

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre o Sistema de Marguerre-Vlasov com Efeito Térmico

Wilman Rodas Huarcaya

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala

Rio de Janeiro

Agosto de 2011

Sobre o Sistema de Marguerre-Vlasov com Efeito Térmico

Wilman Rodas Huarcaya

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Gustavo Perla Menzala - IM/UFRJ

Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ

Prof. Antonio André Novotny - LNCC/MCT

Prof. Hugo Danilo Fernández Sare - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

Agosto de 2011

Ficha Catalográfica

Rodas Huarcaya, Wilman.

R685 Sobre o sistema de Marguerre-Vlasov com efeito térmico. /
Wilman Rodas Huarcaya.- Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011.
v, 74f. ;30cm.

Orientador: Gustavo Perla Menzala.

Dissertação (mestrado) - UFRJ/IM. Programa de pós-
graduação em Matemática, 2011.

Referências: f.73-74.

1. Sistema Marguerre-Vlasov I. Perla Menzala, Gustavo.
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de
Matemática. III. Título.

Dedicatória

Dedico essa dissertação a minha mãe, por ter sido em toda vida minha melhor amiga, e a meu pai pelo apoio.

Agradecimentos

Acima de tudo agradeço a DEUS pela força e saúde para superar os obstáculos.

A minha família que me apoiou nestes anos de estudo e que não mediu esforços para que se concluísse esta importante fase de minha vida.

Ao meu orientador professor Dr. Gustavo Perla Menzala pela competente orientação, por toda a atenção, dedicação, paciência, compreensão e apoio a mim dedicados.

Ao professor Dr. Hugo Fernández Sare pelas valiosas sugestões e correções inerentes a este trabalho e por toda a atenção e disponibilidade .

Ao professor Dr. Ademir Fernando Pazoto, pela ajuda, disposição e contribuição para minha formação, como também, agradecer pelos importantes comentários no início deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, os professores Ademir Fernando Pazoto, Antonio André Novotny e Hugo Fernández Sare, pelas importantes contribuições a este trabalho.

A todos os professores do IM/UFRJ, especialmente os professores da Pós-Graduação pelos conhecimentos transmitidos com tanta presteza.

Aos funcionários técnicos-administrativos do IM, que sem exceção, fizeram o possível para me ajudar.

Aos amigos que fiz aqui ao longo desses dois anos de curso, pois foram muitos os momentos felizes que compartilhamos juntos.

Ao LNCC pelo uso de suas instalações.

À Turma de Dança do CT, em especial à Ana Claudia pela sua paciência.

Finalmente ao povo brasileiro que, por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior(CAPES), financiou este trabalho.

Resumo

Uma versão unidimensional do sistema dinâmico de Marguerre-Vlasov com efeitos térmicos é considerado . O sistema depende de um parâmetro $\varepsilon > 0$ de um modo singular quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Nosso interesse é duplo :

- (i) Procurar o limite do sistema quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (ii) Estudar o comportamento assintótico quando $t \rightarrow +\infty$ da energia total $E_\varepsilon(t)$ e compará-lo com a energia total do sistema limite.

Palavras-chave: Limite singular, sistema de Marguerre-Vlasov, estabilização uniforme.

Abstract

A one dimensional version of the dynamic Marguerre-Vlasov system in the presence of thermal effects is considered. The system depends on a parameter $\varepsilon > 0$ in a singular way as $\varepsilon \rightarrow 0$. Our interest is twofold:

- (i) To find the limit system as $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (ii) To study the asymptotic behavior as $t \rightarrow +\infty$ of the total energy $E_\varepsilon(t)$ and compare it with the total energy of the limit system.

Keywords: Singular limit, Marguerre-Vlasov system, uniform stabilization.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Resultados Básicos	3
2.1	Espaço das Distribuições	4
2.1.1	Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	4
2.1.2	Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$	5
2.2	Espaços de Sobolev	5
2.2.1	Convergência em L^p e no dual de L^p	5
2.3	Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	9
2.4	Outros Resultados Úteis	12
2.5	Teoria de Semigrupos	19
2.5.1	Semigrupos C_0 gerados por operadores dissipativos	22
2.6	Problema Semilinear Abstrato	23
3	Existência e Unicidade de solução global	26
3.1	Existência de Soluções	26
3.2	Energia total associada ao sistema	40
3.3	Existência global	41
3.4	Unicidade da solução global	42
4	O Limite Assintótico	46
4.1	Convergência do problema aproximado	46
4.2	Condições iniciais	53
5	Estabilização Uniforme	57
5.1	Decaimento Exponencial	57
6	Referências	73

Capítulo 1

Introdução

A teoria não linear de cascas pode ser considerada como uma generalização do problema de Plateau que estuda superfícies assumindo que a densidade da energia potencial de deformação é essencialmente proporcional à alteração da área do elemento. Boas referências sobre o assunto são os livros de Ph.Ciarlet [5] e I.I.Vorovich [19]. Vamos considerar uma versão unidimensional do sistema dinâmico de Marguerre-Vlasov que descreve as vibrações das cascas rasas (ver [17] ou [5]), onde efeitos térmicos estão presentes no modelo. Este trabalho aborda de forma didática o manuscrito dos autores G. Perla e J. Sejje [16] que trata da existência das soluções globais fracas e decaimento exponencial com taxa uniforme do sistema de Marguerre-Vlasov com efeito térmico. Este modelo é formulado da seguinte forma. Seja $\varepsilon > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$.

Denotemos por $u = u^\varepsilon$, $w = w^\varepsilon$ e $\theta = \theta^\varepsilon$ a solução do sistema acoplado de equações

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} = \mu_0[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1(x) w]_x - \varepsilon^\alpha u_t \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xtt} = [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx} \\ \theta_t - \theta_{xx} - w_{xtt} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

em $\Omega \times (0, \infty)$ onde $\Omega = (0, L)$ e t denota a variável temporal. As funções $u(x, t)$ e $w(x, t)$ representam, respectivamente, o deslocamento longitudinal e transversal da viga no ponto x ao instante t , $\theta(x, t)$ denota o fluxo de calor em x no tempo t ,

$$f(u, w) = \mu_0[w_x(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1(x) w)]$$

e

$$g(u, w) = \mu_0 K_1(x)[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1(x) w].$$

Finalmente $K_1(x)$ representa a curvatura da seção da casca no ponto x e μ_0 é uma constante positiva relacionada com o módulo da elasticidade. Consideremos o sistema

(1.1) com condições de fronteira

$$\begin{cases} u = 0, w = 0, \theta = 0 \text{ em } x = 0, L & \text{para qualquer } t > 0 \\ w_x = 0 \text{ em } x = 0, L & \text{para qualquer } t > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

e condiciones iniciais

$$(u, u_t)|_{t=0} = (u_0, u_1), (w, w_t)|_{t=0} = (w_0, w_1), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad (1.3)$$

para qualquer $x \in \Omega$. Analisaremos as seguintes questões:

- (i) Investigar a proximidade quando $\varepsilon \rightarrow 0$ das componentes w^ε e θ^ε em (1.1) para a solução de uma equação de viga com efeitos térmicos.
- (ii) Investigar a taxa de decaimento uniforme da energia total de (1.1)-(1.3) em relação a $\varepsilon \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ e compará-lo com a energia total do sistema limite.

Recentemente, alguns autores consideraram a versão unidimensional do sistema Marguerre-Vlasov com um amortecimento mecânico em seu interior [17] ou uma dissipação na fronteira [13]. Os efeitos térmicos são fenômenos absolutamente naturais na modelagem para vibrações de cascas, assim a conclusão deste trabalho poderia ser de interesse no assunto. Resultados relacionados na análise dos limites singulares para placas ou vigas foram considerados por G.Perla Menzala, A.Pazoto e E.Zuazua [15].

Este trabalho é organizado como segue: No Capítulo 2 especificamos as notações, alguns resultados preliminares e desenvolvemos de maneira didática, a teoria de Semigrupos Lineares necessária para a abordagem da solubilidade do problema em questão. No Capítulo 3 provamos a existência e unicidade de soluções fracas, via teoria de semigrupos aludido no Capítulo 2. No Capítulo 4 demonstramos o limite assintótico e as condições iniciais. Finalmente no Capítulo 5 provaremos o decaimento exponencial com taxa uniforme.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste capítulo apresenta-se os pré-requisitos necessários para desenvolver a teoria a ser apresentado nos capítulos subsequentes.

Definição 2.1 *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca sobre E denotada por $\sigma(E, E')$ é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares $f \in E'$ são contínuos.*

Proposição 2.1 *Seja (x_n) uma seqüência num espaço de Banach E . Se verificam as seguintes asserções*

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$.
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$ forte, então $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E, E')$.
- (iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitado e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- (iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fraco em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \rightarrow f$ forte em E' então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Veja H.Brezis ([3], página 35). ■

Temos resultados análogos a proposição anterior para a convergência fraca $-\ast$.

Proposição 2.2 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada em E' . Então existe uma subseqüência $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$u_{n_k} \xrightarrow{*} u \text{ em } E'.$$

Demonstração: Veja Brezis ([3], página 42). ■

Teorema 2.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de Ω em X , $f : \Omega \rightarrow X$ e seja $g \in L^1(\Omega)$. Se*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad q.t.p \quad x \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

onde g é uma função integrável em Ω . Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad q.t.p \quad x \in \Omega$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Demonstração: Veja ([4], página 53). ■

2.1 Espaço das Distribuições

Definição 2.2 *Dada uma função contínua, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto, denomina-se suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Isto é*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω , com suporte compacto em Ω .

2.1.1 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \quad \text{e} \quad \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em Ω para cada multi-índice α , quando $\nu \rightarrow +\infty$.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima, será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que se uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convergir em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ , então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}, \text{ quando } \nu \rightarrow +\infty.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω .

2.1.2 Convergência e Derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 2.3 Diz-se que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *localmente integrável* em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos temos

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u(x)| dx < \infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

A seqüência de distribuições escalares $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e tem-se as seguintes cadeias de imersões contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a distribuição $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2.2 Espaços de Sobolev

2.2.1 Convergência em L^p e no dual de L^p

Diz-se que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, para $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então

se verifica que o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será de notado por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, é reflexivo. Para a demonstração destes e outros fatos relacionados aos espaços $L^p(\Omega)$ consulte Brezis [3]. Enunciaremos a seguir alguns resultados que serão úteis no decorrer do trabalho.

Teorema 2.2 *Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge quase sempre para f em Ω , e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Veja ([3], página 58). ■

Definição 2.4 *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base hilbertiana de H à seqüência de elementos (ω_n) de H que verificam:*

$$i) \|\omega_n\|_H = 1 \quad \forall n, \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m, \quad m \neq n;$$

$$ii) \text{ O espaço gerado pela } (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é denso em } H.$$

Sejam m um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev de ordem m , denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é por definição o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ para as quais suas derivadas de ordem α , no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Proposição 2.3 *Os espaços lineares $W^{m,p}(\Omega)$ equipados das respectivas normas acima são espaços de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, que é denotado por $H^m(\Omega)$. Isto é

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

cuja norma e produto interno são dados respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad ((u, v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

O espaço $H^m(\Omega)$ com a estrutura topológica acima, é um espaço de *Hilbert*, continuamente imerso em $L^2(\Omega)$.

Definição 2.5 Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é o espaço denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Observação 2.1 Identificando $L^2(\Omega)$ com o seu dual, dos teoremas de imersão temos que:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega);$$

e portanto

$$\langle f, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = (f, u)_{L^2}, \forall f \in L^2(\Omega), \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 2.2 Uma caracterização do espaço $H_0^1(\Omega)$ que é muito útil é dada assim: (veja Medeiros e Milla Miranda [11], página. 100),

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u|_\Gamma = 0\}.$$

Lema 2.2.1 (Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^N$, (isto é, existe uma direção e_i tal que $|pr_i(\Omega)| < C$ onde pr_i é a projeção do $\mathbb{R}^N$ sobre o eixo e_i). Então, existe uma constante $C_\Omega > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Veja ([12], página 36). ■

Observação 2.3 Usando a desigualdade de Poincaré conclui-se que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

Dado um aberto Ω do $\mathbb{R}^N$ denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de *Lebesgue* em Ω , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$ denota-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a *Lebesgue* e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

onde quase sempre significa a menos de um conjunto de medida nula.

Neste espaço considera-se a seguinte norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)| \quad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, com sua respectiva norma, é um espaço de *Banach*. Em particular, quando $p = 2$, tem-se que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* cuja *norma* e *produto interno* serão definidos e denotados, respectivamente por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Lema 2.2.2 (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Considere a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ como*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e se verifica que: $T_u := 0 \Leftrightarrow u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Veja ([12], página 10). ■

Lema 2.2.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 \leq p, q$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Veja ([3], página 56). ■

Observação 2.4 *A desigualdade de Cauchy-Schwartz, freqüentemente utilizada neste trabalho, é um caso particular da Desigualdade de Hölder, mais especificamente, quando $p = q = 2$.*

Lema 2.2.4 (Desigualdade de Young) *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Para $p = q = 2$ tem-se, também, a chamada desigualdade de Young com γ . Isto é, seja $\gamma > 0$, então, sob as mesmas condições do Lema anterior vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{\gamma a^2}{2} + \frac{b^2}{2\gamma}.$$

O resultado é obtido tomando $\sqrt{\gamma}a$ e $\frac{b}{\sqrt{\gamma}}$ na desigualdade de Young. Este resultado será usado com freqüência no desenvolvimento do trabalho.

Demonstração: Veja ([3], página 56). ■

Lema 2.2.5 *Sejam a, b, c números reais e $q \in \mathbb{N}$. Então vale a seguinte desigualdade:*

$$|a + b + c|^q \leq 2^q \max\{2^q, 1\}(|a|^q + |b|^q + |c|^q).$$

Demonstração: De fato, fazendo $d = b + c$ vem que :

$$\begin{aligned} |a + b + c|^q &= |a + d|^q \leq (|a| + |d|)^q \leq 2^q \max\{|a|^q, |d|^q\} \\ &\leq 2^q(|a|^q + |d|^q) \leq 2^q(|a|^q + 2^q(|b|^q + |c|^q)) \\ &\leq 2^q \max\{2^q, 1\}(|a|^q + |b|^q + |c|^q). \end{aligned}$$

■

2.3 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto $E \subseteq (0, T)$. Uma função vetorial $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos em X . Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i}(t) \varphi_i,$$

onde $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, dois a dois disjuntos e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \varphi_i.$$

Diz-se que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}$ -integrável) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s. em $(0, T)$;

ii) $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X . Diz-se que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue*.

Denota-se por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lebesgue* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0, T; X')$, onde p

e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, mostra-se que para cada $u \in [L^p(0, T; X)]'$, existe $\tilde{u} \in L^{p'}(0, T; X')$ tal que

$$\langle u, \varphi \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle \tilde{u}(t), \varphi(t) \rangle_{X' \times X} dt.$$

No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 2.6 *Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$ representa-se o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da *convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$ denota-se o *espaço das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$ para $\forall v \in H$.

Teorema 2.3 (Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach tais que*

$$B_0 \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow B_1$$

onde B_0 e B_1 são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua e a imersão de B_0 em B é compacta. Definamos

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $T < +\infty$, munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Então W é um espaço de Banach e a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Veja Lions ([9], página 58). ■

Corolário 2.1 (*J.Simon*) *Sejam X, B, Y espaços de Banach tais que*

$$X \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow Y$$

onde X, B e Y são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua e a imersão de X em B é compacta.

Seja F limitada em $L^\infty(0, T; X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ limitada em $L^r(0, T; Y)$ onde $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C([0, T]; B)$.

Demonstração: Veja ([18], página 85). ■

Observação 2.5 *Como consequência do Teorema de Aubin-Lions 2.3 podemos estabelecer a seguinte afirmação: se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \rightharpoonup u$ forte em $L^2(0, T; B)$.*

Lema 2.3.1 (J.L.Lions) *Seja Q um aberto limitado do $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$, $1 < q < +\infty$, tal que $\|g_m\|_{L^q(Q)} \leq C$, $g_m \rightarrow g$ quase sempre em Q . Então $g_m \rightharpoonup g$ na topologia fraca de $L^q(Q)$.*

Demonstração: Veja Lions([9], página 12) ■

2.4 Outros Resultados Úteis

Definição 2.7 *Uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se existe $c > 0$ de modo que*

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\| \forall u, v \in H$$

*sendo $a(\cdot, \cdot)$ forma bilinear, se diz que ela é **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \forall u \in H.$$

Lema 2.4.1 (Lax-Milgram) *Seja H espaço de Hilbert, $f \in H'$ e $a(u, v)$ uma forma bilinear contínua e coerciva sobre $H \times H$. Então, existe uma única $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in H.$$

Demonstração: Veja H.Brezis ([3], página 84). ■

Definição 2.8 Um operador diferencial de ordem $2m$, ($m \in \mathbb{N}$) da forma

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^{2\alpha} u, x \in \Omega$$

é chamado de operador uniformemente elíptico se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geq C |\xi|^{2m}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e para todo $x \in \Omega$.

