Modelagem de Ondas de Superfície e Justificativa Matemática

por

Aline Rigueti Barcellos

UFRJ

2011

17 de agosto de 2011

Modelagem de Ondas de Superfície e Justificativa Matemática

por

Aline Rigueti Barcellos

Orientador: Didier Jacques François Pilod

Dissertacão de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Didier Jacques François Pilod

IM - UFRJ - Orientador.

Fábio Antonio Tavares Ramos

IM - UFRJ

Jose Felipe Linares Ramirez

IMPA

Ademir Fernando Pazoto

IM - UFRJ - Suplente

FICHA CATALOGRÁFICA

Barcellos, Aline Rigueti.

Sobre Modelagem de Ondas de Superfície e Justificativa Matemática

Aline Rigueti Barcellos.

Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2011.

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM.

1. Resultados Preliminares.

2. Modelagem de Ondas de Superfície em Águas Rasas.

3. Existência e Unicidade de Soluções para Sistemas Hiperbólicos Simétricos.

4. Justificação dos Modelos de Ondas Longas.

(Mestrado-UFRJ/IM) Pilod, Didier Jacques François

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, III. Título.

Agradecimentos

À Deus que me permite descobrir, a cada dia, um pouco da complexidade e fascínio de sua criação. A minha família, em especial aos meus pais e irmãs que sempre me apoiaram e incentivaram nos momentos difíceis. Aos meus amigos, especialmente aos que conviveram comigo durante esses últimos anos e tornaram os dias de estudo mais divertidos e prazerosos. Ao meu Orientador Didier Pilod, pelas conversas, conselhos e, principalemente, pela paciência e dedicação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Modelamos o problema das ondas longas fracamente não lineares de superfície em águas rasas, chegando ao modelo de Boussinesq que, entre outras características, apresenta os efeitos dispersivos e não-lineares equilibrados. Mostramos um Teorema que garante a existência e unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais parciais semi-linear e hiperbólico. Usamos esse fato para provar que as soluções do sistema de Boussinesq aproximam a solução das equações de Euler neste contexto.

Palavras Chaves: Equações de Euler, sistema de Boussinesq, Sistema semi-linear hiperbólico, ondas longas de superfície em águas rasas.

Abstract

We model the problem of propagation of weakly nonlinear long waves in shallow water, leading to a Boussinesq Systems wich present dispersive and non-linear efects balanced. We first prove a theorem wich ensures the existence and uniqueness of solution to a hyperbolic semilinear system. We also show that the solutions of Boussinesq systems are good approximations to Euler equations in this context.

Key words: Euler equations, Boussinesq's systems, semilinear hyperbolic systems, weakly nonlinear long wave water waves.

Sumário

Introdução

Uma onda solitária é uma onda de água rasa que consiste do deslocamento singular da água acima do nível médio da água. Podemos observar tal fenômeno em situações como a propagação de um tsunami, escoamento costeiro e o fenômeno da pororoca que ocorre na região amazônica em certos períodos do ano.

O primeiro relato de observação de uma onda solitária data de 1834, quando então um engenheiro náutico, J. Scott Russel observou no canal, que vai de Edinburgo a Glasgow na Escócia, uma onda se propagando na superfície da água sem se atenuar. Russell relatou tal observação em um jornal da Associação Britânica em 1844. Esse fenômeno inspirou Russell o que o levou a fazer experimentos para provar a existência dessas ondas e estudá-las.

A pergunta que se seguiu foi como se obter um bom modelo matemático para descrever tal fenômeno. As teorias que estudavam ondas nesta época, contradiziam a situação observada. Porém, alguns anos depois, Boussinesq em [5] e Korteweg e de Vries (K-dV) em [12] obtiveram modelos razoáveis para descrever o problema.

Desde a última metade do século passado, esse problema readquiriu interesse da parte da comunidade científica devido ao aparecimento dos mesmos modelos em outros contextos (física dos plasmas, sistemas ópticos, redes cristalinas, cadeias atómicas e macromoléculas, em meios elásticos). As equações de evolução não linear, que modelam propagação de ondas, levam em conta tanto os efeitos não lineares quanto os dispersivos. Quando estes dois efeitos estão equilibrados, ocorre o fenômeno que denominamos de uma onda solitária.

De forma geral, o problema de uma onda num líquido ideal consiste em descrever o movimento da superfície livre e a evolução do campo de velocidade da camada superficial de um fluido perfeito, incompressível, irrotacional sobre a influência da gravidade e de fundo liso. Numa aproximação contínua, este fenômeno é descrito pelas equações de Euler. Estas nos fornecem um bom modelo de ondas irrotacionais na superfície da água, que são ondas onde os efeitos dissipativos e de tensão superficiais podem ser ignorados. Em muitos campos, estudos de laboratórios e aplicações em engenharia , as equações de Euler completas parecem mais complexas do que precisam para modelar a situação apresentada, consequentemente tem aparecido muitos modelos assintóticos obtidos a partir das equações de Euler aplicando-se restrições físicas.

Recentemente, Bona-Chen-Saut em [2] e Bona-Colin-Lannes em [4] apresentaram uma derivação sistemática dos sistemas *abcd* de Boussinesq dado por

$$S_{\theta,\lambda,\mu}\begin{cases}\partial_t U + \nabla\zeta + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\nabla|U|^2 + a\Delta\nabla\zeta - b\Delta\partial_t U\right) = 0\\ \partial_t\zeta + \nabla U + \varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta U) + c\Delta\nabla\cdot U - d\Delta\partial_t\zeta\right) = 0,\end{cases} \tag{1}$$

obtidos das equações de Euler em um regime de ondas de superfície longas e fracamente não lineares em águas rasas. Aqui ζ é o desvio da superfície livre do seu estado inicial e U é uma aproximação para a velocidade horizontal em uma determinada profundidade. O regime que se considera aqui, é o de altura média do fluido aproximadamente constante igual a h, de amplitude baixa a, comprimento de onda longo λ. As condições mencionadas, implicam que

$$\varepsilon = \frac{a}{h} \ll 1,\ \mu = \frac{h^2}{\lambda^2} \ll 1,\ S = \frac{\varepsilon}{\mu} \approx 1.$$

As constantes a, b, c e d são parâmetros do modelo sujeitos a restrição $a+b+c+d = \frac{1}{3}$. Além disso, a parte direita dos sistemas *abcd* de Boussinesq deveria ser, de fato, $O(\varepsilon^2)$.

Este sistema se degenera nas conhecidas equações K-dV ou Benjamin-Bona-Mahony (BBM) no caso unidimensional, para uma onda viajando em uma única direção.

O objetivo do presente trabalho é, primeiramente, reobter a família de sistema (1) a partir das equações de Euler no regime mencionado. Em seguida, mostrar que as soluções do sistema de Boussinesq aproximam as soluções das equações de Euler em um tempo de existência fisicamente razoável (de ordem $O(\frac{1}{\varepsilon})$). Este tipo de resultado foi provado para a equação K-dV por Craig em [6] e para o sistema de Boussinesq em [4]. Para obter tal resultado vamos precisar de uma teoria de boa colocação para sistemas hiperbólicos semilineares.

Este trabalho contém essencialmente 4 capítulos. O primeiro é reservado apenas para formalizarmos algumas notações e resultados básicos que serão utilizados ao longo do texto. Nem todos estão devidamente detalhados e por não serem nosso objetivo central.

No Capítulo 2, estudaremos com detalhes as equações de Euler e as equações que dela resultam tendo-se em conta as devidas restrições, e diferenciando cada modelo com sua respectiva particularidade física e matemática. Observando que esta derivação assintótica é puramente formal.

Já no Capítulo 3, uma abordagem mais matemática se faz necessária, onde enunciaremos e demonstraremos um resultado de existência e unicidade para um sistema semi-linear hiperbólico. Este resultado nos será útil no capítulo seguinte, para provar rigorosamente que as soluções dos sistemas de Boussinesq aproximam bem as equações e Euler.

A maior parte deste trabalho é baseada nas notas de aula do Professor David Lannes [13].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Notação

A seguir, apresentaremos algumas notações que serão úteis ao longo do texto.

Por comodidade, nas várias desigualdades que aparecem no texto, frequentemente denotaremos por um mesmo c uma constante positiva, mesmo essa representando quantidades distintas de uma expressão para outra.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ define-se,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_d, \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_d^{\alpha_d}$$

Por D^α denota-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_d} x_d}$$

e para $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ define-se $D^0 f = f$ para toda função f. Por ∂_j, para $j = 1, 2, ..., d$ representa-se a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Sejam E e F dois espaços topológicos com $E \subset F$. Para indicar que a imersão de E em F é contínua será usada a notação $E \hookrightarrow F$.

Por Ω representa-se um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$. Será fixada em Ω a medida de Lebesgue dx.

Seja $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável no $\mathbb{R}^d$ denotaremos por $supp(f)$ o conjunto

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}.$$

Se $1 \leq p < \infty$ então representa-se por $\mathrm{L^p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $|f|^p$ é integrável e para cada $f \in L^p(\Omega)$, $\|f\|_{L^p}$ denotará

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Quando $p = \infty, L^\infty(\Omega)$ denotará o conjunto de todas as funções mensuráveis essencialmente limitadas em Ω, com a norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup \mathrm{ess} |f(x)|.$$

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis em Ω, satisfazendo

$$\int_K |f|^p dx < \infty, \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

Sejam u e v funções complexas definidas no $\mathbb{R}^d$. Considera-se a convolução $u * v$ das funções u e v, isto é,

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(y)u(x-y)dy.$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções complexas definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ é dita rapidamente decrescente no infinito, quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\lim_{\|x\|\to\infty} p(x)D^\alpha\varphi(x) = 0$$

para todo polinômio p de d variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}$

Chamaremos o conjunto das funções rapidamente decrescente no infinito de Espaço de Schwartz e o denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Considerando este espaço vetorial, definiremos a noção de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ por: uma sucessão (φ_ν) de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge para zero quando, para todo $k \in \mathbb{N}$ a sucessão $p_k(\varphi_\nu)$ converge para 0 em $\mathbb{R}$. A sucessão (φ_ν) para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se $(p_k(\varphi_\nu - \varphi))$ converge para 0 em $\mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As formas lineares definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ contínuas no sentido da convergência definida em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ são denominadas distribuições temperadas e denotamos este espaço por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Vamos chamar de espaço das funções de crescimento lento, e denotar por $Q^\infty(\mathbb{R}^d)$ o conjunto de todas as funções $q : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $q \in C^\infty$ e $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists c > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $|\partial^\alpha q(x)| \leq c(1 + |x|)^k$. Se $f \in Q^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, definimos $fT : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Definimos, para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, sua transformada de Fourier, como:

$$\mathcal{F}(f)(x) = c\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

onde $c = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ e $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_d\xi_d$. Denotaremos também $\mathcal{F}(f)$ por $\hat{f}$. Por outro lado, denotaremos por $\check{f}$ a Transformada de Fourier Inversa de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ que é dada por:

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = c\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

Além disso, adotaremos a seguinte notação como padrão para multiplicadores de Fourier: para toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f(D)u$ é definida por

$$\mathcal{F}(f(D)u)(\xi) = f(\xi)\hat{u}(\xi).$$

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^d$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $f \in L^p(\Omega)$, f possui todas as derivadas no sentido das distribuições. Porém $D^\alpha f$, não é em geral uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha f$ é ainda uma função de $L^p(\Omega)$, define-se um novo espaço denominado Espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções f de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha f$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha f$ a derivada de f no sentido das distribuições. Para cada $f \in W^{m,p}(\Omega)$ define-se a norma de f por:

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \mathrm{ess} |D^\alpha f(x)|.$$

Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados espaços de Sobolev.

O caso particular $p = 2$ é de especial interesse.

Para todo $s \in \mathbb{R}$, denotamos por Λ^s o operador de derivação fracionário definido por

$$\widehat{\Lambda^s v}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v}(\xi), \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Desta forma, definimos por $H^s(\mathbb{R}^d)$ o espaço de Sobolev, quando $p = 2$, formado por todas as distribuições f tais que

$$\|\Lambda^s f\|_{L^2} < \infty.$$

Isto é, $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : (1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$. Observe que se $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ então $\hat{f}$ é uma função mensurável. Introduzimos a norma

$$\|f\|_{H^s} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{1/2},$$

associada ao produto escalar

$$(f, g)_s = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Observe que $(H^s(\mathbb{R}^d), (\cdot, \cdot)_s)$ é um espaço de Hilbert. Além disso se f é uma função vetorial, isto é, $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ podemos definir $H^s(\mathbb{R}^d)^n = H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$, com a norma

$$\|f\|_{H^s} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{H^s}^2 \right\}^{1/2},$$

onde f_i são as coordenadas de f.

1.2 Formulação Lagrangeana

Existem duas maneiras de especificar o movimento de um corpo fluido em uma dada região do espaço. Na formulação denominada de Euleriana, definimos uma região fixa onde o comportamento do fluido será estudado. Na formulação denominada de Lagrangeana definimos uma região material, ou seja, formada por um conjunto de partículas do fluido. Aconteça o que acontecer, estaremos sempre olhando este conjunto de partículas. É como se pudéssemos pintar uma região do corpo fluido para então observarmos sua dinâmica. Neste caso denotamos a região por Ω. Note que esta região depende do tempo, ou seja, $\Omega(t)$. Conforme as partículas "pintadas"se movimentam Ω se deforma.

Na formulação Lagrangeana as grandezas do escoamento são especificadas como funções do tempo e da partícula do fluido identificada por um parâmetro (como se fosse uma etiqueta): $\overrightarrow{x}(t, \overrightarrow{x_0})$. Esta representação nos dá a partícula do fluido que no instante t se encontra em $\overrightarrow{x}$, mas que no instante inicial se encontrava na posição $\overrightarrow{x_0}$. Logo $\overrightarrow{x}(t, \overrightarrow{x_0})$, para $t \in [0, T]$, descreve a órbita da partícula, localizada inicialmente em $\overrightarrow{x_0}$, durante o intervalo de tempo de duração T.

Traduzindo o Parágrafo anterior de forma a utilizar objetos/conceitos matemáticos, definimos a *aplicação do escoamento* φ_t:

$$\varphi_t : \overrightarrow{x_0} \longrightarrow \overrightarrow{x}(t, \overrightarrow{x_0})$$

$$\varphi_t(\Omega) = \Omega(t)$$

Esta aplicação φ_t leva a configuração inicial do corpo fluido na configuração final. Se fixarmos o parâmetro $\overrightarrow{x_0}$, temos uma representação matemática para a órbita descrita pela partícula, que no instante inicial $t = t_0$, residia em $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0}$. Observe que estamos pressupondo o conhecimento desta função φ_t, que na maioria das vezes não é fácil de obter.

Consideremos no instante t a partícula do fluido representada por:

$$\overrightarrow{x}(t, \overrightarrow{x_0}) = \begin{bmatrix} x_1(t, \overrightarrow{x_0}) \\ x_2(t, \overrightarrow{x_0}) \\ x_3(t, \overrightarrow{x_0}) \end{bmatrix}$$

A aceleração da partícula é dada por:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}(t, \overrightarrow{x_0}) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{U}(\overrightarrow{x}(t; \overrightarrow{x}_0), t), \text{ onde } \overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ e } u_i = \frac{dx_i}{dt}, i = 1, 2, 3.$$

Ou ainda por componente:

$$\frac{d^2x_i}{dt}(t;\overrightarrow{x}_0) = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

Usando a definição de cada componente de velocidade

$$\frac{d^2x_i}{dt}(t;\overrightarrow{x}_0) = u_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

E, com uma notação mais condensada temos que

$$\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2}(t,\overrightarrow{x_0}) = (\overrightarrow{U}\cdot\nabla)\overrightarrow{U} + \frac{\partial\overrightarrow{U}}{\partial t} \equiv \frac{D\overrightarrow{U}}{Dt}(\overrightarrow{x}(t),t).$$

Definimos então o operador diferencial

$$\frac{D}{Dt} \equiv (\overrightarrow{U}\cdot\nabla) + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.1}$$

Este operador é conhecido como derivada material (pois acompanha a partícula) ou derivada de transporte, onde o transporte é feito pela grandeza $\overrightarrow{U}$.

1.3 Resultados Básicos

A seguir, serão apresentados alguns resultados que serão utilizados ao longo de nosso trabalho. Por motivos de objetividade algumas demonstrações foram omitidas, porém podem ser facilmente encontradas nas respectivas referências.

Teorema 1.3.1. *Seja* F *um campo vetorial de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^3$, exceto possivelmete em um número finito de pontos. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) F *é um campo gradiente de alguma função f, isto é, $\nabla f = \mathrm{F}$;*

(ii) rot F $= 0$.

Este resultado pode ser visto em [16], páginas 289-291.

Lema 1.3.2. *Para todo $\theta > 0$, existem constantes c_1, c_2 que dependem de θ tais que*

$$c_1(a^\theta + b^\theta) \leq (a+b)^\theta \leq c_2(a^\theta + b^\theta)), \quad \forall a, b \geq 0. \tag{1.2}$$

Demonstração: Podemos supor $a > 0, b > 0$. Além disso (1.2) é satisfeita se e somente se

$$c_1\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^\theta\right) \leq \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)\right)^\theta \leq c_2\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^\theta\right).$$

Logo, basta provar que

$$c_1(1 + x^\theta) \leq (1+x)^\theta \leq c_2(1 + x^\theta), \quad \forall x > 0.$$

Considere a função $f(x) = \frac{(1+x)^\theta}{1+x^\theta}$ e note que $lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, logo, como $f(x) > 0$ e é contínua sobre seu domínio, segue que existe $c_2(\theta) > 0$ tal que

$$\frac{(1+x)^\theta}{1+x^\theta} \leq c_2(\theta).$$

Usando o mesmo raciocínio é fácil ver que existe $c_1(\theta) > 0$ satisfazendo (1.2). ∎

Agora iremos generalizar o que for possível para distribuições em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Antes porém, apresentaremos uma caracterização para o Espaço das Distribuições Temperadas, ou seja, um funcional linear

$$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle.$$

Proposição 1.3.3. *Um funcional linear $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ se e só se $\exists ! c > 0, k \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

A demonstração deste fato pode ser vista em [9], capítulo 3.

Em primeiro lugar definiremos o complexo conjugado de um distribuição temperada $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ como $\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle} \;\; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Já a reflexão de uma distribuição temperada $\tilde{T}$ é dada por $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle \;\; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. E utilizando a Proposição 1.3.3 mostra-se que $\tilde{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Uma consequência imediata desta definição é que

$$\langle \tilde{\delta}_k, \varphi \rangle = \langle \delta_k, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \delta_k, \varphi(-x) \rangle = \varphi(-k) = \langle \delta_{-k}, \varphi \rangle.$$

E portanto, $\delta_k = \delta_{-k}$.

