

Estimativas de Carleman para a equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado

Abraham Enrique Muñoz Flores

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro

19 Julho de 2011

Estimativas de Carleman para a equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado

Abraham Enrique Muñoz Flores

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Aprovada por:

Prof. Ademir Fernando Pazoto - Presidente

IM/UFRJ

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala

IM/UFRJ e LNCC/MCT

Prof. Jose Felipe Linares Ramirez

IMPA

Rio de Janeiro

Julho de 2011

F634e Flores Muñoz, Abraham Enrique.

Estimativas de Carleman para a equação de Korteweg-de
Vries em um domínio limitado/Abraham Enrique Muñoz Flores.

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.

vii, 63 f.; 30 cm.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Dissertação (mestrado) UFRJ/ Instituto de Matemática,
Programa de Pós-graduação em Matemática, 2011.

Referências: f.61-63

1. Equação de Korteweg-de Vries Tese I. Pazoto, Ademir
Fernando. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de
Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

Resumo

Neste trabalho, obtemos uma estimativa de Carleman para a equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado. Como consequência dessa desigualdade, obtemos a propriedade de continuação única para soluções fracas. A existência de soluções fracas e fortes também é estudada. **palavras-chave:** Korteweg-de Vries, Propriedade de Continuação única, Desigualdade de Carleman.

Abstract

In this work we establish a Carleman estimate for a Korteweg-de Vries equation posed on a bounded domain. As a consequence, we derive the unique continuation property for weak solutions. The global well-posedness of weak and strong solutions is also studied.

keywords: Korteweg-de Vries, Unique continuation property, Carleman estimate.

Agradecimentos

A Deus, a meus pais Santiago e Celia e meus irmãos Sandra, Jose, Marco, Celia, Benjamin pelo apoio e incentivo em minnha vida.

A minha namorada Carolina por sua ajuda e compreensão, a meu amigo Alexis pelo apoio e ajuda.

Aos meus amigos do IM-UFRJ.

A todos os professores que estiveram presentes na minha formação, pelos ensinamentos, críticas, conselhos e incentivo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador Ademir Fernando Pazoto, por sua orientação e paciência.

Conteúdo

Introdução	2
1 Preliminares	7
1.1 Resultados Básicos	7
1.2 Espaços Funcionais	10
1.3 Teoria de Semigrupos e algumas definições	17
1.4 Semigrupos C_0 gerados por operadores dissipativos	23
2 A Equação Linear de Korteweg-de Vries	27
2.1 Existência e unicidade do modelo linear	27
2.2 Existência e unicidade do modelo não Linear	35
3 Estimativas de Carleman	40
4 Aplicações	55
4.1 Propriedade de Continuação Única para a Equação de Korteweg-de Vries não Linear	55
Referências	61

Notações

- $C([0, \infty); X)$ denota o espaço das funções contínuas de $[0, \infty)$ em X .
- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω .
- $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$ é o conjunto resolvente do operador A .
- $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é o espectro de A .
- $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é o operador resolvente.
- I ou $\mathcal{I}$ representam o operador identidade.
- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.
- $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Sejam X e Y espaços de Banach.

- $C(X, Y)$ denota o espaço das funções contínuas de X em Y munido da norma do supremo.
- $C_b(X, Y)$ denota o espaço das funções contínuas e limitadas de X em Y munido da norma do supremo.
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares de X em Y .
- $X \hookrightarrow Y$ denota $X \subset Y$ com injeção contínua.
- $\bar{Y}$ denota o fecho de Y na topologia de X .

Introdução

É relativamente comum no desenvolvimento da ciência que uma descoberta importante não seja imediatamente reconhecida como tal. Isto acontece na maioria das vezes porque o grau de conhecimento da época não é suficientemente desenvolvido para que se perceba seu significado. Um exemplo típico de tal situação, que abordaremos agora, refere-se à descoberta do que hoje se denominam solitons. Foram necessários 130 anos para se perceber que certas ondas de água em um canal, consideradas até então uma mera curiosidade, são, de fato, exemplos de um importante fenômeno, comum em vários sistemas não lineares. Sabe-se, hoje, que esses fenômenos estão presentes em muitos campos da matemática aplicada e da física, tais como meteorologia, física de partículas, física de plasmas, ótica não linear (laser), etc.

A primeira observação documentada sobre sólitons foi feita em 1834 pelo cientista e engenheiro escocês John Scott Russel, quando observava o movimento de uma balsa no canal de Edinburgh, em Glasgow. Ela estava sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do estreito canal, quando parou bruscamente. Segundo suas próprias palavras *“a massa de água que se acumulava na frente da balsa em movimento, em um estado de violenta agitação, seguiu em alta velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma montanha de água, lisa e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade”*. Russell a seguiu a cavalo, por mais de 3km, correndo a uma velocidade de aproximadamente 15km/h.

Não foi por mero acaso que Russell teve a oportunidade de observar a onda que ele mesmo denominou inicialmente de “onda de translação” e, posteriormente, “onda solitária”. Ele estava engajado em um estudo sobre desenho e casco de barcas e já tinha realizado

vários experimentos em outros canais, rios e lagos.

A curiosidade de Russell por essa onda, que não se deformara por uma razoável distancia, não se esgotou nesse dia. Ele fez uma série de experimentos, descobrindo como reproduzi-las e construiu um canal raso que continha um anteparo em uma das suas extremidades que permitiam acumular água. Esse dispositivo, quando retirado abruptamente, liberava a massa de água, permitindo que uma onda solitária se deslocasse na direção da extremidade oposta. A partir desses experimentos, ele deduziu a fórmula $c^2 = g(h_0 + a)$ relacionando a velocidade c da onda com a amplitude a (sua altura em relação ao nível da água em repouso) e a profundidade h_0 . Esta equação provocou muita polêmica, porque estava em contradição com outra, que fora obtida por Airy a partir de argumentos puramente teóricos.

O interesse de Russell sobre esse assunto transformou-se, posteriormente, quase que em uma obsessão. Ele desenvolveu uma teoria das ondas solitárias para o ar e o éter, utilizando-as para calcular (corretamente) a espessura da atmosfera e (erroneamente) o tamanho do universo.

Russell morreu em 1882 sem ter conseguido uma fórmula matemática para o perfil da onda solitária ou uma equação que pudesse descrever sua evolução. Somente em 1895, dois matemáticos holandeses, Korteweg e de Vries, conseguiram deduzir a (agora renomada) equação para a propagação de ondas em águas rasas. A partir de essa equação, hoje conhecida como “KdV”, pode-se determinar a fórmula (surpreendentemente simples) para o perfil das ondas solitárias.

A forma original da equação principal do artigo é

$$\eta_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \alpha \eta + \frac{1}{3} \beta \eta_{xx} \right)_x,$$

onde η é a elevação da superfície de líquidos sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propulsão linear) do líquido, $g > 0$ é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade ρ , constante e positiva. Do ponto de vista matemático, os coeficientes na KdV não representam um papel chave, podem ser escolhidos segundo a conveniência.

Dada a equação KdV $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, procuremos solução do tipo onda solitária, isto é, solução que satisfaça as seguintes condições:

- (a) Representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $v(x - ct)$ onde $c \in \mathbb{R}$;
- (b) É localizada, ou seja, $v(s) \rightarrow 0$, assim como todas as suas derivadas, quando $|s| \rightarrow \infty$.

Usando (a) temos

$$\begin{aligned}
 -cv' + 6vv' + v''' &= 0 \Rightarrow -cv' + 3(v^2)' + v''' = 0 \\
 &\Rightarrow (-cv + 3v^2 + v'')' = 0 \\
 &\Rightarrow -cv + 3v^2 + v'' = k_1 \\
 &\Rightarrow v'' = -3v^2 + cv + k_1.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $v' = f$ e encarando f como uma função de v obtemos:

$$\begin{aligned}
 f \frac{df}{dv} &= -3v^2 + cv + k_1 \Rightarrow f df = (-3v^2 + cv + k_1) dv \\
 &\Rightarrow \frac{f^2}{2} = -v^3 + \frac{cv^2}{2} + k_1 v + k_2.
 \end{aligned}$$

Fazendo uso de (b), temos $k_1 = k_2 = 0$. Assim, chegamos a equação separável

$$\frac{dv}{ds} = v(-2v + c)^{1/2}$$

onde $s = x - ct$. O problema fica então reduzido a

$$s = - \int_0^{v(s)} \frac{dz}{z(c - 2z)^{1/2}} + k.$$

Considerando $z = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2(\theta)$, temos

$$dz = -c \operatorname{sech}^2(\theta) \tanh(\theta) d\theta$$

e

$$z(c - 2z)^{1/2} = \frac{c^{3/2}}{2} \operatorname{sech}^2(\theta) \tanh(\theta).$$

Daí

$$\begin{aligned}
s = - \int_0^{v(s)} \frac{dz}{z(c-2z)^{1/2}} + k &= - \int_0^{\theta_1} \frac{-c \operatorname{sech}^2(\theta) \tanh(\theta) d\theta}{\frac{c^{3/2}}{2} \operatorname{sech}^2(\theta) \tanh(\theta)} + k \\
&= - \int_0^{\theta_1} \frac{-c}{\frac{c^{3/2}}{2}} d\theta + k \\
&= \frac{2\theta_1}{\sqrt{c}} + k,
\end{aligned}$$

onde θ_1 é dado implicitamente pela relação

$$\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2(\theta_1) = v(s).$$

Combinando os resultados, finalmente obtemos

$$v(s) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(s-k)\right) \Rightarrow u(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-k)\right),$$

onde k é uma constante arbitrária. Podemos observar mediante a fórmula acima, a relação entre a amplitude e a velocidade de propagação das ondas solitárias.

As equações que descrevem os movimentos de ondas, são uma das mais familiares nas quais os efeitos dispersivos estão presentes. Deste modo simples, podemos dizer que a dispersão de uma onda é o fenômeno no qual a velocidade de onda depende da sua amplitude (ou da frequência, no caso de um envelope de ondas).

O objetivo principal desse trabalho é a obtenção de uma estimativa de Carleman para a KdV que nos permita, a partir daí, obter a propriedade de continuação única para soluções do modelo em um domínio limitado. Uma estimativa de Carleman é uma estimativa ponderada, com parâmetro grande, para uma equação diferencial parcial. No trabalho não mencionaremos o teorema geral de Carleman, mostraremos uma derivação direta obtida por Rosier em [30]. Mais precisamente, escolheremos uma função ψ adequada satisfazendo

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{-L}^L \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u_x|^2 \frac{s}{t(T-t)} |u_{xx}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\
\leq C_0 \int_0^T \int_{-L}^L |u_t + u_{xxx} + \zeta u_x|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt,
\end{aligned}$$

onde $C_0 = C_0(L, T, R), \forall s \geq s_0, \forall \zeta \in V$ com $\|\zeta\|_V \leq R$, e $\forall u \in Z$ (onde V, Z serão especificados mais adiante). Note que C_0 é independente de $s \geq s_0$ e de $u \in Z$.

Finalmente, provaremos a propriedade de continuação única para a KdV não linear,

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(u)u_x = 0 & , \text{ em } (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = 0 & , \text{ } t \in (0, T) \\ u \equiv 0 & , \text{ em } w \times (0, T) \end{cases} \quad (1)$$

com $a \in C^0(\mathbb{R})$ e $w \in (0, L)$, então $u \equiv 0$ em $(0, L) \times (0, T)$. Esse tipo de resultado é extremamente útil quando se deseja provar o decaimento exponencial das soluções. Veja, por exemplo, [21], [24], [26], [27], [30], [31]. Para ilustrar uma dessas situações, consideramos a equação KdV na presença de uma dissipação localizada; ou seja;

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(u)u_x + b(x)u = 0 & , \text{ em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , \text{ } \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & , \text{ } \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \text{ } x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

onde $b(x) \geq a_0 > 0$ em $w \subset (0, L)$, w aberto. A energia total associada ao modelo é decrescente e satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx = -\frac{1}{2} u_x^2(0, t) - \int_0^L b(x) u^2 dx. \quad (3)$$

Nesse caso, o problema do decaimento exponencial de $E(t)$ se reduz ao problema de continuação única para (2.8).

No primeiro capítulo daremos os resultados preliminares que serão utilizados no trabalho. No segundo capítulo provaremos a existência e unicidade para a KdV linear e não linear. Isso será feito utilizando a teoria de semigrupos, um argumento de ponto fixo e estimativas a priori. No terceiro capítulo provaremos uma estimativa de Carleman para logo provar, no último capítulo (Aplicações), a propriedade de continuação única para a KdV não linear.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo, daremos algumas definições e estabeleceremos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados nos livros ou artigos mencionados nas referências.

1.1 Resultados Básicos

Seja X um espaço vetorial normado.

