

Sobre um Sistema Acoplado de Equações de Korteweg-de Vries: Existência, Unicidade e Taxas de Decaimento Temporal

Raquel Ines Serna Diaz

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação do Instituto
de Matemática, da Universidade Federal
do Rio de Janeiro, como parte dos requi-
sitos necessários à obtenção do título de
Mestre em Matemática Pura.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

**Rio de Janeiro
28 de março de 2011**

Sobre um Sistema Acoplado de Equações de Korteweg-de Vries: Existência, Unicidade e Taxas de Decaimento Temporal

Raquel Ines Serna Diaz

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Aprovada por:

Prof. Ademir Fernando Pazoto - IM/UFRJ, Presidente

Prof. José Felipe Linares Ramirez - IMPA

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala - IM/UFRJ e LNCC

Rio de Janeiro

28 de março de 2011

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus que me proporcionou este momento tão especial e gratificante em minha vida.

A meu anjo no céu.

Ao professor Ademir, pela excelente orientação, por compartilhar seus conhecimentos, pelas sugestões e críticas construtivas que me ajudaram na realização deste trabalho; também pela paciência, compreensão e confiança depositados que sempre agradecerei.

Ao meu querido tio por estar sempre, para me apoiar, sem medidas.

Ao programa CAPES, pelo apoio financeiro durante os dois anos de estudo.

Aos docentes e funcionários do Instituto de Matemática da UFRJ, que me deram oportunidades e me acompanharam no caminho do saber.

À professora Roxana e ao professor Agripino por terem me dado a oportunidade de começar a dar este passo tão importante.

Aos meus amigos do Instituto de Matematica, pela agradável convivência durante esta jornada.

A esta Cidade Maravilhosa por ser tão maravilhosa e emocionante.

À Sra. Maria Alves por me deixar tão a vontade em sua casa, convites, etc.

A todos aqueles que mesmo inconscientes do papel que cumpriam, tornaram esta travessia mais amena.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo do decaimento exponencial da energia associada a um sistema acoplado de duas equações de Korteweg-de Vries num intervalo limitado com uma dissipação localizada. Combinando estimativas de energia, técnicas multiplicativas e argumentos de compacidade o problema é reduzido a provar a continuação única de soluções fracas. Então, aplicamos o resultado de continuação única provado em [13].

Abstract

This work is devoted to prove the exponential decay of the total energy of solutions of a coupled system of two Korteweg de Vries equations in a bounded interval with a localized damping term. Combining energy estimatives, multipliers and compactness arguments the problem is reduced to prove the unique continuation of weak solutions. Then, we apply the recent result on unique continuation proved in [13].

Conteúdo

Introdução

1 Resultados Preliminares

1.1. Resultados Básicos	11
1.2. Distribuições	12
1.3 Espaços $L^p(\Omega)$	13
1.4.-Espaços Sobolev	16
1.5. Imersões de Sobolev	17
1.6. Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	18
1.7. Desigualdades Importantes	21
1.8. Semigrupos de Operadores Lineares	22
1.8.1 Teorema de Lumer-Phillips	24
1.8.2 Teoria da Perturbação	25

2 Sistema Linear de Korteweg-de Vries

2.1 Existência e Unicidade	26
2.2 Decaimento Exponencial	40

3 O Sistema Não Linear de Korteweg-de Vries

3.1 Existência e Unicidade	53
3.2 Decaimento Exponencial	75

Referências Bibliográficas	80
-----------------------------------	----

Introdução

Neste trabalho consideramos um sistema acoplado de duas equações Korteweg-de Vries em um domínio limitado, dependendo de um parametro $a > 0$, na presença de uma dissipação localizada representada pela função $\lambda = \lambda(x)$. Mais precisamente, estamos interessados em um par de funções (u, v) , solução do sistema

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + uu_x + vv_x + (uv)_x + \lambda(x)u &= 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + vv_x + uu_x + (uv)_x + \lambda(x)v &= 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (1)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

e condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v_0(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (3)$$

onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$ e $t > 0$.

Quando $\lambda \equiv 0$ o sistema (1) foi derivado por Gear e Grimshaw [7] como um modelo para descrever interações de duas ondas longas em um fluido estratificado. Observe que o modelo tem a estrutura de um par de equações de Korteweg-de Vries com termos de acoplamento lineares e não lineares. Esse modelo tem sido alvo de diversos estudos ao longo de anos, como pode ser visto na lista de referências que aqui apresentamos.

Em (1), assumiremos que $a \in \mathbb{R}$,

$$0 < a < 1 \quad (4)$$

e a função $\lambda = \lambda(x)$ é tal que

$$\begin{aligned} \lambda &\in L^\infty(\Omega) \text{ e } \lambda(x) \geq \lambda_0 > 0 \text{ quase sempre em } \omega, \\ \text{onde } \omega &\subset (0, L) \text{ é um subconjunto aberto não vazio.} \end{aligned} \quad (5)$$

Consideremos a energia total $E = E(t)$ associada ao modelo, dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx. \quad (6)$$

Multiplicando a primeira equação de (1) por u , a segunda equação por v e integrando por partes em Ω , segue das condições de contorno que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \int_0^L \lambda(x) (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx - \frac{(1-a)}{2} [u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)] \quad (7)$$

para todo $t > 0$.

A desigualdade acima mostra que os termos $\lambda(x)u$ e $\lambda(x)v$ atuam como mecanismos de controle em um subconjunto de Ω . Por isso, podemos questionar se as soluções do modelo convergem para zero quando $t \rightarrow \infty$ e, em caso afirmativo, determinar a taxa de decaimento. Por outro lado, quando $\lambda(x) \geq \lambda_0$ em todo o domínio, podemos facilmente verificar que $E(t)$ decai a zero exponencialmente. Além disso, observa-se que mesmo quando $\lambda \equiv 0$ a energia é não crescente, o que nos leva a suspeitar que $E(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$. Porém, o efeito dissipativo produzido pelos termos de fronteira, $u_x(0, t)$ e $v_x(0, t)$, não são fortes suficiente para estabilizar a energia. Esse fato foi observado por Micu e Ortega em [18] e por Micu, Ortega e Pazoto em [19] onde se constatou que as soluções do sistema linear correspondente não convergem a zero para alguns valores de L . Os resultados obtidos nesses trabalhos foram motivados pela análise desenvolvida por Rosier em [22] para a equação de Korteweg-de Vries. Em [22], foi provado que quando o comprimento L do intervalo Ω pertence a um conjunto enumerável da forma

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + kl + l^2}, k \text{ e } l \text{ são números inteiros positivos} \right\}, \quad (8)$$

existe uma solução da equação de Korteweg-de Vries para a qual a energia é conservativa.

Para estabilizar a energia do modelo, Menzala, Vasconcellos e Zuazua [17] introduziram um termo dissipativo da forma função λu com $\lambda = \lambda(x)$ nas condições acima e $\omega = (0, \delta) \cup (L - \delta, L)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. O caso geral, isto é, caso em que ω satisfaz (5) foi provado por Pazoto em [20]. Essa análise também foi estendida para a equação de Korteweg-de Vries generalizada por Linares e Pazoto [10] e Rosier e Zhang [25]. No que se refere ao sistema (1)–(3), o decaimento exponencial da energia foi inicialmente obtido por Bisognin e Menzala [2] estendendo o resultado obtido em [17],

isto é, considerando $\omega = (0, \delta) \cup (L - \delta, L)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. O caso geral foi provado recentemente por Massarolo, Menzala e Pazoto em [13].

Nos trabalhos mencionados anteriormente, o decaimento exponencial da energia foi obtido combinando as técnicas multiplicativas introduzidas por Rosier em [22] e o argumento de Compacidade-Unicidade (veja [30] para maiores detalhes). Nesse caso, o problema se reduz a provar que toda solução do sistema, tal que

$$u_x(0, t) = v_x(0, t) = 0, \forall t > 0 \text{ e } u = v = 0 \text{ em } \omega \times (0, T) \quad (9)$$

é identicamente nula, o que exige a aplicação de uma Propriedade de Continuação Única (PCU). Esse resultado foi provado em [13]. Observamos que em [2] a PCU foi provada da seguinte forma: segue de (9) que o modelo pode ser escrito como um problema de Cauchy, onde o dado inicial possui suporte compacto. Segue então das propriedades de efeito regularizante provados em [29] que a solução (u, v) possui regularidade suficiente para aplicar a PCU provada em [5].

A análise descrita acima foi dividida em três capítulos:

No **Capítulo 1** apresentaremos os resultados clássicos que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

No **Capítulo 2** provamos a existência e unicidade da solução para o problema linear associado ao modelo. O resultado de existência é obtido utilizando a teoria de semigrupos.

No **Capítulo 3** provamos os resultados do capítulo anterior para o sistema não linear. A existência de soluções é obtida combinando a teoria de semigrupos, um argumento de ponto fixo e estimativas a priori. A unicidade é provada usando o Lema de Gronwall.

Notações

- $C([0, \infty); X)$ denota o espaço das funções contínuas de $[0, \infty)$ em X .
- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω .
- $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e o operador resolvente.
- I representa o operador identidade.
- $X \hookrightarrow Y$ denota a injeção contínua do espaço X no espaço Y .
- $\overline{Y}$ denota o fecho de Y na topologia de X .

CAPITULO 1

Resultados Preliminares

1.1 Resultados Básicos

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [4].

Definição 1.1.1 (*Sequência de Cauchy*) Uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço normado X é chamada de Cauchy quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural N , tal que

$$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon, \text{ para todo } n, m > N.$$

Definição 1.1.2 (*Espaços de Banach e Hilbert*) O espaço linear, normado X é dito de Banach se é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em X é convergente em X . Além disso, X é dito espaço de Hilbert se é um espaço vetorial com produto interno $(.,.)$ e é completo com respeito à norma $\|.\| = (.,.)^{1/2}$.

Lema 1.1.1 (*Picard-Banach*) Seja M um espaço métrico completo com métrica d . Se $\mathcal{F}$ é um subconjunto fechado de M e $T : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}$ satisfaz

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{F}$, e algum $0 \leq \theta < 1$, então T tem um e só um ponto fixo, isto é, existe um e só um $x \in M$, tal que $Tx = x$. Além disso, se $x_0 \in \mathcal{F}$ então a sequência $\{x_{n+1} = Tx_n, n=1, 2, \dots\}$ converge a x_0 , quando $n \rightarrow \infty$, e $d(x_n, x_0) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0)$.

Teorema 1.1.1 Em um espaço de Hilbert toda sequência limitada possui uma subsequência que converge fracamente.

Teorema 1.1.2 Seja H um espaço de Hilbert e $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em H , tal que $h_n \rightharpoonup h$ em H , quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\|h\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|.$$

1.2 Distribuições

Seja u uma função real definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, u mensurável, e seja $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω , tais que $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}_i$. Considera-se o subconjunto aberto $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Então, $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{O}$ e como consequência, define-se o suporte de u , que será denotado por $\text{supp } u$, como sendo o subconjunto fechado relativo a Ω

$$\text{supp } u = \Omega \setminus \mathcal{O}.$$

Definição 1.2.1 Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um subconjunto compacto de Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por um escalar.

Noção de Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2.2 Sejam $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ se:

- 1) $\exists K \subset \Omega$, K compacto, tal que $\text{supp } \varphi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em Ω .

Definição 1.2.3 O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathfrak{D}(\Omega)$ e chamado espaço de funções testes.

Definição 1.2.4 Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathfrak{D}(\Omega)$ e contínuo em relação à noção de convergência definida em $\mathfrak{D}(\Omega)$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Desse modo,

$$\mathfrak{D}'(\Omega) = \{T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é linear e contínuo}\}$$

Observemos que $\mathfrak{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Se $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado ao elemento φ .

Noção de convergência em $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Definição 1.2.5 Dizemos que $T_k \longrightarrow T$ em $\mathfrak{D}'(\Omega)$ se $\langle T_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [4].

Neste trabalho, as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.3.1 Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ ao conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, onde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{C : |f| \leq C \text{ quase sempre}\}.$$

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.3.1 $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.3.2 (*Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$*) Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, tal que $\frac{1}{r} = \alpha \frac{1}{p} + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$.

Definição 1.3.2 Sejam Ω um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L_{loc}^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $fX_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω , onde X_K é a função característica de K .

Observação 1.3.1 $L_{loc}^p(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

Para $u \in L_{loc}^p(\Omega)$ consideramos o funcional $T = T_u : \mathfrak{D}(0, T) \longrightarrow K$ definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

que define uma distribuição sobre Ω .

Lema 1.3.1 (*Du Bois Reymond*) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então, $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Teorema 1.3.3 (*Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue*). Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Suponha que

- a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$, quase sempre em Ω , onde f é uma função mensurável.
- b) Existe uma função $g \in L^p(\Omega)$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω .

Então, $f \in L^p(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Observação 1.3.2 Como consequência do Lema 1.3.1, a aplicação

$$L^1_{loc}(\Omega) \mapsto \mathfrak{D}'(\Omega)$$

$$u \mapsto T_u$$

é linear, contínua e injetiva. Em decorrência disso, é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido, tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω , isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.3.3 Sejam $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}$. A derivada de ordem α de T , denotada por $D^\alpha T$, é definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Com esta definição, tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $\alpha \leq k$,

onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u . Se $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$.

1.4 Espaços Sobolev

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [1] e [4].

Definição 1.4.1 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$, tais que, para todo $\alpha \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u . $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$. Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \alpha \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

definem uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.4.1

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$ o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{\alpha \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

Definição 1.4.2 Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.4.2

1. Quando $p = 2$ escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ o complemento de Ω em $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue igual a zero.

3. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

1.5 Imersões de Sobolev

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [1] e [4].

Teorema 1.5.1 (Teorema de Sobolev) Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$.

1. Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

2. Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$; $q \in [p, \infty)$.

3. Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

sendo as imersões acima contínuas.

Teorema 1.5.2 (Teorema Rellich) Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Então, a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta.

Observação 1.5.1 Como consequência do Teorema de Rellich, tem-se que a imersão do espaço $H_0^1(\Omega)$ no espaço $L^2(\Omega)$ é compacta; e como corolário do mesmo, tem-se que a imersão de $H^2(\Omega)$ no espaço $H^1(\Omega)$ é compacta.

1.6. Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [11] e [12].

Sejam X um espaço de Banach real munido da norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e $1 \leq p < \infty$. Representa-se por $L^p(0, T; X)$ o espaço de Banach de funções $u : (0, T) \rightarrow X$, tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^p(0, T; H)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^p(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis e essencialmente limitadas, isto é,

$$\sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Se X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica como o espaço de Banach $L^q(0, T; X^*)$ onde p e q são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^\infty(0, T; X)$ se identifica com o espaço $L^1(0, T; X^*)$.

