

O Lema de Darboux e aplicações

Marcelo Moreira da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Severino Collier Coutinho

Rio de Janeiro
Agosto de 2011

O Lema de Darboux e aplicações

Marcelo Moreira da Silva

Orientador: Severino Collier Coutinho

O artigo “Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré” do matemático Jean Gaston Darboux, introduziu em 1878 uma nova maneira de se estudar os campos vetoriais polinomiais. Entre os vários resultados importantes demonstrados neste artigo, temos o *Lema de Darboux*, cujo enunciado original infelizmente estava errado. Além de enunciarmos corretamente este lema, apresentamos nesta dissertação duas demonstrações. A primeira segue as ideias de Darboux e é feita de uma maneira elementar, usando as propriedades do índice de interseção entre curvas algébricas planas. A segunda é um pouco mais sofisticada, pois utiliza sequências exatas e resultados sobre as dimensões dos espaços vetoriais que aparecem nestas sequências. Na parte final do nosso trabalho ilustramos a utilidade do *Lema de Darboux* apresentando algumas aplicações. Mostramos, por exemplo, que uma solução algébrica não-linear e sem pontos múltiplos de um campo vetorial polinomial tem grau menor ou igual ao grau do campo mais um. Numa outra aplicação, provamos que um campo quadrático polinomial afim real não tem cúbricas como ciclos limites algébricos. Por fim, determinamos o número de singularidades, com as suas respectivas multiplicidades, de um campo vetorial homogêneo com uma quantidade finita de pontos singulares.

Palavras-chave: índice de interseção, campo vetorial polinomial, singularidade, curva algébrica invariante.

The Darboux Lemma and applications

Marcelo Moreira da Silva

Supervisor: Severino Collier Coutinho

The article “Mémoire sur les équations du différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré” by the French mathematician Jean Gaston Darboux, introduced in 1878 a new way to study polynomial vector fields. Among several important results presented in this article, we have the *Darboux lemma*, whose original statement was unfortunately wrong. Besides correcting the statement of this lemma, we present two proofs in this work. The first follows the ideas of Darboux and is quite elementary, using only properties of the intersection index of plane algebraic curves. The second is a bit more sophisticated because it uses exact sequences and results on the dimensions of the vector spaces that appear in these sequences. In the final part of our work, we illustrate the power of the *Darboux lemma* by presenting some applications. We show, for example, that a non-linear algebraic solution without multiple points of a polynomial vector field has degree less than or equal to the degree of the field plus one. In another application, we prove that a real affine quadratic polynomial vector field has no cubic as algebraic limit cycle. Finally, we determine the number of singularities, with their respective multiplicities, of a homogeneous vector field with a finite number of singular points.

Keywords: intersection indice, polynomial vector field, singularity, invariant algebraic curve.

Sumário

1	Preliminares	4
1.1	Equações diferenciais	4
1.2	Índice de Interseção	9
1.3	Lema de Darboux	12
2	Visão local	15
3	Visão global	24
4	Aplicações	35

Introdução

O estudo das equações diferenciais ordinárias começa com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII. A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explícita. A partir do final do século XIX, cresceu o interesse nas questões qualitativas, que são bastante importantes por seu significado físico intrínseco. Toma-se a atitude de retirar das equações diferenciais informações sobre o comportamento de suas soluções. Foi nessa fase que se iniciou a teoria algébrica das equações diferenciais no plano, com as ideias de Darboux [7], Autonne [1], Painlevé [11] e Poincaré [12]. O ponto de partida foi o famoso trabalho de Darboux de 1878, intitulado “Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré” [7].

Nesse artigo, Darboux demonstrou que, se um sistema de equações diferenciais tem um número suficientemente grande de soluções algébricas, então o sistema possui uma integral primeira.

Motivado por este artigo, Poincaré enunciou pela primeira vez o seguinte problema (ver [12], pág 35): *achar um método para encontrar um limitante superior $N(m)$ para o grau das soluções algébricas para um sistema polinomial fixado de grau $m \geq 2$.*

Mesmo assim, resultados relacionados a esse problema foram obtidos por Cerveau e Lins Neto [3], em 1991, que mostraram que, se uma solução algébrica contém somente pontos singulares do tipo nó, então $N(m) \leq m + 2$. Já em 1994, Carnicer [2] provou que se o sistema tem singularidades não dicríticas então $N(m) \leq m + 2$.

Os sistemas de equações diferenciais usados nesses resultados são tratados no ambiente utilizado pelo Darboux que foi o plano complexo projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, como explicaremos no próximo capítulo.

Darboux ainda mostrou que o número de pontos singulares em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de uma equação diferencial de grau m no espaço projetivo é $m^2 + m + 1$ (contando com suas multiplicidades). Para mostrar esse resultado e outros da mesma importância, ele enunciou o seguinte Lema:

Podemos relacionar esta pesquisa a um lema nos seis polinômios A, A', B, B', C, C' , de graus l, l', m, m', n, n' satisfazendo a seguinte identidade

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

e é evidente que os graus dos produtos AA' , BB' e CC' são iguais.

Portanto temos que

$$l + l' = m + m' = n + n' = r.$$

Então, a soma do número de pontos comuns entre as três curvas

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$

e o número de pontos comuns entre as três curvas

$$A' = 0 \quad B' = 0 \quad C' = 0$$

é igual a

$$\frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Vamos chamar esse resultado de *Lema de Darboux*.

Contudo o enunciado original infelizmente estava errado. Em particular, Darboux peca pela ausência de uma hipótese (nenhum zero em comum). Depois de mais de 80 anos, Jouanolou mostrou que o resultado de Darboux estava errado, e o demonstrou corretamente no seu livro [9], apêndice, pág 183. Mas a sua prova está longe ser elementar, pois utiliza classes de Chern.

No intuito de provar o *Lema de Darboux* de uma forma mais elementar, explorar outro tipo de demonstração e ilustrar a utilidade do resultado com aplicações, Chavarriga, Llibre e Ollagnier escreveram o artigo [5] “On a result of Darboux” em que se baseia esta dissertação. Nosso trabalho é dividido em cinco capítulos.

O Capítulo 1 está dividido em três seções. Em uma seção preliminar vamos definir a maioria dos conceitos empregados nesse capítulo e dar uma visão geral dos conceitos básicos da teoria algébrica das equações diferenciais. Na outra, introduziremos a teoria básica do índice de interseção em curvas planas. Na última seção, enunciaremos de forma correta o *Lema de Darboux*, deixando claro algumas notações.

No Capítulo 2 demonstraremos o *Lema de Darboux* de uma forma mais elementar. Nessa prova utilizam-se principalmente as propriedades do índice de interseção e as relações de primalidade entre os polinômios.

No Capítulo 3 faremos outra demonstração, menos elementar que a do capítulo anterior, utilizando a multiplicidade total. Começaremos provando um resultado relativo a um ideal com quantidade finita de zeros e a multiplicidade total, que será útil na prova do Lema. Essa prova utiliza-se também dos resultados de sequências exatas e as dimensões dos espaços vetoriais inseridos nestas sequências. Com essa maquinaria, prova-se o resultado de que os seis polinômios do *Lema de Darboux*, com as mesmas hipóteses originais, têm a relação de que a soma do número de pontos comuns das curvas A , B e C com o número de pontos comuns das curvas A' , B' e C' é maior ou igual que $\frac{lmn+l'm'n'}{r}$.

No Capítulo 4 apresentaremos as seguintes aplicações do *Lema de Darboux*:

- Seja $[L, M, N]$ um campo vetorial polinomial homogêneo de grau m com uma quantidade finita de pontos singulares. Então o número de pontos singulares deste campo

campo contando com as multiplicidades é

$$\sum_P I(P, (ZM - YN) \cap (XN - ZL) \cap (YL - XM)) = m^2 + m + 1.$$

- Seja $\mathcal{X} = [A, B, C]$ um campo vetorial polinomial homogêneo em $\mathbb{S}^2$ de grau m . Se $\mathcal{X}$ tem uma quantidade finita de singularidades em $\mathbb{S}^2$, então $\mathcal{X}$ tem no máximo $2(m^2 - m + 1)$ singularidades em $\mathbb{S}^2$.
- Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica de grau $r \geq 1$ sem pontos múltiplos de um campo vetorial polinomial afim $\mathcal{X}$ de grau m . Se a homogeneização de f não tem pontos múltiplos, então $r \leq m + 1$.
- Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica com grau r de um campo vetorial polinomial afim

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

de grau m e com cofator k não nulo. Suponhamos que Z não é um fator comum de $rA - XK$, $rB - YK$, ZK onde A , B e K são as respectivas homogeneizações de a , b e k . Seja a curva F homogeneização de f , e suponha que todos os seus pontos múltiplos são do tipo nó. Então $r \leq 2m$. Mais ainda, Se $r = 2m$ então o campo $\mathcal{X}$ tem uma integral primeira racional.

- Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica com grau 3 de um campo vetorial polinomial afim real

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

de grau 2 e com cofator k não nulo. Suponhamos que Z não é um fator comum de $rA - XK$, $rB - YK$, ZK onde A , B e K são as respectivas homogeneizações de a , b e k . Então o campo $\mathcal{X}$ não tem ciclos limites algébricos de grau 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as principais definições que usaremos no decorrer do nosso trabalho. Dividimos o capítulo em três seções: a teoria algébrica básica de equações diferenciais no plano, a teoria de índice de interseção de curvas algébricas planas e o *Lema de Darboux*. Também demonstraremos alguns resultados que serão utilizados nos próximos capítulos.

1.1 Equações diferenciais

O *plano complexo projetivo* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é o conjunto em que cada ponto representa uma das retas que passam pela origem $[0, 0, 0]$ em $\mathbb{C}^3$. Esse conjunto pode ser descrito como um conjunto de classes de equivalência em $\mathbb{C}^3 \setminus \{[0, 0, 0]\}$, onde consideramos equivalentes todos os pontos que estão situados sobre uma mesma reta que passa pela origem. Assim,

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{[0, 0, 0]\}}{\sim}$$

onde

$$[X, Y, Z] \sim [X', Y', Z'] \Leftrightarrow \text{existe algum } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } \alpha[X, Y, Z] = [X', Y', Z'].$$

Denotamos a classe de equivalência de $[X, Y, Z] \neq [0, 0, 0]$ por $[X : Y : Z]$, que são chamadas de *coordenadas homogêneas* do ponto em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ correspondente à reta que passa por $[0, 0, 0]$ e $[X, Y, Z]$. Temos então que

$$[X : Y : Z] = [\alpha X : \alpha Y : \alpha Z] \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

A equação diferencial de primeira ordem no plano complexo projetivo é a expressão

$$(ZM - YN)dX + (XN - ZL)dY + (YL - XM)dZ = 0 \quad (1.1)$$

onde L , M e N são polinômios homogêneos de grau m em $\mathbb{C}[x, y, z]$, sem fator em comum.

Consideramos uma forma diferencial complexa de grau 1 ou 1-forma diferencial como uma aplicação ρ definida num aberto $U \subset \mathbb{C}^3$, que a cada ponto $P \in U$ associa uma função $\mathbb{C}$ -linear $\rho(P): \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$. Em especial, usaremos a seguinte 1-forma homogênea

$$\rho = AdX + BdY + CdZ$$

onde A , B e C são polinômios homogêneos de grau $m + 1$ em $\mathbb{C}[x, y, z]$, sem fator em comum. Dizemos que essa 1-forma homogênea ρ é projetiva se $AX + BY + CZ = 0$.

Com essa condição satisfeita, mostraremos a existência de três polinômios homogêneos L , M e N de grau m tais que $A = ZM - YN$, $B = XN - ZL$ e $C = YL - XM$. Sejam

$$A(X, Y, Z) = ZA_1(X, Y, Z) + T_1(X, Y) \quad B(X, Y, Z) = ZB_1(X, Y, Z) + T_2(X, Y).$$

Assim, A_1 e B_1 são polinômios homogêneos de grau m . Além disso, T_1 é um polinômio homogêneo de grau $m + 1$ sem a variável Z ou nulo, e o mesmo vale para T_2 . Substituindo as igualdades acima na equação $AX + BY + CZ = 0$, obtemos

$$ZA_1X + T_1X + ZB_1Y + T_2Y + ZC = 0.$$

Desse modo, temos que

$$Z(A_1X + B_1Y + C) = -T_1X - T_2Y.$$

Observamos que o polinômio $-T_1X - T_2Y$ não tem a variável Z , e pela igualdade acima, concluimos que $-T_1X - T_2Y = 0$. Então X divide T_2 , pois, $-T_1X = T_2Y$. Portanto $T_2 = XN$, para algum polinômio homogêneo N de grau m , implicando que $-T_1 = YN$. Sabendo-se que $-T_1X - T_2Y = 0$, também temos que $A_1X + B_1Y + C = 0$. Por fim, fazendo as respectivas substituições, chegamos a

$$A = ZA_1 - YN \quad B = ZB_1 + XN \quad C = -A_1X - B_1Y.$$

As igualdades desejadas seguem se tomarmos $M = A_1$ e $L = -B_1$.

Equivalentemente quando existem três polinômios homogêneos L , M e N de grau m satisfazendo

$$A = ZM - YN \quad B = XN - ZL \quad C = YL - XM,$$

obtemos $AX + BY + CZ = 0$. Então podemos escrever

$$\rho = \begin{vmatrix} L & M & N \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix};$$

isto é, $\rho = L(YdZ - ZdY) + M(ZdX - XdZ) + N(XdY - YdX)$.

A tripla $[L, M, N]$ pode ser pensada como um *campo de vetores* em $\mathbb{C}^3$ de grau m associado à 1-forma projetiva ρ , isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}: \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ P &\mapsto (L(P), M(P), N(P)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

A forma projetiva ρ de grau 1 define uma equação diferencial em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ da seguinte maneira

$$AdX + BdY + CdZ = 0.$$

Caso exista algum ponto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tal que $A(P) = B(P) = C(P) = 0$, então chamamos P de *ponto singular* da 1-forma projetiva $\rho = AdX + BdY + CdZ$. Em outras palavras, $P = [p_0, p_1, p_2]$ é ponto singular da equação diferencial (1.1) quando satisfaz o sistema

$$ZM - YN = 0 \quad XN - ZL = 0 \quad YL - XM = 0.$$

Seja, agora, um *campo vetorial polinomial afim* $\mathcal{X}$ em $\mathbb{C}^2$, isto é,

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.3)$$

onde a e b são polinômios complexos em duas variáveis, sem componentes em comum. Definimos o *grau* do campo $\mathcal{X}$ como o máximo dos graus de a e b . Supomos que o campo vetorial polinomial $\mathcal{X}$ tem grau m , podemos associar a $\mathcal{X}$ um campo projetivo $\mathcal{X}^*$. Para isto, basta aplicar o método de homogeneização ao campo $\mathcal{X}$. Isso consiste em fazer a seguinte operação:

$$\begin{aligned} A(X, Y, Z) &= Z^m a\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ B(X, Y, Z) &= Z^m b\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right). \\ C(X, Y, Z) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Assim, definimos

$$\mathcal{X}^* = A \frac{\partial}{\partial X} + B \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Seja um polinômio f em $\mathbb{C}[x, y]$, não nulo. A curva algébrica $f = 0$ é uma *curva algébrica invariante* do campo (1.3), se existir um polinômio $k \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$\mathcal{X}f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = kf. \quad (1.4)$$

O polinômio k é chamado de *cofator* da curva algébrica invariante $f = 0$. Note que, pelo campo (1.3) ter grau m , qualquer cofator não nulo tem no máximo grau $m - 1$. Se f é uma curva algébrica invariante e também irredutível então denominamos f de *solução algébrica* do sistema (1.3).

Nos pontos da curva algébrica $f = 0$, o gradiente $[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}]$ de f é ortogonal ao campo vetorial $\mathcal{X} = [a, b]$ (ver (1.4)). Assim para todos os ponto de $f = 0$, o campo vetorial $\mathcal{X}$ é tangente a curva $f = 0$. Então a curva $f = 0$ é formada por soluções do campo vetorial polinomial $\mathcal{X}$.