Teorema 2.4 (Regularidade Elíptica) Sejam L um operador diferencial uniformemente elíptico de ordem $2m$, $m \in \mathbb{N}$, definido em um aberto regular $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sendo $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições sobre Ω . Seja u solução de $Lu = f$, no sentido distribucional, com $f \in L^2(\Omega)$. Então, $u \in H^{2m}(\Omega)$.

Demonstração: Veja [2]. ■

Lema 2.4.2 Seja $f \in H^{-1}(0, L)$. Se $w \in H_0^2(0, L)$ satisfaz

$$\int_0^L w_{xx} \varphi_{xx} dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}, \quad \forall \varphi \in W$$

então

$$w \in H^3(0, L),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$ representa a dualidade entre H^{-1} e H_0^1 e

$$W = \{\varphi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0\}.$$

Demonstração: Veja ([8], página 188). ■

A fim de simplificar as notações, algumas vezes usaremos Ω em vez de $(0, L)$ e em alguns casos omitiremos o conjunto Ω . Por exemplo, ao escrevermos $H_0^1 \times H^2$, entendesse $H_0^1(0, L) \times H^2(0, L)$.

Lema 2.4.3 O operador $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ é limitado.

Demonstração: Devemos mostrar que existe $c > 0$ tal que:

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f\|_{H^2} \leq c \|f\|, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Para isto, seja $f \in L^2(\Omega)$ e considere o sistema

$$\begin{cases} u - u_{xx} = f \iff u = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Na equação multiplique por u e integre de 0 a L .

$$\int_0^L u^2 dx - \int_0^L u_{xx} u dx = \int_0^L f u dx.$$

Integrando por partes obtemos

$$\int_0^L u^2 dx + \int_0^L u_x^2 dx = \int_0^L f u dx \leq \|f\| \|u\|$$

assim

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|u_x\|^2 &\leq \|f\| \|u\| \\ \|u\|_{H^1}^2 &\leq \|f\| \|u\| \leq c_1 \|f\| \|u\|_{H^1} \end{aligned}$$

cancelando

$$\|u\|_{H^1} \leq c_1 \|f\|.$$

De outro lado

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u - f \\ \|u_{xx}\| &\leq \|f\| + \|u\| \\ \|u_{xx}\| &\leq \|f\| + c_2 \|u\|_{H^1} \leq \|f\| + c_1 c_2 \|f\| \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\| &\leq c \|f\| \\ \|u\|_{H^2} &\leq c \|f\|. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f\|_{H^2} \leq c \|f\|$$

■

Lema 2.4.4 *O operador $\frac{\partial}{\partial x}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$ é limitado.*

Demonstração: Devemos mostrar que existe $c > 0$ tal que:

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f\|_{H^1} \leq c \|f\|, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Para isto considere o problema:

$$\begin{cases} u - u_{xx} = f \in L^2(\Omega) \iff u = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}f \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Logo, $u_x \in H^1(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{H^1}^2 &= \|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \leq c_1\|f\|^2 + \|u_{xx}\|^2 \\ &\leq c_1\|f\|^2 + c\|f\|^2 \\ &\leq c_3\|f\|^2 \end{aligned}$$

ou seja

$$\|u_x\|_{H^1} \leq c_4\|f\|.$$

Portanto

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}f\|_{H^1} \leq c\|f\|.$$

■

Lema 2.4.5 O operador $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$ é limitado.

Demonstração: Devemos mostrar que existe $c > 0$ tal que:

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}\|_{H_0^1} \leq c\|u\|, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Para isto considere o problema

$$\begin{cases} (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} = f \in H_0^1(\Omega) \iff \frac{\partial u}{\partial x} = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f \in H^{-1}(\Omega) \\ u \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Logo dado $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \langle u_x, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} &= \langle (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \\ \langle u_x, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} &= \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + \langle f_x, \varphi_x \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \\ -(u, \varphi_x) &= (f, \varphi)_{H_0^1} + (f_x, \varphi_x) \end{aligned}$$

em particular para $\varphi = f$

$$|-(u, f_x)| = (f, f)_{H_0^1} + (f_x, f_x) = \|f\|_{H_0^1}^2 + \|f_x\|^2 \geq c\|f\|_{H_0^1}^2$$

isto é

$$\|f\|_{H_0^1}^2 \leq C\|f\|_{H_0^1}\|u\| \Rightarrow \|f\|_{H_0^1} \leq c\|u\|.$$

Portanto

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}\|_{H_0^1} \leq c\|u\|, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

■

Lema 2.4.6 *O operador $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : H^{-2}(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ é limitado.*

Demonstração: Devemos mostrar que existe $c > 0$ tal que:

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f\| \leq c\|f\|_{H^{-2}}, \quad \forall f \in H^{-2}(\Omega).$$

Pelo lema 2.4.3, sabemos que o problema

$$\begin{cases} -v_{xx} = f \in L^2(\Omega) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Dado $f \in H^{-2}(\Omega)$. Considere o problema

$$\begin{cases} u - u_{xx} = f \in H^{-2}(\Omega) \iff u = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f \\ u \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Seja $v \neq 0, v \in H^2 \cap H_0^1$ então

$$\langle u, v \rangle - \langle u_{xx}, v \rangle = \langle f, v \rangle_{H^{-2} \times H^2}$$

$$\langle -v_{xx}, v \rangle - \langle u, v_{xx} \rangle = \langle f, v \rangle_{H^{-2} \times H^2}$$

$$\langle v_x, v_x \rangle + \langle v_{xx}, v_{xx} \rangle = \langle f, v \rangle_{H^{-2} \times H^2}$$

$$\|v\|_{H^2}^2 = \|v_x\|^2 + \|v_{xx}\|^2 = \langle f, v \rangle \leq |\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{H^{-2}} \|v\|_{H^2}$$

como $v \neq 0$ e $-v_{xx} = u$. Então

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f\| = \|u\| \leq c\|f\|_{H^{-2}}, \quad \forall f \in H^{-2}(\Omega).$$

■

Lema 2.4.7 *Se $f \in H^3(\Omega)$ então $\frac{\partial^3}{\partial x^3}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f$.*

Demonstração: A igualdade acima equivale a mostrar que:

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \underbrace{(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f}_g = \frac{\partial^3}{\partial x^3} f, \quad \forall f \in H^3(\Omega).$$

Denotando por

$$g = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f \Rightarrow f = g - g_{xxx}$$

como

$$f \in H^3(\Omega) \Rightarrow f_{xxx} = g_{xxx} - g_{xxxxx}$$

assim

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) g_{xxx} = g_{xxx} - g_{xxxxx} = f_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} f.$$

Portanto

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} f = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f, \quad \forall f \in H^3(\Omega).$$

■

Lema 2.4.8 Se $\theta \in H_0^1(\Omega)$ então $\frac{\partial}{\partial x} (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \theta$.

Demonstração: A igualdade acima equivale a mostrar que:

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta}_\beta = \frac{\partial}{\partial x} \theta, \quad \forall \theta \in H_0^1(\Omega).$$

Denotando por

$$\beta = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta \Rightarrow \theta = \beta - \beta_{xx}$$

como

$$\theta \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \theta_x = \beta_x - \beta_{xxx}$$

assim

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \beta_x = \beta_x - \beta_{xxx} = \theta_x = \frac{\partial}{\partial x} \theta.$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x} (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \theta, \quad \forall \theta \in H_0^1(\Omega).$$

■

Lema 2.4.9 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial) Seja $\eta(\cdot)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0, T]$.

i) Se η satisfaz a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leq \psi(t) + \varphi(t) \eta(t), \quad \text{q.s. em } [0, T] \quad (2.1)$$

onde $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são funções não negativas e integráveis em $[0, T]$, então

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} ds \right] \\ &\leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) Em particular, se $\eta' \leq \varphi\eta$ em $[0, T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em } [0, T]$$

Demonstração: Multiplicando ambos os membros de (2.1) por $e^{-\int_0^s \varphi(r) dr}$ tem-se

$$\frac{d}{ds} \left(\eta(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \right) = (\eta'(s) - \varphi(s) \eta(s)) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \leq \psi(s) e^{-\int_0^s \varphi(r) dr}$$

para $0 \leq t \leq T$ quase sempre.

Conseqüentemente, para cada $0 \leq t \leq T$, conclui-se

$$\eta(t) = e^{\int_0^t \varphi(r) dr} \left[\eta(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s \varphi(r) dr} \psi(s) ds \right] \leq e^{\int_0^t \varphi(r) dr} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

quase sempre em $[0, T]$. ■

Lema 2.4.10 (Desigualdade de Gronwall - Forma Integral) *Sejam u, φ, ψ funções reais contínuas não negativas em $[0, T]$ satisfazendo*

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(\sigma) u(\sigma) d\sigma, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

Então tem-se

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Considerando o funcional auxiliar

$$\eta(t) = \int_0^t \psi(s) u(s) ds.$$

Assim, de (2.3)

$$\eta'(t) = \psi(t) u(t) \leq \psi(t) (\varphi(t) + \eta(t)). \quad (2.4)$$

Definindo

$$F(t) = \eta(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau} \quad (2.5)$$

obtem-se

$$F'(t) = -\psi(t) \eta(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau} + \eta'(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}$$

portanto usando (2.4)

$$F'(t) \leq \psi(t) \varphi(t) e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}.$$

Integrando ambos os membros,

$$F(t) \leq \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{-\int_0^s \psi(\tau) d\tau} ds,$$

pois $F(0) = 0$. De (2.5) obtém-se

$$\eta(t) \leq \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds,$$

mas de (2.3) $u(t) - \varphi(t) \leq \eta(t)$ e assim

$$u(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s) \varphi(s) e^{\int_s^t \psi(\tau) d\tau} ds$$

e obtém-se o resultado desejado. ■

2.5 Teoria de Semigrupos

Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de $X \rightarrow X$ se denomina semigrupo de operadores se

$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0, \\ T(0) &= I. \end{aligned}$$

O espaço X é um espaço vectorial normado e completo, logo é um espaço de Banach.

Definição 2.9 Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach X , é chamado semigrupo fortemente contínuo se

- (i) $T(0) = I$, (I é o operador identidade em X),
- (ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupos),
- (iii) A função $(x, t) \rightarrow T(t)x \in X$ é contínua em cada ponto $(x, t) \in X \times [0, +\infty)$.

Observação 2.6 Como consequência do Teorema da limitação uniforme de Banach se sabe que (iii) vale, se e somente se, para cada elemento $x \in X, T(t)x \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Definição 2.10 O operador linear $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ definido como

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \}$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Chamaremos de semigrupo de classe C_0 ou simplesmente semigrupo C_0 a um semigrupo fortemente contínuo. Algumas vezes denotaremos $T(t)$ por e^{At} , onde A é seu gerador infinitesimal.

Definição 2.11 Um semigrupo de operadores lineares limitados, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, é dito uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X, X)} = 0.$$

Teorema 2.5 Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados. Suponha que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Veja ([6], página 15). ■

Teorema 2.6 Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em um espaço de Banach X e A seu gerador infinitesimal. Então se verificam:

(a) Para todo $x \in X$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(b) Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(c) Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Em particular, a função $u = T(t)x$ satisfaz $\frac{d}{dt}u = Au$.

Demonstração: Veja ([6], página 13). ■

Observação 2.7 Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um Semigrupo C_0 em um espaço de Banach X e A seu gerador infinitesimal. Então a função $u(t) = T(t)x$ é a única solução para o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (2.6)$$

Além disso $u(t)$ tem a seguinte regularidade:

$$\text{Se } x \in X \Rightarrow u \in C([0, \infty); X), \quad (2.7)$$

$$\text{Se } x \in D(A) \Rightarrow u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X). \quad (2.8)$$

Definição 2.12 Um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é chamado de semigrupo de contrações, se

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq 1 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Definição 2.13 Dizemos que um semigrupo C_0 , $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, é exponencialmente estável se existem constantes positivas μ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.9)$$

Teorema 2.7 Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 . Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq Me^{\omega t} \quad \text{para todo } 0 \leq t < \infty.$$

Demonstração: Veja ([6], página 10). ■

Definição 2.14 Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert X , se diz que é dissipativo se, para todo $x \in D(A)$,

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0, \quad (2.10)$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno de X .

Uma caracterização útil dos operadores dissipativos é a seguinte:

Teorema 2.8 *Um operador linear A num espaço de Hilbert é dissipativo se existe $\lambda > 0$ tal que:*

$$\|(\lambda I - A)x\|_{\mathcal{L}(X,X)} \geq \lambda \|x\| \quad \forall x \in D(A).$$

Demonstração: Veja ([6], página 38) ■

2.5.1 Semigrupos C_0 gerados por operadores dissipativos

Tendo um gerador A de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, a observação (2.7) nos garante a existência de uma única solução para o problema (2.6) dada por $u(t) = T(t)x$. Este fato nos diz que é fundamental conhecer as condições necessárias e suficientes para que dado um operador A , definido em um espaço de Hilbert X , ele seja o gerador infinitesimal de algum semigrupo $T(t)$ tal que $u = T(t)x$ seja a solução de (2.6). Neste contexto apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips.

Teorema 2.9 (Hille-Yosida) *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e, para todo $\lambda > 0$,*

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Veja ([14], página 8). ■

Teorema 2.10 *Para que um operador linear A , definido em $\mathcal{D}(A) \subset X$ e com valores em X seja o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 , é necessário e suficiente que :*

(i) *A seja fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *Existam números reais M e ω tais que para cada real $\lambda > \omega$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$\|R(\lambda; A)^n\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Demonstração: Veja ([6], página 32). ■

Teorema 2.11 (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear num espaço de Hilbert X com domínio $D(A)$ denso em X .*

- (i) *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço X , isto é, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X .*
- (ii) *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração: Veja ([14], página 14). ■

2.6 Problema Semilinear Abstrato

Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$(\star) \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + Fu; & \text{em } [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

em um espaço normado H , em que F é uma aplicação de H em H , $u_0 \in H$ um valor inicial dado e A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Definição 2.15 *Se $u \in C([0, T]; H)$ satisfaz o problema $(\star)$, a solução u é dita solução fraca ou mild solution. Se $u \in C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; D(A))$, a solução de $(\star)$ é dita clássica. Em ambos os casos, u satisfaz a equação integral*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds. \quad (2.11)$$

Definição 2.16 *Seja H espaço de Banach. Uma aplicação $F : H \rightarrow H$ é dita Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, se para cada constante positiva M existe uma constante positiva L_M tal que*

$$\|F(v) - F(u)\|_H \leq L_M \|v - u\|_H$$

para todo $u, v \in H$ tal que $\|u\|_H \leq M$ e $\|v\|_H \leq M$.

Para a aplicação F definida acima, isto é, F uma aplicação Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados, são válidos os resultados abaixo.

Teorema 2.12 Para cada $u_0 \in H$, existe $0 < T < \infty$ e uma única solução fraca u de $(\star)$ definida em $[0, T]$. Isto é, $u \in C([0, T]; H)$ e (2.11) é válida para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração: Seja $E = C([0, T], H)$ com a norma usual e $T > 0$ a ser escolhido convenientemente. Vamos definir o conjunto

$$K = \{u \in E; \|u(t)\| \leq \|u_0\| + 1, \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

Assim, K é um subconjunto fechado do espaço de Banach E .

Agora, para $u \in K$, podemos concluir $\phi(u) \in E$ sendo ϕ dada por

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \quad t \in [0, T]$$

com $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado pelo operador A dado no problema $(\star)$. Também da definição 2.16 temos que

$$\|\phi(v) - \phi(u)\|_E \leq LT\|v - u\|_E, \quad (2.12)$$

para todo $u, v \in K$, sendo $L = L_M$ com $M = \|u_0\| + 1$. De fato, sendo $u, v \in K$, então

$$\begin{aligned} \|\phi(v) - \phi(u)\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds - \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds \right\| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t L_M \|u(s) - v(s)\|ds \\ &\leq \int_0^t L_M \|u(s) - v(s)\|ds \leq TL_M \|u - v\|_E, \end{aligned}$$

onde temos usado o fato que F é localmente Lipschitz com $M = \|u_0\| + 1$.