Teorema 1.1. (Teorema da Aplicação Aberta) *Denotemos por E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F . Então, existe uma constante $c > 0$, tal que*

$$T(B_E(0, 1)) \supseteq B_F(0, c),$$

onde $B_X(a, r)$ é a bola aberta em X de centro a e raio r , isto é,

$$B_X(a, r) = \{ y \in X ; \|y - a\| < r \}.$$

Demonstração. Ver [4].

Corolário 1.1. *Sejam E e F espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de E sobre F . Então T^{-1} é contínuo de F em E .*

Demonstração. Ver [4].

Definição 1.1.1. (Operador Fechado) *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : D(T) \subset E \rightarrow F$ um operador linear. Diremos que T é um operador fechado se seu gráfico*

$$G(T) = \{ (x, y) ; x \in D(T) , y = Tx \}$$

for um subconjunto fechado de $E \times F$.

Teorema 1.2. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear de E em F . Suponha que o gráfico de T , $G(T)$, seja fechado em $E \times F$. Então T é contínuo.*

Demonstração. Ver [4].

Corolário 1.2. *Sejam E e F espaços de Banach, $T : D(T) \subset E \rightarrow F$, $D(T)$ fechado em E . Se T é contínuo, então T é fechado.*

Demonstração. Ver [4].

No que segue, Ω denotará um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue. Suponhamos conhecidos os conceitos de função integrável, mensurável, conjunto de medida nula, etc. (ver, por exemplo, [2]).

Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis sobre Ω , e denotamos por

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

a norma $L^1(\Omega)$ da função f .

Teorema 1.3. (Teorema da Convergência Monótona) *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de funções em $L^1(\Omega)$, tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n(x) dx < \infty$. Então $f_n(x)$ converge quase sempre em Ω para um limite finito denotado por $f(x)$. Além disso, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.*

Demonstração. Ver [4].

Teorema 1.4. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções em $L^1(\Omega)$. Suponha que*

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em Ω , quando $n \rightarrow \infty$,

(b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω .

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Ver [4].

Teorema 1.5. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente integrável e defina

$$F_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds, \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } h \neq 0.$$

Então, existe um conjunto E com medida nula, tal que $\lim_{h \rightarrow 0} F_h(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R} - E$

Demonstração. Ver [4].

Definição 1.1.2. Denotaremos por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\Omega) = \{ f \in C(\Omega) ; f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K \text{ onde } K \subset \Omega \text{ é compacto} \}.$$

Teorema 1.6. (Teorema de Densidade) O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\forall f \in L^1(\Omega) \text{ e } \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\Omega), \text{ tal que } \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Demonstração. Ver [4].

Seja agora Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Definimos, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ como o espaço das funções reais u , mensuráveis em Ω , tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω . Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx ; \quad 1 \leq p < \infty,$$

com a qual $L^p(\Omega)$ resulta ser um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ representa o espaço de todas as funções essencialmente limitadas em Ω com a norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Também neste caso $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach. Para os espaços $L^p(\Omega)$ é possível mostrar também um resultado análogo ao Teorema 1.6 como indica o seguinte teorema.

Teorema 1.7. C_0^∞ é denso em L^p para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Ver [4]

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

e norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

1.2 Espaços Funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f , por

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω .

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por:

Exemplo 1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\} \subset\subset \Omega$.

Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é, $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2.1. Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um subconjunto compacto K de Ω , tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Observação 1. É possível (ver [6]) munir $C_0^\infty(\Omega)$ de uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.2.1.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado Espaço das Funções Testes sobre Ω .

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Denotamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 2. Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver [6]). Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L_{loc}^1(\Omega)$ será identificado a uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 3. Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [6], vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de $L_{loc}^1(\Omega)$.

Definição 1.2.2. Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.2.3. Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 2. Decorre da Definição 1.2.3 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 3. $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω , onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 4. Vê-se em [9] que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$.

Munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, (vide [9]).

Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, e munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

é um espaço de Hilbert. Consideremos no nosso trabalho o subespaço de $H^1(0, L)$ definido por

$$V = \{u \in H^1(0, L); \quad u(0) = 0\}.$$

Em [6] demonstra-se que a norma do gradiente e a norma do $H^1(0, L)$ são equivalentes em V . Assim, consideraremos V munido do produto interno e norma dados respectivamente por

$$((u, v)) = (u_x, v_x), \quad \|u\|^2 = |u_x|^2,$$

onde $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma em $L^2(0, L)$.

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Quando $1 < p < \infty$, e X é um Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadas em [7].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0, T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.2.4. Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n de S como sendo a distribuição vetorial sobre $]0, T[$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Exemplo 4. Dadas $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

(integral de Bochner em X) é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0, T; X)$ é um espaço de Banach (vide [7]).

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0, T; X)$ será denotado por $H^m(0, T; X)$ que, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0, T; X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0, T; X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0, T; X)$ o fecho, em $H^m(0, T; X)$, de $\mathcal{D}(0, T; X)$ e por $H^{-m}(0, T; X)$, o dual topológico de $H_0^m(0, T; X)$.

Observação 5. *Seja $f \in L^p(I, X)$, onde $I = (0, T)$. Temos os seguintes resultados:*

- *Se $p < \infty$, $C_0^\infty(I, X)$ é denso em $L^p(I, X)$. Em particular, se Y é um espaço de Banach, tal que $Y \hookrightarrow X$ com imersão densa, então $C_0^\infty(I, X)$ é denso em $L^p(I, X)$ (desde que $C_0^\infty(I, Y)$ seja denso em $C_c(I, X)$ na norma de $C_b(I, X)$).*
- *$f : I \rightarrow X$ é uma função mesurável que pertence a $L^p(I, X)$ se, e somente se, existe $g \in L^p(I)$, tal que $\|f\| \leq g$ em quase todo ponto de I .*

Citaremos agora alguns resultados dos espaços $L^2(\Omega)$ e dos espaços de Sobolev que serão usados neste trabalho.

Teorema 1.8. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com p e q satisfazendo $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [4].

Lema 1. (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma constante positiva c_p , que depende univocamente de Ω e n , tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Demonstração. Ver [6].

Teorema 1.9. *Sejam $f \in L^p(0, T, X)$ e $T_h f(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds$, $\forall t \in (0, T)$ e $h > 0$. Então, $T_h f \in L^p(0, T - h, X) \cap C_b(0, T - h, X)$ e $\|T_h f\|_{L^p(0, T-h, X)} \leq \|f\|_{L^p(0, T, X)}$. Além disso, se $p < \infty$, então $\lim_{h \rightarrow 0} T_h f = f$ em $L^p(0, T', X)$, $\forall T' < T$.*

Demonstração:

$T_h f \in C(0, T; X)$, pois

$$\begin{aligned} \|T_h f(t_0 + r) - T_h f(t_0)\|_X &= \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0+r}^{t_0+r+h} f(s) ds - \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(s) ds \right\|_X \\ &= \left\| \frac{1}{h} \int_{t_0+h}^{t_0+r+h} f(s) ds \right\|_X \leq \frac{1}{h} \int_{t_0+h}^{t_0+r+h} \|f(s)\|_X ds. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Hölder

$$\|T_h f(t_0 + r) - T_h f(t_0)\|_X \leq \frac{1}{h} \|f\|_{L^p(0, T'; X)} |r|,$$

o que nos garante que

$$\|T_h f(t_0 + r) - T_h f(t_0)\|_X \longrightarrow 0$$

quando $r \rightarrow 0$. Além disso, pelo teorema Fubini temos

$$\|T_h f(t)\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s)\|^p ds \leq \frac{1}{h} \|f\|_{L^p(0, T, X)}^p,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$.

Corolário 1.3. *Seja $g \in L^1_{Loc}(I, X)$, $I = (0, T)$, $t_0 \in I$ e $f \in C(I, X)$. Definindo $f(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds$, $\forall t \in I$, temos as seguintes propriedades:*

- f é diferenciável e $f' = g$ em quase todo ponto de I ,
- $\int_I g(t) \varphi(t) dt = - \int_I f(t) \varphi'(t) dt$, $\varphi \in C_c^1(I)$.

Demonstração. Ver [7].

1.3 Teoria de Semigrupos e algumas definições

De modo geral, um sistema dinâmico é uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de mapeamentos sobre um conjunto X satisfazendo

$$\begin{aligned}T(t+s) &= T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0, \\T(0) &= I.\end{aligned}$$

Aqui X é o conjunto de todos os estados de um sistema, $t \in \mathbb{R}^+$ representa o tempo e $T(t)$ representa o mapeamento que descreve a mudança de um estado $x \in X$ para o estado $T(t)x$ no tempo t . No contexto linear, o espaço X é um espaço vetorial e cada $T(t)$ é um operador linear em X , logo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado um semigrupo de operadores. A situação normal em que tais semigrupos de operadores aparecem naturalmente são os chamados problemas de Cauchy abstrato

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t) &= Au(t), \quad \forall t > 0 \\u(0) &= x,\end{aligned}$$

onde A é um operador linear em um espaço de Banach X . Em algumas situações concretas particulares a relação entre $T(t)$ e A é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned}T(t) &= e^{At} \\A &= \left. \frac{dT(t)}{dt} \right|_{t=0}.\end{aligned}$$

Em geral, tal relação parece estar fora de alcance. No entanto, um simples pressuposto de continuidade no semigrupo (veja definição 1.3.1) produz que $T(t)$ se comporte como uma exponencial do operador A em espaços de Banach. Logo, uma teoria rica com um vasto campo e quase universal de aplicações. É o objetivo desta seção resumir esta teoria e apresentar algumas definições relevantes para este trabalho.

Definição 1.3.1. *Uma família parametrizada $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach X , é chamado semigrupo fortemente contínuo se*

(i) $T(0) = I$, (I é o operador identidade em X),

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupos),

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|(T(t) - I)x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Definição 1.3.2. O operador linear A definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

em que

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

é o domínio de A , é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$.

Chamaremos de semigrupo de classe C_0 ou simplesmente semigrupo C_0 a um semigrupo fortemente contínuo.

Definição 1.3.3. Um semigrupo de operadores lineares limitados, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, é dito uniformemente contínuo, se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Teorema 1.10. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.

Demonstração. Ver [3].

Teorema 1.11. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados. Suponha que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Ver [3].

Teorema 1.12. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então, se verificam:

(a) Para todo $x \in X$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(b) Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(c) Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Em particular, a função $u = T(t)x$, satisfaz $\frac{d}{dt}u = Au$.

Demonstração. Ver [3].

Proposição 1.1. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal.*

Se $x \in D(A)$, então $T(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Demonstração. Ver [1].

Definição 1.3.4. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal.*

Colocando $A^0 = I$, $A^1 = A$ e supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k por

$$D(A^k) = \{x \in D(A^{k-1}) : A^{k-1}x \in D(A)\},$$

$$A^kx = A(A^{k-1}x), \forall x \in D(A^k).$$

Proposição 1.2. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal.*

Então

1. $D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X ;

2. Se $x \in D(A^k)$, então $T(t)x \in D(A^k)$, $t \geq 0$ e

$$\frac{d^k}{dt^k}T(t)x = A^kT(t)x = T(t)A^kx, \forall k \in \mathbb{N};$$

3. $\bigcap_k D(A^k)$ é denso em X .

Demonstração. Ver [1].

Proposição 1.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 . Então,*

$$\forall x \in D(A^n), T(t)x \in C^{n-k}(\mathbb{R}^+, D(A^k)), k = 0, 1, \dots, n.$$

Demonstração. Ver [1].

Como consequência dos teoremas 1.11 e 1.12, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.13. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um Semigrupo C_0 em um espaço de Banach X , A seu gerador e $x \in D(A)$. A aplicação $u(t) := T(t)x$ é a única solução do problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.1)$$

com regularidade

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X). \quad (1.2)$$

Demonstração. Ver [3].

Definição 1.3.5. *Uma função u é solução clássica ou forte do problema*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f(t) \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.3)$$

se $u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1((0, \infty), X)$, onde $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, X espaço de Banach, $x \in X$ e $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$.

Definição 1.3.6. *Uma função $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (1.4)$$

é chamada solução generalizada ou “mild solution” do problema (1.3).

Teorema 1.14. *Para cada $x \in X$, $T > 0$ e $f \in L^1(0, T; X)$, o problema*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f(t) \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.5)$$

possui uma única solução fraca em $[0, T]$ se, e somente se, A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Demonstração. Ver [10].

Definição 1.3.7. Um semigrupo, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é dito semigrupo de contrações se

$$\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Definição 1.3.8. Dizemos que um semigrupo C_0 , $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, é exponencialmente estável se existem constantes positivas μ e $M \geq 1$, tais que

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

Dado o operador A gerador de algum semigrupo C_0 em um espaço de Hilbert X , para recuperar o semigrupo $T(t) := e^{At}$, é necessário introduzir outro objeto,

$$\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X). \quad (1.7)$$

Definiremos a seguir o domínio para que esta aplicação tenha sentido.