Do mesmo modo que fizemos com o campo vetorial polinomial $\mathcal{X}$ afim, podemos homogeneizar a curva algébrica invariante f do campo $\mathcal{X}$ de grau m . Suponhamos que f tem grau r , assim

$$F(X, Y, Z) = Z^r f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

Da mesma maneira fazemos com o seu cofator k ,

$$K(X, Y, Z) = Z^{m-1}k\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

Uma pergunta natural é se a curva F continuaria sendo invariante pelo campo $\mathcal{X}^*$. De fato, homogeneizando as derivadas parciais de F em relação a X e a Y , temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial X} &= \frac{Z^r}{Z} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \text{ e} \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= \frac{Z^r}{Z} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).\end{aligned}$$

Fazendo os produtos $A \frac{\partial F}{\partial X}$ e $B \frac{\partial F}{\partial Y}$, obtemos

$$\begin{aligned}A \frac{\partial F}{\partial X} &= Z^m a\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) Z^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \text{ e} \\ B \frac{\partial F}{\partial Y} &= Z^m b\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) Z^{r-1} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).\end{aligned}$$

Assim, somando as duas equações acima,

$$A \frac{\partial F}{\partial X} + B \frac{\partial F}{\partial Y} = Z^m Z^{r-1} k\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = KF,$$

onde $C \equiv 0$. Para completar os conceitos sobre a curva algébrica invariante F do campo $\mathcal{X}^*$, mostraremos a seguinte proposição:

Proposição 1.1. *Seja $f(x, y) = 0$ uma curva algébrica invariante com grau r de um campo vetorial polinomial afim*

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

de grau m e com cofator k não nulo. Se Z não é um fator comum de $rA - XK$ e de $rB - YK$ então as curvas $rA - XK$, $rB - YK$, ZK não têm componente em comum, onde A , B e K são as respectivas homogeneizações de a , b e k .

Demonstração. Considere o campo vetorial polinomial homogêneo de grau m ,

$$\mathcal{X}^* = A \frac{\partial}{\partial X} + B \frac{\partial}{\partial Y},$$

que é $\mathcal{X}$ homogeneizado. Seja F a curva algébrica f homogeneizada. Como já vimos que F é uma curva algébrica invariante por $\mathcal{X}^*$ então

$$\mathcal{X}^* F = A \frac{\partial F}{\partial X} + B \frac{\partial F}{\partial Y} = KF.$$

O próximo passo é aplicar o Teorema de Euler à curva algébrica F de grau r , o que resulta na seguinte expressão:

$$F = \frac{X}{r} \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{Y}{r} \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{Z}{r} \frac{\partial F}{\partial Z}.$$

Substituindo em $\mathcal{X}^*F = KF$, temos que

$$(rA - KX)\frac{\partial F}{\partial X} + (rB - KY)\frac{\partial F}{\partial Y} - KZ\frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

O objetivo da demonstração é mostrar que o conjunto

$$V = \{P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid rA(P) - p_0K(P) = rB(P) - p_1K(P) = p_2K(P) = 0\}$$

é finito. Tome um ponto P pertencente a esse conjunto. Por definição, P satisfaz

$$rA(P) = p_0K(P), \quad rB(P) = p_1K(P), \quad p_2K(P) = 0.$$

Pela última igualdade acima, temos que $p_2 = 0$ ou $K(P) = 0$.

Suponha que $p_2 \neq 0$, ou seja, consideramos $p_2 = 1$. Então $K(P) = 0$, implicando que $A(P) = a(p_0, p_1) = 0$ e $B(P) = b(p_0, p_1) = 0$. Por hipótese, a quantidade de pontos do conjunto

$$\{[p_0, p_1] \in \mathbb{C}^2 \mid a(p_0, p_1) = b(p_0, p_1) = 0\}$$

é finita. Logo a quantidade de pontos $P = [p_0 : p_1 : 1]$ é finita.

Para o próximo caso, vamos escrever

$$A(X, Y, Z) = a_m(X, Y) + \cdots + a_1(X, Y)Z^{m-1} + a_0Z^m,$$

onde a_i é um polinômio homogêneo de grau i nas variáveis X e Y . Analogamente,

$$\begin{aligned} B(X, Y, Z) &= b_m(X, Y) + \cdots + b_1(X, Y)Z^{m-1} + b_0Z^m \\ K(X, Y, Z) &= k_{m-1}(X, Y) + \cdots + k_1(X, Y)Z^{m-2} + k_0Z^{m-1}. \end{aligned}$$

Se $ra_m(X, Y) = Xk_{m-1}(X, Y)$ e $rb_m(X, Y) = Yk_{m-1}(X, Y)$ então

$$rA - XK = ra_m + Zr(a_{m-1} + \cdots + a_0Z^{m-1}) - Xk_{m-1} - ZX(k_{m-2} + \cdots + k_0Z^{m-2}) = ZC_1$$

e analogamente $rB - YK = ZC_2$, onde C_1 e C_2 são polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. Portanto, observamos que

$$ZC_1\frac{\partial F}{\partial X} + ZC_2\frac{\partial F}{\partial Y} - ZK\frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

O que contradiz a hipótese de que Z não é fator comum das curvas $rA - XK$, $rB - YK$, ZK .

Portanto, $ra_m(X, Y) \neq Xk_{m-1}(X, Y)$ ou $rb_m(X, Y) \neq Yk_{m-1}(X, Y)$. Assim as expressões $rA(X, Y, 0) - XK(X, Y, 0)$ e $rB(X, Y, 0) - YK(X, Y, 0)$ não são identicamente nulas.

Resta analisar o caso $p_2 = 0$. Consideramos o sistema

$$\begin{aligned} rA(p_0, p_1, 0) - p_0K(p_0, p_1, 0) &= 0 \\ rB(p_0, p_1, 0) - p_1K(p_0, p_1, 0) &= 0. \end{aligned}$$

de grau m . Sem perda de generalidade, suponha que $p_1 \neq 0$. Assim, observamos que

$$rA(p_0, p_1, 0) - p_0K(p_0, p_1, 0) = p_1^m(rA(\frac{p_0}{p_1}, 1, 0) - \frac{p_0}{p_1}K(\frac{p_0}{p_1}, 1, 0)) = 0.$$

Denotando $t = \frac{p_0}{p_1}$, a expressão acima se transforma em um polinômio $rA(t, 1, 0) - tK(t, 1, 0) = 0$ de grau m na variável t . Analogamente fazemos para $rB(p_0, p_1, 0) - p_1K(p_0, p_1, 0) = 0$. Logo temos uma quantidade finita de pontos da forma $[t : 1 : 0]$ no conjunto V .

Se nos casos $p_2 = 0$ e $p_2 \neq 0$ mostramos que o conjunto V é finito então as curvas $rA - XK$, $rB - YK$, ZK não têm componente em comum. $\square$

Finalmente, dizemos que o campo (1.3) é integrável em um conjunto aberto U de $\mathbb{C}^2$ se existir uma função holomorfa não constante $G: U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, chamada de *integral primeira* do campo (1.3) em U , que é constante ao longo das curvas soluções contidas em U . Assim, G é uma integral primeira do campo (1.3) se, e somente se,

$$\mathcal{X}(G) = a \frac{\partial G}{\partial x} + b \frac{\partial G}{\partial y} \equiv 0.$$

1.2 Índice de Interseção

Temos vários caminhos para definir o conceito de multiplicidade de interseção de curvas algébricas em um ponto: via resultantes de polinômios homogêneos em três variáveis sobre o corpo complexo (ver [15], pág 59), via anel local (ver [8], pág 36), etc. Nesse texto, usaremos a definição com anel local.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Sejam $A_1, \dots, A_m$ polinômios em várias variáveis, com coeficientes em $\mathbb{K}$. Denotamos o ideal homogêneo gerado por eles por $(A_1, \dots, A_m)$. Resumiremos a teoria básica usada para definir a *multiplicidade* ou *índice de interseção* entre curvas algébricas planas em um ponto. Para isso, trabalharemos sobre o anel de polinômios $\mathbb{K}[x, y]$.

Seja S um conjunto qualquer de polinômios. Chamamos

$$V(S) = \{P \in \mathbb{K}^2 \mid A(P) = 0 \ \forall A \in S\}$$

de conjunto algébrico. Dizemos que $V = V(S)$ é redutível se $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são conjuntos algébricos, e $V_i \neq V$, $i = 1, 2$. Caso contrário, V é irredutível, que chamamos também de variedade. Temos que (ver [8], Proposição 1, pág 7): o conjunto algébrico V é irredutível se e somente se $\mathcal{I}(V)$ é um ideal primo.

Seja $A \in \mathbb{K}[x, y]$ irredutível. Como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, temos que $V(A)$ é um conjunto infinito em $\mathbb{K}^2$ então $V(A)$ é uma variedade e $\mathcal{I}(V(A)) = (A)$. A prova pode ser vista em [8], Corolário 1, pág 9.

Sabendo que (A) é um ideal primo, onde A é um polinômio irredutível, temos que o quociente $\mathbb{K}[x, y]/(A)$ é um domínio integral que chamamos de $\Gamma(A)$ e cujo corpo quociente é denotado por $k(A)$.

Para cada $P \in V(A)$, podemos construir o *anel local* $\mathcal{O}_P(A)$ o qual tem como elementos as funções racionais de $k(A)$ que estão bem definidas em P ; isto é, cujo denominador não se anula em P .

Sejam $A_1, \dots, A_m$ polinômios em $\mathbb{K}[x, y]$ e $P \in \mathbb{K}^2$. Definimos o índice de interseção dos polinômios $A_1, \dots, A_m$ em P como

$$I_P(A_1, \dots, A_m) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_P(\mathbb{K}^2)/(A_1, \dots, A_m)\mathcal{O}_P(\mathbb{K}^2)).$$

A multiplicidade dos polinômios $A_1, \dots, A_m$ em P pode ser 0, um número positivo, ou $+\infty$. Mais adiante explicaremos algumas condições para cada caso.

Sejam $A_1, \dots, A_m$ polinômios homogêneos em $\mathbb{K}[x, y, z]$ e seja $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Como podemos definir $I_P(A_1, \dots, A_m)$?

Se $P \in U_z = \{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid z \neq 0\}$ (e analogamente para x e y) poderíamos definir

$$I_P(A_1, \dots, A_m) = I_{P_{*z}}((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z});$$

onde, por exemplo, se $P = [p_0 : p_1 : 1] \in U_z$, então $P_{*z} = [p_0, p_1]$, $(A_1)_{*z} = A_1(X, Y, 1)$, $\dots$, $(A_m)_{*z} = A_m(X, Y, 1)$. O problema surge quando $P \in U_i \cap U_j$ ($i \neq j$ e quando i, j pertence ao conjunto $\{x, y, z\}$), pois teríamos pelo menos duas maneiras de definir $I_P(A_1, \dots, A_m)$. Portanto, para que esta definição seja bem posta precisaremos mostrar que ela independe da desomogeneização escolhida. Isto decorre do isomorfismo canônico entre $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))/(A_1, \dots, A_m)\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$ e $\mathcal{O}_{P_{*i}}(\mathbb{K}^2)/((A_1)_{*i}, \dots, (A_m)_{*i})\mathcal{O}_{P_{*i}}(\mathbb{K}^2)$, para qualquer $i = x, y$ ou z . Assim, definimos o índice de interseção no caso projetivo como

$$I_P(A_1, \dots, A_m) = I_P((A_1)_{*i}, \dots, (A_m)_{*i}),$$

onde $i = x, y$ ou z dependendo da coordenada não nula de P .

Listamos abaixo várias propriedades do índice de interseção, mais detalhes em [8] pág 36:

1. Se os polinômios homogêneos $A_1, \dots, A_m$ em $\mathbb{K}[x, y, z]$ têm um fator não trivial em comum então $I_P(A_1, \dots, A_m) = +\infty$.
2. $I_P(A_1, \dots, A_m)$ depende apenas do ideal homogêneo $(A_1, \dots, A_m)$ em $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$.
3. Se o polinômio homogêneo $B(P) \neq 0$ então B é invertível em $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$. Isso porque, o ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$ é formado por polinômios para os quais P é uma raiz. Assim, o quociente $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))/\mathfrak{m}$ é um corpo. Sendo B invertível,

$$(BA_1, \dots, A_m) = (A_1, \dots, A_m).$$

Portanto $I_P(BA_1, \dots, A_m) = I_P(A_1, \dots, A_m)$.

4. Se o polinômio homogêneo B não tem componente em comum com o produto de polinômios homogêneos CC' , então $I_P(B, CC') = I_P(B, C) + I_P(B, C')$.
5. $I_P(A, B) = I_P(A, A_1A + B)$ para um polinômio homogêneo A_1 com grau igual ao grau de B menos o grau do polinômio A .
6. Se Λ é uma mudança de coordenadas, e $\Lambda(Q) = P$, então $I_P(A, B) = I_Q(A \circ \Lambda, B \circ \Lambda)$.

Aproveitando o assunto, provaremos a seguinte afirmação: Se $A_1, \dots, A_m$ são polinômios homogêneos em $\mathbb{K}[x, y, z]$ sem fator em comum, então $\sum_P I_P(A_1, \dots, A_m)$ é finito. Para isso, teremos que usar alguns resultados abaixo.

Lema 1.2. *Se $A_1, \dots, A_m$ são polinômios homogêneos em $\mathbb{K}[x, y, z]$ que não têm componente em comum, então $V((A_1, \dots, A_m))$ é finito.*

Demonstração. Vamos mostrar que $V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z})$ tem um número finito de pontos. Por hipótese, $A_1, \dots, A_m$ não têm componente comum em $\mathbb{K}[x, y, z]$ então $(A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}$ também não admitem fator comum em $\mathbb{K}[x, y]$. Com efeito, se $(A_1)_{*z} = a_1h$, $\dots$, $(A_m)_{*z} = a_mh$, com $a_1, \dots, a_m, h \in \mathbb{K}[x, y]$ e h não constante, então

$$((A_1)_{*z})^* = a_1^*h^*, \dots, ((A_m)_{*z})^* = a_m^*h^*.$$

Portanto h^* é fator de $A_1, \dots, A_m$, contradizendo a hipótese.

Assim, $(A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}$ não admitem componente comum em $\mathbb{K}[x][y]$, então também não têm fator comum em $\mathbb{K}(x)[y]$. Como $\mathbb{K}(x)[y]$ é um domínio principal,

$$((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}) = (1)$$

em $\mathbb{K}(x)[y]$. Isto é, existem $T_1, \dots, T_m$ em $\mathbb{K}(x)[y]$ tais que $T_1 \cdot (A_1)_{*z} + \dots + T_m \cdot (A_m)_{*z} = 1$.

Se $D \in \mathbb{K}[x]$ for um denominador comum de $T_1, \dots, T_m$, temos que

$$DT_1 = \tilde{T}_1, \dots, DT_m = \tilde{T}_m \in \mathbb{K}[x, y].$$

Portanto $\tilde{T}_1 \cdot (A_1)_{*z} + \dots + \tilde{T}_m \cdot (A_m)_{*z} = D$.

Se $[p_1, p_2] \in V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z})$ então $D(p_1) = 0$. Como D é um polinômio em uma variável, isto implica que

$$S_1 = V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}) \cap \{[x, y] \in \mathbb{K}^2 \mid D(x) = 0\}$$

é finito.

Repetindo o argumento com a coordenada y , concluimos que

$$S_2 = V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}) \cap \{[x, y] \in \mathbb{K}^2 \mid G(y) = 0\}$$

tem um número finito de pontos, para algum polinômio $G \in \mathbb{K}[y]$. Como

$$V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}) \subseteq S_1 \times S_2$$

então $V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z})$ também tem que ser finito.

Seja $U_i = \{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid i \neq 0\}$, onde $i = x, y$ ou z .

Como vimos acima, com respeito a $(A_i)_{*z} = A_i(x, y, 1)$, temos que

$$V((A_1)_{*z}, \dots, (A_m)_{*z}) \cap U_z$$

tem um número finito de pontos.

Similarmente, fazendo $(A_i)_{*y} = A_i(x, 1, z)$ e $(A_i)_{*x} = A_i(1, y, z)$ temos que

$$V((A_1)_{*x}, \dots, (A_m)_{*x}) \cap U_x \text{ e } V((A_1)_{*y}, \dots, (A_m)_{*y}) \cap U_y$$

têm uma quantidade finita de pontos.

Como $U_x \cup U_y \cup U_z = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, chegamos à conclusão que $V((A_1, \dots, A_m))$ tem um número finito de pontos projetivos. $\square$

Assim, Se $A_1, \dots, A_m$ são polinômios homogêneos relativamente primos, temos que $V((A_1, \dots, A_m))$ é finito. Com o lema abaixo, vamos mostrar que $\sum_P I_P(A_1, \dots, A_m)$ é finita, onde $P \in V((A_1, \dots, A_m))$.