Vamos provar que $\phi(K) \subseteq K$ se $T(\|F(0)\| + L(\|u_0\| + 1)) \leq 1$. Com efeito,

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\|ds, \quad t \in [0, T].$$

Usando o fato de que $u \in K$, a desigualdade abaixo é válida

$$\|F(u(s)) - F(0)\| \leq L\|u(s)\| \leq L(\|u_0\| + 1),$$

para $s \in [0, T]$, $L = L_M$ e $M = \|u_0\| + 1$. Então obtemos

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + T(\|F(0)\| + L(\|u_0\| + 1)), \quad t \in [0, T].$$

Assim, tomando T suficientemente pequeno tal que

$$T(\|F(0)\| + L(\|u_0\| + 1)) < 1 \quad (2.13)$$

resulta que $\phi(u) \in K$. Assim, com a condição (2.13) sobre T , ϕ atua de K em K .

A condição (2.13) sobre T implica que $TL < 1$. Então, a estimativa (2.12) diz que $\phi : K \rightarrow K$ é contração. Por tanto ϕ tem um único ponto fixo $u \in K$. Este u é uma solução fraca do problema $(\star)$.

A unicidade de u segue da definição 2.16 e da desigualdade de Gronwall. ■

Agora, enunciaremos o resultado principal para solubilidade da existência do nosso problema em questão

Teorema 2.13 *Seja $F : H \rightarrow H$ Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados. Então, para toda $u_0 \in H$ existe u solução fraca de $(\star)$ em $[0, T]$ e esta pode ser estendida em uma solução maximal sobre $[0, T_{max}[$ com*

$$T_{max} = +\infty \text{ ou } T_{max} < +\infty \text{ e } \lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u(t)\|_H = +\infty.$$

No caso $T_{max} = +\infty$, u é dita solução Global e no caso $T_{max} < +\infty$ dizemos que u explode (ou que tem blow up) quando t se aproxima do tempo finito T_{max} .

Capítulo 3

Existência e Unicidade de solução global

3.1 Existência de Soluções

Vamos reformular, formalmente, o sistema (1.1)-(1.3) para poder usar teoria de semigrupos e mostrar a existência de soluções para este modelo. De fato, consideremos o problema (1.1)-(1.3) com solução $\{u, w, \theta\}$ e $\alpha, \mu_0, \varepsilon > 0$. Seja o espaço de Hilbert

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

com a norma $\|\cdot\|_X$ dada por

$$\|(u, v, w, z, \theta)\|_X^2 = \mu_0 \|u_x\|^2 + \varepsilon \|v\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|z\|^2 + \|z_x\|^2 + \|\theta\|^2$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$. Reescreveremos (1.1) – (1.3) da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = v \\ \varepsilon v_t = \varepsilon u_{tt} = \mu_0 [u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v \\ w_t = z \\ (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})z_t = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})w_{tt} = w_{tt} - w_{xxtt} = -w_{xxxx} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx} \\ \theta_t = \theta_{xx} + z_{xx}, \end{array} \right.$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} BU_t = AU + N(U) \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, w_0, w_1, \theta_0)^\tau \in X, \end{array} \right.$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$N(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 [\frac{1}{2}w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v \\ 0 \\ [f(u, w)]_x - g(u, w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Afirmação : $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ satisfaz $Ker(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) = \{0\}$.

Demonstração: De fato, seja $z \in Ker(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \Leftrightarrow (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})z = 0$,

isto é,

$$\begin{cases} z_{xx} = z \\ z(0) = z(L) = 0. \end{cases}$$

Logo, $z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ e assim

$$\begin{cases} z(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ z(L) = c_1 e^L + c_2 e^{-L} = 0 \end{cases}$$

de onde se deduz que $c_1 = c_2 = 0$, ou seja; que $z = 0$. ■

Portanto, o operador $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})$ é injetivo, ou seja, existe $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}$. Assim podemos definir a matriz $\tilde{A}$ da forma:

$$\tilde{A} := B^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 & -(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Problema Linear:

Vamos a estudar primeiramente o caso $N \equiv 0$, ou seja,

$$\begin{cases} U_t = \tilde{A}U \\ U(0) = U_0 \in X. \end{cases}$$

Sabemos por definição que

$$D(\tilde{A}) = \{U \in X; \tilde{A}U \in X\}.$$

Então, seja $U \in D(\tilde{A})$, isto é, $U \in X$ e $\tilde{A}U \in X$. Logo,

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ v \in L^2(\Omega) \\ w \in H_0^2(\Omega) \\ z \in H_0^1(\Omega) \\ \theta \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

e

$$(1) \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(2) \quad \varepsilon^{-1} \mu_0 u_{xx} \in L^2(\Omega)$$

$$(3) \quad z \in H_0^2(\Omega)$$

$$(4) \quad -(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w - (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta \in H_0^1(\Omega)$$

$$(5) \quad z_{xx} + \theta_{xx} \in L^2(\Omega).$$

De (2) podemos considerar o problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1} \mu_0 u_{xx} = g \in L^2(\Omega) \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

o qual pode ser solucionado usando o Lema 2.4.1 (Lax-Milgram). De fato, formalmente multiplicando por $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e integrando de 0 a L obtemos

$$-\varepsilon^{-1} \int_0^L \mu_0 u_{xx} \varphi dx = \int_0^L g \varphi dx.$$

Logo, integrando por partes

$$\varepsilon^{-1} \int_0^L \mu_0 u_x \varphi_x dx = \int_0^L g \varphi dx. \quad (3.3)$$

Mostremos que (3.3) tem uma única solução. Sejam

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas por

$$a(u, \varphi) = \varepsilon^{-1} \int_0^L \mu_0 u_x \varphi_x dx,$$

$$F(\varphi) = \langle F, \varphi \rangle = \int_0^L g \varphi dx.$$

Afirmção 1 : $\|u\|^2 \leq 2L\|u_x\|^2$

Demonstração: De fato

$$(u(x))^2 = \left(\int_0^x u'(s) ds + u(0) \right)^2 \leq 2 \left(\left(\int_0^x u'(s) ds \right)^2 + u(0)^2 \right)$$

e como $u(0) = 0$, então

$$(u(x))^2 \leq 2 \left(\int_0^L u'(x) dx \right)^2.$$

Integrando sobre $\Omega = (0, L)$

$$\int_0^L (u(x))^2 dx \leq 2L \left(\int_0^L u'(x) dx \right)^2 \Rightarrow \|u\|^2 \leq 2L\|u_x\|^2.$$

■

Observe também que

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|^2 + \|u_x\|^2 \leq 2L\|u_x\|^2 + \|u_x\|^2 = (2L + 1)\|u_x\|^2,$$

isto é,

$$\|u_x\|^2 \geq \frac{1}{2L + 1} \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Afirmção 2 : a é contínua.

Demonstração: De fato, pela desigualdade de Hölder temos

$$|a(u, \varphi)| \leq \varepsilon^{-1} \mu_0 \int_0^L |u_x| |\varphi_x| dx \leq C_1 \|u_x\| \|\varphi_x\| \leq C \|u\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega), \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

■

Afirmção 3 : a é coerciva.

Demonstração:

$$a(u, u) = \varepsilon^{-1} \mu_0 \int_0^L u_x^2 dx = \varepsilon^{-1} \mu_0 \|u_x\|^2 \geq \frac{\varepsilon^{-1} \mu_0}{2L + 1} \|u\|_{H_0^1}^2$$

■

Afirmção 4 : F é contínua.

Demonstração: Novamente pelas desigualdades de Hölder e Poincaré , temos

$$|\langle F, \varphi \rangle| \leq \int_0^L |g| |\varphi| dx \leq \|g\| \|\varphi\| \leq C_p \|g\| \|\varphi_x\| \leq C \|g\| \|\varphi\|_{H_0^1}.$$

Claramente, F é linear e a é bilinear. Então, pelo Lema 2.4.1 (Lax Milgram), existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

de onde obtemos (3.3). Em particular, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (3.3) vemos que

$$\varepsilon^{-1} \mu_0 \langle u_x, \varphi_x \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

o qual implica que

$$-\varepsilon^{-1} \mu_0 \langle u_{xx}, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Portanto

$$-\varepsilon^{-1} \mu_0 u_{xx} = g \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Como $g \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ temos pela equação acima que $u_{xx} \in L^2(\Omega)$.

Logo, pelo Teorema 2.4 (Regularidade Elíptica) podemos concluir que

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Analogamente, de (5) e (3) consideremos o problema

$$\begin{cases} \theta_{xx} = f - z_{xx} \in L^2(\Omega) \\ \theta(0) = \theta(L) = 0 \Rightarrow \theta \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{cases}$$

Pelo Lema 2.4.5 sabemos que o operador

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega) \text{ é limitado,}$$

como

$$\theta \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} \in L^2(\Omega) \Rightarrow (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, se deduz de (4) que

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \tilde{w} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

o qual equivale a

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \tilde{w} = \tilde{w} - \tilde{w}_{xx} \in H^{-1}(\Omega),$$

de onde obtemos o problema

$$(\star) \begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \lambda \in H^{-1}(\Omega) \\ w \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Para solucionar o problema, consideremos o espaço

$$W = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) / \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0\}.$$

Multipliquemos a equação (★) por $\varphi \in W$ e usando dualidade segue que

$$\int_0^L \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \varphi dx = \langle \lambda, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}.$$

Integrando por partes

$$\int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = \langle \lambda, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}$$

pelo Lema 2.4.2 se conclui que

$$w \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Claramente de (1) e de (3) se obtém que

$$v \in H_0^1(\Omega), z \in H_0^2(\Omega).$$

Logo , $U \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$,
ou seja,

$$D(\tilde{A}) \subseteq (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

Analogamente tem-se que

$$D(\tilde{A}) \supseteq (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

Portanto,

$$D(\tilde{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \blacksquare$$

Afirmação: $\tilde{A}$ é um operador dissipativo

Demonstração: Seja $U = (u, v, w, z, \theta) \in D(\tilde{A})$ então

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{A}U, U \rangle_X &= \langle (v, \varepsilon^{-1}\mu_0 u_{xx}, z, -(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w - (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z_{xx} + \theta_{xx}); (u, v, w, z, \theta) \rangle \\
&= \mu_0(u_x, v_x) + \varepsilon^{-1}(\varepsilon^{-1}\mu_0 u_{xx}, v) + (z_{xx}, w_{xx}) + (-(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w, z) \\
&\quad + (-(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z) + (-\frac{\partial}{\partial x}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w, z_x) + (-\frac{\partial}{\partial x}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z_x) \\
&\quad + (z_{xx}, \theta) + (\theta_{xx}, \theta) \\
&= \mu_0(u_x, v_x) - \mu_0(u_x, v_x) + (z_{xx}, w_{xx}) + (-(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w, z) \\
&\quad + (\frac{\partial^2}{\partial x^2}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w, z) + (-(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z) + (\frac{\partial^2}{\partial x^2}(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z) \\
&\quad + (z_{xx}, \theta) - (\theta_x, \theta_x) \\
&= (z_{xx}, w_{xx}) - ((I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w, z) - ((I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z) \\
&\quad + (z_{xx}, \theta) - \|\theta_x\|^2 \\
&= -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, z) + (\theta, \frac{\partial^2}{\partial x^2} z) - \|\theta_x\|^2 \\
&= (\theta_x, z_x) - (\theta_x, z_x) - \|\theta_x\|^2 \\
&= -\|\theta\|^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{A}$ é dissipativo. Aqui foram usados os Lemas 2.4.7 e 2.4.8 . ■

Afirmação: $\tilde{A}$ é maximal

Demonstração: Seja $G = (f, g, h, k, l)^\tau \in X$. Mostraremos que o sistema

$$\tilde{A}U = G$$

admite uma única solução $U \in D(\tilde{A})$. Isto é equivalente a encontrar $(u, v, w, z, \theta) \in D(\tilde{A})$ tais que:

$$(a) \quad v = f \in H_0^1(\Omega)$$

$$(b) \quad \varepsilon^{-1} \mu_0 u_{xx} = g \in L^2(\Omega)$$

$$(c) \quad z = h \in H_0^2(\Omega)$$

$$(d) \quad -(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w - (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta = k \in H_0^1(\Omega)$$

$$(e) \quad z_{xx} + \theta_{xx} = l \in L^2(\Omega).$$

De (b) consideremos o problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^{-1} \mu_0 u_{xx} = \tilde{g} \in L^2(\Omega) \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.4 (Regularidade Elíptica) se provou que

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Similarmente, de (e) e (c) consideremos o problema

$$\begin{cases} \theta_{xx} = l - z_{xx} \in L^2(\Omega) \\ \theta(0) = \theta(L) = 0 \Rightarrow \theta \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{cases}$$

Pelo Lema 2.4.5 o operador

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega) \text{ é limitado}$$

e como

$$\theta \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} \in L^2(\Omega) \Rightarrow (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \in H_0^1(\Omega),$$

então da parte (d) obtemos

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \tilde{k} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

o qual equivale a

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\tilde{k} = \tilde{k} - \tilde{k}_{xx} \in H^{-1}(\Omega),$$

de onde obtemos o problema

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \tilde{\lambda} \in H^{-1}(\Omega) \\ w \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Para solucionar este problema consideremos o espaço

$$W = \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) / \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0\}.$$

Multiplicando a equação (*) por $\varphi \in W$, integrando por partes e usando dualidade obtemos

$$\int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = \int_0^L \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \varphi dx = \langle \tilde{\lambda}, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}.$$

Então, pelo Lema 2.4.2 se obtém

$$w \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Também temos claramente de **(a)** e **(c)** que

$$v \in H_0^1(\Omega), z \in H_0^2(\Omega).$$

Portanto

$$U = (u, v, w, z, \theta) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

e $\tilde{A}$ é maximal. ■

Também é claro que $D(\tilde{A})$ é denso em X . Combinando as afirmações mostramos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Seja X espaço de Banach e $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com domínio $D(\tilde{A})$ denso em X . Se $\tilde{A}$ é dissipativo e maximal então $\tilde{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 em X .*

Problema Semilinear: Podemos reescrever o problema de valor inicial (1.1)-(1.3) na forma

$$\begin{cases} U_t = \tilde{A}U + B^{-1}N(U), & U \in D(\tilde{A}) \subset X \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, w_0, w_1, \theta_0)^T \in X, \end{cases}$$

onde $\tilde{A}$ é o operador dado em (3.2) e

$$N : D(N) \subset X \longrightarrow D(B^{-1}) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$U \longmapsto N(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0[\frac{1}{2}w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v \\ 0 \\ [f(u, w)]_x - g(u, w) \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $D(N) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Mostramos agora que N está bem definida. De fato, seja $(u, v, w, z, \theta) \in D(N)$, $K_1 \in H^1(\Omega)$, C constante positiva que varia de linha a linha. Usando $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, pois $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \|\mu_0[\frac{1}{2}w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v\|^2 &\leq 2\|\mu_0[\frac{w_x^2}{2} + K_1w]_x\|^2 + 2\|\varepsilon^\alpha v\|^2 \\ &\leq 2\mu_0^2\|w_x w_{xx} + (K_1)_x w + K_1 w_x\|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha}\|v\|^2 \\ &\leq C[\|w_x w_{xx}\|^2 + \|(K_1)_x w\|^2 + \|K_1 w_x\|^2 + \varepsilon^{2\alpha}\|v\|^2] \\ &\leq C[\|w_x\|_\infty^2\|w_{xx}\|^2 + \|(K_1)_x\|^2\|w\|_\infty^2 + \|K_1\|_\infty^2\|w_x\|^2 + \varepsilon^{2\alpha}\|v\|^2] \\ &\leq C[\|w_{xx}\|^4 + \|K_1\|_{H^1}^2\|w_{xx}\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2\|w_{xx}\|^2 + \varepsilon^{2\alpha}\|v\|^2] < +\infty. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|[f(u, w)]_x - g(u, w)\|^2 &\leq 2\|[f(u, w)]_x\|^2 + 2\|g(u, w)\|^2 \\ &\leq 2\|\mu_0 w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)\|_x^2 + 2\|\mu_0 K_1(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)\|^2 \\ &\leq C[\|w_{xx}(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w) + w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2 \\ &\quad + \|K_1\|^2\|u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w\|_\infty^2] \\ &\leq C[\|w_{xx}\|^2\|u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w\|_\infty^2 + \|w_x\|_\infty^2\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2 \\ &\quad + \|K_1\|_{H^1}^2\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2] \\ &\leq C[\|w_{xx}\|^2\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2 + \|w_{xx}\|^2\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2 \\ &\quad + \|K_1\|_{H^1}^2\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2] \\ &\leq C[\|w_{xx}\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2]\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)_x\|^2 \\ &\leq C[\|w_{xx}\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2][\|u_{xx}\|^2 + \|w_{xx}\|^4 + \|K_1\|_{H^1}^2\|w\|^2] < +\infty. \end{aligned}$$

Mostraremos agora a existência e unicidade local de solução do problema (1.1)-(1.3). Agora, sejam $U = (u, v, w, z, \theta)^\tau$ e $V = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{z}, \tilde{\theta})^\tau$ elementos de $D(N) \subset X$. Procedendo formalmente e usando (3.1), temos

$$N(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0[\frac{1}{2}w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v \\ 0 \\ [f(u, w)]_x - g(u, w) \\ 0 \end{bmatrix}, N(V) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0[\frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 + K_1(x)\tilde{w}]_x - \varepsilon^\alpha \tilde{v} \\ 0 \\ [f(\tilde{u}, \tilde{w})]_x - g(\tilde{u}, \tilde{w}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$N(U) - N(V) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0[\frac{1}{2}w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v - \mu_0[\frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 + K_1(x)\tilde{w}]_x + \varepsilon^\alpha \tilde{v} \\ 0 \\ [f(u, w)]_x - [f(\tilde{u}, \tilde{w})]_x - g(u, w) + g(\tilde{u}, \tilde{w}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$B^{-1}[N(U) - N(V)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}\{\mu_0[\frac{1}{2}w_x^2 + K_1(x)w]_x - \varepsilon^\alpha v - \mu_0[\frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 + K_1(x)\tilde{w}]_x + \varepsilon^\alpha \tilde{v}\} \\ 0 \\ (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\{[f(u, w)]_x - [f(\tilde{u}, \tilde{w})]_x - g(u, w) + g(\tilde{u}, \tilde{w})\} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$B^{-1}[N(U) - N(V)] = (0, T_1, 0, T_2, 0)^\tau,$$

onde

$$T_1 = \varepsilon^{-1}\{\mu_0[\frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w]_x - \mu_0[\frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 + K_1 \tilde{w}]_x - \varepsilon^\alpha(v - \tilde{v})\}$$

$$T_2 = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\{[f(u, w)]_x - [f(\tilde{u}, \tilde{w})]_x - g(u, w) + g(\tilde{u}, \tilde{w})\}.$$

No que segue denotaremos por C uma constante positiva que pode variar de linha a linha.

