam $\lambda > 0$, $\omega \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário, $\phi_3 \in H^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que $\phi_3(T,x) = \phi_{3t}(T,x) = 0$ e $q \in L^\infty(\Omega)$. Considere R a solução de*

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R - qR_t = \lambda h_3 \\ R(T,x) = R_t(T,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ \qquad\qquad R(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.22}$$

onde $h_3(t,x) = \phi_3(t,x)exp\big(-i\lambda(x\cdot\omega + t)\big)$. Então existe uma constante $C > 0$, que independe de λ tal que

$$\|R\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$

Demonstração. Defina

$$\zeta(t,x) = \int_t^T \int_\tau^T R(s,x)dsd\tau, \ \ \vartheta(t,x) = \int_t^T \int_\tau^T \lambda h_3(s,x)dsd\tau.$$

Usando as condições em (3.22), é fácil ver que

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\int_t^T R(\tau,x)d\tau \Rightarrow \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = R(t,x) = \int_t^T \int_\tau^T R_{tt}(s,x)dsd\tau,$$

$$\zeta_t = \int_t^T \int_\tau^T R_t(s,x)dsd\tau \text{ e } \Delta\zeta = \int_t^T \int_\tau^T \Delta R(s,x)dsd\tau,$$

de modo que ζ satisfaz

$$\begin{cases} \zeta_{tt} - \Delta\zeta - q\zeta_t = \vartheta \\ \zeta(0,x) = \zeta_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ \zeta(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

Como

$$\vartheta(t,x) = \int_t^T \int_\tau^T \lambda h_3(s,x) ds d\tau = \int_t^T \int_\tau^T \lambda \phi_3(s,x) \exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + s)) ds d\tau,$$

integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \vartheta(t,x) &= \int_t^T \lambda \left(\phi_3(\tau,x) \frac{\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau))}{\mathrm{i}\lambda} + \int_\tau^T \phi_{3s}(s,x) \frac{\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+s))}{\mathrm{i}\lambda} ds \right) d\tau \\ &= \frac{-\phi_3(t,x)\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda}\int_t^T &\left((\phi_3(\tau,x) + \phi_{3t}(\tau,x)) \exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+\tau)) + \int_\tau^T \phi_{3ss}(s,x) \exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+s)) ds \right) d\tau \\ &\leqslant \frac{|\phi_3(t,x)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_t^T \left(|\phi_3(\tau,x) + \phi_{3\tau}(\tau,x)| + \int_\tau^T |\phi_{3ss}(s,x)| ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\vartheta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{1}{\lambda} \left\| |\phi_3| + \int_t^T \left(|\phi_3(\tau,x) + \phi_{3\tau}(\tau,x)| + \int_\tau^T |\phi_{3ss}(s,x)| ds \right) d\tau \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

ou seja

$$\|\vartheta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

onde a constante C depende apenas de $\|\phi_3\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega))}$.

Multiplicando a equação (3.23) por $\overline{\zeta_t}$, integrando em Ω e tomando a parte real, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega |\zeta_t(t,x)|^2 + |\nabla\zeta(t,x)|^2 dx \right) \leqslant \int_\Omega |\vartheta(t,x)||\zeta_t(t,x)| + q|\zeta_t(t,x)|^2 dx$$

$$\underset{C.S}{\leqslant} \|\vartheta(t,\cdot)\|_2\|\zeta_t(t,\cdot)\|_2 + \|q\|_\infty\|\zeta_t(t,\cdot)\|_2^2 \underset{Yang}{\leqslant} \frac{\|\vartheta(t,\cdot)\|_2^2}{2} + \left(\frac{1+2\|q\|_\infty}{2}\right)\|\zeta_t(t,\cdot)\|_2^2.$$

Integrando de 0 à t e usando as condições iniciais em (3.23),

$$\|\zeta(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \|\vartheta(t,\cdot)\|_2^2 + (1+2\|q\|_\infty)\int_0^t \|\zeta_t(t,\cdot)\|_2^2 dt \leqslant \frac{C}{\lambda} + (1+2\|q\|_\infty)\int_0^t \|\zeta_t(t,\cdot)\|_2^2 dt.$$

Por Gronwall,

$$\|\zeta_t(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant \frac{C}{\lambda}\,\mathrm{e}^{(1+2\|q\|_\infty)t} \leqslant \frac{C}{\lambda}\,\mathrm{e}^{(1+2\|q\|_\infty)T}$$
$$\Rightarrow \|\zeta_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{K}{\lambda},$$

onde a constante K depende apenas de $\|\phi_3\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega))}$.