Definição 1.3.9. (Resolvente e Espectro) Seja A um operador linear em X , não necessariamente limitado. Definimos o conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, como o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é um operador inversível, isto é, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear e limitado em X . Além disso, definimos o Espectro de A , denotado por $\sigma(A)$, como o complemento do resolvente de A , isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

É importante ressaltar que o espectro de A é formado por três subconjuntos disjuntos: o Espectro Pontual $\sigma_p(A)$, o Espectro Contínuo $\sigma_c(A)$ e o Espectro Residual $\sigma_r(A)$. Estes subconjuntos são definidos da seguinte forma: $\lambda \in \sigma_p(A)$ se $\lambda I - A$ não é injetivo; $\lambda \in \sigma_c(A)$ se $\lambda I - A$ é injetivo, $\lambda I - A$ não é sobrejetivo mas a imagem de $\lambda I - A$ é densa em X e, finalmente, $\lambda \in \sigma_r(A)$ se $\lambda I - A$ é injetivo e sua imagem não é densa em X . Destas três definições segue que $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ e $\sigma_r(A)$ são disjuntos e sua união é exatamente $\sigma(A)$. Denotemos como $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ o operador resolvente de A ou simplesmente o resolvente de A .

Observação 6. No caso de dimensão finita temos que $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$ pois, se $\lambda I - A$ é injetivo, então $\lambda I - A$ é sobrejetivo.

Observação 7. No caso de A ser um operador não limitado com resolvente compacto, isto é, $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador compacto para algum λ_0 , então $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$. Logo $\sigma(A)$ está composto só por autovalores de A (isto é, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$).

Lema 2. O conjunto resolvente $\rho(A)$ é aberto e a função $R(\lambda; A)$ é analítica em $\rho(A)$.

Demonstração. Ver [3].

Teorema 1.15. Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 em X . Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que

$$\|T(t)\|_X \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t > 0.$$

Demonstração. Ver [1].

Definição 1.3.10. Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert X , é dito dissipativo se, para todo $x \in D(A)$,

$$\operatorname{Re}(Ax, x)_X \leq 0, \quad (1.8)$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno de X .

Uma caracterização útil dos operadores dissipativos é a seguinte:

Teorema 1.16. Um operador linear A é dissipativo se, e somente se,

$$\|(\lambda I - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X \quad \forall x \in D(A) \quad e \quad \lambda > 0.$$

Demonstração. Ver [1].

Sejam X um espaço de Hilbert com norma induzida $\|\cdot\|_X$ e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo C_0 gerado por um operador dissipativo A . Para $u_0 \in D(A)$ (dado inicial) definimos as funções $u(t) := T(t)u_0$, solução do problema (1.9), e $E(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2$. Então, procedendo formalmente, temos que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u, u)_X = \operatorname{Re} \left(\frac{du}{dt}, u \right)_X = \operatorname{Re} (Au, u)_X.$$

A função $E(t)$ é chamada a energia do sistema e como A é dissipativo, da equação acima concluímos que

$$\frac{dE}{dt} \leq 0,$$

ou seja, a energia $E(\cdot)$ decresce a medida que o tempo cresce. No contexto físico, a maioria dos fenômenos são dissipativos, ou seja, a energia do sistema associado diminui com o tempo devido à ação de forças externas, tais como a resistência do meio em que eles ocorrem. É importante entender que a escolha do espaço $(X, \|\cdot\|_X)$ é fundamental para determinar um sistema dissipativo.

1.4 Semigrupos C_0 gerados por operadores dissipativos

Tendo um gerador A de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, o teorema 1.13 nos garante a existência de uma única solução para o problema (1.9) dada por $u(t) = T(t)x$. Este fato nos diz que é fundamental conhecer as condições necessárias e suficientes para que um operador A dado, definido em um espaço de Hilbert X , seja gerador infinitesimal de algum semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tal que $u(t) = T(t)x$ seja a solução de (1.9). Neste sentido, apresentamos os importantes teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips.

Teorema 1.17. (Hille-Yosida) *Sejam X um espaço de Banach. Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

- (i) A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,
- (ii) o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e, para todo $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda; A)\|_X \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [3].

Corolário 1.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, de contrações. Então, o conjunto resolvente de A contém o semiplano positivo, isto é, $\mathbb{C}^+ :=$*

$\{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0 \} \subset \rho(A)$. Além disso, para todo $\operatorname{Re} \lambda > 0$, temos que

$$\|R(\lambda; A)\|_X \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Demonstração. Ver [3].

Teorema 1.18. *Sejam X um espaço de Banach. Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo $\|T(t)\|_X \leq Me^{\omega t}$ se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

(ii) *o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o semiplano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ e*

$$\|R(\lambda; A)^n\|_X \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad \forall \operatorname{Re} \lambda > \omega, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Demonstração. Ver [3].

Teorema 1.19. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear com domínio denso $D(A)$ em um espaço de Banach X .*

(i) *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$, tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço X , isto é, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X .*

(ii) *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração. Ver [3].

Como consequência do Teorema de Lumer-Phillips, temos que um operador não limitado A , gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 , é dissipativo se, e somente se, o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é de contrações.

Corolário 1.5. *Seja A um operador linear (não limitado) densamente definido em X , espaço de Hilbert. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, resolvente de A , então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X .*

Demonstração. Ver [3].

Corolário 1.6. *Seja A um operador linear fechado densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Definição 1.4.1. *Diremos que um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores em um espaço X é um grupo em X se as aplicações $t \mapsto T(-t)$ e $t \mapsto T(t)$ formam uma família de semigrupos para $t \geq 0$.*

Definição 1.4.2. *Seja X um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma $\|\cdot\|$.*

- *Um operador A é dito simétrico se $\overline{D(A)} = X$ e $A \subset A^*$, isto é, $(Ax, y) = (x, Ay)$, $\forall x, y \in D(A)$,*
- *A é auto-adjunto se $A = A^*$,*
- *Um operador limitado é unitário se $U^* = U^{-1}$.*

Teorema 1.20. (Stone) *O operador A é o gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários sobre um espaço de Hilbert X se, e somente se, iA é auto-adjunto.*

Demonstração. Ver [1].

Observação 8. *Considere o problema de encontrar u , tal que*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, X espaço de Banach e $u_0 \in X$. As noções de solução clássica ou forte, e de “mild solution” ou solução generalizada se estendem de maneira análoga para o problema (1.9). Assim,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds$$

é chamada “mild solutions” de (1.9).

Para simplificar a linguagem, vamos escrever $A \in G(M, w)$ para exprimir que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0 S , que satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$.

Teorema 1.21. *Seja $A \in G(1, 0)$ e B dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade. Se $D(B) \supset D(A)$ e existem constantes a e b , $0 \leq a < 1$ e $b \geq 0$, tais que*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|Bx\|, \quad \forall x \in D(A),$$

então $A + B \in G(1, 0)$.

Demonstração. Ver [1].

Teorema 1.22. *Se $A \in G(1, 0)$ e $B \in \mathcal{L}(X)$, então $A + B \in G(1, 0)$.*

Demonstração. Ver [1].

Capítulo 2

A Equação Linear de Korteweg-de Vries

2.1 Existência e unicidade do modelo linear

Nesta seção estamos interessados em provar a existência e unicidade do seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u = 0 & , \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < L\}$ e

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in L^\infty(\Omega) \text{ e } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } w, \\ \text{onde } w \text{ é um subconjunto aberto não vazio de } \Omega. \end{array} \right.$$

Caso $a \equiv 0$:

Nesse caso, (2.1) se reduz ao modelo

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + u_x + u_{xxx} = 0 & , \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

A existência e unicidade serão obtidas utilizando a Teoria de Semigrupos. Antes disso observe que, formalmente, se multiplicamos a equação por u e integramos por partes em $[0, L]$, obtemos que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L u^2(x, t) dx = 0.$$

Portanto, escolhendo $X = L^2(\Omega)$ e considerando o operador A definido por

$$\begin{cases} Aw = -w''' - w' \\ A : D(A) \subset X \rightarrow X \\ D(A) = \{u \in H^3 \cap H_0^1(\Omega) / u_x(L) = 0\}, \end{cases} \quad (2.3)$$

(2.2) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u = Au \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Temos então a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Nas condições anteriores, temos que A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em X .*

Demonstração.

Inicialmente, mostraremos que $D(A)$ é denso em X , em seguida que A e A^* são dissipativos e, finalmente, que A é fechado.

1) $D(A)$ é denso em X ,

Como $\overline{D(\Omega)} = X$ e $D(\Omega) \subset D(A) \subset X$, o resultado segue.

2) A e A^* são dissipativos,

Seja $u \in D(A)$

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{X \times X} &= \int_0^L (Au)u dx = \int_0^L (-u_x - u_{xxx})u dx \\ &= - \int_0^L u_x u dx - \int_0^L u_{xxx} u dx = -\frac{1}{2} u_x^2(0) \leq 0; \end{aligned}$$

ou seja; A é dissipativo. Agora, observe que se $u \in D(A)$ e $v \in X$ é um elemento a ser

determinado, temos que

$$\begin{aligned}
\langle Au, v \rangle_{X \times X} &= \int_0^L (-u_x - u_{xxx})v dx = - \int_0^L u_x v dx - \int_0^L u_{xxx} v dx \\
&= -uv \Big|_0^L + \int_0^L uv_x dx - u_{xx}v \Big|_0^L + \int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= \int_0^L uv_x dx + u_x v_x \Big|_0^L - \int_0^L u_x v_{xx} dx \\
&= \int_0^L uv_x dx - uv_{xx} \Big|_0^L + \int_0^L uv_{xxx} dx \\
&= \int_0^L u(v_x + v_{xxx}) dx,
\end{aligned}$$

se assumimos que $v(0) = v(L) = v_x(0) = 0$. Portanto, o adjunto de A é definido por

$$\begin{cases} A^*w = w''' + w' \\ A^* : D(A^*) \subset X \rightarrow X \\ D(A^*) = \{u \in H^3 \cap H_0^1(\Omega); w_x(0) = 0\}. \end{cases}$$

Seja $v \in D(A^*)$.

$$\begin{aligned}
\langle A^*v, v \rangle_{X \times X} &= \int_0^L (A^*v)v dx = \int_0^L (v_x + v_{xxx})v dx \\
&= \int_0^L v_x v dx + \int_0^L v_{xxx} v dx = -\frac{1}{2}v_x^2(L) \leq 0.
\end{aligned}$$

Assim, A^* é dissipativo.

3) A é fechado

Basta mostrar que $A^{**} = A$. Seja $u \in D(A^*)$ e v a ser determinado. Assumindo que

$v(0) = v(L) = v_x(L) = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle A^*u, u \rangle_{X \times X} &= \int_0^L (A^*u)v dx = \int_0^L (u_x + u_{xxx})v dx \\
&= \int_0^L u_x v dx + \int_0^L u_{xxx} v dx \\
&= uv \Big|_0^L - \int_0^L uv_x dx + u_{xx}v \Big|_0^L - \int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= - \int_0^L uv_x dx - u_x v_x \Big|_0^L + \int_0^L u_{xx}v_x dx \\
&= - \int_0^L uv_x dx + uv_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L uv_{xxx} dx \\
&= - \int_0^L u(v_x + v_{xxx})u dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} A^{**}u = -u''' - u' \\ A^{**} : D(A^{**}) \subset X \rightarrow X \\ D(A^{**}) = \{u \in H^3 \cap H_0^1(\Omega); u_x(L) = 0\} \end{cases}$$

Portanto, $A^{**} = A$ e pelo corolário 1.6, temos o resultado desejado. ■

Corolário 2.1. *Para cada $u_0 \in D(A)$ o problema (2.2) possui uma única solução $u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X)$. Se $u_0 \in X$, $u \in C([0, \infty]; X)$.*

Demonstração. Segue de (2.4) que (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Logo, pela proposição 2.1, temos que

$$u(t) = S(t)u_0$$

é solução de (2.1), onde S é o semigrupo gerado por A . Além disso, pelo teorema 1.13

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X).$$

Se $u_0 \in X$, segue da proposição 1.3 que

$$u \in C([0, \infty); X).$$

Caso $a > 0$:

Observemos que o modelo (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + Bu \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde A foi definido em (2.3) e B é dado por

$$\begin{aligned} B : X &\rightarrow X \\ u &\rightarrow -a(x)u. \end{aligned}$$

Logo, para mostrar que $A + B$ gera um semigrupo de contrações de classe C_0 e, consequentemente, que (2.1) possui solução, basta mostrar que $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. De fato, como

$$\|Bu\|_X^2 = \int_0^L |a(x)u|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty}^2 \int_0^L |u|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty}^2 \|u\|_X^2,$$

o corolário 1.7 nos dá o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Se $u_0 \in D(A)$, o problema (2.1) possui uma única solução $u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C([0, \infty); X)$.*

Demonstração.

O resultado é obtido combinando a proposição 2.1 e o teorema 1.22

O seguinte teorema mostra um ganho de regularidade das soluções da equação de Korteweg-de Vries (Efeito regularizante de Kato).