Com as notações anteriores, note que

$$\|B^{-1}[N(U) - N(V)]\|_X^2 = \varepsilon \|T_1\|^2 + \|T_2\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial x} T_2 \right\|^2.$$

Usando a desigualdade de Poincaré e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, pois $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \|T_1\|^2 &= \varepsilon \left\| \varepsilon^{-1} \left\{ \mu_0 \left[\frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \right]_x - \mu_0 \left[\frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 + K_1 \tilde{w} \right]_x - \varepsilon^\alpha (v - \tilde{v}) \right\} \right\|^2 \\ &= \varepsilon \left\| \varepsilon^{-1} \left\{ \mu_0 \left[\frac{1}{2} w_x^2 - \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 + K_1 (w - \tilde{w}) \right]_x - \varepsilon^\alpha (v - \tilde{v}) \right\} \right\|^2 \\ &\leq 2\varepsilon^{-1} \mu_0^2 \left\| \left[\frac{1}{2} w_x^2 - \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 + K_1 (w - \tilde{w}) \right]_x \right\|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq 2\varepsilon^{-1} \mu_0^2 \|(w_x w_{xx} - \tilde{w}_x \tilde{w}_{xx}) + K_1 (w_x - \tilde{w}_x) + (K_1)_x (w - \tilde{w})\|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq 8\varepsilon^{-1} \mu_0^2 [\|w_x w_{xx} - \tilde{w}_x \tilde{w}_{xx}\|^2 + \|K_1 (w_x - \tilde{w}_x)\|^2 + \|(K_1)_x (w - \tilde{w})\|^2] + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq 8\varepsilon^{-1} \mu_0^2 [\|w_x w_{xx} - w_x \tilde{w}_{xx} + w_x \tilde{w}_{xx} - \tilde{w}_x \tilde{w}_{xx}\|^2 + \|K_1\|_\infty^2 \|w_x - \tilde{w}_x\|^2 + \|(K_1)_x\|^2 \|w - \tilde{w}\|_\infty^2] \\ &\quad + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq 8\varepsilon^{-1} \mu_0^2 [2\|w_x\|_\infty^2 \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + 2\|\tilde{w}_{xx}\|^2 \|w_x - \tilde{w}_x\|_\infty^2 + LC\|K_1\|_{H^1}^2 \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 \\ &\quad + LC\|K_1\|_{H^1}^2 \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2] + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq 8\varepsilon^{-1} \mu_0^2 [2C(\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2) \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + 2CL\|K_1\|_{H^1}^2 \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2] + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq C(\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2) \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq C(\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2 + 1) \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + 2\varepsilon^{2\alpha-1} \|v - \tilde{v}\|^2 \\ &\leq C(1 + \|U\|_X^2 + \|V\|_X^2) \|U - V\|_X^2 \\ &\leq C(1 + \|U\|_X^2 + \|V\|_X^2)^2 \|U - V\|_X^2. \end{aligned}$$

Além disso, usando a desigualdade de Poincaré e que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, temos

$$\begin{aligned} \|T_2\|^2 &= \|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [f(u, w) - f(\tilde{u}, \tilde{w})] \right\} - (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} [g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{w})]\|^2 \\ &\leq 2\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} [f(u, w) - f(\tilde{u}, \tilde{w})]\|^2 + 2\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} [g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{w})]\|^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.4.5 o operador $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} : L^2(\Omega) \mapsto H_0^1(\Omega)$ é limitado, ou seja, existe $C > 0$, tal que

$$\|(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \frac{\partial}{\partial x} [f(u, w) - f(\tilde{u}, \tilde{w})]\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \|f(u, w) - f(\tilde{u}, \tilde{w})\|^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|\mu_0[w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)] - \mu_0[\tilde{w}_x(\tilde{u}_x + \frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 + K_1\tilde{w})]\|^2 \\
&\leq C\|w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w) - \tilde{w}_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w) + \tilde{w}_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w) - \tilde{w}_x(\tilde{u}_x + \frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 + K_1\tilde{w})\|^2 \\
&\leq C\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)(w_x - \tilde{w}_x) + \tilde{w}_x[(u_x - \tilde{u}_x) + \frac{1}{2}(w_x^2 - \tilde{w}_x^2) + K_1(w - \tilde{w})]\|^2 \\
&\leq 2C[\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)(w_x - \tilde{w}_x)\|^2 + \|\tilde{w}_x\|_\infty^2\|(u_x - \tilde{u}_x) + \frac{1}{2}(w_x^2 - \tilde{w}_x^2) + K_1(w - \tilde{w})\|^2] \\
&\leq 2C[\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)(w_x - \tilde{w}_x)\|^2 + 4\|\tilde{w}_{xx}\|^2(\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \frac{1}{4}\|w_x^2 - \tilde{w}_x^2\|^2 + \|K_1(w - \tilde{w})\|^2)] \\
&\leq 2C[4\|(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)(w_x - \tilde{w}_x)\|^2 + 4\|\tilde{w}_{xx}\|^2(\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \frac{1}{4}\|(w_x + \tilde{w}_x)(w_x - \tilde{w}_x)\|^2 \\
&\quad + \|K_1(w - \tilde{w})\|^2)] \\
&\leq 8C[\|u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w\|^2\|w_x - \tilde{w}_x\|_\infty^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2(\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \frac{1}{4}\|w_x + \tilde{w}_x\|_\infty^2\|w_x - \tilde{w}_x\|^2 \\
&\quad + \|K_1\|_\infty^2\|w - \tilde{w}\|^2)] \\
&\leq 8C[\|u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w\|^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2(\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + (\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 \\
&\quad + \|K_1\|_{H^1}^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2)] \\
&\leq 8C[(\|u_x\|^2 + \|w_{xx}\|^4 + \|K_1\|_{H^1}^2\|w_{xx}\|^2)\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 \\
&\quad + \|\tilde{w}_{xx}\|^2(\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + (\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2)] \\
&\leq 8C\{(\|u_x\|^2 + C_1(1 + \|w_{xx}\|^2)\|w_{xx}\|^2)\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 \\
&\quad + \|\tilde{w}_{xx}\|^2(\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + (\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + C_1\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2)\} \\
&\leq 8C\{(\|u_x\|^2 + C_1(1 + \|w_{xx}\|^2)\|w_{xx}\|^2)\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 \\
&\quad + \|\tilde{w}_{xx}\|^2[\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + C_1\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2(\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2 + 1)]\} \\
&\leq C\{\|u_x\|^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + (1 + \|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)\|w_{xx}\|^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 \\
&\quad + \|\tilde{w}_{xx}\|^2\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2(1 + \|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)\} \\
&\leq C\{\|u_x\|^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 \\
&\quad + \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2(1 + \|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)(\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)\} \\
&\leq C\{\|u_x\|^2\|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2(1 + \|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2)^2\} \\
&\leq C(1 + \|U\|_X^2 + \|V\|_X^2)^2\|U - V\|_X^2,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{1, \|K_1\|_{H^1}^2\} > 0$.

Similarmente, pelo Lema 2.4.3 o operador $(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : L^2(\Omega) \mapsto H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é

limitado, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} [g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{w})] \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \|g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{w})\|^2 \\
& \leq C \left\| K_1 \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \right) - K_1 \left(\tilde{u}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 + K_1 \tilde{w} \right) \right\|^2 \\
& \leq C \left\| \mu_0 K_1 \left[(u_x - \tilde{u}_x) + \frac{1}{2} (w_x^2 - \tilde{w}_x^2) + K_1 (w - \tilde{w}) \right] \right\|^2 \\
& \leq C \|K_1\|_\infty^2 \left\| (u_x - \tilde{u}_x) + \frac{1}{2} (w_x^2 - \tilde{w}_x^2) + K_1 (w - \tilde{w}) \right\|^2 \\
& \leq C \|K_1\|_{H^1}^2 \left[\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \frac{1}{4} \|(w_x - \tilde{w}_x)(w_x + \tilde{w}_x)\|^2 + \|K_1\|_\infty^2 \|w - \tilde{w}\|^2 \right] \\
& \leq C [\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \|w_x - \tilde{w}_x\|^2 (\|w_x\|^2 + \|\tilde{w}_x\|^2) + \|K_1\|_\infty^2 \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2] \\
& \leq C [\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 (\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2) + \|K_1\|_{H^1}^2 \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2] \\
& \leq C [\|u_x - \tilde{u}_x\|^2 + \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 (\|w_{xx}\|^2 + \|\tilde{w}_{xx}\|^2 + 1)] \\
& \leq C (1 + \|U\|_X^2 + \|V\|_X^2) \|U - V\|_X^2 \\
& \leq C (1 + \|U\|_X^2 + \|V\|_X^2)^2 \|U - V\|_X^2
\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\left\| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \{ [f(u, w)]_x - [f(\tilde{u}, \tilde{w})]_x - [g(u, w) - g(\tilde{u}, \tilde{w})] \} \right\|_{H_0^1}^2 \leq C (1 + \|U\|_X^2 + \|V\|_X^2)^2 \|U - V\|_X^2,$$

onde C é uma constante positiva dependendo de $\varepsilon, \mu_0, \alpha$ e $\|K_1\|_{H^1}$.

Assim, se $\|U\|_X \leq R, \|V\|_X \leq R$, tem-se que

$$\|B^{-1}[N(U) - N(V)]\|_X^2 \leq C[1 + 2R^2]^2 \|U - V\|_X^2$$

e concluimos que

$$\|B^{-1}[N(U) - N(V)]\|_X \leq L_R \|U - V\|_X$$

com $L_R = C^{\frac{1}{2}}[1 + 2R^2]$. Portanto $B^{-1}N(\cdot)$ é localmente Lipschitz contínua sobre conjuntos limitados com $M = R$. Como X pode ser visto como um espaço métrico com a métrica induzida pela sua norma, e foi mostrado anteriormente que $\tilde{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 em X , então todas as hipóteses do Teorema 2.12 foram satisfeitas. Logo podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *Sejam $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$, $K_1 \in H^1(\Omega)$ e $(u_0, u_1, w_0, w_1, \theta_0) \in X$. Então existe $T_0 > 0$, tal que o problema (1.1)–(1.3) admite uma única solução fraca no intervalo $[0, T_0]$. Podemos considerar $T_0 = T_{max}$.*

3.2 Energia total associada ao sistema

Multiplicando formalmente as equações do sistema (1.1)–(1.3) por u_t , w_t e θ , respectivamente, integrando de 0 a L e somando-se, obtemos

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_0^L \varepsilon u_{tt} u_t dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^L w_t w_{tt} dx}_{I_2} + \underbrace{\int_0^L w_{xx} w_{xxt} dx}_{I_3} + \underbrace{\int_0^L \theta \theta_t dx}_{I_4} + \underbrace{\int_0^L w_{xt} w_{xtt} dx}_{I_5} \\
& + \underbrace{\mu_0 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w) u_{xt} dx + \mu_0 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w) w_x w_{xt} dx}_{I_6} \\
& + \underbrace{\mu_0 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w) K_1 w_t dx}_{I_6} = - \int_0^L [\theta_x^2 + \varepsilon^\alpha u_t^2] dx. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Usando integração por partes, formalmente deduzimos que:

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varepsilon |u_t|^2 dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |w_t|^2 dx,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |w_{xx}|^2 dx,$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\theta|^2 dx,$$

$$I_5 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |w_{xt}|^2 dx$$

e

$$I_6 = \mu_0 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w) (u_{xt} + w_x w_{xt} + K_1 w_t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mu_0 \int_0^L [u_x^2 + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w]^2 dx.$$

Substituindo estes valores na identidade (3.4), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \{ \varepsilon u_t^2 + w_t^2 + w_{xx}^2 + \theta^2 + w_{xt}^2 + \mu_0 [u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w]^2 \} dx = - \int_0^L (\varepsilon^\alpha u_t^2 + \theta_x^2) dx.$$

Assim, a energia total do sistema (1.1) é dada por

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon u_t^2 + \mu_0 (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 + w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \theta^2] dx. \tag{3.5}$$

Segue que

$$\frac{d}{dt}E_\varepsilon(t) = - \int_0^L (\varepsilon^\alpha u_t^2 + \theta_x^2) dx. \quad (3.6)$$

3.3 Existência global

Consideremos o problema de existência global para o modelo (1.1)-(1.3). Usando técnicas usuais podemos estender a solução local obtida no Teorema 3.2 a um intervalo maximal de existência $[0, T_{max})$. Além disso vale a seguinte afirmação: Se $\{u, w, \theta\}$ é solução do problema (1.1)-(1.3), então devemos ter que:

(i) $T_{max} = +\infty$

ou

(ii) $T_{max} < +\infty$, e neste caso

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} (\mu_0 \|u_x\| + \varepsilon \|u_t\| + \|w_{xx}\| + \|w_t\| + \|w_{xt}\| + \|\theta\|) = \infty.$$

Assim, para demonstrar a existência global é suficiente mostrar que (ii) não se verifica. Para isto vamos obter estimativas a priori. Mostraremos que $\forall t \in [0, T]$, tal que $0 < T < T_{max}$,

$$\mu_0 \|u_x\| + \varepsilon \|u_t\| + \|w_{xx}\| + \|w_t\| + \|w_{xt}\| + \|\theta\| \leq C,$$

onde C é uma constante que somente depende dos dados iniciais.

De fato, de (3.6) temos

$$\frac{d}{dt}(E_\varepsilon(t)) = - \int_0^L (\varepsilon^\alpha u_t^2 + \theta_x^2) dx \leq 0.$$

Integrando em $(0, t)$ resulta que

$$E_\varepsilon(t) - E_\varepsilon(0) \leq 0.$$

Logo,

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0) \leq C_0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon u_t^2 + \mu_0 (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 + w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \theta^2] dx \leq C_0$$

para todo $t \in [0, T_m)$, com T_m tão próximo de T_{max} quanto se queira. Isto garante que

$$\varepsilon \|u_t\|^2, \mu_0 \|u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w\|^2, \|w_t\|^2, \|w_{xx}\|^2, \|w_{xt}\|^2, \|\theta\|^2 \leq 2C_0, \forall t \in [0, T_m).$$

Fazendo $T_m \rightarrow T_{max}$ segue que

$$\|u_x\|^2, \|u_t\|^2, \|w_{xx}\|^2, \|w_t\|^2, \|w_{xt}\|^2, \|\theta\|^2 \text{ são limitadas em } [0, T_{max}),$$

ou seja,

$$\|U\|_X^2 = \mu_0 \|u_x\|^2 + \varepsilon \|u_t\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|w_t\|^2 + \|w_{xt}\|^2 + \|\theta\|^2 \leq C, \quad \forall t \in [0, T_{max}[$$

onde C é uma constante que depende dos dados iniciais. Logo, a solução $u(t)$ está definida globalmente em $[0, +\infty)$.

