

Teoremas de Traço e os Operadores Irregulares

Ewerton Ribeiro Torres

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Rio de Janeiro

Março de 2011

Teoremas de Traço e os Operadores Irregulares

Ewerton Ribeiro Torres
Orientador: Antonio Roberto da Silva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - IM/UFRJ (Presidente)

Prof^a. Dr^a. Mary Lilian Lourenço - IME/USP

Prof^a. Dr^a. Luciane Quoos Conte - IM/UFRJ

Rio de Janeiro
Março de 2011

Dedicado (in memorian) a meus queridos avós

Hiram Ribeiro da Silva

e

Laurita Lopes Ribeiro.

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Antonio Roberto da Silva, pela dedicação ao presente trabalho, paciência e compreensão com respeito a dúvidas e atrasos, incentivo, apoio e facilitação referente a minha escolha por São Paulo.

Aos membros da banca examinadora, professoras Mary Lilian Lourenço e Luciane Quoos Conte, pela leitura cuidadosa do texto e sugestões construtivas.

A CNPQ pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização desse trabalho.

Aos colegas de curso (cujos nomes não citarei para não correr o risco de ser omissos), por todos os momentos agradáveis que passamos esses dois anos e pelas horas de estudo proveitosas.

Ao meu orientador de graduação na UFJF, professor Carlos Alberto Santana Soares, pelos primeiros passos e por ter me encaminhado permitindo, de certa forma, chegar até aqui.

A Suzana por ter me acolhido não apenas em sua casa, mas também em sua família. Não esquecerei as conversas que, frequentemente, se estendiam até altas horas da madrugada.

A minha mãe, Vera Lucia Ribeiro da Silva, simplesmente por ser a pessoa mais importante em minha vida. Pelo amor incondicional, pelas preocupações (algumas vezes exageradas), por me ensinar desde cedo a importância dos estudos e buscar o melhor para mim, pelo apoio em todos os momentos difíceis.

Teoremas de Traço e os Operadores Irregulares

Ewerton Ribeiro Torres

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Neste trabalho apresentamos alguns resultados da Teoria dos Operadores que envolvem traços. O primeiro, conhecido como Teorema de Lidskii, fala sobre a coincidência dos traços funcional e espectral na 1-classe de Schatten. Em seguida o Teorema de Yang-Liu estabelece uma propriedade do traço funcional ou espectral para potência de produtos de operadores e o Teorema de Calkin fornece os ideais maximal e minimal da álgebra $B(H)$. Concluimos que o ideal gerado por um operador é domínio natural de um traço quando o operador é irregular.

Palavras-chave: Traço, traço funcional, traço espectral, Lidskii, ideais em $B(H)$, operador irregular.

Trace Theorems and the Irregulars Operators

Ewerton Ribeiro Torres

Advisor: Antonio Roberto da Silva

In this work we present some results in the Operators Theory which involves traces. The first, know as Lidskii Theorem, says that, in Schatten 1-class, the functional and the spectral traces are even. Next the Yang-Liu Theorem establishes a property for power products of operators, and the Calkin Theorem provides the maximal and the minimal ideals of the algebra $B(H)$. We conclude that the generate ideal for an operator is the natural domain of a trace when the operator is irregular.

Keywords: Trace, functional trace, spectral trace, Lidskii, ideals in $B(H)$, irregular operator.

Introdução

O presente texto faz um estudo de alguns resultados da Teoria de Operadores Lineares em espaços de Hilbert envolvendo traços.

No primeiro capítulo apresentamos desigualdades clássicas que serão recorrentes ao longo do texto, a saber, Hölder, Minkowski, Bessel e a identidade de Parseval. Visando tornar o texto auto-suficiente, as provas são apresentadas. Em seguida, vemos resultados básicos de Teoria Espectral. Encerramos o capítulo provando o Teorema de Schauder, segundo um artigo recente de Runde ([14]).

O segundo capítulo tem por objetivo obter as representações de Schur e de Schmidt além da desigualdade de Weyl, que servirão de base para o desenvolvimento do capítulo seguinte. Com esse objetivo, apresentamos inicialmente outros resultados relevantes, tais como: o Método de Ordenação, a existência da raiz quadrada positiva de um operador positivo e a decomposição polar entre outros.

No terceiro capítulo introduzimos as classes dos operadores de Hilbert-Schmidt e dos operadores da classe do Traço e as identificamos com as classes 2 e 1 de Schatten respectivamente, apresentadas no capítulo anterior. A seguir, utilizando a representação de Schur e a desigualdade de Weyl, mostramos a desigualdade de König. Após a apresentação de uma série de resultados auxiliares provamos o Teorema de Lidskii, o qual mostra a igualdade entre os traços funcional e espectral na classe de Schatten $\mathcal{S}_1(H)$.

Encerramos a dissertação apresentando resultados complementares que tem por base toda a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Começamos com o Teorema de Yang-Liu que estabelece uma propriedade do traço espectral e, como consequência do Teorema de Lidskii, também o traço funcional, para potências de produtos de operadores na primeira classe de Schatten. Em seguida mostramos o Teorema de Calkin que fornece os ideais maximal e minimal da álgebra $B(H)$ dos operadores lineares limitados. Esse teorema conduz a seguinte questão: o ideal gerado por um operador compacto é domínio natural de algum traço? Concluimos mostrando que isso ocorre quando o operador é irregu-

lar no sentido da Definição 4.2. Visando a completude do texto, finalizamos o trabalho com um breve apêndice sobre o Teorema de Hahn-Banach.

Sumário

Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 As Desigualdades de Hölder, Minkowski, Bessel e a Identidade de Parseval	1
1.2 Alguns Resultados Básicos	8
1.3 Operadores Positivos	11
1.4 Operadores Compactos e Ideais em $B(H)$	18
2 As Representações de Schur, de Schmidt e a Desigualdade de Weyl	27
2.1 Representações de Schur e de Schmidt	27
2.2 Alguns Resultados Auxiliares	37
2.3 A Desigualdade de Weyl	40
3 O Teorema de Lidskii	49
3.1 A classes de Hilbert-Schmidt e a Classe de Traço	49
3.2 O Traço Funcional, o Traço Espectral e o Teorema de Lidskii	53
4 Os Teoremas de Yang-Liu, Calkin e os Operadores Irregulares	69
4.1 O Teorema de Yang-Liu	69
4.2 O Teorema de Calkin	71
4.3 Traços e Ideais Principais	76
Apêndice	83
Referências	87

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo inicial apresentamos alguns resultados básicos da teoria clássica dos operadores lineares agindo sobre espaços de Hilbert separáveis, tendo o corpo dos números complexos como escalares. Com o objetivo de tornar o texto o mais auto-suficiente quanto possível, incluímos basicamente todas as provas dos resultados apresentados. Os resultados desse capítulo serão utilizados frequentemente nos capítulos subsequentes. Após relembrarmos as desigualdades clássicas de Hölder, Minkowski, Bessel e a identidade de Parseval; apresentamos alguns resultados básicos da teoria espectral. Concluimos esse capítulo introdutório com o Teorema de Schauder, cuja prova apresentada é recente e devida a Runde (Ver [14]).

1.1 As Desigualdades de Hölder, Minkowski, Bessel e a Identidade de Parseval

Lema 1.1. *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onde $p, q \in \mathbb{R}$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

para quaisquer $a, b \geq 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Observemos inicialmente que $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$. Notemos também que se $a = 0$ ou $b = 0$ a desigualdade é imediata.

Seja $b > 0$ um número fixo. Consideremos a função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb$$

Então $f'(x) = x^{p-1} - b$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = b^{\frac{1}{p-1}} = b^{\frac{q}{p}}$.

Logo, se $x < b^{\frac{q}{p}}$, temos $f'(x) < 0$ e f crescente. Já, se $x > b^{\frac{q}{p}}$, temos $f'(x) > 0$ e f decrescente. Portanto, f é crescente se $x \in [0, b^{\frac{q}{p}}]$ e decrescente se $x \in [b^{\frac{q}{p}}, \infty)$. Dessa forma, para todo $x \in [0, \infty)$, temos $f(x) \geq f(b^{\frac{q}{p}})$.

Mas

$$f(b^{\frac{a}{p}}) = \frac{b^{\frac{a}{p}p}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{a}{p}}b = b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - b^{\frac{a}{p}+1} = b^q - b^q = 0$$

Logo, para todo $x \geq 0$, temos $f(x) \geq 0$, ou seja

$$\frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb \geq 0 \Rightarrow \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq xb,$$

que é a desigualdade desejada. ■

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para quaisquer $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, com $i \in \mathbb{N}$, temos*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração: Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Notemos que, se $x_i = 0$ ou $y_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, a desigualdade é imediata. Supondo que isso não ocorra, definimos para $i = 1, 2, \dots, n$,

$$X_i = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{e} \quad Y_i = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}}$$

Notemos que

$$\sum_{i=1}^n X_i^p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \right)^p = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\left(\frac{1}{p} \cdot p \right)}} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} = 1$$

Analogamente $\sum_{i=1}^n Y_i^q = 1$. Pelo lema anterior temos

$$X_i Y_i \leq \frac{1}{p} X_i^p + \frac{1}{q} Y_i^q, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Somando as desigualdades acima obtemos

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n X_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n Y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então concluímos,

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Pelo que acabamos de provar, sabemos que para $m, n \in \mathbb{N}$, com $n \leq m$ ocorre

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$. Então tomando $n \rightarrow \infty$ e temos o resultado. ■

Notemos que não precisamos que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sejam absolutamente convergentes, em outras palavras, o resultado acima vale mesmo que alguma das séries divirja.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski). *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $p \geq 1$. Para $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, temos:*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$, fixo. Para $p = 1$ a afirmativa é a desigualdade triangular aplicada a $|x_i + y_i|$ para todo i . Se $p \in (1, \infty)$, podemos tomar $q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow (p-1)q = p$. Usando esse fato e a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Dividindo a equação $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ por $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$ temos:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Usando a desigualdade de Minkowski finita, temos que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$ ocorre

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

No que se segue H denotará um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, mais precisamente, um espaço normado completo (isto é, de Banach) cuja norma provém de um produto interno (é dada por $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$) e possui um subconjunto enumerável e denso em H .