Teorema 2.2. *Se $u_0 \in X$, o problema (2.1) possui uma única solução u , tal que*

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; X). \quad (2.6)$$

Demonstração.

Para obter (2.6), assumiremos inicialmente que $u_0 \in D(A)$, ou seja, que $u \in C([0, T]; D(A))$.

Seja $q \in C^\infty([0, L] \times [0, T])$. Multiplicando (2.1) por qu e integrando em $(0, L) \times (0, T)$, obtemos

$$\int_0^T \int_0^L qu(u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u) dx dt = 0.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L qu u_t dx dt &= \int_0^L \int_0^T \frac{q}{2} \frac{d}{dt} (u^2) dt dx = \int_0^L \left(\frac{q}{2} u^2 \Big|_0^T - \int_0^T \frac{q_t}{2} u^2 dt \right) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{qu^2}{2} \right) (x, T) dx - \int_0^L \left(\frac{qu^2}{2} \right) (x, 0) dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^T q_t \frac{u^2}{2} dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L qu u_x dx dt &= \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2} \frac{d}{dx} (u^2) dx dt = \int_0^T \left(\frac{q}{2} u^2 \Big|_0^L - \int_0^L \frac{q_x}{2} u^2 dx \right) dt \\ &= - \int_0^T \int_0^L q_x \frac{u^2}{2} dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L qu u_{xxx} dx dt &= \int_0^T \left(qu u_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L (q_x u + q u_x) u_{xx} dx \right) dt \\ &= - \int_0^T \int_0^L q_x u u_{xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L q u_x u_{xx} dx dt \\ &= - \int_0^T \left(q_x u u_x \Big|_0^L - \int_0^L (q_{xx} u + q_x u_x) u_x dx \right) dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2} \frac{d}{dx} (u_x^2) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L (q_{xx} u + q_x u_x) u_x dx dt - \int_0^T \frac{q}{2} u_x^2 \Big|_0^L dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L \frac{q_x}{2} u_x^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L \frac{q_{xx}}{2} \frac{d}{dx} u^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L q_x u_x^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \left(q \frac{u_x^2}{2} \right) (0, t) dt + \int_0^T \int_0^L \frac{q_x}{2} u_x^2 dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^L q_{xxx} \frac{u^2}{2} dx dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L q_x u_x^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \left(q \frac{u_x^2}{2} \right) (0, t) dt \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_0^L q u a(x) u dx dt = \int_0^T \int_0^L q a(x) u^2 dx dt.$$

Escolhendo $q \equiv 1$, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^T u_x^2(0, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^L u_0^2 dx - \int_0^T \int_0^L a(x) u^2 dx dt,$$

de onde se conclui que,

$$\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Agora, escolhendo $q(x, t) = x$ obtém-se

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^L u^2 dx dt + \int_0^L x u(x, T) dx - \int_0^L x u_0(x) dx \\ & + 3 \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^L x a(x) u dx dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt \leq \frac{1}{3} \left(\int_0^T \int_0^L u^2 dx dt + L \int_0^L u_0^2 dx \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt \leq \frac{1}{3} \left(\int_0^T \int_0^L u^2 dx dt + L \int_0^L u_0^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L u^2 dx dt + \frac{L}{3} \int_0^L u_0^2 dx \\ &\leq \frac{T}{3} \|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \frac{L}{3} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{T+L}{3} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{T+L}{3}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Pela densidade de $D(A)$ em $L^2(\Omega)$, o resultado se estende à $u_0 \in L^2(\Omega)$ arbitrário. De fato, observe que se $u_0 \in L^2(\Omega)$, existe uma sequência $\{u_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, tal que $u_{0,n} \rightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$. Considerando u_n a solução associada a $u_{0,n}$, a desigualdade acima nos permite mostrar que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ e pela identidade da energia (3), temos o mesmo resultado em $C([0,T];L^2(\Omega))$. Com isso, podemos passar o limite na equação e obter uma função $v \in C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ que é solução fraca do modelo. Logo, por unicidade, temos que $u = v$. Assim, podemos passar o limite em (2.7) e obter o resultado.

2.2 Existência e unicidade do modelo não Linear

Neste seção estamos interessados em provar a existência e unicidade do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0 & , \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

O teorema que enunciamos na sequência será fundamental na obtenção dos resultados.

Teorema 2.3. *Para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$, o problema (2.8) tem uma única solução fraca*

$$u \in L^2_{loc}(0, \infty; H_0^1) \cap C(0, \infty; L^2(\Omega)). \quad (2.9)$$

Demonstração. Uma demonstração detalhada desse resultado pode ser encontrado em [26] e [5].

O teorema principal desse capítulo é obtido derivando a equação em (2.7) e analisando a regularidade de $v = u_t$, dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.4. *Seja u a solução de (2.8) obtida no teorema anterior. Então, o problema*

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + (uv)_x + a(x)v = 0 & , \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ v_x(L, t) = 0 & , \quad \forall t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & , \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

tem uma única solução fraca $v \in L^2(0, T; H_0^1) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, sempre que $v_0 \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [4].

Procedendo como em [26] e [5], mostramos que (2.10) possui uma única solução local $v \in L^2_{loc}(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T_0]; L^2(\Omega))$. Além disso,

$$v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)(-(uv)_x)ds,$$

onde $S(t)$ é semigrupo associado à parte linear de (2.10). Assim para concluir a prova é suficiente provar que a solução existe globalmente. Para isto é necessário algumas estimativas a priori, que serão obtidas em diversos passos.

Primeiramente, multiplicamos a equação em (2.10), por v e integramos por partes em $(0, L)$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v^2 dx + \frac{1}{2} v_x^2(0, T) + \int_0^L a(x) v^2 dx = \int_0^L uvv_x dx, \quad (2.11)$$

pois $\int_0^L v(uv)_x dx = - \int_0^L uvv_x dx$. Integrando a igualdade acima de 0 a T e aplicando as desigualdades de Cauchy Schwarz e Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L v^2(x, T) dx &\leq \int_0^L v_0^2 dx + 2 \int_0^T \int_0^L |uvv_x| dx dt \\ &\leq \int_0^L v_0^2 dx + 2 \left(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)} \|v_x\|_{L^2(\Omega)} dt \right) \\ &\leq \int_0^L v_0^2 dx + 2 \left(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para estimar os dois últimos termos no lado direito de (2.12) multiplicamos a equação (2.10) por xv e integramos em $(0, L) \times (0, T)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt + \frac{1}{3} \int_0^L xv^2(x, T) dx + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L xa(x)v^2 dx dt = \\ \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt + \frac{1}{3} \int_0^L xv_0^2(x) dx + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L xuvv_x dx dt - \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L uv^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.13)$$

pois

$$\int_0^T \int_0^L xv(uv)_x dx dt = xv(uv) \Big|_0^L - \int_0^L uv^2 dx - \int_0^T \int_0^L xuvv_x dx.$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt &\leq \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L xuvv_x dx dt + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L uv^2 dx dt \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt + \frac{1}{3} \int_0^L xv_0^2(x) dx, \end{aligned} \quad (2.14)$$

pois os outros termos que aparecem no lado esquerdo de (2.12) são positivos. Assim, procedendo como em (2.13) e usando a desigualdade de Poncairé, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L x u v v_x dx dt &\leq \frac{2L}{3} \int_0^T \int_0^L |u v v_x| dx dt \\
&\leq \frac{2}{3} \int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)} \|v_x\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{2}{3} \left(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{L}{3\delta} \int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{L\delta}{3} \int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\leq \frac{L}{3\delta} \int_0^T \|uv\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt + \frac{L\delta}{3} \int_0^T \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L u v^2 dx dt &\leq \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L |u v^2| dx dt \\
&\leq \frac{2}{3} \int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{2c}{3} \left(\int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{c}{3\delta} \int_0^T \|uv\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{c\delta}{3} \int_0^T \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\leq \frac{c}{3\delta} \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{c\delta}{3} \int_0^T \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt &\leq \frac{c+L}{3\delta} \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{(c+L)\delta}{3} \int_0^T \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (2.15) \\
&+ \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt + \frac{L}{3} \int_0^L v_0^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto, para algum $\delta > 0$, suficientemente pequeno, temos que existe $c > 0$, tal que

$$\int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt \leq c \left\{ \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\}. \quad (2.16)$$

Combinando (2.12) e (2.16) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L v^2(x, T) dx &\leq \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt \\
&\leq \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\quad + c \left\{ \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\} \\
&\leq (c+1) \left\{ \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\}.
\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Gronwall e o teorema 2.3 garantimos a existência de uma constante $c > 0$, tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{(c \int_0^T (1 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) dt)}.$$

Assim,

$$\|v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C, \quad (2.17)$$

onde $C = C(T, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \|v_0\|_{L^2(\Omega)})$. Por outro lado, combinando (2.16), (2.17) e o teorema 2.9 segue que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 &\leq c \left\{ \int_0^L v_0^2 dx + \int_0^T (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right\} \\
&\leq c \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + c \|v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \int_0^T (1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2) dt \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

onde $C = C(T, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \|v_0\|_{L^2(\Omega)})$.

A unicidade pode ser obtida seguindo os mesmos argumentos apresentados em [8].

Agora podemos provar o resultado principal desse capítulo:

Teorema 2.5. *Se $u_0 \in D(A)$, o problema (2.8) possui uma única solução forte.*

Demonstração. Segue do teorema 2.3 que existe $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$.

Por outro lado, segue do teorema 2.4 que

$$u_{xxx} = -u_t - u_x - uu_x - a(x)u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

de onde se obtém que $u \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega))$. Para mostrar que $u_x(L, t) = 0$, procedemos da seguinte forma: por um lado, sabe-se que

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi) + (u_x(t), \varphi) + (u_x(t), \varphi_{xx}) - \frac{1}{2}(u^2(t), \varphi_x) + (a(x)u, \varphi) = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(0, T),$$

$\forall \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, tal que $\varphi_x(0) = 0$. Por outro lado, u satisfaz

$$u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

de onde se obtém que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u(t), \varphi) \theta'(t) dt + \int_0^T (u_x(t), \varphi) \theta(t) dt + \int_0^T (u_x(t), \varphi_{xx}) \theta(t) dt \\ & + \int_0^T (u(t)u_x(t), \varphi) \theta(t) dt - \int_0^T u_x(L, t) \varphi_x(L) \theta(t) dt + \int_0^T (a(x)u, \varphi) dt = 0. \end{aligned}$$

Assumindo que $\varphi_x(L) = 1$ e comparando as duas últimas identidades. Obtemos que

$$\int_0^T u_x(L, t) \theta(t) dt = 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Portanto, $u_x(L, t) = 0$.

Capítulo 3

Estimativas de Carleman

Seja $Q = (0, T) \times (-L, L)$. Para T e $L \in \mathbb{R}^+$, introduzimos os espaços

$$V = \{\zeta \in L^2(0, T, H^3(-L, L)), \zeta_t \in L^2(0, T, H^1(-L, L))\}$$

munido da norma

$$\|\zeta\|_V = (\|\zeta\|_{L^2(0, T, H^3(-L, L))}^2 + \|\zeta_t\|_{L^2(0, T, H^1(-L, L))}^2)^{\frac{1}{2}},$$

e

$$Z = \{q \in C^3([0; T] \times [-L; L]); q|_{x=-L} = q_x|_{x=-L} = q_{xx}|_{x=-L} = q|_{x=L} = 0\}.$$

Teorema 3.1. *Sejam $R > 0$ e $\zeta \in V$, tal que $\|\zeta\|_V \leq R$. Então, existem constantes positivas $s_0 = s_0(L, T, R)$ e $C_0 = C_0(L, T, R)$ e uma função diferenciável positiva em $[-L, L]$, tal que para todo $s \geq s_0$ e todo $q \in Z$, temos*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-L}^L \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |q|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |q_x|^2 \frac{s}{t(T-t)} |q_{xx}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\ \leq C_0 \int_0^T \int_{-L}^L |q_t + q_{xxx} + \zeta q_x|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt. \end{aligned}$$

Demonstração:

Sejam $R > 0$, $\zeta \in V$ com $\|\zeta\|_V \leq R$, $\psi = \psi(x)$ função positiva (que será especificada da mais adiante) de classe C^3 em $[-L, L]$ e $\varphi(t, x) = \frac{\psi(x)}{t(T-t)}$. Para $q \in Z$ e $s > 0$, definimos $u = e^{-s\varphi} q$ e $w = e^{-s\varphi} P(e^{s\varphi} u)$, onde

$$P = \partial_t + \partial_{xxx} + \zeta \partial_x.$$

Assim,

$$\partial_t(e^{s\varphi}u) = s\varphi_t e^{s\varphi}u + e^{s\varphi}u_t \quad (3.1)$$

$$\partial_x(e^{s\varphi}u) = s\varphi_x e^{s\varphi}u + e^{s\varphi}u_x$$

$$\partial_{xx}(e^{s\varphi}u) = s\varphi_{xx}e^{s\varphi}u + s\varphi_x(s\varphi_x e^{s\varphi}u + e^{s\varphi}u_x) + s\varphi_x e^{s\varphi}u_x + e^{s\varphi}u_{xx},$$

$$\begin{aligned} \partial_{xxx}(e^{s\varphi}u) &= s\varphi_{xxx}e^{s\varphi}u + s\varphi_{xx}(s\varphi_x e^{s\varphi}u + e^{s\varphi}u_x) + [s\varphi_{xx}(s\varphi_x e^{s\varphi}u + e^{s\varphi}u_x)] \\ &\quad + s\varphi_x(s\varphi_{xx}e^{s\varphi}u + s^2\varphi_x^2 e^{s\varphi}u + s\varphi_x e^{s\varphi}u_x + s\varphi_x e^{s\varphi}u_x + e^{s\varphi}u_{xx}) \\ &\quad + s\varphi_{xx}e^{s\varphi}u_x + s\varphi_x(e^{s\varphi}s\varphi_x u_x + s\varphi_x e^{s\varphi}u_{xx}) + s\varphi_x e^{s\varphi}u_{xx} + e^{s\varphi}u_{xxx}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_{xxx}(e^{s\varphi}u) &= s\varphi_{xxx}e^{s\varphi}u + s^2\varphi_x\varphi_{xx}e^{s\varphi}u + s\varphi_{xx}e^{s\varphi}u_x + s^2\varphi_{xx}\varphi_x e^{s\varphi}u + s\varphi_{xx}e^{s\varphi}u_x \\ &\quad + s^2\varphi_x\varphi_{xx}e^{s\varphi}u + s^3\varphi_x^3 e^{s\varphi}u + s^2\varphi_x^2 e^{s\varphi}u_x + s^2\varphi_x^2 e^{s\varphi}u_x + s\varphi_x e^{s\varphi}u_{xx} \quad (3.2) \\ &\quad + s\varphi_{xx}e^{s\varphi}u_x + e^{s\varphi}s^2\varphi_x^2 u_x + s^2\varphi_x^2 e^{s\varphi}u_{xx} + s\varphi_x e^{s\varphi}u_{xx} + e^{s\varphi}u_{xxx} \end{aligned}$$

e

$$\zeta\partial(e^{s\varphi}u) = \zeta s\varphi_x e^{s\varphi}u + \zeta e^{s\varphi}u_x. \quad (3.3)$$

Segue então de (3.1), (3.2) e (3.3) que a função w pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} w &= (s\varphi_t u + u_t) + (s\varphi_{xxx}u + s^2\varphi_x\varphi_{xx}u + s\varphi_{xx}u_x + s\varphi_{xx}u_x + s^2\varphi_x\varphi_{xx}u + s^2\varphi_x\varphi_{xx}u) \\ &\quad + s^3\varphi_x^3 u + s^2\varphi_x^2 u_x + u_{xx}s\varphi_x + s\varphi_{xx}u_x + 2s^2\varphi_x^2 u_x + 2s\varphi_x u_{xx} + u_{xxx}) \\ &\quad + (\zeta s\varphi_x u + \zeta u_x), \end{aligned}$$

ou então

$$\begin{aligned} w &= (s\varphi_t + s\varphi_{xxx} + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx} + s^3\varphi_x^3 + \zeta s\varphi_x)u \\ &\quad + (3s^2\varphi_x^2 + 3s\varphi_{xx} + \zeta)u_x + (3s\varphi_x)u_{xx} + u_{xxx} + u_t \\ w &= Au + Bu_x + Cu_{xx} + u_{xxx} + u_t, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= s(\varphi_t + \varphi_{xxx} + \zeta s\varphi_x) + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx} + s^3\varphi_x^3 \\ B &= 3s^2\varphi_x^2 + 3s\varphi_{xx} + \zeta \\ C &= 3s\varphi_x. \end{aligned}$$

Introduzimos também as seguintes notações

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + s^3\varphi_x^3 \\ \tilde{B} &= (3 - \delta)s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2 \\ M_1(u) &= u_t + u_{xxx} + \tilde{B}u_x \\ M_2(u) &= \tilde{A}u + Cu_{xx}\end{aligned}$$

onde δ é uma constante positiva que será determinada mais adiante. Portanto,

$$\begin{aligned}M_1(u) + M_2(u) &= \{s\varphi_t + s\varphi_{xxx} + s\zeta\varphi_x + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx} + s^3\varphi_x^3\}u + \{3s^2\varphi_x^2 + 3s\varphi_{xx} + \zeta\}u_x \\ &\quad + 3s\varphi_xu_{xx} + u_{xxx} + u_t - (s\zeta\varphi_x + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx})u - (\zeta + \delta s\varphi_{xx})u_x\end{aligned}$$

e tendo em vista a definição da função w , obtém-se

$$M_1(u) + M_2(u) = w - (s\zeta\varphi_x + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx})u - (\zeta + \delta s\varphi_{xx})u_x.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|M_1(u) + M_2(u)\|^2 &\leq 3\left(\|w\|^2 + \|(s\zeta\varphi_x + 3s^2\varphi_x\varphi_{xx})u\|^2 + \|(\zeta + \delta s\varphi_{xx})u_x\|^2\right) \\ &\leq 3\left(\|w\|^2 + s^2\|(\zeta\varphi_x + 3s\varphi_x\varphi_{xx})u\|^2 + \|(\zeta + \delta s\varphi_{xx})u_x\|^2\right). \quad (3.4)\end{aligned}$$

Agora, assumindo que as funções ζ e φ são tais que

$$|\zeta(t, x)| \leq \delta s|\varphi_{xx}(t, x)|, \quad \forall (x, t) \in Q,$$

obtém-se

$$\begin{aligned}|\zeta + 3s\varphi_{xx}|^2 &\leq |\zeta|^2 + 6s|\zeta\varphi_{xx}| + 9s^2|\varphi_{xx}|^2 \\ &\leq s^2\delta^2|\varphi_{xx}|^2 + 6\delta s^2|\varphi_{xx}|^2 + 9s^2|\varphi_{xx}|^2 \\ &= s^2|\varphi_{xx}|^2(3 + \delta)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$s^2\|(\zeta + 3s\varphi_{xx})\varphi_x u\|_{L^2(Q)}^2 \leq s^4(3 + \delta)^2\|\varphi_x\varphi_{xx}u\|_{L^2(Q)}^2.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}|\zeta + 3s\varphi_{xx}|^2 &\leq |\zeta|^2 + \delta^2 s^2|\zeta\varphi_{xx}|^2 + 2\delta s|\zeta\varphi_{xx}| \\ &\leq \delta^2 s^2|\varphi_{xx}|^2 + \delta^2 s^2|\varphi_{xx}|^2 + 2\delta^2 s^2|\varphi_{xx}|^2 \\ &= 4\delta^2 s^2|\varphi_{xx}|^2,\end{aligned}$$

o que nos garante que

$$\|(\zeta + \delta s \varphi_{xx})u_x\|_{L^2(Q)}^2 \leq 4\delta^2 s^2 \|\varphi_{xx}u_x\|_{L^2(Q)}^2.$$

Combinando (3.4) com as desigualdades acima, obtemos

$$\|M_1(u) + M_2(u)\|^2 \leq 3 \left(\|w\|_{L^2(Q)}^2 + (3 + \delta)^2 s^4 \|\varphi_x \varphi_{xx} u\|_{L^2(Q)}^2 + 4\delta^2 s^2 \|\varphi_{xx}u_x\|_{L^2(Q)}^2 \right). \quad (3.5)$$

Por outro lado,

$$\|M_1(u) + M_2(u)\|^2 = \|M_1(u)\|_{L^2(Q)}^2 + \|M_2(u)\|_{L^2(Q)}^2 + 2 \int_0^T \int_{-L}^L M_1(u)M_2(u) dx dt. \quad (3.6)$$

Por isso, na sequência estimemos o termo

$$\int_0^T \int_{-L}^L M_1(u)M_2(u) dx dt.$$

Considere as seguintes notações

$$\int \int u = \int_0^T \int_{-L}^L u(t, x) dx dt \quad e \quad \int u = \int_0^T u(t, L) dt.$$

Temos que

$$\begin{aligned} 2 \int \int M_1(u)M_2(u) &= 2 \int \int M_1(u)(\tilde{A}u + Cu_{xx}) \\ &= 2 \int \int M_1(u)\tilde{A}u + 2 \int \int Cu_{xx}M_1(u), \\ &= 2 \int \int M_1(u)\tilde{A}u + 2 \int \int Cu_{xx}(u_t + u_{xxx} + \tilde{B}u_x) \\ &= 2 \int \int M_1(u)\tilde{A}u + 2 \int \int Cu_{xx}u_t + 2 \int \int (u_{xxx} + \tilde{B}u_x)Cu_{xx} \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$I_1 = 2 \int \int M_1(u)\tilde{A}u; \quad I_2 = 2 \int \int Cu_{xx}u_t; \quad I_3 = 2 \int \int (u_{xxx} + \tilde{B}u_x)Cu_{xx}.$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int (u_t + u_{xxx} + \tilde{B}u_x)\tilde{A}2u = \int \int u_t \tilde{A}2u + \int \int u_{xxx} \tilde{A}2u + \int \int \tilde{B}u_x \tilde{A}2u \\ &= \int \int \frac{d}{dt}(u^2) \tilde{A} + \int \int \frac{d}{dx}(u^2) \tilde{B} \tilde{A} + \int \int u_{xxx} \tilde{A}2u \\ &= \int \left\{ u^2 \tilde{A} \right\}_0^T dx - \int \int u^2 \tilde{A}_t + \int \left\{ u^2 \tilde{B} \tilde{A} \right\}_{-L}^L dt - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x + \int \int u_{xxx} \tilde{A}2u. \end{aligned}$$