3.4 Unicidade da solução global

Dado $T > 0$, temos

$$\mu_0 \|u_x\| + \varepsilon \|u_t\| + \|w_{xx}\| + \|w_t\| + \|w_{xt}\| + \|\theta\| \leq C, \quad \forall t \in [0, T],$$

onde C é uma constante que depende dos dados iniciais. Usaremos este resultado na demonstração da unicidade da solução global.

Vamos supor a existência de duas soluções, (u_1, w_1, θ_1) e (u_2, w_2, θ_2) , satisfazendo (1.1)-(1.3) e considere $(u, w, \theta) = (u_1 - u_2, w_1 - w_2, \theta_1 - \theta_2)$.

Então (u, w, θ) satisfaz em $(0, L) \times (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} &= \mu_0 \left[u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right]_x - \varepsilon^\alpha u_t \\ w_{tt} &= -w_{xxxx} + w_{xxtt} + \mu_0 \left[w_{1x}(u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1) - w_{2x}(u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2) \right]_x \\ &\quad - \mu_0 K_1 \left[(u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1) - (u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2) \right] - \theta_{xx} \\ \theta_t &= \theta_{xx} + w_{xxt} \end{cases}$$

ou seja, (u, w, θ) satisfaz em $(0, L) \times (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} &= \mu_0 \left[u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right]_x - \varepsilon^\alpha u_t \\ w_{tt} &= -w_{xxxx} + w_{xxtt} + \mu_0 \left[(w_{1x}u_{1x} - w_{2x}u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^3 - w_{2x}^3) + K_1(w_1 w_{1x} - w_2 w_{2x}) \right] \\ &\quad - \mu_0 K_1 \left[(u_{1x} - u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] - \theta_{xx} \\ \theta_t &= \theta_{xx} + w_{xxt} \end{cases}$$

com as condições de contorno

$$\begin{cases} u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad \forall t > 0 \\ w(0, t) &= w(L, t) = w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0 \\ \theta(0, t) &= \theta(L, t) = 0, \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & \forall t > 0 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, & \forall t > 0 \\ \theta(x, 0) = 0. & \forall t > 0 \end{cases}$$

Multiplicando as equações por u_t, w_t, θ , integrando em $(0, L)$ e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{\varepsilon \int_0^L u_{tt} u_t dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^L w_{tt} w_t dx}_{I_2} + \underbrace{\int_0^L w_{xxx} w_t dx}_{I_3} - \underbrace{\int_0^L w_{xxt} w_t dx}_{I_4} + \underbrace{\int_0^L \theta_t \theta dx}_{I_5} \\ & - \underbrace{\mu_0 \int_0^L \left[u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right]_x u_t dx}_{I_6} \\ & - \underbrace{\mu_0 \int_0^L \left[(w_{1x} u_{1x} - w_{2x} u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^3 - w_{2x}^3) + K_1(w_1 w_{1x} - w_2 w_{2x}) \right]_x w_t dx}_{I_6} \\ & + \underbrace{\mu_0 \int_0^L K_1 \left[(u_{1x} - u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] w_t dx}_{I_6} - \underbrace{\int_0^L \theta \theta_{xx} dx}_{I_7} \\ & + \underbrace{\varepsilon^\alpha \int_0^L u_t^2 dx}_{I_7} - \underbrace{\int_0^L w_{xxt} \theta dx}_{I_8} + \underbrace{\int_0^L \theta_{xx} w_t dx}_{I_8} = 0. \end{aligned}$$

Os termos I_1 a I_5 já foram analisados anteriormente, agora vamos analisar os termos I_6 e I_7 e vemos que I_8 se cancela por integração por partes.

Análise de I_6

$$\begin{aligned} I_6 &= \mu_0 \int_0^L \left[u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] \frac{d}{dt} \left[u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] dx \\ &- \mu_0 \int_0^L \left[(u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2) - (u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] (w_{1x} w_{1xt} - w_{2x} w_{2xt} + K_1 w_{1t} - K_1 w_{2t}) dx \\ &+ \mu_0 \int_0^L \left[(u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1) w_{1x} - (u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2) w_{2x} \right] (w_{1xt} - w_{2xt}) dx \\ &+ \mu_0 \int_0^L K_1 \left[(u_{1x} - u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] w_t dx \\ &= \mu_0 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left| u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right|^2 dx - \mu_0 \int_0^L (u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1) w_x w_{2xt} dx \\ &+ \mu_0 \int_0^L (u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2) w_x w_{1xt} dx + \mu_0 \int_0^L K_1 \left[(u_{1x} - u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2) \right] w_t dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_0 \int_0^L [(u_{1x} - u_{2x}) + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2)] K_1 w_t dx \\
& = \mu_0 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2)|^2 dx - \mu_0 \int_0^L (u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1) w_x w_{2xt} dx \\
& \quad + \mu_0 \int_0^L (u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2) w_x w_{1xt} dx.
\end{aligned}$$

Análise de I_7

$$I_7 = \int_0^L \theta_x^2 dx + \varepsilon^\alpha \int_0^L u_t^2 dx.$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\varepsilon |u_t|^2 + \mu_0 |u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2)|^2 + |w_t|^2 + |w_{xx}|^2 + |w_{xt}|^2 + |\theta|^2] dx \\
& = \underbrace{\mu_0 \int_0^L (u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1) w_x w_{2xt} dx}_{I_9} - \underbrace{\mu_0 \int_0^L (u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2) w_x w_{1xt} dx}_{I_{10}} - \underbrace{\int_0^L \theta_x^2 dx}_{<0} \\
& \quad - \underbrace{\varepsilon^\alpha \int_0^L u_t^2 dx}_{<0}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Avaliamos, separadamente, os termos I_9 e I_{10} .

Avaliação de I_9

Decorre da desigualdade de Cauchy Schwartz que

$$\begin{aligned}
I_9 & \leq \left(\int_0^L |u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |w_x w_{2xt}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1\| \|w_{2xt}\| \|w_x\|_\infty \\
& \leq \|u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1\| \|w_{2xt}\| \|w_x\|_{H^1} \leq \|u_{1x} + \frac{1}{2}w_{1x}^2 + K_1 w_1\| \|w_{2t}\|_{H^1} \|w\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Avaliação de I_{10}

Da mesma forma que I_9 , vemos que

$$I_{10} \leq \|u_{2x} + \frac{1}{2}w_{2x}^2 + K_1 w_2\| \|w_{1t}\|_{H^1} \|w\|_{H^2}.$$

Como (u_1, w_1, θ_1) e (u_2, w_2, θ_2) são soluções de (1.1) – (1.3), existem constantes C_1 e C_2 , tais que

$$I_9 \leq C_1 \|w\|_{H^2}, \quad I_{10} \leq C_2 \|w\|_{H^2}.$$

Seja

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon |u_t|^2 + \mu_0 |u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2)|^2 + |w_t|^2 + |w_{xx}|^2 + |w_{xt}|^2 + |\theta|^2] dx.$$

Substituindo I_9 e I_{10} em (3.7) vemos que

$$\frac{d}{dt} F(x, t) \leq (C_1 + C_2) \|w\|_{H^2} = C_3 \|w\|_{H^2},$$

ou seja,

$$F(x, t) \leq C_4 \int_0^t \|w\|_{H^2} ds \leq C \int_0^t F(x, s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Usando a desigualdade de Gronwall, tem-se

$$F(x, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Logo $\|w\|_{H^2} = 0$, o que implica que $w_{1x} - w_{2x} = 0$. Além disso, $\|\theta\| = 0$, ou seja, $\theta_1 - \theta_2 = 0$. Também

$$\int_0^L |u_t|^2 dx = \int_0^L |u_x + \frac{1}{2}(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + K_1(w_1 - w_2)|^2 dx = 0,$$

ou seja, $u_t = u_x = 0$. Assim, $u(x, t)$ é constante e como $u(x, 0) = 0$ temos que $u_1 = u_2$.

Portanto, a solução é única. Logo, mostramos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$, $K_1 \in H^1(\Omega)$ e $(u_0, u_1, w_0, w_1, \theta_0) \in X$. Então, o problema (1.1)–(1.3) tem uma única mild solução global $(u^\varepsilon, u_t^\varepsilon, w^\varepsilon, w_t^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ no espaço $C([0, +\infty); X)$.*

Capítulo 4

O Limite Assintótico

Como nos capítulos anteriores sejam $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, consideremos a solução $\{u^\varepsilon, w^\varepsilon, \theta^\varepsilon\}$ como no Teorema 3.3 e novamente denotemos $u = u^\varepsilon$, $w = w^\varepsilon$ e $\theta = \theta^\varepsilon$. O objetivo neste capítulo é calcular o limite de w^ε e θ^ε , soluções do problema (1.1)-(1.3), quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.1 Convergência do problema aproximado

Teorema 4.1 *Seja $\varepsilon > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$. Então, existem funções $Z = Z(x, t)$ e $\phi = \phi(x, t)$, tais que $w^\varepsilon \rightharpoonup Z$, $\theta^\varepsilon \rightharpoonup \phi$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\{Z, \phi\}$ é a solução do modelo acoplado*

$$\begin{cases} Z_{tt} + Z_{xxxx} - Z_{xxt} = H(t)Z_{xx} - K_1(x)H(t) - \phi_{xx} \\ \phi_t - \phi_{xx} - Z_{xt} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

com condições de fronteira

$$\begin{cases} Z = 0, Z_x = 0 \text{ em } x = 0, L \quad \forall t > 0 \\ \phi = 0 \text{ em } x = 0, L \quad \forall t > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

e condições iniciais

$$Z(x, 0) = w_0(x), Z_t(x, 0) = w_1(x), \phi(x, 0) = \theta_0(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (4.3)$$

aqui

$$H(t) := \frac{\mu_0}{2L} \int_0^L (Z_x^2 + 2K_1(x)Z) dx.$$

Demonstração: A energia associada ao sistema (1.1) é dada por

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\varepsilon u_t^2 + \mu_0(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 + w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \theta^2] dx.$$

Considerando $0 < \varepsilon < 1$, então

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0) \leq C_0$$

onde C_0 é uma constante positiva que depende dos dados iniciais. Assim, deduzimos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx &\leq C_0, \quad \frac{1}{2} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx \leq C_0, \quad \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \leq C_0, \\ \frac{1}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx &\leq C_0, \quad \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx \leq C_0, \quad \frac{1}{2} \int_0^L \theta^2 dx \leq C_0. \end{aligned}$$

Daí, $\exists C_1 > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} \sup \text{ess} \|\sqrt{\varepsilon} u_t\| &\leq C_1, \quad \sup \text{ess} \|u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w\| \leq C_1, \quad \sup \text{ess} \|w_t\| \leq C_1 \\ \sup \text{ess} \|w_{xx}\| &\leq C_1, \quad \sup \text{ess} \|w_{xt}\| \leq C_1, \quad \sup \text{ess} \|\theta\| \leq C_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\{\sqrt{\varepsilon} u_t^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{u_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 + K_1 w^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{w_t^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{w_{xx}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{w_{xt}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \text{ e } \{\theta^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$$

são limitados em $L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$. Além disso, como

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) = - \int_0^L (\varepsilon^\alpha u_t^2 + \theta_x^2) dx$$

integrando sobre o intervalo $[0, T]$ obtemos

$$E_\varepsilon(T) - E_\varepsilon(0) = - \int_0^T \int_0^L (\varepsilon^\alpha u_t^2 + \theta_x^2) dx ds,$$

ou seja,

$$E_\varepsilon(0) - E_\varepsilon(T) = \int_0^T \int_0^L (\varepsilon^\alpha u_t^2 + \theta_x^2) dx ds \leq E_\varepsilon(0) \leq C_0.$$

Assim

$$\int_0^T \int_0^L \varepsilon^\alpha u_t^2 dx ds \leq C_0 \text{ e } \int_0^T \int_0^L \theta_x^2 dx ds \leq C_0.$$

Logo, fazendo $T \rightarrow +\infty$, temos

$$\int_0^\infty \int_0^L \varepsilon^\alpha u_t^2 dx ds \leq C_0 \text{ e } \int_0^\infty \int_0^L \theta_x^2 dx ds \leq C_0$$

de onde concluímos que

$$\|\varepsilon^{\alpha/2} u_t\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} \leq C_0 \quad \text{e} \quad \|\theta_x\|_{L^2(0, \infty; L^2(\Omega))} \leq C_0,$$

isto é, $\{\varepsilon^{\alpha/2}u_t\}$ e $\{\theta_x\}$ são limitados em $L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$. Assim, podemos extrair subseqüências convergentes (que ainda denotamos com os mesmos símbolos) que garantem a existência das funções $\xi(x, t), \eta(x, t), Z(x, t)$ e $\phi(x, t)$ (independente de $\varepsilon > 0$), tais que

$$\sqrt{\varepsilon}u_t \xrightarrow{*} \xi \text{ em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad (4.4)$$

$$u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 + K_1 w \xrightarrow{*} \eta \text{ em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \quad (4.5)$$

$$w \xrightarrow{*} Z \text{ em } L^\infty(0, \infty; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \quad (4.6)$$

$$\theta \xrightarrow{*} \phi \text{ em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad (4.7)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Das convergências (4.4)-(4.7) vemos que é suficiente passar o limite no termo não linear das equações em (1.1). Além disso, como

$$\frac{1}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \leq E_\varepsilon(t) \leq C_0, \quad \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx \leq C_0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \leq C_0,$$

ou seja,

$$\sup \text{ess} \|w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C_0, \quad \sup \text{ess} \|w_t\|_{H_0^1}^2 \leq C_0 \quad \text{e} \quad \sup \text{ess} \|w_t\|^2 \leq C_0,$$

se obtém que

$$\{w\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T, H_0^2(\Omega)), \quad (4.8)$$

$$\{w_t\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)),$$

$$\{w_t\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).$$

Portanto $\{w\}$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$. Agora, observamos que

$$H_0^2(\Omega) \xhookrightarrow{c} H_0^{2-\delta}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega).$$

Logo, aplicando o Teorema de compacidade (Aubin-Lions) ver ([18], Corolário 4) garantimos a existência de um elemento $\tilde{Z} \in L^\infty(0, T; H_0^{2-\delta}(\Omega))$ e uma subseqüência (ainda denotada da mesma forma), tal que

$$w \rightarrow \tilde{Z} \text{ forte em } L^\infty(0, T; H_0^{2-\delta}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para qualquer $\delta > 0$ e $T > 0$.

Agora usando (4.6) e a unicidade do limite fraco se deduz que $\tilde{Z} = Z$.

Assim obtemos que

$$w_x \rightarrow Z_x = \tilde{Z}_x \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Combinando esse resultado com (4.5) deduzimos que

$$w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w) \rightharpoonup Z_x\eta \text{ fraca em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $0 < T < +\infty$.