Assim, usando a continuidade do operador $\frac{\partial}{\partial t} : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|R\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} = \|\zeta_{tt}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant M\|\zeta_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

de modo que

$$\|R\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{MK}{\lambda}.$$

$\square$

Proposição 3.2. *Sejam $\omega \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário e $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \overline{\Omega} = \emptyset \ \text{ e } \ (\operatorname{supp}\psi - T\omega) \cap \overline{\Omega} = \emptyset. \tag{3.24}$$

Então para cada $\lambda > 0$ existem

$$R_{1,\lambda}, R_{2,\lambda} \in C^1\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap C\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big)$$

tais que

$$\|\partial_t R_{1,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|R_{1,\lambda}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda} \ \text{ e } \ \|R_{2,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{C}{\lambda}, \tag{3.25}$$

onde $C > 0$ é uma constante que independe de λ, para as quais as funções u_1, v_2 definidas por

$$\begin{cases} u_1(t,x) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\varphi(x+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{1,\lambda}(t,x) \\ v_2(t,x) = \psi(x+t\omega)\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + R_{2,\lambda}(t,x) \end{cases} \tag{3.26}$$

são soluções de (3.13) com $q = q_1$ e de (3.15) com $q = q_2$ respectivamente.

Demonstração. Seja $R_{1,\lambda}$ a solução de

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R + q_1 R_t = \frac{1}{\lambda}h_1 + h_2, \\ R(0,x) = R_t(0,x) = 0, \quad x\in\Omega \\ R(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma)\in[0,T]\times\partial\Omega \end{cases} \tag{3.27}$$

onde $h_j(t,x) = \phi_j(t,x)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)), j = 1,2$, sendo

$$\phi_1(t,x) = \sum_{j,k=1}^{n}\omega_j\omega_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}(x+t\omega) - \Delta\varphi(x+t\omega) + q_1(x)\omega\cdot\nabla\varphi(x+t\omega)$$

e

$$\phi_2(t,x) = q_1(x)\varphi(x+t\omega).$$

Dessa forma, da definição de u_1 em (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u_1 - \Delta u_1 + q_1\partial_t u_1 = {} & \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\left[\sum_{j,k=1}^{n}\omega_j\omega_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} - \Delta\varphi + q_1\omega\cdot\nabla\varphi\right]\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) \\ & + q_1\varphi\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + \partial_{tt}R_{1,\lambda} - \Delta R_{1,\lambda} + q_1\partial_t R_{1,\lambda}. \end{aligned}$$

Usando as condições em (3.24) temos que u_1 é solução de (3.13).

Observe que podemos escrever

$$R_{1,\lambda} = R + S,$$

com R e S soluções de (3.16) e (3.17) respectivamente. Então, pelos Lemas 3.7 e 3.8, temos

$$\|R_{1,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|R_{1,\lambda}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

$$\leqslant \|R\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|S\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|R\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|S\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant 2\frac{C}{\lambda}.$$

Analogamente, considere $R_{2,\lambda}$ a solução de

$$\begin{cases} R_{tt} - \Delta R - q_2 R_t = h_2^* + \lambda h_3^*, \\ R(0,x) = R_t(0,x) = 0, \quad x \in \Omega \\ R(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in [0,T] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.28}$$

onde $h_j^*(t,x) = \psi_j(t,x)\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega + t)),\ j = 2,3,$

$$\psi_2(t,x) = \sum_{j,k=1}^{n} \omega_j\omega_k \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}(x+t\omega) - \Delta\psi(x+t\omega) - q_2(x)\omega\cdot\nabla\psi(x+t\omega)$$

e

$$\psi_3(t,x) = -q_2(x)\psi(x+t\omega).$$

Pela definição de v_2 em (3.26),

$$\partial_{tt}v_2 - \Delta v_2 - q_2\partial_t v_2 = \left[\sum_{j,k=1}^{n} \omega_j\omega_k \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k} - \Delta\psi - q_2\omega\cdot\nabla\psi\right]\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))$$

$$-\lambda q_2\psi\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)) + \partial_{tt}R_{2,\lambda} - \Delta R_{2,\lambda} - q_2\partial_t R_{2,\lambda}.$$