Lema 1.3. *Seja $\mathcal{J}$ um ideal em $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. $V(\mathcal{J})$ é um conjunto finito se, e somente se, $\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Se isso ocorrer, o número de pontos em $V(\mathcal{J})$ é no máximo $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})$ (ver [8], Corolário 4, pág 11).*

Para finalizar, precisaremos da seguinte proposição, cuja demonstração se encontra em [8], Proposição 6, pág. 27.

Proposição 1.4. *Seja $\mathcal{J}$ um ideal em $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Suponha que $V(\mathcal{J}) = \{P_1, \dots, P_N\}$ é um conjunto finito. Então existe um isomorfismo entre*

$$\mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J} \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_{P_i}(\mathbb{K}^{n+1})/\mathcal{J}\mathcal{O}_{P_i}(\mathbb{K}^{n+1}).$$

Desse modo, a soma $\sum_P I_P(\mathcal{J})$ sobre todos os zeros de $\mathcal{J}$ é finita. Essa soma é o *índice total de interseção* ou *multiplicidade total* de $\mathcal{J}$, que denotamos por $I(\mathcal{J})$.

Com isso o mais importante caminho para computar a multiplicidade total de dois polinômios homogêneos primos entre si é o Teorema de Bézout: “*Sejam A e B duas curvas planas projetivas de grau l e m respectivamente. Assumimos que A e B não têm componente em comum. Então $I(A, B) = lm$ ” ver [8], Teorema de Bézout, pág 57.*

1.3 Lema de Darboux

Nesta seção, enunciaremos o *Lema de Darboux* devidamente corrigido e introduzimos as notações que usaremos nos próximos capítulos.

Lema 1.5 (Lema de Darboux). *Sejam seis polinômios homogêneos A, B, C, A', B', C' em $\mathbb{K}[x, y, z]$ com graus l, m, n, l', m' e n' respectivamente, tais que:*

- i. A, B e C são relativamente primos, assim como os polinômios A', B' e C' ;
- ii. $l + l' = m + m' = n + n' = r$, e $AA' + BB' + CC' = 0$;
- iii. o ideal homogêneo (A, B, C, A', B', C') gerado pelos seis polinômios homogêneos não tem nenhum zero comum em $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

Então os ideais homogêneos gerados pelos trios (A, B, C) e (A', B', C') têm um número finito de zeros no plano projetivo.

Denotando por $h = I(A, B, C)$ e por $h' = I(A', B', C')$, existe uma relação entre h, h' e os graus dos polinômios a saber:

$$h + h' = \frac{lmn + l'm'n'}{r} = r^2 - r(l + m + n) + (lm + mn + nl).$$

Esta preparação para a primeira demonstração do *Lema de Darboux*, chamamos uma família $[A, B, C, A', B', C']$ de polinômios homogêneos em $\mathbb{K}[x, y, z]$ de *sistema ortogonal de polinômios* se satisfaz

- i. A, B e C são relativamente primos, assim como A', B' e C' .
- ii.

$$\begin{aligned} d(A, B, C, A', B', C') &= \text{grau}(A) + \text{grau}(A') \\ &= \text{grau}(B) + \text{grau}(B') \\ &= \text{grau}(C) + \text{grau}(C') \end{aligned}$$

que nesse caso d é chamado de *grau* do sistema.

- iii. $AA' + BB' + CC' = 0$, que chamaremos de condição de ortogonalidade.

Dado um sistema ortogonal de polinômios $[A, B, C, A', B', C']$, temos pela condição i acima, que $I(A, B, C)$ e $I(A', B', C')$ são números finitos, como foi visto na seção 1.2 do capítulo 1. Denotaremos o grau do sistema ortogonal de polinômios $d(A, B, C, A', B', C')$ por r .

A igualdade

$$\frac{lmn + l'm'n'}{r} = r^2 - r(l + m + n) + (lm + mn + nl)$$

é um inteiro positivo bem definido, o qual é definido como sendo 0 quando $r = 0$. Mostramos abaixo uma maneira de construir esta igualdade. Começamos com

$$r^3 = (l + l')(m + m')(n + n').$$

Desenvolvendo o produto acima, chegamos a

$$r^3 - lm'n - l'mn - lmn' - l'nm' - lm'n' - mn'l' = lmn + l'm'n'.$$

Usando as igualdades $m' = r - m$, $n' = r - n$ e $l' = r - l$, fazemos as seguintes substituições:

$$r^3 - lm'n - l'mn - lmn' - l'n(r - m) - lm'(r - n) - mn'(r - l) = lmn + l'm'n'.$$

Fazendo mais algumas contas, substituímos novamente $m' = r - m$, $n' = r - n$ e $l' = r - l$ do seguinte modo:

$$r^3 - rl(r - m) - rn(r - l) - rm(r - n) = lmn + l'm'n'.$$

Chegamos na última etapa a

$$r^3 - r^2(l + m + n) + r(lm + mn + nl) = lmn + l'm'n',$$

donde,

$$r^2 - r(l + m + n) + (lm + mn + nl) = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Por fim, definimos a *brecha* do sistema ortogonal como:

$$\begin{aligned} \Delta(A, B, C, A', B', C') &= I(A, B, C) + I(A', B', C') - \frac{lmn + l'm'n'}{r} \\ &= h + h' - \frac{lmn + l'm'n'}{r} \end{aligned}$$

Com as definições desse capítulo, podemos enunciar o *Lema de Darboux* da seguinte forma:

A brecha é zero para um sistema ortogonal de polinômios sem zero projetivo.

Capítulo 2

Visão local

Nessa primeira prova usaremos as propriedades do índice de interseção de curvas algébricas planas. Essa demonstração foi dividida em dois passos. O primeiro passo será mostrar o *Lema de Darboux* assumindo mais uma hipótese, usando alguns argumentos do próprio Darboux. O segundo passo consiste na redução do caso geral ao caso especial do primeiro passo, mostrando assim o resultado.

Mostraremos um resultado sobre um sistema ortogonal que satisfaz uma hipótese adicional: todos os seis polinômios com letras diferentes são relativamente primos uns com os outros. Não é necessário supor a primalidade entre A e A' , B e B' , C e C' . Vamos chamar tal sistema ortogonal de *irredutível*. A ideia é mostrar o *Lema de Darboux* primeiramente para esse caso especial.

Aproveitamos para explicar que a notação $P \in A \cap B$ significa que $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ é um zero comum aos polinômios homogêneos A e B , isto é, $A(P) = 0$ e $B(P) = 0$.

Proposição 2.1. *Seja $[A, B, C, A', B', C']$ um sistema ortogonal irredutível de polinômios sem zero em comum. Então a brecha $\Delta(A, B, C, A', B', C') = 0$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar um pequeno lema que será utilizado várias vezes neste capítulo.

Lema 2.2. *Seja $[A, B, C, A', B', C']$ um sistema ortogonal. Então temos que*

$$I_P(A, B, CC') = I_P(A, B).$$

Demonstração. Como $[A, B, C, A', B', C']$ é um sistema ortogonal, temos que $AA' + BB' + CC' = 0$. Assim, $CC' = -AA' - BB'$. Substituímos em $I_P(A, B, CC')$, obtemos que

$$I_P(A, B, CC') = I_P(A, B, -AA' - BB').$$

Usando a propriedade 2 do índice de interseção,

$$I_P(A, B, -AA' - BB') = I_P(A, B).$$

Logo, $I_P(A, B, CC') = I_P(A, B)$ como queríamos demonstrar. $\square$

Mostraremos que para $P \in A \cap B$ vale a seguinte igualdade de índices

$$I_P(A, B, CC') = I_P(A, B, C) + I_P(A, B, C'). \quad (2.1)$$

Como $AA' + BB' + CC' = 0$ e $P \in A \cap B$, observamos que

$$AA'(P) + BB'(P) + CC'(P) = CC'(P) = 0.$$

Assim $C(P) = 0$ ou $C'(P) = 0$. Vamos dividir em três casos:

No caso em que $C(P) = 0$ e $C'(P) \neq 0$ temos que $I_P(A, B, C') = 0$ e que C' é invertível em $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}))$. Então pela propriedade 3 do índice de interseção, $I_P(A, B, C) = I_P(A, B, CC')$. Portanto (2.1) é assegurada. O caso em que $C(P) \neq 0$ e $C'(P) = 0$ é análogo ao anterior. Ou seja, de um lado temos $I_P(A, B, C) = 0$. E por outro lado $I_P(A, B, C') = I_P(A, B, CC')$. Portanto (2.1) é assegurada.

Passemos ao caso em que $C(P) = 0$ e $C'(P) = 0$. Por hipótese, temos que

$$A \cap B \cap C \cap A' \cap B' \cap C' = \emptyset.$$

Como $A(P) = B(P) = C(P) = C'(P) = 0$, então $A'(P) \neq 0$ ou $B'(P) \neq 0$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $A'(P) \neq 0$. Usando a propriedade 3 do índice de interseção, obtemos que $I_P(AA', B, C) = I_P(A, B, C)$. A partir disso, usando o argumento da prova do lema 2.2, $I_P(AA', B, C) = I_P(B, C)$. Logo,

$$I_P(AA', B, C) = I_P(A, B, C) = I_P(B, C).$$

Utilizando os mesmos argumentos, obtemos

$$I_P(A, B, C') = I_P(B, C'),$$

e também a igualdade

$$I_P(A, B, CC') = I_P(B, CC').$$

Por hipótese, o sistema é irreduzível, assim o polinômio B é relativamente primo com C e C' . Portanto,

$$I_P(B, C) + I_P(B, C') = I_P(B, CC'),$$

e a igualdade (2.1) está provada em todos os casos.

Agora, pelo Teorema de Bézout, $lm = I(A, B)$, isto é, $lm = \sum_{P \in A \cap B} I_P(A, B)$. Aplicando o argumento da demonstração do lema 2.2, obtemos $lm = \sum_{P \in A \cap B} I_P(A, B, CC')$. Com isso, finalmente usamos a igualdade (2.1),

$$lm = \sum_{P \in A \cap B \cap C} I_P(A, B, C) + \sum_{P \in A \cap B \cap C'} I_P(A, B, C').$$

Portanto,

$$lm = h + \sum_{P \in A \cap B \cap C'} I_P(A, B, C'),$$

isto é, $I(A, B, C') = lm - h$.

Com argumentos similares aos usados para provar a igualdade (2.1), temos que se $P \in A \cap C'$, então

$$I_P(A, C') = I_P(A, BB', C') = I_P(A, B, C') + I_P(A, B', C'). \quad (2.2)$$

Por outro lado, pelo Teorema de Bézout, $ln' = I(A, C')$. Mas a igualdade (2.2) implica que $ln' = \sum_{P \in A \cap C'} I_P(A, B, C') + I_P(A, B', C')$. Substituindo $I(A, B, C')$ por $lm - h$, obtemos

$$ln' = lm - h + \sum_{P \in A \cap C' \cap B'} I_P(A, B', C'),$$

isto é, $I(A, B', C') = ln' - lm + h$.

Analogamente para $P \in B' \cap C'$, temos que

$$I_P(B', C') = I_P(AA', B', C') = I_P(A, B', C') + I_P(A', B', C').$$

Pelo Teorema de Bézout, $m'n' = I(B', C')$. Assim, aplicando a igualdade acima, obtemos que $m'n' = \sum_{P \in B' \cap C'} I_P(A, B', C') + I_P(A', B', C')$. Substituindo $I(A, B', C')$ por $ln' - lm + h$, temos que

$$m'n' = ln' - lm + h + \sum_{P \in B' \cap C' \cap A'} I_P(A', B', C').$$

Logo $h' = I(A', B', C') = m'n' - ln' + lm - h$.

Substituindo o termo calculado acima na fórmula da brecha do sistema ortogonal de polinômios, chegamos na expressão

$$\Delta(A, B, C, A', B', C') = h + (m'n' - ln' + lm - h) - r^2 + r(l + m + n) - (lm + mn + nl).$$

Aplicando as igualdades $m' = r - m$ e $n' = r - n$ na linha anterior,

$$\Delta(A, B, C, A', B', C') = (r - m)(r - n) - l(r - n) - r^2 + r(l + m + n) - mn - nl.$$

Fazendo algumas contas, obtemos

$$\Delta(A, B, C, A', B', C') = r^2 - rn - rm - rl - r^2 + r(l + m + n) = 0.$$

Provando o *Lema de Darboux* para o caso do sistema ortogonal irreduzível. $\square$

Seja, agora, $[A, B, C, A', B', C']$ um sistema ortogonal redutível de polinômios. Vamos mostrar que nesse sistema existem dois polinômios do mesmo trio tendo um fator em comum.

Pelo sistema ser redutível, existem dois polinômios com letras diferentes que têm um componente em comum. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\text{mdc}(A, B') = D$ é não constante. Pelo fato do polinômio D ser o $\text{mdc}(A, B')$, existem $A_1, B'_1 \in \mathbb{K}[x, y, z]$ tais que $DA_1 = A$ e $DB'_1 = B'$.

Como $AA' + BB' + CC' = 0$, obtemos

$$A_1DA' + BB'_1D + CC' = 0.$$

Consequentemente, D divide o produto CC' . Escrevemos o polinômio D da forma

$$\alpha T_1^{m_1} \cdots T_k^{m_k},$$

em que T_i são polinômios irredutíveis e α pertence a $\mathbb{K}$.

Assim existe pelo menos um T_i irredutível que divide o produto CC' . Portanto, T_i divide C ou T_i divide C' . Sem perda de generalidade, suporemos que T_i divide C . Isso implica que $\text{mdc}(A, C)$ não é igual a 1. Logo, em qualquer sistema ortogonal redutível de polinômios, dois polinômios do mesmo trio têm componente em comum.

Passamos a desenvolver um método para transformar um sistema ortogonal redutível para um sistema ortogonal irredutível de polinômios.

O primeiro passo é reduzir uma dupla de polinômios com fator em comum para uma nova dupla de polinômios primos entre si, gerando um novo sistema ortogonal de polinômios.

Suporemos que $\text{mdc}(A, B) = D$ não constante. Com efeito, existem A_1, B_1 polinômios tais que $DA_1 = A$ e $DB_1 = B$. Consequentemente, pela ortogonalidade do sistema e pelo fato de A, B e C serem relativamente primos, D divide C' . Assim, existe um polinômio C'_1 tal que $C' = C'_1D$. Lembrando que $AA' + BB' + CC' = 0$, obtemos

$$A_1A' + B_1B' + CC'_1 = 0.$$

Diremos que o sistema ortogonal de polinômios $[A_1, B_1, C, A', B', C'_1]$ é a *primeira redução* de $[A, B, C, A', B', C']$.

A propriedade de não ter zeros projetivos em comum é transferida no primeiro passo de redução. De fato, suponhamos que o conjunto

$$\{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid A(P) = A'(P) = B(P) = B'(P) = C(P) = C'(P) = 0\}$$

é vazio. Terminado o primeiro passo de redução, obtemos três igualdades:

$$DA_1 = A, DB_1 = B \text{ e } DC'_1 = C'.$$

Com efeito, temos que

$$V(A_1) \subset V(A), V(B_1) \subset V(B) \text{ e } V(C'_1) \subset V(C').$$

Logo, o conjunto

$$\{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid A_1(P) = A'(P) = B_1(P) = B'(P) = C(P) = C'_1(P) = 0\}$$

é vazio. Analogamente, essa propriedade é transferida a cada passo de redução.

Vamos supor que $[A_1, B_1, C, A', B', C'_1]$ é redutível. Temos as seguintes possibilidades

$$\begin{array}{lll} \text{mdc}(A_1, C) = D \notin \mathbb{K} & \text{mdc}(A', B') = D \notin \mathbb{K} & \text{mdc}(B', C'_1) = D \notin \mathbb{K} \\ \text{mdc}(B_1, C) = D \notin \mathbb{K} & \text{mdc}(A', C'_1) = D \notin \mathbb{K} & \end{array}.$$

Em cada passo de redução, pelo menos dois polinômios do mesmo trio passarão a ser primos entre si. Portanto temos no máximo 6 passos para chegar na *redução completa*, isto é, um sistema ortogonal irreduzível a partir de um sistema ortogonal redutível de polinômios.

O lema seguinte é a ferramenta principal para mostrar o *Lema de Darboux*.