Por fim, vamos definir a transformada de Fourier de uma distribuição temperada: seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\hat{T}$ é dada por $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Para mostrar que $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ note primeiramente que $\hat{T}$ é linear. Além disso, $\exists c > 0, k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle \hat{T}, \varphi \rangle| = |\langle T, \hat{\varphi} \rangle| = c \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} \|\hat{\varphi}\|_{\alpha,\beta} \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k_0} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}.$$

Segue destas definições que :

$$\langle \widehat{(\Re T)}, \varphi \rangle = \langle \Re T, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{2}\langle T, \hat{\varphi} \rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{T}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{2}\langle T, \hat{\varphi} \rangle + \frac{1}{2}\overline{\langle T, \overline{\hat{\varphi}} \rangle}.$$

Mas observe que

$$\overline{\hat{\varphi}}(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{R}^s} \varphi(x) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} dx} = \int_{\mathbb{R}^s} \overline{\varphi}(x) e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} dx = \widehat{\overline{\varphi}}(-\xi) = \tilde{\widehat{\overline{\varphi}}}(\xi).$$

Logo

$$\langle \widehat{\Re T}, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\langle T, \hat{\varphi} \rangle + \frac{1}{2}\overline{\langle T, \tilde{\widehat{\overline{\varphi}}} \rangle} = \frac{1}{2}\langle T, \hat{\varphi} \rangle + \frac{1}{2}\overline{\langle \tilde{T}, \widehat{\overline{\varphi}} \rangle} = \frac{1}{2}\langle \widehat{T}, \varphi \rangle + \frac{1}{2}\langle \overline{\hat{\tilde{T}}}, \varphi \rangle.$$

Daí podemos concluir a seguinte fórmula

$$\widehat{\Re T} = \frac{1}{2}\left(\widehat{T} + \overline{\hat{\tilde{T}}}\right). \tag{1.3}$$

Teorema 1.3.4 (Desigualdade de Young). *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *então* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. *Além disso, vale*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Teorema 1.3.5. *Se* $s \in \mathbb{R}$ *então* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *é um espaço de Hilbert. Além disso,*

(i) se $s \geq r$ *então* $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^d)$.

(ii)(Lema de Sobolev) Se $s > d/2 + k$ *vale* $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k_\infty(\mathbb{R}^d)$

Teorema 1.3.6. *Seja* $s > 0$. *Para todo* $s' \in [0, s)$ *e* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *temos que*

$$\|f\|_{H^{s'}} \leq \|f\|_{L^2}^{s'/s}\|f\|_{H^s}^{1-s'/s}.$$

Demonstração: Fazendo $\theta := \frac{s'}{s} \in [0, 1)$ temos que

$$\|f\|^2_{H^{s'}} = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{s'}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{\theta s}|\hat{f}(\xi)|^{2\theta}|\hat{f}(\xi)|^{2(1-\theta)}d\xi.$$

Usando a Desigualdade de Holder segue que

$$\|f\|_{H^{s'}} \leq \left\{\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right\}^{\theta/2}\left\{\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right\}^{\frac{1-\theta}{2}}.$$

Logo,

$$\|f\|_{H^{s'}} \leq \|f\|^{\theta}_{H^s}\|f\|^{1-\theta}_{L^2} = \|f\|^{s'/s}_{H^s}\|f\|^{1-s'/s}_{L^2}.$$

■

Lema 1.3.7. *Para todo* $s \geq 0, f \in H^s \cap W^{1,\infty}$ *e* $u \in H^{s-1} \cap L^\infty$ *temos que*

$$\|[\Lambda^s, f]u\|_2 \leq C_{s,t}(\|f\|_{H^s}\|u\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty\|u\|_{H^{s-1}}).$$

Este é um resultado mais delicado cuja prova poderá ser encontrado em [10].

Proposição 1.3.8. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência em* H, *onde* H *é um espaço de Hilbert. Se* $\{f_n\}$ *converge fracamente para* f *e* $\{\|f_n\|_H\}$ *converge para* $\|f\|_H$ *então* $\{f_n\}$ *converge para* f *em* H.

Demonstração: Como H é um espaço de Hilbert segue que

$$\|f_n - f\|_H^2 = (f_n - f, f_n - f)_H = \|f_n\|_H^2 - (f_n, f) - (f, f_n) + \|f\|_H^2$$

Usando as duas hipóteses temos que $\|f_n - f\|_H^2 \longrightarrow 0$, donde $f_n \longrightarrow f$ em H. ∎

Capítulo 2

Modelagem de Ondas de Superfície em Águas Rasas

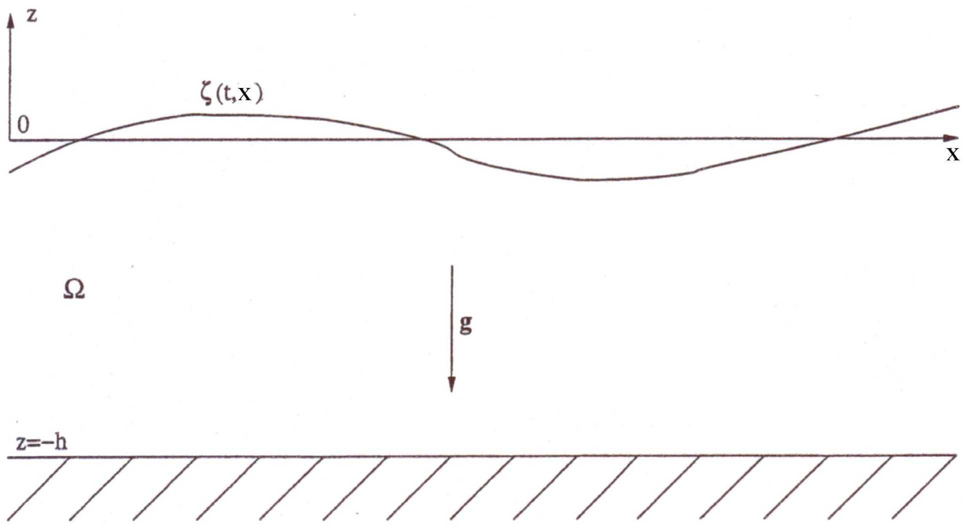
Neste Capítulo estaremos interessados em modelar a equação em que trabalharemos.

2.1 Apresentação do Problema

Aqui estaremos interessado nas ondas de superfície de um fluido. Em princípio, um fluido é um líquido ou um gás, porém em nosso estudo estaremos interessados apenas em líquidos, ou seja, em fluidos com o volume bem definido.

Um aspecto relevante no estudo de fluidos em geral, é a sua viscosidade. Todo fluido possui uma viscosidade, que é a responsável pelo efeito de fricção. No sentido popular, a viscosidade indica quão “grudento”é o fluido. Em nosso estudo, vamos considerar o fluido não viscoso.

Outro aspecto importante, é a incompressibilidade do fluido em que estaremos



interessados. Diremos que um fluido é incompressível quando a sua densidade for constante.

Além disso, exigiremos que este fluxo esteja na presença de um campo de gravidade constante e seja irrotacional. Estamos supondo ainda que o fundo é liso e impermeável.

O objetivo é determinar a evolução da superfície do fluido, que no nosso caso é representado por uma interface ar-água.

Para resolver este problema utilizaremos uma formulação Euleriana, ou seja, as grandezas do escoamento serão especificadas como função da posição e do tempo.

Consideraremos o fluxo bidimensional ou tridimensional e denotaremos por d ($d = 1$ ou $d = 2$) a dimensão horizontal do fluxo.

Denotaremos por $X = x$ quando $d = 1$ ou $X = (x, y)$, quando $d = 2$, as variáveis horizontais do espaço e por z a coordenada vertical.

Além disso, $z = \zeta(t, X)$ é a parametrização da superfície do fluido no instante t ($z = 0$ corresponde ao fluido no repouso) e h é a profundidade do fluido no repouso.

O problema das ondas de superfície consiste portanto em determinar a função

ζ, de maneira exata ou aproximada.

Notação: Denotaremos sempre por $\nabla_{X,z}$ o gradiente tomado em relação a X e z, e por ∇ o gradiente relativo exclusivamente a variável horizontal X. Utilizaremos as mesmas convenções para o Laplaciano.

2.2 Equações de Euler com Superfície Livre

Denotaremos por $\mathbf{v} := (V, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ o campo de velocidade do fluido, onde $V = v_1$ ou $V = (v_1, v_2)$ dependendo da dimensão horizontal, P o campo de pressão, ρ a densidade do fluido e g a aceleração da gravidade.

As equações que regem o movimento do fluido são dadas por:

- **Incompressibilidade:** A equação para a Conservação de Massa nos diz que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Utilizando que

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho$$

em (1.1) temos que

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Neste caso estamos trabalhando com um fluido incompressível, ou seja,

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Logo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

- **Balanço das forças** (Equação de Euler): Usando a fórmula (1.1) para aceleração particular $\mathbf{a}$ temos que

$$\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{X,z} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{X,z} P + \mathbf{g}. \tag{2.2}$$

- **Irrotacionalidade:**

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0. \tag{2.3}$$

Além destas, devemos ainda acrescentar equações que descrevam as condições de contorno da superfície no fundo. Estas condições devem exprimir o fato de que nenhuma partícula do fluido é transportada através dele. De maneira geral, uma superfície dada implicitamente por uma relação do tipo $\Sigma(t, X, z) = 0$ vai satisfazer a condição de não transportar nenhuma partícula do fluido através dele se e só se sua derivada de transporte é nula. E portanto por (1.1) temos que

$$\frac{D\Sigma}{Dt} = (\partial_t + \mathbf{v}.\nabla_{X,z})\Sigma = 0.$$

Observe que para o fundo temos que $\Sigma(t, X, z) = z + h$, logo

$$\begin{aligned}(\partial_t + \mathbf{v}.\nabla_{X,z})\Sigma &= \partial_t(z + h) + (V, w).\nabla_{X,z}(z + h)\\ &= 0 + (V, w).(0, 1).\end{aligned}$$

A condição acima implica portanto que

$$w = 0 \ \text{ em } \ z = -h. \tag{2.4}$$

Já para a superfície livre temos $\Sigma(t, X, z) = z - \zeta(t, X)$ donde

$$\begin{aligned}(\partial_t + \mathbf{v}.\nabla_{X,z})\Sigma &= (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{X,z})(z - \zeta(X, t))\\ &= -\partial_t\zeta(X, t) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{0}, 1) - \mathbf{v}\nabla_{X,z}\zeta(X, t).\end{aligned}$$

Novamente usando a condição de que nenhuma partícula do fluido é transportada através dele temos que

$$\partial_t \zeta = \begin{pmatrix} -\nabla\zeta \\ \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} \ \text{ em } \ z = \zeta(t, X). \tag{2.5}$$

Além disso, temos que dar uma condição de contorno final relativa à pressão. No caso de uma interface água-ar podemos negligenciar os efeitos de tensão da superfície e supor a pressão constante no exterior do fluido. Ainda que renormalizemos, podemos supor que essa constante é nula. Daí, temos a seguinte condição:

$$P = 0 \ \text{ em } \ z = \zeta(t, X). \tag{2.6}$$

As equações de (2.1) – (2.6) são as equações de Euler com superfície livre.

2.3 As equações de Bernoulli

Como o fluxo em que estamos interessados apresenta características irrotacional e incompressível, temos pelo Teorema 1.2.1, que existe um potencial de velocidade ϕ tal que $\mathbf{v} = \nabla_{X,z}\phi$ e que satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta_{X,z}\phi = 0 \ \text{ no interior do fluido} \tag{2.7}$$

porque $\mathrm{div}\nabla_{X,z}\phi = \Delta_{X,z}\phi$. Daí, podemos reescrever o equilíbrio das forças como:

$$\partial_t \nabla_{X,z}\phi + \nabla_{X,z}\phi \cdot \nabla_{X,z}\nabla_{X,z}\phi = -\frac{1}{\rho}\nabla_{X,z}P + \mathbf{g}.$$

Donde,

$$\nabla_{X,z}\partial_t\phi + \nabla_{X,z}\left(\frac{1}{2}|\nabla_{X,z}\phi|^2\right) + \nabla_{X,z}\frac{P}{\rho} - \mathbf{g} = 0.$$

Segue portanto que,

$$\nabla_{X,z}\left(\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{X,z}\phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0.$$

Integrando em relação à variável espacial obtemos

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{X,z}\phi|^2 + \frac{P}{\rho} + gz = f(t) \ \text{ para } \ -h \leq z \leq \zeta(t,X)$$

onde $f(t)$ é uma constante de integração que só depende de t. Substituindo o potencial de velocidade ϕ por $\phi + \int_0^t f(t)$, podemos supor que $f \equiv 0$. Combinando essa equação com a condição no bordo sob a pressão dada em (2.6), obtemos

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{X,z}\phi|^2 + g\zeta = 0 \ \text{ em } \ z = \zeta(t,X). \tag{2.8}$$

Podemos ainda reformular as condições no bordo (2.4) e (2.5) usando o potencial de velocidade por

$$\partial_t\zeta = \begin{pmatrix} -\nabla\zeta \\ \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla\phi \\ \\ \partial_z\phi \end{pmatrix} \ \text{ em } \ z = \zeta(t,X),$$

ou seja

$$\partial_t\zeta + \nabla\zeta\cdot\nabla\phi = \partial_z\phi \ \text{ em } \ z = \zeta(t,X) \tag{2.9}$$

e

$$\partial_z\phi = 0 \ \text{ em } \ z = -h. \tag{2.10}$$

A equação de Laplace (2.7) e as três condições no bordo (2.8) – (2.10) formam as equações de Bernoulli com superfície livre.

2.4 Reescrevendo as equações utilizando o potencial de velocidade na superfície

Uma forma interessante das equações (2.8)-(2.10) pode ser obtida introduzindo

$$\psi(t,X) := \phi(t,X,\zeta(t,X)),$$

isto é, o valor do potencial de velocidade na superfície.

Note em primeiro lugar que se ζ e ψ são conhecidas então o potencial de velocidade ϕ é inteiramente determinado em todo o fluido pela equação de Laplace (2.7) com condição de Dirichlet $\phi = \psi$ na superfície, e condição de Neumann homogênea no fundo. Em particular, o conhecimento de ζ e ψ determinam $\partial_z\phi\mid_{z=\zeta}$.

Podemos então introduzir o operador linear $Z(\zeta)$ definido por

$$Z(\zeta) : \psi \mapsto Z(\zeta)\psi = \partial_z\phi\mid_{z=\zeta}.$$

Chamamos o operador $Z(\zeta)$ de operador de Dirichlet para Neumann.

Observe que, pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}\partial_t\psi &= \partial_t\phi\mid_{z=\zeta} + \partial_z\phi\mid_{z=\zeta}\partial_t\zeta \\ &= \partial_t\phi\mid_{z=\zeta} + \partial_t\zeta Z(\zeta)\psi,\end{aligned}$$

e de forma análoga,

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \nabla\phi\mid_{z=\zeta} + \partial_z\phi\mid_{z=\zeta}\nabla\zeta \\ &= \nabla\phi\mid_{z=\zeta} + Z(\zeta)\psi\nabla\zeta.\end{aligned}$$

Daí, usando (2.9) e que $\mathbf{v} = \nabla_{X,z}\phi$, substituimos em (2.8) e obtemos:

$$\partial_t\psi - \partial_t\zeta(Z(\zeta)\psi) + \frac{1}{2}|\nabla\psi - (Z(\zeta)\psi)\nabla\zeta|^2 + \frac{1}{2}|Z(\zeta)\psi|^2 + g\zeta = 0.$$

Donde,

$$\partial_t\psi - (-\nabla\zeta, 1)^T \cdot (V, w)\mid_{z=\zeta}(Z(\zeta)\psi)$$
$$+\frac{1}{2}|\nabla\psi - (Z(\zeta)\psi)\nabla\zeta|^2 + \frac{1}{2}|Z(\zeta)\psi|^2 + g\zeta = 0.$$

Logo

$$\partial_t\psi + \nabla\zeta \cdot (\nabla\psi - Z(\zeta)\psi\nabla\zeta)(Z(\zeta)\psi) - (Z(\zeta)\psi)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2$$
$$+\frac{1}{2}|\nabla\zeta|^2(Z(\zeta)\psi)^2 + \frac{1}{2}(Z(\zeta)\psi)^2 - \nabla\zeta \cdot \nabla\psi(Z(\zeta)\psi) + g\zeta = 0.$$

Segue daí que,

$$\partial_t\psi - |\nabla\zeta|^2(Z(\zeta)\psi)^2 - \frac{1}{2}(Z(\zeta)\psi)^2 + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\zeta|^2(Z(\zeta)\psi)^2 + g\zeta = 0.$$

E portanto,

$$\partial_t\psi + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - (Z(\zeta)\psi)^2\left(\frac{1 + |\nabla\zeta|^2}{2}\right) + g\zeta = 0. \tag{2.11}$$

Substituindo agora em (2.9) obtemos:

$$\partial_t\zeta + \nabla\zeta(\nabla\psi - Z(\zeta)\psi\nabla\zeta) = Z(\zeta)\psi.$$

O que implica,

$$\partial_t\zeta + \nabla\zeta \cdot \nabla\psi - |\nabla\zeta|^2(Z(\zeta)\psi) - Z(\zeta)\psi = 0.$$

Obtendo assim,

$$\partial_t\zeta + \nabla\zeta \cdot \nabla\psi - (|\nabla\zeta|^2 + 1)(Z(\zeta)\psi) = 0. \tag{2.12}$$

Ao contrário das equações de Euler ou de Bernoulli com superfície livre, esta formulação tem a vantagem de possuir um domínio fixo (equações de evolução sobre $\mathbb{R}^d$), que facilitará a análise matemática.

2.5 Modelos Lineares

Quando o fundo é liso, os modelos lineares são obtidos simplesmente negligenciando os efeitos não lineares das equações introduzidas acima. A partir por exemplo da formulação (2.11) – (2.12) é suficiente portanto escrever a linearidade em torno de $(\psi, \zeta) = (0, 0)$ (pois $Z(\zeta)$ é linear com relação a ψ, logo fixamos $\zeta = 0$ que é a posição de equilíbrio), isto é

$$\begin{cases} \partial_t \psi + g\zeta = 0 \\ \partial_t \zeta - Z(0)\psi = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

O operador $Z(0)$ pode ser calculado explicitamente.