Definição 1.6.1 Uma função $u : (0, T) \rightarrow X$ é dita integrável à Bochner em $(0, T)$ se for mensurável e a função real $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ for integrável à Lebesgue em $(0, T)$.

A integral de Bochner da função u em $(0, T)$ é o vetor de X denotado por $\int_0^T u(t) dt$.

Lema 1.6.1 Sejam X, Y espaços de Banach e $A : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear e contínua. Tem-se que, se $f \in L^1(I; X)$, onde I é um intervalo da reta, então

$$A\left(\int_I f(s) ds\right) = \int_I Af(s) ds.$$

Seja $v \in L^p(0, T; X)$, onde X é Hilbert separável e $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$. A integral em X

$$\int_0^T v(s) \varphi(s) ds$$

existe, sendo um vetor de X (esta integral é entendida como uma integral de Bochner em X). Assim, dado $v \in L^p(0, T; X)$, a aplicação

$$T_v : \mathfrak{D}(0, T) \rightarrow X$$

$$\varphi \mapsto \langle T_v, \varphi \rangle = \int_0^T v(s) \varphi(s) ds$$

está bem definida, é linear e contínua.

Denota-se por $\mathfrak{D}'(0, T; X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathfrak{D}(0, T)$ em X . Deste modo,

$T_v \in \mathfrak{D}'(0, T; X)$ e demonstra-se que T_v é univocamente definida por v . Logo, identificando a função v com a distribuição T_v , pode-se afirmar que

$$L^p(0, T; X) \subset \mathfrak{D}'(0, T; X).$$

Conclui-se, deste fato que toda $v \in L^p(0, T; X)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$.

Definição 1.6.2 Seja $T \in \mathfrak{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n de T é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X e dada por

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle.$$

Por $C([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, representa-se o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$, munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Lema 1.6.2 Sejam V e H espaços de Hilbert, tais que $V \hookrightarrow H$ com imersão contínua. Se $u \in L^p(0, T; V)$ e $u' \in L^p(0, T; H)$ onde $1 \leq p \leq \infty$ e $T > 0$, então $u \in C([0, T]; H)$.

Teorema 1.6.1 (Aubin-Lions) Sejam B_0 , B_1 e B três espaços de Banach, tais que B_0 e B_1 são reflexivos, $B_0 \hookrightarrow B$ é uma imersão compacta e $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ com imersões contínuas. Seja $W(0, T) = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$, onde $0 < T < \infty$ e $1 < p_0, p_1 < \infty$ com a norma definida por

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Então, W é um espaço de Banach e a imersão $W \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; B)$ é contínua e compacta.

Observação 1.6.1 Sejam $I = (0, T)$ e $f \in L^p(I, X)$. Temos os seguintes resultados.

- Se $p < \infty$, então $C_0^\infty(I, X)$ é denso em $L^p(I, X)$.
- $f : I \rightarrow X$ é uma função mensurável que pertence a $L^p(I, X)$ se, e somente se, existe $g \in L^p(I)$, tal que $\|f\| \leq g$ em quase todo ponto de I .

1.7 Desigualdades Importantes

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [1] e [4].

Lema 1.7.1 (*Desigualdade de Poincaré-Friedrichs*) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Lema 1.7.2 (*Desigualdade de Young*) Sejam a, b constantes positivas e $p > 1$ e seja q , tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.7.3 (*Desigualdade de Hölder*) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Lema 1.7.4 (*Desigualdade de Gronwall*) Sejam $\varphi \in L^\infty(0, T)$, $\beta \in L^1(0, T)$, $\beta(t) > 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e $K \geq 0$ constante. Se

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s) \varphi(s) ds, \quad \forall t \in (0, T),$$

então

$$\varphi(t) \leq K \exp\left(\int_0^t \beta(s) ds\right), \quad \forall t \in (0, T).$$

Lema 1.7.5 (*Desigualdade do tipo Gagliardo-Nirenberg*) Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, existe $c > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u_x\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

1.8 Semigrupos de Operadores Lineares

Os resultados que enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em [8] e [21].

Definição 1.8.1 Sejam X um espaço de Banach e $L(X)$ a álgebra dos operadores lineares e limitados de X . Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se

1. $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $L(X)$,
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Proposição 1.8.1 Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$, então

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \forall x \in X.$$

Definição 1.8.2 O operador $A: D(A) \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \{x \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe}\}$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S .

Proposição 1.8.2 O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear e fechado e seu domínio é um espaço vetorial denso em X .

Teorema 1.8.1 Sejam $S(t)$ um Semigrupo de classe C_0 em um espaço de Banach X e A seu gerador infinitesimal. Então, a aplicação $u := S(t)x_0$ é a única solução do problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

com regularidade

$$u \in C([0, \infty); X), \text{ se } x_0 \in X$$

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X), \text{ se } x_0 \in D(A).$$

Definição 1.8.3 Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Colocando $A^0 = I$, $A^1 = A$ e supondo que A^{k-1} esteja definido, vamos definir A^k por

$$\begin{aligned} D(A^k) &= \{x \in D(A^{k-1}) : A^{k-1}x \in D(A)\} \\ A^k x &= A(A^{k-1}x), \forall x \in D(A^k). \end{aligned}$$

Proposição 1.8.3 Seja S um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então,

1. $D(A^k)$ é um subespaço de X e A^k é um operador linear de X ;
2. Se $x \in D(A^k)$, então $S(t)x \in D(A^k)$ $t \geq 0$ e

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x, \forall k \in \mathbb{N};$$

3. $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ é denso em X .

Lema 1.8.1 Seja A um operador linear fechado de X . Pondo, para cada $x \in D(A^k)$

$$|x|_k = \sum_{j=0}^k \|A^j x\|,$$

o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(A^k)$ munido da qual $D(A^k)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.8.4 A norma acima é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(A^k)$ da norma acima será representado por $[D(A^k)]$.

1.8.1 Teorema de Lumer-Phillips

Definição 1.8.5 Seja A operador linear de X . O conjunto dos valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $\lambda I - A$ é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^* . Para cada $x \in X$, definimos

$$J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$.

Definição 1.8.6 Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$, tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$.

Observe que $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 1.8.7 Diz-se que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j ,

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.8.2 (Lumer-Phillips) Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 , então

1. A é dissipativo;
2. $R(\lambda I - A) = X, \lambda > 0$.

Reciprocamente, se

1. $D(A)$ é denso em X ;
2. A é dissipativo;

3. $R(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,

então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 .

Corolário 1.8.1 Seja A um operador linear fechado, densamente definido e tal que $D(A)$ e a imagem de A estejam definidos num espaço de Banach X . Se A e seu operador dual A^* são ambos dissipativos, então A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 .

1.8.2 Teoria da Perturbação

Para simplificar a linguagem, vamos escrever $A \in G(M, \omega)$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0 , $S(t)$, que satisfaz a condição $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.

Teorema 1.8.3 Sejam $A \in G(1, 0)$ e B um operador dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade. Se $D(B) \supset D(A)$ e existem constantes a e b , $0 \leq a < 1$ e $b \geq 0$, tais que

$$\|Bx\| \leq a \|Ax\| + b \|x\|, \forall x \in D(A),$$

então $A + B \in G(1, 0)$.

Teorema 1.8.4 Se $A \in G(1, 0)$ e $B \in L(X)$, então

$$A + B \in G(1, \|B\|).$$

CAPITULO 2

O Sistema Linear

2.1. Existência e Unicidade

Nesta seção estamos interessados em provar a existência e unicidade do seguinte problema

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + \lambda(x)u &= 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + \lambda(x)v &= 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & \forall t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) &= 0, & \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = v_x(L, t) &= 0, & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) &= v_0(x), & \forall x \in \Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$ e

$$\lambda \in L^\infty(\Omega), \lambda(x) \geq \lambda_0 > 0 \text{ q.s. em } \omega \tag{2.2}$$

sendo ω um subconjunto aberto não vazio de Ω .

2.1.1 Caso $\lambda \equiv 0$

Nesse caso, (2.1) se reduz ao modelo

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} &= 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} &= 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & \forall t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) &= 0, & \forall t > 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$u_x(L, t) = v_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

A existência e unicidade serão obtidas utilizando a Teoria de Semigrupos. Observe que multiplicando a primeira equação por u , a segunda por v e logo integrando de 0 a L podemos, formalmente, verificar que

$$\int_0^L (u_t u + u_{xxx} u + a v_{xxx} u) dx + \int_0^L (v_t v + v_x v + v_{xxx} v + a u_{xxx} v) dx = 0.$$

Integrando por partes e utilizando as condições de contorno, obtém-se

$$\int_0^L u_{xxx} u dx = u_{xx} u \Big|_0^L - \int_0^L u_{xx} u_x dx = \int_0^L \left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x dx = -\frac{u_x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{u_x^2}{2}(0, t)$$

$$\int_0^L v_{xxx} v dx = \frac{v_x^2}{2}(0, t)$$

$$\int_0^L v_{xxx} u dx = v_{xx} u \Big|_0^L - \int_0^L v_{xx} u_x dx = - \int_0^L v_{xx} u_x dx$$

$$\int_0^L u_{xxx} v dx = - \int_0^L u_{xx} v_x dx.$$

Somando as identidades acima, deduzimos que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) dx + \frac{1}{2} (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) - a \int_0^L (v_{xx} u_x + u_{xx} v_x) dx = 0.$$

Como

$$\int_0^L (v_{xx} u_x + u_{xx} v_x) dx = \int_0^L (v_x u_x)_x dx = -v_x(0, t) u_x(0, t),$$

obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) dx \leq \frac{(a-1)}{2} (v_x^2(0, t) + u_x^2(0, t)) \leq 0,$$

pois $0 < a < 1$. Logo,

$$\frac{1}{2} \int_0^L (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx.$$

Portanto, consideramos o espaço

$$H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

e denotamos por A e B as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Com a notação acima, introduzimos o operador M

$$\begin{cases} Mz = -Bz''' - Az' \\ D(M) = \{z = (z_1, z_2) \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) : z(0) = z(L) = z_x(L) = 0\}. \end{cases}$$

Assim, (2.3) pode ser reescrito como uma equação em H

$$\frac{dz}{dt} = Mz$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z_0.$$

Proposição 2.1.1 Nas condições anteriores, temos que M gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em H .

Demonstração.

Inicialmente, mostraremos que $D(M)$ é denso em H , em seguida que M e M^* são dissipativos e finalmente que M é fechado.

(i) $D(M)$ é denso em H

Como $\overline{\mathfrak{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$, então $\overline{\mathfrak{D}(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega)} = H$ e como $\mathfrak{D}(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega) \subseteq D(M)$ temos que $\overline{D(M)} = H$.

(ii) M e M^* são dissipativos

Seja $z \in D(M)$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle Mz, z \rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} -z_1''' - az_2''' \\ -z_2' - z_2''' - az_1''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= - \int_0^L z_1(z_1''' + az_2''') dx - \int_0^L z_2(z_2' + z_2''' + az_1''') dx \\
&= - \int_0^L (z_1 z_1''' + az_1 z_2''' + z_2 z_2''' + az_2 z_1''') dx - \int_0^L \left(\frac{z_2^2}{2} \right)_x dx \\
&= - \int_0^L (z_1 z_1''' + az_1 z_2''' + z_2 z_2''' + az_2 z_1''') dx.
\end{aligned}$$

Temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\int_0^L z_1 z_1''' dx &= z_1 z_1'' \Big|_0^L - \int_0^L z_1' z_1'' dx = - \int_0^L \left(\frac{(z_1')^2}{2} \right)_x dx = - \left(\frac{(z_1')^2}{2} \right) \Big|_0^L = \frac{(z_1'(0))^2}{2} \\
\int_0^L z_2 z_2''' dx &= \frac{(z_2'(0))^2}{2} \\
\int_0^L z_1 z_2''' dx &= z_1 z_2'' \Big|_0^L - \int_0^L z_1' z_2'' dx = - \int_0^L z_1' z_2'' dx \\
\int_0^L z_2 z_1''' dx &= z_2 z_1'' \Big|_0^L - \int_0^L z_2' z_1'' dx = - \int_0^L z_2' z_1'' dx.
\end{aligned}$$

Somando as identidades acima membro a membro, obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle Mz, z \rangle_H &= - \frac{(z_1'(0))^2}{2} - \frac{(z_2'(0))^2}{2} - a \int_0^L (z_1' z_2')_x dx \\
&= - \frac{(z_1'(0))^2}{2} - \frac{(z_2'(0))^2}{2} + az_1'(0)z_2'(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\frac{1}{2} ((z'_1(0))^2 + (z'_2(0))^2) + \frac{a}{2} ((z'_1(0))^2 + (z'_2(0))^2) \\
&= \frac{(a-1)}{2} ((z'_1(0))^2 + (z'_2(0))^2) \leq 0,
\end{aligned}$$

pois $0 < a < 1$. Logo M , é dissipativo.

Agora, seja $z \in D(M)$ e $w = (w_1, w_2) \in H$ um elemento a ser determinado. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle Mz, w \rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} -z_1''' - az_2''' \\ -z_2' - z_2''' - az_1''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= -\int_0^L (z_1''' + az_2''')w_1 dx - \int_0^L (z_2' + z_2''' + az_1''')w_2 dx.
\end{aligned}$$

Se assumirmos que $w_1(0) = w_1(L) = w_1'(0) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^L z_1''' w_1 dx &= -\int_0^L z_1'' w_1' dx = -\left(z_1' w_1' \Big|_0^L - \int_0^L z_1' w_1'' dx \right) \\
&= z_1 w_1'' \Big|_0^L - \int_0^L z_1 w_1''' dx = -\int_0^L z_1 w_1''' dx,
\end{aligned}$$

pois $z \in D(M)$. Analogamente,

$$\int_0^L z_2''' w_1 dx = -\int_0^L z_2 w_1''' dx.$$

Agora, se assumirmos que $w_2(0) = w_2(L) = w_2'(0) = 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L z_1''' w_2 dx &= -\int_0^L z_1 w_2''' dx \text{ e } \int_0^L z_2''' w_2 dx = -\int_0^L z_2 w_2''' dx, \\
\int_0^L z_2' w_2 dx &= z_2 w_2 \Big|_0^L - \int_0^L z_2 w_2' dx = -\int_0^L z_2 w_2' dx.
\end{aligned}$$

Combinando as identidades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Mz, w \rangle_{H \times H} &= \int_0^L z_1 w_1''' dx + a \int_0^L z_2 w_1''' dx \\
&\quad + \int_0^L z_2 w_2' dx + \int_0^L z_2 w_2''' dx + a \int_0^L z_1 w_2''' dx \\
&= \int_0^L z_1 (w_1''' + a w_2''') dx + \int_0^L z_2 (a w_1''' + w_2' + w_2''') dx \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \left\langle z, \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H.
\end{aligned}$$

Assim, o adjunto de M é definido por

$$\begin{cases} M^*(w) = Aw' + Bw''' \\ D(M^*) = \{w = (w_1, w_2) \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) \mid w(0) = w(L) = w'(0) = 0\}. \end{cases}$$

Mostremos que M^* é dissipativo.