Como $(\mathrm{supp}\psi - T\omega)\cap\overline{\Omega} = \emptyset$, temos ainda que $\psi_j(T,x) = \partial_t\psi_j(T,x) = 0$. Portanto, v_2 é solução de (3.15).

Escrevendo $R_{2,\lambda} = R + S$ com R solução de (3.21) e S solução de (3.22), segue do Corolário 3.4 e pelo Lema 3.9 que

$$\|R_{2,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \|R\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} + \|S\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant 2\frac{C}{\lambda}.$$

□

Teorema 3.2. *Sejam $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$. Se $T > \mathrm{diam}\Omega$, então $q_1 = q_2$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.3,

$$\int_0^T \int_\Omega (q_1 - q_2)\partial_t u_1 v_2 dxdt = 0, \tag{3.29}$$

onde u_1 e v_2 são, respectivamente, soluções de (3.13) e (3.15).

Sejam

$$\varepsilon = \frac{T - \mathrm{diam}\Omega}{2} \text{ e } \Omega_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega;\ \mathrm{d}(x, \Omega) < \varepsilon\big\}.$$

Se $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega_\varepsilon)$, então $\mathrm{supp}\,\varphi \cap \overline{\Omega} = \emptyset$ e $(\mathrm{supp}\,\psi - T\omega) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$.

Assim, pela Proposição 3.2, podemos considerar u_1 e v_2 satisfazendo (3.26) soluções de (3.13) e (3.15) respectivamente.

Observe também que

$$\partial_t u_1 = \Big(\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\omega \cdot \nabla\varphi(x + t\omega) + \varphi(x + t\omega)\Big)\exp(\mathrm{i}\lambda(x \cdot \omega + t)) + \partial_t R_{1,\lambda}.$$

Portanto, se $\rho(x) = q_1(x) - q_2(x)$, segue por (3.29) que

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(x) \left(\Big(\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\omega \cdot \nabla\varphi + \varphi\Big)\exp(\mathrm{i}\lambda(x \cdot \omega + t)) + \partial_t R_{1,\lambda}\right) \Big(\psi\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))+R_{2,\lambda}\Big)dxdt = 0$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^T \int_\Omega \rho(x)\varphi(x + t\omega)\psi(x + t\omega)dxdt\right| \leqslant \alpha_\lambda + \beta_\lambda + \gamma_\lambda + \delta_\lambda, \tag{3.30}$$

onde

$$\begin{cases} \alpha_\lambda = \frac{1}{\lambda}\|\rho\|_\infty \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |(\omega.\nabla\varphi)(\psi + R_{2,\lambda})|dxdt, \\ \beta_\lambda = \|\rho\|_\infty \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\varphi R_{2,\lambda}|dxdt, \\ \gamma_\lambda = \|\rho\|_\infty \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\psi\partial_t R_{1,\lambda}|dxdt, \\ \delta_\lambda = \left|\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \rho R_{2,\lambda}\partial_t R_{1,\lambda}\right| dxdt. \end{cases} \tag{3.31}$$

Como $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \Omega_\varepsilon$ e $T > \mathrm{diam}\Omega$, as aplicações

$$(t, x) \to \varphi(x + t\omega),\ \ (t, x) \to \psi(x + t\omega)\ \text{ e }\ (t, x) \to \omega \cdot \nabla\varphi(x + t\omega)$$

pertencem a $H_0^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$. Logo, pela Proposição 3.2 segue que

$$\alpha_\lambda \leqslant \frac{C}{\lambda}, \quad \beta_\lambda \leqslant \frac{C}{\lambda}, \quad \gamma_\lambda \leqslant \frac{C}{\lambda}.$$

Da definição de $R_{j,\lambda}$ vemos que

$$\Big(\partial_t^2 - \Delta + q_1\partial_t\Big)R_{1,\lambda} = \tfrac{1}{\lambda}h_1 + h_2 \text{ e } \Big(\partial_t^2 - \Delta - q_2\partial_t\Big)R_{2,\lambda} = h_1^* + \lambda h_2^*, \tag{3.32}$$

onde $h_j(t,x) = \phi_j(x+t\omega)\exp(\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))$ e $h_j^*(t,x) = \psi(x+t\omega)\exp(-\mathrm{i}(x\cdot\omega+t))$.