Lema 2.5.1. *Utilizando a notação usual para multiplicador de Fourier, temos que*

$$Z(0)\psi = |D| \tanh(h|D|)\psi.$$

Demonstração: Com efeito, note que

$$\begin{cases} \Delta_{X,z}\phi = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^d \times (-h, 0) \\ \phi = \psi \quad \text{em} \quad z = 0 \\ \partial_z \phi = 0 \quad \text{em} \quad z = -h. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Fourier na variável X obtemos:

$$\begin{cases} \partial_z^2 \hat{\phi}(\xi) + |\xi|^2 \hat{\phi}(\xi) = 0 \\ \hat{\phi}(\xi, 0) = \hat{\psi}(\xi) \\ \partial_z \hat{\phi}(\xi, -h) = 0, \end{cases}$$

cuja solução geral é:

$$\hat{\phi}(\xi, z) = c_1(\xi)e^{|\xi|z} + c_2 e^{-|\xi|z}.$$

Isto significa que $\{e^{|\xi|z}, e^{-|\xi|z}\}$ é uma base linearmente independente para o conjunto de soluções do problema. Logo $\sinh(|\xi|z)$ e $\cosh(|\xi|z)$ também é base linearmente independente para o conjunto solução do sistema. E portanto existem $A_1(\xi)$ e $A_2(\xi)$ tais que

$$\hat{\phi}(\xi, z) = A_1(\xi)\cosh(|\xi|z) + A_2(\xi)\sinh(|\xi|z).$$

Logo, $\hat{\phi}(\xi, 0) = A_1(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$, donde

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\xi, z) = \hat{\psi}(\xi)\cosh(|\xi|z) + A_2(\xi)\sinh(|\xi|z) \\ \partial_z\hat{\phi}(\xi, -h) = 0. \end{cases}$$

Segue daí que

$$\partial_z\hat{\phi}(\xi, z) = \hat{\psi}(\xi)|\xi|\sinh(|\xi|z) + A_2(\xi)|\xi|\cosh(|\xi|z),$$

o que implica que

$$A_2(\xi) = \frac{\hat{\psi}(\xi)\sinh(|\xi|h)}{\cosh(|\xi|h)}.$$

E portanto

$$\hat{\phi}(\xi, z) = \frac{\cosh(|\xi|(z+h))}{\cosh(|\xi|h)}\hat{\psi}(\xi).$$

Usando a notação padrão para multiplicadores de Fourier introduzida nas preliminares, temos que

$$\phi(X, z) = \frac{\cosh((z+h)|D|)}{\cosh(h|D|)}\psi.$$

Agora, uma vez que por definição $Z(0)\psi = \partial_z\phi\mid_{z=0}$ deduzimos

$$Z(0)\psi = |D|\tanh(h|D|)\psi.$$

■

Resolvendo (2.13) obtemos que a elevação da superfície do fluido ζ é dada pela equação

$$\partial_t^2\zeta + g|D|tanh(h|D|)\zeta = 0. \tag{2.14}$$

A propagação de ondas planas por (2.14) é um aspecto fundamental do estudo da equação linearizada. Em geral, uma onda é uma oscilação espaço temporal de pulsação $\omega \in \mathbb{R}$ e de número de onda $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, isto é

$$\zeta = a\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t), \tag{2.15}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é a amplitude da onda plana. (Que não desempenha nenhum papel especial, porque a equação (2.14) é linear.)

Lema 2.5.2. *Quando*

$$\omega^2 = g|\mathbf{k}|\tanh(\mathbf{h}|\mathbf{k}|) \tag{2.16}$$

temos que ζ *definida em* (2.15) *é solução de* (2.14). *Chamamos* (2.16) *de relação de dispersão da equação* (2.14).

Demonstração: Primeiramente, é preciso calcular

$$A(x) := |D|\tanh(h|D|)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} - \omega t).$$

Aplicando a transformada de Fourier obtemos que

$$\begin{aligned}\hat{A}(\xi) &= \{|D|\tanh(h|D|)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} - \omega t)\}\hat{}(\xi)\\ &= |\xi|\tanh(h|\xi|)\{\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} - \omega t)\}\hat{}(\xi).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Note que $\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X} - \omega t) = \Re(e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)})$ além disso,

$$\{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)}\}\hat{} = e^{-i\omega t}\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}\}\hat{} \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \tag{2.18}$$

Agora, $\delta_k : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada dada por $\langle \delta_k, \varphi \rangle = \varphi(k), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Além disso, utilizando os resultados vistos no Capítulo 1 temos que

$$\begin{aligned}\langle \hat{\delta_k}, \varphi \rangle &= \langle \delta_k, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(k)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\mathbf{X}\cdot\mathbf{k}} dx\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle e^{-i\mathbf{X}\cdot\mathbf{k}}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Logo,

$$\hat{\delta_k} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-i\mathbf{X}\cdot\mathbf{k}} \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \tag{2.19}$$

Combinando (2.18) e (2.19), obtemos que

$$\begin{aligned}\{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega\mathbf{t})}\}^{\wedge} &= \{e^{-i\mathbf{X}\cdot\mathbf{k}}\}^{\vee} e^{-i\omega t}\\ &= (2\pi)^{d/2} \delta_k e^{-i\omega t}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Da mesma forma é fácil ver que

$$\{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)}\}^{\wedge} = (2\pi)^{d/2} \delta_{-k} e^{i\omega t}. \tag{2.21}$$

Agora, por (1.3), (2.20) e (2.21), temos que, dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\langle \{\Re e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)}\}^{\wedge}, \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \langle \left(e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)}\right)^{\wedge}, \varphi \rangle + \frac{1}{2} \overline{\langle [(e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)})^{\sim}]^{\wedge}, \overline{\varphi} \rangle}\\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}}{2} e^{-i\omega t} \langle \delta_k, \varphi \rangle + \frac{(2\pi)^{d/2}}{2} e^{i\omega t} \langle \delta_{-k}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Segue por (2.17) que

$$\hat{A}(\xi) = |\xi| \tanh(h|\xi|) \frac{(2\pi)^{d/2}}{2} \left(\delta_k e^{-i\omega t} + \delta_{-k} e^{i\omega t}\right).$$

Agora note que, $f(\xi) = |\xi| \tanh(h|\xi|) \in Q^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, donde

$$\langle f\delta_k, \varphi \rangle = \langle \delta_k, f\varphi \rangle = f(k)\varphi(k) = f(k) \langle \delta_k, \varphi \rangle.$$

Logo,

$$\hat{A}(\xi) = |\mathbf{k}| \tanh(h|\mathbf{k}|) \frac{(2\pi)^{d/2}}{2} \left(\delta_k e^{-i\omega t} + \delta_{-k} e^{i\omega t}\right).$$

Como $(\hat{f}+\hat{g})\check{}(x) = (f+g)(x)$ segue por (2.20) e (2.21) que

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{|\mathbf{k}|}{2}\tanh(h|\mathbf{k}|)\left(e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)}\right) \\ &= |\mathbf{k}|\tanh(h|\mathbf{k}|)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\zeta(x,t) = a\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t)$ então

$$\partial_t^2\zeta(x,t) = -a\omega^2\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t).$$

Concluímos daí que $\omega^2 = g|\mathbf{k}|\tanh(h|\mathbf{k}|)$ se e somente se (2.13) é satisfeita e portanto $\zeta(x,t)$ dada por (2.15) é solução de (2.13). ∎

Observação 2.5.1. *O potencial de velocidade associado a onda plana* (2.15) *é dado por*

$$\phi(t,X,z) = \frac{ag}{\omega}\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}\sin(\mathbf{k}\cdot X-\omega t), \quad \textit{onde}\ \ k = |\mathbf{k}|.$$

Denotando por V os componentes horizontais da velocidade e w o componente vertical, temos que

$$V(t,X,z) = \nabla\phi = \frac{agk}{\omega}\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t),$$

e

$$w(t,X,z) = \partial_z\phi = \frac{agk}{\omega}\frac{\sinh(k(z+h))}{\cosh(kh)}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}-\omega t).$$

Note que a energia (no caso a norma em L^2) das ondas planas do tipo (2.15) *é infinita, mas a solução geral de* (2.14) *pode ser escrita como a superposição de ondas planas, mais precisamente, a solução geral de* (2.14) *é dada por*

$$\zeta(t,X) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(X\cdot\mathbf{k}-\omega\mathbf{k}t)}f(\mathbf{k})d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(X\cdot\mathbf{k}+\omega(\mathbf{k})t)}g(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{2.22}$$

onde f e g são as funções determinadas pelas condições iniciais e (2.16).

Terminamos este parágrafo com uma palavra sobre a hipótese de águas rasas. Se as funções f e g de (2.22) estão localizadas perto de zero, de modo que podemos supor $kh \ll 1$, ou seja, o comprimento de onda é grande em relação a profundidade então temos que $\omega(k) \simeq \sqrt{gh}k$. Isso equivale a substituir formalmente a solução de (2.14) pela solução de

$$\partial_t^2 \zeta - gh\Delta\zeta = 0. \tag{2.23}$$

Concluimos então que a aproximação em águas rasas consiste portanto, em primeira ordem, em substituir as equações de Euler com superfície livre por uma simples equação de onda com velocidade $\sqrt{gh}$.

Observação 2.5.2. *Para ser mais preciso,* $\omega(k) \simeq \sqrt{gh}k$ *não é a aproximação que é feita sobre a hipótese de águas rasas, mas* $\omega(k)t \simeq \sqrt{gh}kt$. *O que significa que o erro aumenta com o tempo e que a equação de onda* (2.23) *não pode fornecer uma boa aproximação para tempos grandes.*

Observação 2.5.3. *De acordo com* (2.5.1)*, o potencial de velocidade na superfície é de ordem* $O\left(a\lambda\sqrt{\frac{g}{h}}\right)$ *(com* $\lambda = \frac{1}{k}$*) em águas rasas.*

Exemplo 2.5.1. Escoamento Costeiro: *Considere uma onda de 50 centímetros de amplitude sobre o planalto costeiro, onde a profundidade é de aproximadamente 10 metros, e com 10 metros de comprimento de onda. Temos* $kh = 10/100 = 0,1$ *e podemos então aplicar a aproximação de águas rasas. Logo a velocidade de propagação é dada por* $\sqrt{gh} = 10m/s = 36km/h$.

Exemplo 2.5.2. Tsunami no Oceano Índico: *Neste caso, consideremos a amplitude da onda de 20 metros, a profundidade é de 6000 metros e o comprimento* *de onda é de 100 quilômetros. Temos que* $kh = 6000/100000 = 0,06$ *e novamente podemos utilizar a aproximação de águas rasas. A velocidade de propagação é então* $\sqrt{gh} \simeq 245m/s \simeq 882km/h$.

2.6 Modelos Não Lineares

Como explicitamos na seção anterior, a aproximação que consiste em utilizar, a equação de onda (2.23) em águas rasas não é válida para tempos grandes. Assim, os efeitos não lineares, que foram negligenciados, também desempenham um papel na dinâmica da solução ao longo do tempo. Por esta razão, nesta seção apresentaremos os mesmos modelos porém agora levando em conta a evolução das ondas ao longo do tempo e os efeitos não lineares.

2.6.1 Desenvolvimento da equação não dimensional

Visando facilitar o estudo qualitativo das ondas de superfície, vamos colocar as equações sob uma forma não dimensional, isto é, escreveremos as equações em função de novas incógnitas sem dimensão. A maneira de adimensionar um problema depende da natureza do escoamento estudado. Aqui, destacamos 3 grandezas físicas fundamentais:

- Amplitude: denotamos pela letra a e representa a ordem de grandeza do tamanho das ondas observadas.
- Profundidade: denotamos pela letra h.
- Comprimento de onda: é denotado por λ. Típico do fluxo observado, nova-

mente é somente uma ordem de grandeza, pois pode ser difícil determinar o comprimento de onda de um determinado escoamento.

É natural então introduzirmos as quantidades sem dimensão $\tilde{\zeta}, \tilde{z}$ e $\tilde{X}$ usando as relações:

$$\tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{a}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \tilde{X} = \frac{X}{\lambda}$$

estas quantidades são sem dimensão e de tamanho $O(1)$.

Observação 2.6.1. *Estamos supondo aqui implicitamente que o comprimento de onda típico do fluido é o mesmo em todas as direções horizontais, porém este não é necessariamente o caso. Para as ondas fracamente transversais por exemplo (este é o quadro físico que encontramos a equação de Kadomtsev-Petviashvili), precisamos adimensionar as duas direções horizontais para dois comprimentos de onda diferentes:* $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda}$ *e* $\tilde{y} = \frac{y}{\mu}$.

Para colocar sob a forma adimensionada as outras quantidades envolvidas nas equações de Bernouilli (2.7)-(2.10), ou seja o tempo e o potencial de velocidade ϕ, usamos as quantidades destacadas para o comportamento linear das ondas de superfície em águas rasas na seção anterior. Vimos que a velocidade dessas ondas foi, em uma primeira aproximação, $\sqrt{gh}$; é portanto natural adimensionar o tempo por $\lambda/\sqrt{gh}$ e o potencial por $a\lambda\sqrt{g/h}$ de acordo com (2.5.3). Logo

$$\tilde{t} = \frac{t}{\lambda/\sqrt{gh}}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{a\lambda\sqrt{g/h}}.$$

Por fim, introduzimos dois parâmetros sem dimensão, μ e ε, dados por:

$$\mu = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2, \quad \varepsilon = \frac{a}{h},$$

como por definição do número de onda, $\lambda = \frac{1}{k}$, podemos também escrever $\mu = (kh)^2$. A condição de águas rasas dada na seção anterior pode portanto ser escrita como $\mu \ll 1$. O parâmentro sem dimensão μ mede o caráter do escoamento em águas rasas do fluido. Já o parâmetro ε é uma medida para a amplitude do fluxo. Falamos de ondas de amplitude fraca quando $\varepsilon \ll 1$.

Agora podemos então escrever as equações de Bernoulli com superfície livre (2.7)–(2.10) sob a forma adimensional:

$$\mu \Delta_{\tilde{X}} \tilde{\phi} + \partial_{\tilde{z}}^2 \tilde{\phi} = 0, \quad -1 < \tilde{z} < \varepsilon \tilde{\zeta}, \tag{2.24}$$

$$\partial_{\tilde{z}} \tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{z} = -1, \tag{2.25}$$

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\phi} + \tilde{\zeta} + \frac{1}{2} \varepsilon |\nabla \tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\mu} |\partial_{\tilde{z}} \tilde{\phi}|^2 = 0, \quad \tilde{z} = \varepsilon \tilde{\zeta}, \tag{2.26}$$

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\zeta} + \varepsilon \nabla \tilde{\zeta} \cdot \nabla \tilde{\phi} - \frac{1}{\mu} \partial_{\tilde{z}} \tilde{\phi} = 0, \quad \tilde{z} = \varepsilon \tilde{\zeta}. \tag{2.27}$$

Definimos

$$\tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{X}) := \tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{X}, \varepsilon \tilde{\zeta} \tilde{t}, \tilde{X}) \text{ e } Z_\mu(\varepsilon \tilde{\zeta}) \tilde{\psi} := \partial_{\tilde{z}} \tilde{\phi} \mid_{\tilde{z} = \varepsilon \tilde{\zeta}} .$$

Da mesma forma podemos dar uma versão não dimensional das equações (2.11) e (2.12)

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\psi} + \tilde{\zeta} + \frac{1}{2} \varepsilon |\nabla \tilde{\psi}|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\mu} + \varepsilon^2 |\nabla \tilde{\zeta}|^2 \right) \left(Z_\mu(\varepsilon \tilde{\zeta}) \tilde{\psi} \right)^2 = 0 \tag{2.28}$$

e

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{\zeta} + \varepsilon\nabla\tilde{\psi}\cdot\nabla\tilde{\zeta} - \left(\frac{1}{\mu} + \varepsilon^2|\nabla\tilde{\zeta}|^2\right) Z_\mu(\varepsilon\tilde{\zeta})\tilde{\psi} = 0 \tag{2.29}$$

Uma análise rápida das equações (2.24)-(2.27) pode nos dar uma interpretação mais matemática dos parâmetros μ e ε.

μ mede os efeitos dispersivos e ε mede os efeitos não lineares. Com efeito, se $\varepsilon = 0$ as não linearidades desaparecem, e se $\mu = 0$, então $\partial_z\phi = 0$ e os efeitos dispersivos são anulados.

A relação desses dois números é chamada número de Stokes, $S = \frac{\varepsilon}{\mu}$ e mede, portanto, a relação entre os efeitos não-lineares e dispersivos.

2.6.2 Modelos do Tipo Saint-Venant

Este modelo ocorre no caso de um escoamento em águas rasas ($\mu \ll 1$) mas de forte amplitude ($\varepsilon \simeq 1$). Por isso o número de Stokes $S \gg 1$ e, de acordo com a análise qualitativa da seção precedente, esperamos por um fluxo fortemente não linear. Para simplificar a notação, vamos supor $\varepsilon = 1$ em toda esta seção.

Afim de obter um modelo assintótico a partir de (2.28)-(2.29), vamos fazer um desenvolvimento assintótico das quantidades envolvidas nestas equações em função de μ. A única dificuldade é o desenvolvimento de $Z_\mu(\zeta)\psi$.