Definição 1.1. Diremos que um conjunto $S \subset H$ é **ortogonal** se $(x, y) = 0$, para quaisquer $x, y \in S$ com $x \neq y$. Se, além disso, $\|x\| = 1$, para todo $x \in S$, então S é dito **ortonormal**.

Observação 1.1. De acordo com a definição, todo subconjunto de um conjunto ortogonal é ortogonal. O mesmo vale para subconjuntos de conjuntos ortonormais.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Bessel). *Seja S um conjunto ortonormal de H . Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um subconjunto finito de S , então*

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in H$$

Demonstração: Observemos inicialmente que,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x, e_i) \overline{(x, e_j)} (e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n (x, e_i) \overline{(x, e_i)} = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2, \quad x \in H \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre do fato que $(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$ e $(e_i, e_i) = 1$, visto que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é ortonormal. Daí segue que, para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left(x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, x - \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \right) \\
 &= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \right) - \left(\sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, x \right) + \left(\sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \right) \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \overline{(x, e_j)} (x, e_j) - \sum_{i=1}^n (x, e_i) (e_i, x) + \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2
 \end{aligned}$$

■

Observação 1.2. A desigualdade acima pode ser verificada quando $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ é um subconjunto infinito e enumerável de S . Pela desigualdade de Bessel temos $\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $\sum_{i=1}^\infty |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$, $x \in H$.

Teorema 1.4 (Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt). *Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ um conjunto linearmente independente. Existe um conjunto ortonormal $(e_n)_{n=1}^\infty$ de vetores não-nulos tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e_n é combinação linear de $x_1, \dots, x_n$.*

Demonstração: Seja $y_1 = x_1 \neq 0$. Suponhamos escolhidos $y_1, \dots, y_{k-1}$ não-nulos e mutuamente ortogonais. Definimos

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{\|y_i\|^2} y_i \quad (*)$$

Como, pela hipótese de indução, y_i , com $i = 1, \dots, k-1$, é combinação linear de $x_1, \dots, x_{k-1}$, temos que y_k é não-nulo e é combinação linear de $x_1, \dots, x_k$. Além disso, para $n < k$,

$$\begin{aligned}
 (y_k, y_n) &= \left(x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{\|y_i\|^2} y_i, y_n \right) = (x_k, y_n) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)(y_i, y_n)}{\|y_i\|^2} \\
 &= (x_k, y_n) - (x_k, y_n) = 0
 \end{aligned}$$

A partir de (y_n) construímos (e_n) tomando $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. É simples verificar que (e_n) satisfaz as condições do teorema. ■

Corolário 1.1. *Se (x_n) e (e_n) são como no teorema acima, então $[(x_n)] = [(e_n)]$, isto é, o subespaço vetorial gerado por (x_n) coincide com o subespaço vetorial gerado por (e_n) .*

Demonstração: Por construção basta mostrar que $[(x_n)] = [(y_n)]$. Já temos, pelo teorema anterior, que y_n é combinação linear de $x_1, \dots, x_n$. Mostremos que x_n é combinação linear de $y_1, \dots, y_n$.

Isso é óbvio para $n = 1$. Vamos assumir que vale para $n - 1$ e provar para n . De acordo com a hipótese de indução e (*) escrevemos $y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_n, y_i)}{\|y_i\|^2} y_i$, ou seja, x_n é combinação linear de $y_1, \dots, y_n$. ■

Definição 1.2. *Um conjunto ortonormal S é dito **completo** se a condição $(x, y) = 0$, para todo $y \in S$ implicar em $x = 0$.*

Teorema 1.5. *Um espaço de Hilbert é separável se e somente se possui um conjunto ortonormal completo enumerável.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sendo H separável, existe (x_n) uma sequência densa em H . Consideremos (x_{n_k}) subsequência de (x_n) construída da seguinte forma: n_1 é o menor inteiro tal que $x_{n_1} \neq 0$. Já definidos $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$, seja $x_{n_{k+1}}$ o termo correspondente ao menor inteiro, maior que n_k , tal que $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\}$ seja linearmente independente. Se tal índice não existir o processo para. Por construção x_n , $1 \leq n < n_{k+1}$, é combinação linear de $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$. Seja (e_n) o conjunto ortonormal obtido ortonormalizando (x_{n_k}) , como no Teorema 1.4. Seja $x \in H$ de modo que $(x, e_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 1.1, cada x_n é combinação linear finita de (e_n) . Então $(x, x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Seja (x'_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que $x'_{n_k} \rightarrow x$. Temos

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(x, \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x, x'_{n_k}) = 0$$

ou seja, $x = 0$. Portanto (e_n) é um conjunto ortonormal completo enumerável.

($\Leftarrow$) Obteremos agora, a partir de um conjunto ortonormal completo (e_n) , um subconjunto de H enumerável e denso. Seja $M = [(e_n)]$. Se $x \in M^\perp$, isto é, $(x, y) = 0$ para todo $y \in M$, em particular $(x, e_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Como (e_n) é um conjunto ortonormal completo, $x = 0$. Daí concluímos (Ver [8], pág. 45) que $\overline{M} = H$. Seja $M' \subset M$ o conjunto das combinações lineares finitas de (e_n) com constantes da forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Temos que M' é enumerável. De fato, ordenemos a base (e_n) e definamos l_n como sendo os elementos $x \in M'$ da forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Existe uma bijeção natural entre l_n e $\mathbb{Q}^{2n}$, dessa forma l_n é enumerável. Como $M' = \bigcup_{k=1}^{\infty} l_k$ é união enumerável de conjuntos enumeráveis, concluímos M' enumerável. Resta mostrar que M' é denso em H . Sejam $x \in H$ e $\epsilon > 0$. Pela

densidade de M em H é possível obter $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in M$, tal que $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Agora, como $\{a + ib, a, b \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{C}$, podemos obter $\alpha'_k \in \{a + ib, a, b \in \mathbb{Q}\}$ tal que $|\alpha_k - \alpha'_k| < \frac{\epsilon}{2n}$. Assim $y' = \sum_{i=1}^n \alpha'_i e_i \in M'$ e

$$\begin{aligned} \|x - y'\| &\leq \|x - y\| + \|y - y'\| = \|x - y\| + \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha'_i) e_i \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \alpha'_i| < \frac{\epsilon}{2} + n \frac{\epsilon}{2n} = \epsilon \end{aligned}$$

■

Observação 1.3. É possível garantir que todo espaço com produto interno possui um conjunto ortonormal completo utilizando o Lema de Zorn (Ver [13], pág. 19).

Teorema 1.6. Seja (e_n) um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert separável H . As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) (e_n) é um conjunto ortonormal completo.
- b) $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$, $x \in H$ (Série de Fourier).
- c) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) \overline{(y, e_i)}$.
- d) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2$ (Identidade de Parseval).

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ b)) Sendo (e_n) ortonormal, temos pela desigualdade de Bessel (Teorema 1.3) que $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$. Sendo $S_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$ e $\epsilon > 0$

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n (x, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |(x, e_i)|^2 < \epsilon$$

para m e n suficientemente grandes, com $m < n$. Então (S_n) é uma sequência de Cauchy, logo convergente. Afirmamos que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$. Com efeito,

$$\left(x - \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i, e_n \right) = (x, e_n) - \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) (e_i, e_n) = (x, e_n) - (x, e_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Como (e_n) é ortonormal completo, concluímos $x - \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i = 0$.

(b) $\Rightarrow$ c)) Por hipótese $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$. Então

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i, y \right) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) (e_i, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) \overline{(y, e_i)}$$

(c) $\Rightarrow$ d)) Basta tomar $y = x$.

(d) $\Rightarrow$ a)) Devemos mostrar que (e_n) é completo. Seja x tal que $(x, e_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela identidade de Parseval,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

■

Observação 1.4. Desse ponto em diante estaremos admitindo que H se trata de um espaço de Hilbert separável.

1.2 Alguns Resultados Básicos

Definição 1.3. Seja $T : H \rightarrow H$ um operador linear. Diremos que T é **contínuo** (ou **limitado**) se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$.

Denotaremos por $B(H)$ o espaço dos operadores lineares $T : H \rightarrow H$, contínuos, munido da norma

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Tx, y)|$$

Observação 1.5. i) Indicaremos por $N(T) = \{x \in H; Tx = 0\}$ o núcleo de T e por $R(T) = \{y \in H; \text{ existe } x \in H \text{ tal que } y = Tx\}$ a imagem de T .

ii) Como H é um espaço de Banach $B(H)$ também o é.

Definição 1.4. Sejam $T \in B(H)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Dizemos que λ é um **autovalor** de T se existe $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. Tal x , quando existe, é chamado **autovetor** de T associado a λ .

Definição 1.5. Seja $T \in B(H)$. O **espectro** de T , denotado por $\sigma(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(T - \lambda I)$ não é invertível.

O complementar de $\sigma(T)$, isto é, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ é invertível}\}$ é chamado de **resolvente** de T .

Observação 1.6. Notemos que se λ é um autovalor de T então $\lambda \in \sigma(T)$. Mais adiante mostraremos que se o operador T atender certas condições (T ser compacto) poderemos garantir que a recíproca também é válida.

Teorema 1.7 (Expansão de Neumann). Seja $T \in B(H)$, com $\|T\| < 1$. Então $I - T$ é invertível e

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

onde $T^0 = I$. Além disso

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$$

Demonstração: Observemos primeiramente que $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ é uma série geométrica e portanto, convergente. Agora $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, o que garante a convergência absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Mas $B(H)$ é completo, o que implica na convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$, digamos, para $S \in B(H)$. Pela definição de S , temos que S comuta com T , assim $S(I - T) = (I - T)S$. Além disso,

$$(I - T)S = S - TS = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = T^0 = I$$

ou seja, $S = (I - T)^{-1}$. Finalmente,

$$\|(I - T)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

■

Observação 1.7. Tendo em vista o teorema acima, observemos que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\|T\| < |\lambda|$, temos $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$ e $\|\lambda^{-1}T\| = |\lambda|^{-1}\|T\| < 1$. Então $I - \lambda^{-1}T$ é invertível e $(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1}$ também é. Logo $\lambda \in \rho(T)$. Assim $\rho(T)$ não é vazio, para qualquer $T \in B(H)$. Como $\lambda \in \rho(T)$, $|\lambda| > \|T\|$, concluímos que $\sigma(T)$ é limitado por $\|T\|$, isto é, se $\lambda \in \sigma(T)$, então $|\lambda| \leq \|T\|$.