Seja $w \in D(M^*)$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle M^*w, w \rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \int_0^L w_1 (w_1''' + a w_2''') dx + \int_0^L w_2 (a w_1''' + w_2' + w_2''') dx.
\end{aligned}$$

Temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
\int_0^L w_1 w_1''' dx &= w_1 w_1'' \Big|_0^L - \int_0^L w_1' w_1'' dx \\
&= - \int_0^L \left(\frac{(w_1')^2}{2} \right)_x dx = - \frac{(w_1')^2}{2} \Big|_0^L = - \frac{(w_1'(L))^2}{2} \\
\int_0^L w_2 w_2''' dx &= - \frac{(w_2'(L))^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L w_1 w_2''' dx &= w_1 w_2'' \Big|_0^L - \int_0^L w_1' w_2'' dx = - \int_0^L w_1' w_2'' dx \\ \int_0^L w_2 w_1''' dx &= w_2 w_1'' \Big|_0^L - \int_0^L w_2' w_1'' dx = - \int_0^L w_2' w_1'' dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle M^* w, w \rangle_H &= -\frac{1}{2} ((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2) - a \int_0^L (w_1' w_2'' + w_2' w_1'') dx \\ &= -\frac{1}{2} ((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2) - a \int_0^L (w_1' w_2')_x dx \\ &= -\frac{1}{2} ((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2) - a w_1'(L) w_2'(L) \\ &\leq -\frac{1}{2} ((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2) + \frac{a}{2} ((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2) \\ &= \frac{(a-1)}{2} ((w_1'(L))^2 + (w_2'(L))^2) \leq 0 ,\end{aligned}$$

pois $0 < a < 1$. Assim M^* é dissipativo.

(iii) M é fechado

Basta mostrar que $M^{**} = M$. Para isso, calculemos M^{**} .

Seja $w \in D(M^*)$ e z a ser determinado. Se assumirmos que $z(0) = z(L) = z'(L) = 0$ temos que

$$\begin{aligned}\langle M^* w, z \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} w_1''' + a w_2''' \\ a w_1''' + w_2' + w_2''' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H \\ &= \int_0^L (w_1''' z_1 + a w_2''' z_1) dx + \int_0^L (a w_1''' z_2 + w_2' z_2 + w_2''' z_2) dx.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^L w_1''' z_1 dx &= - \int_0^L w_1 z_1''' dx \\
\int_0^L w_2''' z_1 dx &= - \int_0^L w_2 z_1''' dx \\
\int_0^L w_1''' z_2 dx &= - \int_0^L w_1 z_2''' dx \\
\int_0^L w_2' z_2 dx &= - \int_0^L w_2 z_2' dx \\
\int_0^L w_2''' z_2 dx &= - \int_0^L w_2 z_2''' dx,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\langle M^* w, z \rangle_H &= - \int_0^L w_1 z_1''' dx - a \int_0^L w_2 z_1''' dx \\
&\quad - a \int_0^L w_1 z_2''' dx - \int_0^L w_2 z_2' dx - \int_0^L w_2 z_2''' dx \\
&= - \int_0^L w_1 (z_1''' + a z_2''') dx - \int_0^L w_2 (a z_1''' + z_2' + z_2''') dx \\
&= - \left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1''' + a z_2''' \\ a z_1''' + z_2' + z_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \left\langle w, \begin{pmatrix} z_1''' + a z_2''' \\ a z_1''' + z_2' + z_2''' \end{pmatrix} \right\rangle_H.
\end{aligned}$$

Assim, M^{**} é definido por

$$\begin{cases} M^{**} z = -A z' - B z''' \\ D(M^{**}) = \{z \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) \mid z(0) = z(L) = z'(L) = 0\}. \end{cases}$$

Portanto, $M^{**} = M$.

Logo pelo Corolário 1.8.1 concluímos que M gera um semigrupo de contrações de classe C_0 .

□

Corolário 2.1.1 Para cada $z_0 \in H$, o problema (2.3) possui uma única solução $z \in C([0, \infty), H)$. Se $z_0 \in D(M)$, então $z \in C([0, \infty), D(M)) \cap C^1([0, \infty), H)$.

Demonstração.

O modelo (2.3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Mz \\ z(0) &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z_0. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.1.1 temos que M gera um Semigrupo de Contrações $\tilde{S}$ de classe C_0 e pelo Teorema 1.8.1 temos que $z(t) = \tilde{S}(t)z_0$ é a única solução de (2.3). Além disso, pelo Teorema 1.8.1, temos que se $z_0 \in D(M)$ então $z \in C([0, \infty), D(M)) \cap C^1([0, \infty), H)$. Se $z_0 \in H$, então $z \in C([0, \infty); H)$.

□

2.1.2 Caso $\lambda > 0$

Observemos que o modelo (2.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Mz + Pz \\ z(0) &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = z_0 \end{aligned}$$

onde P é dado por

$$\begin{aligned} P: H &\longrightarrow H \\ z &\longmapsto -\lambda(x)z. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar que $M + P$ gera um semigrupo de classe C_0 e, consequentemente, que (2.1) possui solução, basta mostrar que $P \in \mathcal{L}(H)$. De fato, como

$$\|Pz\|_H^2 = \int_0^L |\lambda(x)z|^2 dx \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_0^L (z_1^2 + z_2^2) dx = \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|z\|_H^2,$$

então

$$\|Pz\|_H \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|z\|_H.$$

Logo, pelo Teorema 1.8.4, $M + P$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de operadores lineares limitados de classe C_0 .

Teorema 2.1.1 Se $z_0 \in D(M)$, o problema (2.1) possui uma única solução $z \in C([0, \infty); D(M)) \cap C^1([0, \infty); H)$. Se $z_0 \in H$, o problema (2.1) possui uma única solução fraca $z \in C([0, \infty), H)$. Além disso,

$$z \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap H^{-1}(0, T; H^{-2}(0, L) \times H^{-2}(0, L)).$$

Demonstração.

Assim como no Corolário 2.1.1, o resultado de existência segue da Teoria de Semigrupos. Mostraremos o ganho de regularidade da solução quando $z_0 \in H$.

Como $\overline{D(M)} = H$ existe uma sequência $\{z_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(M)$, tal que $z_{0,n} \rightarrow z_0$ em H , quando $n \rightarrow \infty$. Para cada n , seja $z_n = (u_n, v_n) \in C([0, T]; D(M))$ a única solução de (2.1) dada pelo Teorema 1.8.1. Para simplificar as notações denotamos $u_n = u$ e $v_n = v$, $u_{0,n} = u_0$ e $v_{0,n} = v_0$.

Seja $q \in C^\infty([0, L] \times [0, T])$. Multiplicando a primeira equação de (2.1) por qu , a segunda por qv , integrando em $(0, L) \times (0, T)$ e logo somando as identidades, temos

$$\int_0^T \int_0^L qu(u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + \lambda(x)u) dx + \int_0^T \int_0^L qv(v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + \lambda(x)v) dx = 0.$$

Observemos que

$$\int_0^T \int_0^L qu u_t dx dt = \int_0^T \int_0^L q \left(\frac{u^2}{2} \right)_t dt dx = \int_0^L \left(\frac{q}{2} (u^2|_0^T) - \int_0^T \frac{q_t u^2}{2} dt \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \frac{q}{2} (u^2(x, T) - u^2(x, 0)) dx - \int_0^L \int_0^T \frac{q_t u^2}{2} dt dx \\
\int_0^T \int_0^L q u u_{xxx} dx dt &= \int_0^T \left(q u u_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L (q_x u + q u_x) u_{xx} dx \right) dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L q_x u u_{xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L q u_x u_{xx} dx dt \\
&= - \int_0^T \left(q_x u u_x \Big|_0^L - \int_0^L (q_{xx} u + q_x u_x) u_x dx \right) dt - \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2} (u_x^2)_x dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L (q_{xx} u + q_x u_x) u_x dx dt - \int_0^T \frac{q}{2} u_x^2 \Big|_0^L dt + \int_0^T \int_0^L \frac{q_x u_x^2}{2} dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L \frac{q_{xx}}{2} (u^2)_x dx dt + \int_0^T \int_0^L q_x u_x^2 dx dt + \int_0^T \frac{q(0, t) u_x^2(0, t)}{2} dt + \int_0^T \int_0^L \frac{q_x u_x^2}{2} dx dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L \frac{q_{xxx} u^2}{2} dx dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L q_x u_x^2 dx dt + \int_0^T \frac{q(0, t) u_x^2(0, t)}{2} dt. \\
\int_0^T \int_0^L q u v_{xxx} dx dt &= \int_0^T \left(q u v_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L (q_x u + q u_x) v_{xx} dx \right) dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L q_x u v_{xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L q u_x v_{xx} dx dt \\
&= - \int_0^T (q_x u v_x \Big|_0^L - \int_0^L (q_{xx} u + q_x u_x) v_x dx) dt - \int_0^T \int_0^L q u_x v_{xx} dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L q_{xx} u v_x dx dt + \int_0^T \int_0^L q_x u_x v_x dx dt - \int_0^T \int_0^L q u_x v_{xx} dx dt. \\
\int_0^T \int_0^L q u \lambda(x) u dx dt &= \int_0^T \int_0^L q \lambda(x) u^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L q v v_t dx dt &= \int_0^L \frac{q}{2} (v^2(x, T) - v^2(x, 0)) dx - \int_0^L \int_0^T \frac{q_t v^2}{2} dt dx. \\
\int_0^T \int_0^L q v v_x dx dt &= \int_0^T \int_0^L \frac{q}{2} (v^2)_x dx dt = \int_0^T \left(\frac{q v^2}{2} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{q_x v^2}{2} dx \right) dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L \frac{q_x v^2}{2} dx dt. \\
\int_0^T \int_0^L q v v_{xxx} dx dt &= - \int_0^T \int_0^L \frac{q_{xxx} v^2}{2} dx dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L q_x v_x^2 dx dt + \int_0^T \frac{q(0, t) v_x^2(0, t)}{2} dt. \\
\int_0^T \int_0^L q v u_{xxx} dx dt &= \int_0^T \int_0^L q_{xx} v u_x dx dt + \int_0^T \int_0^L q_x v_x u_x dx dt - \int_0^T \int_0^L q v_x u_{xx} dx dt. \\
\int_0^T \int_0^L q v \lambda(x) v dx dt &= \int_0^T \int_0^L q \lambda(x) v^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Escolhendo $q = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{(u^2(x, T) + v^2(x, T))}{2} dx - \int_0^L \frac{(u_0^2(x) + v_0^2(x))}{2} dx + \int_0^T \frac{(u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t))}{2} dt \\
&- a \int_0^T \int_0^L (u_x v_x)_x dx dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (u^2 + v^2) dx dt = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^L (u^2(x, T) + v^2(x, T)) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx - \frac{1}{2} \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\
&+ a \int_0^T u_x(0, t) v_x(0, t) dt - \int_0^T \lambda(x) (u^2 + v^2) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{(a-1)}{2} \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt.
\end{aligned}$$

Como $0 < a < 1$,

$$\frac{1}{2} \int_0^L (u^2(x, T) + v^2(x, T)) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx$$

Retornando à nossa notação inicial, temos

$$\frac{1}{2} \int_0^L (u_n^2(x, T) + v_n^2(x, T)) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L (u_{0,n}^2(x) + v_{0,n}^2(x)) dx, \quad \forall T > 0. \quad (2.4)$$

Como $z_n = S(t)z_{0,n} \rightarrow z = S(t)z_0$ e $z_{0,n} \rightarrow z_0$ em H , quando $n \rightarrow \infty$, [21] obtém-se a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \int_0^L (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx.$$

Então,

$$\| (u, v) \|_{C([0,T];H)} \leq \| (u_0, v_0) \|_H.$$

Agora, escolhendo $q(x, t) = x$ resulta que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt &= -\frac{1}{2} \int_0^L x (u^2(x, T) + v^2(x, T)) dx + \frac{1}{2} \int_0^L x (u^2(x, 0) + v^2(x, 0)) dx \\ &\quad - 2a \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt + a \int_0^T \int_0^L x (u_x v_{xx} + v_x u_{xx}) dx dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt - \int_0^T \int_0^L x \lambda(x) (u^2 + v^2) dx dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt &= -\frac{1}{3} \int_0^L x (u^2(x, T) + v^2(x, T)) dx + \frac{1}{3} \int_0^L x (u^2(x, 0) + v^2(x, 0)) dx \\ &\quad - \frac{4}{3} a \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt + \frac{2}{3} a \int_0^T \int_0^L x (u_x v_x)_x dx dt \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt - \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L x \lambda(x) (u^2 + v^2) dx dt \\ &\leq \frac{1}{3} \int_0^L x (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + a \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1-a) \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt \leq \frac{1}{3} \int_0^L x (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt,$$

de onde segue que

$$\int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt \leq \frac{1}{3(1-a)} \int_0^L x (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{1}{3(1-a)} \int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2) dx dt.$$

Retornando à notação original e usando a desigualdade (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \|(u_n, v_n)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 &\leq \frac{L}{3(1-a)} \int_0^L (u_{0,n}^2(x) + v_{0,n}^2(x)) dx \\ &\quad + \frac{T}{3(1-a)} \|(u_{0,n}, v_{0,n})\|_H^2 \\ &\leq \frac{(L+T)}{3(1-a)} \|(u_{0,n}, v_{0,n})\|_H^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Logo,

$$\|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{(L+T)}{3(1-a)} \|(u_0, v_0)\|_H^2. \tag{2.6}$$

De fato, a desigualdade (2.5) nos diz que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Portanto, existe uma função $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, tal que $z_n \rightarrow z$. Além disso, segue das estimativas anteriores que $z \in C([0, T], H)$ e que z é uma solução fraca de (2.1). Logo, por [21] e pela unicidade da solução $z = (u, v) = S(\cdot)(u_0, v_0)$.