Procuramos por uma solução aproximada de (2.24)-(2.25) com condição de Dirichlet $\phi = \psi$ em $z = \zeta$, ou seja,

$$\begin{cases} \mu\Delta\phi + \partial_z^2\phi = 0, & -1 < z < \zeta \\ \phi = \psi, & z = \zeta \\ \partial_z\phi = 0, & z = -1. \end{cases} \tag{2.30}$$

Lembrando que estamos considerando $\varepsilon = 1$ procuramos uma solução para (2.30) da forma:

$$\phi_{app}(X,z) = \phi_0(X,z) + \mu\phi_1(X,z) + \mu^2\phi_2(X,z) + ...$$

substituimos então esta expressão em (2.24), e escolhemos os $\phi_j, j \geq 0$ de maneira a anular os primeiros termos do desenvolvimento em termos de μ da expressão encontrada. Para as condições no bordo serem também satisfeitas por ϕ_{app}, impomos $\phi_0(X,\zeta) = \psi$ e $\phi_j(X,\zeta) = 0\ \ (j \geq 1)$ e que $\partial_z\phi_j(X,-1) = 0\ \ (j \geq 0)$.

$$\begin{cases} \mu\Delta\phi_0 + \partial_z^2\phi_0 + \mu^2\Delta\phi_1 + \mu\partial_z^2\phi_1 + \mu^3\Delta\phi_2 + \mu^2\partial_z^2\phi_2 + ... = 0, \\ \phi_0\ |_{z=\zeta} = \psi;\ \ \phi_j\ |_{z=\zeta} = 0\ \ \forall j \geq 1, \\ \partial_z\phi_j = 0, z = -1. \end{cases} \tag{2.31}$$

Supondo unicidade dos coeficientes em μ, segue que para o coeficiente correspondente ao termo constante:

$$\begin{cases} \partial_z^2\phi_0 = 0 \\ \phi_0\ |_{z=\zeta} = \psi \\ \partial_z\phi_0 = 0,\ \ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_z\phi_0 = c_1(X) \\ \partial_z\phi_0(X,-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow\ c_1(X) = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} \phi_0 = c(X) \\ \phi_0\ |_{z=\zeta} = \psi \end{cases} \Rightarrow\ \phi_0(X,z) = \psi(X).$$

Resolvendo agora para μ:

$$\begin{cases} \Delta\psi + \partial_z^2\phi_1 = 0 \\ \partial_z\phi_1(X,-1) = 0 \\ \phi_1(X,\zeta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_z\phi_1 = \Delta\psi z + c_1(X) \\ \partial_z\phi_1(X,-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1(X) = \Delta\psi.$$

Donde

$$\begin{cases} \phi_1(X,z) = \Delta\psi\frac{z^2}{2} + \Delta\psi z + c_2(X) \\ \\ \phi_1(X,\zeta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \; c_2(X) = -\Delta\psi(\frac{\zeta^2}{2} + \zeta).$$

E portanto,

$$\phi_1(X,z) = \Delta\psi\left(\frac{z^2}{2} + z - \frac{\zeta^2}{2} - \zeta\right).$$

Agora, como formalmente, $Z_\mu(\zeta)\psi \simeq \partial_z\phi_{app}\,|_{z=\zeta}$, vê-se facilmente que

$$Z_\mu(\zeta)\psi = \mu(1+\zeta)\Delta\psi + O(\mu^2).$$

Substituindo $Z_\mu(\zeta)$ desta expressão em (2.28) e (2.29) (com $\varepsilon = 1$) e mantendo apenas os termos de ordem $O(1)$ em relação a μ, obtemos:

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 = 0, \\ \\ \partial_t\zeta + \nabla\psi\cdot\nabla\zeta + (1+\zeta)\Delta\psi = 0. \end{cases}$$

Introduzindo $U := \nabla\psi$ e tomando o gradiente da primeira equação, obtemos as equações de Saint-Venant (ou shallow water equations):

$$\partial_t U + \nabla\zeta + \frac{1}{2}\nabla|U|^2 = 0, \tag{2.32}$$

e

$$\partial_t\zeta + \nabla\cdot((1+\zeta)U) = 0. \tag{2.33}$$

Notação: Quando $d = 2$ designamos por u e v as componentes de U (isto é $U = \begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix}$). Quando $d = 1$, utilizaremos frequentemente a identificação $U = u$.

Conforme havíamos previsto acima, estas equações deixam em evidência um comportamento fortemente não linear, os termos dispersivos, com efeito, foram todos negliegenciados. As equações (2.32) e (2.33) são hiperbólicas, não lineares e conduzem ao aparecimento de choques (as ondas quebram).

2.6.3 Um primeiro Modelo de Boussinesq

Neste modelo, estudamos um caso com escoamento em águas rasas ($\mu \ll 1$) e de baixa amplitude ($\varepsilon \ll 1$). Estamos supondo desta forma que o número de Stokes $S \simeq 1$, isto é, $\mu \simeq \varepsilon$. De acordo com a análise qualitativa do parágrafo (2.6.1), esperamos obter as equações assintóticas envolvendo tanto os efeitos dispersivos quanto os não-lineares. Afim de obter um modelo assintótico a partir de (2.28)-(2.29), procedemos como no parágrafo anterior. É preciso para isto fazer um desenvolvimento assintótico de $Z_\mu(\varepsilon\zeta)\psi$ (com $\mu = \varepsilon$) em função de ε. O método é essencialmente o mesmo do parágrafo anterior, porém os cálculos são um pouco mais delicados pois neste caso o domínio de resolução da equação de Laplace (2.24) depende de um parâmetro pequeno (a superfície, com efeito, é parametrizada por $\varepsilon\zeta$, e não mais por ζ como para as equações de Saint-Venant). Vamos admitir que:

$$Z_\varepsilon(\varepsilon\zeta)\psi = -\varepsilon\Delta\psi - \varepsilon^2\left(\frac{1}{3}\Delta^2\psi + \zeta\Delta\psi\right) + O(\varepsilon^2). \tag{2.34}$$

Além disso, temos o seguinte resultado que nos dá uma justificativa rigorosa do desenvolvimento assintótico de $Z_\varepsilon(\varepsilon\zeta)\psi$:

Proposição 2.6.1. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $\zeta \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Então para toda ψ tal que $\nabla\psi \in H^{k+5}(\mathbb{R}^2)$, temos que*

$$\left|Z_\varepsilon(\varepsilon\zeta)\psi - (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2)\right|_{H^{k+1/2}} \leq \varepsilon^2 C(|\zeta|_{W^{k+2,\infty}})|\nabla\psi|_{H^{k+5}},$$

com

$$Z_1 := -\Delta\psi \text{ e } Z_2 := -\left(\frac{1}{3}\Delta^2\psi + \zeta\Delta\psi\right).$$

Uma demonstração desta proposição pode ser vista em [1].

Substituindo $Z_\varepsilon(\varepsilon\zeta)$ pela expressão (2.34) em (2.28)-(2.29) e omitindo os termos de $O(\varepsilon^2)$, obtemos:

$$\begin{cases} \partial_t\psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2}|\nabla\psi|^2 = 0 \\ \partial_t\zeta + \varepsilon\nabla\psi\cdot\nabla\zeta + \Delta\psi + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\Delta^2\psi + \zeta\Delta\psi\right) = 0. \end{cases}$$

Introduzindo $U = \nabla\psi$ e tomando o gradiente da primeira equação, obtemos um sistema de Boussinesq:

$$\begin{cases} \partial_t U + \nabla\zeta + \frac{\varepsilon}{2}\nabla|U|^2 = 0 \\ \partial_t\zeta + \nabla\cdot U + \varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta U) + \frac{1}{3}\Delta\nabla\cdot U\right) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Novamente nossas previsões baseadas na análise qualitativa do parágrafo (2.6.1) são verificadas uma vez que constatamos o aparecimento de um termo dispersivo (na ocorrência de $\Delta\nabla\cdot U$) na mesma ordem que os termos não lineares.

Observação 2.6.2. *O sistema* (2.35) *apresenta uma desvantagem: sua linearização em torno de* $(U,\zeta) = (0,0)$ *é mal posta. Com efeito, negligenciando os termos não lineares obtemos um sistema da forma:*

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_{x_1} \\ 0 & 0 & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} + \frac{\varepsilon}{3}\Delta\partial_{x_1} & \partial_{x_2} + \frac{\varepsilon}{3}\Delta\partial_{x_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta \end{pmatrix} = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier no sistema que opera (U,ζ)*, obtemos:*

$$\hat{A}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\xi_1 \\ 0 & 0 & i\xi_2 \\ i\xi_1 - \frac{\varepsilon}{3}i\xi_1^3 & i\xi_2 - \frac{\varepsilon}{3}i\xi_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cujos auto valores são dados pelas raízes da equação $\lambda^2 = -|\xi|^2 + \frac{\varepsilon}{3}|\xi|^4$*, onde* $\xi = (\xi_1, \xi_2)$*. Daí, se permitimos altas frequências, os auto valores deixam de ser puramente imaginários, donde segue a característica de ser mal posta.*

Observação 2.6.3. *Como por definição temos que* $U = \nabla\phi\mid_{z=\varepsilon\zeta} + \varepsilon Z_\varepsilon(\varepsilon\zeta)\psi\nabla\zeta$, *segue de* (2.34) *que* $U = \nabla\phi\mid_{z=\varepsilon\zeta} + O(\varepsilon^2)$, *ou seja, com um erro de* $O(\varepsilon^2)$, U *representa a componente horizontal da velocidade do fluido na superfície.*

2.6.4 Outros Modelos de Boussinesq

É fácil obter outros modelos formais equivalentes a (2.35). Historicamente, vários modelos foram obtidos substituindo a incógnita U (componente horizontal da velocidade do fluido na superfície) pela média vertical da componente horizontal da velocidade, ou pelo valor desta velocidade no fundo.

Apresentaremos aqui um método sistemático, introduzido em [2], e que permite obter toda uma classe de sistemas formalmente equivalentes à (2.35).

A primeira etapa consiste em introduzir a incógnita U_θ definida da seguinte forma:

$$\forall\theta \in [0,1]; \quad U_\theta := \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)^{-1} U \tag{2.36}$$

onde, como no parágrafo anterior, $U = \nabla\psi$. Note que se supomos U regular e limitado assim como suas derivadas, temos que:

$$U_\theta = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1+\theta^2)\Delta\right) U + O(\varepsilon^2). \tag{2.37}$$

Observação 2.6.4. *Numa primeira aproximação, podemos resolver a equação de Laplace* (2.24) *(com* $\mu = \varepsilon$*) em um domínio não deformado* $\mathbb{R}^d \times (-1,0)$. *Da mesma forma como calculamos* ϕ *na Seção 2.5 segue que* $\phi(X,z) = \frac{\cosh(\sqrt{\varepsilon}(z+1)|D|)}{\cosh\sqrt{\varepsilon}|D|}\psi$, *onde, como anteriormente,* D *indica o multiplicador de Fourier. Isto significa que a componente horizontal da velocidade à altura* z *é dada por* $\nabla\phi(X,z) = \frac{\cosh\left(\sqrt{\varepsilon}(z+1)\right)|D|}{\cosh\sqrt{\varepsilon}|D|}U$.

Obtemos portanto, formalmente, fazendo um desenvolvimento limitado do multiplicador de Fourier em relação a ε:

$$\nabla\phi(X,z) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\left(1-(1+z)^2\right)\Delta\right)U + O(\varepsilon^2),$$

e portanto, U_θ é uma aproximação da componente horizontal da velocidade do fluido à altura $z = \theta - 1$.

A segunda etapa consiste em observar que de acordo com (2.35), temos que

$$\partial_t U = -\nabla\zeta + O(\varepsilon); \quad \partial_t\zeta = -\nabla\cdot U + O(\varepsilon)$$

de onde podemos tirar as seguintes relações:

$$\begin{cases} \partial_t U = (1-\mu)\partial_t U - \mu\nabla\zeta + O(\epsilon), \\ \nabla\cdot U = \lambda\nabla\cdot U - (1-\lambda)\partial_t\zeta + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.38}$$

e isto vale $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Por (2.37) segue que

$$\nabla\cdot U_\theta = \nabla\cdot U + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\nabla\cdot U + O(\varepsilon^2).$$

Donde, $\nabla\cdot U = \nabla U_\theta - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\nabla\cdot U + O(\varepsilon^2)$. Usando isto e a primeira equação de (2.35), temos que

$$\begin{aligned} \partial_t U_\theta &= \partial_t\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)U + O(\varepsilon^2) \\ &= \partial_t U + \varepsilon\left(\frac{(1-\theta^2)}{2}\partial_t\Delta U\right) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\nabla\zeta - \frac{\varepsilon}{2}\nabla|U|^2 + \varepsilon\left(\frac{(1-\theta^2)}{2}\Delta\left((1-\mu)\partial_t U - \mu\nabla\zeta\right)\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Agora, como $U = \nabla\phi\mid_{z=\varepsilon\zeta} + O(\varepsilon^2)$ e $U_\theta = \nabla\phi + O(\varepsilon^2)$ quando $z = \theta - 1$, $\theta\in[0,1]$, então

$$\begin{aligned} &\partial_t U_\theta + \nabla\zeta \\ &+ \varepsilon\left(\frac{1}{2}\nabla|U_\theta|^2 - \frac{(1-\theta^2)}{2}(1-\mu)\Delta\partial_t U_\theta + \frac{(1-\theta^2)}{2}\mu\Delta\nabla\zeta\right) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo o $\nabla \cdot U_\theta$ na segunda equação de (2.35) deduzimos que

$$\begin{aligned}\partial_t\zeta &= -\nabla \cdot U_\theta + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\nabla\cdot U - \varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta U) + \frac{1}{3}\Delta\nabla\cdot U\right)\\ &= -\nabla\cdot U_\theta - \varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta U) - \left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\Delta\left(\lambda\nabla\cdot U - (1-\lambda)\partial_t\zeta\right)\right).\end{aligned}$$

Novamente usando a observação 2.6.4 temos que

$$\begin{aligned}&\partial_t\zeta + \nabla\cdot U_\theta\\ &+\varepsilon\left(\nabla(\zeta U_\theta) + \left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\lambda\Delta\nabla\cdot U_\theta - \left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)(1-\lambda)\Delta\partial_t\zeta\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Desta forma, obtemos uma classe de sistemas com 3 parâmetros (à saber θ, λ, μ), todos formalmente equivalentes ao sistema de Boussinesq (2.35). Cada um desses sistemas, denotado pos $S_{\theta,\lambda,\mu}$ é dado por

$$S_{\theta,\lambda,\mu}\begin{cases}\partial_t U_\theta + \nabla\zeta + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\nabla|U_\theta|^2 + a\Delta\nabla\zeta - b\Delta\partial_t U_\theta\right) = 0\\ \partial_t\zeta + \nabla\cdot U_\theta + \varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta U_\theta) + c\Delta\nabla\cdot U_\theta - d\Delta\partial_t\zeta\right) = 0,\end{cases}$$

onde omitimos todos os termos com $O(\varepsilon^2)$ e onde a, b, c e d são dados por

$$a = \frac{1-\theta^2}{2}\mu;\ b = \frac{1-\theta^2}{2}(1-\mu);\ c = \left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\lambda;\ d = \left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)(1-\lambda).$$

Note em particular que $S_{1,1,0}$ é o sistema de Boussinesq (2.35). Dentre as vantagens de dispormos de uma classe de sistema formalmente equivalentes destacamos o fato de alguns destes possuirem propriedades interessantes, bem como o de ser um sistema "bem posto", fácil de estudar numericamente e possuir boas propriedades dispersivas.

2.7 Modelos Unidirecionais

Os modelos de Boussinesq apresentados na seção anterior tem em comum o fato de se degenerarem todos em uma equação de onda (com velocidade igual à 1) quando $\varepsilon = 1$. Quando a dimensão da superfície $d = 1$, temos, em uma primeira aproximação, duas componentes que se propagam em sentido inverso, à velocidade ± 1. Quando $\varepsilon \neq 0$, os termos dispersivos e não-lineares alteram este comportamento, em particular, as duas componentes de onda são acopladas. Escolhendo bem as condições iniciais, podemos então considerar as ondas essencialmente unidirecionais. As equações que regem a evolução de tais ondas, que nós chamaremos de modelos unidirecionais, são equação de Korteweg-de Vries (KdV)e de Benjamin-Bona-Mahony (BBM).

Em toda esta seção, nós só consideramos o caso em que a dimesão da superfície é 1 ($d = 1$). Queremos descrever o comportamento das incógnitas u e ζ que aparecem em (2.35) no caso de uma onda se propagando para a direita. Buscamos então escrever u e ζ na forma:

$$u(t,x) = \upsilon(\varepsilon t, x - t) \quad \text{e} \quad \zeta(t,x) = \varsigma(\varepsilon t, x - t).$$

Utilizando a regra da cadeia, temos que as funções $\upsilon(\tau,\xi)$ e $\varsigma(\tau,\xi)$ devem satisfazer:

$$\begin{cases} \epsilon\partial_\tau \upsilon - \partial_\xi \upsilon + \partial_\xi \upsilon + \epsilon \upsilon \partial_\xi \upsilon = 0 \\ \epsilon\partial_\tau \varsigma - \partial_\xi \varsigma + \partial_\xi \upsilon + \epsilon \left(\partial_\xi(\varsigma\upsilon) + \frac{1}{3}\partial_\xi^3 \upsilon \right) = 0. \end{cases}$$

Segue dessas equações que $\partial_\xi \upsilon = \partial_\xi \varsigma + O(\epsilon)$; podemos portanto substituir υ por ς nos termos dispersivos e não lineares, já que o erro causado por esta substituição é $O(\epsilon^2)$. Adicionando então as duas equações acima e negliegenciando os termos de $O(\epsilon^2)$, obtemos a equação KdV:

$$\partial_\tau \varsigma + \frac{1}{6}\partial_\xi^3 \varsigma + \frac{3}{2}\varsigma \partial_\xi \varsigma = 0. \tag{2.41}$$

Como para o sistema de Boussinesq do qual esta equação provém, a equação KdV contém uma componente dispersiva e uma não-linear. É a presença simultânea dessas duas componentes que torna possível a existência de fenômenos como as ondas solitárias.

Observação 2.7.1. *Se tivéssemos partido de um sistema $S_{\theta,\lambda,\mu}$ tal qual o descrito na seção anterior teríamos o seguinte sistema equivalente:*

$$S_{\theta,\lambda,\mu} = \begin{cases} \varepsilon\partial_\tau \upsilon - \partial_\xi \upsilon + \partial_\xi \varsigma + \varepsilon\left(\upsilon\partial_\xi \upsilon + a\partial_\xi^3 \varsigma - b(\varepsilon\partial_\xi^2\partial_\tau \upsilon - \partial_\xi^3 \upsilon)\right) = 0 \\ \varepsilon\partial_\tau \varsigma - \partial_\varepsilon \varsigma + \partial_\xi \upsilon + \varepsilon\left(\partial_\xi(\varsigma\upsilon) + c\partial_\xi^3 \upsilon - d(\varepsilon\partial_\xi^2\partial_\tau \varsigma - \partial_\xi^3 \varsigma)\right) = 0 \end{cases}$$

Daí, usando o mesmo critério anterior, podemos substituir υ por ς e obtemos no lugar da KdV:

$$\partial_\tau \varsigma + \frac{a+b+c+d}{2}\partial_\xi^3 \varsigma + \frac{3}{2}\varsigma\partial_\xi \varsigma = 0.$$

Usando as fórmulas da seção anterior, vemos que $a+b+c+d = \frac{1}{3}$. Concluímos daí que todos os modelos de Boussinesq $S_{\theta,\lambda,\mu}$ tem o mesmo comportamento assintótico como no caso de ondas unidirecionais. Este comportamento é descrito pela equação de KdV (2.41).

2.8 Problema Geral

Neste capítulo, obtivemos de maneira formal vários modelos assintóticos que permitiram a descrição de ondas de superfícies em águas rasas.

Surge agora o problema de justificar estes modelos matematicamente. Será que eles fornecem efetivamente uma boa aproximação da equação de Euler com superfície livre? Estes modelos são todos equivalentes, ou alguns são melhores que outros? A resposta para estas questões é esboçada nos próximos capítulos, nos concentraremos em particular no caso de ondas longas ($\varepsilon = \mu \ll 1$), para o qual obtemos os modelos de Boussinesq e de KdV.