O primeiro termo da igualdade acima pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u^2 \tilde{A} \big|_0^T &= \lim_{t \rightarrow T} u^2 \tilde{A} - \lim_{t \rightarrow 0} u^2 \tilde{A} \\ &= \lim_{t \rightarrow T} e^{-s\varphi} q \tilde{A} - \lim_{t \rightarrow 0} e^{-s\varphi} q \tilde{A} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x + \int \int u_{xxx} \tilde{A} 2u \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x + \int \left\{ u_{xx} 2u \tilde{A} \right\}_{-L}^L dt - \int \int u_{xx} 2u_x \tilde{A} - \int \int 2u u_{xx} \tilde{A}_x \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x - \int \int u_{xx} 2u_x \tilde{A} - \int \int 2u u_{xx} \tilde{A}_x \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x - \int u_x^2 \tilde{A} + \int \int u_x^2 \tilde{A}_x - \int \int 2u u_{xx} \tilde{A}_x \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x - \int u_x^2 \tilde{A} + \int \int u_x^2 \tilde{A}_x \\ &\quad - 2 \left\{ \int \{ u_x u \tilde{A}_x \}_{-L}^L dt - \int \int u_x (u_x \tilde{A}_x + u \tilde{A}_{xx}) \right\} \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x - \int u_x^2 \tilde{A} + \int \int u_x^2 \tilde{A}_x \\ &\quad - \left\{ -2 \int \int u_x^2 \tilde{A}_x - \int \int \frac{d}{dx} (u^2) \tilde{A}_{xx} \right\} \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x - \int u_x^2 \tilde{A} + \int \int u_x^2 \tilde{A}_x \\ &\quad - \left\{ -2 \int \int u_x^2 \tilde{A}_x - \int \{ u^2 \tilde{A}_{xx} \}_{-L}^L + \int \int u^2 \tilde{A}_{xxx} \right\} \\ &= - \int \int u^2 \tilde{A}_t - \int \int u^2 (\tilde{B} \tilde{A})_x - \int u_x^2 \tilde{A} + 3 \int \int u_x^2 \tilde{A}_x - \int u^2 \tilde{A}_{xxx} \\ &= - \int \int (\tilde{A}_t + (\tilde{B} \tilde{A})_x + \tilde{A}_{xxx}) u^2 + 3 \int \int u_x^2 \tilde{A}_x - \int u_x^2 \tilde{A}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_1 = - \int \int (\tilde{A}_t + (\tilde{B} \tilde{A})_x + \tilde{A}_{xxx}) u^2 + 3 \int \int u_x^2 \tilde{A}_x - \int u_x^2 \tilde{A}. \quad (3.8)$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2 \int \int u_t C u_{xx} = \int \{2u_t u_x C\}_{-L}^L dt - \int \int 2u_x u_{tx} C - \int \int 2u_x u_t C_x \\
&= - \int \int 2u_x u_{tx} C - \int \int 2u_x u_t C_x \\
&= \int \{u_x^2\}_0^T dx + \int \int C_t u_x^2 + \int \int 2C_x (Au + Bu_x + Cu_{xx} + u_{xxx} - w)u_x \\
&= \int \int C_t u_x^2 + \int \int 2C_x Au u_x + \int \int 2C_x B u_x^2 + \int \int 2C_x C u_{xx} u_x + \int \int 2C_x u_{xxx} u_x \\
&\quad - \int \int 2C_x w u_x \\
&= \int \int C_t u_x^2 + \int \{u^2 C_x A\}_{-L}^L dt - \int \int u^2 (C_x A)_x + \int \int 2C_x B u_x^2 + \int u_x^2 C_x C \\
&\quad - \int \int u_x^2 (C_x C)_x + \int \int 2C_x u_{xxx} u_x - \int \int 2C_x w u_x \\
&= \int \int C_t u_x^2 - \int \int u^2 (C_x A)_x + \int \int 2C_x B u_x^2 - \int \int u_x^2 (C_x C)_x + \int \int 2C_x u_{xxx} u_x \\
&\quad - \int \int 2C_x w u_x + \int u_x^2 C_x C \\
&= \int \int C_t u_x^2 - \int \int u^2 (C_x A)_x + \int \int 2C_x B u_x^2 - \int \int u_x^2 (C_x C)_x + 2 \int \{C_x u_x u_{xx}\}_{-L}^L dt \\
&\quad - \int \int 2u_x u_{xx} C_{xx} - \int \int 2u_{xx}^2 C_x - \int \int 2C_x w u_x + \int u_x^2 C_x C \\
&= \int \int C_t u_x^2 - \int \int u^2 (C_x A)_x + \int \int 2C_x B u_x^2 - \int \int u_x^2 (C_x C)_x - \int \{u_x^2 C_{xx}\}_{-L}^L dt \\
&\quad + \int \int u_x^2 C_{xxx} - \int \int 2u_{xx}^2 C_x - \int \int 2C_x w u_x + \int u_x^2 C_x C + 2 \int C_x u_x u_{xx} \\
&= \int \int C_t u_x^2 - \int \int u^2 (C_x A)_x + \int \int 2C_x B u_x^2 - \int \int u_x^2 (C_x C)_x + \int \int u_x^2 C_{xxx} \\
&\quad - \int \int 2u_{xx}^2 C_x - \int \int 2C_x w u_x + \int u_x^2 C_x C + 2 \int C_x u_x u_{xx} - \int u_x^2 C_{xx}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_2 &= - \int \int (C_x A)_x u^2 + \int \int \{C_t + 2C_x B - (C_x C)_x + C_{xxx}\} u_x^2 - \int \int 2C_x (u_{xx})^2 \\
&\quad - \int \int 2C_x w u_x + \int u_x^2 C_x C + 2 \int C_x u_x u_{xx} - \int u_x^2 C_{xx}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \int 2(u_{xxx} + \tilde{B}u_x)Cu_{xx} = \int \int (2u_{xxx}Cu_{xx} + 2\tilde{B}Cu_xu_{xx}) \\
&= \int \int \frac{d}{dx}(u_{xx})^2 C + \int \int \tilde{B}C \frac{d}{dx}(u_x)^2 \\
&= \int u_{xx}^2 C - \int \int u_{xx}^2 C_x + \int u_x^2 \tilde{B}C - \int \int u_x^2 (\tilde{B}C)_x \\
&= - \int \int (\tilde{B}C)_x u_x^2 + \int \tilde{B}C u_x^2 - \int \int C_x u_{xx}^2 + \int C u_{xx}^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.6), temos que

$$\begin{aligned}
2 \int \int M_1(u)M_2(u) &= - \int \left\{ \tilde{A}_t + \tilde{A}_{xxx} + (\tilde{A}\tilde{B})_x + (C_x A)_x \right\} u^2 \\
&\quad + \int \int \left\{ 3\tilde{A}_x + C_t + 2C_x B - (CC_x)_x + C_{xxx} - (\tilde{B}C)_x \right\} u_x^2 \\
&\quad - 3 \int \int C_x u_{xx}^2 - 2 \int \int w C_x u_x + \int (-\tilde{A} + CC_x - C_{xx} + \tilde{B}C) u_x^2 \\
&\quad + \int C u_{xx}^2 + 2 \int C_x u_x u_{xx}.
\end{aligned}$$

Introduzindo a notação

$$\begin{aligned}
D &= - \left\{ \tilde{A}_t + \tilde{A}_{xxx} + (\tilde{A}\tilde{B})_x + (C_x A)_x \right\} \\
E &= \left\{ 3\tilde{A}_x + C_t + 2C_x B - (CC_x)_x + C_{xxx} - (\tilde{B}C)_x \right\} \\
F &= -\tilde{A} + CC_x - C_{xx} + \tilde{B}C,
\end{aligned}$$

a identidade acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
2 \int \int M_1(u)M_2(u) &= \int \int D u^2 + \int \int E u_x^2 - 3 \int \int C_x u_{xx}^2 - 2 \int \int w C_x u_x \\
&\quad + \int F u_x^2 + \int C u_{xx}^2 + 2 \int C_x u_x u_{xx}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, se ε é qualquer número que pertence ao intervalo $(0, 1)$, pela desigualdade de Cauchy - schwarz, temos

$$\begin{aligned}
2 \int \int |w C_x u_x| &\leq 2 \left(\int \int w^2 \right)^{1/2} \left(\int \int C_x^2 u_x^2 \right)^{1/2} \\
&= 2 \left(\varepsilon^{-1} \int \int w^2 \right)^{1/2} \left(\varepsilon \int \int C_x^2 u_x^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon \int \int C_x^2 u_x^2 + \varepsilon^{-1} \int \int w^2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado,

$$2 \left| \int C_x u_x u_{xx} \right| \leq \int u_{xx}^2 + \int C_x^2 u_x^2 \quad (3.13)$$

e de (3.5), (3.6), (3.11), (3.12) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \int \int D u^2 + \int \int E u_x^2 &+ \int \int (-3C_x u_{xx}^2) + \int F u_x^2 + \int C u_{xx}^2 + \|M_1(u)\|^2 + \|M_2(u)\|^2 \\ &= 2 \int \int w C_x u_x - 2 \int C_x u_x u_{xx} + \|M_1(u) + M_2(u)\|^2 \\ &\leq \varepsilon \int \int C_x^2 u_x^2 + \varepsilon^{-1} \int \int w^2 + \int u_{xx}^2 + \int C_x^2 u_x^2 \\ &+ 3 \int \int w^2 + 3(3 + \delta)^2 s^4 \int \int \varphi_x^2 \varphi_{xx}^2 u^2 + 12\delta^2 s^2 \int \int \varphi_{xx}^2 u_x^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \int \{D - 3(3 + \delta)^2 s^4 \varphi_x^2 \varphi_{xx}^2\} u^2 + \int \int \{E - \varepsilon C_x^2 - 12\delta^2 s^2 \varphi_{xx}^2\} u_x^2 + \int \int (-3C_x u_{xx}^2) \\ + \int (F - C_x^2) u_x^2 + \int (C - 1) u_{xx}^2 \leq (3 + \varepsilon^{-1}) \int \int w^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Observamos que a função ψ e as constantes δ , ε e s_0 , introduzidas no enunciado do teorema são escolhidas de modo que os termos entre parênteses na parte esquerda da desigualdade (3.14) sejam positivas. Na sequência analisaremos os termos que aparecem no lado esquerdo de (3.14). Começaremos por D .

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned} \tilde{A}_t &= s(\varphi_{tt} + \varphi_{xxxt}) + 3s^3 \varphi_x^2 \varphi_{xt} \\ &= s\varphi_{tt} + s\varphi_{xxxt} + 3s^3 \varphi_x^2 \varphi_{xt} \\ \tilde{A}_{xxx} &= s(\varphi_{txxx} + \varphi_{xxxxxx}) + 3s^3(2\varphi_{xx}^3 + 6\varphi_x \varphi_{xx} \varphi_{xxx} + \varphi_x^2 \varphi_{xxxx}) \\ \tilde{A}\tilde{B} &= \{s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + s^3 \varphi_x^3\}((3 - \delta)s\varphi_{xx} + 3s^2 \varphi_x^2) \\ &= s^2(3 - \delta)\varphi_{xx}(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + 3s^3 \varphi_x^2(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + s^4 \varphi_x^3 \varphi_{xx}(3 - \delta) + 3s^5 \varphi_x^5 \\ &= s^2(3 - \delta)\varphi_{xx}\varphi_t + s^2(3 - \delta)\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 3s^3 \varphi_x^2 \varphi_t + 3s^3 \varphi_x^2 \varphi_{xxx} \\ &\quad + s^4(3 - \delta)\varphi_x^3 \varphi_{xx} + 3s^5 \varphi_x^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}\tilde{B})_x &= s^2(3-\delta)(\varphi_{xxx}\varphi_t + \varphi_{xx}\varphi_{tx}) + s^2(3-\delta)(\varphi_{xxx}^2 \\
&\quad + \varphi_{xx}\varphi_{xxxx}) + 3s^3(2\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_t + \varphi_x^2\varphi_{tx}) \\
&\quad + 3s^3(2\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + \varphi_x^2\varphi_{xxxx}) + s^4(3-\delta)(3\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 + \varphi_x^3\varphi_{xxx}) + 15s^5\varphi_x^4\varphi_{xx} \\
(C_x A) &= 3s^2\varphi_{xx}(\varphi_t + \varphi_{xxx} + \zeta s\varphi_x) + 9s^3\varphi_x\varphi_{xx}^2 + 3s^4\varphi_x^3\varphi_{xx} \\
(C_x A)_x &= 3s^2\varphi_{xxx}(\varphi_t + \varphi_{xxx} + \zeta s\varphi_x) + 3s^2\varphi_{xx}(\varphi_{tx} + \varphi_{xxxx} + s[\zeta_x\varphi_x + \zeta\varphi_{xx}]) \\
&\quad + 9s^3(\varphi_{xx}^3 + 2\varphi_{xx}\varphi_{xxx}\varphi_x) + 3s^4(3\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 + \varphi_x^3\varphi_{xxx}).
\end{aligned}$$

Assim, D pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
D &= -[(s\varphi_{tt} + s\varphi_{xxxt} + 3s^3\varphi_x^2\varphi_{xt}) + s\varphi_{txxx} + s\varphi_{xxxxxx} + 6s^3\varphi_{xx}^3 + 18s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} \\
&\quad + 3s^3\varphi_x^2\varphi_{xxxx} + s^2(3-\delta)\varphi_{xxx}\varphi_t + s^2(3-\delta)\varphi_{xx}\varphi_{tx} + s^2(3-\delta)\varphi_{xxx}^2 \\
&\quad + s^2(3-\delta)\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} + 6s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_t + 3s^3\varphi_x^2\varphi_{tx} + 6s^3\varphi_x\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 3s^3\varphi_x^2\varphi_{xxxx} \\
&\quad + 3s^4(3-\delta)\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 + s^4(3-\delta)\varphi_x^3\varphi_{xxx} + 15s^5\varphi_x^4\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_{xxx}\varphi_t \\
&\quad + 3s^2\varphi_{xxx}^2 + 3s^3\zeta\varphi_{xxx}\varphi_x + 3s^2\varphi_{xx}\varphi_{tx} + 3s^2\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} + 3s^3\varphi_{xx}\zeta_x\varphi_x \\
&\quad + 3s^3\zeta\varphi_{xx}^2 + 9s^3\varphi_{xx}^3 + 18s^3\varphi_{xx}\varphi_{xxx}\varphi_x \\
&\quad + 9s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 + 3s^4\varphi_x^3\varphi_{xxx}].
\end{aligned}$$

Agora, observe que existe uma constante $K > 0$, tal que

$$\|\zeta\|_{L^\infty(Q)} + \|\zeta_x\|_{L^\infty(Q)} \leq KR,$$

pois $\|\zeta\|_V \leq R$. Por outro lado, como $\varphi = \varphi(x, t) = \frac{\psi(x)}{t(T-t)}$, segue da identidade acima que

$$D = -15 \frac{s^5(\psi'(x))^4\psi''(x)}{t^5(T-t)^5} + \frac{O(s^4)}{t^4(T-t)^4}, \quad \text{quando } s \longrightarrow \infty. \quad (3.15)$$

A partir de agora, vamos assumir que a função $\psi = \psi(x)$ mencionada acima, é tal que

$$|\psi''(x)| > 0 \text{ e } \psi''(x) < 0, \quad \forall x \in [-L, L].$$

Assim, se $m_1 := -15(\psi'(x))^2\psi''(x)$, então

$$m_1(x) > 0 \text{ e } \exists K_1 > 0, \quad \text{tal que } K_1 \leq m_1(x), \quad \forall x \in [-L, L]$$

pois $\psi \in C^3[-L, L]$. Logo,

$$\frac{K_1 s^5}{t^5(T-t)^5} \leq \frac{m_1(x)s^5}{t^5(T-t)^5}, \quad \text{quando } s > 0,$$

e por (3.15) obtém-se

$$\frac{K_1 s^5}{t^5(T-t)^5} + \frac{O(s^4)}{t^4(T-t)^4} \leq D, \quad \text{quando } s > 0.$$