Lema 2.3. *Seja $[A, B, C, A', B', C']$ um sistema ortogonal redutível de polinômios sem zeros projetivos em comum. Suponha que $\text{mdc}(A, B) = D$ não é constante. Se*

$$[A_1, B_1, C, A', B', C'_1]$$

é a primeira redução do original então

$$\Delta(A_1, B_1, C, A', B', C'_1) = \Delta(A, B, C, A', B', C').$$

Demonstração. Vamos estabelecer as seguintes notações

$$\begin{aligned} \text{grau}(D) &= s, \\ \text{grau}(A_1) &= l - s = l_1, \\ \text{grau}(B_1) &= m - s = m_1, \\ \text{grau}(C'_1) &= n' - s = n'_1, \end{aligned}$$

e $d(A_1, B_1, C, A', B', C'_1) = r - s = r_1$. Assim, como $r = l + l'$ obtemos que $r_1 = l_1 + l' = l - s + l'$. Analogamente, temos que $r_1 = m - s + m'$ e $r_1 = n + n' - s$. Sejam $I(A_1, B_1, C) = h_1$ e $I(A', B', C'_1) = h'_1$.

O objetivo do lema é mostrar que

$$h + h' - \frac{lmn + l'm'n'}{r} - \left(h_1 + h'_1 - \frac{l_1 m_1 n + l' m'_1 n'_1}{r_1} \right) = 0;$$

que equivale a provar que

$$(h - h_1) + (h' - h'_1) - (r^2 - r(l + m + n) + (lm + mn + nl) + (r_1^2 - r_1(l_1 + m_1 + n) + (l_1 m_1 + m_1 n + n l_1))) \quad (2.3)$$

é igual a zero. Para isso, temos que mostrar a seguinte igualdade

$$(h - h_1) + (h' - h'_1) = ns.$$

Passo 1: Neste primeiro passo, provaremos que $h - h_1 = ns$.

Pelo processo de redução temos que $V(A_1, B_1, C) \subset V(A, B, C)$ e $V(D) \subset V(A, B)$. Logo os conjuntos $V(A_1, B_1, C)$ e $V(D, C)$ estão contidos em $V(A, B, C)$. Assim, os pontos projetivos que deveremos analisar são os pontos pertencentes ao conjunto $V(A, B, C)$. Para demonstrar o Passo 1, provaremos para cada $P \in A \cap B \cap C$, a seguinte igualdade

$$I_P(A, B, C) = I_P(A_1, B_1, C) + I_P(D, C). \quad (2.4)$$

Consideraremos dois casos: $P \notin D \cap C$ e $P \in D \cap C$.

Caso $D(P) \neq 0$. Então $I_P(D, C) = 0$ e,

$$I_P(A, B, C) = I_P(DA_1, DB_1, C) = I_P(A_1, B_1, C),$$

então a igualdade 2.4 é assegurada. Naturalmente, podemos perguntar, temos certeza que $A_1(P) = 0$ e $B_1(P) = 0$? A resposta é afirmativa, pois observamos que $0 = A(P) = D(P)A_1(P)$ e $D(P) \neq 0$, analogamente para $B_1(P) = 0$.

Caso $D(P) = 0$, onde $P \in D \cap C$.

Pelo processo da primeira redução, $V(D) \subset V(C')$. Por hipótese, temos que $V(D) \subset V(A)$ e $V(D) \subset V(B)$. Portanto, juntamente com o fato do sistema $[A, B, C, A', B', C']$ não ter zeros projetivos em comum, isto implica que $A'(P) \neq 0$ ou $B'(P) \neq 0$, para cada $P \in V(D, C)$. Suporemos, sem perda de generalidade, que $A'(P) \neq 0$.

Usando argumentos análogos aos da proposição 2.1, temos que

$$I_P(A, B, C) = I_P(AA', B, C) = I_P(-BB' - CC', B, C) = I_P(B, C), \quad (2.5)$$

assim como

$$I_P(A_1, B_1, C) = I_P(A_1A', B_1, C) = I_P(-B_1B' - CC'_1, B_1, C) = I_P(B_1, C). \quad (2.6)$$

Falta mostrar que $I_P(B, C)$ e $I_P(B_1, C)$ são finitos, de modo a obter que $I_P(A, B, C)$ e $I_P(A_1, B_1, C)$ são finitos. Para isso, mostraremos que $\text{mdc}(B, C) = D'(P) \neq 0$ e que D' divide B_1 .

Afirmção 1: Se $\text{mdc}(B, C) = D'$ e $A'(P) \neq 0$ então $D'(P) \neq 0$. Para mostrar esta afirmação, usaremos a propriedade 3 do índice de interseção em P várias vezes no decorrer da prova desse lema.

Se $\text{mdc}(B, C) = D'$, então, existem polinômios B_2 e C_2 primos entre si, tais que $D'B_2 = B$ e $D'C_2 = C$. Assim, temos que D e D' dividem B . Logo $D'B_2 = DB_1$. O intuito é mostrar que D' divide B_1 . Para isso, precisamos mostrar que D' e D são primos entre si. Suponhamos por absurdo que $\text{mdc}(D', D) = T$ é não constante. Como D divide A e B , e D' divide C , então T divide A , B e C . Isto leva a um absurdo. Logo $\text{mdc}(D, D') = 1$ e podemos concluir que D' divide B_1 ; isto é, existe um polinômio B_3 tal que $D'B_3 = B_1$. Com isso, chegamos à seguinte expressão

$$B = DB_1 = DD'B_3. \quad (2.7)$$

Dessa forma, como $A_1A' + B_1B' + CC'_1 = 0$, obtemos que D' divide o produto A_1A' . Pela hipótese que C , B_1 e A_1 são relativamente primos, concluímos que D' divide A' . Portanto, $A'(P) \neq 0$ implica que $D'(P) \neq 0$, como queríamos demonstrar.

Aplicando isto aos índices, vemos que $I_P(B, C) = I_P(D'B_2, D'C_2) = I_P(B_2, C_2)$ é finito pois B_2 e C_2 não têm componente em comum. O segundo índice $I_P(B_1, C) = I_P(D'B_3, D'C_2) = I_P(B_3, C_2)$ também é finito, porque B_3 e C_2 não têm fator comum não trivial. De fato, supondo que $\text{mdc}(B_3, C_2) = T' \neq 1$, existem polinômios $\tilde{B}_3$ e $\tilde{C}_2$ tais que $B_3 = \tilde{B}_3T'$ e $C_2 = \tilde{C}_2T'$. Substituindo $B_3 = \tilde{B}_3T'$ na igualdade 2.7 e $C_2 = \tilde{C}_2T'$

em $D'C_2 = C$, obtemos que $DD'T'\tilde{B}_3 = B$ e $D'T'\tilde{C}_2 = C$. Isto contradiz a propriedade segundo a qual $\text{mdc}(B, C) = D'$. Portanto $\text{mdc}(B_3, C_2) = 1$, como havíamos afirmado.

Até aqui, mostramos que $I_P(B, C)$ e $I_P(B_1, C)$ são finitos. Usando isto, provaremos que $h - h_1 = ns$. Por $C = D'C_2$ e a igualdade 2.7, temos que

$$I_P(B, C) = I_P(DD'B_3, D'C_2) = I_P(DB_3, C_2). \quad (2.8)$$

Observamos que D e $C = D'C_2$ são primos entre si, de modo que $\text{mdc}(D, C_2) = 1$. Combinando isto com $\text{mdc}(B_3, C_2) = 1$, e usando a propriedade 4 do índice de interseção, temos que

$$I_P(DB_3, C_2) = I_P(D, C_2) + I_P(B_3, C_2). \quad (2.9)$$

Juntando 2.8 e 2.9, obtemos

$$I_P(B, C) = I_P(D, C_2) + I_P(B_3, C_2). \quad (2.10)$$

A partir disso, usaremos a propriedade 3 do índice de interseção, obtendo a igualdade

$$I_P(D, C_2) + I_P(B_3, C_2) = I_P(D, D'C_2) + I_P(D'B_3, D'C_2).$$

Desse modo, substituindo as igualdades $D'C_2 = C$ e $D'B_3 = B_1$ na expressão anterior, obtemos

$$I_P(D, C_2) + I_P(B_3, C_2) = I_P(D, C) + I_P(B_1, C). \quad (2.11)$$

Portanto, pelas expressões 2.10 e 2.11, temos que

$$I_P(B, C) = I_P(D, C) + I_P(B_1, C). \quad (2.12)$$

Logo, substituindo a igualdade 2.6 na expressão acima, obtemos que

$$I_P(B, C) = I_P(D, C) + I_P(A_1, B_1, C).$$

Por outro lado, $I_P(A, B, C) = I_P(B, C)$. Com isso, concluímos que

$$I_P(A, B, C) = I_P(D, C) + I_P(A_1, B_1, C).$$

Assim, para $P \in D \cap C$, a igualdade (2.4) é assegurada.

Para terminar a prova do primeiro passo, com a igualdade 2.4 satisfeita, temos que

$$\sum_{P \in A \cap B \cap C} I_P(A, B, C) = \sum_{P \in A \cap B \cap C} I_P(D, C) + I_P(A_1, B_1, C).$$

Usando o Teorema de Bezout nos polinômios D e C , chegamos na igualdade $h - h_1 = sn$.

Passo 2. Neste segundo passo provaremos que $h' - h'_1 = 0$.

Pelo processo de redução, $V(C'_1) \subset V(C')$ então $V(C'_1, A', B') \subset V(A', B', C')$. Assim, os pontos projetivos que devemos analisar são os pontos pertencentes ao conjunto $V(A', B', C')$. Para demonstrar o Passo 2, analisaremos para cada $P \in A' \cap B' \cap C'$, a seguinte igualdade

$$I_P(A', B', C') = I_P(A', B', C'_1). \quad (2.13)$$

Lembrando que $C' = DC'_1$. Vamos dividir esta análise em dois casos: $D(P) = 0$ e $D(P) \neq 0$.

Caso $D(P) \neq 0$, temos

$$I_P(A', B', C'_1) = I_P(A', B', DC'_1) = I_P(A', B', C')$$

que é a igualdade desejada.

Caso $D(P) = 0$. Como $P \in A' \cap B' \cap C'$, $\text{mdc}(A, B) = D$ e $[A, B, C, A', B', C']$ não têm zeros projetivos em comum, então $C(P) \neq 0$. Isso implica que, usando a propriedade 3 do índice de interseção, temos que $I_P(A', B', C') = I_P(A', B', CC')$. Usando a ortogonalidade do sistema e a propriedade 2 do índice de interseção, obtemos

$$I_P(A', B', CC') = I_P(A', B', -AA' - BB') = I_P(A', B').$$

Analogamente,

$$I_P(A', B', C'_1) = I_P(A', B', CC'_1) = I_P(A', B', -A_1A' - B_1B') = I_P(A', B')$$

de modo que a igualdade $I_P(A', B', C') = I_P(A', B', C'_1)$ vale também nesse caso.

Por fim, temos que

$$\sum_{P \in A' \cap B' \cap C'} I_P(A', B', C') = \sum_{P \in A' \cap B' \cap C'} I_P(A', B', C'_1).$$

Logo $h' = h'_1$.

Com esses dois passos, temos duas igualdades: $h' = h'_1$ e $h - h_1 = sn$, que substituiremos na diferença $\Delta(A, B, C, A', B', C') - \Delta(A_1, B_1, C, A', B', C'_1)$ para chegar no resultado esperado. Usando as igualdades $h' = h'_1$ e $h - h_1 = sn$, na expressão 2.3, obtemos que

$$ns - (r^2 - r(l + m + n) + (lm + mn + nl) + (r_1^2 - r_1(l_1 + m_1 + n) + (l_1m_1 + m_1n + nl_1))).$$

Utilizando as igualdades $r_1 = r - s$, $l_1 = l - s$ e $m_1 = m - s$ na expressão acima, temos que

$$\begin{aligned} & ns - r^2 + r(l + m + n) - (lm + mn + nl) + (r - s)^2 - (r - s)(l - s) \\ & - (r - s)(m - s) - (r - s)n + (l - s)(m - s) + (m - s)n + n(l - s). \end{aligned}$$

Colocando alguns termos em evidência,

$$ns - r^2 + r(l + m + n) - (lm + mn + nl) + (r - s)^2 + (l - s)(m + n - r) + (m - s)(n + s - r) + n(s - r).$$

Reduzindo um pouco mais a expressão acima, chegamos a

$$ns + r(l + m + n) - (lm + mn + nl) + l(m + n) - lr - s(m + n - r) + mn + m(s - r)s(-n - r) + n(s - r).$$

Novamente, reduzindo alguns termos, obtemos que

$$ns + r(l + m + n) - lr + sr - s(m + n) + (s - r)(m + n) - s(n + r).$$

Finalmente, chegamos à conclusão do lema

$$r(l + m + n) - lr - mr - nr = 0.$$

□

Por fim, temos os resultados para mostrar o *Lema de Darboux* abaixo

Corolário 2.4. *Seja $[A, B, C, A', B', C']$ um sistema ortogonal de polinômios sem zeros em comum. Então*

$$\Delta(A, B, C, A', B', C') = 0.$$

Demonstração. Se $[A, B, C, A', B', C']$ for redutível então, façamos a primeira redução para $[A_1, B_1, C, A', B', C'_1]$. Pelo Lema anterior,

$$\Delta(A, B, C, A', B', C') = \Delta(A_1, B_1, C, A', B', C'_1).$$

Caso $[A_1, B_1, C, A', B', C'_1]$ seja irredutível, então pela Proposição 2.1, temos que

$$\Delta(A_1, B_1, C, A', B', C'_1) = 0,$$

completando a prova. Caso contrário, reduziremos no máximo mais cinco vezes até chegar num sistema ortogonal irredutível e concluir com o uso do Lema e a Proposição 2.1 que

$$\Delta(A, B, C, A', B', C') = 0.$$

□

Capítulo 3

Visão global

Nesse capítulo, apresentaremos uma segunda demonstração do *Lema de Darboux*. Para isso, usaremos sequências exatas com objetivo de computarmos as dimensões dos espaços vetoriais envolvidos nestas sequências e chegar em $I(A, B, C)$ e $I(A', B', C')$. Mostraremos um resultado para calcularmos o índice de interseção total de curvas algébricas com uma quantidade finita de zeros. Por fim, provaremos uma desigualdade que é assegurada mesmo no caso em que o sistema ortogonal de polinômios tem zeros projetivos em comum.

Trabalharemos com módulos sobre $\mathbb{K}[x, y, z]$ graduados pelo grau, para mais detalhes veja [14], VII, 12, 230. Os seus componentes homogêneos $(\mathbb{K}[x, y, z])_d$ de grau d são espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e suas dimensões são dadas por uma função inteira δ definida como

$$\delta(d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \text{ para } d \in \mathbb{N},$$

mais detalhes em [8], 2.35, pág 25.

A proposição a seguir mostra outra maneira de computarmos a multiplicidade total de ideais com uma quantidade finita de zeros. Esse resultado é fundamental nesse capítulo.

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{J}$ um ideal homogêneo do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e suponha que $V(\mathcal{J})$ tem um número finito de zeros em $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Os componentes homogêneos $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d$ do anel $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J}$ são espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ que têm a mesma dimensão para d suficientemente grande. Esta dimensão é igual a $I(\mathcal{J})$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d$ é igual para todo d suficientemente grande. Para isso, vamos usar o seguinte homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_0 : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] & \rightarrow & \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/(x_0) \\ f & \mapsto & \bar{f} \end{array}.$$

Assim $\varepsilon_0(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n])$ é isomorfo a $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e denominamos o ideal $\varepsilon_0(\mathcal{J}) = \mathcal{J}_0$.

Vamos supor que os zeros de $V(\mathcal{J})$ estejam no espaço afim com $x_0 \neq 0$, isto é, $V(\mathcal{J})$ está contido em $U_0 = \{(p_0 : \dots : p_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid p_0 \neq 0\}$.

Mostraremos que $V(\mathcal{J}_0) = \emptyset$. Suponhamos por absurdo que exista $P \in V(\mathcal{J}_0)$. Por definição temos que $\bar{f}(P) = 0$ para todo $\bar{f} \in \mathcal{J}_0$. Assim $f(0, P)$ para todo $f \in \mathcal{J}$, implicando que $(0, P) \in V(\mathcal{J})$. Isso contraria a hipótese de que $V(\mathcal{J}) \subset U_0$. Portanto $V(\mathcal{J}_0) = \emptyset$. Logo, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, $\mathcal{J}_0$ contém todos os polinômios homogêneos de grau maior ou igual a d_0 suficientemente grande, mais detalhes em [8], pág 46. Usaremos isto para mostrar que

$$\begin{aligned} \phi_0 : (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_{d_0-1} &\rightarrow (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_{d_0} \\ \bar{F} &\mapsto x_0 \bar{F} \end{aligned}$$

é sobrejetora.