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções para Sistemas Hiperbólicos Semilineares

Para a justificação dos modelos assintóticos introduzidos no Capítulo 2 precisamos de alguns resultados técnicos sobre sistemas hiperbólicos. Este capítulo é dedicado a estes resultados.

Consideramos aqui os sistemas semilineares da forma:

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j u + \sum_{1\leq j,k,l\leq d} B_{j,k,l}\partial^3_{j,k,l} u + \sum_{j=1}^{d} C_j(u)\partial_j u = f, \tag{3.1}$$

onde $u : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto u(t,x) \in \mathbb{R}^n$; supomos ainda que seja satisfeita a seguinte hipótese de hiperbolicidade:

Hipótese 1 (Hiperbolicidade): Para todo $0 \leq j,k,l \leq d$, A_j e $B_{j,k,l}$, são matrizes simétricas reais de tamanho $n \times n$ e $u \mapsto C_j(u)$ é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ no espaço das matrizes simétricas reais de tamanho $n \times n$.

Podemos então enunciar o seguinte:

Teorema 3.0.1. *Suponha que a* **Hipótese 1** *seja satisfeita. Seja* $s > \frac{d}{2} + 1$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)^n$ *e* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d)^n)$. *Então existe* $T > 0$ *e uma única solução* $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n)$ *de* (3.1) *com condição inicial* $u(0,x) = u_0(x)$. *Além disso existe uma constante positiva* c_0 *tal que vale a estimativa de energia*

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s} \leq e^{\lambda t}\|u^0\|_{H^s} + \int_0^t e^{\lambda(t-t')}\|f(t',\cdot)\|_{H^s}dt', \quad \forall 0 \leq t < T^*, \tag{3.2}$$

onde $[0,T^*)$ *é o intervalo de tempo maximal de existência de* u *e* $\lambda = c_0 \max_{j=1,..,d} \|C_j\|_\infty \sup_{t\in[0,T^*)} \|\nabla u(t,\cdot)\|_\infty$. *Em particular, se* $T^* < \infty$ *temos que* $\lim_{t\to T^*} \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \infty$.

Antes de iniciar a demonstração, precisamos definir um operador de regularização. Para isso, vamos considerar $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que:

(*a*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = 1;$

(*b*) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \cdot \psi(x)dx = 0$ para um número finito $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_d > 0$.

Defina $\psi_\delta(x) = \delta^{-d}\psi(\frac{x}{\delta})$ para todo $\delta > 0$ e o operador de regularização $(J_\delta)_\delta$ como $J_\delta(g) = \psi_\delta * g$, $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Note que $(J_\delta g)\hat{}(\xi) = (\psi_\delta * g)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{d/2}\hat{\psi}_\delta \hat{g}(\xi)$

Defina $\varphi = \hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Vemos que, de forma alternativa, podemos escrever

$$(J_\delta g)\hat{}(\xi) := \varphi(\delta\xi)\hat{g}(\xi).$$

Além disso, é fácil ver que usando a hipótese (a) sobre ψ temos que $\varphi(0) = 1$.

Recordamos as seguintes propriedades clássicas, lembrando que estamos considerando $0 < \delta \leq 1$:

Lema 3.0.2. *(i) Para todo $s, r \in \mathbb{R}$, com $s \leq r$ o operador J_δ age de $H^s(\mathbb{R}^d)$ em $H^r(\mathbb{R}^d)$ e existe uma constante $c_{s,r}$ tal que*

$$\forall v \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|J_\delta v\|_{H^r} \leq c_{s,r}\delta^{-(r-s)}\|v\|_{H^s}.$$

(ii) O operador linear J_δ é contínuo sobre todos os $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ e para todo $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|J_\delta v\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}$.

(iii) Se $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ então para todo $\delta > 0$ e $s' \in [0, s]$ temos que

$$\|J_\delta v - v\|_{H^{s'}} \leq c\delta^{s-s'}\|v\|_H^s.$$

Demonstração: (i) Lembrando que $\forall v \in H^s$ temos que

$$\|v\|_{H^s} = \|\Lambda^s v\|_{L^2} = \|\widehat{\Lambda^s v}\|_{L^2} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v}(\xi)\|_{L^2}.$$

Logo, por Plancharel obtemos

$$\begin{aligned}
\|J_\delta v\|_{H^r}^2 &= \|\Lambda^r(J_\delta v)\|_{L^2}^2 = \|\widehat{\Lambda^r(J_\delta v)}\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^r |\varphi(\delta\xi)\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1 + |\xi|^2)^r}{(1 + |\xi|^2)^s} (\varphi(\delta\xi))^2 (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left\{(1 + |\xi|^2)^{r-s}\varphi(\delta\xi)^2\right\} \|v\|_{H^s}^2.
\end{aligned}$$

Fazendo $\mu = \delta\xi$ temos que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{r-s}\varphi(\delta\xi)^2 = \sup_{\mu \in \mathbb{R}^d} (1 + |\delta^{-1}\mu|^2)^{r-s}\varphi(\mu)^2.$$

Agora, como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, temos que

$$(1 + |\mu|^2)^{r-s}\varphi(\mu)^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } |\mu| \to \infty.$$

Isto implica que existe $k > 0$ tal que se $|\mu| \geq k$ então $\varphi(\mu)^2 \leq 1$ e $|\mu|^{2(r-s)}\varphi(\mu)^2 \leq 1$. E portanto, deduzimos do Lema 1.3.2

$$\sup_{\mu \leq k}(1+|\delta^{-1}\mu|^2)^{r-s} \leq c_{s,r} \sup_{|\mu|\geq k}(1+|\delta^{-1}\mu|^{2(r-s)})\varphi(\mu)^2 \leq c_{s,r}(\delta^{-1})^{2(r-s)}.$$

Por outro lado, como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, deduzimos a existência de $M > 0$ tal que $|\varphi(\mu)^2| \leq M, \forall \mu \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{|\mu|\leq k}(1+|\delta^{-1}\mu|^{2(r-s)})\varphi(\mu)^2 &\leq M \sup_{|\mu|\leq k}(1+|\delta^{-1}\mu|^{2(r-s)}) \\ &\leq M(1+|\delta^{-1}k|^{2(r-s)}) \leq Mk^{2(r-s)}\delta^{-2(r-s)}. \end{aligned}$$

O resuldado segue daí.

(ii) Por definição dos operadores regularizantes $J_\delta v = \psi_\delta * v$ e portanto pela desigualdade de Young (Teorema 1.3.4) segue que $\|J_\delta v\|_p \leq \|\psi_\delta\|_{L^1}\|v\|_{L^p}$. Mas

$$\|\psi_\delta\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_\delta(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\delta^d}\check{\psi}\left(\frac{x}{d}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \check{\psi}(s)ds = \varphi(0) = 1.$$

(iii) Uma demonstração para este fato pode ser vista em [11] (Section 2, Proposition 2.1, pag. 491).

Demonstração do Teorema 3.0.1: A prova do Teorema 3.0.1 será feita através de 6 etapas:

Etapa 1: Nesta etapa mostraremos a unicidade da solução. Suponha que u e v são soluções do problema (3.1) satisfazendo $u, v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n)$ com condição inicial $u_0(x), v_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^d)^n$ respectivamente. Seja $w = u - v$. Então $w(\cdot, 0) := w_0(x) = u_0(x) - v_0(x)$ e

$$\partial_t w + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j w + \sum_{1\leq j,k,l\leq d} B_{j,k,l}\partial^3_{j,k,l} w + \sum_{j=1}^{d} C_j(u)\partial_j w - \sum_{j=1}^{d} C_j(w)\partial_j v = 0.$$

Tomando então o produto escalar desta última expressão por w e integrando em x, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} C_j(u)\partial_j w w dx + \sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} C_j(w)\partial_j v \cdot w dx = 0.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}} C_j(u)\partial_j w w dx = -\int_{\mathbb{R}} \partial_j C_j(u) w \cdot w dx - \int_{\mathbb{R}} C_j(u) w \cdot \partial_j w dx.$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}} C_j(u)\partial_j w \cdot w dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_j C_j(u) w \cdot w dx.$$

Segue daí que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|C_j(\partial_j u)\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_j v\|_{L^\infty}\|C_j(w)\|_{L^2}\|w\|_{L^2}.$$

Tomando $M = \max\left\{\|u\|_{L_T^\infty H_x^s}, \|v\|_{L_T^\infty H_x^s}\right\}$ e $y(t) = \|w(t,\cdot)\|_{L^2}^2$ segue do Lema de Sobolev ($s > \frac{d}{2}+1$) que

$$\begin{cases} y'(t) \leq cMy(t), \forall t \in [0,T] \\ y(0) = \|w_0\|_{L^2}^2. \end{cases}$$

Logo $e^{-cMt}(y'(t) - cMy(t)) \leq 0$, isto siginifica que, $\frac{d}{dt}(e^{-cMt}y(t)) \leq 0$. E portanto, integrando em ambos os lados de 0 à t segue que

$$e^{-cMt}y(t) \leq y(0), \text{ ou seja, } y(t) \leq y(0)e^{cMt}, \forall t \in [0,T].$$

Segue daí que

$$\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}e^{cMt}, \forall t \in [0,T]. \tag{3.3}$$

Quando $u_0 = v_0$, segue a unicidade.

Etapa 2: Vamos usar o teorema do ponto fixo de Banach para mostrar que $\forall\delta > 0$, $\exists T_\delta > 0$ e uma solução $u^\delta \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n)$ do problema regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u^\delta + \sum_{j=1}^d A_j J_\delta \partial_j u^\delta + \sum_{1\le j,k,l\le d} B_{j,k,l} J_\delta \partial^3_{j,k,l} u^\delta + \sum_{j=1}^d J_\delta\left(C_j(J_\delta u^\delta) J_\delta \partial_j u^\delta\right) = J_\delta f \\ u^\delta \mid_{t=0} = J_\delta u_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

definido sobre o intervalo $[0, T_\delta]$. Observamos que u^δ é solução do problema (3.4) se e somente se u^δ é solução da equação integral

$$u^\delta(t) = J_\delta u_0 + \int_0^t \left\{ -\sum_{j=1}^d A_j J_\delta \partial_j u^\delta - \sum_{j,k,l} B_{j,k,l} J_\delta \partial^3_{j,k,l} u^\delta \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^d J_\delta\left(C_j(J_\delta u^\delta) J_\delta \partial u^\delta\right) + J_\delta f \right\} d\tau =: \mathcal{F}(u^\delta).$$

Defina

$$X_T(a) = \left\{ u \in C^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n); \|u\|_{L^\infty_T H^s_x} := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} \le a \right\}.$$

O espaço assim definido é um espaço métrico completo.

Afirmação: *Se $a = 3c\|u_0\|_{H^s}$ e T é suficientemente pequeno de forma que*

$$\int_0^T \|f(\cdot,\tau)\|_{H^s} d\tau \le \frac{a}{3c} \quad e \quad T \le \frac{\delta^3}{3c(\delta^2(1+a))+1}. \tag{3.5}$$

temos que $\mathcal{F}(u^\delta) \in X_T(a)$, se $u^\delta \in X_T(a)$.

De fato, $\forall t \in [0,T]$, temos que

$$\|\mathcal{F}(u^\delta)\|_{H^s} \le \|J_\delta u_0\|_{H^s} + \int_0^t \left\{ \sum_{j=1}^d c_1 \|J_\delta \partial_j u^\delta\|_{H^s} + \sum_{j,k,l} c_2 \|J_\delta \partial^3_{j,k,l} u^\delta\|_{H^s} + \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^d \|J_\delta\left(C_j(J_\delta u^\delta) J_\delta \partial_j u^\delta\right)\|_{H^s} + \int_0^t \|J_\delta f\|_{H^s} \right\} d\tau,$$

onde $c_1 = max\{\|A_j\|_\infty : j = 1, ..., d\}$ e $c_2 = max\{\|B_{j,k,l}\|_\infty : 1 \le j,k,l \le d\}$. Observe pelo Lema 3.0.2 (i) que

$$\|J_\delta \partial_j u^\delta\|_{H^s} \le c\delta^{-1} \|\partial_j u^\delta\|_{H^{s-1}} \le C\delta^{-1} \|u^\delta\|_{H^s} \tag{3.6}$$

e

$$\|J_\delta \partial^3_{j,k,l} u^\delta\|_{H^s} = c\delta^{-3}\|\partial^3_{j,k,l} u^\delta\|_{H^{s-3}} \leq C\delta^{-3}\|u^\delta\|_{H^s}, \tag{3.7}$$

onde as constantes c dependem de c_1 para (3.6) e de c_2 para (3.7). Falta apenas estimar $\|J_\delta(C_j J_\delta u^\delta) J_\delta \partial_j u^\delta\|_{H^s}$. Mas

$$u^\delta = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_j(u^\delta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{11} u_i & \cdots & \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{1n} u_i \\ & \ddots & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{n1} & \cdots & \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{nn} \end{bmatrix},$$

já que por hipótese, C_j é uma aplicação linear de u^δ. Visto que

$$C_j(v^\delta)\partial_j v^\delta = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{11} v_i & \cdots & \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{1n} v_i \\ & \ddots & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{n1} v_i & \cdots & \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^{nn} v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_j v_1 \\ \vdots \\ \partial_j v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k,i=1}^n \alpha_{ij}^{1k} v_i \partial_j v_k \\ \vdots \\ \sum_{k,i=1}^n \alpha_{ij}^{nk} v_i \partial_j v_k \end{bmatrix}.$$

e $\|u\|_{H^s} = \{\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^s}^2\}^{1/2}$. Fazendo $v_\delta = J_\delta u^\delta$ e usando a imersão de Sobolev, o Teorema 1.3.5, já que $s > \frac{d}{2} + 1$, e o Lema 3.0.2 temos que

$$\begin{aligned}
\|J_\delta(C_j(J_\delta u^\delta) J_\delta \partial_j u^\delta)\|_{H^s} &\leq c\delta^{-1}\|C_j(J_\delta u_\delta) J_\delta \partial_j u_\delta\|_{H^{s-1}} \\
&\leq c\delta^{-1}\left\{\sum_{l=1}^n \left\|\sum_{k,i=1}^n \alpha_{ij}^{lk} v_i \partial_j v_k\right\|_{H^{s-1}}^2\right\}^{1/2} \\
&\leq c\delta^{-1}\left\{\sum_{l=1}^n \left\|\sum_{k,i=1}^n \alpha_{ij}^{lk} v_i \partial_j v_k\right\|_{H^{s-1}}\right\} \\
&\leq c\delta^{-1}\left\{\sum_{i,k,l=1}^n |\alpha_{ij}^{lk}|\|v_i \partial_j v_k\|_{H^{s-1}}\right\} \\
&\leq c\delta^{-1}\left\{\sup_{i,k} \|v_i \partial_k v_k\|_{H^{s-1}}\right\} \\
&\leq c\delta^{-1}\|v_i\|_{H^{s-1}}\|\partial_j v_i\|_{H^{s-1}} \\
&\leq c\delta^{-1}\|v_i\|_{H^s}^2,
\end{aligned}$$

onde a constante c daqui depende de $\max_{j=1,\dots,d} \|C_j\|_\infty$. E portanto, segue daí, de (3.6) e (3.7) que $\forall t \in [0,T]$,

$$\|\mathcal{F}(u^\delta(t))\|_{H^s} \leq c\|u_0\|_{H^s} + \int_0^t \left[c\delta^{-1}\|u^\delta\|_{H^s} + c\delta^{-3}\|u^\delta\|_{H^s} + c\delta^{-1}\|u^\delta\|^2_{H^s}\right] d\tau + c\int_0^t \|f\|_{H^s} d\tau.$$

Definimos $a := 3c\|u_0\|_{H^s}$. Se $u^\delta \in X_T(a)$ temos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathcal{F}(u^\delta)(t)\|_{H^s_x} \leq \frac{a}{3} + [c\delta^{-1}a + c\delta^{-3}a + c\delta^{-1}a^2]T + c\int_0^T \|f(\tau)\|_{H^s} d\tau.$$

Agora, como $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ é possível, usando o teorema da convergência dominada, tomar T suficientemente pequeno de forma a tornar

$$c\int_0^T \|f(\tau)\|_{H^s} d\tau \leq \frac{a}{3}$$

e ao mesmo tempo

$$T \leq \frac{\delta^3}{3c(\delta^2(1+a)+1)}.$$

Desta forma teremos $\mathcal{F}(u^\delta) \leq a$ e, consequentemente, $\mathcal{F}(u^\delta) \in X_T(a)$.

Afirmação: *$\mathcal{F}$ é uma contração em $X_T(a)$, isto é, dados $u^\delta, v^\delta \in X_T(a)$,*

$$\|\mathcal{F}(u^\delta) - \mathcal{F}(v^\delta)\|_{L^\infty_T H^s_x} \leq k\|u^\delta - v^\delta\|_{L^\infty_T H^s_x},$$

onde $k < 1$.