Usando integração por partes e a identidade de Green, obtemos

$$\int_0^T\int_\Omega \big(\partial_t^2 R_{1,\lambda} - \Delta R_{1,\lambda}\big)R_{2,\lambda}dxdt = \int_0^T\int_\Omega \big(\partial_t^2 R_{2,\lambda} - \Delta R_{2,\lambda}\big)R_{1,\lambda}dxdt.$$

Assim, multiplicando a primeira equação em (3.32) por $R_{2,\lambda}$, a segunda por $R_{1,\lambda}$ e integrando em $(0,T)\times\Omega$, decorre da identidade acima

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega q_1\partial_t R_{1,\lambda}R_{2,\lambda} + q_2\partial_t R_{2,\lambda}R_{1,\lambda}dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda}h_1 + h_2\right)R_{2,\lambda}dxdt \\ &\quad - \int_0^T\int_\Omega \left(h_1^* + \lambda h_2^*\right)R_{1,\lambda}dxdt.\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^T\int_\Omega q_2\partial_t R_{2,\lambda}R_{1,\lambda}dxdt = -\int_0^T\int_\Omega q_2\partial_t R_{1,\lambda}R_{2,\lambda}dxdt,$$

temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (q_1-q_2)\partial_t R_{1,\lambda}R_{2,\lambda}dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda}h_1 + h_2\right)R_{2,\lambda}dxdt \\ &\quad - \int_0^T\int_\Omega (h_1^* + \lambda h_2^*)R_{1,\lambda}dxdt.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Das definições de ϕ_j e ψ_j, segue que $\operatorname{supp}\phi_j$ e $\operatorname{supp}\psi_j$ estão contidos em Ω_ε. Logo,

$h_j, h_j^* \in H_0^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ e consequentemente,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{\lambda} h_1 R_{2,\lambda}dxdt\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\|h_1\|_{H_0^1(0,t;L^2(\Omega))}\|R_{2,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))},\\ \left|\int_0^T\int_\Omega h_2 R_{2,\lambda}dxdt\right| &\leqslant \|h_2\|_{H_0^1(0,t;L^2(\Omega))}\|R_{2,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))},\\ \left|\int_0^T\int_\Omega h_1^* R_{1,\lambda}dxdt\right| &\leqslant \|h_1^*\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}\|R_{1,\lambda}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Além disso, como

$$\int_0^T\int_\Omega \lambda h_2^*(t,x)R_{1,\lambda}(t,x)dxdt = \int_0^T\int_\Omega \lambda\psi_2(x+t\omega)R_{1,\lambda}(t,x)\exp(-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t))dxdt,$$

integrando por partes em relação a t, temos

$$\int_0^T\int_\Omega \lambda\psi_2 R_{1,\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)}dxdt = -\mathrm{i}\int_0^T\int_\Omega \Big((\omega\cdot\nabla\psi_2)R_{1,\lambda}+\psi_2\partial_t R_{1,\lambda}\Big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x\cdot\omega+t)}dxdt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\Omega \lambda h_2^* R_{1,\lambda}dxdt\right| &\leqslant \|\omega\cdot\nabla\psi_2\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|R_{1,\lambda}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\quad + \|\psi_2\|_{H_0^1(0,T;L^2(\Omega))}\|\partial_t R_{1,\lambda}\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

De (3.33), (3.34), (3.35) e (3.25), concluímos que $\delta_\lambda \leqslant C/\lambda$.

Fazendo λ tender à zero em (3.30) temos

$$\int_0^T\int_\Omega \big(q_1(x)-q_2(x)\big)\varphi(x+t\omega)\psi(x+t\omega)dxdt = 0.$$

Utilizando exatamente os mesmos argumentos do Teorema 3.1, segue o resultado.