Dado qualquer $\bar{D} \in (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_{d_0}$, podemos escrevê-lo da seguinte maneira $\bar{D} = D + \mathcal{J}$. Analisaremos o polinômio homogêneo D separando-o em duas partes $D = D_0 + x_0 D_{x_0}$, onde D_0 é a parte do polinômio que não tem a variável x_0 . Em vista disso, D_0 é um polinômio homogêneo em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ de grau d_0 . Como $V(\mathcal{J}_0) = \emptyset$, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, $D_0 \in \mathcal{J}_0$. Assim, $D_0 + x_0 K \in \mathcal{J}$ para algum polinômio homogêneo K . Portanto, podemos escrever o polinômio D da seguinte forma

$$D = (D_0 + x_0 K) + x_0(D_{x_0} - K).$$

Logo $\bar{D} = x_0(D_{x_0} - K) + \mathcal{J}$. Para terminar, tomaremos

$$\overline{D_{x_0} - K} \in (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_{d_0-1}$$

tal que $\phi_0(\overline{D_{x_0} - K}) = \overline{x_0(D_{x_0} - K)} = \bar{D}$. Assim mostramos a sobrejetividade do homomorfismo ϕ_0 .

Sabendo que a aplicação ϕ_0 é sobrejetiva, podemos comparar as dimensões dos espaços vetoriais $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d$ sobre $\mathbb{K}$. Por indução, sabemos que para todo $d \geq d_0 - 1$, obtemos as desigualdades abaixo

$$\dots \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_{d+1} \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d.$$

Uma sequência decrescente de números inteiros positivos, para um d suficientemente grande vai ser constante. Logo existe d_1 tal que para todo $d \geq d_1$ temos que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_{d_1}.$$

Considere o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] &\rightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/(x_0 - 1) \\ f &\mapsto \bar{f} \end{aligned}.$$

Falta mostrar que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d$ é igual a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1)$ para d suficientemente grande, onde o ideal $\varepsilon_1(\mathcal{J})$ por $\mathcal{J}_1$. Assim $\varepsilon_1(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n])$ é isomorfo a $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Como $V(\mathcal{J})$ tem um número finito de zeros, o conjunto $V(\mathcal{J}_1)$ também terá um número finito de zeros. Usaremos uma última aplicação para chegar ao nosso resultado. Seja

$$\Phi : \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/(x_0 - 1)}{\mathcal{J}/(x_0 - 1)} \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1.$$

Denominamos o homomorfismo Φ restrito ao $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d$ por Φ_d . Assim, mostraremos que para todo d suficientemente grande temos que

$$\Phi_d = \Phi|_{(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d} \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1.$$

Como $V(\mathcal{J}_1)$ é um conjunto finito. Temos pelo lema 1.3 que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Provaremos que a aplicação Φ_d é sobrejetora. Seja $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ uma base de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1$. Então, qualquer elemento do quociente $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1$ pode ser escrito na forma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{f}_i$$

para alguma escolha de $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Seja d_2 o máximo dos graus dos polinômios $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$. Se $d \geq d_2$ então

$$\Phi_d \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_0^{d-m_i} f_i + \mathcal{J} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{f}_i,$$

onde m_i é o grau de f_i . Portanto Φ_d é sobrejetiva para todo $d \geq d_2$.

Falta mostrar que é injetora. Vamos analisar $\Phi_d(\bar{f}) = \bar{0}$ e mostrar que $\bar{f}$ deve ser $\bar{0}$. Seja $\bar{f} = \sum_{i=0}^d \bar{a}_i x_0^i$ homogêneo de grau d , onde $\bar{a}_i$ são polinômios homogêneos de grau $d-i$ em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}$. Desse modo, $\Phi_d(\bar{f}) = \sum_{i=0}^d \bar{a}_i = \bar{0}$. Se $i \neq j$ então $d-i \neq d-j$. Com isso, $\bar{a}_i$ e $\bar{a}_j$ têm graus diferentes. Portanto nenhum dos monômios de $\bar{a}_i$ pode cancelar com os monômios de $\bar{a}_j$. Assim $\sum_{i=0}^d \bar{a}_i = \bar{0}$ implica que $\bar{a}_i = 0$ para todo i . Logo $\bar{f} = 0$, e Φ_d é injetora como queríamos demonstrar.

Concluimos que as dimensões dos componentes homogêneos de $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J})_d$ para todo $d \geq \max\{d_1, d_2\}$ são iguais à dimensão de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1$. $\square$

Como aplicação dessa proposição descreveremos abaixo um contraexemplo para o enunciado original do *Lema de Darboux*.

Exemplo 3.2.

$$\begin{array}{lll} A = y - x & B = x & C = y \\ A' = y + x & B' = x & C' = -y \end{array}.$$

O único ponto em comum de A , B e C é $[0, 0, 1]$. E o ponto em comum de A' , B' e C' é $[0, 0, 1]$. Desse modo, o ponto em comum dos polinômios homogêneos A, B, C, A', B' e C' é o $[0, 0, 1]$.

Observamos que esses polinômios satisfazem as hipóteses originais do Lema de Darboux. Vamos calcular

$$h + h' = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

De um lado

$$\begin{aligned} h &= I(A, B, C) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x, y]/(y - x, x, y) = 1 \text{ e} \\ h' &= I(A', B', C') = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x, y]/(y + x, x, -y) = 1, \end{aligned}$$

então $h + h' = 2$. Por outro lado,

$$\frac{lmn + l'm'n'}{r} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

A proposição acima será aplicada na demonstração do próximo resultado.

Seja

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{K}[x, y, z] \times \mathbb{K}[x, y, z] \times \mathbb{K}[x, y, z] &\rightarrow \mathbb{K}[x, y, z] \\ [f_1, f_2, f_3] &\mapsto f_1A + f_2B + f_3C, \end{aligned}$$

tendo como $\text{Ker}(\psi) = R(A, B, C)$ e a $\text{Im}(\psi) = (A, B, C)$.

Vamos definir a graduação no módulo $\mathbb{K}[x, y, z]^3$ sobre $\mathbb{K}[x, y, z]$ de grau d da seguinte maneira

$$\mathbb{K}[x, y, z]_{d-l} \times \mathbb{K}[x, y, z]_{d-m} \times \mathbb{K}[x, y, z]_{d-n}.$$

Proposição 3.3. *Sejam A , B e C polinômios homogêneos sem fator comum não trivial em $\mathbb{K}[x, y, z]$, onde os graus são l , m e n respectivamente. Então*

$$I(A, B, C) = \delta(d) - \delta(d-l) - \delta(d-m) - \delta(d-n) + \dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d,$$

para um inteiro positivo d suficientemente grande.

Demonstração. Consideraremos a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\psi) \rightarrow \mathbb{K}[x, y, z] \times \mathbb{K}[x, y, z] \times \mathbb{K}[x, y, z] \xrightarrow{\psi} \mathbb{K}[x, y, z] \rightarrow \text{CoKer}(\psi) \rightarrow 0.$$

O homomorfismo ψ é homogêneo de grau 0. Assim, vamos usar essa sequência exata restrita aos seus respectivos componentes homogêneos de grau d

$$0 \rightarrow (R(A, B, C))_d \rightarrow (\mathbb{K}[x, y, z]^3)_d \xrightarrow{\psi} (\mathbb{K}[x, y, z])_d \rightarrow (\mathbb{K}[x, y, z]/(A, B, C))_d \rightarrow 0.$$

Portanto $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/(A, B, C))_d$ é igual a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z])_d - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]^3)_d + \dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d.$$

Sabemos que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z])_d = \delta(d)$, então a expressão acima é a seguinte

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/(A, B, C))_d = \delta(d) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]^3)_d + \dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d. \quad (3.1)$$

Se $d \geq \max\{l, m, n\}$ então

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]^3)_d &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]_{d-l} \times \mathbb{K}[x, y, z]_{d-m} \times \mathbb{K}[x, y, z]_{d-n}) \\ &= \delta(d-l) + \delta(d-m) + \delta(d-n). \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (3.1), obtemos

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/(A, B, C))_d = \delta(d) - \delta(d-l) - \delta(d-m) - \delta(d-n) + \dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d.$$

O fato de que $I(A, B, C) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/(A, B, C))_d$ para d suficientemente grande conforme a proposição 3.1 é o último passo para concluirmos a igualdade dessa proposição

$$I(A, B, C) = \delta(d) - \delta(d-l) - \delta(d-m) - \delta(d-n) + \dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d.$$

□

A próxima proposição será usada tanto para provar o *Lema de Darboux*, quanto para a desigualdade $I(A, B, C) + I(A', B', C') \geq \frac{lmn+l'm'n'}{r}$, onde $[A, B, C, A', B', C']$ têm zeros em comum.

Proposição 3.4. *Seja $[A, B, C, A', B', C']$ um sistema ortogonal de polinômios. Então é possível construir uma aplicação $\mathbb{K}[x, y, z]$ -linear*

$$\Psi: R(A, B, C) \rightarrow \mathbb{K}[x, y, z] ,$$

tal que $Im(\Psi) = \mathcal{J}$ é um ideal homogêneo de $\mathbb{K}[x, y, z]$, e $Ker(\Psi)$ é uma relação particular entre A', B', C' . Também teremos

$$(A', B', C') \subset \mathcal{J} \subset (A', B', C') : (A, B, C) \\ I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \frac{lmn + l'm'n'}{r},$$

onde l, m, n, l', m' e n' são os graus dos polinômios homogêneos A, B, C, A', B' e C' respectivamente, e r é o grau do sistema ortogonal.

Demonstração. Seja a aplicação

$$\Omega: \mathbb{K}[x, y, z]^3 \rightarrow \mathbb{K}[x, y, z]^3 \\ [f_1, f_2, f_3] \mapsto [B'f_3 - C'f_2, C'f_1 - A'f_3, A'f_2 - B'f_1].$$

Vamos mostrar que é $\mathbb{K}[x, y, z]$ -linear. Dado qualquer polinômio f em $\mathbb{K}[x, y, z]$ e $[f_1, f_2, f_3]$ e $[g_1, g_2, g_3]$ quaisquer em $\mathbb{K}[x, y, z]^3$, temos que

$$\Omega(f[f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3]) = \\ f[B'(f_3 + g_3) - C'(f_2 + g_2), C'(f_1 + g_1) - A'(f_3 + g_3), A'(f_2 + g_2) - B'(f_1 + g_1)].$$

Por outro lado,

$$\Omega(f[f_1, f_2, f_3]) + \Omega(f[g_1, g_2, g_3]) \\ = f[B'f_3 - C'f_2, C'f_1 - A'f_3, A'f_2 - B'f_1] + f[B'g_3 - C'g_2, C'g_1 - A'g_3, A'g_2 - B'g_1].$$

Como

$$f[B'(f_3 + g_3) - C'(f_2 + g_2), C'(f_1 + g_1) - A'(f_3 + g_3), A'(f_2 + g_2) - B'(f_1 + g_1)],$$

é igual a

$$f[B'f_3 - C'f_2, C'f_1 - A'f_3, A'f_2 - B'f_1] + f[B'g_3 - C'g_2, C'g_1 - A'g_3, A'g_2 - B'g_1].$$

Logo Ω é $\mathbb{K}[x, y, z]$ -linear.

Começaremos a definir a Ψ . Para isso, precisamos estudar o comportamento da aplicação Ω restrita a $R(A, B, C)$. Tome $[f_1, f_2, f_3]$ pertencente a $R(A, B, C)$, então $\Omega([f_1, f_2, f_3])$ é colinear a $[A, B, C]$. Para provar isto, calcularemos o produto vetorial entre $[A, B, C]$ e $[B'f_3 - C'f_2, C'f_1 - A'f_3, A'f_2 - B'f_1]$. A primeira coordenada é

$$C(C'f_1 - A'f_3) - B(A'f_2 - B'f_1) = CC'f_1 + BB'f_1 - CA'f_3 - BA'f_2.$$

Usando a ortogonalidade $AA' + BB' + CC' = 0$, obtemos

$$-AA'f_1 - CA'f_3 - BA'f_2 = -A'(Af_1 + Bf_2 + Cf_3) = 0.$$

Analogamente, a segunda coordenada é 0 e a terceira coordenada é 0, provando a afirmação. Logo, $\Omega([f_1, f_2, f_3]) = \tilde{f}[A, B, C]$, onde $\tilde{f}$ pertence a $\mathbb{K}[x, y, z]$.

Definiremos a Ψ como

$$\begin{aligned} \Psi: R(A, B, C) &\rightarrow \mathbb{K}[x, y, z] \\ [f_1, f_2, f_3] &\mapsto \tilde{f}, \end{aligned}$$

tal que $\Omega([f_1, f_2, f_3]) = \tilde{f}[A, B, C]$. Note que $\tilde{f}$ está bem definido pela aplicação Ω .

Tendo definido Ψ , a próxima etapa é mostrar que

$$(A', B', C') \subset \mathcal{J} \subset (A', B', C') : (A, B, C).$$

Vamos mostrar a inclusão $\mathcal{J} \subset (A', B', C') : (A, B, C)$ (mais detalhes sobre o ideal quociente em [13], III, 7, 147). Dado qualquer $\hat{f} \in \mathcal{J} = \text{Im}(\Psi)$, pela definição de Ψ , existe $[\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3]$ pertencente a $R(A, B, C)$ tal que

$$\begin{aligned} \Omega([\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3]) &= \hat{f}[A, B, C] \\ &= [B'\hat{f}_3 - C'\hat{f}_2, C'\hat{f}_1 - A'\hat{f}_3, A'\hat{f}_2 - B'\hat{f}_1]. \end{aligned}$$

Assim, cada coordenada de $\hat{f}[A, B, C]$ pertence a (A', B', C') então $\hat{f}(A, B, C)$ está contido em (A', B', C') . Passemos à inclusão $(A', B', C') \subset \mathcal{J}$. Para prová-la basta verificar que A' , B' e C' estão no ideal $\mathcal{J}$. Com esse intuito, tome $[0, C, -B]$ em $R(A, B, C)$. Aplicando Ω , obtemos

$$\Omega([0, C, -B]) = [-BB' - CC', A'B, A'C] = [A'A, A'B, A'C] = A'[A, B, C].$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \Omega([-C, 0, A]) &= [B'A, -C'C - A'A, B'C] = [B'A, B'B, B'C] = B'[A, B, C] \\ \Omega([B, -A, 0]) &= [C'A, C'B, -A'A - B'B] = [C'A, C'B, C'C] = C'[A, B, C]. \end{aligned}$$

Assim $\Psi([0, C, -B]) = A'$, $\Psi([-C, 0, A]) = B'$ e $\Psi([B, -A, 0]) = C'$ como queríamos demonstrar.

Tendo terminado de mostrar as inclusões, mostraremos a igualdade

$$I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Para isso, usaremos a seguinte sequência

$$0 \rightarrow \mathbb{K}[x, y, z] \xrightarrow{\omega} R(A, B, C) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{J} \rightarrow 0.$$

A aplicação ω é definida como

$$\begin{aligned} \omega: \mathbb{K}[x, y, z] &\rightarrow \mathbb{K}[x, y, z]^3 \\ \tilde{f} &\mapsto \tilde{f}[A', B', C']. \end{aligned}$$

Provaremos a única condição não trivial da sequência acima ser exata, que é $Im(\omega) = Ker(\Psi)$.

Se $\Psi([f_1, f_2, f_3]) = 0$ então $\Omega([f_1, f_2, f_3]) = [0, 0, 0]$. Isso implica que $[f_1, f_2, f_3]$ é igual a $\hat{f}[A', B', C']$ para algum polinômio $\hat{f}$ pois a imagem de Ω é definida por um produto vetorial com $[A', B', C']$. Logo, $Ker(\Psi) \subset Im(\omega)$. Reciprocamente, se $\omega(\hat{f}) = \hat{f}[A', B', C']$ então $Im(\omega) \subset Ker(\Psi)$. Concluimos que a sequência é exata.

A seguir calcularemos o grau dos homomorfismos homogêneos envolvidos na sequência exata.

$$0 \rightarrow (\mathbb{K}[x, y, z])_{d'} \xrightarrow{\omega} (R(A, B, C))_d \xrightarrow{\Psi} (\mathcal{J})_{d''} \rightarrow 0,$$

onde d' , d e d'' são respectivamente os graus dos componentes homogêneos.