Usando a linearidade de $A_j, B_{j,k,l}, J_\delta$ e ∂_j, podemos usar (3.6) e (3.7), logo $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u^\delta) - \mathcal{F}(v^\delta)\|(t)_{H^s_x} \leq{}& c\delta^{-1}\int_0^t \|u^\delta - v^\delta\|_{H^s} d\tau + c\delta^{-3}\int_0^t \|u^\delta - v^\delta\|_{H^s} d\tau \\ & \int_0^t \sum_{j=1}^d \left\| J_\delta\left[C_j(J_\delta)u^\delta J_\delta \partial_j u^\delta - C_j(J_\delta)v^\delta J_\delta \partial_j v^\delta\right]\right\|_{H^s} d\tau.\end{aligned}$$

Somando e diminuindo $C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta\partial_j v^\delta$ dentro da integral do segundo membro do lado direito da desigualdade e usando que $u \mapsto C_j(u)$ é uma função linear, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}(u^\delta) - \mathcal{F}(v^\delta)\|_{L_T^\infty H_x^s} \\
&\quad\leq c(\delta^{-1}+\delta^{-3})\int_0^t \|u^\delta - v^\delta\|_{H^s} d\tau + \int_0^t \sum_{j=1}^d \|J_\delta[C_j(J_\delta u^\delta)(J_\delta\partial_j(u^\delta - v^\delta)) \\
&\qquad + C_j(J_\delta(u^\delta - v^\delta))(J_\delta\partial_j v^\delta)]\|_{H^s} d\tau \\
&\quad\leq c(\delta^{-1}+\delta^{-3})\int_0^t \|u^\delta - v^\delta\|_{H^s} + \|C_j(J_\delta u^\delta)(J_\delta\partial_j(u^\delta - v^\delta))\|_{H^{s-1}} + \\
&\qquad + \|C_j(J_\delta(u^\delta - v^\delta))(J_\delta\partial_j v^\delta)\|_{H^{s-1}} d\tau \\
&\quad\leq c(\delta^{-1}+\delta^{-3})\int_0^t \|u^\delta - v^\delta\|_{H^s} + \|J_\delta u^\delta\|_{H^{s-1}}\|\partial_j(J_\delta(u^\delta - v^\delta))\|_{H^{s-1}} + \\
&\qquad + \|J_\delta(u^\delta - v^\delta)\|_{Hs-1}\|\partial_j J_\delta v^\delta\|_{H^{s-1}} d\tau \\
&\quad\leq c(\delta^{-1}+\delta^{-3})\int_0^t \|u^\delta - v^\delta\|_{H^s}(\|u^\delta\|_{H^s} + \|v^\delta\|_{H^s} + 1) d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em t sobre o intervalo $[0,T]$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \|\mathcal{F}(u^\delta) - \mathcal{F}(v^\delta)\|_{H^s} &\leq c(\delta^{-1}+\delta^{-3})T\left\{\|u^\delta(t) - v^\delta(t)\|_{H^s}(\|u^\delta(t)\|_{H^s} + \|v^\delta(t)\|_{H^s} + 1)\right\} \\
&\leq c(\delta^{-1}+\delta^{-3})(1+2a)T\|u^\delta - v^\delta\|_{L_T^\infty H^s}.
\end{aligned}$$

Agora, para que $\mathcal{F}$ seja uma contração precisamos que

$$T < \frac{\delta^3}{c(\delta^2(1+2a)+1)},$$

que é maior do que T satisfazendo (3.5). Logo, basta tomar T_δ o valor mínimo que satisfaz (3.5) para que $\mathcal{F}$ seja uma contração em $X_{T_\delta}(a)$ e podermos aplicar os métodos clássicos para solucionar o sistema (3.4).

Neste ponto, é importante observarmos que quando $\delta \to 0$ temos que $T_\delta \to 0$. Logo, antes de passarmos o limite quando $\delta \to 0$ é necessário mostrar que $\exists T_0 > 0$, independente de δ tal que $T_\delta \geq T_0, \forall \delta > 0$. Por esta razão, precisamos derivar estimativas de energias sobre a solução u^δ.

Etapa 3: Nesta etapa queremos mostrar que $\exists c_0 > 0$ tal que $\forall s > d/2+1$ e $t \in [0, T_\delta^*)$, onde T_δ^* é o tempo maximal de existência de u^δ, temos a seguinte estimativa de energia:

$$\|u^\delta(t,\cdot)\|_{H^s} \leq e^{\lambda t}\|u^0\|_{H^s} + \int_0^t e^{\lambda(t-t')}\|f(t',\cdot)\|_{H^s} dt', \tag{3.8}$$

com λ como no enunciado do Teorema 3.0.1.

Pondo $v^\delta = \Lambda^s u^\delta$, então v^δ é solução de

$$\begin{aligned} \partial_t v^\delta + \sum_{j=1}^{d} A_j J_\delta \partial_j v^\delta + \sum_{j,k,l} B_{j,k,l} J_\delta \partial^3_{j,k,l} v^\delta + \\ \sum_{j=1}^{d} J_\delta(C_j(J_\delta u^\delta) J_\delta \partial_j v^\delta) + J_\delta([\Lambda^s, C_j(J_\delta u^\delta)] J_\delta \partial_j u^\delta) = \Lambda^s J_\delta f \end{aligned} \tag{3.9}$$

Utilizando o fato de A_j ser uma matriz simétrica real e os operadores de derivação A_j e J_δ comutarem, temos que

$$(A_j J_\delta \partial_j v^\delta, v^\delta)_{L^2} = (J_\delta \partial_j v^\delta, A_j v^\delta)_{L^2}.$$

Agora, segue integrando por partes que

$$(\partial_j f, g)_{L^2} = -(f, \partial_j g)_{L^2}.$$

E portanto, $(A_j J_\delta \partial_j v^\delta, v^\delta) = -(v^\delta, A_j J_\delta \partial_j v^\delta) = -\overline{(A_j J_\delta \partial_j v^\delta, v^\delta)}$.

Segue daí que

$$\Re(A_j J_\delta \partial_j v^\delta, v^\delta) = 0. \tag{3.10}$$

De modo análogo concluímos que

$$\Re(B_{j,k,l}J_\delta\partial^3_{j,k,l}v^\delta, v^\delta) = 0 \tag{3.11}$$

Novamente integrando por partes e usando a comutatividade de ∂_j e J_δ temos que

$$\begin{aligned}(J_\delta(C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta\partial_j v^\delta), v^\delta) &= (J_\delta\partial_j v^\delta, C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta v^\delta) \\ &= -(v^\delta, J_\delta(C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta\partial_j v^\delta)) - (v^\delta, J_\delta(C_j(J_\delta\partial_j u^\delta)v^\delta)).\end{aligned}$$

Além disso, usando a simetria de $C_j(u)$ temos que

$$\begin{aligned}(J_\delta\partial_j v^\delta, C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta v^\delta) &= \overline{(C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta v^\delta, J_\delta\partial_j v^\delta)} \\ &= \overline{(J_\delta v^\delta, C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta\partial_j v^\delta)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{(J_\delta v^\delta, C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta\partial_j v^\delta)} + (J_\delta v^\delta, C_j(J_\delta u^\delta)J_\delta\partial_j v^\delta) = -(J_\delta v^\delta, C_j(J_\delta\partial_j u^\delta)v^\delta).$$

Donde,

$$\Re(J_\delta(C_j(J_\delta u^\delta))J_\delta\partial_j v^\delta, v^\delta) = -\frac{1}{2}(J_\delta v^\delta, C_j(J_\delta\partial_j u^\delta)v^\delta). \tag{3.12}$$

Tomando então a parte real do produto escalar em L^2 da equação (3.9) por v^δ, e utilizando (3.10)–(3.12) obtemos

$$\begin{aligned}(\partial_t v^\delta, v^\delta) = -\sum_{j=1}^{d}\left[\frac{1}{2}(J_\delta v^\delta, C_j(\partial_j J_\delta u^\delta)J_\delta v^\delta) + (J_\delta[\Lambda^s, C_j(J_\delta u^\delta)]J_\delta\partial_j u^\delta, v^\delta)\right] \\ +\Re(\Lambda^s J_\delta f, v^\delta).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|v^\delta(t)\|^2_{L^2} = -\sum_{j=1}^{d}\left[(J_\delta v^\delta, C_j(\partial_j J_\delta u^\delta)J_\delta v^\delta) + 2(J_\delta[\Lambda^s, C_j(J_\delta u^\delta)]J_\delta\partial_j u^\delta, v^\delta)\right] \\ + 2\Re(\Lambda^s J_\delta f, v^\delta).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Note que o primeiro membro da direita pode ser majorado pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e por (3.0.2):

$$\begin{aligned}|(J_\delta v_\delta, C_j(\partial_j J_\delta u^\delta) J_\delta v^\delta)| &\leq \|J_\delta v^\delta\|_{L^2} \|C_j(\partial_j J_\delta u^\delta) J_\delta v^\delta\|_{L^2}\\ &\leq \|v^\delta\|_{L^2} \|C_j(\partial_j J_\delta u^\delta)\|_{L^\infty} \|J_\delta v^\delta\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$|(J_\delta v_\delta, C_j(\partial_j J_\delta u^\delta) J_\delta v^\delta)| \leq \max_j \|C_j\|_\infty \|\nabla u^\delta\|_{L^\infty} \|v^\delta(t,\cdot)\|_{L^2}^2. \tag{3.14}$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Kato-Ponce (ver Teorema 1.3.7) obtemos:

$$\begin{aligned}&|(J_\delta[\Lambda^s, C_j(J_\delta u^\delta)] J_\delta \partial_j u^\delta, v^\delta)_{L^2}|\\ &\quad\leq \|[\Lambda^s, C_j(J_\delta u^\delta)] J_\delta \partial_j u^\delta\|_{L^2} \|v^\delta\|_{L^2}\\ &\quad\leq c\|v^\delta\|_{L^2} (\|C_j(J_\delta u^\delta)\|_{H^s} \|J_\delta \partial_j u^\delta\|_{L^\infty} + \|\nabla C_j(J_\delta u^\delta)\|_{L^\infty} \|J_\delta \partial_j u^\delta\|_{H^{s-1}})\\ &\quad\leq c \max_j \|C_j\|_\infty \left(\|J_\delta u^\delta\|_{H^s} \|J_\delta \partial_j u^\delta\|_{L^\infty} + \|\nabla J_\delta u^\delta\|_{L^\infty} \|J_\delta \partial_j u^\delta\|_{H^{s-1}}\right) \|v^\delta\|_{L^2}\\ &\quad\leq c \max_j \|C_j\|_\infty \|u^\delta\|_{H^s} \|\nabla u^\delta\|_{L^\infty} \|v^\delta\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Observe que $v^\delta = \Lambda^s u^\delta$, logo

$$\|v^\delta\|_{L^2} = \|u^\delta\|_{H^s}.$$

Segue daí que

$$\left|\left([\Lambda^s, C_j(J_\delta u^\delta)] J_\delta \partial_j u^\delta, v^\delta\right)\right| \leq c \max \|C_j\|_{L^\infty} \|\nabla u^\delta\|_{L^\infty} \|v^\delta\|_{L^2}^2. \tag{3.15}$$

Substituindo em (3.14) e (3.15) em (3.13) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\|v^\delta\|_{L^2}^2 \leq c \max_j \|C_j\|_{L^\infty} \|\nabla u^\delta\|_{L^\infty} \|v^\delta\|_{L^2}^2 + 2c\|f\|_{H^s} \|v^\delta\|_{L^2}. \tag{3.16}$$

Fazendo $\lambda := c_0 \max_j \|C_j\|_{L^\infty} \|\nabla u^\delta\|_{L^\infty}$ e $y(t) := \|v^\delta(t)\|_{L^2}$ temos que

$$\frac{d}{dt} y^2(t) = 2y(t)y'(t) \leq 2\lambda y^2(t) + 2\|f(t)\|_{H^s} y(t),$$

onde $y(t) > 0$. Segue que

$$y'(t) \leq \lambda y(t) + \|f(t)\|_{H^s}.$$

Logo, obtemos pela desigualdade de Gronwall que

$$y(t) \leq e^{\lambda t} y(0) + \int_0^t e^{\lambda(t-t')} \|f(t')\|_{H^s} dt'.$$

Como $\|v^\delta(t,\cdot)\|_{L^2} = \|u^\delta(t,\cdot)\|_{H^s}$ obtemos

$$\|u^\delta(t,\cdot)\|_{H^s} \leq e^{\lambda t} \|u^0\|_{H^s} + \int_0^t e^{\lambda(t-t')} \|f(t')\|_{H^s} dt'. \tag{3.17}$$

Etapa 4: Nesta quarta etapa vamos mostrar que se $s > \frac{d}{2} + 1$, então existe $T_0 > 0$ independente de δ tal que a solução u^δ do problema regularizado existe sobre o intervalo de tempo $[0, T_0]$.

Usando o Lema de Sobolev (ver Teorema 1.3.5) temos que $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ deduzimos por (3.16) que

$$\frac{d}{dt} \|u^\delta\|_{H^s}^2 \leq c\|u^\delta\|_{H^s}^3 + c\|f(t')\|_{H^s} \|u^\delta\|_{H^s}$$

Fazendo $g(t) = \|u^\delta(t)\|_{H^s}$ deduzimos que

$$g(t)^2 - g(0)^2 \leq c \int_0^t g(s)^3 ds + \int_0^t \|f(\cdot,t)\|_{H^s} g(s) ds \leq 2 \max\{A(t), B(t)\},$$

onde $A(t) = \int_0^t g(s)^3 ds$ e $B(t) = \int_0^t \|f(t)\|_{H^s} g(s) ds$.

Se $g(t)^2 - g(0)^2 \leq 2A(t)$ tome $\varphi(t) = g(t)^2$, então

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + 2c \int_0^t \varphi(s)^{3/2} ds =: \psi(t).$$

Note que $\psi(0) = \varphi(0) = g(0)^2$ e $\psi'(t) \leq 2c\varphi(t)^{3/2} \leq 2c\psi(t)^{3/2}$.

Logo

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)^{3/2}} \leq 2c.$$

Integrando em ambos os lados de 0 à t, deduzimos que $\psi(t)^{1/2} \leq \frac{\psi(0)^{1/2}}{1-ct\psi(0)^{1/2}}$ e portanto

$$g(t) = \varphi(t)^{1/2} \leq \frac{g(0)}{1-ctg(0)}, \forall t \in [0, T_\delta]. \tag{3.18}$$

Por outro lado, se $g(t)^2 - g(0)^2 \leq 2B(t)$, temos que

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + 2c \int_0^t \|f(\tau)\|_{H^s} \varphi(\tau)^{1/2} d\tau =: \psi(t).$$

Donde $\psi(0) = \varphi(0) = g(0)^2$ e $\psi'(t) \leq 2c\|f(t)\|_{H^s}\psi(t)^{1/2}$.

Logo

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)^{1/2}} \leq 2c\|f(t)\|_{H^s}.$$

Integrando ambos os lados de 0 à t, obtemos $\psi(t)^{1/2} \leq \psi(0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{H^s} ds$ e portanto

$$g(t) = \varphi(t)^{1/2} \leq g(0) + c\int_0^t \|f(s)\|_{H^s} ds, \forall t \in [0, T_\delta]. \tag{3.19}$$

Por (3.18)–(3.19) temos que

$$g(t) \leq g(0) + c\int_0^t \|f(s)\|_{H^s} ds + \frac{g(0)}{1-ctg(0)}, \tag{3.20}$$

e isto vale $\forall t \in [0, T_\delta^*)$ onde $g(t) = \|u^\delta(t)\|_{H^s}$, e $[0, T_\delta^*)$ é o intervalo máximo de definição de u^δ.

Defina $T_0 = \frac{1}{2c\|u_0\|_{H^s}}$. Vamos mostrar por contradição que $T_0 < T_\delta^*$.

Se $T_\delta^* \leq T_0$ temos por (3.20) que

$$\|u(T_\delta^* - \varepsilon)\|_{H^s} \leq 3\|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{L^1_{T_0}H^s_x} := \tilde{a}; \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Fixe $\tau > 0$ tal que

$$\int_0^\tau \|f(\cdot, s')\|_{H^s} ds' \leq \frac{\tilde{a}}{3c} \text{ e } \tau \leq \frac{\delta^3}{3c(\delta^2(1+\tilde{a}))+1}.$$

Note que τ é independente de ε e além disso, podemos, pela **Etapa 2**, estender u^δ a $[0, T_\delta^* - \varepsilon + \tau]$. Mas isso é um absurdo se escolhermos ε tal que $0 < \varepsilon < \tau$.

Etapa 5: Nesta etapa mostraremos que existe $u \in C([0,T_0]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n)$.

Nas **Etapas 2** e **4** vimos que para cada $\delta \in (0,1]$, obtemos $u^\delta \in C([0,T_0]; H^s(\mathbb{R}^d)^n)$ solução do problema regularizado (3.4). Donde podemos concluir que

$$u^\delta \in C([0,T_0]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T_0]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n), \forall \delta \in (0,1].$$

Além disso, pela **Etapa 4** temos que

$$\|u^\delta(t)\| \leq 3\|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{L^1_{T_0}H^s_x}, \forall t \in [0,T_0] \text{ e } \forall \delta \in (0,1].$$

Seja $M := 3\|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{L^1_{T_0}H^s_x}$ e $0 < \delta < \delta' \leq 1$. Segue por (3.3) que

$$\|u^\delta(t) - u^{\delta'}(t)\|_{L^2} \leq \|u_0^\delta - u_0^{\delta'}\|_{L^2} e^{cMt}, \forall t \in [0,T_0].$$

E portanto,

$$\|u^\delta - u^{\delta'}\|_{L^\infty_{T_0}L^2_x} \leq e^{cMT_0}\|u_0^\delta - u_0^{\delta'}\|_{L^2}.$$

Usando o Lema 3.0.2 *(iii)* segue que

$$\|u^\delta - u^{\delta'}\|_{L^\infty_{T_0}L^2_x} \longrightarrow 0 \text{ quando } \delta, \delta' \to 0,$$

e isto mostra que (u^δ) é de Cauchy em $L^\infty([0,T_0];L^2(\mathbb{R}^d)^n)$.

Mais ainda, usando um resultado de interpolação visto nas preliminares (Teorema 1.3.6), temos que

$$\begin{aligned}\|u^\delta - u^{\delta'}\|_{L^\infty_{T_0}H^{s'}_x} &\leq \|u^\delta - u^{\delta'}\|^{1-s'/s}_{L^\infty_{T_0}L^2_x}\|u^\delta - u^{\delta'}\|^{s'/s}_{L^\infty_{T_0}H^s_x}\\ &\leq \left(\|u^\delta\|_{L^\infty_{T_0}H^s_x} + \|u^{\delta'}\|_{L^\infty_{T_0}H^s_x}\right)^{s'/s}\|u^\delta - u^{\delta'}\|^{1-s'/s}_{L^\infty_{T_0}L^2_x}, \forall s' \in [0,s).\end{aligned}$$

Logo

$$\|u^\delta - u^{\delta'}\|_{L^\infty_{T_0}H^{s'}_x} \leq (2M)^{s'/s}\|u^\delta - u^{\delta'}\|^{1-s'/s}_{L^\infty_{T_0}L^2_x}.$$

Donde podemos concluir que (u^δ) é uma sequência de Cauchy em $L^\infty([0,T_0];H^{s'}(\mathbb{R}^d)^n)$, para todo $s' \in [0,s)$. Segue daí que existe $u \in C([0,T_0];H^{s'}(\mathbb{R}^d)^n)$ tal que

$$u^\delta \longrightarrow u, \text{ quando } \delta \to 0 \text{ em } L^\infty([0,T_0];H^{s'}(\mathbb{R}^d)^n) \quad \forall s' \in [0,s),$$

já que $C([0,T_0];H^{s'}(\mathbb{R}^d)^n)$ é fechado para a topologia de $L^\infty([0,T_0];H^{s'}(\mathbb{R}^d)^n)$.