Definição 1.6. Seja $\xi \in \rho(T)$. O operador $R_\xi = (\xi I - T)^{-1}$ é chamado **operador resolvente**.

Teorema 1.8. Sejam $\xi \in \rho(T)$ e $\eta \in \mathbb{C}$ tais que $|\xi - \eta| < \|R_\xi\|^{-1}$. Então $\eta \in \rho(T)$ e $R_\eta - R_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \eta)R_\xi^{n+1}$. Além disso,

$$\|R_\eta\| \leq \frac{\|R_\xi\|}{1 - |\xi - \eta|\|R_\xi\|}$$

Demonstração: Por hipótese $\|(\xi - \eta)R_\xi\| < 1$. Isso significa que $I - (\xi - \eta)R_\xi$ é invertível e sua inversa é dada por

$$(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ((\xi - \eta)R_\xi)^n$$

Escrevendo $\eta I - T = (\xi I - T) - (\xi - \eta)I$ e observando que R_ξ comuta com T (basta olhar para $(\xi I - T)R_\xi = I = R_\xi(\xi I - T)$), temos

$$\begin{aligned} (R_\xi(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1})(\eta I - T) &= R_\xi(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}(\xi I - T - (\xi - \eta)I) \\ &= R_\xi(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}(R_\xi^{-1} - (\xi - \eta)R_\xi^{-1}R_\xi) \\ &= R_\xi(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}R_\xi^{-1}(I - (\xi - \eta)R_\xi) \\ &= (I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}(I - (\xi - \eta)R_\xi) = I \end{aligned}$$

Assim $\eta I - T$ é invertível e sua inversa é

$$R_\eta = (\eta I - T)^{-1} = R_\xi (I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1} = R_\xi \left(\sum_{n=0}^{\infty} ((\xi - \eta)R_\xi)^n \right) = R_\xi + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \eta)R_\eta^{n+1}$$

Logo

$$R_\eta - R_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi - \eta)R_\eta^{n+1}$$

Agora utilizando o Teorema 1.7 em $\sum_{n=0}^{\infty} ((\xi - \eta)R_\xi)^n$, obtemos

$$\|(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - |\xi - \eta||R_\eta|}$$

Dai

$$\begin{aligned} \|R_\eta\| &= \|R_\xi (I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}\| \leq \|R_\xi\| \|(I - (\xi - \eta)R_\xi)^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|R_\eta\|}{1 - |\xi - \eta||R_\eta|} \end{aligned}$$

■

Observação 1.8. O Teorema 1.8 nos garante que $\rho(T)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$. De fato, dado $\xi \in \rho(T)$, basta tomar $\epsilon = \|R_\xi\| > 0$ (pois R_ξ é invertível) e teremos, para $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta - \xi| < \epsilon$, implicando em $(\eta I - T)$ invertível, ou seja, $\eta \in \rho(T)$. Isso nos diz ainda que $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ é fechado. Acabamos de ver que $\sigma(T)$ é limitado (vide Observação 1.7). Logo $\sigma(T)$ é compacto.

Como $\sigma(T)$ é limitado, a seguinte definição faz sentido.

Definição 1.7. Seja $T \in B(H)$. O número

$$r_T = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}$$

é chamado **raio espectral** de T .

Enunciamos agora um resultado clássico, cuja demonstração pode ser encontrada em [13], pág. 45.

Fórmula do Raio Espectral (Teorema de Gelfand-Beuling). Seja $T \in B(H)$. Então

$$r_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

Teorema 1.9. Sejam $\xi, \eta \in \rho(T)$. Então, $R_\xi - R_\eta = (\eta - \xi)R_\xi R_\eta$.

Demonstração: Temos $(\xi I - T)(\eta I - T) = (\eta I - T)(\xi I - T)$. Como $\xi, \eta \in \rho(T)$, os operadores acima são invertíveis e

$$\begin{aligned} R_\eta R_\xi &= (\eta I - T)^{-1}(\xi I - T)^{-1} = ((\xi I - T)(\eta I - T))^{-1} \\ &= ((\eta I - T)(\xi I - T))^{-1} = (\xi I - T)^{-1}(\eta I - T)^{-1} \\ &= R_\xi R_\eta . \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} (R_\xi - R_\eta)R_\xi^{-1}R_\eta^{-1} &= R_\eta^{-1} - R_\xi^{-1} = (\eta I - T) - (\xi I - T) \\ &= (\eta - \xi)I . \end{aligned}$$

■

Observação 1.9. Com o resultado acima garantimos que a aplicação $\phi : \rho(T) \rightarrow B(H)$, $\phi(\xi) = R_\xi$ é contínua. De fato, fixado $\xi \in \rho(T)$, seja $\eta \in \mathbb{C}$ tal que $|\xi - \eta| < \|R_\xi\|^{-1}$. Pelo Teorema 1.8, $\eta \in \rho(T)$. Agora, por esse mesmo teorema e o que acabamos de provar,

$$\|R_\xi - R_\eta\| \leq |\eta - \xi| \|R_\xi\| \|R_\eta\| \leq \frac{|\eta - \xi| \|R_\xi\|^2}{1 - |\eta - \xi| \|R_\xi\|}$$

Daí obtemos, $\lim_{\eta \rightarrow \xi} \|R_\xi - R_\eta\| = 0$.

1.3 Operadores Positivos

Dado um operador $T \in B(H)$ queremos definir $T^* \in B(H)$ tal que $(Tx, y) = (x, T^*y)$, para quaisquer $x, y \in H$. Para isso precisamos do seguinte resultado.

Teorema da Representação de Riesz. *Seja $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y)$, para todo $x \in H$. Além disso, $\|f\| = \|y\|$*

Demonstração: Mostraremos inicialmente a existência. Se $f = 0$, basta tomarmos $y = 0$. Suponhamos então $f \neq 0$. Dessa forma, o núcleo de f , $N(f) = \{x \in H; f(x) = 0\}$ é um subespaço fechado próprio de H e é possível escrever $H = N(f) \oplus N(f)^\perp$, com $N(f)^\perp \neq \{0\}$. Seja $u \in N(f)^\perp$ com $\|u\| = 1$. Para $x \in H$ temos

$$f(f(x)u - f(u)x) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0$$

ou seja, $f(x)u - f(u)x \in N(f)$. Daí $(f(x)u - f(u)x, u) = 0$, e

$$f(x) = f(u)(x, u) = (x, \overline{f(u)}u) = (x, y) , \quad x \in H$$

onde $y = \overline{f(u)}u$.

Provemos agora a unicidade. Para isso suponhamos que exista $z \in H$, de modo que $f(x) = (x, z)$, para todo $x \in H$. Temos

$$(x, y) = f(x) = (x, z) \Rightarrow (x, y - z) = 0, \text{ para todo } x \in H \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z$$

Finalmente provemos que $\|f\| = \|y\|$. Se $y = 0$, então $f \equiv 0$ e a igualdade é imediata. Agora, se $y \neq 0$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

ou seja, $\|f\| \leq \|y\|$. Por outro lado,

$$\left| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right| = \left| \left(\frac{y}{\|y\|}, y\right) \right| = \|y\|$$

isto é, $\|f\| = \sup\{|f(x)|, \|x\| = 1\} \geq \|y\|$. Portanto $\|f\| = \|y\|$. ■

Teorema 1.10. *Seja $T \in B(H)$. Existe um único operador $T^* \in B(H)$, chamado **adjunto** de T , tal que $(Tx, y) = (x, T^*y)$, para quaisquer $x, y \in H$. Além disso, vale $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração: Fixado $y \in H$, temos que $f_y(x) = (Tx, y)$ é um funcional linear. Pelo teorema acima, existe um único $z \in H$, tal que $f_y(x) = (x, z)$, $x \in H$. Definimos então $T^*y = z$. Temos que $(Tx, y) = f_y(x) = (x, z) = (x, T^*y)$, para quaisquer $x, y \in H$. Agora T^* é linear, pois se u e v são tais que $f_y(x) = (x, u)$ e $f_z(x) = (x, v)$, então

$$\begin{aligned} f_{\lambda y + z}(x) &= (Tx, \lambda y + z) = \bar{\lambda}(Tx, y) + (Tx, z) = \bar{\lambda}(x, u) + (x, v) \\ &= (x, \lambda u + v), \quad x \in H \end{aligned}$$

Novamente pelo teorema anterior, $T^*(\lambda y + z) = \lambda u + v = \lambda T^*y + T^*z$.

Resta mostrar que $\|T^*\| = \|T\|$. Segue da definição de $\|T\|$ que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Tx, y)| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(T^*y, x)| = \|T^*\|$$

■

Proposição 1.1. *Sejam T e S operadores em $B(H)$. Então:*

- a) $T^{**} = T$
- b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$
- c) $(T + S)^* = T^* + S^*$
- d) $(TS)^* = S^*T^*$
- e) Se T é invertível, então T^* também o é e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demonstração: a) $(x, T^{**}y) = (T^*x, y) = \overline{(y, T^*x)} = \overline{(Ty, x)} = (x, Ty)$, $x, y \in H$

Logo $T^{**} = T$.

b) $(\lambda Tx, y) = \lambda(Tx, y) = \lambda(x, T^*y) = (x, \bar{\lambda}T^*y)$, $x, y \in H$

Assim $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$.

c) $((T + S)x, y) = (Tx, y) + (Sx, y) = (x, T^*y) + (x, S^*y) = (x, (T^* + S^*)y)$, $x, y \in H$

Então $(T + S)^* = T^* + S^*$.

d) $(TSx, y) = (Sx, T^*y) = (x, S^*T^*y)$, $x, y \in H$

Dessa forma $(TS)^* = S^*T^*$.

e) Observemos que $I^* = I$. Se $T \in B(H)$ é invertível, existe T^{-1} de modo que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Então, usando o item d), $(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I^* = I$. Isso mostra que T^* é invertível e que $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ■

Proposição 1.2. *Seja $T \in B(H)$. Então $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.*

Demonstração: De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2$$

ou seja, $\|T\| \leq \|T^*T\|^{1/2}$. Então $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

Por outro lado, $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$, onde a igualdade segue do Teorema 1.10. Por esse mesmo teorema $\|TT^*\| = \|(T^*T)^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. ■

Definição 1.8. *Um operador $T \in B(H)$ é dito **auto-adjunto** (ou **hermitiano**) se $T^* = T$. Agora se T for invertível e $T^* = T^{-1}$, diremos que T é **unitário**.*

Observação 1.10. i) *Se $T \in B(H)$ é auto-adjunto, então $\|T\|^2 = \|TT^*\| = \|T^2\|$.*

ii) *Se U é unitário, então $\|U\|^2 = \|UU^*\| = \|I\| = 1$, ou seja, $\|U\| = 1$.*

iii) *Se T é auto-adjunto, temos que $(Tx, x) = (x, T^*x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$, $x \in H$. Então $(Tx, x) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in H$.*

O item iii) da observação acima dá sentido à definição seguinte.