Seja um polinômio F de grau d' . O homomorfismo ω leva F em $F[A', B', C']$. Vamos analisar a graduação na primeira coordenada para entender o grau do homomorfismo ω . Usaremos a mesma graduação da proposição 3.3 em $\mathbb{K}[x, y, z]^3$. Na graduação padrão, o grau de FA' é $d' + l'$. Só que FA' tem que ter o grau $d - l$ que é a graduação da primeira coordenada de $\mathbb{K}[x, y, z]^3$. Portanto, partindo de $d' + l' = d - l$, vamos tomar $r = l' + l$ para que $d' + r = d$. Pela definição de sistema ortogonal de polinômios, temos que $l' + l = m' + m = n' + n$. Logo, o r funcionará para as outras coordenadas. Mostrando que o homomorfismo ω tem que ser de grau r .

Dado qualquer $[F_1, F_2, F_3]$ em $\mathbb{K}[x, y, z]^3$ com a graduação definida na proposição 3.3, o homomorfismo Ψ leva $[F_1, F_2, F_3]$ num polinômio $\tilde{F}$ onde

$$[B'F_3 - C'F_2, C'F_1 - A'F_3, A'F_2 - B'F_1] = \Omega([F_1, F_2, F_3]) = \tilde{F}[A, B, C].$$

Vamos analisar a graduação na primeira coordenada para entender o grau do homomorfismo Ψ . Lembramos que o grau de F_3 e F_2 são respectivamente $d - n$ e $d - m$. De um lado, o grau do polinômio $B'F_3 - C'F_2$ é igual ao $\max\{m' + d - n, n' + d - m\}$. Como $m' + m = n' + n$, temos que $m' - n = n' - m$. Logo o grau do polinômio $B'F_3 - C'F_2$ é $m' + d - n$. Do outro lado, o grau de $\tilde{F}A$ é $d'' + l$. Assim, $m' + d - n = d'' + l$. Como $m' = r - m$, substituindo na expressão anterior, temos que $d + m' - n - l = d + r - m - n - l = d''$. O mesmo ocorre para as outras coordenadas, mostrando que o homomorfismo Ψ tem que ser de grau $r - m - n - l$.

Portanto, a sequência exata anterior restrita aos seus respectivos componentes, pode ser exibida com os graus em função de d .

$$0 \rightarrow (\mathbb{K}[x, y, z])_{d-r} \xrightarrow{\omega} (R(A, B, C))_d \xrightarrow{\Psi} (\mathcal{J})_{d+r-m-n-l} \rightarrow 0.$$

Para qualquer grau d , pela sequência exata entre espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, temos que

$$\dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{J})_{d+r-l-m-n} + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z])_{d-r}. \quad (3.2)$$

Mas $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{J})_{d+r-l-m-n}$ é igual a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z])_{d+r-l-m-n} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/\mathcal{J})_{d+r-l-m-n};$$

ou seja,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{J})_{d+r-l-m-n} = \delta(d+r-l-m-n) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/\mathcal{J})_{d+r-l-m-n}.$$

Como próximo passo, aplicaremos a proposição 3.1 para computar $I(\mathcal{J})$. Assim com d suficientemente grande temos que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/\mathcal{J})_{d+r-l-m-n} = I(\mathcal{J}).$$

Substituindo a expressão acima na igualdade da $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{J})_{d+r-l-m-n}$, obtemos que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{J})_{d+r-l-m-n} = \delta(d+r-l-m-n) - I(\mathcal{J}).$$

Usando a igualdade acima em (3.2), temos que

$$\dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d = \delta(d+r-l-m-n) - I(\mathcal{J}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z])_{d-r},$$

isto é,

$$\dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d = \delta(d+r-l-m-n) - I(\mathcal{J}) + \delta(d-r). \quad (3.3)$$

O último passo é usar a proposição 3.3, com d suficientemente grande, para computar $\dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d$, como abaixo:

$$\dim_{\mathbb{K}}(R(A, B, C))_d = I(A, B, C) - \delta(d) + \delta(d-l) + \delta(d-m) + \delta(d-n).$$

Substituímos a igualdade acima na expressão (3.3), resultando em

$$I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \delta(d) - \delta(d-l) - \delta(d-m) - \delta(d-n) + \delta(d+r-l-m-n) + \delta(d-r).$$

Colocando os valores de cada δ , $I(A, B, C) + I(\mathcal{J})$ é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{(d-l+1)(d-l+2)}{2} - \frac{(d-m+1)(d-m+2)}{2} \\ & - \frac{(d-n+1)(d-n+2)}{2} + \frac{(d+r-l-m-n+1)(d+r-l-m-n+2)}{2} \\ & + \frac{(d-r+1)(d-r+2)}{2}. \end{aligned}$$

Eliminando $d(d+2)$ e $d+2$ da expressão anterior temos que

$$\begin{aligned} & \frac{l(2d-l+3)}{2} + \frac{m(2d-m+3)}{2} + \frac{n(2d-n+3)}{2} - \frac{r(2d-r+3)}{2} \\ & + \frac{d(r-l-m-n)}{2} + \frac{(r-l-m-n)(d+r-l-m-n+2)}{2} + \frac{(r-l-m-n)}{2}. \end{aligned}$$

Eliminando o d , obtemos que $I(A, B, C) + I(\mathcal{J})$ fica igual a

$$\begin{aligned} & \frac{l(3-l)}{2} + \frac{m(3-m)}{2} + \frac{n(3-n)}{2} - \frac{r(3-r)}{2} + \frac{(r-l-m-n)}{2} \\ & + \frac{(r-l-m-n)(r-l-m-n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Eliminando da equação acima os termos l^2 , m^2 , n^2 , $3l$, $3m$, $3n$ e $3r$, chegamos na seguinte etapa

$$I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \frac{r(r-l-m-n)}{2} - \frac{l(-m-n+r)}{2} - \frac{m(r-l-n)}{2} - \frac{n(r-l-m)}{2} + \frac{r^2}{2}.$$

Organizando as contas, chegamos no resultado esperado

$$I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \frac{2(r^2 - r(l+m+n) + (lm + mn + nl))}{2} = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

□

A proposição acima não exige que o sistema ortogonal de polinômios tenha zeros projetivos em comum, como no enunciado original do *Lema de Darboux*. Neste caso, o corolário abaixo mostra que uma desigualdade será satisfeita.

Corolário 3.5. *Com as hipóteses da proposição 3.4, obtemos que*

$$I(A, B, C) + I(A', B', C') \geq \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Demonstração. Uma consequência da proposição 3.4 é que $(A', B', C') \subset \mathcal{J}$. Assim, existe uma aplicação sobrejetora natural de $\mathbb{K}[x, y, z]/(A', B', C')$ para $\mathbb{K}[x, y, z]/\mathcal{J}$. Logo $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/(A', B', C'))_d$ é maior ou igual a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x, y, z]/\mathcal{J})_d$. Aplicando a proposição 3.1 nesses espaços, obtemos que $I(A', B', C') \geq I(\mathcal{J})$. Comparando com a igualdade da proposição 3.4 a seguir,

$$I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Chegamos ao resultado

$$I(A, B, C) + I(A', B', C') \geq \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

□

O lema abaixo vai ser uma ferramenta importante em nossa segunda demonstração do *Lema de Darboux*.

Lema 3.6. *Sejam $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$, dois ideais homogêneos de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ com uma quantidade finita de zeros projetivos. Se o componente homogêneo $(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)_d$ é igual a $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n])_d$ para d suficientemente grande, então $I(\mathcal{J}_1) = I(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $\mathcal{J}_1 : (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ é igual a $\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2$. Começamos provando que $\mathcal{J}_1 : (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ está contido em $\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2$. Se $f \in \mathcal{J}_1 : (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ então, por definição, $f\mathcal{J}_1 + f\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$. Ou seja, para cada $f_1 \in \mathcal{J}_1$ e $f_2 \in \mathcal{J}_2$ temos que $ff_1 + ff_2 = \tilde{f}$ para algum $\tilde{f} \in \mathcal{J}_1$. Desse modo, $ff_2 = \tilde{f} - ff_1 \in \mathcal{J}_1$. Logo $f\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$. A outra inclusão é trivial.

O objetivo do lema é mostrar a igualdade $I(\mathcal{J}_1) = I(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)$. Equivalentemente para d suficientemente grande, basta mostrar que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1)_d = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2))_d,$$

conforme a proposição 3.1. Como também é equivalente provar $(\mathcal{J}_1)_d = (\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)_d$. Para isso, usaremos a igualdade $\mathcal{J}_1 : (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) = \mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2$ mostrada no início dessa prova.

Sabemos que $(\mathcal{J}_1)_d \subset (\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)_d$. Falta a outra inclusão. Por hipótese, $\mathcal{J}_1$ tem um número finito de zeros projetivos. Podemos supor, a menos de uma mudança de coordenadas, que $\mathcal{J}_1$ não tem zeros com $x_0 = 0$. Aplicando exatamente o mesmo argumento da proposição 3.1, existe um grau d_0 tal que, para todo polinômio Fx_0 homogêneo de grau $d \geq d_0$ pertencendo a $\mathcal{J}_1$, temos que $F \in \mathcal{J}_1$.

Esse fato vai-nos ajudar a mostrar que todo polinômio homogêneo F de grau $d \geq d_0$ que pertence a $\mathcal{J}_1 : (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$ também pertence a $\mathcal{J}_1$.

Por definição de $\mathcal{J}_1 : (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$, temos que $F\mathcal{J}_1 + F\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$. Usando a hipótese, $(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)_d$ é igual a $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n])_d$ para d suficientemente grande, de modo que existe $\tilde{d}$ tal que $x_0^{\tilde{d}}$ é um elemento de $(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)_{\tilde{d}}$. Assim, $Fx_0^{\tilde{d}} \in \mathcal{J}_1$. Como o grau de $Fx_0^{\tilde{d}}$ é maior do que d_0 , utilizando a aplicação sobrejetora da proposição 3.1,

$$\begin{array}{ccc} \phi_0 : (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1)_{d_0+\tilde{d}-1} & \rightarrow & (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{J}_1)_{d_0+\tilde{d}} \\ \bar{F} & \mapsto & x_0\bar{F} \end{array},$$

temos que se $Fx_0^{\tilde{d}} \in \mathcal{J}_1$ então $Fx_0^{\tilde{d}-1} \in \mathcal{J}_1$. Por indução, concluímos que $F \in \mathcal{J}_1$. Logo $(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)_d \subset (\mathcal{J}_1)_d$, o que nos dá a igualdade dos índices $I(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2) = I(\mathcal{J}_1)$. $\square$

Por fim, a prova do *Lema de Darboux*.

Corolário 3.7. *Acrescentando às hipóteses da proposição 3.4, a suposição de que não existe zero projetivo em comum aos seis polinômios A, B, C, A', B' e C' , temos que*

$$h + h' = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Demonstração. Um dos resultados da proposição 3.4 é a igualdade

$$I(A, B, C) + I(\mathcal{J}) = \frac{lmn + l'm'n'}{r}.$$

Observamos acima que basta provar a igualdade $I(A', B', C') = I(\mathcal{J})$.

Aplicando o mesmo método usado na prova do corolário 3.5 à inclusão

$$(A', B', C') \subset \mathcal{J} \subset (A', B', C') : (A, B, C),$$

da proposição 3.4, obtemos

$$I(A', B', C') \geq I(\mathcal{J}) \geq I((A', B', C') : (A, B, C)).$$

Assim, mostrando que $I((A', B', C') : (A, B, C))$ é igual a $I(A', B', C')$, concluiremos a prova do *Lema de Darboux*. Para isso, usaremos o lema anterior. Antes, vamos mostrar que as hipóteses do lema são satisfeitas.

Lembramos que o sistema ortogonal de polinômios $[A, B, C, A', B', C']$ não tem zeros projetivos em comum, ou seja, $V((A', B', C') + (A, B, C)) = \emptyset$. A partir disso, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (ver [8], pág 46), $((A', B', C') + (A, B, C))_d$ é igual a $(\mathbb{K}[x, y, z])_d$ para d suficientemente grande. Mas os ideais (A, B, C) e (A', B', C') têm uma quantidade finita de zeros projetivos, pois cada trio de polinômios são relativamente primos, mais detalhes na seção 1.2. Portanto, as hipóteses do lema anterior são satisfeitas e como consequência obtemos que $I((A', B', C') : (A, B, C)) = I(A', B', C')$. Logo chegamos ao resultado $I(A', B', C') = I(\mathcal{J})$, o que completa a prova do *Lema de Darboux*. $\square$

Capítulo 4

Aplicações

Nesse capítulo, ilustraremos a utilidade do *Lema de Darboux* através de alguns resultados; desde um básico da teoria algébrica de equações diferenciais até uma solução particular do problema de Poincaré (ver [12], pág 35).

Começaremos com a proposição que faz a contagem das singularidades (contando as multiplicidades) de um campo vetorial polinomial homogêneo de grau m . Essa proposição é usada na maioria dos resultados que envolve o estudo de singularidades de equações polinomiais. Lembrando que dada uma 1-forma projetiva ρ de grau $m + 1$, podemos associá-la a um campo vetorial polinomial homogêneo em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grau m e vice versa.

Proposição 4.1 (Proposição de Darboux). *Seja $[L, M, N]$ um campo vetorial polinomial homogêneo de grau m com uma quantidade finita de pontos singulares. Então o número de pontos singulares deste campo contando com as multiplicidades é*

$$\sum_P I(P, (ZM - YN) \cap (XN - ZL) \cap (YL - XM)) = m^2 + m + 1.$$

Demonstração. Como vimos na seção 1.1, do capítulo 1, associamos o campo vetorial polinomial homogêneo de grau m , ver (1.2), com a 1-forma projetiva $\rho = AdX + BdY + CdZ$ de grau $m + 1$. Portanto o sistema polinomial $[A, B, C, A', B', C']$ é da forma:

$$\begin{aligned} A &= ZM - YN & A' &= X \\ B &= XN - ZL & B' &= Y \\ C &= YL - XM & C' &= Z. \end{aligned}$$

Assim, $[A, B, C, A', B', C']$ satisfaz a relação de ortogonalidade $AA' + BB' + CC' = 0$. Esse sistema de polinômios não tem zeros projetivos em comum pois trivialmente (X, Y, Z) não tem. Analisaremos a primalidade dos trios A, B, C e A', B', C' . Por hipótese, os polinômios homogêneos A, B e C possuem uma quantidade finita de pontos singulares, então esse trio de polinômios homogêneos não tem fator em comum. Naturalmente, o outro trio (A', B', C') também não tem componente em comum. Então temos que $[A, B, C, A', B', C']$ é um sistema ortogonal de polinômios.

Portanto, pelo *Lema de Darboux*,

$$I(A, B, C) + I(A', B', C') = (m+2)^2 - (m+2)(3m+3) + 3(m+1)^2 = m^2 + m + 1.$$

Como $I(A', B', C') = 0$, chegamos ao resultado esperado. Podemos ver essa proposição originalmente em [7], pág 84. $\square$

O próximo teorema conta o máximo de singularidades que um campo vetorial polinomial homogêneo afim pode ter na esfera bi-dimensional. Denotamos por $\mathbb{S}^2$ a esfera bi-dimensional

$$\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}.$$

O resultado é uma aplicação simples da Proposição de Darboux e também ilustra a relação do plano projetivo com o plano afim.

Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial polinomial homogêneo afim em $\mathbb{R}^3$ da forma

$$\mathcal{X} = a(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

onde a , b e c são polinômios homogêneos em $\mathbb{R}[x, y, z]$ de grau n e relativamente primos. Um campo vetorial polinomial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{S}^2$ é um campo vetorial polinomial em $\mathbb{R}^3$ que restrito a $\mathbb{S}^2$ define um campo vetorial tangente em $\mathbb{S}^2$; isto é, satisfaz a igualdade

$$xa(x, y, z) + yb(x, y, z) + zc(x, y, z) = 0$$

para todos os pontos $[x, y, z]$ de $\mathbb{S}^2$. Ou seja, $\mathcal{X}(P)$ pertence ao plano tangente $T_P \mathbb{S}^2$ de $\mathbb{S}^2$ no ponto P .