Dizemos que u é solução de (3.1) no sentido fraco se para toda $\varphi = \varphi(t,x) \in C_0^\infty((0,T_0)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ vale

$$\int_{(0,T_0)\times\mathbb{R}^d}\left(\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j\partial_j u + \sum_{1\leq j,k,l\leq d} B_{j,k,l}\partial^3_{j,k,l}u + \sum_{j=1}^d C_j(u)\partial_j u - f\right)\varphi dtdx = 0$$

Usando a equação do problema aproximado (3.4) segue que $\{\partial_t u^\delta\}$ é limitada em $L^\infty([0,T_0]\times H^{s-3}(\mathbb{R}^d))$ e portanto, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada por $\{(u^\delta)\}$, tal que $\partial_t u^\delta \longrightarrow \partial_t u$ fraco * em $L^\infty((0,T_0)\times H^{s-3}(\mathbb{R}^d))$.

Além disso, como $s > \frac{d}{2}+1$, podemos escolher s' de forma que $\frac{d}{2}+1 < s' < s$ e pelo Lema de Sobolev 1.3.5 segue que $u^\delta \longrightarrow u$ e $\nabla u^\delta \longrightarrow \nabla u$ em $L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)$ quando $\delta \to 0$.

Visto isto, podemos concluir que dada $\varphi \in C_0^\infty((0,T_0)\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} \left(\partial_t u^\delta - \partial_t u\right)\cdot \varphi dxdt\right| \to 0,$$

$$\left|\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^d A_j\partial_j u^\delta - \sum_{j=1}^d A_j\partial_j u\right)\cdot \varphi dtdx\right|$$

$$\leq \max_{1\leq j\leq d}\|A_j\|_\infty \|\partial_j u^\delta - \partial_j u\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)}\int |\varphi| dxdt \to 0$$

e

$$\left|\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} \sum_{1\leq j,k,l\leq d} B_{j,k,l}\left(\partial^3_{j,k,l}u^\delta - \partial^3_{j,k,l}u\right)\cdot\varphi dxdt\right|$$

$$\leq \max_{1\leq j,k,l\leq d}\|B_{j,k,l}\|_\infty \|u^\delta - u\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)}\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} |\partial^3_{j,k,l}\varphi| dxdt \to 0,$$

quando $\delta \to 0$. Observe também que

$$\left|\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^d C_j(u^\delta)\partial_j u^\delta - \sum_{j=1}^d C_j(u)\partial_j u\right)\cdot \varphi dxdt\right| \leq$$

$$\left|\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \left(C_j(u^\delta - u)\partial_j u^\delta + C_j(u)(\partial_j u^\delta - \partial_j u)\right)\cdot \varphi dxdt\right| \leq$$

$$c\left[\|u-u^\delta\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)}\|\partial_j u^\delta\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)}\right.$$

$$\left. +\|\partial_j(u-u^\delta)\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)}\right]\int_{[0,T_0]\times\mathbb{R}^d} |\varphi| dxdt.$$

Como $\|\partial_j u^\delta\|_{L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d)} < \infty$ e $\|u\|L^\infty([0,T_0]\times\mathbb{R}^d) < \infty$, segue a convergência deste termo também. E assim concluímos que u é solução de (3.1) no sentido fraco.

Resta mostrar que $u \in C([0,T_0]; H^s(\mathbb{R}^d)^n)$. Em primeiro lugar, note que $u \in C([0,T_0]; L^2(\mathbb{R}^d)^n)$, logo, para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\cdot\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} u(t_0,x)\cdot\varphi(x)dx\right| \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(u(t,x)-u(t_0,x))\cdot\varphi| dx \leq \|u(t,\cdot)-u(t_0,\cdot)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ quando } t \to t_0.$$

E isto mostra que $u(t)$ converge fraco para $u(t_0)$ em $H^s(\mathbb{R}^d)$ quando $t \to t_0$, já que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ é denso no dual de $H^s(\mathbb{R}^d)^n (= H^{-s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n))$, ou seja, $u \in C_\omega([0,T_0]; H^s(\mathbb{R}^d))$.

Agora vamos mostrar que $\|u(t)\|_{H^s}$ converge para $\|u(t_0)\|_{H^s}$ quando $t \to t_0$. Para isto vamos estimar $\|u(t)\|_{H^s}^2$ procedendo basicamente da mesma forma que na **Etapa 3**. Mas neste caso, não podemos olhar diretamente para $\frac{d}{dt}\|\Lambda^s u(t)\|_{L^2}^2$, pois $L\Lambda^s u$ talvez não esteja em L^2, onde

$$L(t,x,u,D_x,D_{xxx})u = \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j u + \sum_{j,k,l} B_{j,k,l}\partial_{j,k,l}^3 u + \sum_{j=1}^{d} C_j(u)\partial_j u.$$

Para contornar este problema, vamos novamente introduzir o operador J_δ. Daí, por (3.13) segue que

$$\frac{d}{dt}\|\Lambda^s J_\delta u(t)\|_{L^2}^2 = -\sum_{j=1}^{d}[(\Lambda^s J_\delta u(t), C_j(\partial_j J_\delta u(t))\Lambda^s J_\delta u(t))$$

$$+2(J_\delta[\Lambda^s, C_j(J_\delta u(t))]J_\delta \partial_j u(t), \Lambda^s u(t)))] + 2\Re(\Lambda^s J_\delta f, \Lambda^s u(t)).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, os Lemas 1.3.7 e 3.0.2 temos que

$$\frac{d}{dt}\|J_\delta u(t)\|_{H^s}^2 \leq c\|u(t)\|_{H^s}^3 + 2\|f(t)\|_{H^s}\|u(t)\|_{H^s}, \tag{3.21}$$

donde podemos ver que o lado direito da desigualdade não depende mais de δ.

Tome $0 \leq t_0 \leq t \leq T_0$. Usando a desigualdade triangular segue que

$$\left|\|u(t)\|_{H^s}^2 - \|u(t_0)\|_{H^s}^2\right| \leq \left|\|u(t)\|_{H^s}^2 - \|J_\delta u(t)\|_{H^s}^2\right| + \left|\|J_\delta u(t)\|_{H^s}^2 - \|J_\delta u(t_0)\|_{H^s}^2\right|$$

$$\left|\|J_\delta u(t_0)\|_{H^s}^2 - \|u(t_0)\|_{H^s}^2\right|.$$

Observe que usando o teorema fundamental do cálculo e (3.21)

$$\begin{aligned}
&|\|J_\delta u(t)\|_{H^s}^2 - \|J_\delta u(t_0)\|_{H^s}^2| \\
&\qquad \leq c|t-t_0|\|u\|_{L_{T_0}^\infty H_x^s}^3 + 2\|u\|_{L_{T_0}^\infty H_x^s}\int_{t_0}^{t}\|f(\tau)\|_{H^s}d\tau \\
&\qquad \leq |t-t_0|M^3 + 2M\int_0^t \|f(\tau)\|_{H^s}d\tau =: g_{t_0}(t).
\end{aligned}$$

Agora, fixe $\varepsilon > 0$. Pelo teorema da covergência dominada, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta_1$ então

$$\int_{t_0}^{t}\|f(\tau)\|_{H^s}d\tau \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Logo, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, onde $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2cM^3}$, temos que se $|t - t_0| < \delta$ então

$$\big|\|u(t)\|_{H^s}^2 - \|u(t_0)\|_{H^s}^2\big| \leq \big|\|u(t)\|_{H^s}^2 - \|J_\delta u(t)\|_{H^s}^2\big| + \big|\|J_\delta u(t_0)\|_{H^s}^2 - \|u(t_0))\|_{H^s}^2\big| + \varepsilon.$$

E pelo Lema 3.0.2 (iii) concluimos que

$$\big|\|u(t)\|_{H^s}^2 - \|u(t_0)\|_{H^s}^2\big| \longrightarrow 0 \text{ quando } \delta \to 0$$

Logo, usando a Proposição 1.3.8, temos que $u(t) \longrightarrow u(t_0)$ em $H^s(\mathbb{R}^d)^n$ quando $t \to t_0$, ou seja, $u \in C([0, T_0]; H^s(\mathbb{R}^d)^n)$.

Etapa 6: Condição de explosão. Vamos utilizar um raciocínio análogo ao da **Etapa 4**. Suponha por contradição que $\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^\infty}$ é limitada quando $T^* < \infty$. Consequentemente, λ é limitada. Suponha $\lambda \leq \lambda_0$ para todo $t \in [0, T^*)$. Por (3.2) segue que

$$\|u(T^* - \varepsilon, \cdot)\|_{H^s} \leq e^{\lambda_0 T^*}(\|u_0\|_{H^s} + \|f\|_{L^1_{T^*} H^s_x}) := \bar{a}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Fixe $\tau > 0$ tal que

$$\int_0^\tau \|f(\cdot, s')\|_{H^s} ds' \leq \frac{\bar{a}}{3c} \text{ e } \tau \leq \frac{\delta^3}{3c(\delta^2(1 + \bar{a}) + 1)}.$$

Note que τ independe de ε, e portanto, novamente pela **Etapa 2** podemos estender a solução $u(t, \cdot)$ ao intervalo $[0, T^* - \varepsilon + \tau)$, o que é um absurdo quando $\varepsilon < \tau$. ∎

Para estudar as ondas de superfície, iremos considerar os sistemas da forma (3.1) fazendo intervir um pequeno parâmetro ε:

$$\partial_t u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u^\varepsilon + \varepsilon \sum_{j,k,l} B_{j,k,l} \partial^3_{j,k,l} u^\varepsilon + \varepsilon \sum_{j=1}^d C_j(u^\varepsilon) \partial_j u^\varepsilon = \varepsilon^2 f^\varepsilon. \tag{3.22}$$

Temos então o seguinte resultado:

Corolário 3.0.3. *Suponha que a* **Hipótese 1** *seja satisfeita. Seja*

$s > \frac{d}{2} + 1, u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)^n$, *e* $(f^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ *uma família limitada de* $L^1_{loc}([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n)$. *Então existe* $T > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < 1$, *existe uma e somente uma solução* $u^\varepsilon \in C([0,T/\varepsilon]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T/\varepsilon]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n)$ *com condição inicial* u^0. *Além disso, para todo* $0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}$,

$$\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^s} \leq e^{\lambda\varepsilon t}\|u^0\|_{H^s} + \varepsilon^2 \int_0^t e^{\lambda\varepsilon(t-t')}\|f(t',\cdot)\|_{H^s}dt', \tag{3.23}$$

com $\lambda = c_0 \max_{j=1,\dots,d} \|C_j\|_\infty \sup_{0\leq t\leq T/\varepsilon} \|\nabla u(t,\cdot)\|_\infty$.

Demosntração: É suficiente provar a existência e a unicidade de uma solução $v^\varepsilon \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^n)$ para um certo $T > 0$ independente de ε do seguinte problema:

$$\partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j\partial_j v^\varepsilon + \sum_{j,k,l} B_{j,k,l}\partial^3_{j,k,l}v^\varepsilon + \sum_{j=1}^d C_j(v^\varepsilon)\partial_j v^\varepsilon = \varepsilon\varphi^\varepsilon, \tag{3.24}$$

onde $\varphi^\varepsilon(t,x) = f^\varepsilon(t/\varepsilon, x)$.

Na verdade, nós estamos deduzimos uma solução de (3.1) sob o intervalo de tempo $[0,T/\varepsilon]$ para a tranformação $u^\varepsilon(t,x) = v^\varepsilon(\varepsilon t, x)$.

Agora, de acordo com o Teorema 3.0.1, sabemos que existe uma única solução de (3.24) com condição inicial u^0. De acordo com a estimativa de energia dada no Teorema 3.0.1, vemos que $\exists T > 0$ independente de ε tal que a solução existe pelo menos sobre $[0,T]$ (com efeito, a constante λ que aparece na estimativa de energia depende apenas de $\|C_j\|_\infty$ e é portanto independente de ε).

Segue então do Teorema 3.0.1 que existe $T > 0$ tal que

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{H^s} \leq e^{\lambda t}\|u^0\|_{H^s} + \varepsilon \int_0^t e^{\lambda(t-t')}\|\varphi^\varepsilon(t')\|_{H^s}dt', \forall t \in [0,T].$$

Mas como $u^\varepsilon(t,x) = \upsilon^\varepsilon(\varepsilon t, x)$ temos que

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H^s} \leq e^{\lambda \varepsilon t}\|u^0\|_{H^s} + \varepsilon^2 \int_0^{\varepsilon t} e^{\varepsilon\lambda(t-t'/\varepsilon)}\|f^\varepsilon(t'/\varepsilon)\|_{H^s} dt'/\varepsilon.$$

Fazendo uma mudança de variáveis, obtemos que

$$\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^s} \leq e^{\lambda \varepsilon t}\|u^0\|_{H^s} + \varepsilon^2 \int_0^{t} e^{\lambda\varepsilon(t-\tau)}\|f(\tau,\cdot)\|_{H^s} d\tau. \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

Justificativa dos Modelos de Ondas Longas

Por modelos de ondas longas, nós entendemos os modelos obtidos no Capítulo 2 em águas rasas e de baixa amplitude, com um número de Stokes de ordem 1. Para simplificar, vamos supor que este número é igual a 1, isto é, vamos supor que os parâmetros de adimensionamento λ, h e a satisfazem

$$\frac{a}{h} = \frac{h^2}{\lambda^2} = \varepsilon \ll 1$$

No capítulo (2), foram obtidos modelos assintóticos em uma situação em que fizemos intervir efeitos dispersivos na mesma ordem que efeitos não lineares, a saber, os sistemas de Boussinesq e a equação KdV, principalmente.

No presente capítulo nos propomos justificar rigorosamente a aproximação fornecida por estes modelos assintóticos.

Vamos nesta parte justificar os modelos de Boussinesq introduzidos no capítulo

2 e avaliar $S_{\theta,\lambda,\mu}$ recordando aqui a expressão:

$$S_{\theta,\lambda,\mu}\begin{cases}\partial_t U_\theta + \nabla\zeta + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\nabla|U_\theta|^2 + a\Delta\nabla\zeta - b\Delta\partial_t U_\theta\right) = 0\\ \\ \partial_t\zeta + \nabla U_\theta + \varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta U_\theta) + c\Delta\nabla\cdot U_\theta - d\Delta\partial_t\zeta\right) = 0,\end{cases}$$

onde

$$a = \frac{1-\theta^2}{2}\mu, b = \frac{1-\theta^2}{2}(1-\mu), c = \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{6}\right)\lambda \text{ e } d = \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{1}{6}\right)(1-\lambda). \quad (4.1)$$

Notação: Designaremos por Σ o conjunto de todos os sistemas $S_{\theta,\lambda,\mu}$, $(\theta,\lambda,\mu) \in [0,1]\times\mathbb{R}^2$, obtido por todos os valores possíveis dos parâmetros.

4.1 Coerência e Sistemas de Boussinesq

Uma noção importante é a noção de coerência:

Definição: *Seja $s \in \mathbb{R}$. Uma família de funções $(U^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, limitado em $W^{1,\infty}([0,T/\varepsilon];H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$, com $T > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ suficientemente grande é dita coerente (de ordem s) a um sitema $S_{\theta,\lambda,\mu}$ se ela ainda é uma solução do sistema com um resto de $O(\varepsilon^2)$ em $L^\infty([0,T/\epsilon];H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1})$.*

As manipulações formais da Seção 2.6.4 podem ser reformuladas da seguinte maneira:

Proposição 4.1.1. *Seja $T > 0$ e $(\theta,\lambda,\mu) \in [0,1]\times\mathbb{R}^2$ e consideremos uma família $(U^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ coerente com $S_{\theta,\lambda,\mu}$. Para todo $\theta_1 \in [0,1]$, defina U_1^ε por:*

$$U_1^\varepsilon := \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta_1^2)\Delta\right)^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)U^\varepsilon.$$

Então, para todo $\lambda_1,\mu_1 \in \mathbb{R}$, a família $(U_1^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)_\varepsilon$ é coerente com $S_{\theta_1,\lambda_1,\mu_1}$.

Demostração: É clara tendo vista a equação (2.36).

Observação 4.1.1. *Tomando* $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ *e* $\theta^2 = \frac{2}{3}$*, obtemos* $a = b = c = d = \frac{1}{12}$*. Isto significa que o sistema correspondente possui a parte dispersiva simétrica. No entanto, a parte não-linear do sistema, que é comum a todos os sistemas de* Σ *não é simétrica, e portanto não podemos aplicar os resultados do Capítulo 3.*

4.2 "Simetrização" da parte não linear

Como sublinhou a observação (4.1.1) a parte não linear dos sistemas Σ não é simétrica. No entanto, podemos simetrizá-la.

Note que o limite a zero do termo dispersivo do sistema de Boussinesq (2.39)–(2.40) nos dá o sistema:

$$\begin{cases} \partial_t U + \nabla\zeta + \frac{\varepsilon}{2}\nabla|U|^2 = 0 \\ \partial_t \zeta + \nabla\cdot U + \varepsilon\nabla\cdot(\zeta U) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

de leis de conservação hiperbólicas. É conveniente escrever (4.2) da seguinte forma:

$$\partial_t \begin{pmatrix} U \\ \zeta \end{pmatrix} + A_1(U,\zeta)\partial_x \begin{pmatrix} U \\ \zeta \end{pmatrix} + A_2(U,\zeta)\partial_y \begin{pmatrix} U \\ \zeta \end{pmatrix} = 0,$$

onde $A_1(U,\zeta) = \begin{bmatrix} \varepsilon u_1 & \varepsilon u_2 & 1 \\ 1+\varepsilon\zeta & 0 & \varepsilon u_1 \\ 0 & 1+\varepsilon\zeta & \varepsilon u_2 \end{bmatrix} = A_2(U,\zeta)$ se $d = 2$. Ou

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} + A(u,\zeta)\partial_x \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = 0,$$

onde $A(u,\zeta) = \begin{bmatrix} \epsilon u & 1 \\ 1+\varepsilon\zeta & \varepsilon u \end{bmatrix}$ se $d = 1$.

Em ambos os casos estes sistemas não são simétricos e precisam ser "simetrizados". Um simetrizador para o caso de $d = 2$ é

$$A^* = \begin{bmatrix} \varepsilon u_1 & 0 & 1+\epsilon\zeta \\ \varepsilon u_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon u_1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$A^* \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 2(\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_1 \zeta) & \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_2 \zeta & \varepsilon^2 u_1^2 + \varepsilon\zeta + 1 \\ \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_2 \zeta & 0 & \varepsilon^2 u_1 u_2 \\ 1 + \varepsilon\zeta + \varepsilon^2 u_1^2 & \varepsilon^2 u_1 u_2 & \varepsilon u_1 \end{bmatrix}$$

é simétrica.