Afirmo que $z = (u, v) \in H^1(0, T; H^{-2}(0, L) \times H^{-2}(0, L))$. De fato segue novamente de [21] e das considerações acima que

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxx} - av_{xxx} - \lambda(x)u, \text{ em } \mathfrak{D}'((0, L) \times (0, T)) \\ v_t &= -v_x - v_{xxx} - au_{xxx} - \lambda(x)v, \text{ em } \mathfrak{D}'((0, L) \times (0, T)). \end{aligned}$$

Como $(u, v) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, o resultado segue.

□

2.2 Decaimento Exponencial

2.2.1 Caso $\lambda \equiv 0$

Teorema 2.2.1 Seja z a solução do problema (2.3) obtida no Corolário 2.1.1. Então, existem constantes $C > 0$ e $\mu > 0$, tais que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração.

Seja M o operador definido na seção (2.1). Como $\overline{D(M)} = H$, existe $\{z_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(M)$, tal que $z_{0,n} \rightarrow z_0$ em H , quando $n \rightarrow \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $z_n = (u_n, v_n)$ a solução do problema obtida no Corolário 2.1.1. Procedendo como na demonstração do Teorema 2.1.1, deduzimos que

$$\| (u, v)(\cdot, T) \|_H^2 \leq \| (u_0, v_0) \|^2 + (a-1) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt.$$

Por outro lado, segue de [19] que, para um conjunto denso de valores de L , existe uma constante $c > 0$ satisfazendo

$$\| (u_0, v_0) \|_H \leq c \| (u_x, v_x)(0, \cdot) \|_H.$$

Esse conjunto não pode ser caracterizado como em [18] por causa da complexidade do sistema.

Seja $\tilde{c} = \frac{c}{1-a}$. Combinando as desigualdades acima, deduzimos que

$$\begin{aligned} (1 + \tilde{c}) \| (u, v)(\cdot, T) \|_H^2 &\leq \tilde{c} \| (u_0, v_0) \|_H^2 + (a-1) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\ &\quad + \| (u_0, v_0) \|_H^2 + \tilde{c}(a-1) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\ &\leq \tilde{c} \| (u_0, v_0) \|_H^2 + (a-1) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{c} \| (u_0, v_0) \|_H^2,$$

ou seja,

$$\| (u, v)(\cdot, T) \|_H^2 \leq \gamma \| (u_0, v_0) \|_H^2, \quad 0 < \gamma < 1 \text{ onde } \gamma = \frac{\tilde{c}}{(\tilde{c} + 1)}.$$

A propriedade de semigrupo associada ao modelo nos dá a conclusão do teorema. De fato, como

$$\| (u, v)(\cdot, kT) \|_H^2 \leq \gamma^k \| (u_0, v_0) \|_H^2, \quad \forall k \geq 0,$$

e

$$\| (u, v)(\cdot, t) \|_H^2 \leq \| (u, v)(\cdot, kT) \|_H^2, \quad \text{para } kT \leq t \leq (k+1)T,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \| (u, v)(\cdot, t) \|_H^2 &\leq \| (u, v)(\cdot, kT) \|_H^2 \leq \gamma^k \| (u_0, v_0) \|_H^2 \\ &\leq \gamma^{\frac{t}{T}-1} \| (u_0, v_0) \|_H^2 \leq \frac{1}{\gamma} \| (u_0, v_0) \|_H^2 e^{\left[\frac{\ln \gamma}{T} \right] t}, \end{aligned}$$

isto é,

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t},$$

onde $C = \frac{1}{\gamma}$ e $\mu = - \left[\frac{\ln \gamma}{T} \right] t$.

2.2.2. Caso $\lambda > 0$

Teorema 2.2.2 Sejam $\lambda = \lambda(x)$ satisfazendo (2.2) e $z = (u, v)$ a solução do problema (2.1) obtida no Teorema 2.1.1. Então, existem constantes $C > 0$ e $\mu > 0$, tais que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração.

Antes de provar o resultado, mostraremos que para a classe de soluções consideradas os termos $\int_0^T u_x^2(0, t) dt$ e $\int_0^T v_x^2(0, t) dt$ estão bem definidos.

Procedendo como no Teorema 2.1.1, obtemos uma sequência de soluções

$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in C([0, \infty); D(M))$, tal que $z_n(x, 0) = (u_{0,n}(x), v_{0,n}(x)) = z_{0,n} \in D(M)$ e $z_{0,n} \rightarrow z_0 = (u_0, v_0)$ em H , quando $n \rightarrow \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (t) + \frac{1}{2} [u_{n,x}(0, t)^2 + v_{n,x}(0, t)^2] \\ + a u_{n,x}(0, t) v_{n,x}(0, t) + \int_0^L \lambda(x) (u_n^2 + v_n^2) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde

$$E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (t) = \frac{1}{2} [\|u_n(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_n(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2].$$

Integrando (2.7) de 0 a T e usando que $0 < a < 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (T) + \frac{(1-a)}{2} \int_0^T [u_{n,x}(0, t)^2 + v_{n,x}(0, t)^2] dt \\ + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (u_n^2 + v_n^2) dx dt \leq E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Claramente,

$$E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (T) - E \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} (0) \rightarrow E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (T) - E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (0), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

pois $S(t)u_{0,n} \rightarrow S(t)u_0$, onde $S(t)$ é o semigrupo gerado por M .

Afirmamos que podemos extrair uma subsequência de $\{(u_{n,x}(0, t), v_{n,x}(0, t))\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$u_{n,x}(0, t) \rightharpoonup u_x(0, t) \text{ em } H^{-1}(0, T) \quad (2.9)$$

$$v_{n,x}(0, t) \rightharpoonup v_x(0, t) \text{ em } H^{-1}(0, T), \quad (2.10)$$

onde $\rightharpoonup$ denota convergência fraca. De fato, procedendo novamente como no Teorema 2.1.1, temos que

$$\int_0^T \left[\|u_{n,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{n,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \leq \frac{L+T}{3(1-a)} \left[\|u_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{0,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

ou seja,

$$\left\| \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{L+T}{3(1-a)} \left\| \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ v_{0,n} \end{pmatrix} \right\|_H^2. \quad (2.11)$$

Agora, reescrevemos o sistema (2.1) como

$$DU_{xxx}^n = -U_t^n - QU_x^n - \lambda(x)U^n, \quad (2.12)$$

onde

$$U^n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como consequência de (2.11), temos que

$$\{U_x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H) \quad (2.13)$$

$$\{U_t^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } H^{-1}(0, T; H). \quad (2.14)$$

Logo, de (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14), deduzimos que $\{DU_{xxx}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^{-1}(0, T; H)$, ou seja, $\{U^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^{-1}(0, T; H^3(\Omega) \times H^3(\Omega))$. Em particular,

$$\{U_x^n(0, t)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } H^{-1}(0, T) \times H^{-1}(0, T),$$

já que para $t \in (0, T)$ temos que $u_{n,x}(\cdot, t), v_{n,x}(\cdot, t) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C([0, L])$. Assim, podemos obter uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo índice n , tal que

$$U_x^n(0, t) \rightharpoonup U_x(0, t) \text{ em } H^{-1}(0, T) \times H^{-1}(0, T), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

o que prova (2.9) e (2.10). Com esta subsequência, retornamos a (2.8) e deduzimos que

$$\{u_{n,x}(0, t)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } \{v_{n,x}(0, t)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^2(0, T)$$

pois

$$\| u_{n,x}(0, \cdot) \|_{L^2(0,T)}^2 + \| v_{n,x}(0, \cdot) \|_{L^2(0,T)}^2 \leq \frac{1}{(1-a)} \int_0^L (u_{0,n}^2(x) + v_{0,n}^2(x)) dx.$$

A desigualdade acima garante que, novamente, podemos extrair uma subsequência que será convergente, no sentido fraco, em $L^2(0, T)$. Esse fato juntamente com a discussão anterior, mostra que

$$u_{n,x}(0, \cdot) \rightharpoonup u_x(0, t) \text{ em } L^2(0, T), \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

e

$$v_{n,x}(0, \cdot) \rightharpoonup v_x(0, t) \text{ em } L^2(0, T), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Isto prova que $u_x(0, t)$ e $v_x(0, t)$ existem e pertencem a $L^2(0, T)$. Além disso, de (2.11) e (2.8) (veja também a demonstração do Teorema 2.1.1) temos

$$\int_0^T [\| u_x \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v_x \|_{L^2(\Omega)}^2] dt \leq \frac{L+T}{3(1-a)} [\| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v_0 \|_{L^2(\Omega)}^2]$$

e

$$\int_0^T [\| u(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v(\cdot, t) \|_{L^2(\Omega)}^2] dt \leq T [\| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v_0 \|_{L^2(\Omega)}^2].$$

Logo,

$$\int_0^T [\| u \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| v \|_{H^1(\Omega)}^2] dt \leq C(T) [\| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v_0 \|_{L^2(\Omega)}^2], \quad (2.17)$$

onde $C(T) = T + \frac{L+T}{3(1-a)}$.

Agora, provaremos o decaimento exponencial da solução. Novamente, faremos os cálculos para soluções regulares e concluiremos o resultado por um argumento de densidade.

Mostraremos inicialmente que existe uma constante $C_1(T) > 0$, satisfazendo

$$\| u_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| v_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1(T) \left[\int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2) dx dt + \int_0^T u_x^2(0, t) dt \right]$$

$$+ \int_0^T v_x^2(0, t) dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt]. \quad (2.18)$$

Multiplicamos a primeira equação de (2.1) por $(T - t)u$, a segunda por $(T - t)v$ e integramos sobre $(0, L) \times (0, T)$. Somando as duas identidades, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L (T - t) \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) dx dt + \int_0^T \int_0^L (T - t) \left(\frac{v^2}{2} \right)_x dx dt + \int_0^T \int_0^L (T - t) u u_{xxx} dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^L (T - t) v v_{xxx} dx dt + a \int_0^T \int_0^L (T - t) u v_{xxx} dx dt + \int_0^T \int_0^L (T - t) v u_{xxx} dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (T - t) (u^2 + v^2) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^T \int_0^L (T - t) \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) dx dt = \frac{T}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx$$

$$\int_0^T \int_0^L (T - t) \left(\frac{v^2}{2} \right)_x dx dt = \int_0^T (T - t) \frac{v^2}{2} \Big|_0^L dt = 0$$

$$\int_0^T \int_0^L (T - t) u u_{xxx} dx dt = \int_0^T (T - t) [u u_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L u_x u_{xx} dx] dt$$

$$= - \int_0^T (T - t) \left[\int_0^L \left(\frac{u_x^2}{2} \right)_x dx \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T (T - t) u_x^2(0, t) dt$$

$$\int_0^T \int_0^L (T - t) v v_{xxx} dx dt = \int_0^T (T - t) [v v_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L v_x v_{xx} dx] dt$$

$$= - \int_0^T (T - t) \left[\int_0^L \left(\frac{v_x^2}{2} \right)_x dx \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^T (T - t) v_x^2(0, t) dt$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (T-t) u v_{xxx} dx dt &= \int_0^T (T-t) [u v_{xx} \big|_0^L - \int_0^L u_x v_{xx} dx] dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L (T-t) u_x v_{xx} dx dt \\
\int_0^T \int_0^L (T-t) v u_{xxx} dx dt &= \int_0^T (T-t) [v u_{xx} \big|_0^L - \int_0^L v_x u_{xx} dx] dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L (T-t) v_x u_{xx} dx dt,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T (T-t) (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\
&\quad - a \int_0^T (T-t) \int_0^L (u_x v_x)_x dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (T-t) (u^2 + v^2) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T (T-t) (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\
&\quad + a \int_0^T (T-t) [u_x(0, t) v_x(0, t)] dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (T-t) (u^2 + v^2) dx dt.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx &\leq \frac{1}{T} \int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx + \frac{(1+a)}{T} \int_0^T (T-t) (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\
&\quad + \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (T-t) (u^2 + v^2) dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1(T) \left[\int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx + \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \right], \end{aligned}$$

onde $C_1(T) = \max \left\{ \frac{1}{T}, 2 \right\}$.

Voltando à notação original, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L (u_{0,n}^2(x) + v_{0,n}^2(x)) dx &\leq C_1(T) \left[\int_0^L \int_0^T (u_n^2 + v_n^2) dt dx + \int_0^T (u_{n,x}^2(0, t) + v_{n,x}^2(0, t)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u_n^2 + v_n^2) dx dt \right]. \end{aligned}$$

Logo, procedendo como na demonstração do Teorema 2.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx &\leq C_1(T) \left[\int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx + \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para obter o decaimento exponencial, devemos mostrar que, para um $T > 0$ fixo, existe uma constante positiva C_3 , tal que a desigualdade

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_3 \left[\int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \right] \quad (2.20)$$

se verifica.

Segue então da desigualdade (2.19) que para obter (2.20) é suficiente mostrar a desigualdade

$$\int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2) dt dx \leq C \left[\int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \right] \quad (2.21)$$

para algum $C > 0$ constante independente de u e v . Faremos isto por contradição.

Suponhamos que (2.21) não seja válida. Então, existe uma sequência de soluções $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de (2.1), onde $(u_n, v_n) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, tal que

$$\| (u_n, v_n) \|_{L^2(0, T; H)}^2 > n \left[\int_0^T (u_{n,x}^2(0, t) + v_{n,x}^2(0, t)) dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (u_n^2 + v_n^2) dx dt \right].$$

Segue daí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\| u_n \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \| v_n \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2}{\int_0^T (u_{n,x}^2(0, t) + v_{n,x}^2(0, t)) dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (u_n^2 + v_n^2) dx dt} = \infty. \quad (2.22)$$

Tomemos $\sigma_n^2 = \| u_n \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \| v_n \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2$ e $w_n = \frac{1}{\sigma_n} (u_n, v_n)$. Então, w_n resolve o problema (2.1) com condição inicial $\frac{1}{\sigma_n} z_n(x, 0)$. Além disso,

$$\| w_n \|_{L^2(0, T; H)} = 1. \quad (2.23)$$

Combinando (2.22) e (2.23), também temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |w_{n,x}(0, t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w_n(x, t)|^2 dx dt = 0.$$

Por outro lado, de (2.19) obtém-se

$$\int_0^L |w_n(x, 0)|^2 dx \leq C_1(T) \left[1 + \int_0^T |w_{n,x}(0, t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w_n(x, t)|^2 dx dt \right],$$

garantindo assim que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\| w_n(., 0) \|_H \leq C.$$

Como a sequência $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz

$$\| w_n(., t) \|_H^2 \leq \| w_n(., 0) \|_H^2,$$

temos

$$\| w_n(., t) \|_H \leq C. \quad (2.24)$$

Além disso, de (2.17) deduzimos que

$$\int_0^T \| w_n(., t) \|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq C(T) \| w_n(., 0) \|_H^2 \leq C(T)C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\| w_n \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \leq C(T)C. \quad (2.25)$$

Por outro lado, para cada n , w_n satisfaz a identidade

$$w_{n,t} = -Qw_{n,x} - Dw_{n,xxx} - F(x)w_n \text{ em } \mathfrak{D}'(0, T; H^{-2}(\Omega) \times H^{-2}(\Omega))$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(x) = \lambda(x)I.$$

Logo as, estimativas (2.23) e (2.25) nos dizem que $\{w_{n,t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; H^{-2}(\Omega) \times H^{-2}(\Omega))$.