Definição 1.9. *Seja $T \in B(H)$, auto-adjunto. Diremos que T é **positivo** quando $(Tx, x) \geq 0$ para todo $x \in H$. Nesse caso escrevemos $T \geq 0$ ou $T \in B^+(H)$.*

Com essa definição podemos introduzir uma relação de ordem parcial em $B(H)$. Com efeito, diremos que $T \geq S$ (ou $S \leq T$) se $((T - S)x, x) \geq 0$, $x \in H$. Claramente $T \geq T$, isto é $\geq$ é reflexiva. A prova de que $\geq$ é transitiva e anti-simétrica é dada abaixo, juntamente com outras propriedades de $\geq$.

Propriedades de Operadores Positivos. *i) Se A e B são positivos e $\lambda \geq 0$ então $A + B$ e λA são positivos. Além disso, se A é invertível, A^{-1} também é positivo.*

ii) Se $A \geq B$ e $B \geq A$, então $A = B$.

iii) Se $A \geq B$ e $B \geq C$, então $A \geq C$.

*iv) T^*T e TT^* são positivos para qualquer $T \in B(H)$.*

Demonstração: *i)* De fato,

$$((A + B)x, x) = (Ax, x) + (Bx, x) \geq 0, \quad x \in H$$

$$(\lambda Ax, x) = \lambda(Ax, x) \geq 0, \quad x \in H$$

$$(A^{-1}x, x) = (A^{-1}x, AA^{-1}x) \geq 0, \quad x \in H$$

ii) Seja $T = A - B$. Por hipótese, $(Tx, x) = 0, x \in H$. Para quaisquer $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned} 0 = (T(x + y), x + y) &= (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) = (Tx, y) + (Ty, x) \\ &= (Tx, y) + (y, Tx) = (Tx, y) + \overline{(Tx, y)} = 2\operatorname{Re}(Tx, y) \end{aligned}$$

Se existirem $x_0, y_0 \in H$ tais que $\operatorname{Im}(Tx_0, y_0) \neq 0$, então

$$\operatorname{Re}(T(ix_0), y_0) = -\operatorname{Im}(Tx_0, y_0) \neq 0$$

contradição. Logo $\operatorname{Im}(Tx, y) = 0$, com $x, y \in H$, ou seja $(Tx, y) = 0$, para $x, y \in H$. Daí, fazendo $y = Tx$, obtemos que $\|Tx\|^2 = 0, x \in H$, isto é, $Tx = 0$ para todo x . Portanto $A = B$.

iii) $((A - C)x, x) = ((A - B)x, x) + ((B - C)x, x) \geq 0, \quad x \in H$

iv) $(TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2 \geq 0, \quad (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0, \quad x \in H.$

■

Teorema 1.11. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Se existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$, para todo $x \in H$, então T é invertível.*

Demonstração: A condição $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ implica na injetividade de T . Resta provar que T é sobrejetiva, isto é, que $R(T) = H$. Antes disso mostraremos que a condição acima também implica que $R(T)$ é fechado.

Seja $y \in \overline{R(T)}$. Tomemos $(x_n) \subset H$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$. Então (Tx_n) é uma sequência de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|Tx_n - Tx_m\| < \epsilon/\alpha$ para $n, m > n_0$. Assim,

$$\|x_n - x_m\| \leq \alpha\|T(x_n - x_m)\| = \alpha\|Tx_n - Tx_m\| < \epsilon, \text{ onde } n, m > n_0$$

Então (x_n) é uma sequência de Cauchy e existe x , tal que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, pois H é completo. Pela continuidade de T , $y = Tx$, isto é $y \in R(T)$.

Suponhamos que $R(T) \neq H$. Então existe $y \in H \setminus R(T)$. Como $R(T)$ é fechado e contido propriamente em H , $R(T)^\perp \neq \{0\}$. Então $y \in R(T)^\perp \setminus \{0\}$. Daí $(Tx, y) = 0$, $x \in H$. Seja $x = Ty$, como T é auto-adjunto

$$0 = (T(Ty), y) = (Ty, Ty) = \|Ty\|^2$$

ou seja, $Ty = 0$. Mas T é injetivo, o que implica que $y = 0$. ■

Corolário 1.2. *Se T é auto-adjunto e $T \geq I$, então T é invertível.*

Demonstração: Como $T \geq I$,

$$(Tx, x) \geq (x, x) = \|x\|^2$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|Tx\| \|x\| \geq (Tx, x) \geq \|x\|^2$$

ou seja, $\|Tx\| \geq \|x\|$. Pelo Teorema 1.11, T é invertível. ■

Teorema 1.12. *Seja $T \in B(H)$. Se T é auto-adjunto, então $\sigma(T)$ é um subconjunto dos números reais. Se T é positivo, então $\sigma(T) \subset (0, \infty)$.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $\text{Im} \lambda \neq 0$. Como

$$((T - \lambda I)x, x) - ((T - \bar{\lambda} I)x, x) = (\bar{\lambda} - \lambda)(x, x), \quad x \in H$$

para $x \neq 0$ temos,

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda - \bar{\lambda}| \|x\|^2 &= |((T - \lambda I)x, x) - ((T - \bar{\lambda} I)x, x)| = |((T - \lambda I)x, x) - (x, (T - \lambda I)x)| \\ &= 2|\text{Im}((T - \lambda I)x, x)| \leq 2|(T - \lambda I)x, x| \leq 2\|(T - \lambda I)x\| \|x\| \end{aligned}$$

isto é,

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}| \|x\|}{2}, \quad x \in H$$

Analogamente

$$\|(T - \bar{\lambda} I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}| \|x\|}{2}, \quad x \in H$$

Como vimos na demonstração do Teorema 1.11, os operadores $T - \lambda I$ e $T - \bar{\lambda} I$ são injetivos, com imagens fechadas. Suponhamos que exista $y \in H \setminus R(T - \lambda I)$. Então $y \in R(T - \lambda I)^\perp \setminus \{0\}$ e $(y, (T - \lambda I)x) = 0$, para todo $x \in H$. Daí $((T - \bar{\lambda} I)y, x) = 0$,

$x \in H$. Então $(T - \bar{\lambda}I)y = 0$ e $y = 0$, pois $T - \bar{\lambda}I$ é injetivo, uma contradição. Então o operador $T - \lambda I$ é sobrejetivo, logo invertível. Assim $\lambda \in \rho(T)$.

Sejam agora $T \geq 0$ e $\lambda > 0$. Temos que $T + \lambda I \geq \lambda I$, ou seja $\lambda^{-1}(T + \lambda I) \geq I$. Pelo Corolário 1.2, $\lambda^{-1}(T + \lambda I)$ é invertível. Então $T + \lambda I$ é invertível e $-\lambda \in \rho(T)$, então $(-\infty, 0) \subset \rho(T)$. Portanto $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. ■

Teorema 1.13. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Então o raio espectral de T é igual a $\|T\|$. Além disso $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.*

Demonstração: Pela Observação 1.10 item i), temos $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Agora, utilizando a Fórmula do Raio Espectral,

$$r_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|T\|^{2^n})^{1/2^n} = \|T\|$$

A segunda afirmativa decorre do Teorema 1.12 e do provado acima. ■

Lema 1.2. *Seja $T \in B(H)$. Então*

i) $\sigma(I - T) = 1 - \sigma(T) = \{1 - \lambda; \lambda \in \sigma(T)\}$.

ii) $\sigma(\lambda T) = \lambda \sigma(T)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

iii) Se T for invertível e $\sigma(T) \subset [a, \infty)$, $a \geq 0$, então $\sigma(T^{-1}) \subset [0, \frac{1}{a}]$.

Demonstração: i) Se $\lambda \in \sigma(I - T)$, então $T - (1 - \lambda)I = -((I - T) - \lambda I)$ não é invertível, ou seja, $1 - \lambda \in \sigma(T)$ e $\lambda = 1 - \xi$, $\xi = 1 - \lambda \in \sigma(T)$. Seja $\lambda \in \sigma(T)$. Então $(I - T) - (1 - \lambda)I = -(T - \lambda I)$ não é invertível. Logo $1 - \lambda \in \sigma(I - T)$.

ii) Se $\lambda = 0$, o resultado é óbvio. Seja então $\lambda \neq 0$. Temos

$$\begin{aligned} \xi \in \sigma(\lambda T) &\Leftrightarrow \lambda T - \xi I = \lambda \left(T - \frac{\xi}{\lambda} I \right) \text{ não é invertível} \\ &\Leftrightarrow \frac{\xi}{\lambda} \in \sigma(T) \Leftrightarrow \xi \in \lambda \sigma(T) \end{aligned}$$

■

iii) Seja $\lambda > \frac{1}{a}$. Então $\frac{1}{\lambda} < a$ e $\frac{1}{\lambda} \in \rho(T)$, por hipótese. Dessa forma $T - \frac{1}{\lambda}I$ é invertível. Logo $T^{-1} - \lambda I = -\lambda T^{-1}(T - \frac{1}{\lambda}I)$ é invertível e $\lambda \in \rho(T^{-1})$. Analogamente podemos mostrar que se $\lambda < 0$, então $\lambda \in \rho(T^{-1})$. Portanto $\sigma(T^{-1}) \subset [0, \frac{1}{a}]$.

Teorema 1.14. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Então $\|T\| \leq 1$ se e somente se ocorre $-I \leq T \leq I$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sendo $\|T\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} ((I - T)x, x) &= (x, x) - (Tx, x) \geq \|x\|^2 - \|Tx\|\|x\| \\ &\geq \|x\|^2 - \|T\|\|x\|^2 = (1 - \|T\|)\|x\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((T + I)x, x) &= (Tx, x) + (x, x) \geq -\|Tx\|\|x\| + \|x\|^2 \\
&\geq (1 - \|T\|)\|x\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Onde a primeira desigualdade (em ambas expressões) é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Assim $-I \leq T \leq I$.