Agora, independente da dimensão, estes "simetrizadores" não são compatíveis com os termos dispersivos. E portanto se faz necessária outra estratégia. Considere a seguinte mudança de variável:

$$\tilde{U} = U\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\zeta\right)$$

Note que

$$U = \tilde{U}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\zeta\right) + O(\varepsilon^2).$$

Substituindo em (4.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{U} &= -\left(\nabla\zeta + \frac{\varepsilon}{2}\nabla|U|^2\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\zeta\right) - \frac{\varepsilon}{2}\tilde{U}\left(\nabla\cdot U + \varepsilon\nabla\cdot(\zeta U)\right) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\nabla\zeta - \frac{\varepsilon}{4}\nabla|\zeta|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\nabla|\tilde{U}|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\tilde{U}\nabla\cdot\tilde{U} + O(\varepsilon^2) \\ &= -\nabla\zeta - \varepsilon\left(\frac{1}{2}\nabla|\tilde{U}|^2 + \frac{1}{4}\nabla|\zeta|^2 + \frac{1}{2}\tilde{U}\nabla\cdot\tilde{U}\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Isto significa que

$$\partial_t \tilde{U} + \nabla\zeta + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\nabla|\tilde{U}|^2 + \frac{1}{4}\nabla|\zeta|^2 + \frac{1}{2}\tilde{U}\nabla\cdot\tilde{U}\right) = O(\varepsilon^2). \tag{4.3}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\partial_t\zeta &= -\nabla\cdot\left[\tilde{U}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]-\varepsilon\nabla\cdot(\zeta U)+O(\varepsilon^2)\\ &= -\nabla\cdot\tilde{U}-\varepsilon\left(\nabla\cdot(\zeta\tilde{U})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(\zeta\tilde{U})\right)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

E isto implica que

$$\partial_t\zeta+\nabla\cdot\tilde{U}+\frac{\varepsilon}{2}\nabla\cdot(\zeta\tilde{U})=O(\varepsilon^2). \tag{4.4}$$

Quando $d=1$ podemos escrever este sistema da seguinte forma:

$$\partial_t\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \zeta\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\varepsilon\tilde{u} & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta\\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}\end{bmatrix}\partial_x\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \zeta\end{pmatrix}=O(\varepsilon^2),$$

que é simétrico. Agora, se $d=2$, (4.3)–(4.4) são escritas como:

$$\begin{cases}\partial_t u_1+\partial_x\zeta+\varepsilon\left(u_1\partial_x u_1+u_2\partial_x u_2+\frac{1}{2}\zeta\partial_x\zeta+\frac{1}{2}u_1(\partial_x u_1+\partial_y u_2)\right)=O(\varepsilon^2)\\ \partial_t u_2+\partial_y\zeta+\varepsilon\left(u_1\partial_y u_1+u_2\partial_y u_2+\frac{1}{2}\zeta\partial_y\zeta+\frac{1}{2}u_2(\partial_x u_1+\partial_y u_2)\right)=O(\varepsilon^2)\\ \partial_t\zeta+\partial_x u_1+\partial_y u_2+\frac{\varepsilon}{2}\left(\partial_x\zeta u_1+\zeta\partial_x u_1+\partial_y\zeta u_2+\zeta\partial_y u_2\right)=O(\varepsilon^2),\end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\partial_t\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \zeta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\varepsilon\tilde{u}_1 & \varepsilon\tilde{u}_2 & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta\\ \frac{1}{2}\varepsilon\tilde{u}_2 & 0 & 0\\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta & 0 & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1\end{pmatrix}\partial_x\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \zeta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1 & 0\\ \varepsilon\tilde{u}_1 & \frac{3}{2}\varepsilon\tilde{u}_2 & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta\\ 0 & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_2\end{pmatrix}\partial_y\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \zeta\end{pmatrix}=O(\varepsilon^2).$$

Neste ponto usaremos a condição de $\operatorname{rot} U=0$. Mesmo quando $\operatorname{rot}\tilde{U}=O(\varepsilon)$ e não exatamente 0, ainda podemos substituir $\frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_2\partial_x\tilde{u}_2$ por $\frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_2\partial_y\tilde{u}_1$ e $\frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1\partial_y\tilde{u}_1$ por $\frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1\partial_x\tilde{u}_2$, já que estamos desconsiderando os termos de $O(\varepsilon^2)$. Com essas substituições obtemos:

$$\partial_t\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \zeta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\varepsilon\tilde{u}_1 & \frac{1}{2}\varepsilon\tilde{u}_2 & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta\\ \frac{1}{2}\varepsilon\tilde{u}_2 & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1 & 0\\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta & 0 & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1\end{pmatrix}\partial_x\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \zeta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_2 & \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1 & 0\\ \frac{\varepsilon}{2}\tilde{u}_1 & \frac{3}{2}\varepsilon\tilde{u}_2 & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta\\ 0 & 1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta & \varepsilon\tilde{u}_2\end{pmatrix}\partial_y\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \tilde{u}_2\\ \zeta\end{pmatrix}=O(\varepsilon^2),$$

que é simétrico.

Isso nos dá o seguinte sistema de Boussinesq:

$$S'_{\theta,\lambda,\mu} = \begin{cases} \partial_t \tilde{U} + \nabla\zeta + \varepsilon \left(\frac{1}{4}\nabla\zeta^2 + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{u}_1^2 \\ \partial_y \tilde{u}_2^2 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{u}_2^2 \\ \partial_y \tilde{u}_1^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_y \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \\ \partial_x \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \end{pmatrix} + a\Delta\nabla\zeta - b\Delta\partial_t \tilde{U} \right) = 0, \\ \partial_t \zeta + \nabla \tilde{U} + \varepsilon \left(\frac{1}{2}\nabla(\zeta\tilde{U}) + c\Delta\nabla\cdot\tilde{U} - d\Delta\partial_t\zeta \right) = 0, \end{cases}$$

Onde a, b, c e d são como em (4.1). Logo $S'_{\theta,\lambda,\mu}$ é o sistema $S_{\theta,\lambda,\mu}$ com a parte não-linear simetrizada. Denotaremos por Σ' o conjunto de todos os sistemas $S'_{\theta,\lambda,\mu}$. Todo o desenvolvimento apresentado nos permite enunciar o seguinte resultado:

Proposição 4.2.1. *Seja $T > 0$ e $(\theta, \lambda, \mu) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Seja também $(U^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ uma família coerente com $S_{\theta,\lambda,\mu}$. Se $\tilde{U}^\varepsilon := \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\zeta\right) U^\varepsilon$ então $(\tilde{U}^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ é coerente com $S'_{\theta,\lambda,\mu}$.*

4.3 Sistemas completamente simétricos

Todos os sistemas de Σ' tem a parte não-linear simétrica, mas não necessariamente sua parte dispersiva o é. No entanto, como indicado da Observação 4.1.1, podemos escolher os coeficientes θ, λ, μ de maneira que a parte dispersiva seja simétrica também.

Denotaremos por S' a subclasse de Σ' formada pelos sistemas $S'_{\theta,\lambda,\mu}$ tais que $a = c$ e $b \geq 0, d \geq 0$.

Observação 4.3.1. *O sistema $S_{\theta,\lambda,\mu}$ sem a parte não linear pode ser visto da* *seguinte forma*

$$\begin{cases} (1-\varepsilon b\Delta)\partial_t U + \nabla\zeta + a\varepsilon\Delta\nabla\zeta = 0 \\ (1-\varepsilon d\Delta)\partial_t \zeta + \nabla\cdot U + c\varepsilon\Delta\nabla\cdot U = 0 \end{cases}.$$

E é possível mostrar que o Corolário 3.0.3 ainda é válido se substituirmos $\partial_t u^\varepsilon$ *por* $(I - diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)\Delta)\partial_t u^\varepsilon$ *em* (3.22), *com a condição* $\alpha_j \geq 0\,(j = 0, ..., n)$ *e substituindo a estimativa de energia por*

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|\partial_j u_0\|_{H^s} \leq e^{\varepsilon\lambda t}(\|u_0\|_{H^s} + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{H^s}) + 2\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-t')}\|f(t',\cdot)\|_{H^s}dt.'$$

Aplicando o Corolário (3.0.3), obtemos diretamente o seguinte resultado:

Proposição 4.3.1. *Seja* (θ, λ, μ) *tais que* $S'_{\theta,\lambda,\mu} \in S'$ *e* $(U_0, \zeta_0) \in H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}$ *com* $s > d/2 + 1$. *Então*

(i) Existe $T > 0$ *tal que* $\forall \varepsilon > 0$, *existe uma única solução* $(U^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1} \in C([0, T/\varepsilon], H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}) \cap C^1([0, T/\varepsilon], H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ *do sistema* $S'_{\theta,\lambda,\mu}$ *com condição inicial* $(U^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)\,|_{t=0} = (U_0, \zeta_0)$.

(ii) Se $(U^\varepsilon_{co}, \zeta^\varepsilon_{co})_\varepsilon$ *é coerente de ordem* s *com* $S'_{\theta,\lambda,\mu} \in S'$ *sob* $[0, T/\varepsilon)$, *então temos que*

$$\forall 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}, \quad \|(U^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) - (U^\varepsilon_{co}, \zeta^\varepsilon_{co})\|_{L^\infty([0,t], H^{s'}(\mathbb{R}^d)^{d+1})} \leq C\varepsilon^2 t, \quad 0 \leq s' < s.$$

Demonstração: (i) Segue diretamente do Corolário 3.0.3.

(ii) Usando um raciocínio análogo ao feito na **Etapa 1** da prova do Teorema 3.0.1, tome $y(t) := \|(U^\varepsilon_{co} - U^\varepsilon, \zeta^\varepsilon_{co} - \zeta^\varepsilon)\|_{L^\infty_T L^2_x}$ temos que

$$\begin{cases} y'(t) = cM\varepsilon y(t) + \varepsilon^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

onde $M = \max\left\{\|(U^\varepsilon_{co}, \zeta^\varepsilon_{co})\|_{L^\infty_T H^s_x}, \|(U^\varepsilon), \zeta^\varepsilon\|_{L^\infty_T H^s_x}\right\}$. Resolvendo esta E.D.O., obtemos:

$$y(t) = \varepsilon^2 t \frac{(e^{cM\varepsilon t} - 1)}{cM\varepsilon t}.$$

Usando que $\frac{|e^x - 1|}{|x|} \le c$, $\forall x \le 1$, deduzimos que

$$y(t) \le c\varepsilon^2 t, \quad \forall 0 < t < \frac{T}{\varepsilon}$$

Usando o Teorema de interpolação 1.3.6 como já foi feito na **Etapa 5** da prova do Teorema 3.0.1, segue o resultado. ∎

4.4 Justificativa dos Modelos de Boussinesq

No Capítulo 2 mostramos que existe toda uma classe de sistemas equivalentes $S_{\theta,\lambda,\mu}$ que nos permitem descrever corretamente o comportamento assintótico das ondas de superfície em um regime de ondas longas, onde $(\theta, \lambda, \mu) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$.

Enunciaremos a seguir um importante resultado, que nos dá condições de aproximar a solução de (2.28)–(2.29) quando $\varepsilon = \mu$ por $(U^\varepsilon_p, \zeta^\varepsilon_p)$ solução de $S_{\theta,\lambda,\mu}$ e condição inicial

$$U^\varepsilon_p \mid_{t=0} := \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right) U^0, \quad \zeta^\varepsilon_p \mid_{t=0} := \zeta^0. \tag{4.5}$$

Teorema 4.4.1. *Seja $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ suficientemente grande e (ψ^0, ζ^0) tais que $(\nabla\psi^0, \zeta^0) \in H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}$. Seja também $(\psi^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ uma família de soluções de* (2.28)–(2.29) *e defina $U^\varepsilon := \nabla\psi^\varepsilon$. Enfim, suponha que*

- *Para todo $0 < \varepsilon < 1, (\psi^\varepsilon, \zeta^\varepsilon) \mid_{t=0} = (\psi^0, \zeta^0)$;*

- *A família $(U^\varepsilon, \zeta^\varepsilon)_\varepsilon$ é limitada em $W^{1,\infty}([0, T/\varepsilon], H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1})$.*

Para todo $(\theta,\lambda,\mu)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2$*, se* $(U_p^\varepsilon,\zeta_p^\varepsilon)$ *é solução de* $S_{\theta,\lambda,\mu}$ *com condição inicial* (4.5) *e é limitada em* $W^{1,\infty}([0,T/\varepsilon],H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1})$*, então*

$$\|(U^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)-(U^\varepsilon_{app},\zeta^\varepsilon_p)\|_{L^\infty([0,t],H^s)}\leq C\varepsilon^2 t,$$

onde $U^\varepsilon_{app}:=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)^{-1}U_p^\varepsilon$.

Ideia de Demonstração: Fixe $(\theta_1,\lambda_1,\mu_1)$ tal que o sistema $S'_{\theta_1,\lambda_1,\mu_1}\in S'$.

Usando a Proposição 2.6.1, que nos dá uma justificativa rigorosa do desenvolvimento assintótico de $Z_\varepsilon(\varepsilon\zeta)\psi$, a discussão formal da Seção 2.6.3 é justificada e a família $(U^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)_\varepsilon$ é coerente com o sistema (2.35), que pode ser denotado também por $S_{1,1,0}$.

Agora, pela Proposição 4.1.1 temos que se $U_1^\varepsilon=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta_1^2)\Delta\right)^{-1}U^\varepsilon$, então $(\tilde{U}_1^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)_\varepsilon$ é coerente com $S'_{\theta_1,\lambda_1,\mu_1}$ onde $\tilde{U}_1^\varepsilon:=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta^\varepsilon\right)U_1^\varepsilon$.

Da mesma forma, mostra-se que $(\tilde{U}_2^\varepsilon,\zeta_p^\varepsilon)_\varepsilon$ é coerente com $S'_{\theta_1,\lambda_1,\mu_1}$, onde $\tilde{U}_2^\varepsilon=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\zeta_p^\varepsilon\right)U_2^\varepsilon$ e $U_2^\varepsilon=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta_1^2)\Delta\right)^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)U_p^\varepsilon$.

Segue pela Proposição 4.3.1 que

$$\left\|(\tilde{U}_1^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)-(\tilde{U}_2^\varepsilon,\zeta_p^\varepsilon)\right\|_{L^\infty([0,t],H^s)}\leq c\varepsilon^2 t,\forall t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$$

Observe que

$$\|(U^\varepsilon,\zeta^\varepsilon)-(U^\varepsilon_{app},\zeta^\varepsilon_p)\|_{L^\infty([0,t],H^s)}\leq c\|(\tilde{U}_1,\zeta^\varepsilon)-(\tilde{U}_2^\varepsilon,\zeta_p^\varepsilon)\|_{L^\infty([0,t];H^s)},\forall t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right],$$

e o resultado segue daí.

Conclusão

Em primeiro lugar é importante observar que o resultado obtido na última parte (Teorema 4.4.1) é um resultado condicionado à existência de solução tanto das equações de Euler quanto dos sistemas de Boussinesq. Mesmo para os sistemas de Boussinesq ainda não se tem um resultado geral para existência de soluções para um tempo $T \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Vamos relembrar os resultados recentes sobre a boa colocação dos sistemas de Boussinesq. Naturalmente, é preciso impor restrições às constantes a, b, c, d a fim de que a parte linear de (1) seja bem posta. Foi estabelecido em [3] que, quando $n = 1$, todos os sistemas linearmente bem postos são localmente bem postos com a parte não-linear. Porém a questão do tempo de existência não foi considerada. Já para o caso bi-dimensional foi provada em [7] que o caso genérico onde $b > 0$ e $d > 0$, os sistemas são bem postos para um tempo de ordem $O(\varepsilon^{-1/2})$. Nos outros casos linearmente bem postos também foram obtidas soluções num intervalo de tempo $[0, \varepsilon^{-1/2}]$ em [14] (também ver [8]). É claro que as provas também se aplicam no caso de dimensão 1. No entanto, ainda é um problema em aberto provar que esses sistemas são bem postos com um tempo de existência $T \sim \frac{1}{\varepsilon}$, onde vale o nosso teorema de aproximação (Teorema 4.4.1).

Outra direção de estudos interessante seria derivar e justificar os modelos assintóticos considerando uma ordem de aproximação a mais, ou seja, considerando também todos os termos de ordem $O(\varepsilon^2)$.

Referências Bibliográficas

[1] B. Alvarez-Samaniego, D. Lannes, *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*, Invent. Math. 171 (2008), no. 3, 485-541.

[2] J. L. Bona, M. Chen and J.-C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for small amplitude long waves in nonlinear dispersive media I : Derivation and the linear theory*, J. Nonlinear Sci., 12 (2002), 283-318.

[3] J. L. Bona, M. Chen and J. C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for smallamplitude long waves in nonlinear dispersive media. II : The nonlinear theory*, Nonlinearity, 17 (2004), 925-952.

[4] J. L. Bona, T. Colin and D. Lannes, *Long-wave approximation for water waves*, Arch. Ration. Mech. Anal., 178 (2005), 373-410.

[5] J. V. Boussinesq, *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizonta en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appli. 17 (1872), 55-108.

[6] W. Craig, *An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits*, Comm. Partial Differential Equations 10 (1985), no. 8, 787-1003.

[7] V. Dougalis, D. Mitsotakis and J. C. Saut, *On some Boussinesq systems in two space dimensions: theory and Numerical Analysis*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 41, no. 5, (2007), 825-854.

[8] Cung The Anh, *On the Boussinesq/ Full dispersion and Boussinesq/Boussinesq systems for internal waves*, Nonlinear Analysis, 72, no. 1 (2010), 409-429.

[9] R. Iório, V. M. Iório, Fourier Analysis and Partial Differential Equations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 70, Cambridge Univercity Press.

[10] T. Kato, G. Ponce, *Commutator Estimates and the Euler and Navier Stokes Equations*, Comm. Pure Appl. Math., 41 (1988), 831-907.

[11] T. Kato, G. Ponce, *On Nonstatioary Flows of Vicous and Ideal Fluids in* $L^p_s(\mathbb{R}^2)$ Duke Math. Journal, Vol. 55, no. 3, 491-492.

[12] D. J. Korteweg and G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stacionary waves*, Phil. Mag. 39 (1895), pp. 422-443.

[13] D. Lannes, *Modélisation des Ondes de Surface et Justification Mathématique*, Notas de aula.

[14] F. Linares, D. Pilod, J.-C. Saut, *Well- posedness of strongly dispersive two-dimensional surface waves Boussinesq systems*, prepublicação, arxiv: 1103.4153v2 (2011).

[15] L. A. MedeirosL, M. Milla Miranda, Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos, 3a. ed. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[16] D. Pinto, M. C. Morgado, Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis, 3. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ 2005.

[17] A. Nachbin, *Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos*, Notas de aula.

[18] G. Schneider, G. E. Wayne, *The long wave limit for the water wave problem. I. The case of zero surface tension.* Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), no. 12, 1475-1535.