As limitações acima, junto com o Lema de Aubin-Lions, nos garantem que existe uma subsequência de $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que denotaremos por $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } L^2(0, T; H), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$$w_{n,t} \rightharpoonup w_t \text{ em } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, como

$$\| w_n \|_{L^2(0,T;H)} = 1,$$

e

$$\left| \| w_n \|_{L^2(0,T;H)} - \| w \|_{L^2(0,T;H)} \right| \leq \| w_n - w \|_{L^2(0,T;H)} \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\| w \|_{L^2(0,T;H)} = 1. \quad (2.26)$$

As convergências acima também nos garantem que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left[\int_0^T |w_{n,x}(0,t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w_n(x,t)|^2 dx dt \right] \\
&\geq \int_0^T |w_x(0,t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w(x,t)|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T |w_x(0,t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |w(x,t)|^2 dx dt = 0 .$$

Então, $\lambda(x) [w(x,t)]^2 \equiv 0$ em $(0,T) \times (0,L)$. Em particular, $w \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$ e w é solução (fraca) de

$$w_t + Qw_x + Dw_{xxx} = 0 \text{ em } \mathfrak{D}'(0,T; H^{-2}(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)).$$

Pelo Teorema de Unicidade de Holmgren deduzimos que $w \equiv 0$ em todo o conjunto $(0,L) \times (0,T)$, o que contradiz (2.26). Consequentemente, (2.21) é válido, o que implica que (2.20) se verifica.

Agora podemos concluir a demonstração do Teorema 2.2.1. Temos que

$$\frac{d}{dt} [2E(t)] + 2 \int_0^L \lambda(x) (u^2 + v^2) dx \leq (a-1) [u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)]. \quad (2.27)$$

Integrando (2.27) de $t = 0$ a $t = T$ e multiplicando a desigualdade por $1 + \frac{C_3}{1-a}$, com C_3 dada em (2.20), obtém-se

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right) \left[\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] &\leq \left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right) \{ \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - 2 \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (u^2 + v^2) dx dt \\
&\quad + (a-1) \int_0^T (u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)) dt \}.
\end{aligned}$$

Usando (2.20), o lado direito da desigualdade acima pode ser estimado como

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right) \left[\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \\
& \leq \frac{C_3}{1-a} \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + C_3 \left[\int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \right] - 2 \left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right) \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \\
& \quad + (a - 1 - C_3) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt \\
& = \frac{C_3}{1-a} \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \left(C_3 - 2 \left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right) \right) \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2) dx dt \\
& \quad + (a - 1) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) dt.
\end{aligned}$$

Como $0 < a < 1$, temos que $1 - \frac{2}{1-a} < -1$ e, consequentemente, $C_3 \left(1 - \frac{2}{1-a}\right) < -C_3$. Assim, $\left(C_3 - 2 \left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right)\right) < 0$ e

$$\left(1 + \frac{C_3}{1-a}\right) \left[\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \frac{C_3}{1-a} \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

ou seja,

$$\left[\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \left(\frac{C_3}{1-a+C_3} \right) \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

onde $\gamma := \frac{C_3}{1-a+C_3} \in (0, 1)$. Procedendo como na demonstração do Teorema 2.2.1 deduzimos que

$$E(t) \leq \gamma^{-1} e^{-\mu t} E(0),$$

onde $\mu = -\frac{1}{T} \log \gamma$.

□

CAPITULO 3

O Sistema Não Linear

Nesta seção analisaremos a existência, unicidade e o comportamento assintótico das soluções do problema

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + av_{xxx} + uu_x + vv_x + (uv)_x + \lambda(x)u &= 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t + v_x + v_{xxx} + au_{xxx} + vv_x + uu_x + (uv)_x + \lambda(x)v &= 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \\ u_x(L, t) = v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v_0(x, 0) &= v_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < L\}$ e

$$\lambda \in L^\infty(\Omega), \lambda(x) \geq \lambda_0 > 0 \text{ q.s. em } \omega$$

sendo ω um subconjunto aberto não vazio de Ω .

Observemos que a energia associada a (3.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx \tag{3.2}$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \lambda(x)(u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx - \frac{(1-a)}{2} [u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)] \leq 0, \tag{3.3}$$

ou seja, E é uma função não crescente. De fato, (3.3) é obtida como no caso linear e observando que

$$\int_0^L (u^2 u_x + v^2 v_x) dx dt = 0$$

$$\int_0^L v(uv)_x dx dt = - \int_0^L uvv_x dx dt$$

$$\int_0^L u(uv)_x dx dt = - \int_0^L vu u_x dx dt.$$

3.1 Existência e Unicidade

Teorema 3.1 (*Existência Local e Unicidade*) Sejam $(u_0, v_0) \in H$ e $0 < a < 1$. Então, existe $T_0 > 0$ e um único par de funções (u, v) , tal que

$$u, v \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega)), \quad (3.4)$$

solução de (3.1).

Para demonstrar o Teorema 3.1, precisaremos da seguintes notações e proposição:

Seja $T > 0$ e considere o conjunto de funções

$$X(T) = L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$$

munido da norma

$$\| V \|_{X(T)} = \| V \|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} + \| V \|_{L^\infty(0, T; H)}.$$

Proposição 3.1. Seja J solução do problema

$$\begin{aligned} J_t + QJ_x + DJ_{xxx} + \lambda J &= \tilde{F}, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ J(0, t) &= J(L, t) = 0, \quad \text{para } 0 < t < T \\ J_x(L, t) &= 0, \quad \text{para } 0 < t < T \\ J(x, 0) &= 0, \quad \text{para } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\tilde{F} = \tilde{F}(x, t)$,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

1) Se $J \in X(T)$, $G(J) \in L^1(0, T; H)$ e a aplicação $J \longrightarrow G(J)$ é continua,

$$\text{onde } G(U) = -(F(U))_x = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 + 2uv \\ u^2 + v^2 + 2uv \end{pmatrix}_x \text{ e } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

2) Se $\tilde{F} \in L^1(0, T; H)$, a solução de (3.5) pertence a $C([0, T]; H)$ e $L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$. Além disso, a aplicação linear

$$L^1(0, T; H) \longrightarrow C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$$

$$\tilde{F} \longmapsto J$$

é contínua.

Demonstração.

1) Sejam $J, W \in X(T)$ onde $J = (J_1, J_2)$ e $W = (w_1, w_2)$. Segue da desigualdade triangular e da desigualdade de Holder que

$$\begin{aligned} \|G(J) - G(W)\|_{L^1(0, T; H)} &= \int_0^T \|G(J(t)) - G(W(t))\|_H dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^T \|J_1 J_{1,x} + J_2 J_{2,x} + J_{1,x} J_2 + J_1 J_{2,x} - w_1 w_{1,x} - w_2 w_{2,x} - w_{1,x} w_2 - w_1 w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^T \|J_1(J_{1,x} - w_{1,x}) + w_{1,x}(J_1 - w_1) + J_2(J_{2,x} - w_{2,x}) + w_{2,x}(J_2 - w_2) \\ &\quad + J_1(J_{2,x} - w_{2,x}) + w_{2,x}(J_1 - w_1) + J_2(J_{1,x} - w_{1,x}) + w_{1,x}(J_2 - w_2)\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^T \{\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|J_{1,x} - w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} \|J_1 - w_1\|_{L^\infty(\Omega)}\} dt \\ &\quad + \sqrt{2} \int_0^T \{\|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|J_{2,x} - w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} \|J_2 - w_2\|_{L^\infty(\Omega)}\} dt \\ &\quad + \sqrt{2} \int_0^T \{\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|J_{2,x} - w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} \|J_1 - w_1\|_{L^\infty(\Omega)}\} dt \\ &\quad + \sqrt{2} \int_0^T \{\|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|J_{1,x} - w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} \|J_2 - w_2\|_{L^\infty(\Omega)}\} dt \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^T \left\{ \left(\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|J_2\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \left(\|J_{1,x} - w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|J_{2,x} - w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right\} dt \\ &\quad + \sqrt{2} \int_0^T \left\{ \left(\|J_1 - w_1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|J_2 - w_2\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \left(\|w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\sqrt{2} \left(\int_0^T \left(\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|J_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) dt \right)^{1/2} \times \\
&\quad \left(\int_0^T \left(\|J_{1,x} - w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|J_{2,x} - w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \right)^{1/2} \\
&\quad + 2\sqrt{2} \left(\int_0^T \left(\|J_1 - w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|J_2 - w_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) dt \right)^{1/2} \times \\
&\quad \left(\int_0^T \left(\|w_{1,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w_{2,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \right)^{1/2} \\
&\leq 2\sqrt{2} \|J\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))} \|J - W\|_{X(T)} + 2\sqrt{2} \|J - W\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))} \|W\|_{X(T)}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg temos que existe uma constante $\gamma > 0$, tal que

$$\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \gamma \|h\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|h_x\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|J\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))}^2 &= \int_0^T \left[\|J_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|J_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right] dt \\
&\leq \gamma^2 \int_0^T \left[\|J_1\|_{L^2(\Omega)} \|J_{1,x}\|_{L^2(\Omega)} + \|J_2\|_{L^2(\Omega)} \|J_{2,x}\|_{L^2(\Omega)} \right] dt \\
&\leq \gamma^2 \left(\int_0^T \|J_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|J_{1,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\quad + \gamma^2 \left(\int_0^T \|J_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|J_{2,x}\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq \gamma^2 T^{1/2} \{ \|J_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|J_1\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\quad + \|J_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|J_2\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \} \\
&\leq \gamma^2 T^{1/2} \|J\|_{L^\infty(0,T;H)} \|J\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} \\
&\leq \frac{1}{2} \gamma^2 T^{1/2} \|J\|_{X(T)}^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|J\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega))} \leq \frac{\gamma T^{1/4}}{\sqrt{2}} \|J\|_{X(T)}.$$

Analogamente, obtemos que

$$\|J - W\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega)\times L^\infty(\Omega))} \leq \frac{\gamma T^{1/4}}{\sqrt{2}} \|J - W\|_{X(T)}.$$

Assim, retornando a (3.6) obtém-se

$$\begin{aligned} \|G(J) - G(W)\|_{L^1(0,T;H)} &\leq 2\gamma T^{1/4} \|J\|_{X(T)} \|J - W\|_{X(T)} \\ &\quad + 2\gamma T^{1/4} \|J - W\|_{X(T)} \|W\|_{X(T)} \\ &\leq 2\gamma T^{1/4} \left(\|J\|_{X(T)} + \|W\|_{X(T)} \right) \|J - W\|_{X(T)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Logo, G é contínua e fazendo $W \equiv 0$ obtemos que $G(J) \in L^1(0, T; H)$.

2) Seja $\tilde{F} \in L^1(0, T; H)$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo associado à parte linear do problema.

Como

$$\|S(t-s)\tilde{F}(\cdot, s)\|_H \leq \|\tilde{F}(\cdot, s)\|_H$$

e

$$\|\tilde{F}(\cdot, s)\|_H \in L^1(0, T),$$

segue-se do Teorema de Lebesgue que $S(t-s)\tilde{F}(\cdot, s) \in L^1(0, T)$. Consequentemente,

$$J \in C([0, T]; H)$$

onde $J(t) = \int_0^t S(t-s)\tilde{F}(\cdot, s)ds$ é a solução fraca de (3.5). Além disso, para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|J(\cdot, t)\|_H &= \left\| \int_0^t S(t-\tau)\tilde{F}(\cdot, \tau)d\tau \right\|_H \\ &\leq \int_0^t \|\tilde{F}(\cdot, \tau)\|_H d\tau \leq \|\tilde{F}\|_{L^1(0,T;H)}. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação linear

$$\begin{aligned}\Theta : L^1(0, T; H) &\longrightarrow C([0, T]; H), & U &\in X(T) \\ \tilde{F} &\longrightarrow J\end{aligned}$$

é continua, pois

$$\begin{aligned}\|J\|_{C([0, T]; H)} &= \sup_{t \in [0, T]} \|J(t, \cdot)\|_H \\ &\leq \left\| \tilde{F} \right\|_{L^1(0, T; H)}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Logo, para mostrar que esta aplicação está bem definida e é continua de $L^1(0, T; H)$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, é suficiente provar que para todo elemento $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \in L^1(0, T; H)$, existe $C_2 > 0$, tal que

$$\|J_x\|_{L^2(0, T; H)} \leq C_2 \left\| \tilde{F} \right\|_{L^1(0, T; H)}.\tag{3.9}$$

De fato, multiplicando a primeira equação em (3.5) por xJ_1 , a segunda por xJ_2 e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L (J_{1,x} + J_{2,x}) dx dt &= -\frac{1}{2} \int_0^L x (J_1^2(x, T) + J_2^2(x, T)) dx + \frac{1}{2} \int_0^L x (J_1^2(x, 0) + J_2^2(x, 0)) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T x (J_{1,x}^2 + J_{2,x}^2)(0, t) dt - 2a \int_0^T \int_0^L J_{1,x} J_{2,x} dx dt \\ &\quad + a \int_0^T \int_0^L x (J_{1,x} J_{2,xx} + J_{2,x} J_{1,xx}) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L J_2^2 dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L x \lambda(x) (J_1^2 + J_2^2) dx dt + \int_0^T \int_0^L \tilde{F}_1 J_1 x dx dt + \int_0^T \int_0^L \tilde{F}_2 J_2 x dx dt.\end{aligned}$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 2.1.1, a estimativa acima, a desigualdade de Hölder e (3.8) nos permitem concluir que

$$\begin{aligned}
(1-a) \int_0^T \int_0^L (J_{1,x}^2 + J_{2,x}^2) dx dt &\leq \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L (J_1^2 + J_2^2) dx dt \\
&\quad + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L \tilde{F}_1 J_1 dx dt + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L \tilde{F}_2 J_2 dx dt \\
&\leq \frac{1}{3} \int_0^T \|J(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\quad + \frac{2L}{3} \int_0^T [\|\tilde{F}_1\|_{L^2(\Omega)} \|J_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)} \|J_2\|_{L^2(\Omega)}] dt \\
&\leq \frac{1}{3} \int_0^T \|J(\cdot, t)\|_H^2 dt \\
&\quad + \frac{2L}{3} \int_0^T \left(\|\tilde{F}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \times \\
&\quad \left(\|J_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|J_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} dt \\
&\leq \frac{1}{3} \|J\|_{C([0,T];H)}^2 \int_0^T dt \\
&\quad + \frac{2L}{3} \|J\|_{C([0,T];H)} \int_0^T \|\tilde{F}\|_H dt \\
&\leq \frac{T}{3} \|\tilde{F}\|_{L^1(0,T;H)}^2 + \frac{2}{3} L \|\tilde{F}\|_{L^1(0,T;H)}^2 \\
&\leq \frac{1}{3} (T + 2L) \|\tilde{F}\|_{L^1(0,T;H)}^2.
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_0^T \int_0^L (J_{1,x}^2 + J_{2,x}^2) dx dt \leq \frac{(T + 2L)}{3(1-a)} \|\tilde{F}\|_{L^1(0,T;H)}^2,$$

o que completa a demonstração.