Assim,

$$\frac{K_1 s^5}{t^5(T-t)^5} + \frac{O(s^4)}{t^4(T-t)^4} - 3(3+\delta)s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 \leq D - 3(3+\delta)s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2,$$

ou seja,

$$\frac{K_1 s^5}{t^5(T-t)^5} + \frac{O'(s^4)}{t^4(T-t)^4} \leq D - 3(3+\delta)s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\frac{K_1 s^5}{t^5(T-t)^5} \leq D - 3(3+\delta)s^4\varphi_x^2\varphi_{xx}^2.$$

Por outro lado,

$$E = 3\tilde{A}_x + C_t + 2C_x B - (CC_x)_x + C_{xxx} - (\tilde{B}C)_x$$

onde

$$\tilde{A}_x = s\varphi_{tx} + s\varphi_{xxx} + 3s^3\varphi_x^2\varphi_{xx}$$

$$C_t = 3s\varphi_{xt}$$

$$C_x = 3s\varphi_{xx}$$

$$C_{xxx} = 3s\varphi_{xxxx}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E &= 3s\varphi_{tx} + 3s\varphi_{xxxx} + 9s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 3s\varphi_{xt} + 6s\zeta\varphi_{xx} + 18s^2\varphi_{xx}^2 + 18s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} \\ &\quad - (9s^2\varphi_x\varphi_{xx})_x + 3s\varphi_{xxxx} - \{((3-\delta)s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2)(3s\varphi_x)\}_x \\ &= 9s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 6s\varphi_{xx}(3s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2) - (9s^2\varphi_x\varphi_{xx})_x - \{((3-\delta)s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2)(3s\varphi_x)\}_x \\ &\quad + (6s\varphi_{tx} + 6s\varphi_{xxxx} + 6s\zeta\varphi_{xx}) \\ &= 9s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 6s\varphi_{xx}(3s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2) - 9s^2\varphi_{xx}^2 - 9s^2\varphi_x\varphi_{xxx} - 3s^2(3-\delta)\varphi_x\varphi_{xxx} \\ &\quad - 18s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 3s^2(3-\delta)\varphi_{xx}^2 + 9s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + (6s\varphi_{tx} + 6s\varphi_{xxxx} + 6s\zeta\varphi_{xx}). \end{aligned}$$

Como $\varphi(x, t) = \frac{\psi(x)}{t(T-t)}$, obtém-se

$$\begin{aligned} E &= 9s^3\varphi_x^2\varphi_{xx} + 6s\varphi_{xx}(3s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2) - (9s^2\varphi_x\varphi_{xx})_x \\ &\quad - \{((3-\delta)s\varphi_{xx} + 3s^2\varphi_x^2)(3s\varphi_x)\}_x + O\left(\frac{s}{t(T-t)}\right). \end{aligned}$$

Consequentemente, para $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \{E - \varepsilon C_x^2 - 12\delta^2 s^2 \varphi_{xx}^2\} &= \{3\delta s^2 \varphi_{xx}^2 + (3\delta - 18)s^2 \varphi_x \varphi_{xx}\} + O\left(\frac{s}{t(T-t)}\right) \\ &= s^2(3\delta - 9\varepsilon - 12\delta^2) \frac{\psi''}{t^2(T-t)^2} + (3\delta - 18)s^2 \frac{\psi' \psi''}{t^2(T-t)^2} + O\left(\frac{s}{t(T-t)}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tomamos $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, tais que

$$3\delta - 9\varepsilon - 12\delta^2 > 0.$$

Além disso, assumimos que a função $\psi = \psi(x)$ também satisfaz

$$\psi''(x) \neq 0 \text{ e } \psi'(x)\psi''(x) \leq 0, x \in [-L, L].$$

Logo, definindo

$$m_2(x) = s^2(3\delta - 9\varepsilon - 12\delta^2)\psi'' + (3\delta - 18)s^2\psi'\psi''$$

temos que $m_2(x) > 0$ e, como $\psi \in C^3([-L; L])$, existe uma constante $K_2 > 0$, tal que

$$K_2 \leq m_2(x), \quad \forall x \in [-L, L].$$

Consequentemente,

$$\frac{s^2 K_2}{t^2(T-t)^2} \leq \frac{s^2 m_2(x)}{t^2(T-t)^2},$$

ou ainda

$$\frac{s^2 K_2}{t^2(T-t)^2} + O\left(\frac{s}{t(T-t)}\right) \leq \frac{s^2}{t^2(T-t)^2} m_2(x) + O\left(\frac{s}{t(T-t)}\right)$$

Combinando a desigualdade acima com (3.16), obtém-se

$$E - \varepsilon C_x^2 - 12\delta^2 s^2 \varphi_{xx}^2 \geq \frac{s^2 K_2}{t^2(T-t)^2}.$$

Agora, analisamos os termos $F - C_x^2$ e $C - 1$ de (3.14):

$$-3C_x = -9s \frac{\psi''(x)}{t(T-t)} \geq K_3 \frac{s}{t(T-t)}, \quad (3.17)$$

onde K_3 é uma constante positiva. Por outro lado,

$$F = -s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) - s^3\varphi_x^3 + 9s^2\varphi_x\varphi_{xx} - 3s\varphi_{xxx} + 3s^2\varphi_x(3-\delta)\varphi_{xx} + 9s^3\varphi_x^3 \quad (3.18)$$

e

$$C_x^2 = 9s^2\varphi_{xx}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F - C_x^2 &= -s^3\varphi_x^3 + 9s^3\varphi_x^3 - s(\varphi_t + \varphi_{xxx}) + 9s^2\varphi_x\varphi_{xx} \\ &\quad - 3s\varphi_{xxx} + 3s^2(3-\delta)\varphi_x\varphi_{xx} - 9s^2\varphi_{xx}^2 \\ &= -s^3\varphi_x^3 + 9s^3\varphi_x^3 + O\left(\frac{s^2}{t^2(T-t)^2}\right) \\ &\geq K_4 \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$C - 1 = 3s\varphi_x - 1 \geq K_5 \frac{s}{t(T-t)}, \quad (3.19)$$

onde K_3 , K_4 e K_5 são constantes positivas, pois $\psi''(x) < 0$ e $\psi'(x) > 0$, para todo $x \in [-L, L]$ e s suficientemente grande. As constantes K_3 , K_4 e K_5 , podem ser obtidas explicitamente dado que a função $\psi \in C^3([-L, L])$, $\psi > 0$, $\psi' > 0$, $\psi'' < 0$ e $\psi'\psi''' \leq 0$ no intervalo $[-L, L]$. Basta considerar para nosso caso, $\psi(x) = 1 + 4L^2 + x(3L - x)$, que claramente satisfaz as condições anteriores. Assim, segue de (3.14) que

$$\begin{aligned} \int \int \{K_1 \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} u^2 + K_2 \frac{s^2}{t^2(T-t)^2} u_x^2 + K_3 \frac{s}{t(T-t)} u_{xx}^2 \\ + K_4 \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 + K_5 \frac{s}{t(T-t)} u_{xx}^2\} \leq (3 - \varepsilon^{-1}) \int \int w^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int \int \left\{ \frac{s^5 u^2}{t^5(T-t)^5} + \frac{s^2 u_x^2}{t^2(T-t)^2} + \frac{s u_{xx}^2}{t(T-t)} \right\} \leq K_6 \int \int w^2,$$

onde $K_6 = \frac{(3-\varepsilon^{-1})}{N}$ e $N = \min\{K_1, K_2 + K_4, K_3 + K_5\}$.

Aplicando o teorema de Fubinni, fazendo integração por partes e considerando as condições de contorno, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_{-L}^L \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 dx \right) dt &= \int_0^T \left(\left\{ \frac{s^3 u_x u}{t^3(T-t)^3} \right\}_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{s^3 u u_{xx}}{t^3(T-t)^3} dx \right) dt \\
&= - \int_0^T \int_{-L}^L \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u u_{xx} dx dt \\
&\leq \frac{K_6}{2} \int \int w^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
- \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u u_{xx} &= - \int \int \left(\frac{s^{1/2} u_{xx}}{t^{1/2}(T-t)^{1/2}} \right) \left(\frac{s^{5/2} u}{t^{5/2}(T-t)^{5/2}} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\int \int \frac{s u_{xx}^2}{t(T-t)} + \int \int \frac{s^5 u^2}{t^5(T-t)^5} \right) \\
&\leq \frac{K_6}{2} \int \int w^2
\end{aligned}$$

obtemos

$$\int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 \leq \frac{K_6}{2} \int \int w^2. \quad (3.20)$$

Logo, por (3.15), obtemos

$$\int \int \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} u^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 + \frac{s}{t(T-t)} u_{xx}^2 \right\} \leq \frac{3K_6}{2} \int \int w^2. \quad (3.21)$$

Para concluir a demonstração, faremos a substituição $u = e^{-s\varphi} q$.

$$\int \int \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |q|^2 e^{-2s\varphi} = \int \int \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} u^2 \leq \frac{3K_6}{2} \int \int w^2. \quad (3.22)$$

Como

$$q_x = e^{s\varphi} (s\varphi_x u + e^\varphi u_x) = e^{s\varphi} (s\varphi_x u + u_x),$$

temos que

$$|q_x|^2 \leq 2e^{2s\varphi} (|s\varphi_x u|^2 + |u_x|^2)$$

e

$$\begin{aligned}
\int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |q_x|^2 e^{-2s\varphi} &\leq 2 \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u_x|^2 + 2 \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |s\varphi_x u|^2 \\
&= 2 \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u_x|^2 + 2 \int \int \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |\psi' u|^2 \\
&\leq c_1 \int \int w^2 + c_2 \int \int \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u|^2 \\
&\leq c_3 \int \int w^2,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $c_1, c_2, c_3 > 0$. Finalmente, temos

$$q_{xx} = e^{s\varphi} \{ (s^2 \varphi_x^2 + s\varphi_{xx})u + 2s\varphi_x u_x + u_{xx} \}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|q_{xx}|^2 &\leq 2e^{2s\varphi} \{ (s^2 \varphi_x^2 + s\varphi_{xx})^2 u^2 + (2s\varphi_x u_x + u_{xx})^2 \} \\
&\leq 2e^{2s\varphi} \{ 2(s^4 \varphi_x^4 + s^2 \varphi_{xx}^2) u^2 + 2(4s^2 \varphi_x^2 u_x^2 + u_{xx}^2) \} \\
&= 4e^{2s\varphi} \{ s^4 \frac{(\psi')^4}{t^4(T-t)^4} u^2 + s^2 \frac{(\psi'')^2}{t^2(T-t)^2} u^2 + 4s^2 \frac{(\psi')^2}{t^2(T-t)^2} u_x^2 + u_{xx}^2 \}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|q_{xx}|^2 \frac{s}{t(T-t)} e^{-2s\varphi} &\leq 4 \{ s^5 \frac{(\psi')^4}{t^5(T-t)^5} u^2 + s^3 \frac{(\psi'')^2}{t^3(T-t)^3} u^2 + 4s^3 \frac{(\psi')^2}{t^3(T-t)^3} u_x^2 + \frac{s}{t(T-t)} u_{xx}^2 \} \\
&\leq c_4 \frac{s^5}{t^4(T-t)^5} u^2 + c_5 \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u^2 + c_6 \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 + \frac{s}{t(T-t)} u_{xx}^2,
\end{aligned}$$

onde $c_4, c_5, c_6 > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \int \frac{s}{t(T-t)} |q_{xx}|^2 e^{-2s\varphi} &\leq c_4 \int \int \frac{s^5}{t^4(T-t)^5} u^2 + c_5 \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u^2 + c_6 \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 \\
&\quad + \int \int \frac{s}{t(T-t)} u_{xx}^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Agora, fazendo integração por partes e estimativas, temos

$$\int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u^2 \leq c_7 \left(\int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u_x^2 + \int \int \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} u u_{xx} \right). \tag{3.25}$$

Logo de (3.21), (3.24) e (3.25)

$$\begin{aligned}
\int \int |q_{xx}|^2 \frac{s}{t(T-t)} e^{-2s\varphi} &\leq \frac{3K_6 c_4}{2} \int \int w^2 + \frac{3K_6 c_7}{2} \int \int w^2 + \frac{3K_6 c_7}{2} \int \int w^2 \\
&\quad + \frac{3K_6 c_6}{2} \int \int w^2 + \frac{3K_6}{2} \int \int w^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int \int |q_{xx}|^2 \frac{s}{t(T-t)} e^{-2s\varphi} \leq c \int \int w^2. \quad (3.26)$$

Combinando (3.22), (3.23) e (3.26) temos

$$\int \int \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |q|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |q_x|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |q_{xx}|^2 \right\} \leq C \int \int w^2.$$

Finalmente substituindo w por $e^{-s\varphi}P(e^{s\varphi}u) = e^{-s\varphi}P(q)$ temos o resultado.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, mostraremos a propriedade de continuação única para a equação de Korteweg-de Vries não linear em um domínio limitado, onde a solução $u \in L^\infty(0, T, H^1(0, l))$. Para isso, utilizaremos a Estimativa de Carleman provada no capítulo 3.