$\square$

Capítulo 4

Considerações finais

A determinação de parâmetros em Equações Diferenciais Parciais insere-se na área dos Problemas Inversos. Além das questões matemáticas que o tema suscita, devemos salientar a importância do ponto de vista das aplicações, como nas técnicas que envolvem processos não invasivos. Tais processos são bastante comuns na área médica, como, por exemplo, Tomografia, Ressonância Magnética, etc.

Para elaborar essa dissertação, baseamos nossos estudos principalmente nos artigos [16], [21] e [14], que tratam da identificação de potenciais; assim como nos artigos [8], [12] e [25], que abrangem ainda a questão da estabilidade.

A questão da caracterização é baseada geralmente em técnicas numéricas, e um exemplo dessa abordagem pode ser encontrado [13].

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975. 320p.

[2] L. Bers; F. John; M. Schechter. Partial Differential Equations. New York: Wiley, 1964. 360p.

[3] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York: Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010. 614p.

[4] Bruce K. Driver. Analysis Tools with Examples. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2004. 801p.

[5] A. P. Caldéron. On an inverse boundary value problem. Seminar on Numerical Analysis and its Application to continuum Physics. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1980, 65-73.

[6] M. M. Cavalcanti; V. N. Cavalcanti. Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev. Maringá: EDUEM, 2009.

[7] R. Cipolatti. Uma Introdução aos Problemas de Determinação de Parâmetros em Equações a Derivadas Parciais. Notas de mini-curso publicado nos Anais do 57^0 Seminário Brasileiro de Análise, 39-86, 2003.

[8] R. Cipolatti & Ivo F. Lopez. Determination of Coefficients for a Dissipative Wave Equation via Boundary Measurements. J. Math. Anal. Appl., 306 (2005), 317-329.

[9] L. C. Evans. Partial Differential Equations. American Math. Society,1997. 662p.

[10] D. Gilbart & N. S. Trundinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2 ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000, 517p.

[11] P. Hähner. A periodic Faddeev-Type Solution Operator. J. Differential Equations, 128 (1996), pp. 300-308.

[12] P. Hähner. On the Continuous Dependence of the Exterior Dirichlet Problem on the Boundary. Math. Meth. Appl. Sci, vol 20 (1997), pp 707-716.

[13] B. Kaltenbacher. Lectures notes on parameter indentification in partial differential equations. University of Linz. lectures notes for a winter school, 2005/06.

[14] H. Kang. A uniqueness theorem for an inverse boudary value problem in two dimensions. J. Math. Anal. Appl.,270 (2002), pp 291-302.

[15] O. Kavian. Four Lectures on Parameter Identification in Elliptic Partial Differential Operators. Lectures notes for a minicurso at IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

[16] R. Kohn & M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. Comm. Pure. Appl. Math., 37 (1984), pp. 289-298.

[17] R. Kohn & M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements II. Interior Results. Comm. Pure. Appl. Math., 38 (1985), pp. 643-667.

[18] J. L. Lions. Équations aux dérivées partielles et calcul des variations (Cours IHP). Paris, 1967.

[19] J. L. Lions. Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[20] L. A. Medeiros; M. Milla Miranda. Espaços de Sobolev (Iniciação aos problemas Elípticos não Homogêneos). Rio de Janeiro: Texto do I.M. - UFRJ, 2011. 185p.

[21] A. I. Nachman. Global uniqueness theorem for an inverse boudary value problem. Ann. of Math., 142 (1996), pp. 71-96.

[22] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 1983, 279.

[23] G. Stampacchia. Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus. Presses de L'Université de Montréal, Série "Séminaires de Mathématiques Supérieures", Montréal, 1965.

[24] J. Sylvester & G. Uhlmann. The Dirichlet to Newmann map and applications In Inverse Problems in Partial Differential Equations (D. Colton et.al. editors). SIAM Publications, Philadelphia, (1990), pp. 197-139.

[25] J. Sylvester & G. Uhlmann. A globoal uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. Ann. of Math., 125 (1987), 153-169.

[26] Cazenave T. An introduction to nonlinear Schrödinger equations. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos - IM-UFRJ, 1996.

[27] K. Yosida. Functional Analysis. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.