Teorema 4.2. *Seja $\mathcal{X} = [a, b, c]$ um campo vetorial polinomial homogêneo em $\mathbb{S}^2$ de grau n . Se $\mathcal{X}$ tem uma quantidade finita de singularidades em $\mathbb{S}^2$, então $\mathcal{X}$ tem no máximo $2(n^2 - n + 1)$ singularidades em $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Primeiramente, homogeneizamos $\mathcal{X}$ conforme a seção 1.2, do capítulo 1. O campo $\mathcal{X}^*$ ainda continua satisfazendo:

$$XA(X, Y, Z) + YB(X, Y, Z) + ZC(X, Y, Z) = 0.$$

Assim $\mathcal{X}^*$ induz uma 1-forma projetiva ρ em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grau n , dada por

$$\rho = AdX + BdY + CdZ.$$

Mas esta 1-forma está associada a um campo vetorial polinomial homogêneo com grau $n - 1$. Pela Proposição de Darboux acima, temos que ρ tem

$$(n - 1)^2 + (n - 1) + 1 = n^2 - n + 1$$

pontos singulares, contando as multiplicidades. Se $[p_0 : p_1 : p_2]$ é um ponto singular de ρ e $[p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{R}^3$, então $\lambda[p_0, p_1, p_2]$ é uma linha reta de pontos singulares de $\mathcal{X}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Essa reta determina exatamente duas singularidades de $\mathcal{X}$ em $\mathbb{S}^2$. Logo, podemos concluir que, se $\mathcal{X}$ tem uma quantidade finita de singularidades em $\mathbb{S}^2$, então $\mathcal{X}$ tem no máximo $2(n^2 - n + 1)$ singularidades em $\mathbb{S}^2$, ([10], Teorema 7, pág 4). $\square$

Algumas soluções particulares do problema de Poincaré são enunciadas com hipóteses nas multiplicidades dos pontos singulares das soluções algébricas; como de Cerveau e a Lins Neto, que mostraram que uma solução algébrica que tem somente pontos singulares do tipo nó satisfaz $N(m) \leq m + 2$, onde $N(m)$ é o grau da solução algébrica (ver [3], Teorema 1, pág 891). Já Chavarriga e Llibre deram uma demonstração simples do caso especial em que a curva é não singular (ver [4], Corolário 4, pág 14). No próximo parágrafo, definiremos a multiplicidade de uma singularidade de uma curva algébrica.

Seja $F(X, Y, Z) = 0$ uma curva algébrica de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grau r , e seja $P = [X_0 : Y_0 : Z_0]$ um ponto de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Como as três coordenadas deste ponto não podem ser zero, podemos assumir sem perda de generalidade, que $P = [0 : 0 : 1]$. Então suponha que a expressão de $F(X, Y, Z)$ restrita a $Z = 1$ é

$$F(X, Y, 1) = F_i(X, Y) + F_{i+1}(X, Y) + \cdots + F_r(X, Y), \text{ onde } 0 \leq i \leq r,$$

em que $F_j(X, Y)$ é um polinômio homogêneo de grau j nas variáveis X, Y para $j = i, \dots, r$, com F_i diferente do polinômio nulo. Dizemos que $m_P(F) = i$ é a *multiplicidade da curva $F = 0$ no ponto P* . Se $i = 0$, então o ponto P não pertence a curva $F = 0$. Caso $i = 1$, dizemos que P é um ponto simples de $F = 0$. Se $i > 1$, dizemos que P é um ponto múltiplo de $F = 0$.

Como $F_i(X, Y)$ é uma forma em duas variáveis, podemos escrever $F_i = \prod L_i^{r_i}$ onde os L_i são retas distintas. As retas L_i são chamadas de retas tangentes de F em P ; r_i é a multiplicidade da tangente L_i . A reta L_i é uma tangente simples quando $r_i = 1$. Se F tem m tangentes simples em P , dizemos que P é chamado *ponto múltiplo ordinário* de F . Um ponto múltiplo ordinário com $m_P(F) = 2$ é chamado de *nó*.

Existem alguns resultados que determinam a quantidade máxima de pontos múltiplos (contando a multiplicidade) de uma curva algébrica. Por exemplo, dada uma curva irreduzível F de grau n tem-se que

$$\sum \frac{m_P(F)(m_P(F) - 1)}{2} \leq \frac{(n - 2)(n - 1)}{2},$$

(ver [8], Teorema 2, pág 60). Já se F não tem componentes múltiplos, temos que

$$\sum \frac{m_P(F)(m_P(F) - 1)}{2} \leq \frac{n(n - 1)}{2},$$

(ver [8], exercício 5.22, pág 59). A partir daqui consideramos que qualquer curva algébrica será irreduzível ou sem componentes múltiplos.

O próximo teorema vai ser a chave para mostrar que se uma solução algébrica não tem pontos múltiplos então $N(m) \leq m + 1$ (ver [4], Corolário 4, pág 14).

Teorema 4.3. *Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica, com grau r , de um campo vetorial polinomial afim*

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

de grau m e com cofator k não nulo. Seja $\mathcal{X}^$ o campo homogeneizado a partir do campo $\mathcal{X}$. Suponhamos que Z não é um fator comum de $rA - XK$ e de $rB - YK$ onde A, B e*

K são as respectivas homogeneizações de a , b e k . Então temos que

$$(r-1)(r-m-1) \leq h$$

onde h é o número que conta os pontos múltiplos (juntamente com suas multiplicidades) de F .

Demonstração. Seja F o polinômio homogeneizado a partir do f . Como f é uma curva algébrica invariante de $\mathcal{X}$, então F é uma curva algébrica invariante de

$$\mathcal{X}^* = A \frac{\partial}{\partial X} + B \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Portanto, por definição, temos que

$$\mathcal{X}^* F = A \frac{\partial F}{\partial X} + B \frac{\partial F}{\partial Y} = KF.$$

Usando o Teorema de Euler para a função homogênea F de grau r , a equação acima se transforma em

$$A \frac{\partial F}{\partial X} + B \frac{\partial F}{\partial Y} = K \left(\frac{X}{r} \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{Y}{r} \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{Z}{r} \frac{\partial F}{\partial Z} \right).$$

Pondo em evidência as derivadas parciais de F , temos

$$\left(A - \frac{KX}{r} \right) \frac{\partial F}{\partial X} + \left(B - \frac{KY}{r} \right) \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{KZ}{r} \frac{\partial F}{\partial Z} = 0.$$

A igualdade acima mostra que a relação de ortogonalidade é satisfeita entre os polinômios:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{\partial F}{\partial X} & A' &= rA - KX \\ \tilde{B} &= \frac{\partial F}{\partial Y} & B' &= rB - KY \\ \tilde{C} &= \frac{\partial F}{\partial Z} & C' &= -KZ. \end{aligned}$$

Com isso, o sistema de polinômios acima satisfaz uma hipótese do *Lema de Darboux*. Falta mostrar que $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ são relativamente primos, assim como os polinômios A' , B' e C' . Como as curvas $rA - XK$, $rB - YK$ e ZK não têm componente em comum pela proposição 1.1, então A' , B' e C' são relativamente primos. Pela discussão antes do teorema, o trio $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ têm uma quantidade finita de zeros projetivos em comum, como são polinômios homogêneos com o mesmo grau, então esse trio de polinômios não tem fator em comum.

O nosso intuito é usar o corolário 3.5, o qual permite que o sistema ortogonal de polinômios tenha zeros projetivos em comum. Nota-se que

$$r-1+m = \text{grau } \tilde{A} + \text{grau } A' = \text{grau } \tilde{B} + \text{grau } B' = \text{grau } \tilde{C} + \text{grau } C'.$$

Portanto, pelo corolário 3.5, temos que

$$h + h' \geq \frac{(r-1)^3 + m^3}{r-1+m} = m^2 + (r-1)(r-m-1).$$

Pela proposição 1.1, $V(A', B', C')$ é um conjunto finito. A menos de uma mudança de coordenadas, todos os pontos de $V(A', B', C')$ têm a coordenada Z não nula. Portanto, $h' = I(A', B', C') = I(ra - xk, rb - yk, -k)$. Sabemos que o ideal (a, b) está contido no ideal $(ra - xk, rb - yk, -k)$. Assim podemos afirmar que existe um homomorfismo canônico sobre $\mathbb{C}[x, y]/(a, b)$ em $\mathbb{C}[x, y]/(ra - xk, rb - yk, -k)$. Pela proposição 3.1, isto implica que $I(A', B', C')$ é menor ou igual ao $I(A, B)$. Por outro lado, aplicando o Teorema de Bézout em A e B , temos que $I(A, B) = m^2$. Então o número de pontos de interseção das curvas A', B', C' é no máximo m^2 , contando as multiplicidades. Logo $h' \leq m^2$.

Pela desigualdade $h + h' \geq m^2 + (r - 1)(r - m - 1)$ fornecida do corolário 3.5 e sabendo que $h' \leq m^2$, então $h \geq (r - 1)(r - m - 1)$ e o teorema está provado (ver [4], Teorema 3, pág 12). $\square$

A seguir, mostraremos uma solução particular do problema de Poincaré [12], pág 35.

Corolário 4.4. *Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica de grau $r \geq 1$ sem pontos múltiplos de um campo vetorial polinomial afim $\mathcal{X}$ de grau m . Se a homogeneização de f não tem pontos múltiplos, então $r \leq m + 1$.*

Demonstração. Para provar esse corolário, vamos usar o teorema anterior. Sendo F homogeneização de f , esse teorema mostra que

$$h \geq (r - 1)(r - m - 1), \text{ onde } h = I\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right).$$

Como $h = 0$, a desigualdade do teorema fica da seguinte forma

$$0 \geq (r - 1)(r - m - 1).$$

Como por hipótese, $r \geq 1$, pela desigualdade acima temos que $r \leq m + 1$ como queríamos mostrar (ver [4], Corolário 4, pág 14). $\square$

O próximo teorema mostra outra solução particular do problema de Poincaré [12], pág 35. Antes disso, provaremos um lema que será fundamental na sua demonstração.

Lema 4.5. *Seja f uma curva algébrica irredutível de grau r . Seja P um ponto do tipo nó de F . Então*

$$I_P\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right) = 1,$$

onde F é a homogeneização de f .

Demonstração. Seja P um ponto múltiplo do tipo nó de f , a menos de mudança de coordenadas, seja $P = [0, 0]$. Escrevemos f da seguinte forma:

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_r,$$

onde f_i é uma forma homogênea de grau i . Como $[0, 0]$ é um zero de f , temos que $f_0 \equiv 0$. Vamos mostrar que $f_1 \equiv 0$. Pela fórmula de Taylor

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + g(x, y),$$

onde g tem apenas termos de grau maior ou igual a 2. Pela singularidade de $[0, 0]$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Implicando que $f(x, y) = g(x, y)$ e $f_1 \equiv 0$. Assim, $f(x, y) = f_2(x, y) + \dots + f_r(x, y)$. Seja F a homogeneização de f , isto é,

$$F(X, Y, Z) = Z^{r-2}f_2(X, Y) + Z^{r-3}f_3(X, Y) + \dots + f_r(X, Y).$$

Mostraremos que

$$I_{[0,0,1]} \left(\frac{\partial F}{\partial X_{*z}}, \frac{\partial F}{\partial Y_{*z}}, \frac{\partial F}{\partial Z_{*z}} \right) = I_P \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \sum_{j=2}^r (r-j)f_j \right) = 1,$$

onde

$$\sum_{j=2}^r (r-j)f_j = \frac{\partial F}{\partial Z_{*z}}.$$

O ponto duplo P é ordinário então $f_2 = L_1 L_2$, com $L_1 \neq \lambda L_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, L_1 e L_2 são retas linearmente independentes implicando que

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 x + \lambda_2 y = L_1 \text{ e} \\ v &= \lambda_3 x + \lambda_4 y = L_2, \end{aligned}$$

têm uma solução única para x e y , com $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Dessa forma, vamos definir a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ [x, y] &\mapsto [L_1, L_2] = [u, v] \end{aligned}$$

Assim, $f(\Lambda^{-1}(u, v)) = \tilde{f}(u, v)$ e obtemos que

$$\tilde{f} = uv + \tilde{f}_3 + \dots + \tilde{f}_r.$$

As derivadas parciais em relação a u e a v ficaram da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} &= v + \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial u} + \dots + \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} &= u + \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial v} + \dots + \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial v}. \end{aligned}$$

Com essa mudança de coordenadas, o objetivo do lema é mostrar que

$$I_P \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) = 1,$$

onde $\tilde{g}(u, v) = (r-2)uv + \sum_{j=3}^r (r-j)\tilde{f}_j$. Usando a propriedade 6 do índice de interseção, temos que o índice acima é igual a $I_P(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \sum_{j=2}^r (r-j)f_j)$.

Vamos mostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) = 1,$$

que por definição é igual a $I_P(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v))$. Primeiramente, provaremos uma igualdade de quocientes que vai ser importante no argumento final. Assim, seja $\mathcal{J}$ o ideal gerado por u e v . Com isso,

$$\mathbb{C}[u, v] / (\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) = \mathbb{C}[u, v] / (u^2, v^2, uv, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)).$$

Analisando os geradores do ideal $(\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v))$, obtemos que

$$\mathbb{C}[u, v] / (\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) = \mathbb{C}[u, v] / (u^2, uv, v^2, u, v) = \mathbb{C}[u, v] / (u, v).$$

Logo

$$\mathbb{C}[u, v] / (\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) = \mathbb{C}[u, v] / (u, v). \quad (4.1)$$

De posse da igualdade acima, usaremos o seguinte resultado: se $V(\mathcal{L}) = \{P\}$, então

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] / \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / \mathcal{L} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2),$$

mais detalhes em [8], Corolário 2, pág 27. Usando esse corolário, mostramos a seguinte igualdade de dimensões

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / (\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y] / (\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)). \quad (4.2)$$

Pelas equações (4.1) e (4.2), temos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / (\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) = 1. \quad (4.3)$$

Falta apenas mostrar que

$$(\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v)) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2).$$

Para isso, usaremos o seguinte lema: “Se A e B não têm retas tangentes em comum em P , então $\mathcal{J}^r \subset (A, B) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2)$ para $r \geq m_P(A) + m_P(B) - 1$ ”, ver [8], Lema (a), pág 39. Deste lema, segue que

$$\mathcal{J}^2 \subset \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2).$$

Como temos que

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) \subset \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2),$$

chegamos ao que gostaríamos de mostrar. Consequentemente, obtemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / \left(\mathcal{J}^2, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2).$$

Finalmente, pela igualdade acima e pela equação (4.3),

$$I_P \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) / \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \tilde{g}(u, v) \right) \mathcal{O}_P(\mathbb{C}^2) = 1,$$

que é o resultado desejado. $\square$

Além de mostrar um limitante ao grau da solução algébrica com pontos do tipo nó, o próximo teorema nos dá uma condição para que esse campo tenha uma integral primeira racional.

Teorema 4.6. *Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica com grau r de um campo vetorial polinomial afim*

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

de grau m e com cofator k não nulo. Suponhamos que Z não é um fator comum de $rA - XK$ e de $rB - YK$, onde A , B e K são as respectivas homogeneizações de a , b e k . Seja a curva F homogeneização de f , e suponha que todos os seus pontos múltiplos são do tipo nó. Então $r \leq 2m$. Mais ainda, Se $r = 2m$ então o campo $\mathcal{X}$ tem uma integral primeira racional.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $r \leq 2m$. Seja F homogeneização de f . Sabemos que F tem uma quantidade finita de pontos singulares. A menos de uma mudança de coordenadas, suporemos que esses pontos múltiplos têm a coordenada $Z = 1$. Por hipótese, todas as singularidades de F são do tipo nó. Assim, usando o lema anterior, temos que

$$I_P \left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z} \right) = 1,$$

para cada P singular de F . Logo

$$h = I \left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z} \right) = \sum_P 1,$$

e usando o teorema 4.3,

$$(r-1)(r-m-1) \leq h = \sum_P 1. \quad (4.4)$$

Por outro lado, como F é irredutível, temos a seguinte fórmula

$$\sum_P \frac{m_P(F)(m_P(F)-1)}{2} \leq \frac{(r-2)(r-1)}{2}.$$

Sabendo que todos os pontos múltiplos são duplos, isto é, $m_P(F) = 2$. Substituímos na fórmula acima,

$$h = \sum_P 1 \leq \frac{(r-2)(r-1)}{2}. \quad (4.5)$$

Consequentemente, combinando (4.4) e (4.5), temos

$$(r-1)(r-m-1) \leq \frac{(r-2)(r-1)}{2}.$$

Expandindo e efetuando os devidos cancelamentos, chegamos ao resultado da primeira parte:

$$r \leq 2m.$$

Vamos à segunda parte. Suponha que $r = 2m$. Na demonstração do teorema 4.3, mostramos as seguintes desigualdades

$$h + h' \geq \frac{(r-1)^3 + m^3}{r-1+m} = m^2 + (r-1)(r-m-1) \text{ e } h' \leq m^2,$$

onde $h' = I(rA - XK, rB - YK, ZK)$. Usando a hipótese de que $r = 2m$, obtemos

$$h + h' \geq \frac{(r-1)^3 + m^3}{r-1+m} = m^2 + (2m-1)(m-1). \quad (4.6)$$

Por outro lado, na primeira parte, mostramos que $h \leq \frac{(r-2)(r-1)}{2}$. Sabendo-se que $r = 2m$, obtemos

$$h \leq (2m-1)(m-1).$$

Comparando a desigualdade acima com (4.6), verificamos que $h' \geq m^2$. Sabendo que $h' \leq m^2$, chegamos a $h' = m^2$.