□

Demonstração do Teorema 3.1:

Definimos a aplicação

$$P : X(T) \longrightarrow L^\infty(0, T; H)$$

dada por

$$P(U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds$$

onde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o semigrupo associado à parte linear da equação. Inicialmente, observe que, de acordo com os resultados da Seção 2, segue-se que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\| S(t)U_0 \|_H \leq \| U_0 \|_H \quad (3.10)$$

$$\| S(\cdot)U_0 \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} \leq D(T) \| U_0 \|_H, \quad (3.11)$$

para todo $T > 0$, onde $D(T) = \sqrt{T + \frac{(T+L)}{3(1-a)}}$. Com isso, temos que:

Para provar a existência e unicidade local del sistema (3.1), procedemos em dos pasos.

- P aplica $X(T)$ em $X(T)$ continuamente.

$$\begin{aligned} \| S(\cdot)U_0 \|_{X(T)} &= \| S(\cdot)U_0 \|_{L^\infty(0,T;H)} + \| S(\cdot)U_0 \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} \\ &\leq (1 + D(T)) \| U_0 \|_H. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por outro lado, pela Proposição 3.1, segue que a aplicação que a cada $U \in X(T)$ associa $G(U) \in L^1(0, T; H)$ é contínua. O mesmo acontece com a aplicação que a cada $\tilde{F} \in L^1(0, T; H)$ associa $J \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H) \subseteq X(T)$, o que mostra que P aplica continuamente $X(T)$ em si mesmo.

- P é uma contração numa bola adequada de $X(T)$ em si mesma quando T é suficientemente pequeno.

De fato, sejam $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ elementos de $X(T)$. De (3.10), (3.11) e (3.7) obtém-se

$$\begin{aligned}
\|P(U) - P(V)\|_{L^\infty(0,T;H)} &= \\
&= \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t S(t-s) [G(U(s)) - G(V(s))] ds \right\|_H \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|S(t-s) [G(U(s)) - G(V(s))]\|_H ds \\
&\leq \int_0^T \|G(U(s)) - G(V(s))\|_H ds \\
&= \|G(U) - G(V)\|_{L^1(0,T;H)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\|P(U) - P(V)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} &= \left\| \int_0^t S(\cdot)(G(U(\tau)) - G(V(\tau))) d\tau \right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} \\
&\leq \int_0^t \|S(\cdot)(G(U(\tau)) - G(V(\tau)))\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))} d\tau \\
&\leq D(T) \int_0^T \|G(U(\tau)) - G(V(\tau))\|_H d\tau \\
&= D(T) \|G(U) - G(V)\|_{L^1(0,T;H)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.13) e (3.14), obtemos

$$\|P(U) - P(V)\|_{X(T)} \leq \max \{1, D(T)\} \|G(U) - G(V)\|_{L^1(0,T;H)}$$

e, consequentemente, por (3.7)

$$\|P(U) - P(V)\|_{X(T)} \leq \max \{1, D(T)\} 2\gamma T^{1/4} \left(\|U\|_{X(T)} + \|V\|_{X(T)} \right) \|U - V\|_{X(T)}.$$

Considerando

$$B_R = \left\{ U \in X(T); \|U\|_{X(T)} \leq R \right\}.$$

Isto mostra que P é uma contração em uma bola B_R de $X(T)$ se

$$\max \{1, D(T)\} 4\gamma T^{1/4} R < 1.$$

Para concluir precisamos provar que para certa escolha de R y T suficientemente pequeno que satisfaga la desigualdade anterior a aplicação P aplique B_R em si mesma.

Como

$$\|P(U)\|_{X(T)} \leq \|P(0)\|_{X(T)} + \|P(U) - P(0)\|_{X(T)},$$

tomando $V = 0$ e $U \in B_R$ na desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \|P(U)\|_{X(T)} &\leq \|S(\cdot)U_0\|_{X(T)} + \max \{1, D(T)\} 2\gamma T^{1/2} \|U\|_{X(T)} R \\ &\leq (1 + D(T)) \|U_0\|_H + \max \{1, D(T)\} 2\gamma T^{1/4} \|U\|_{X(T)} R. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo $R = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1+L}{1-a}}\right) \|U_0\|_H$ deduzimos que

$$\begin{aligned} \|P(U)\|_{X(T)} &\leq \\ &\leq \left(1 + D(T) + \max \{1, D(T)\} 2\gamma T^{1/4} \|U\|_{X(T)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1+L}{1-a}}\right)\right) \|U_0\|_H. \end{aligned}$$

Para garantir que o lado direito da desigualdade acima é menor que R , escolhemos um T pequeno, tal que

$$D(T) + \max \{1, D(T)\} 2\gamma T^{1/4} \|U\|_{X(T)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1+L}{1-a}}\right) < \sqrt{1 + \frac{1+L}{1-a}},$$

onde $D(T)$ é dado por $\sqrt{T + \frac{T+L}{3(1-a)}}$. Isto sempre é possível.

Assim, logo de usar o Teorema do Ponto fixo concluimos la demonstracao.

□

Teorema 3.2 (*Existência Global e Unicidade*) Sejam $(u_0, v_0) \in H$ e (u, v) a solução do sistema (3.1) obtida no Teorema 3.1. Então,

$$u \text{ e } v \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, \infty; H^1_0(\Omega)). \text{ e } (u, v) \text{ satisfaz}$$

o sistema (3.1).

Demonstração.

A unicidade é provada segundo o modo padrão, usando a desigualdade de Gronwall. Faremos alguns cálculos prévios que serão utilizados, não só na demonstração desse fato, mas também nas etapas seguintes.

Sejam (u, v) e (z, w) duas soluções de (3.1) correspondendo aos dados iniciais (u_0, v_0) e (z_0, w_0) . Defina $\phi := u - z$ e $\psi := v - w$. Então, ϕ e ψ são tais que

$$\phi \text{ e } \psi \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$$

e satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} \phi_t + \phi_{xxx} + a\psi_{xxx} + (uu_x - zz_x) + (vv_x - ww_x) + (uv - zw)_x + \lambda(x)\phi &= 0 \\ \psi_t + \psi_x + \psi_{xxx} + a\phi_{xxx} + (vv_x - ww_x) + (uu_x - zz_x) + (uv - zw)_x + \lambda(x)\psi &= 0 \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = \phi_x(L, t) &= 0 \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = \psi_x(L, t) &= 0 \\ \phi(x, 0) = u_0(x) - z_0(x) = \phi_0(x), \psi(x, 0) = v_0(x) - w_0(x) &= \psi_0(x), \end{aligned}$$

$x \in (0, L)$ e $t > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \phi_t + \phi_{xxx} + a\psi_{xxx} + u\phi_x + z_x\phi + v\psi_x + \psi w_x + (\phi v + z\psi)_x + \lambda(x)\phi &= 0 \\ \psi_t + \psi_x + \psi_{xxx} + a\phi_{xxx} + v\psi_x + \psi w_x + u\phi_x + z_x\phi + (\phi v + z\psi)_x + \lambda(x)\psi &= 0 \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = \phi_x(L, t) &= 0 \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = \psi_x(L, t) &= 0 \\ \phi(x, 0) = u_0(x) - z_0(x) = \phi_0(x), \psi(x, 0) = v_0(x) - w_0(x) &= \psi_0(x), \end{aligned} \tag{3.15}$$

$x \in (0, L)$ e $t > 0$,

Logo, multiplicando a primeira equação de (3.15) por ϕ , a segunda equação por ψ e integrando em $(0, L) \times (0, T)$ obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L (\phi^2 + \psi^2) dt + \int_0^T (\phi_x^2(0, t) + \psi_x^2(0, t) + a\phi_x(0, t)\psi_x(0, t)) dx dt \\ + \int_0^L \int_0^T \lambda(x) (\phi^2(x, t) + \psi^2(x, t)) dx dt = \frac{1}{2} \int_0^L (\phi_0^2 + \psi_0^2) dt + \int_0^T \int_0^L z\phi\phi_x dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_0^L w \psi \psi_x dx dt - \int_0^T \int_0^L u \psi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L w \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L w \psi \phi_x dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L z \psi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L z \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L v \phi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L z \psi \phi_x dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L z \psi \psi_x dx dt,
\end{aligned}$$

ou então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^T (\phi^2 + \psi^2) dt & \leq \frac{1}{2} \int_0^T (\phi_0^2 + \psi_0^2) dt + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z \phi \phi_x| dx dt}_i + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w \psi \psi_x| dx dt}_{ii} \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |u \psi \phi_x| dx dt}_{iii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w \phi \psi_x| dx dt}_{iv} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w \psi \phi_x| dx dt}_v \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z \psi \phi_x| dx dt}_{vi} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z \phi \psi_x| dx dt}_{vii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |v \phi \phi_x| dx dt}_{viii} \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z \psi \phi_x| dx dt}_{ix} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z \psi \psi_x| dx dt}_x.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young e Holder em (i) deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L |z \phi \phi_x| dx dt & \leq \int_0^T \left(\int_0^L |z \phi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
& = \int_0^T \|z \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^T \|z \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right] \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^T \|z\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right].
\end{aligned}$$

Fazendo um cálculo similar, garantimos que os demais termos de (3.16) podem ser estimados de maneira análoga. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^L (\phi^2(x, T) + \psi^2(x, T)) dx &\leq \int_0^L (\phi_0^2(x) + \psi_0^2(x)) dt \\
&+ C \int_0^T \left[\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|z\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad \times \left[\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \\
&+ \tilde{C} \int_0^T \left(\|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde C e $\tilde{C}$ são constantes positivas. Agora, multiplicando a primeira equação de (3.15) por $x\phi$, a segunda equação por $x\psi$ e integrando em $(0, L) \times (0, T)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^L x (\phi^2(x, T) + \psi^2(x, T)) dx - \frac{1}{2} \int_0^L x (\phi_0^2 + \psi_0^2) dx - \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L (\phi_x^2 + \psi_x^2) dx dt \\
&+ 3a \int_0^T \int_0^L \phi_x \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (\phi^2 + \psi^2) dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\phi^2 + \psi^2) dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L x u \phi \phi_x dx dt - \int_0^T \int_0^L x v \psi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L z \phi^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^L x z \phi \phi_x dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L w \psi^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^L x w \psi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L x v \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L x u \psi \phi_x dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L w \phi \psi dx dt + \int_0^T \int_0^L x w \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L x w \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L z \phi \psi dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L x z \psi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L x z \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L v \phi^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L x v \phi \phi_x dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L z \psi \phi dx dt + \int_0^T \int_0^L x z \psi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L x z \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L v \phi^2 dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L x v \phi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L z \psi \phi dx dt + \int_0^T \int_0^L x z \psi \phi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L v \psi \phi dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L z \psi^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L x v \phi \psi_x dx dt + \int_0^T \int_0^L x z \psi \psi_x dx dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L (\phi_x^2 + \psi_x^2) dx dt \leq \\
& \leq \beta \left[\int_0^T \int_0^L (\phi_0^2 + \psi_0^2) dx + \underbrace{\int_0^T \int_0^L (\phi^2 + \psi^2) dx dt}_i + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |u\phi\phi_x| dx dt}_i + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w\psi^2| dx dt}_{ii} \right. \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |v\psi\psi_x| dx dt}_{iii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\phi^2| dx dt}_{iv} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\phi\phi_x| dx dt}_v + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w\psi\psi_x| dx dt}_{vi} \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |v\phi\psi_x| dx dt}_{vii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |u\psi\phi_x| dx dt}_{viii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w\phi\psi| dx dt}_{ix} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w\psi\phi_x| dx dt}_x \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |w\phi\psi_x| dx dt}_{xi} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\phi\psi| dx dt}_{xii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\psi\phi_x| dx dt}_{xiii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\phi\psi_x| dx dt}_{xiv} \\
& + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |v\phi^2| dx dt}_{xv} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |v\phi\phi_x| dx dt}_{xvi} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |v\psi\phi| dx dt}_{xvii} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\psi^2| dx dt}_{xviii} \\
& \left. + \underbrace{\int_0^T \int_0^L |z\psi\psi_x| dx dt}_{xix} \right],
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $\beta = \frac{1}{1-a} \max \left\{ \frac{4}{3}L, 4 \right\}$.

Podemos estimar o termino (i) como segue

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L |u\phi\phi_x| dx dt & \leq \int_0^T \int_0^L |u\phi\phi_x| dx dt \leq \int_0^T \left(\int_0^L |u\phi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} dt \\
& \leq \int_0^T \|u\phi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^T \left[\|u\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \right] \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^T \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right]
\end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$. De forma similar estimamos os terminos *iii,v-viii, x, xi, xiii, xiv, xvi, xix*.