Afirmação 1: $\int_0^L w_x^4 dx \leq C \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^4.$

Demonstração:

De fato. Se $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, sabemos que

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Então

$$\|w\|_{L^4} \leq C_0 \|w\|_{H^1}, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Por outro lado, usando a equivalência de normas em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, temos

$$\|\tilde{w}\|_{H^2} \leq C_1 \|\tilde{w}_{xx}\|_{L^2}, \quad \forall \tilde{w} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Assim, das duas últimas desigualdades, tem-se

$$\|w_x\|_{L^4} \leq C_0 \|w_x\| \leq C_1 \|w\|_{H^2} \leq C_2 \|w_{xx}\|_{L^2}.$$

Logo, temos que

$$\int_0^L w_x^4 dx = \|w_x\|_{L^4}^4 \leq C \|w_{xx}\|_{L^2}^4.$$

■

Afirmação 2: η é independente de x e dado por

$$\eta(t) = \frac{1}{2L} \int_0^L Z_x^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L K_1(x) Z dx. \quad (4.9)$$

Demonstração:

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^L u_x^2 dx &= \int_0^L [u_x + (\frac{1}{2}w_x^2 + K_1w) - (\frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)]^2 dx \\ &= \int_0^L [(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w) - (\frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)]^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)^2 dx + 2 \int_0^L (\frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)^2 dx \\
&\leq 2 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)^2 dx + 2 \int_0^L [\frac{1}{4}w_x^4 + (K_1w)^2 + (w_x^2)(K_1w)] dx \\
&\leq CE_\varepsilon(t) + \int_0^L \frac{1}{2}w_x^4 dx + 2 \int_0^L (K_1w)^2 dx + 2 \int_0^L w_x^2 w K_1 dx \\
&\leq CE_\varepsilon(0) + \int_0^L \frac{1}{2}w_x^4 dx + 2 \int_0^L (K_1w)^2 dx + \int_0^L w_x^4 dx + \int_0^L (w K_1)^2 dx \\
&\leq C[E_\varepsilon(0) + \int_0^L w_x^4 dx + \int_0^L (K_1w)^2 dx] \\
&\leq C[E_\varepsilon(0) + \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|K_1\|_\infty^2 \int_0^L w^2 dx] \\
&\leq C[E_\varepsilon(0) + \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L w_{xx}^2 dx] \\
&\leq C[E_\varepsilon(0) + E_\varepsilon(t) + E_\varepsilon(t)] \\
&\leq C[E_\varepsilon(0) + E_\varepsilon(0) + E_\varepsilon(0)] \\
&\leq CE_\varepsilon(0).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt \leq CTE_\varepsilon(0),$$

ou seja,

$$\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq CTE_\varepsilon(0) \quad (4.10)$$

onde C depende de $\|K_1\|_{H^1}$ e independe de ε .

Assim podemos extrair uma subsequência de $\{u_x\}$, que ainda denotamos da mesma forma, tal que

$$u_x \rightharpoonup \rho \text{ fracamente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para algum $\rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Também como

$$K_1w \rightharpoonup K_1Z, \quad w_x \rightharpoonup Z_x \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}w_x^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}Z_x^2 \quad \text{em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

temos que

$$u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w \rightharpoonup \rho + \frac{1}{2}Z_x^2 + K_1Z = \eta,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, fracamente em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como $\alpha > 0$, da desigualdade (4.10) se deduz que

$$\{u_x\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e } \varepsilon^\alpha \rightarrow 0,$$

e pela desigualdade de Poincaré obtemos

$$\{u\} \text{ limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ e } \varepsilon^\alpha \rightarrow 0.$$

Assim,

$$\{u_t\} \text{ e limitado em } H^{-1}(0, T, H_0^1(\Omega)) \text{ e } \varepsilon^\alpha \rightarrow 0,$$

e então

$$\varepsilon^\alpha u_t \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Agora, de (4.4) se tem

$$\sqrt{\varepsilon} u_t \rightharpoonup \xi \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

o que implica

$$\sqrt{\varepsilon} u_{tt} \rightharpoonup \xi_t \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Portanto

$$\varepsilon u_{tt} = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} u_{tt} \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

De (4.5) temos, em particular, que para $T > 0$,

$$u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \xrightarrow{*} \eta \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T, L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \rightharpoonup \eta \text{ em } L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

Por outro lado,

$$\varepsilon^\alpha u_t \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T, H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(0, T, L^2(\Omega))$$

e

$$\varepsilon u_{tt} \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T, L^2(\Omega)).$$

Logo, da equação (1.1) se obtém que

$$(\varepsilon u_{tt} + \varepsilon^\alpha u_t) = \mu_0 [u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w]_x \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T, L^2(\Omega)),$$

e como

$$[u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w]_x \rightharpoonup \eta_x$$

pela unicidade de limite fraco

$$\eta_x = [\rho + \frac{1}{2} Z_x^2 + K_1 Z]_x = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\eta = \eta(t),$$

isto é, não depende de x .

Por outro lado, integrando $\eta = \rho + \frac{1}{2}Z_x^2 + K_1Z$ de 0 a L obtemos

$$\begin{aligned}\eta(t)L &= \int_0^L \eta(t)dx = \int_0^L (\rho + \frac{1}{2}Z_x^2 + K_1Z)dx \\ &= \int_0^L \rho dx + \int_0^L \frac{1}{2}Z_x^2 dx + \int_0^L K_1Z dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1, segue que

$$\int_0^L \rho dx = \int_0^L \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_x^\varepsilon dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L u_x^\varepsilon dx = 0$$

pois $u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(L, t) = 0$.

Assim, concluímos que

$$\eta(t) = \frac{1}{2L} \int_0^L Z_x^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L K_1(x)Z dx.$$

■

Como consequência, temos

$$[w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1w)]_x \rightharpoonup \eta Z_{xx} = [\frac{1}{2L} \int_0^L Z_x^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L K_1Z dx] Z_{xx}$$

em $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Da discussão acima obtemos

$$[f(u, w)]_x \rightharpoonup \mu_0 [\frac{1}{2L} \int_0^L Z_x^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L K_1Z dx] Z_{xx} \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)),$$

$$g(u, w) \rightharpoonup \mu_0 K_1 [\frac{1}{2L} \int_0^L Z_x^2 dx + \frac{1}{L} \int_0^L K_1Z dx] \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

e

$$w_{xxxx} \rightharpoonup Z_{xxxx} \text{ em } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $T > 0$.

Portanto, concluímos que a componente $\{w = w^\varepsilon\}$ do sistema converge à solução $Z = Z(x, t)$ fracamente em $L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $T > 0$.

Além disso, de (4.7), para $T > 0$, obtemos

$$\theta_{xx} \rightharpoonup \phi_{xx} \text{ em } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

e também deduzimos da equação (1.1) que

$$\{\theta_t\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Assim, existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\theta_t \rightharpoonup \phi_t \text{ em } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

e

$$w_{xxt} \rightharpoonup Z_{xxt} \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Portanto, a componente $\{\theta = \theta^\varepsilon\}$ do sistema converge à solução $\phi = \phi(x, t)$ fracamente em $L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$. ■

Claramente $\{Z, \phi\}$ satisfaz às condições de fronteira.

4.2 Condições iniciais

- $Z(x, 0) = w_0(x)$.

De (4.6) temos, em particular, que para $T > 0$

$$\{w\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$$

e

$$\{w_t\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Aplicando o Corolário 2.1 na cadeia

$$H_0^2(\Omega) \xhookrightarrow{c} H_0^{2-\delta}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$$

se deduz que existe uma subsequência de $\{w\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$w^\varepsilon = w \rightarrow Z \text{ forte em } C([0, T]; H_0^{2-\delta}(\Omega)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então

$$w(x, 0) \rightarrow Z(x, 0) \text{ em } H_0^{2-\delta}(\Omega),$$

e como $w^\varepsilon(x, 0) = w_0(x)$, $\forall \varepsilon > 0$ segue que $Z(x, 0) = w_0(x)$.

- $Z_t(x, 0) = w_1(x)$.

Usando a equação (1.1) podemos escrever

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})w_{tt} = -w_{xxxx} - \theta_{xx} + [\mu_0 w_x(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)]_x - \mu_0 K_1(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w).$$

Consideremos a cadeia

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega).$$

De (4.7) e (4.8), para $T > 0$, temos que

$$\{\theta\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \Rightarrow \{\theta_x\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)),$$

$$\{w\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \Rightarrow \{w_{xxxx}\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Também de (4.5) e (4.8), para $T > 0$, temos

$$\{u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e } \{w_x\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Portanto,

$$\mu_0[(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)w_x]_x \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

e como $K_1 \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos

$$\{K_1(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Da discussão acima claramente se observa que

$$\{(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})w_{tt}\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Agora, usando (1.1) podemos escrever

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})w_{tt} = w_{tt} - w_{xxtt} = -w_{xxxx} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx},$$

ou seja,

$$w_{tt} = (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}[-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx}].$$

Pelo lema 2.4.6 o operador

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : H^{-2}(\Omega) \mapsto L^2(\Omega) \text{ é limitado.}$$

Assim, existe $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\|w_{tt}\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \left[-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [f(u, w)]_x + g(u, w) - \theta_{xx} \right] \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \| -w_{xxxx} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx} \|_{H^{-2}(\Omega)} \\
&\leq C \{ \|w_{xxxx}\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|[f(u, w)]_x\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|g(u, w)\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|\theta_{xx}\|_{H^{-2}(\Omega)} \} \\
&\leq C \{ \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)} + \|f(u, w)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(u, w)\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \}.
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e usando $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, pois $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_{tt}\|^2 &\leq C [\|w_{xx}\|^2 + \|f(u, w)\|^2 + \|g(u, w)\|^2 + \|\theta\|^2] \\
&\leq C \left[\int_0^L w_{xx}^2 dx + \|w_x\|_\infty^2 \|u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w\|^2 + \|K_1\|_\infty^2 \|u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w\|^2 + \int_0^L \theta^2 dx \right] \\
&\leq C \left[\int_0^L w_{xx}^2 dx + \|w_{xx}\|^2 \left\| u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2 \left\| u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right\|^2 + \int_0^L \theta^2 dx \right] \\
&\leq C E_\varepsilon(0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\{w_{tt}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Além disso, de (4.6)

$$\{w_t\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Novamente, aplicando o Corolário 2.1 na cadeia

$$H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} H_0^{1-\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad \delta > 0,$$

se deduz que existe uma subsequência de $\{w_t\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$w_t^\varepsilon = w_t \rightarrow Z_t \text{ forte em } C([0, T]; L^2(\Omega)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $T > 0$; isto é,

$$w_t(x, 0) \rightarrow Z_t(x, 0) \text{ em } L^2(\Omega)$$

e como $w_t^\varepsilon(x, 0) = w_1(x)$, $\forall \varepsilon > 0$, se obtém que

$$Z_t(x, 0) = w_1(x).$$

- $\phi(x, 0) = \theta_0(x)$.

De (4.6) e (4.7), para $T > 0$, tem-se

$$\{w_{xt}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \Rightarrow \{w_{xxt}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

$$\{\theta\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \Rightarrow \{\theta_{xx}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Da equação (1.1) vemos que

$$\theta_t = \theta_{xx} + w_{xxt}.$$

Assim concluímos que

$$\{\theta_t\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega)).$$

Também, de (4.7) temos

$$\{\theta\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Novamente, aplicando o Corolário 2.1 na cadeia

$$L^2(\Omega) \xhookrightarrow{c} H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$$

se deduz que existe uma subsequência de $\{\theta = \theta^\varepsilon\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\theta^\varepsilon = \theta \rightarrow \phi \text{ forte em } C([0, T]; H^{-1}(\Omega)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $T > 0$, ou seja,

$$\theta(x, 0) \rightarrow \phi(x, 0) \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Como $\theta^\varepsilon(x, 0) = \theta_0(x)$, $\forall \varepsilon > 0$, se obtém que

$$\phi(x, 0) = \theta_0(x).$$

Observação 4.1 *Todas as convergências obtidas neste Capítulo foram para subsequências em ε , porém como ambos modelos (1.1) e (4.1) tem solução global única segue que o resultado vale sempre que ε se aproxime a zero não importa por qual sequência.*

Capítulo 5

Estabilização Uniforme

Sejam $\varepsilon > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$. Denotemos por $u = u^\varepsilon$, $w = w^\varepsilon$ e $\theta = \theta^\varepsilon$. Vamos mostrar o decaimento uniforme da energia total $E_\varepsilon(t)$ do problema (1.1)-(1.3). Usemos o funcional de Lyapunov

$$G_{\varepsilon,\delta}(t) = E_\varepsilon(t) + \delta F_\varepsilon(t) + 2\delta I_\varepsilon(t), \delta > 0, \quad (5.1)$$

onde $E_\varepsilon(t)$ é dado por (3.5),

$$F_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^L uu_t dx + \int_0^L (ww_t + w_x w_{xt}) dx \quad (5.2)$$

e

$$I_\varepsilon(t) = \int_0^L \theta w_t dx - \frac{1}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \int_0^L w_t \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta dx. \quad (5.3)$$

Observe que em $F_\varepsilon(t)$ as expressões são padrões na construção do funcional de Lyapunov. Porém, $I_\varepsilon(t)$ não é.

5.1 Decaimento Exponencial

Lema 5.1.1 *Seja $H_\varepsilon(t) = F_\varepsilon(t) + 2I_\varepsilon(t)$. Então, existe uma constante positiva C , tal que*

$$|H_\varepsilon(t)| \leq C\{1 + \varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_\infty^2]\}E_\varepsilon(t) \quad (5.4)$$

para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração: No que segue C denotará uma constante positiva que varia de linha a linha e independente de ε . De (5.2) e (5.3) para $\gamma > 0$, usando a desigualdade

$$\int_0^L \sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma})^{-1} ab dx \leq \int_0^L \frac{a^2}{2\gamma} dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L b^2 dx$$

obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(t)| &\leq |F_\varepsilon(t)| + 2|I_\varepsilon(t)| \\
&\leq \varepsilon \int_0^L |uu_t|dx + \int_0^L |ww_t|dx + \int_0^L |w_x w_{xt}|dx + 2 \int_0^L |\theta w_t|dx \\
&\quad + \int_0^L \theta^2 dx + 2 \int_0^L |w_t(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\theta|dx \\
&\leq (\frac{1}{2\gamma} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + \frac{\varepsilon\gamma}{2} \int_0^L u^2 dx) + (\frac{\gamma}{2} \int_0^L w^2 dx + \frac{1}{2\gamma} \int_0^L w_t^2 dx) \\
&\quad + (\frac{\gamma}{2} \int_0^L w_x^2 dx + \frac{1}{2\gamma} \int_0^L w_{xt}^2 dx) \\
&\quad + (\gamma \int_0^L \theta^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^L w_t^2 dx) + 2 \int_0^L \theta^2 dx \\
&\quad + (\frac{1}{\gamma} \int_0^L w_t^2 dx + \gamma \int_0^L [(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\theta]^2 dx).
\end{aligned}$$

Agora usando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(t)| &\leq (\frac{\varepsilon}{2\gamma} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\varepsilon\gamma}{2} \int_0^L u^2 dx) + (\frac{C\gamma}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2\gamma} \int_0^L w_t^2 dx) + (\frac{C\gamma}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2\gamma} \int_0^L w_{xt}^2 dx) \\
&\quad + (\gamma \int_0^L \theta^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^L w_t^2 dx) + 2 \int_0^L \theta^2 dx \\
&\quad + (\frac{1}{\gamma} \int_0^L w_t^2 dx + \gamma \int_0^L [(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\theta]^2 dx).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Sabemos que $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : L^2(\Omega) \mapsto H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é um operador limitado e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, onde $\Omega = (0, L)$. Então

$$\left\| (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\theta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left\| (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1}\theta \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{5.6}$$

Usando (5.6) e as desigualdades

$$\int_0^L w_x^4 dx \leq C \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^4, \tag{5.7}$$

$$\int_0^L u_x^2 dx \leq C[E_\varepsilon(0) + \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L w_{xx}^2 dx], \tag{5.8}$$

as quais foram usadas na prova do Teorema 4.1, deduzimos de (5.5) a estimativa

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(t)| &\leq (C \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + C \int_0^L \varepsilon u_x^2 dx) + (C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx) \\
&\quad + (C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx) + (C \int_0^L \theta^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx) + 2 \int_0^L \theta^2 dx \\
&\leq C \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + C\varepsilon \int_0^L u_x^2 dx + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + C\varepsilon \int_0^L [u_x + (\frac{w_x^2}{2} + K_1 w) - (\frac{w_x^2}{2} + K_1 w)]^2 dx \\
&\quad + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + 2C\varepsilon \int_0^L (u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2 dx + 2C\varepsilon \int_0^L (\frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2 dx \\
&\quad + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + 2C\varepsilon \int_0^L (u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2 dx + [C\varepsilon \int_0^L \frac{1}{2} w_x^4 dx \\
&\quad + 2C\varepsilon \int_0^L (K_1 w)^2 dx + 2C\varepsilon \int_0^L w_x^2 K_1 w dx] \\
&\quad + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C[\int_0^L \{\varepsilon u_t^2 + \varepsilon(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2\} dx] + C\varepsilon(\int_0^L w_{xx}^2 dx)^2 \\
&\quad + C\varepsilon \int_0^L (K_1 w)^2 dx + C\varepsilon(\int_0^L w_x^4 dx + \int_0^L (K_1 w)^2 dx) \\
&\quad + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C[\int_0^L \{\varepsilon u_t^2 + \varepsilon(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2\} dx] + \varepsilon[C(\int_0^L w_{xx}^2 dx)^2 + C\|K_1\|_\infty^2 \int_0^L w_{xx}^2 dx] \\
&\quad + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C[\int_0^L \{\varepsilon u_t^2 + \varepsilon(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2\} dx] + C\varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_\infty^2]E_\varepsilon(t) \\
&\quad + [C \int_0^L w_{xx}^2 dx + C \int_0^L w_t^2 dx + C \int_0^L w_{xt}^2 dx + (2+C) \int_0^L \theta^2 dx] \\
&\leq C[\int_0^L (\varepsilon u_t^2 + \varepsilon(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w)^2 + w_{xx}^2 + w_t^2 + w_{xt}^2 + \theta^2) dx] + C\varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_\infty^2]E_\varepsilon(t) \\
&\leq CE_\varepsilon(t) + \varepsilon C[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_\infty^2]E(t) = C[1 + \varepsilon\{E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_\infty^2\}]E_\varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|H_\varepsilon(t)| \leq C[1 + \varepsilon\{E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_\infty^2\}]E_\varepsilon(t),$$

onde $C = C(\gamma) > 0$. O lema está demonstrado. ■

Lema 5.1.2 *Sob as condições do Teorema 3.3, então*

$$\begin{aligned} \frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq (1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}) \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + (\gamma - 1) \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx \\ &\quad + [-\frac{\mu_0}{2} + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2} + 2\gamma C \|K_1\|_{H^1}^2] \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx \\ &\quad + [\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2}(E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2) + 2\gamma C(1 + E_\varepsilon(0)) + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0)] \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\quad + (\frac{2}{\gamma} + 2\gamma C) \int_0^L \theta^2 dx + 2 \int_0^L \theta_x^2 dx, \end{aligned} \tag{5.9}$$

para qualquer $t \geq 0$ e qualquer $\gamma > 0$.