($\Leftarrow$) Supondo $-I \leq T \leq I$, usando o item *i*) do Lema 1.2 e o Teorema 1.12, temos $1 - \sigma(T) = \sigma(I - T) \subset [0, \infty)$, ou seja, $\sigma(T) \subset (-\infty, 1]$. Agora

$$1 + \sigma(T) = 1 - \sigma(-T) = \sigma(1 - (-T)) = \sigma(1 + T) \subset [0, \infty)$$

isto é, $\sigma(T) \subset [-1, \infty)$. Com isso, $\sigma(T) \subset [-1, 1]$.

Por outro lado, vimos no Teorema 1.13 que $r_T = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\} = \|T\|$. Isso significa que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \sigma(T) \subset [-1, 1]$, convergindo para $\|T\|$. Dessa forma $\|T\| \leq 1$. ■

Definição 1.10. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Indicaremos por $F(T)$ o fecho do conjunto $\{(Tx, x); \|x\| = 1\}$. Além disso definimos $m(T) = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$ e $M(T) = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$. Notemos que $F(T) \subset [m(T), M(T)]$.*

Teorema 1.15. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Então $\sigma(T) \subset F(T)$.*

Demonstração: Seja $\lambda \notin F(T)$. O conjunto $F(T)$ é fechado por definição, temos dessa forma que $d = \inf\{|\lambda - \mu|; \mu \in F(T)\} > 0$. Então, se $x \neq 0$,

$$d \leq \left| \left(T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) - \lambda \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \frac{|(Tx, x) - \lambda(x, x)|}{\|x\|^2} = \frac{|((T - \lambda I)x, x)|}{\|x\|^2}$$

ou seja, $|((T - \lambda I)x, x)| \geq d\|x\|^2$, $x \in H$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|(T - \lambda I)x\|\|x\| \geq |((T - \lambda I)x, x)| \geq d\|x\|^2$$

ou seja, $\|(T - \lambda I)x\| \geq d\|x\|$, $x \in H$. Pelo Teorema 1.11, $T - \lambda I$ é invertível, ou seja, $\lambda \in \rho(T)$. Portanto $\sigma(T) \subset F(T)$. ■

Teorema 1.16. *Seja $T \in B(H)$, auto-adjunto. Então,*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| = \max\{|m(T)|, |M(T)|\}$$

Demonstração: Por um lado, como $|(Tx, x)| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2$, $x \in H$, temos que $\sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| \leq \|T\|$. ■

Por outro lado, vimos no Teorema 1.13 que $r_T = \|T\|$, logo existe $(\lambda_n) \subset \sigma(T)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \|T\|$. Mas $(\lambda_n) \subset \sigma(T) \subset F(T)$, pelo resultado que acabamos de provar. Então $\lambda_n = (Tx_n, x_n)$, com $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Logo $\|T\| \leq \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$. A outra igualdade é obtida a partir das definições de $m(T)$ e $M(T)$. ■

1.4 Operadores Compactos e Ideais em $B(H)$

Definição 1.11. *Seja $T : H \rightarrow H$ um operador linear. Diremos que T é **compacto** se $\overline{T(U)}$ é um conjunto compacto, onde $U = \{x; \|x\| \leq 1\}$. Neste caso escrevemos $T \in K(H)$.*

Agora, se a imagem de T , $R(T)$, for um espaço de dimensão finita, vamos dizer que T é um operador **de posto finito** e escreveremos $T \in F(H)$.

Observação 1.11. *i) Notemos que um operador compacto é imediatamente contínuo. Além disso, se T é um operador de posto finito, então T é compacto (basta observar que $\overline{T(U)}$ é um subconjunto fechado e limitado do espaço de dimensão finita $R(T)$).*

ii) A definição acima pode apresentada num contexto mais geral para operadores entre espaços de Banach da seguinte forma: Se E, F são espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ é um operador linear, diremos que T é compacto quando $\overline{T(U)}$ é um subconjunto compacto de F .

iii) No que se segue $B_\epsilon(x)$, indicará o conjunto $\{y \in H; \|y - x\| < \epsilon\}$.

Proposição 1.3. *São equivalentes:*

i) T é compacto.

ii) $T(U)$ é totalmente limitado, isto é, dado $\epsilon > 0$ existem $y_1, \dots, y_k \in T(U)$ tais que para $y \in T(U)$ existe $j = 1, \dots, k$ de modo que $\|y - y_j\| < \epsilon$.

iii) Dada uma sequência limitada $(x_n) \subset H$, é possível obter (x_{n_k}) , subsequência de (x_n) tal que (Tx_{n_k}) seja convergente.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ ii) Se T é compacto, então $\overline{T(U)}$ é um conjunto compacto. Dado $\epsilon > 0$. Consideramos a cobertura aberta $\{B_\epsilon(y)\}_{y \in \overline{T(U)}}$ de $\overline{T(U)}$. Podemos então extrair uma subcobertura finita $\{B_\epsilon(y_1), \dots, B_\epsilon(y_n)\}$. Isso significa que, dado $y \in \overline{T(U)}$, existe um $j = 1, \dots, n$ tal que $\|y - y_j\| < \epsilon$, ou seja, $\overline{T(U)}$ é totalmente limitado. Resta mostrar que $T(U)$ é totalmente limitado. Dado $\epsilon > 0$, existem $y_1, \dots, y_n \in \overline{T(U)}$ tais que para $y \in \overline{T(U)}$ existe $j = 1, \dots, n$ de modo que $\|y - y_j\| < \epsilon/2$. Se $y_i \in T(U)$, $i = 1, \dots, n$, não há o que mostrar. Caso contrário, existe $y_j \in \overline{T(U)} \setminus T(U)$. Nesse caso podemos garantir a existência de $y'_j \in B_{\epsilon/2}(y_j) \cap T(U)$. Consideremos então $B_\epsilon(y'_j)$ no lugar de $B_{\epsilon/2}(y_j)$ (observando que $B_{\epsilon/2}(y_j) \subset B_\epsilon(y'_j)$). Continuando o processo obtemos $y'_1, \dots, y'_n \in T(U)$

tais que dado $y \in T(U)$ existe $j = 1, \dots, n$, tal que $\|y - y'_j\| < \epsilon$. Isso garante que $T(U)$ é totalmente limitado.

(ii) $\Rightarrow$ i)) Suponhamos agora que exista $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ cobertura aberta de $\overline{T(U)}$ que não possua subcobertura finita. Como $T(U)$ é totalmente limitado, podemos cobrir $T(U)$ por bolas fechadas de diâmetros menores que 1. Fazendo a interseção dessas bolas com $\overline{T(U)}$, expressamos tal conjunto como uma união finita de conjuntos fechados de diâmetro menor que 1. Pelo menos um desses, digamos X_1 , não pode ser coberto por um número finito dos $\{A_\lambda\}$. Agora X_1 é totalmente limitado (pois $X_1 \subset \overline{T(U)}$) e pode ser escrito como união finita de conjuntos fechados de diâmetro menor que $1/2$. Dentre eles, existe pelo menos um, digamos X_2 , que não é coberto por um número finito dos $\{A_\lambda\}$. Assim obtemos uma sequência $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ de conjuntos fechados de $\overline{T(U)}$ tais que $\text{diam } X_n < 1/n$ e X_n não é coberto por uma quantidade finita dos $\{A_\lambda\}$. Em particular, $X_n \neq \emptyset$, para todo n . Logo existe $y \in \overline{T(U)}$, tal que $\{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Como $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma cobertura de $\overline{T(U)}$, $y \in A_\lambda$, para algum $\lambda \in I$. Agora A_λ é aberto e $B_{1/n}(y) \subset A_\lambda$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas $y \in X_n$ e $\text{diam } X_n < 1/n$, o que significa $X_n \subset B_{1/n}(y) \subset A_\lambda$, uma contradição.

(ii) $\Rightarrow$ iii)) Seja $(x_n) \subset H$ limitada. Suponhamos sem perda de generalidade $(x_n) \subset U$. Seja $\epsilon = 1$. Como $T(U)$ é totalmente limitado, existem $y_1, \dots, y_k \in T(U)$ tais que para $y \in T(U)$ existe $j = 1, \dots, k$ de modo que $\|y - y_j\| < 1$. Consideremos $B_1(y_j)$, $j = 1, \dots, k$. Existe $i_1 = 1, \dots, k$ tal que $B_1(y_{i_1})$ contém infinitos (Tx_n) . Seja n_1 o menor índice tal que $Tx_{n_1} \in B_1(y_{i_1})$. Agora $B_1(y_{i_1})$ é totalmente limitado (basta utilizarmos a argumentação do item anterior, descartando as bolas que não possuam elementos de $B_1(y_{i_1})$). Seja então $\epsilon = 1/2$, repetindo o feito acima é possível encontrar $B_{1/2}(y_{i_2})$ que contém infinitos (Tx_n) e n_2 menor inteiro maior que n_1 tal que $Tx_{n_2} \in B_{1/2}(y_{i_2})$. Continuando o processo obtemos (Tx_{n_k}) subsequência de (Tx_n) tal que $\|Tx_{n_k} - Tx_{n_j}\| < \frac{2}{k}$, se $n_k < n_j$, ou seja, (Tx_{n_k}) é uma sequência de Cauchy, logo convergente.

(iii) $\Rightarrow$ ii)) Reciprocamente suponhamos que se $(x_n) \subset H$ é uma sequência limitada, então existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que (Tx_{n_k}) é convergente. Vamos mostrar que é possível cobrir $T(U)$ com um número finito de bolas de raio ϵ . De fato, dado $\epsilon > 0$ seja $x_1 \in U$. Se tivermos $T(U) \subset B_\epsilon(Tx_1)$ o resultado está provado. Senão existe $x_2 \in U$ tal que $\|Tx_2 - Tx_1\| \geq \epsilon$. Agora se $B_\epsilon(Tx_1) \cup B_\epsilon(Tx_2)$ contiver $T(U)$, o resultado está provado. Caso contrário existe $x_3 \in U$ de modo que $\|Tx_3 - Tx_1\| \geq \epsilon$ e $\|Tx_3 - Tx_2\| \geq \epsilon$. Se o processo encerrar após um número finito de etapas concluímos $T(U)$ totalmente limitado. Agora se o processo não para, obteremos uma sequência $(x_n) \subset U$, tal que $\|Tx_n - Tx_m\| \geq \epsilon$, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ distintos. Isso significa que (Tx_n) não possui subsequência convergente, contradizendo a hipótese. ■

Definição 1.12. Uma *álgebra* é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ munido de uma aplicação bilinear $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $a, b, c \in \mathcal{A}$,

- i) $(a.b).c = a.(b.c)$
- ii) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(a + b).c = a.c + b.c$

Exemplo. O espaço vetorial $\mathbb{C}$ (sobre $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) dos números complexos munido da soma e multiplicação usual é uma álgebra.