Aplicando a desigualdade de Poincaré em (ii) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |w\psi^2| dx dt &\leq \int_0^T \|w\psi\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^T \left[\|w\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^T \left[\|w\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta C_p \|\psi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^T \left[\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta C_p \|\psi_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \right] \end{aligned}$$

onde C_p denota a constante de Poincaré. Analogamente estimamos os termos *ii, iv, ix, xii, xv, xvii, xviii*, o que nos garante que

$$\begin{aligned} (1 - \delta C) \int_0^T \int_0^L (\phi_x^2 + \psi_x^2) dx dt &\leq \beta \int_0^L (\phi_0^2 + \psi_0^2) dx + \beta \int_0^T \int_0^L (\phi^2 + \psi^2) dx \\ &\quad + \tilde{C} \int_0^T \left[\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|z\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right] \times \\ &\quad \left[\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \end{aligned}$$

para constantes $C, \tilde{C} > 0$ e $\delta > 0$ pequeno, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (\phi_x^2 + \psi_x^2) dx dt &\leq C_0 \int_0^L (\phi_0^2 + \psi_0^2) dx \\ &\quad + \tilde{C}_0 \int_0^T \left[1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|z\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right] \times \\ &\quad \left[\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

para constantes $C_0, \tilde{C}_0 > 0$.

Substituindo (3.19) em (3.17) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L (\phi^2(x, T) + \psi^2(x, T)) dx &\leq C \int_0^L (\phi_0^2(x) + \psi_0^2(x)) dx \\ &\quad + \tilde{C}_0 \int_0^T \left[1 + \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|z\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right] \end{aligned}$$

$$\times \left[\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] dt (3.20)$$

para constantes $C, \tilde{C} > 0$.

Para provar a unicidade precisamos que os dados iniciais (u_0, v_0) e (z_0, w_0) sejam iguais, ou seja, $\phi_0 = \psi_0 = 0$. Aplicando o Lema de Gronwall a (3.20) e usando a desigualdade de Poincaré, concluímos que $\|\phi(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, $t \in (0, T)$. Logo, $\phi \equiv \psi \equiv 0$ e, conseqüentemente, $u = z$ e $v = w$.

Segue do Teorema 3.1 que podemos estender a solução (u, v) a um intervalo máximo de existência $0 < T < T_{max}$. Precisamos provar que $T_{max} = +\infty$.

Seja $T > 0$, tal que $0 < T < T_{max}$. Encontremos cotas para a solução (u, v) no intervalo $0 \leq t < T$. Antes disso, observe que os termos

$$\int_0^T u_x^2(0, t) dt \quad \text{e} \quad \int_0^T v_x^2(0, t) dt$$

apareceram seguido em nossos cálculos e por isso precisamos justificar que $u_x(0, t)$ e $v_x(0, t)$ fazem sentido e pertencem a $L^2(\Omega)$. Pelo Teorema 3.1 sabemos que a solução $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ pertence a $X(T)$, satisfaz $U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-\tau)G(U(\tau))d\tau$ e $G(U) \in L^1(0, T; H)$. Consideremos a sequência $\{U_0^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(M)$, tal que

$$U_0^n \longrightarrow U_0 \text{ em } H, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $U^n(t)$ a solução de (3.1) com condição inicial U_0^n (veja observação no final da demonstração e [13]). Para esta solução sabemos que a diferenciação da energia

$$E(U^n(t)) = \frac{1}{2} \|U^n(t)\|_H^2$$

nos dá a identidade

$$\frac{d}{dt} E(U^n)(t) = - \int_0^L \lambda(x) (u_n^2 + v_n^2) dx - \frac{1}{2} [u_{n,x}^2(0, t) + v_{n,x}^2(0, t) + 2au_{n,x}(0, t)v_{n,x}(0, t)]$$

onde $U^n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Como $0 < a < 1$, se integramos a identidade acima de 0 a T , obtemos

$$\begin{aligned} E(U^n)(T) - E(U^n)(0) &\leq \\ &\leq \left(\frac{a-1}{2}\right) \int_0^T [u_{n,x}^2(0,t) + v_{n,x}^2(0,t)] - \int_0^T \int_0^L \lambda(x) (u_n^2(x,t) + v_n^2(x,t)) dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para simplificar a notação, omitiremos o índice n .

O próximo passo é obter estimativas uniformes (da solução) com respeito a n . Novamente, multiplicamos a primeira equação do modelo (3.1) por xu , a segunda por xv e integraremos em $(0, L) \times (0, T)$. Por isso, as seguintes identidades serão necessárias:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L xuv_{xxx} dx dt &= \int_0^T [(xu)v_{xx} |_0^L - \int_0^L (xu)_x v_{xx} dx] dt = - \int_0^T \int_0^L (u + xu_x) v_{xx} dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^L (uv_{xx} + xu_x v_{xx}) dx dt = - \int_0^T [uv_x |_0^L - \int_0^L u_x v_x dx] dt - \int_0^T \int_0^L xu_x v_{xx} dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt - \int_0^T \int_0^L xu_x v_{xx} dx dt \\ \int_0^T \int_0^L (xuv_{xxx} + xv u_{xxx}) dx dt &= 2 \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt - \int_0^T \int_0^L x(u_x v_{xx} + v_x u_{xx}) dx dt \\ &= 2 \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt - \int_0^T \int_0^L x(u_x v_x)_x dx dt \\ &= 2 \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt - \int_0^T [xu_x v_x |_0^L - \int_0^L u_x v_x dx] dt \\ &= 3 \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L x \left(\frac{u^3 + v^3}{3} \right)_x dx dt &= \int_0^T \left[x \left(\frac{u^3 + v^3}{3} \right) |_0^L - \int_0^L \left(\frac{u^3 + v^3}{3} \right) dx \right] dt \\ &= - \int_0^T \left(\frac{u^3 + v^3}{3} \right) dx dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L x [(uv)(u+v)]_x dx dt &= \int_0^T [x(uv)(u+v) \Big|_0^L - \int_0^L (uv)(v+u) dx] dt \\
&= - \int_0^T \int_0^L (uv)(v+u) dx dt = - \int_0^T \int_0^L (uv^2 + u^2v) dx dt. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Logo, considerando as identidades acima e aquelas obtidas para o problema linear deduzimos que u e v satisfazem a identidade

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \int_0^L x(u^2(x, T) + v^2(x, T)) dx + \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L \lambda(x) x(u^2 + v^2) dx dt \\
&= \frac{1}{3} \int_0^L x(u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt - 2a \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt \\
&\quad + \frac{2}{9} \int_0^L (u^3 + v^3) dx + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L (u^2 v + v^2 u) dx dt
\end{aligned}$$

e como $-2a \int_0^T \int_0^L u_x v_x dx dt \leq a \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx + a \int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt$, segue que

$$\begin{aligned}
(1-a) \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt &\leq -\frac{1}{3} \int_0^L x(u^2(x, T) + v^2(x, T)) dx - \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L \lambda(x) x(u^2 + v^2) dx dt \\
&\quad + \frac{1}{3} \int_0^L x(u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L v^2 dx dt + \frac{2}{9} \int_0^L (u^3 + v^3) dx \\
&\quad + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L (u^2 v + v^2 u) dx dt. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Além disso, como $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L |u^3| dx dt &\leq \int_0^T \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^L |u|^2 dx dt \leq C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \int_0^L (u^2 + v^2) dx dt \\
&= C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} 2E(t) dt \leq C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} 2E(0) dt \\
&= 2E(0) C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} dt \leq 2C_0 E(0) \left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2C_0E(0)T^{1/2} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} = 2 \left(\frac{C_0E(0)2T^{1/2}}{\sqrt{3\delta}} \right) \left(\frac{\sqrt{3\delta}}{2} \|u\| \right) \\
&\leq \frac{C_0^2E^2(0)4T}{3\delta} + \frac{3\delta}{4} \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (u^3 + v^3) dx dt &\leq \int_0^T \int_0^L |u^3 + v^3| dx dt \leq \int_0^T \int_0^L |u|^3 dx dt + \int_0^T \int_0^L |v|^3 dx dt \\
&\leq \frac{C_0^2E^2(0)4T}{3\delta} + \frac{3\delta}{4} \|u\|^2 + \frac{C_0^2E^2(0)4T}{3\delta} + \frac{3\delta}{4} \|v\|^2 \\
&\leq \frac{C_0^2E^2(0)8T}{3\delta} + \frac{3\delta}{4} \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right) \\
&= \frac{C_0^2T2}{3\delta} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^2 + \frac{3\delta}{4} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \\
&\leq \frac{4C_0^2T}{3\delta} (\|u_0\|^4 + \|v_0\|^4) + \frac{3\delta}{4} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Usando argumentos similares, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L |u^2v| dx dt &\leq \int_0^T \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^L |uv| dx dt \leq C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \int_0^L |uv| dx dt \\
&\leq C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L v^2 dx \right)^{1/2} dt \\
&= C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} \right) dt \\
&= C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} E(t) dt \leq C_0 \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} E(0) dt \\
&\leq C_0 E(0) \left(\int_0^T 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \leq C_0 E(0) \sqrt{T} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (vu^2 + uv^2) dx dt &\leq CE(0)\sqrt{T} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + CE(0)\sqrt{T} \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&= 2 \left(\frac{C\sqrt{T}E(0)}{\sqrt{\delta}} \right) \left(\frac{\sqrt{\delta}}{2} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right) \\
&\quad + 2 \left(\frac{C\sqrt{T}E(0)}{\sqrt{\delta}} \right) \left(\frac{\sqrt{\delta}}{2} \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right) \\
&\leq \frac{C^2TE^2(0)}{\delta} + \frac{\delta}{4} \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{C^2TE^2(0)}{\delta} + \frac{\delta}{4} \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \\
&= \frac{C^2T}{2\delta} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^2 + \frac{\delta}{4} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \\
&\leq \frac{C^2T}{\delta} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) + \frac{\delta}{4} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Retornando à desigualdade (3.25) e substituindo (3.26) e (3.27) obtemos

$$\begin{aligned}
(1-a) \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt &\leq \frac{1}{3} \int_0^L x(u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2) dx dt \\
&\quad + \left(\frac{8C^2T}{27\delta} + \frac{2C^2T}{3\delta} \right) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \\
&\quad + \frac{\delta}{3} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \\
&= \frac{1}{3} \int_0^L x(u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{2}{3} \int_0^T E(t) dt \\
&\quad + \left(\frac{8C^2T}{27\delta} + \frac{2C^2T}{3\delta} \right) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \\
&\quad + \frac{\delta}{3} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \\
&\leq \frac{L}{3} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x)) dx + \frac{2}{3} \int_0^T E(0) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{8C^2T}{27\delta} + \frac{2C^2T}{3\delta} \right) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \\
& + \frac{\delta}{3} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \\
& = \frac{(L+T)}{3} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& + \left(\frac{8C^2T}{27\delta} + \frac{2C^2T}{3\delta} \right) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \\
& + \frac{\delta}{3} \|(u, v)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a desigualdade de Poincaré temos que existe $C_1 > 0$, satisfazendo

$$C_1 \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right) \leq \int_0^T \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx dt,$$

o que nos garante que

$$\begin{aligned}
C_1(1-a) \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right) & \leq \frac{(L+T)}{3} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& + \frac{C^2T}{\delta} \left(\frac{8}{27} + \frac{2}{3} \right) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \\
& + \frac{\delta}{3} (\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\left[C_1(1-a) - \frac{\delta}{3} \right] \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right) & \leq \frac{(L+T)}{3} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& + \frac{C^2T}{\delta} \frac{26}{27} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right).
\end{aligned}$$

Agora, tomamos $\delta > 0$, tal que $0 < \frac{\delta}{3} < C_1(1-a)$. Para $\delta > 0$ fixado, escolhemos

$$C_2 = \left[C_1(1-a) - \frac{\delta}{3} \right]^{-1} \text{ obtendo assim}$$

$$\begin{aligned}
\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right) & \leq C_2 \frac{(L+T)}{3} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& + C_2 \frac{C^2T}{\delta} \frac{26}{27} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^4 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^4 \right). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Retornando à notação original obtemos que $\{U^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$ e como consequência temos que

$$\{U_x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H) \quad (3.29)$$

$$\{U_t^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } H^{-1}(0, T; H) \quad (3.30)$$

$$\{G(U^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^1(0, T; H). \quad (3.31)$$

Como $U^n(t)$ resolve o sistema

$$DU_{xxx}^n = -U_t^n - QU_x^n - G(U^n) - \lambda(x)U^n \quad (3.32)$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(U^n) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_n^2 + v_n^2 + 2u_nv_n \\ v_n^2 + u_n^2 + 2u_nv_n \end{pmatrix}_x,$$

de (3.29), (3.30) e (3.31) temos que $\{DU_{xxx}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^{-1}(0, T; H)$, o que implica que $\{U^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^{-1}(0, T; H^3(\Omega) \times H^3(\Omega))$. Em particular,

$$\{U_x^n(0, t)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } H^{-1}(0, T) \times H^{-1}(0, T),$$

já que para $t \in (0, T)$ temos que $u_{n,x}(\cdot, t), v_{n,x}(\cdot, t) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C([0, L])$. Assim, podemos obter uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo índice n , tal que

$$U_x^n(0, t) \rightharpoonup U_x(0, t) \text{ em } H^{-1}(0, T) \times H^{-1}(0, T), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.33)$$

Por outro lado, de (3.21) sabemos que

$$\{u_{n,x}(0, t)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } \{v_{n,x}(0, t)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^2(0, T).$$

Assim, podemos extrair uma subsequência que será convergente, no sentido fraco, em $L^2(0, T)$. Esse fato juntamente com a discussão anterior, mostra que

$$u_{n,x}(0, t) \rightharpoonup u_x(0, t) \text{ em } L^2(0, T), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$$v_{n,x}(0, t) \rightharpoonup v_x(0, t) \text{ em } L^2(0, T), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, a semicontinuidade inferior da norma implica que

$$\begin{aligned}
\int_0^T [|u_x(0,t)|^2 + |v_x(0,t)|^2] dt &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_0^T [|u_{n,x}(0,t)|^2 + |v_{n,x}(0,t)|^2] dt \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a} \{E(U_0^n) - E(U^n(T))\} \\
&= \frac{1}{1-a} \{E(U_0) - E(U(T))\} \leq \frac{1}{1-a} E(U_0) < \infty.
\end{aligned}$$

A desigualdade acima prova que $u_x(0,t)$ e $v_x(0,t)$ existem e pertencem a $L^2(0,T)$.