Demonstração: Usando as equações (1.1) obtemos as identidades

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \varepsilon u u_t dx &= \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx - \int_0^L \mu_0 (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w) u_x dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L u u_t dx \\ \frac{d}{dt} \int_0^L w w_t dx &= \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xx}^2 dx + \int_0^L w w_{xxt} dx - \int_0^L f(u, w) w_x dx \\ &\quad - \int_0^L g(u, w) w dx - \int_0^L \theta_{xx} w dx \\ \frac{d}{dt} \int_0^L w_x w_{xt} dx &= \int_0^L w_{xt}^2 dx - \int_0^L w w_{xxt} dx. \end{aligned}$$

As identidades acima implicam que

$$\begin{aligned} \frac{dF_\varepsilon}{dt} &= \varepsilon \int_0^L \frac{d}{dt} (u u_t) dx + \int_0^L \frac{d}{dt} (w w_t) dx + \int_0^L \frac{d}{dt} (w_x w_{xt}) dx \\ &= (\int_0^L \varepsilon u_t^2 dx - \int_0^L \mu_0 (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w) u_x dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L u u_t dx) \\ &\quad + (\int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xx}^2 dx - \int_0^L f(u, w) w_x dx - \int_0^L g(u, w) w dx - \int_0^L \theta_{xx} w dx) + \int_0^L w_{xt}^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\varepsilon}{dt} &= \left(\int_0^L \varepsilon u_t^2 dx - \int_0^L \mu_0 \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \right) u_x dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L u u_t dx \right) \\
&\quad + \left(\int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xx}^2 dx - \int_0^L \mu_0 w_x^2 \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_0^L \mu_0 K_1 w \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right) dx - \int_0^L \theta_{xx} w dx \right) + \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
\frac{dF_\varepsilon}{dt} &= \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx - \underbrace{\int_0^L \mu_0 \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \right) [u_x + w_x^2 + K_1 w] dx}_{I} - \varepsilon^\alpha \int_0^L u u_t dx \\
&\quad - \int_0^L w_{xx}^2 dx + \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L \theta_{xx} w dx + \int_0^L w_{xt}^2 dx.
\end{aligned}$$

Análise de I :

$$\begin{aligned}
I &= -\mu_0 \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right) (2u_x + w_x^2 + 2K_1 w) dx + \mu_0 \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right) (u_x + K_1 w) dx \\
&\leq -2\mu_0 \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right)^2 dx + \frac{\mu_0}{2} \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right)^2 dx + \frac{\mu_0}{2} \int_0^L (u_x + K_1 w)^2 dx \\
&\leq -\frac{3}{2}\mu_0 \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right)^2 dx + \frac{\mu_0}{2} \int_0^L \left(u_x + K_1 w + \frac{1}{2} w_x^2 - \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx \\
&\leq -\frac{3}{2}\mu_0 \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right)^2 dx + \mu_0 \int_0^L \left(u_x + K_1 w + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \mu_0 \int_0^L \frac{1}{4} w_x^4 dx \\
&\leq -\frac{\mu_0}{2} \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right)^2 dx + \mu_0 c_1 \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right)^2 \\
&\leq -\frac{\mu_0}{2} \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w \right)^2 dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx.
\end{aligned}$$

Substituindo obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx - \frac{\mu_0}{2} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w \right)^2 dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L u u_t dx \\
&\quad - \int_0^L w_{xx}^2 dx + \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L \theta_{xx} w dx + \int_0^L w_{xt}^2 dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L w_t \theta dx &= \int_0^L w_{tt} \theta dx + \int_0^L w_t \theta_t dx \\
&= \int_0^L w_{tt} \theta dx + \int_0^L w_t (\theta_{xx} + w_{xxt}) dx \\
&= \int_0^L w_{tt} \theta dx - \int_0^L w_{xt} \theta_x dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Também

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L -\frac{1}{2} \theta^2 dx &= - \int_0^L \theta \theta_t dx = - \int_0^L \theta (\theta_{xx} + w_{xxt}) dx \\
&= \int_0^L \theta_x^2 dx + \int_0^L \theta_x w_{xt} dx
\end{aligned} \tag{5.12}$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_0^L w_t \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta dx = \int_0^L w_{tt} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta dx + \int_0^L w_t \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta\right] dx.$$

Da equação (1.1)

$$\theta_t - \theta_{xx} - w_{xxt} = 0,$$

ou seja,

$$\theta_t = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\theta + w_t).$$

Logo,

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{d}{dt} \theta = -(\theta + w_t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta = -\theta - w_t.$$

Substituindo acima

$$\frac{d}{dt} \int_0^L w_t \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta dx = \int_0^L w_{tt} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta dx - \int_0^L w_t \theta dx - \int_0^L w_t^2 dx. \tag{5.13}$$

Somando as equações (5.11), (5.12) e (5.13) obtemos

$$\frac{dI_\varepsilon(t)}{dt} = - \int_0^L (w_t^2 + w_{xt}^2 + w_t \theta) dx + \int_0^L (\theta_x^2 + w_{tt} \theta + w_{tt} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \theta) dx. \tag{5.14}$$

Logo, de (5.10) e (5.14) deduzimos, para qualquer $\gamma > 0$, as desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{dH_\varepsilon}{dt} &= \frac{dF_\varepsilon(t)}{dt} + \frac{2dI_\varepsilon(t)}{dt} \\
\frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx - \frac{\mu_0}{2} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L uu_t dx \\
&\quad + \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xx}^2 dx - \int_0^L \theta_{xx} w dx + \int_0^L w_{xt}^2 dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad - 2 \int_0^L (w_t^2 + w_{xt}^2 + w_t \theta) dx + 2 \int_0^L [\theta_x^2 + w_{tt} \theta + w_{tt} (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta] dx \\
\frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L (\varepsilon u_t^2 + 2\theta_x^2) dx - \int_0^L \{w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \frac{\mu_0}{2} (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2\} dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad - \varepsilon^\alpha \int_0^L uu_t dx - \int_0^L w \theta_{xx} dx - 2 \int_0^L w_t \theta dx + 2 \int_0^L w_{tt} \theta dx + 2 \int_0^L w_{tt} (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta dx \\
\frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L (\varepsilon u_t^2 + 2\theta_x^2) dx - \int_0^L \{w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \frac{\mu_0}{2} (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2\} dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad + \varepsilon^\alpha \int_0^L |uu_t| dx + \int_0^L |w_{xx} \theta| dx + 2 \int_0^L |w_t \theta| dx + 2 \int_0^L |w_{tt} \theta| dx + 2 \int_0^L w_{tt} (-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta dx.
\end{aligned}$$

Assim, para qualquer $\gamma > 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L (\varepsilon u_t^2 + 2\theta_x^2) dx \\
&\quad - \int_0^L \{w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \frac{\mu_0}{2} (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2\} dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad + \varepsilon^\alpha (\frac{\gamma}{2} \int_0^L u^2 dx + \frac{1}{2\gamma} \int_0^L u_t^2 dx) \\
&\quad + (\frac{1}{2\gamma} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx) + (\gamma \int_0^L w_t^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^L \theta^2 dx) \\
&\quad + (\gamma \int_0^L w_{tt}^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^L \theta^2 dx) + (\gamma \int_0^L w_{tt}^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^L ([-\frac{\partial^2}{\partial x^2}]^{-1} \theta)^2 dx).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Precisamos obter estimativas para os termos

$$\int_0^L u^2 dx \text{ e } \int_0^L w_{tt}^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Poincaré e (5.7), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L u^2 dx &\leq C \int_0^L u_x^2 dx = C \int_0^L (u_x + (\frac{w_x^2}{2} + K_1 w) - (\frac{w_x^2}{2} + K_1 w))^2 dx \\
&\leq 2C \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + 2C \int_0^L (\frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx \\
&\leq 2C \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + C \int_0^L \frac{1}{2} w_x^4 dx + 2C \int_0^L (K_1 w)^2 dx + 2C \int_0^L w_x^2 K_1 w dx \\
&\leq 2C \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + C \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^4 + C \|K_1\|_{\infty}^2 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ C \int_0^L w_x^4 dx + C \int_0^L (K_1 w)^2 dx \\
&\leq 2C \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + C \|w_{xx}\|^4 + C \|K_1\|_{H^1}^2 \|w_{xx}\|^2 \\
&\leq C [\int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + (\int_0^L w_{xx}^2 dx)^2 + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L w_{xx}^2 dx].
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\int_0^L u^2 dx \leq C [\int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + (\int_0^L w_{xx}^2 dx)^2 + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L w_{xx}^2 dx]. \quad (5.16)$$

Agora, usando (1.1) podemos escrever

$$\begin{aligned}
(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) w_{tt} &= w_{tt} - w_{xxtt} = -w_{xxxx} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx} \\
w_{tt} &= (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} [-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx}].
\end{aligned}$$

Pelo lema 2.4.6 o operador

$$(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : H^{-2}(\Omega) \mapsto L^2(\Omega) \text{ é limitado}$$

e como

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_{tt}\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| (I - \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} [-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [f(u, w)]_x + g(u, w) - \theta_{xx}] \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \| -w_{xxxx} + [f(u, w)]_x - g(u, w) - \theta_{xx} \|_{H^{-2}(\Omega)} \\
&\leq C \{ \|w_{xxxx}\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|[f(u, w)]_x\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|g(u, w)\|_{H^{-2}(\Omega)} + \|\theta_{xx}\|_{H^{-2}(\Omega)} \} \\
&\leq C \{ \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)} + \|f(u, w)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(u, w)\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \}.
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e usando $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, pois $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \|w_{tt}\|^2 &\leq C[\|w_{xx}\|^2 + \|f(u, w)\|^2 + \|g(u, w)\|^2 + \|\theta\|^2] \\ &\leq C[\int_0^L w_{xx}^2 dx + \|w_x\|_\infty^2 \|u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w\|^2 + \|K_1\|_\infty^2 \|u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w\|^2 + \int_0^L \theta^2 dx] \\ &\leq C[\int_0^L w_{xx}^2 dx + \|w_{xx}\|^2 \left\|u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w\right\|^2 + \|K_1\|_{H^1}^2 \left\|u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w\right\|^2 + \int_0^L \theta^2 dx]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^L w_{tt}^2 dx &\leq C[\int_0^L w_{xx}^2 dx + (\int_0^L w_{xx}^2 dx)(\int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx) \\ &\quad + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx + \int_0^L \theta^2 dx]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Usando as estimativas (5.14) e (5.17) deduzimos de (5.15)

$$\begin{aligned} \frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L (\varepsilon u_t^2 + 2\theta_x^2) dx - \int_0^L \{w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \frac{\mu_0}{2}(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2\} dx \\ &\quad + (\frac{\varepsilon^\alpha \gamma}{2} \int_0^L u^2 dx + \frac{\varepsilon^\alpha}{\gamma} \int_0^L u_t^2 dx) + (\frac{1}{2\gamma} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx) \\ &\quad + (\gamma \int_0^L w_t^2 dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^L \theta^2 dx) + (\gamma \int_0^L w_{tt}^2 dx + \int_0^L \frac{\theta^2}{\gamma} dx) \\ &\quad + (\gamma \int_0^L w_{tt}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{\gamma} [(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta]^2 dx) + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ \frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \int_0^L (\varepsilon u_t^2 + 2\theta_x^2) dx - \int_0^L \{w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \frac{\mu_0}{2}(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2\} dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2} [\int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx + (\int_0^L w_{xx}^2 dx)^2 + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L w_{xx}^2 dx] + \frac{\varepsilon^\alpha}{2\gamma} \int_0^L u_t^2 dx \\ &\quad + (\frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma}) \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \gamma \int_0^L w_t^2 dx \\ &\quad + 2\gamma C [\int_0^L w_{xx}^2 dx + (\int_0^L w_{xx}^2 dx)(\int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx) \\ &\quad + \|K_1\|_{H^1}^2 \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx + \int_0^L \theta^2 dx] + \frac{1}{\gamma} \int_0^L [(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta]^2 dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

Lembrando que o operador $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1 \cap H^2$ é limitado e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, onde $\Omega = (0, L)$, então

$$\|(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta\|_{L^2}^2 \leq \|(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta\|_{H_0^1}^2 \leq \|\theta\|_{L^2}^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^L [(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \theta]^2 dx \leq \frac{1}{\gamma} \int_0^L \theta^2 dx.$$

Usando isto, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \{1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}\} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + (\gamma - 1) \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx - \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\quad + \{-\frac{\mu_0}{2} + 2\|K_1\|_{H^1}^2 \gamma C + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2}\} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\quad + 2\gamma C \int_0^L w_{xx}^2 (1 + E_\varepsilon(0)) dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{2}{\gamma} \int_0^L \theta^2 dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2} [\int_0^L w_{xx}^2 dx + \|K_1\|_{H^1}^2] \int_0^L w_{xx}^2 dx + 2\gamma C \int_0^L \theta^2 dx + 2 \int_0^L \theta_x^2 dx \\ \frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \{1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}\} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + (\gamma - 1) \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx \\ &\quad + \{-\frac{\mu_0}{2} + 2\gamma C \|K_1\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2}\} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\quad + 2\gamma C \int_0^L (1 + E_\varepsilon(0)) w_{xx}^2 dx + \int_0^L [(\frac{\gamma}{2} - 1) + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2} \{E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2\}] w_{xx}^2 dx \\ &\quad + \{2\gamma C + \frac{2}{\gamma}\} \int_0^L \theta^2 dx + 2 \int_0^L \theta_x^2 dx \\ \frac{dH_\varepsilon}{dt} &\leq \{1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}\} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx + (\gamma - 1) \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx \\ &\quad + \{-\frac{\mu_0}{2} + 2\gamma C \|K_1\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2}\} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + K_1 w)^2 dx \\ &\quad + [2\gamma C (1 + E_\varepsilon(0)) + (\frac{\gamma}{2} - 1) + \frac{\varepsilon^\alpha \gamma C}{2} \{E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2\} + \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0)] \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\quad + \{\frac{2}{\gamma} + 2\gamma C\} \int_0^L \theta^2 dx + 2 \int_0^L \theta_x^2 dx, \end{aligned}$$

que prova o Lema 5.1.2. ■

Lema 5.1.3 *Sob as asserções do Teorema 3.3, seja $\delta > 0, \varepsilon > 0$ e consideremos*

$$G_{\varepsilon, \delta}(t) = E_\varepsilon(t) + \delta H_\varepsilon(t).$$

Então, existe uma constante positiva $C = C(\delta)$, tal que

$$\frac{dG_{\varepsilon, \delta}(t)}{dt} \leq -C(\delta) E_\varepsilon(t), \quad (5.18)$$

para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração: Usando o Lema 5.1.2, deduzimos para qualquer $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dG_{\varepsilon,\delta}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}E_{\varepsilon}(t) + \delta \frac{d}{dt}H_{\varepsilon}(t) \\
&\leq - \int_0^L (\varepsilon^{\alpha} u_t^2 + \theta_x^2) dx + \delta \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}\right) \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx \right. \\
&\quad + \left(-\frac{\mu_0}{2} + \frac{\varepsilon^{\alpha}\gamma C}{2} + 2\gamma C \|K_1\|_{H^1}^2\right) \int_0^L \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + K_1 w\right)^2 dx \\
&\quad + (\gamma - 1) \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx + \left[\frac{\gamma}{2} - 1 + \varepsilon^{\alpha}\gamma C(E_{\varepsilon}(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)\right. \\
&\quad \left.+ 2\gamma C(1 + E_{\varepsilon}(0)) + \mu_0 c_1 E_{\varepsilon}(0)\right] \int_0^L w_{xx}^2 dx + \left(\frac{2}{\gamma} + 2\gamma C\right) \int_0^L \theta^2 dx + 2 \int_0^L \theta_x^2 dx \Big] \\
\frac{dG_{\varepsilon,\delta}(t)}{dt} &\leq -\{\varepsilon^{\alpha-1} - \delta[1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}]\} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx \\
&\quad - \delta(1 - \gamma) \int_0^L w_t^2 dx - \delta \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
&\quad - \delta\{\frac{\mu_0}{2} - C\gamma(1 + \|K_1\|_{H^1}^2)\} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w\right)^2 dx \\
&\quad - \delta\{(1 - \mu_0 c_1 E_{\varepsilon}(0)) - C\gamma[1 + E_{\varepsilon}(0) + \varepsilon^{\alpha}(E_{\varepsilon}(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)]\} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad + (2\delta - 1) \int_0^L \theta_x^2 dx + C\delta\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right) \int_0^L \theta^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Seja $D_{\varepsilon} = 1 + E_{\varepsilon}(0) + \varepsilon^{\alpha}(E_{\varepsilon}(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)$. Para qualquer $\lambda > 0$, escolha $\gamma = \lambda D_{\varepsilon}^{-1}$.