O espaço vetorial complexo $B(H)$ munido das operações de adição e composição de operadores é uma álgebra.

Nosso estudo será focado na álgebra $B(H)$. Entretanto, para o próximo conceito podemos considerar uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ arbitrária.

Definição 1.13. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Se $\mathcal{I}$ é um subconjunto de $\mathcal{A}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) Se $a, b \in \mathcal{I}$, então $a + b \in \mathcal{I}$
- ii) Se $a \in \mathcal{I}$ e $b \in \mathcal{A}$, então $ab \in \mathcal{I}$
- iii) Se $a \in \mathcal{I}$ e $b \in \mathcal{A}$, então $ba \in \mathcal{I}$

Diremos então que $\mathcal{I}$ é um **ideal** de $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{I}$ satisfizer apenas i) e ii) (respectivamente i) e iii)) vamos dizer que $\mathcal{I}$ é um **ideal à direita** (respectivamente **à esquerda**) de $\mathcal{A}$.

Os conjuntos $\{0\}$ e $\mathcal{A}$ são ideais de $\mathcal{A}$, chamados **ideais triviais**.

Exemplo. O conjunto $F(H)$ dos operadores de posto finito é um ideal de $B(H)$.

De fato,

- i) Sejam $A, B \in F(H)$. Então existem $u_i, v_i, \alpha_i, \beta_i \in H$ tais que $Ax = \sum_{i=1}^n (x, u_i)v_i$

e $Bx = \sum_{i=1}^m (x, \alpha_i)\beta_i$. Dessa forma temos $R(A + B) = [v_1, \dots, v_n, \beta_1, \dots, \beta_m]$, ou seja $\dim R(A + B) < \infty$. Logo $A + B \in F(H)$.

- ii) Se $Ax = \sum_{i=1}^n (x, u_i)v_i$ e $B \in B(H)$, então

$$ABx = \sum_{i=1}^n (Bx, u_i)v_i = \sum_{i=1}^n (x, B^*u_i)v_i = \sum_{i=1}^n (x, w_i)v_i, \text{ onde } w_i = B^*u_i$$

Assim $AB \in F(H)$.

- iii) Temos

$$BAx = B \left(\sum_{i=1}^n (x, u_i)v_i \right) = \sum_{i=1}^n (x, u_i)Bv_i = \sum_{i=1}^n (x, u_i)w_i, \text{ com } w_i = Bv_i$$

Logo $BA \in F(H)$.

Exemplo. O conjunto $K(H)$ dos operadores compactos é um ideal de $B(H)$.

Para mostrar isso vamos usar que um conjunto fechado contido em um compacto também é compacto e que se A e B são compactos então $A + B$ é compacto.

i) Sejam $T, S \in K(H)$ e $U = \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$. Temos $(T + S)(U) \subset T(U) + S(U)$ daí

$$\overline{(T + S)(U)} \subset \overline{T(U) + S(U)} \subset \overline{T(U)} + \overline{S(U)}$$

Como $\overline{T(U)}$ e $\overline{S(U)}$, por hipótese, são compactos $\overline{T(U)} + \overline{S(U)}$ também é. Daí $\overline{T(U) + S(U)}$ é compacto. Logo $T + S \in K(H)$.

ii) Se $T \in K(H)$ e $S \in B(H)$ então existe $\lambda > 0$, tal que $S(U) \subset \lambda U$. Logo

$$\overline{TS(U)} \subset \overline{\lambda T(U)}$$

Como $T \in K(H)$, $\overline{\lambda T(U)}$ é compacto e daí $\overline{TS(U)}$ é compacto, ou seja $TS \in K(H)$.

iii) Agora, como $T \in K(H)$ e S é contínuo, $S(\overline{T(U)})$ é compacto. Além disso temos que $ST(U) \subset S(\overline{T(U)})$. Então

$$\overline{ST(U)} \subset \overline{S(\overline{T(U)})} = S(\overline{T(U)})$$

Logo $\overline{ST(U)}$ é compacto. Portanto $ST \in K(H)$.

Teorema 1.17. Seja $T \in B(H)$. Então T é compacto se e somente se existe uma sequência (T_n) de operadores de posto finito tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $T : H \rightarrow H$ compacto. Pelo Teorema 1.6 item b) podemos escrever $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} (Tx, e_i) e_i$, onde (e_i) é um conjunto ortonormal completo. Definamos a sequência (T_n) por $T_n x = \sum_{i=1}^n (Tx, e_i) e_i$. Notemos que T_n é um operador de posto finito para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{i=n_0}^{\infty} (Tx, e_i) e_i \right\| < \epsilon$, para todo $x \in U$. Suponhamos que isso não ocorra, então existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar $x_n \in U$ tal que $\left\| \sum_{i=n}^{\infty} (Tx_n, e_i) e_i \right\| \geq 2\epsilon$. Por outro lado T é compacto e, pela Proposição 1.3 item iii), existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que (Tx_{n_k}) converge, digamos para $y \in \overline{T(U)}$. Então existe n_{k_0} de modo que, se $n_k > n_{k_0}$, $\|Tx_{n_k} - y\| < \epsilon$. Daí segue que, para todo $n_k > n_{k_0}$,

$$\begin{aligned} 2\epsilon &\leq \left\| \sum_{i=n_k}^{\infty} (Tx_{n_k}, e_i) e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=n_k}^{\infty} (y, e_i) e_i \right\| + \left\| \sum_{i=n_k}^{\infty} (Tx_{n_k} - y, e_i) e_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=n_k}^{\infty} (y, e_i) e_i \right\| + \|Tx_{n_k} - y\| < \left\| \sum_{i=n_k}^{\infty} (y, e_i) e_i \right\| + \epsilon \end{aligned}$$

ou seja, $\left\| \sum_{i=n_k}^{\infty} (y, e_i) e_i \right\| > \epsilon$, para $n_k > n_{k_0}$. Mas, pelo Teorema 1.6, item b), $y = \sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i) e_i$

e existe $n'_k > n_{k_0}$ tal que $\left\| \sum_{i=n'_k}^{\infty} (y, e_i) e_i \right\| < \epsilon$, contradição. Então, para $n > n_0$, temos

$$\|T - T_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T - T_n)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (Tx, e_i) e_i \right\| < \epsilon$$

ou seja, T é aproximado por operadores de posto finito.

($\Leftarrow$) Suponhamos que, para $T \in B(H)$, exista uma sequência de operadores de posto finito (T_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$. Sejam $\epsilon > 0$ e uma sequência $(x_n) \in H$ limitada. Por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_n\| < \frac{\epsilon}{4M}$, para $n \geq N$, onde $\|x_n\| < M$, $n \in \mathbb{N}$. Como todo operador de posto finito é compacto, fixado $n > N$ existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $(T_n(x_{n_k}))$ é convergente. Então $(T_n(x_{n_k}))$ é uma sequência de Cauchy e existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|T_n x_{n_k} - T_n x_{n_l}\| < \frac{\epsilon}{2}$, para $n_k, n_l > n_0$. Tomando $n_k, n_l > n_0$ temos

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| &\leq \|(T - T_n)x_{n_k}\| + \|T_n x_{n_k} - T_n x_{n_l}\| + \|(T_n - T)x_{n_l}\| \\ &\leq 2M\|T - T_n\| + \|T_n x_{n_k} - T_n x_{n_l}\| < 2M\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Logo (Tx_{n_k}) é uma sequência de Cauchy e, pela Proposição 1.3 item *iii*), T é compacto. ■

Lema 1.3. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ operador linear limitado. Então T é compacto se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe um subespaço Y_ϵ de F de dimensão finita tal que $\|Q_{Y_\epsilon} T\| < \epsilon$, onde $Q_{Y_\epsilon} : F \rightarrow F/Y_\epsilon$ é a aplicação quociente.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se T é compacto, então pela Proposição 1.3, $T(U)$ é totalmente limitado. Dessa forma, dado $\epsilon > 0$, existem $x_1, \dots, x_n \in U$ de modo que, para $x \in U$, existe um $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que $\|Tx - Tx_j\| < \epsilon$. Consideremos $Y_\epsilon = [Tx_1, \dots, Tx_n] \subset F$. Agora, como $Q_{Y_\epsilon} Tx_i = 0$, com $i = 1, \dots, n$, temos

$$\|Q_{Y_\epsilon} Tx\| = \inf\{\|y\|, y \in \overline{Tx}\} \leq \|Tx - Tx_j\| < \epsilon, \quad x \in U$$

onde a penúltima desigualdade decorre do fato de que $Tx - Tx_j$ é elemento de $\overline{Tx}$. Logo $\|Q_{Y_\epsilon} T\| < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Seja dado $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $Y_{\epsilon/3}$, subespaço de dimensão finita de F , tal que $\|Q_{Y_{\epsilon/3}} T\| < \epsilon/3$. Seja $K = \{y \in Y_{\epsilon/3}, \text{dist}(y, T(U)) < \epsilon/3\}$. Como $T(U)$ é limitado, K também é. Sendo um conjunto limitado do espaço de dimensão finita $Y_{\epsilon/3}$, K é totalmente limitado. Assim existem $y_1, \dots, y_m \in K$ tais que, para cada $y \in K$, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\|y - y_j\| < \epsilon/3$. Como $\text{dist}(y, T(U)) = \inf\{\|y - Tx\|, x \in U\}$, temos que, para cada $j = 1, \dots, m$, existe $x_j \in U$ tal que $\|y_j - Tx_j\| < \epsilon/3$. Seja $x \in U$. Como $\|Q_{Y_{\epsilon/3}} T\| < \epsilon/3$, $\|Q_{Y_{\epsilon/3}} Tx\| < \epsilon/3$ e existe $y \in K$ tal que $\|Tx - y\| < \epsilon/3$. Seja então $j \in \{1, \dots, m\}$, de modo que $\|y - y_j\| < \epsilon/3$. Então

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_j\| &\leq \|Tx - y\| + \|y - y_j\| + \|y_j - Tx_j\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

ou seja, $T(U)$ é totalmente limitado. Portanto T é compacto. ■

Lema 1.4. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ operador linear limitado. Dado $\epsilon > 0$, consideremos X um subespaço fechado de E , com $\dim E \setminus X < \infty$, tal que $\|T|_X\| < \epsilon/3$. Então existe um subespaço $X_0 \subset E$ cuja dimensão é finita e tal que $\|Q_{TX_0}T\| < \epsilon$, onde $Q_{TX_0} : F \rightarrow F/TX_0$ é a aplicação quociente.*

Demonstração: Usaremos o seguinte fato (ver [4], pág.12): Todo espaço de Banach E é isometricamente isomorfo a um subespaço fechado de $C(K)$, onde K é um espaço compacto de Hausdorff.