Agora, observe que (3.29)-(3.31) combinadas com o Lema de Aubin-Lions nos garantem que existe uma subsequência de $\{U^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que denotaremos pelo mesmo índice n , e uma função $V \in C([0,T]; H)$, tal que

$$U^n \rightharpoonup V, \text{ em } L^2(0,T, H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$U^n \longrightarrow V, \text{ em } L^2(0,T, H), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde V é solução fraca de (3.32). Por unicidade concluímos que $U = V$. Também temos que

$$E(U^n)(T) - E(U^n)(0) \longrightarrow E(U)(T) - E(U)(0), \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

A discussão acima nos diz que podemos passar o limite em ambos lados de (3.21). Por isso, temos que a solução $U = (u, v)$ do sistema (3.1) com condição inicial $(u_0, v_0) \in H$ satisfaz

$$E(U(T)) - E(U_0) \leq -\frac{(1-a)}{2} \int_0^T (u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)) dt - \int_0^L \int_0^T \lambda(x) (u^2(x,t) + v^2(x,t)) dx dt.$$

Em particular,

$$\|U\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \|U_0\|_H.$$

Além disso, voltando a (3.19) com as convergências acima e (3.28), concluímos que $\{U^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$. Portanto, podemos passar o limite em (3.28) e concluir que

$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2$ permanece limitada para $0 < T < T_{max}$.

Assim, $\|U\|_{X(T)}$ permanece limitada para $0 < T < T_{max}$. Este é o resultado que precisavamos para mostrar que $T_{max} = \infty$.

Observação: O modelo (3.1) também possui solução forte $u, v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, quando $(u_0, v_0) \in D(M)$ introduzido no Capítulo 2. O resultado é obtido derivando as equações com relação a t e usando estimativas a priori como em [13].

De fato, sejam $z = u_t$ e $w = v_t$. Então, (z, w) é solução do sistema

$$z_t + z_{xxx} + aw_{xxx} + (uz)_x + (vw)_x + (vz + uw)_x + \lambda(x)z = 0, \text{ em } (0, T)$$

$$w_t + w_x + w_{xxx} + az_{xxx} + (vw)_x + (uz)_x + (vz + uw)_x + \lambda(x)w = 0, \text{ em } (0, T),$$

com as condições de contornos verificadas por u e v e dados iniciais $(z_0, w_0) = (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) \in H$. Procedendo como na demonstração do Teorema 3.2 mostramos que $z, w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Como

$$DU_{xxx}^n(t) = -U_t^n(t) - QU_x^n(t) - G(U^n)(t) - \lambda U^n(t) \in H,$$

então $U(t) \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega)$.

3.2 Decaimento Exponencial

Nessa seção, mostraremos que as soluções de (3.1) decaem exponencialmente para zero. O resultado é obtido usando o método introduzido no Capítulo 2. Contudo, não é suficiente com aplicar só o Teorema de Unicidade de Holmgren já que, agora, estamos lidando com um sistema não linear. Para resolver esse problema, utilizaremos uma Propriedade de Continuação Única (PCU) para o sistema (3.1) que foi provada em [5] (veja também [13]).

Teorema 3.3 Seja (u, v) a solução global do problema (3.1)-(3.3) obtida no Teorema 3.2. Então, para qualquer $L > 0$ e $R > 0$ existem constantes positivas $C > 0$ e $\mu > 0$, tais que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\mu t}, \forall t \geq 0$$

com $(u_0, v_0) \in H$ satisfazendo $E(0) \leq R$. As constantes C e μ podem depender da R .

Demonstração. Multiplicamos a primeira equação de (3.1) por $(T - t)u$ e a segunda equação por $(T - t)v$. Integrando sobre $(0, L) \times (0, T)$ obtemos a identidade

$$\begin{aligned} \int_0^L T(u_0^2(x) + v_0^2(x))dx &= \int_0^L \int_0^T (u^2 + v^2)dxdt + \int_0^T (T - t)(u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t))dt \\ &\quad + 2a \int_0^T (T - t)u_x(0, t)v_x(0, t)dt + 2 \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(T - t)(u^2 + v^2)dxdt, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (T - t)(u^2 u_x + v^2 v_x)dxdt &= 0 \\ \int_0^T \int_0^L (T - t)v(uv)_x dxdt &= - \int_0^T \int_0^L (T - t)uvv_x dxdt \\ \int_0^T \int_0^L (T - t)u(uv)_x dxdt &= - \int_0^T \int_0^L (T - t)vuu_x dxdt. \end{aligned}$$

Então, da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L (u_0^2(x) + v_0^2(x))dx &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2)dxdt + (1 + a) \int_0^T (u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)) \\ &\quad + 2 \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2)dxdt. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Afirmamos que para qualquer $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante positiva $C_1 = C_1(R)$, tal que

$$\int_0^T \int_0^L (u^2 + v^2)dxdt \leq C_1 \left[\int_0^T [u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)] dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u^2 + v^2)dxdt \right] \quad (3.36)$$

para toda solução (u, v) de (3.1), tal que $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq R$. De fato, provaremos a validade de (3.36) por contradição. Suponhamos que (3.36) não se verifique. Então existe uma sequência de funções $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de soluções de (3.1) que pertencem ao espaço $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$, satisfazem

$$\|u_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq R$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2}{\int_0^T \{ |u_{n,x}(0,t)|^2 + |v_{n,x}(0,t)|^2 \} dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(u_n^2 + v_n^2) dx dt} = +\infty \quad (3.37)$$

Seja $\sigma_n = (\|u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2)^{1/2}$ e considere

$$z_n(\cdot, t) = \frac{1}{\sigma_n} \begin{pmatrix} u_n(\cdot, t) \\ v_n(\cdot, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n(\cdot, t) \\ w_n(\cdot, t) \end{pmatrix}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n(\cdot, t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} z_{n,t} + Qz_{n,x} + Dz_{n,xxx} + \sigma_n H(z_n)z_{n,x} + \lambda z_n &= 0 \text{ em } \Omega \times (0, T) \\ z_n(0, t) = z_n(L, t) = 0, \quad z_{n,x}(L, t) &= 0, \quad \forall t \in (0, T) \\ z_n(x, 0) &= z_{0,n}(x), \quad \text{em } \Omega, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H(z_n) = \begin{bmatrix} y_n + w_n & y_n + w_n \\ y_n + w_n & y_n + w_n \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\|z_n\|_{L^2(0,T;H)}^2 = 1 \quad (3.39)$$

e

$$\int_0^T \{ |y_{n,x}(0,t)|^2 + |w_{n,x}(0,t)|^2 \} dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x)(y_n^2 + w_n^2) dx dt \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

Multiplicando (3.35) por $\frac{1}{\sigma_n^2}$ e usando (3.35) segue que $z_n(\cdot, 0)$ é limitado em H . Consequentemente, procedendo como na demonstração do Teorema 3.2 obtemos uma constante $C > 0$, tal que

$$\|z_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))}^2 \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.41)$$

Observamos ainda que cada um das seguintes seqüências $\{y_n y_{n,x}\}$, $\{w_n w_{n,x}\}$ e $\{(y_n w_n)_x\}$ pertencem a $L^2(0, T; L^1(\Omega))$, por (3.41) deduzimos que

$$\|y_n y_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq \|y_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|y_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \quad (3.42)$$

$$\|w_n w_{n,x}\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq \|w_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} \|(y_n w_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} &\leq \|w_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|y_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\quad + \|y_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \end{aligned} \quad (3.44)$$

para alguma constante positiva C .

Também observamos que $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. De fato, como $\|u_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$, $\|v_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ e (u_n, v_n) é solução do problema original segue que $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Logo, segue de (3.38), (3.41), (3.42)-(3.44) que $\{z_{n,t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; H^{-2}(\Omega) \times H^{-2}(\Omega))$.

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$, sendo a primeira imersão compacta e a segunda contínua e densa, segue do Lema de Aubin-Lions que podemos extrair uma subsequência $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$z_k \longrightarrow z \text{ em } L^2(0, T; H), \text{ quando } k \longrightarrow \infty \quad (3.45)$$

$$z_k \rightharpoonup z \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)), \text{ quando } k \longrightarrow \infty \quad (3.46)$$

$$z_{k,t} \rightharpoonup z_t \text{ em } L^2(0, T; H^{-2}(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)), \text{ quando } k \longrightarrow \infty, \quad (3.47)$$

e por (3.39) obtemos

$$\|z\|_{L^2(0,T;H)} = 1. \quad (3.48)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left[\int_0^T |z_{n,x}(0, t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |z_n|^2 dx dt \right] \\ &\geq \int_0^T |z_x(0, t)|^2 dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(x) |z|^2 dx dt, \end{aligned}$$

o que implica que $\lambda(x)z \equiv 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Assim, $z \equiv 0$ em $\omega \times (0, T)$ e $z_x(0, t) = 0$ em $(0, T)$. Como $0 \leq \sigma_n$ e $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, temos dois casos a serem considerados:

- Existe uma subsequência $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\sigma_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$.

Neste caso, a função limite z satisfaz o problema linear

$$\begin{aligned} z_t + Qz_x + Dz_{xxx} &= 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z(0, t) = z(L, t) &= 0 & \forall t \in (0, T) \\ z_x(0, t) = z_x(L, t) &= 0 & \forall t \in (0, T) \\ z(x, t) &= 0 & \forall (x, t) \in \omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema de Unicidade de Holmgren, $z \equiv 0$ em $\Omega \times (0, T)$ o que contradiz (3.48).

- Existe uma subsequência $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\sigma_k \rightarrow \sigma > 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Neste caso, a função limite z resolve

$$\begin{aligned} z_t + Qz_x + Dz_{xxx} + \sigma H(z)z_x &= 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ z(0, t) = z(L, t) &= 0 & \forall t \in (0, T) \\ z_x(0, t) = z_x(L, t) &= 0 & \forall t \in (0, T) \\ z(x, t) &= 0 & \forall (x, t) \in \omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Assim, pela Propriedade de Continuação Única provada em [5] e o Teorema 2.2 de [13], temos que $z \equiv 0$ em $\Omega \times (0, T)$ e novamente, temos uma contradição com (3.48). Portanto, (3.36) é válido para alguma constante positiva $C_1 = C_1(R)$. Logo, temos

$$\int_0^L (u_0^2 + v_0^2) dx \leq C_3 \left[\int_0^T \{u_x^2(0, t) + v_x^2(0, t)\} dt + \int_0^T \int_0^L \lambda(u^2 + v^2) dx dt \right], \quad (3.49)$$

donde podemos tomar $C_3 = C_1 + 1 + 2a > \frac{C_1}{T} + 1 + a$ para $T \geq 1$.

Agora, como em (2.20), podemos concluir a demonstração deduzindo que

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \gamma_1 [\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}^2], \quad (3.50)$$

onde $\gamma_1 = \frac{C_3}{1 - a + C_3} < 1$.

Finalmente, (3.50) junto com a propriedade de Semigrupo implicam a conclusão do teorema.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A., Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.
- [2] E. Bisognin, V. Bisognin and G.P. Menzala, Exponential Stabilization of a Coupled System of Korteweg-de Vries Equations with Localized damping, Adv. Diff. Eq., 8 (2003), 443-469.
- [3] J. Bona, G. Ponce, J.C. Saut and M.M. Tom, A model system for strong interaction between internal solitary waves, Comm. Math. Phys., 143 (1992), 287-313.
- [4] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications. DUNOD, Paris, 1999.
- [5] M. Davila, On the unique continuation property for a coupled system of Korteweg-de Vries equations, PhD Thesis, Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, (1994).
- [6] L. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, 19, 1998.
- [7] J.A. Gear and R. Grimshaw, Weak and strong interaction between internal solitary waves, Stud. in Appl. Math., 70 (1984), 235-258.
- [8] A. M. Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [9] F. Linares and M. Panthee, On the Cauchy problem for a coupled system of KdV equations, Commun. Pure Appl. Anal., 3(3) (2004), 417-431.
- [10] F. Linares and A. F. Pazoto, On the exponential decay of the critical generalized Korteweg-de Vries equation with localized damping, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 1515-1522.
- [11] J. L. Lions and E. Magenes, Problèmes Aux Limites non Homogènes et Applications. Tome 1, Dunod, Paris, 1968.
- [12] J. L. Lions, Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites non Lineaires, Dunod, Paris, 1969.
- [13] C. P. Massarolo, G. P. Menzala and A. F. Pazoto, Exponential Stabilization of a coupled system of Korteweg-de Vries Equations with Localized damping, Quarterly of Appl. Math., To appear.

- [14] C. P. Massarolo and A. F. Pazoto, Uniform stabilization of a nonlinear coupled system of Korteweg-de Vries equation as a singular limit of the Kuramoto-Sivashinsky system, *Diff. and Int. Eq.* 22 (2009), 53-68.
- [15] L. A. Medeiros, & Milla M. M. A., *Introdução aos Espaços Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- [16] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro 1975.
- [17] G. P. Menzala, C. F. Vasconcellos and E. Zuazua, Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping, *Quarterly of Appl. Math.*, LX (2002), 111-129.
- [18] S. Micu e J. H. Ortega, On the contrabillity of a linear coupled system of Korteweg-de Vries equations, in *Mathematical and numerical aspects of wave propagation* (Santiago de Campostela, 2000), SIAM, Philadelphia, PA (2000), 1020-1024.
- [19] S. Micu, J. H. Ortega and A. F. Pazoto, On the controllability of a nonlinear coupled system of Korteweg-de Vries equations, *Commun. Contemp. Math.*, 11 (2009), 799-827
- [20] A. F. Pazoto, Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping, *ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations*, 11 (2005), 473-486.
- [21] A. Pazy, *Semigrupos of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [22] L. Rosier, Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain, *ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations*, 2 (1997), 33-55.
- [23] L. Rosier, Control of the surface of a fluid by a wavemaker, *ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations* 10 (2004), 346-380.
- [24] L. Rosier, Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation on the half-line, *SIAM J. Control Optim.* 39 (2000), no. 2, 331-351.
- [25] L. Rosier and B.-Y. Zhang, Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, *SIAM J. Control Optim.* 45 (2006), 927-956.
- [26] J. Seije, *Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial das Soluções da Equação de Korteweg-de Vries com Dissipação Localizada*, Tese de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, (2006).
- [27] J. Simon, Compact sets in the $L^p(0, T; B)$ spaces, *Analli Mat. Pura Appl.* 146 (1987), 65-96.

- [28] R. Teman, Navier-Stokes equations, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [29] O. P. Vera Villagran, Gain of regularity of the solutions of a coupled system of equations of Korteweg-de Vries type, PhD Thesis, Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, (2001).
- [30] E. Zuazua, Contrôlabilité exacte de quelques modèles de plaques en un temps arbitrairement petit, Appendix I in [J. L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1, Contrôlabilité exact, Collection de Recherches en Math. Appl., Masson, Paris 8, 1988], 465-491.