4.1 Propriedade de Continuação Única para a Equação de Korteweg-de Vries não Linear

Lema 3. *Sejam $l > 0$ e $T > 0$. Se $u \in L^\infty(0, T, H^1(0, l))$ é solução de*

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(u)u_x = 0 & , \text{ em } (0, l) \times (0, T) \\ u(0, t) = 0 & , \text{ } t \in (0, T) \\ u \equiv 0 & , \text{ em } (l', l) \times (0, T) \end{cases} \quad (4.1)$$

com $a \in C^0(\mathbb{R})$ e $0 < l' < l$, então $u \equiv 0$ em $(0, l) \times (0, T)$.

Demonstração:

Inicialmente introduzimos a função $u^{[h]}$, dada por

$$u^{[h]}(x, t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(x, s) ds.$$

Como $u \in L^\infty(0, T, H^1(0, l))$, pelo teorema 1.9, temos que

$$u^{[h]} \in W^{1,\infty}(0, T-h, H^1(0, l))$$

e $u^{[h]}$ é solução de

$$u_t^{[h]} + u_x^{[h]} + u_{xxx}^{[h]} + (a(u)u_x)^{[h]} = 0, \text{ em } (0, l) \times (0, T') \quad (4.2)$$

$$u^{[h]}(0, t) = 0, \quad t \in (0, T') \quad (4.3)$$

$$u^{[h]} \equiv 0, \text{ em } (l', l) \times (0, T'), \quad (4.4)$$

onde $T' < T$. Além disso, como $a \in L^\infty(0, l)$, obtém-se

$$u_t^{[h]} \in L^\infty(0, T', H^1(0, l)) \quad (4.5)$$

$$u_x^{[h]} \in L^\infty(0, T', L^2(0, l)) \quad (4.6)$$

$$(a(u)u_x)^{[h]} \in L^\infty(0, T', L^2(0, l)). \quad (4.7)$$

Logo, combinando e (4.2), (4.5), (4.6), e (4.7), temos que

$$u_{xxx}^{[h]} \in L^\infty(0, T', L^2(0, l)),$$

ou seja,

$$u^{[h]} \in L^\infty(0, T', H^3(0, l)).$$

Assim, $u^{[h]} \in H^1(0, T', L^2(0, l)) \cap L^\infty(0, T', H^3(0, l))$ e de (4.3) e (4.4), obtemos as seguintes condições de contorno

$$u^{[h]}(0, t) = u^{[h]}(l, t) = u_x^{[h]}(l, t) = u_{xx}^{[h]}(0, t) = 0.$$

Temos então, as condições necessárias para poder aplicar as Estimativas de Carleman.

Para todo $s \geq s_0$, segue da teorema (3.1) que $u^{[h]}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \int_0^{T'} \int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u^{[h]}|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |u_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp \left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)} \right) dx dt \\ \leq C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |(a(u)u_x)^{[h]}|^2 \exp \left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)} \right) dx dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde C_0 não depende h , pois C_0 na Estimativa de Carleman não depende de $u^{[h]}$.

Agora, como

$$|(a(u)u_x)^{[h]}|^2 \leq 2|a(u)u_x^{[h]}|^2 + 2|(a(u)u_x)^{[h]} - a(u)u_x^{[h]}|^2$$

temos

$$\begin{aligned} C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |(a(u)u_x)^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \leq \\ 2C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |a(u)u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt + \\ + 2C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |(a(u)u_x)^{[h]} - a(u)u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt. \end{aligned}$$

Introduzimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |a(u)u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\ I_2 &= 2C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |(a(u)u_x)^{[h]} - a(u)u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt. \end{aligned}$$

Assim, retornando à desigualdade (4.8) com as considerações acima, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{T'} \int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u^{[h]}|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |u_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\ \leq I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Como $a(u) \in L^\infty(0, T, L^\infty(0, l))$,

$$I_1 \leq C \int_0^{T'} \int_0^l |u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt$$

onde C é uma constante que não depende de h . Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{T'} \int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u^{[h]}|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |u_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\ \leq C \int_0^{T'} \int_0^l |u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt + I_2. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^{T'} \int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u^{[h]}|^2 + \left(\frac{s^3}{t^3(T-t)^3} - C \right) |u_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |u_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\ \leq I_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Tomando $s \geq s_0$ suficientemente grande, garante-se que

$$\left(\frac{s^3}{t^3(T-t)^3} - C \right) > 0.$$

O próximo passo é mostrar que $I_2 \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. De fato, como

$$\exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) \leq 1,$$

deduzimos que,

$$\begin{aligned} I_2 &= 2C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |(a(u)u_x)^{[h]} - a(u)u_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \\ &\leq 2C_0 \int_0^{T'} \int_0^l |(a(u)u_x)^{[h]} - a(u)u_x^{[h]}|^2 dx dt \end{aligned}$$

Agora, de (4.7), $(a(u)u_x)^{[h]} \in L^2(0, T', L^2(0, l))$. Logo pelo teorema 1.9.

$$(a(u)u_x)^{[h]} \rightarrow a(u)u_x \text{ em } L^2(0, T', L^2(0, l)), \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Também, como $a(u) \in L^\infty(0, T', L^\infty(0, l))$ e $u_x \in L^2(0, T', L^2(0, l))$ o mesmo Teorema garante que

$$a(u)u_x^{[h]} \rightarrow a(u)u_x \text{ em } L^2(0, T', L^2(0, l)), \text{ quando } h \rightarrow 0,$$

Logo,

$$I_2 \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0,$$

e de (4.9) concluimos que

$$\int_0^{T'} \int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5} |u^{[h]}|^2 + \left(\frac{s^3}{t^3(T-t)^3} - C \right) |u_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T-t)} |u_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dx dt \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$. Consequentemente, quando $h \rightarrow 0$,

$$\int_0^{T'} \int_0^l \left\{ \frac{|u^{[h]}|^2}{t^5(T-t)^5} \right\} dx dt \rightarrow 0,$$

garantindo assim que

$$u^{[h]} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T', L^2(0, l)), \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Por outro lado, segue das convergências anteriores (e do Teorema 1.9) que $u^{[h]} \rightarrow u$ em $L^2(0, T', L^2(0, l))$. Logo, pela unicidade do limite,

$$u \equiv 0 \text{ em } (0, T') \times (0, l).$$

Como, $0 < T' < T$ é arbitrário

$$u \equiv 0 \quad \text{em } (0, T) \times (0, l),$$

o que completa a demonstração.

Lema 4. *Seja $L > 0$, e $T > 0$ dois números reais, e seja $w \subset (0, L)$, um conjunto aberto não vazio. Se $u \in L^\infty(0, T, H^1(0, L))$ e solução de:*

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} = 0 & , \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ u(0, T) = u(L, t) = 0 & , \quad t \in (0, T) \\ u \equiv 0 & , \quad \text{em } w \times (0, T), \end{cases}$$

com $a \in C^0(\mathbb{R})$, então $u \equiv 0$ em $(0, L) \times (0, T)$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade podemos supor que $w = (l_1, l_2)$ com

$$0 \leq l_1 \leq l_2 \leq L.$$

Seja,

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Logo,

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} = 0 & , \quad \text{em } (0, l) \times (0, T) \\ u(0, t) = 0 & , \quad t \in (0, T) \\ u \equiv 0 & , \quad \text{em } (l_1, l) \times (0, T). \end{cases}$$

Pelo Lema anterior, temos que

$$u \equiv 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, T).$$

Considere agora uma função $v = v(x, t)$, dada por

$$v(x, t) = u(L - x, T - t) \quad \text{em } (0, L - l) \times (0, T).$$

Como

$$\begin{aligned} v_t &= -u_t \\ v_x &= -u_x \\ v_{xxx} &= -u_{xxx} \end{aligned}$$

v é solução do problema

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} = 0 & , \text{ em } (0, L-l) \times (0, T) \\ v(0, t) = v(L, T-t) = 0 & , \text{ } t \in (0, T) \\ v \equiv 0 & , \text{ em } (L-l_2, L-l) \times (0, T). \end{cases}$$

Novamente, o Lema anterior nos garante que

$$v \equiv 0 \text{ em } (0, L-l) \times (0, T).$$

Assim $u \equiv 0$ em $(l, L) \times (0, T)$. Logo,

$$u \equiv 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T).$$

Referências

- [1] A. M. Gomes, *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de evolução*, Textos de Métodos Matemáticos IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 2da edição, 1974 (tradução ao espanhol, Alhabama 1979).
- [3] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [5] J. M. S. Suárez, *Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial das Soluções da Equação de Korteweg-de Vries com Dissipação Localizada*, Dissertação de Mestrado IM-UFRJ, 2006.
- [6] L. A. Medeiros, & Milla M. M. A, *Introdução aos Espaços Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, n 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1993.
- [7] H. Brezis and T. Cazenave, *Nonlinear Evolution Equations*, Class Notes, 1994.
- [8] R. I. S. Diaz, *Sobre um Sistema Acoplado de Equações de Korteweg-de Vries: Existência, Unicidade e Taxas de Decaimento Temporal*, Dissertação de Mestrado IM-UFRJ, 2011.
- [9] L. A. Medeiros e P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, textos de Métodos Matemáticos, n 9, IM-UFRJ, Rio Janeiro, 1977.
- [10] J. M. Ball, *Strongly continuous, weak solutions and the variation of constants formula*, Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), 370-373.

- [11] J. E. Colliander and C. E. Kenig, *The generalized Korteweg-de Vries equation on the half line*, Comm. Partial Diff. Eq. **27** (2002), 2187–2266.
- [12] A. V. Faminskii, *A mixed problem in a semistrip for the Korteweg-de Vries equation and its generalizations*, (Russian) Dinamika Sploshn Sredy. **51** (1988), 54–94.
- [13] A. V. Faminskii, *An initial boundary-value problem in a half- strip for the Korteweg-de Vries equation in fractional-order Sobolev spaces. Comm. Partial Differential Equations* **29** (2004), 1653–1695.
- [14] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095–1097.
- [15] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation*, Stud. Appl. Math. Adv. Math. Suppl. Stud. **8** (1983), 93–128.
- [16] E. M. de Jager, *On the origin of the Korteweg-de Vries equation*, arXiv:math.HO/0602661.
- [17] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag., **39** (1895), 422–443.
- [18] S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskii *Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation*, Mat. Sb. **120** (1983) (162)(3):346–425. English transl. in Sb. Math. 1984, **48**(2):391–421.
- [19] C. Laurent, L. Rosier and B.-Y. Zhang, *Control and Stabilization of the Korteweg-de Vries Equation on a Periodic Domain*, Commun. in Partial Differential Equations **35** (2010), 707–744.
- [20] J. A. Leach and D. J. Needham *The large-time development of the solution to an initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. I. Initial data has a discontinuous expansive step*, Nonlinearity **21** (2008), 2391–2408.
- [21] F. Linares and A. F. Pazoto, *Asymptotic behavior of the Korteweg-de Vries equation posed in a quarter plane*, J. Differential Equations **246** (2007), 1342–1353.

- [22] J.-L. Lions and E. Magenes, “Problèmes aux limites non homogènes et applications”, Tome 1, Dunod, Paris, 1968.
- [23] R. M. Miura, *The Korteweg-de Vries equation: A survey of results*, SIAM Rev. **18** (1976), 412–459.
- [24] A. Pazoto, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **11** (2005), 473–486.
- [25] A. Pazoto and L. Rosier, *Stabilization of a Boussinesq system of KdV-KdV type*, Systems & Control Lett. **57** (2008), 595–601.
- [26] G. Perla Menzala, C.F. Vasconcellos and E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quart. Appl. Math. **60** (2002), 111–129.
- [27] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), 33–55 (electronic).
- [28] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation on the half-line*, SIAM J. Control Optim. **39** (2000), 331–351.
- [29] L. Rosier, *A fundamental solution supported in a strip for a dispersive equation*, Computational and Applied Mathematics **21** (2002), 355–367.
- [30] L. Rosier, *Control of the surface of a fluid by a wavemaker*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **10** (2004), 346–380.
- [31] L. Rosier and B.-Y. Zhang, *Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, SIAM J. Control Optim. **45** (2006), 927–956.
- [32] L. Rosier and B.-Y. Zhang, *Control and Stabilization of the Korteweg-de Vries Equation: Recent Progresses*, J. Syst. Sci. Complex. **22** (2009), 647–682.
- [33] M. E. Taylor, “Partial Differential Equations III, Nonlinear Equations”, Series: Applied Mathematical Sciences 117, Springer-Verlag New York Inc., 1996.