Seja $\varphi : F \rightarrow C(K)$ o isomorfismo isométrico acima e $a_y : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$, $a_y(f) = f(y)$. Consideremos $\psi_y = (a_y \circ \varphi \circ T|_X)$, $y \in \varphi \circ T(E)$. Notemos que ψ_y é um funcional linear contínuo sobre X . Pelo Corolário do Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice) é possível obter um funcional linear $\tilde{\psi}_y : E \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\psi}_y|_X = \psi_y$ e $\|\tilde{\psi}_y\| = \|\psi_y\|$. Notemos que, para $\|y\| = 1$, temos $\|\tilde{\psi}_y\| = \|\psi_y\| \leq \|T\|$, pois $\|a_y\| = \|y\| = 1$ e φ é uma isometria. Consideramos $\tilde{T} = (\tilde{\psi}_y)_{y \in \varphi \circ T(E)}$, o operador linear gerado por $(\tilde{\psi}_y)_{y \in \varphi \circ T(E)}$. Então $\tilde{T} : E \rightarrow C(K)$ é contínuo com $\tilde{T}|_X = T$ e $\|\tilde{T}\| = \|T|_X\| < \epsilon/3$, pelo resultado acima. Através da inversa da isometria φ , temos $\tilde{T} : E \rightarrow F$.

Seja $S = T - \tilde{T}$. Temos $S|_X = 0$. Como $\dim E \setminus X < \infty$, S é um operador de posto finito, logo compacto. Então existe $x_1, \dots, x_n \in U$ tais que, dado $x \in U$ existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\|Sx - Sx_j\| < \epsilon/3$. Daí,

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \|Tx - \tilde{T}x - Tx_j + \tilde{T}x_j + \tilde{T}x - \tilde{T}x_j\| \\ &\leq \|Sx - Sx_j\| + \|\tilde{T}x - \tilde{T}x_j\| < \frac{\epsilon}{3} + 2\|\tilde{T}\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Se considerarmos $X_0 = [x_1, \dots, x_n]$ vemos a partir da desigualdade acima (como no Lema 1.3), que $\|Q_{TX_0}T\| < \epsilon$. ■

Corolário 1.3. *Sejam E e F espaços de Banach, e T um operador linear limitado com a seguinte propriedade: Dado $\epsilon > 0$, existe X_ϵ subespaço fechado de E com $\dim E \setminus X_\epsilon < \infty$, tal que $\|T|_{X_\epsilon}\| < \epsilon$. Então T é compacto.*

Teorema 1.18 (Schauder). *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \rightarrow F$ operador linear limitado. São equivalentes:*

- i) T é compacto.
- ii) Dado $\epsilon > 0$, existe um subespaço Y_ϵ de F de dimensão finita, tal que $\|Q_{Y_\epsilon}T\| < \epsilon$, onde $Q_{Y_\epsilon} : F \rightarrow F/Y_\epsilon$ é a aplicação quociente.
- iii) Dado $\epsilon > 0$, existe X_ϵ um subespaço fechado de E , com $\dim E \setminus X_\epsilon < \infty$, tal que $\|T|_{X_\epsilon}\| < \epsilon$.
- iv) T^* é compacto.

Demonstração: $(i) \Leftrightarrow ii)$: Lema 1.3

$(iii) \Rightarrow ii)$: Lema 1.4

$(ii) \Rightarrow iv)$: Seja dado $\epsilon > 0$. Por hipótese existe Y_ϵ subespaço de dimensão finita de F tal que $\|Q_{Y_\epsilon}T\| < \epsilon$. Seja $X_\epsilon = \{x^* \in F^*, x^*(y) = 0, \text{ para todo } y \in Y_\epsilon\}$ o anulador de Y_ϵ em F^* . Podemos escrever

$$F^* = X_\epsilon \oplus Z_\epsilon$$

onde $Z_\epsilon = \{x^* \in F^*, x^*(y) = 0, y \in F \setminus Y_\epsilon\} = \{x^* \in F^*, x^*(y) \neq 0, \text{ para algum } y \in Y_\epsilon\}$. Então Z_ϵ consiste dos funcionais sobre F que são nulos a menos de um subespaço de Y_ϵ , que possui dimensão finita, digamos n . Logo

$$\dim F^* \setminus X_\epsilon = \dim Z_\epsilon = n$$

ou seja, a dimensão de $F^* \setminus X_\epsilon$ é finita. Para quaisquer $x \in E$ e $f \in X_\epsilon$, temos

$$T^*(f)x = f \circ Tx = f(Tx + Y_\epsilon) = f(Q_{Y_\epsilon}Tx) = (Q_{Y_\epsilon}T)^*(f)x, \text{ ou seja, } T^*|_{X_\epsilon} = (Q_{Y_\epsilon}T)^*$$

e assim $\|T^*|_{X_\epsilon}\| < \epsilon$. Pelo corolário anterior, concluímos que T^* é compacto.

$(iv) \Rightarrow iii)$: Seja dado $\epsilon > 0$. Como T^* é compacto, pelo Lema 1.3 existe um subespaço Y_ϵ de dimensão finita de E^* , tal que $\|Q_{Y_\epsilon}T^*\| < \epsilon$. A partir disso podemos seguir a mesma argumentação utilizada no item anterior e obter um subespaço fechado X_ϵ de E^{**} com $\dim E \setminus X_\epsilon < \infty$, tal que $\|T^{**}|_{X_\epsilon}\| < \epsilon$. Consequentemente $\|T|_{X_\epsilon \cap E}\| < \epsilon$, lembrando que E é isométricamente isomorfo a um subespaço de E^{**} (ver [5], pág. 19). Novamente pelo corolário anterior, concluímos T compacto, o que é equivalente a ii). ■

Corolário 1.4. *Seja $T \in B(H)$. São equivalentes:*

i) T é compacto.

ii) TT^ é compacto.*

*iii) T^*T é compacto.*

Demonstração: $(i) \Rightarrow ii)$ Basta lembrarmos que $K(H)$ é um ideal de $B(H)$.

$(ii) \Rightarrow iii)$ Como TT^* é compacto, o Teorema de Schauder garante que $T^*T = (TT^*)^*$ é compacto.

$(iii) \Rightarrow i)$ Seja (x_n) uma sequência limitada, digamos $\|x_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se T^*T é compacto, pela Proposição 1.3, (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) tal que $(T^*Tx_{n_k})$ converge. Então $(T^*Tx_{n_k})$ é uma sequência de Cauchy e temos

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\|^2 &= \|T(x_{n_k} - x_{n_l})\|^2 = (T(x_{n_k} - x_{n_l}), T(x_{n_k} - x_{n_l})) = (T^*T(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}) \\ &\leq 2M\|T^*T(x_{n_k} - x_{n_l})\| < \epsilon, \text{ para } n_k \text{ e } n_l \text{ suficientemente grandes.} \end{aligned}$$

Isso significa que (Tx_{n_k}) também é uma sequência de Cauchy, logo convergente. Portanto T é compacto pela Proposição 1.3. ■

Proposição 1.4. *Se $T \in K(H)$, $S \in B(H)$ e $S^*S \leq T^*T$, então $S \in K(H)$.*

Demonstração: Seja (x_n) sequência limitada em H . Como T é compacto existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que $(T(x_{n_k}))$ é convergente, ou equivalentemente, uma sequência de Cauchy. Temos:

$$\begin{aligned} \|Sx_{n_k} - Sx_{n_l}\|^2 &= (S(x_{n_k} - x_{n_l}), S(x_{n_k} - x_{n_l})) = (S^*S(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}) \\ &\leq (T^*T(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}) = (T(x_{n_k} - x_{n_l}), T(x_{n_k} - x_{n_l})) \\ &= \|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\|^2 < \epsilon \end{aligned}$$

para n_k e n_l suficientemente grandes. Então (Sx_{n_k}) é uma sequência de Cauchy, ou seja, convergente. Logo S é compacto. ■

Capítulo 2

As Representações de Schur, de Schmidt e a Desigualdade de Weyl

Neste capítulo introduzimos as representações de Schur e de Schmidt que serão de grande utilidade nos capítulos seguintes. Após apresentarmos alguns resultados básicos sobre operadores lineares auto-adjuntos, concluímos o capítulo introduzindo as classes de Schatten e apresentando a chamada desigualdade de Weyl.

2.1 Representações de Schur e de Schmidt

Teorema 2.1. *Se $T \in B(H)$ é compacto auto-adjunto e não-nulo, então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T . Além disso, existe $x \in H$, $\|x\| = 1$ tal que $|(Tx, x)| = \|T\|$.*

Demonstração: No Teorema 1.16 vimos que, se T é auto-adjunto, $\|T\| = \max\{|m(T)|, |M(T)|\}$, onde $m(T) = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$ e $M(T) = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)$. Independente do caso $\|T\| = |M(T)|$ ou $\|T\| = |m(T)|$ é possível obter uma sequência $(x_n) \subset H$ com $\|x_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n, x_n) = a$ e $|a| = \|T\|$. Agora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_n - ax_n\|^2 = (Tx_n - ax_n, Tx_n - ax_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - (Tx_n, ax_n) - (ax_n, Tx_n) + (ax_n, ax_n) \\ &\leq \|T\|^2 \|x_n\|^2 - 2a(Tx_n, x_n) + a^2 \|x_n\|^2 = 2a^2 - 2a(Tx_n, x_n) \end{aligned}$$

Mostrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n - ax_n) = 0$. Por outro lado, T é compacto e (x_n) está contida na esfera unitária de H . Pela Proposição 1.3, existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) tal que (Tx_{n_k}) converge. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n - ax_n) = 0$ e $T \neq 0$, temos que (x_{n_k}) converge, digamos, para x . Notemos que $\|x\| = 1$, pois $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade de T ,

$$Tx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} ax_{n_k} = ax$$

Como $x \neq 0$ ($\|x\| = 1$) e $a \in \mathbb{R}$, concluímos que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T .