Logo,

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda D_{\varepsilon}^{-1}} + \lambda D_{\varepsilon}^{-1} < \frac{D_{\varepsilon}}{\lambda} + \lambda \text{ pois } D_{\varepsilon} > 1.$$

Portanto,

$$C\delta\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right) < C\delta\left(\frac{D_{\varepsilon}}{\lambda} + \lambda\right) \tag{5.20}$$

para qualquer $\delta > 0$ e $C > 0$. Usando a desigualdade de Poincaré, (5.20) e escolhendo $\delta < \frac{1}{2}$, segue que

$$(2\delta - 1) \int_0^L \theta_x^2 dx + \delta C\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right) \int_0^L \theta^2 dx \leq \frac{(2\delta - 1)}{L} \int_0^L \theta^2 dx + C\delta\left(\frac{D_{\varepsilon}}{\lambda} + \lambda\right) \int_0^L \theta^2 dx.$$

Assim, deduzimos de (5.19)

$$\begin{aligned}
\frac{dG_{\varepsilon,\delta}(t)}{dt} &\leq -\{\varepsilon^{\alpha-1} - \delta[1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}]\} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx \\
&- \delta\{1 - \lambda D_\varepsilon^{-1}\} \int_0^L w_t^2 dx - \delta \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
&- \delta\{\frac{\mu_0}{2} - C\lambda D_\varepsilon^{-1}(1 + \|K_1\|_{H^1}^2)\} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx \\
&- \delta\{(1 - \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0)) - C\lambda\} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&- [\frac{(1-2\delta)}{L} - \delta C(\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda)] \int_0^L \theta^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Como $0 < \varepsilon < 1$, segue que $\mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \leq \mu_0 c_1 E(0)$. Logo, $1 - \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \geq 1 - \mu_0 c_1 E(0)$. Assuma que $\mu_0 < \frac{1}{c_1 E(0)}$ e denote por $\tilde{C} = 1 - \mu_0 c_1 E(0)$. O termo

$$-\delta\{(1 - \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0)) - C\lambda\} \int_0^L w_{xx}^2 dx$$

pode ser estimado da seguinte forma:

$$1 - \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0) \geq 1 - \mu_0 c_1 E(0) = \tilde{C} > 0.$$

Logo,

$$[1 - \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0)] - C\lambda \geq \tilde{C} - \lambda C$$

e então

$$-\delta\{[1 - \mu_0 c_1 E_\varepsilon(0)] - C\lambda\} \int_0^L w_{xx}^2 dx \leq -\delta\{\tilde{C} - C\lambda\} \int_0^L w_{xx}^2 dx.$$

Portanto, substituindo em (5.21) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dG_{\varepsilon,\delta}(t)}{dt} &\leq -\{\varepsilon^{\alpha-1} - \delta[1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}]\} \int_0^L \varepsilon u_t^2 dx \\
&- \delta\{1 - \lambda D_\varepsilon^{-1}\} \int_0^L w_t^2 dx - \delta \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
&- \delta\{\frac{\mu_0}{2} - C\lambda D_\varepsilon^{-1}(1 + \|K_1\|_{H^1}^2)\} \int_0^L (u_x + \frac{1}{2}w_x^2 + K_1 w)^2 dx \\
&- \delta\{\tilde{C} - C\lambda\} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&- [\frac{(1-2\delta)}{L} - \delta C(\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda)] \int_0^L \theta^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Agora escolhemos λ e δ como segue:

(a) $\tilde{C} - C\lambda > 0$

(b) $1 - \lambda D_\varepsilon^{-1} > 0$

(c) $\frac{\mu_0}{2} - C\lambda D_\varepsilon^{-1}(1 + \|K_1\|_{H^1}^2) > 0$

(d) $\varepsilon^{\alpha-1} - \delta[1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}] > 0$

(e) $L^{-1}(1 - 2\delta) - \delta C(\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda) > 0$.

Claramente (a), (b) e (c) são satisfeitas se $0 < \lambda < \text{Min}\{\tilde{C}C^{-1}, 1, \frac{\mu_0}{2C[1+\|K_1\|_{H^1}^2]}\}$, pois $D_\varepsilon > 1$. Agora, mantemos λ fixo. Observe que para $0 < \varepsilon < 1$, $D_\varepsilon \leq C_0$ onde C_0 é uma constante positiva que depende só do dado inicial (independente de ε). Assim,

$$\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda \leq \frac{C_0}{\lambda} + \lambda.$$

Logo,

$$\frac{2}{L} + C(\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda) \leq \frac{2}{L} + C(\frac{C_0}{\lambda} + \lambda).$$

Se segue que para verificar (e) é suficiente escolher $\delta > 0$, tal que

$$0 < \delta < [2 + LC(\frac{C_0}{\lambda} + \lambda)]^{-1} \leq [2 + LC(\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda)]^{-1}.$$

Similarmente, como $D_\varepsilon \leq C_0$ e $0 < \varepsilon < 1$, então $2\lambda\varepsilon^{1-\alpha} + D_\varepsilon \leq 2\lambda + C_0$.

Conseqüentemente, do item (d) é suficiente escolher $\delta > 0$, tal que

$$\delta < \frac{2\lambda}{C_0 + 2\lambda} \leq \frac{2\lambda}{2\lambda\varepsilon^{1-\alpha} + D_\varepsilon} = \frac{2\gamma\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma + \varepsilon^{\alpha-1}}.$$

Assim consideramos

$$\delta < \text{Min}\{[2 + LC(\frac{C_0}{\lambda} + \lambda)]^{-1}, \frac{2\lambda}{C_0 + 2\lambda}\}$$

o que implica

$$\delta < \frac{2\lambda}{2\lambda + C_0} \leq \frac{2\gamma\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma + \varepsilon^{\alpha-1}} = \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\gamma}}.$$

Como $\gamma = \lambda D_\varepsilon^{-1}$, onde $D_\varepsilon = 1 + E_\varepsilon(0) + \varepsilon^\alpha(E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)$, se deduz que

$$\delta \leq \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}D_\varepsilon}{2\lambda}} \leq \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1 + \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\lambda}[1 + \varepsilon^\alpha(E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)]}. \quad (5.23)$$

Por outro lado, δ também deve satisfazer

$$\delta < [2 + LC(\frac{C_0}{\lambda} + \lambda)]^{-1} \leq [2 + LC(\frac{D_\varepsilon}{\lambda} + \lambda)]^{-1},$$

ou seja,

$$\delta \leq \frac{\lambda}{2\lambda + LCD_\varepsilon + \lambda^2 LC} \leq \frac{\lambda}{2\lambda + LC\lambda^2 + LC[1 + \varepsilon^\alpha(E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)]} \quad (5.24)$$

Observe que (5.23) e (5.24) são satisfeitas se escolhermos $\delta > 0$ da forma

$$\delta = \frac{\tilde{C}_1}{1 + \varepsilon^\alpha(E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)}$$

para alguma constante positiva $\tilde{C}_1$ (que depende de λ), mas independente de $0 < \varepsilon < 1$. Portanto, de (5.22) deduzimos que

$$\frac{dG_{\varepsilon,\delta}(t)}{dt} \leq -C(\delta)E_\varepsilon(t),$$

onde

$$C(\delta) = \frac{\tilde{C}_2}{1 + \varepsilon^\alpha(E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2)} > 0$$

com $\tilde{C}_2$ dependente de λ mas independente de $0 < \varepsilon < 1$. Isto prova o Lema. $\blacksquare$

Teorema 5.1 *Assuma as hipóteses do Teorema 3.3 e $\mu_0 < [c_1 E(0)]^{-1}$. Então, existem constantes positivas C e β , tais que*

$$E_\varepsilon(t) \leq CE_\varepsilon(0) \exp\left(\frac{-\beta t}{1 + \varepsilon^\alpha[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2]}\right), \quad (5.25)$$

para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração: De fato,

$$G_{\varepsilon,\delta}(t) = E_\varepsilon(t) + \delta H_\varepsilon(t).$$

Então, pelo Lema 5.1.1

$$|G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t)| = \delta |H_\varepsilon(t)| \leq \delta C \{1 + \varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2]\} E_\varepsilon(t).$$

Assim,

$$\underbrace{(1 - C\delta\{1 + \varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2]\})}_{C_1} E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq \underbrace{(1 + C\delta\{1 + \varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2]\})}_{C_2} E_\varepsilon(t).$$

Escolhendo δ , suficientemente pequeno, tal que $1 - C\delta\{1 + \varepsilon[E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2]\} > 0$ temos que

$$C_1 E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq C_2 E_\varepsilon(t),$$

onde $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$.

Isto implica que

$$-C_1 E_\varepsilon(t) \geq -G_{\varepsilon,\delta}(t) \geq -C_2 E_\varepsilon(t).$$

Logo, substituindo isto e usando o Lema 5.1.3 obtemos

$$\frac{d}{dt} G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq -C(\delta) E_\varepsilon(t) \leq -\omega G_{\varepsilon,\delta}(t),$$

onde $\omega = \frac{C(\delta)}{C_2} > 0$.

Logo,

$$\left(\frac{d}{dt} G_{\varepsilon,\delta}(t)\right) e^{\omega t} + \omega e^{\omega t} G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} (G_{\varepsilon,\delta}(t) e^{\omega t}) \leq 0.$$

Daí, segue que

$$G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(0) e^{-\omega t}.$$

Logo, obtemos

$$C_1 E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq C_2 E_\varepsilon(0) e^{-\omega t}$$

e, conseqüentemente,

$$E_\varepsilon(t) \leq C E_\varepsilon(0) e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0,$$

sendo $C = \frac{C_2}{C_1} > 0$.

Portanto,

$$E_\varepsilon(t) \leq C E_\varepsilon(0) \exp\left(-\frac{\beta t}{1 + \varepsilon^\alpha [E_\varepsilon(0) + \|K_1\|_{H^1}^2]}\right) \quad \forall t \geq 0,$$

e assim, concluímos o Teorema. ■

Energia do Sistema Limite: Multiplicando as equações do sistema (4.1) por Z_t e ϕ , respectivamente, integrando de 0 a L e somando-se, obtemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^L Z_{tt} Z_t dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^L Z_{xx} Z_{xxt} dx}_{I_2} + \underbrace{\int_0^L \phi \phi_t dx}_{I_3} + \underbrace{\int_0^L Z_{xt} Z_{xtt} dx}_{I_4} \\ & + \underbrace{\int_0^L H(t) Z_x Z_{xt} dx + \int_0^L K_1(x) H(t) Z_t dx}_{I_5} = - \int_0^L \phi_x^2 dx. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Usando integração por partes, formalmente deduzimos que

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |Z_t|^2 dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |Z_{xx}|^2 dx,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi|^2 dx,$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |Z_{xt}|^2 dx$$

e

$$I_5 = \int_0^L H(t) [Z_x Z_{xt} + K_1(x) Z_t] dx = H(t) \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{1}{2} Z_x^2 + K_1(x) Z \right] dx = \frac{\mu_0}{2L} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \left(\frac{1}{2} Z_x^2 + K_1(x) Z \right) dx \right]^2.$$

Agora, substituindo estes valores na identidade (5.26), obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (Z_t^2 + Z_{xx}^2 + Z_{xt}^2 + \phi^2) dx + \frac{\mu_0}{2L} \left(\frac{1}{2} \int_0^L Z_x^2 dx + \int_0^L K_1(x) Z dx \right)^2 = - \int_0^L \phi_x^2 dx.$$

Assim, a energia total do sistema (4.1) é dada por

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (Z_t^2 + Z_{xx}^2 + Z_{xt}^2 + \phi^2) dx + \frac{\mu_0}{L} \left(\frac{1}{2} \int_0^L Z_x^2 dx + \int_0^L K_1(x) Z dx \right)^2$$

e segue que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = - \int_0^L \phi_x^2 dx. \quad (5.27)$$

Por outro lado, aplicando a Proposição 2.1 (iii) em (4.4) obtemos

$$\{\|\sqrt{\varepsilon} u_t\|\}_{\varepsilon>0} \text{ é limitado e } \|\xi\| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\sqrt{\varepsilon} u_t\|. \quad (5.28)$$

Logo, da semicontinuidade inferior da norma L^2 , (5.25), (5.28), $\alpha > 0$ e das convergências (4.5), (4.6), (4.7) se deduz que

$$\mathcal{L}(t) \leq \int_0^L \xi^2 dx + \mathcal{L}(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(t) \leq C \mathcal{L}(0) \exp(-\beta t).$$

Assim, $\mathcal{L}$ decai exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$. O caso $\alpha = 0$ é especial (ver [17] seção 5).

Referências

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics; a series of monographs and textbooks v.65. Academic Press (1975)
- [2] AGMON, S and DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math. 17(1964), 35-92.
- [3] BRÉZIS, Haïm. *Analise Fonctionnelle. Théorie et applications*. DUNOD, Paris (1999).
- [4] CASTRO, J. A. A. *Curso de teoria da medida. 2. ed.* Rio de Janeiro: IMPA, (Projeto Euclides).2008
- [5] CIARLET, PH. *Mathematical Elasticity, Volumen III, Theory of shells, Studies in Mathematics and its Applications*, **29** (2000), xxvii-xxxi.
- [6] GOMES, A.M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*, Instituto de Matematica-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [7] HILLE, E. , PHILLIPS, R. S. *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXXI (1957)
- [8] LIONS, J.L. , MAGENES E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Vol I, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [9] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [10] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A. *Weak Solutions for a Nonlinear Dispersive Equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 59, N° 3, pp 432 - 441 (1977).

- [11] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos, N° 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).
- [12] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A. *Espaços de Sobolev (Introdução aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (1999).
- [13] MUNCH, A. & PAZOTO A. *Boundary stabilization of a nonlinear shallow beam: theory and numerical approximation*, Discret Contin. Dyn. Syst. Ser. B 10,1(2008),197-219
- [14] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [15] PERLA, G. PAZOTO, A. & ZUAZUA E. *Stabilization of Berger-Timoshenko's equation as limit of the uniform stabilization of the von Karman system of beams and plates*, Math. Modelling and Num. Analysis, M2N, **36**(2002) no.4,657-691.
- [16] PERLA, G. & SEJJE J. *On the one-dimensional version of the dynamical Marguerre-Vlasov system with thermal effects*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2009) pp. 536-547.
- [17] PERLA, G. & ZUAZUA E. *On a one-dimensional version of the dynamical Marguerre-Vlasov system*, Bulletin of the Brazilian Math. Society, **32**(2001)no.3,303-319
- [18] SIMON, J. *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* . Ann. Mat. Pura. Appl.(4) **CXLVI** (1987)65 – 96.
- [19] VOROVICH, I. *Nonlinear Theory of Shallow Shells*, Applied Mathematical Sciences, **133**, Springer-Verlag, New York, 1999.