O resultado desejado segue disto e do seguinte teorema de Chavarriga e Llibre

“Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica de grau $r > 1$, com cofator $k \neq 0$, de um campo vetorial polinomial afim $\mathcal{X}$ de grau $m > 1$. Se m^2 é a quantidade total de soluções do sistema

$$rA - XK = 0 \quad rB - YK = 0 \quad ZK = 0$$

no plano projetivo, tomadas com suas multiplicidades, então $\mathcal{X}$ tem uma integral primeira racional” (ver [4], Teorema 1, pág 9). $\square$

Mostraremos a seguir um lema sobre cúbicas irredutíveis que será usado na última aplicação.

Lema 4.7. *Seja f uma cúbica irredutível. Se f tem pontos múltiplos ou se f não tem pontos múltiplos mas a sua homogeneização F tem singularidades, então f é ilimitada e tem apenas uma componente conexa.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que f é ilimitada não importante se a cúbica tem ou não tem pontos singulares. Para isso, demonstraremos que a cúbica f pode ser escrita com termo y^3 ou x^3 . Se a cúbica não tem esses termos então a forma de maior grau é $\lambda x^2 y + \alpha x y^2$ com $\alpha \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$, onde ambos são números reais. Analisaremos o caso mais complicado, que é quando $\alpha \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ sendo que os outros casos são similares.

Assim, suponhamos que $\alpha \neq 0$ e $\lambda \neq 0$. Para a cúbica ter um termo y^3 , iremos fazer a seguinte mudança de coordenadas

$$\hat{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x} + c\tilde{y}, \tilde{y}), \text{ com } c \neq 0.$$

Com isso, obtemos que

$$\lambda(\tilde{x} + c\tilde{y})^2 \tilde{y} + \alpha(\tilde{x} + c\tilde{y})\tilde{y}^2 = \tilde{y}^3(\lambda c^2 + c\alpha) + \lambda(\tilde{x}^2 \tilde{y} + 2c\tilde{x}\tilde{y}^2) + \alpha\tilde{x}\tilde{y}^2.$$

Para facilitar, dividimos tudo por c . Então obtemos que a constante do termo $\tilde{y}^3$ é $\lambda c + \alpha$. Se $\lambda c + \alpha = 0$ então $c = -\frac{\alpha}{\lambda}$. Logo, nesse caso, precisamos também que $c \neq -\frac{\alpha}{\lambda}$ para a mudança de coordenadas funcionar como gostaríamos. Portanto a cúbica pode ser escrita com o termo y^3 . Falta mostrar que a cúbica é ilimitada. Seja $\hat{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{y}^3 - \hat{g}(\tilde{x}, \tilde{y})$, onde $\hat{g}(\tilde{x}, \tilde{y})$ é um polinômio com grau no máximo 2 em $\tilde{y}$. Tome $x_0 \in \mathbb{R}$, então $\tilde{y}^3 - \hat{g}(x_0, \tilde{y}) = 0$. Assim, como o polinômio em $\tilde{y}$ tem grau 3, existe uma solução real y_0 . Com isso, para todo x_0 real, existe $[x_0, y_0]$ na cúbica. Logo $\hat{f}$ é ilimitada.

Provaremos que f tem apenas um componente. Para isso, precisamos mostrar que f tem uma parametrização contínua. Vamos dividir nos dois casos do enunciado.

Caso 1: f não tem pontos múltiplos mas sua homogeneização F tem pontos múltiplos. Por f ser irredutível, a sua homogeneização F tem apenas uma única singularidade. Isto concluímos a partir da fórmula dada nesse capítulo,

$$\sum \frac{m_P(F)(m_P(F) - 1)}{2} \leq \frac{(3 - 2)(3 - 1)}{2} = 1.$$

Como f é não singular, sem perda de generalidade, suponhamos que $[1 : 0 : 0]$ é o único ponto múltiplo de F . Por uma mudança de coordenadas, vamos escrever $f(x, y)$ da seguinte forma

$$\tilde{f}(y, z) = \tilde{f}_0(y, z) + \tilde{f}_1(y, z) + \tilde{f}_2(y, z) + \tilde{f}_3(y, z),$$

onde $\tilde{f}_i$ são formas homogêneas de grau i . Temos que $\tilde{f}_0 \equiv \tilde{f}_1 \equiv 0$ pelos mesmos argumentos usados na prova do lema 4.5. Assim, obtemos que $\tilde{f}(y, z) = \tilde{f}_2(y, z) + \tilde{f}_3(y, z) = 0$.

Homogeneizando $\tilde{f}(y, z)$ pela coordenada x , temos

$$\tilde{F}(x, y, z) = x\tilde{f}_2(y, z) + \tilde{f}_3(y, z),$$

que continua irredutível.

Desomogeneizando por $Z = 1$, obtemos

$$x\tilde{f}_2(y, 1) + \tilde{f}_3(y, 1) = 0.$$

Portanto, a coordenada x pode ser parametrizada a partir de y , isto é,

$$x = -\frac{\tilde{f}_3(y, 1)}{\tilde{f}_2(y, 1)}.$$

Se existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}_2(y_0, 1) = 0$ então $\tilde{f}_3(y_0, 1) = 0$. Assim, $\tilde{f}_2(y, 1) = (y - y_0)L$ para algum polinômio L de grau 1 e $\tilde{f}_3(y, 1) = (y - y_0)Q$ para algum polinômio quadrático Q . Mas isto contraria o fato que $x\tilde{f}_2(y, z) + \tilde{f}_3(y, z)$ ser irreduzível. Logo não existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}_2(y_0, 1) = 0$ e concluímos que f tem uma parametrização contínua em um domínio conexo.

Caso 2: f tem pontos múltiplos. Sem perda de generalidade, podemos supor que $[0, 0]$ é o ponto múltiplo de f . Com argumentos similares aos do outro caso, escrevemos f da seguinte forma

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_3(x, y),$$

onde f_i são formas de grau i . Por f ser irreduzível e singular, análogo ao caso anterior, f possui um único ponto singular, ou seja, $[0, 0]$ é a única singularidade de f .

Finalmente vamos mostrar que uma cúbica irreduzível com um único ponto singular tem uma parametrização racional. Seja t uma nova indeterminada. Definamos

$$\tilde{g}(x, t) := x^{-2}f(x, xt) = f_2(1, t) + xf_3(1, t).$$

Como f não tem outros pontos múltiplos, não existe t que anule f_2 ou f_3 . Portanto, para $x \neq 0$, temos para cada t que

$$x = -\frac{f_2(1, t)}{f_3(1, t)} \text{ e } y = -t\frac{f_2(1, t)}{f_3(1, t)}.$$

Assim, $f(x, y)$ tem uma parametrização racional contínua.

Por fim, nos dois casos, f é uma curva contínua parametrizada com um domínio conexo, o seu traço é conexo. Logo f tem apenas um componente. $\square$

Lembramos que um ciclo limite de um campo vetorial polinomial afim real é uma solução periódica isolada no conjunto de todas as soluções periódicas do campo, para a qual existe uma vizinhança, onde trajetórias não fechadas tendem ao ciclo limite. Para mais detalhes consulte [16], pág 5.

Primeiramente, denominamos de *oval* uma curva algébrica fechada. Assim, definimos o *ciclo limite algébrico* de grau r como uma oval de uma solução algébrica $f(x, y) = 0$ de grau r , a qual é um ciclo limite do campo.

Esse teorema é motivado pelo décimo sexto problema de Hilbert que diz:

“O número de ciclos limites é limitado por um número que depende do grau do campo vetorial polinomial.”

Teorema 4.8. *Seja $f(x, y) = 0$ uma solução algébrica com grau 3 de um campo vetorial polinomial afim real*

$$\mathcal{X} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$

de grau 2 e com cofator k não nulo. Suponhamos que Z não é um fator comum de $rA - XK$ e de $rB - YK$, onde A , B e K são as respectivas homogeneizações de a , b e k . Então o campo $\mathcal{X}$ não tem ciclos limites algébricos de grau 3.

Demonstração. Seja $f = 0$ uma solução algébrica de grau 3 do campo vetorial polinomial afim real

$$\mathcal{X} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

de grau 2. Seja k o cofator não nulo de f . Nosso objetivo é mostrar que f não é ciclo limite algébrico de $\mathcal{X}$. Consideraremos dois casos.

Caso 1: f não tem pontos múltiplos e a sua homogeneização F também não tem pontos múltiplos.

Construiremos um sistema ortogonal de polinômios $[\tilde{A}, A', \tilde{B}, B', \tilde{C}, C']$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{\partial F}{\partial X} & A' &= rA - KX \\ \tilde{B} &= \frac{\partial F}{\partial Y} & B' &= rB - KY \\ \tilde{C} &= \frac{\partial F}{\partial Z} & C' &= KZ. \end{aligned}$$

Como F não tem pontos múltiplos, então $I(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = h = 0$. Pela proposição 1.1, $I(A', B', C') = h'$ é um número finito e com os argumentos usados na prova dessa proposição temos que $\tilde{A}A' + \tilde{B}B' + \tilde{C}C' = 0$. Logo, $[\tilde{A}, A', \tilde{B}, B', \tilde{C}, C']$ é um sistema ortogonal de polinômios.

Vemos que como $h = 0$, então $[\tilde{A}, A', \tilde{B}, B', \tilde{C}, C']$ não têm zeros projetivos em comum. Portanto, pelo *Lema de Darboux* aplicado a este sistema, determinamos

$$I(3A - XK, 3B - YK, -ZK) = h' = \frac{2^3 + 2^3}{4} = 2^2.$$

Pelo teorema de Chavarriga e Llibre, enunciado na demonstração do resultado anterior, temos que o campo $\mathcal{X}$ tem uma integral primeira racional complexa.

Seja D a integral primeira racional complexa do campo $\mathcal{X}$, isto é, $\mathcal{X}(D) = 0$. Tomamos $G = D\bar{D}$ uma função real, onde $\bar{D}$ é o conjugado da integral primeira D . Como $\mathcal{X}$ é um campo real,

$$\mathcal{X}(\bar{D}) = \overline{\mathcal{X}(D)} = \bar{0}.$$

Logo

$$\mathcal{X}(G) = \mathcal{X}(D)\bar{D} + \mathcal{X}(\bar{D})D = 0,$$

e concluímos que G é uma integral primeira real do campo $\mathcal{X}$. Com isso qualquer trajetória g do campo satisfaz $G(g) = \lambda_g$, com uma constante diferente para cada trajetória.

Suponhamos que f é um ciclo limite algébrico de $\mathcal{X}$ então $G(f) = \lambda_f$. Assim, existe uma vizinhança do ciclo limite algébrico f na qual toda trajetória g é não periódica e satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = f.$$

Pela continuidade da integral racional G temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} G(g(t_n)) = G(f)$. Gerando um absurdo pois $G(g) = \lambda_g \neq \lambda_f = G(f)$. Logo f , sem pontos múltiplos, não é um ciclo limite algébrico de $\mathcal{X}$.

Caso 2: f tem pontos múltiplos ou f não tem singularidades mas a sua homogeneização F tem pontos múltiplos. Pelo lema anterior, mostramos que f é ilimitada e tem um componente. Dessa forma, f não é uma oval. Logo, f não é um ciclo limite algébrico.

Portanto, a solução algébrica f de grau 3 tendo pontos múltiplos ou não, não é um ciclo limite algébrico do seu campo quadrático polinomial afim real. $\square$

Lista de Símbolos

S	conjunto de polinômios
S_1, S_2	conjunto de pontos
$L, M, A, A', B, B', C, C', D, D', T, T', \tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$	polinômio homogêneo
$N, F_i, F, K, A_i, B_i, C_i, T_i, \tilde{T}_i, A'_i, B'_i, C'_i, D_i$	polinômio homogêneo
$k, k_i, f, f_i, a, b, b_i, a_i, g, \hat{g}, \tilde{g}, \tilde{f}, \hat{f}, \hat{f}_i$	polinômio qualquer
$l, m, n, l', n', m', r, l_i, n_i, l'_i, d', d'', \tilde{d}$	número inteiro não negativo
$d, d_i, h, h', N(m), s, N, m_i, r_i, h'_i, h_i, m'_i, n'_i$	número inteiro não negativo
G	função holomorfa
Λ	mudança de coordenadas
α, t, λ_i, c	número escalar
U, U_i	conjunto aberto
$P = [p_0, \dots, p_m], P_i, Q$	ponto
$\mathcal{X}$	campo vetorial polinomial
$\Gamma(A)$	$\mathbb{K}[x, y]/(A)$
$k(A)$	corpo quociente de $\Gamma(A)$
$V(A), V$	conjunto algébrico
$\mathcal{I}(V(A)), \mathcal{I}(V)$	ideal de um conjunto algébrico
$\mathcal{O}_P(A), \mathcal{O}_P(\mathbb{K}^2), \mathcal{O}_{(x,y)}(A_*)$	anel local
$\mathfrak{m}$	ideal maximal do anel local
$\mathcal{J}, \mathcal{J}_i, \mathcal{L}$	ideal
δ	função inteira
$\varepsilon_i, \phi_0, \Phi, \Phi_d, \psi, \Psi, \Omega, \omega$	homomorfismo
ρ	1-forma

Referências Bibliográficas

- [1] AUTONNE, L., *Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Journal de l'École Polytechnique, **61** (1891), 35-122; **62** (1892), 47-180.
- [2] CARNICER, M.M., *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Annals of Mathematics **140** (1994), 289-294.
- [3] CERVEAU, D. E LINS NETO, A., *Holomorphic foliations in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ having an invariant algebraic curve*, Annales de L'Institute Fourier **41** (1991), 883-903.
- [4] CHAVARRIGA, J. E LLIBRE, J., *Invariant algebraic curves and rational first integrals for planar polynomial vector fields*, J. Differential Equations **169** (2001), 1-16.
- [5] CHAVARRIGA, J. E LLIBRE, J. E OLLAGNIER, J. M., *On a result of Darboux*, London Mathematical Society - Journal of Computation and Mathematics **4** (2001), 197-210.
- [6] CHAVARRIGA, J. E GRAU, M., *Some open problems related to 16b Hilbert problem*, SCIENTIA Series A: Mathematical Sciencies Vol. **9** (2003), 1-26.
- [7] DARBOUX, G., *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bull. Sci. Math **2** (1878).
- [8] FULTON, W., *Algebraic curves*, edição 2008.
- [9] JOUANOLLOU, J.P., *Equations de Pfaff algébriques*, Lect. Notes in Math. 708, Springer, Berlin, 1979.
- [10] LLIBRE, J. E PESSOA, C., *Phase portraits for quadratic homogeneous polynomial vector fields on $\mathbb{S}^2$* , Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. **58**, N° 3 (2009), 361-406.
- [11] PAINLEVÉ, P., *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3 serie, **8** (1891), 9-59, 103-140, 201-226 e 276-284; **9** (1892), 9-30, 101-144 e 283-308.
- [12] POINCARÉ, H., *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (I e II), Rendiconti del circolo matematico di Palermo **5** (1891), 161-191; **11** (1897), 193-239. Esses artigos foram reimpressos no seu *Oeuvres*, tomo III, 35-94.

- [13] SAMUEL, P. AND ZARISKI, O., *Commutative Algebra*, Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [14] SAMUEL, P. AND ZARISKI, O., *Commutative Algebra*, Vol. II, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [15] VAINSENCER, I., *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, segunda edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [16] YE YAN-QIAN, *Theory of Limit Cycles*, Translations of Mathematical Monographs, volume 66, AMS, 1986.