Para a outra parte do teorema, basta observar que $\|x\| = 1$ e

$$|(Tx, x)| = |(ax, x)| = |a|(x, x) = \|T\|$$

■

De posse do teorema acima, dado um operador $T \in K(H)$ auto-adjunto, podemos obter uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ de autovalores de T tal que $|\lambda_1| = \|T\| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ e uma sequência ortonormal $(x_n) \subset H$ de autovetores associados.

Método de Ordenação. *Seja $T \in B(H)$ compacto, auto-adjunto e não nulo. Sejam λ_1 e x_1 o autovalor e o autovetor respectivamente obtidos no Teorema 2.1. Sejam ainda os espaços $H_0 = H$ e $H_1 = [x_1]^\perp = \{x \in H, (x, x_1) = 0\}$. Temos que H_1 é um subespaço fechado de H , consequentemente é um espaço de Hilbert.*

Consideremos $T_1 = T|_{H_1}$. Seja $x \in H_1$, então

$$(T_1x, x_1) = (Tx, x_1) = (x, Tx_1) = (x, \lambda_1x_1) = \lambda_1(x, x_1) = 0$$

ou seja, $T_1x \in H_1$. Como $T(H_1) \subset H_1$ e $T_1 = T|_{H_1}$, temos que $T_1 \in B(H_1)$ é compacto e auto-adjunto. Se $T_1 \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 2.1 em T_1 obtendo λ_2 e x_2 tais que $\|x_2\| = 1$, $x_2 \in H_1$, $Tx_2 = T_1x_2 = \lambda_2x_2$ e $|\lambda_2| = \|T_1\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$ e $(x_1, x_2) = 0$. Seja $H_2 = [x_1, x_2]^\perp = \{x \in H, (x, x_1) = (x, x_2) = 0\}$. Agora H_2 é subespaço fechado de H_1 (ou de H), isto é, um espaço de Hilbert. Restringindo T_1 a H_2 podemos proceder como anteriormente.

Continuando esse processo obtemos autovalores não-nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de T com autovetores ortonormais associados $x_1, \dots, x_n$, subespaços fechados de H (consequentemente de Hilbert)

$$H = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = [x_1, \dots, x_n]^\perp \text{ e } |\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \dots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|.$$

Observamos que se o procedimento para após n etapas, isto é, $T_n = 0$, então obtemos $R(T) \subset [x_1, \dots, x_n]$ e T é um operador de posto finito. Agora, sendo $x \in H$, consideremos $y = x - \sum_{i=1}^n (x, x_i)x_i$. Então

$$\begin{aligned} (y, x_j) &= \left(x - \sum_{i=1}^n (x, x_i)x_i, x_j \right) = (x, x_j) - \sum_{i=1}^n (x, x_i)(x_i, x_j) \\ &= (x, x_j) - (x, x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ou seja, $y \in [x_1, \dots, x_n]^\perp$. Daí $Ty = T_ny = 0$ e

$$Tx = \sum_{i=1}^n (x, x_i)Tx_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x, x_i)x_i.$$

Teorema 2.2 (Schur). *Seja $T \in B(H)$ compacto auto-adjunto e não nulo. O procedimento acima fornece uma sequência de autovalores não-nulos $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e uma sequência ortonormal $x_1, x_2, \dots$ de autovetores associados. Se tal sequência é infinita,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0 .$$

Além disso, para $x \in H$,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, x_n) x_n$$

Se G_p é o autoespaço associado a λ_p , então a dimensão de G_p é igual ao número de vezes que λ_p aparece na sequência (λ_n) .

Além disso, o espectro de T é

$$\sigma(T) = (\lambda_n) \cup \{0\}$$

Demonstração: Admitindo que (λ_n) é uma sequência infinita, suponhamos $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| \neq 0$. Então existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (λ_{n_k}) de (λ_n) com $|\lambda_{n_k}| \geq \epsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos a sequência $(\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k})$. Temos

$$\|\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k}\| = |\lambda_{n_k}|^{-1} \leq 1/\epsilon$$

ou seja, $(\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k})$ é limitada. Como T é compacto, pela Proposição 1.3 $(T\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k})$ possui uma subsequência convergente. Mas

$$T\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k} = \lambda_{n_k}^{-1} T x_{n_k} = \lambda_{n_k}^{-1} \lambda_{n_k} x_{n_k} = x_{n_k}$$

e

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - x_{n_l}\|^2 &= (x_{n_k} - x_{n_l}, x_{n_k} - x_{n_l}) = (x_{n_k}, x_{n_k}) - (x_{n_k}, x_{n_l}) - (x_{n_l}, x_{n_k}) + (x_{n_l}, x_{n_l}) \\ &= \|x_{n_k}\|^2 + \|x_{n_l}\|^2 = 2, \text{ para quaisquer } k, l \in \mathbb{N} \text{ com } k \neq l \end{aligned}$$

Então $(T\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k})$ não pode ter subsequência convergente. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$.

Observemos agora que (x_n) é um conjunto ortonormal completo em $\overline{[(x_n)]} = \tilde{H}$. Se $y \in \tilde{H}$, podemos escrever $y = \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n) x_n$ (Teorema 1.6). Como T é contínuo,

$$Ty = \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n) T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n) \lambda_n x_n$$

Seja $x \in H$. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n = x - \sum_{i=1}^n (y, x_i) x_i = Px$, onde P é a projeção de H sobre $[x_1, \dots, x_n]^\perp$. Como $\|P\| = 1$, temos $\|y_n\| \leq \|x\|$. Agora $|\lambda_n| = \|T_n\|$, onde T_n é o operador definido no Método de Ordenação, temos

$$\|Ty_n\| = \|T_n y_n\| \leq \|T_n\| \|y_n\| \leq |\lambda_n| \|x\|$$

Isso nos diz que $\lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = 0$. Usando novamente a continuidade de T , temos

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x, x_i)x_i$$

Mostremos que a dimensão de G_p é exatamente igual ao número de vezes que λ_p aparece na sequência (λ_n) . Como (x_n) é ortonormal (por conseguinte um conjunto linearmente independente) a dimensão de $N(\lambda_p I - T) = \{x \in H, (\lambda_p I - T)x = 0\}$ é maior ou igual ao número de vezes que λ_p aparece na sequência (λ_n) . Suponhamos que a dimensão de $N(\lambda_p I - T)$ é infinita. Então é possível encontrar um conjunto ortonormal (y_k) infinito tal que $Ty_k = \lambda_n y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela compacidade de T , (Ty_k) possui subsequência convergente, contradizendo $\|y_k - y_l\| = \sqrt{2}$, para quaisquer inteiros positivos k e l distintos (usando a mesma argumentação do Teorema 2.1). Agora, se a dimensão de $N(\lambda_p I - T)$ for estritamente maior que o número k de vezes que λ_p aparece na sequência (λ_n) , então $x \in N(\lambda_p I - T) \setminus [x_{n_1}, \dots, x_{n_1+k}]$ seria ortogonal a x_n para todo n , segundo o Método de Ordenação. Assim

$$\lambda_n x = Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x, x_i)x_i = 0$$

implicando em $x = 0$, uma contradição. Logo a dimensão de $N(\lambda_p I - T)$ é o número de repetições de λ_p na sequência (λ_n) . Mas $N(\lambda_p I - T)$ é o autoespaço G_p de λ_p .

Por último, como $\sigma(T)$ é fechado, $\lambda_n \in \sigma(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, concluímos que $0 \in \sigma(T)$. Assim $\{\lambda_n\} \cup \{0\} \subset \sigma(T)$. Seja $\lambda \in \sigma(T)$. Se $\lambda = 0$, não há o que provar. Suponhamos $\lambda \neq 0$. Então $\lambda I - T$ não é invertível e, de acordo com o Teorema 1.11, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $y_n \in H$ com $\|y_n\| = 1$ tal que $\|(\lambda I - T)y_n\| \leq 1/n$. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda I - T)y_n = 0 \quad (*)$$

Utilizando a compacidade de T , é possível extrair uma subsequência (y_{n_k}) de (y_n) tal que $\lim_{n_k \rightarrow \infty} Ty_{n_k} = y$ existe. Por $(*)$ temos que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \lambda y_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} Ty_{n_k} = y$$

Como $\lambda \neq 0$ e $\|y_{n_k}\| = 1$, para todo n_k temos $y \neq 0$. Assim

$$0 = \lim_{n_k \rightarrow \infty} (\lambda I - T)y_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \lambda y_{n_k} - \lim_{n_k \rightarrow \infty} Ty_{n_k} = y - T(\lambda^{-1}y) \Rightarrow Ty = \lambda y$$

ou seja, λ é um autovalor de T . Tomando $y_0 = y/\|y\|$, temos

$$\begin{aligned} \lambda(y_0, x_m) &= (\lambda y_0, x_m) = (Ty_0, x_m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(y_0, x_i)x_n, x_m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(y_0, x_i)(x_n, x_m) = \lambda_m(y_0, x_m) \end{aligned}$$

ou seja $\lambda = \lambda_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Com isso, $\sigma(T) \subset \{\lambda_n\} \cup \{0\}$ e temos a igualdade.

■

Pelo teorema que acabamos de provar, para $T \in B(H)$ não-nulo, compacto e auto-adjunto, podemos escrever

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, x_n)x_n$$

tal expressão será chamada a **representação de Schur** de T relativa ao conjunto ortonormal completo (x_n) .

Para obtermos a representação de Schmidt provaremos inicialmente que todo operador compacto auto-adjunto tem raiz quadrada positiva. Daí obteremos a chamada decomposição polar e a representação supracitada. Começaremos explicitando o que entendemos por raiz quadrada positiva de um operador.

Definição 2.1. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto e positivo. Se existe $A \in B(H)$, auto-adjunto tal que $A^2 = T$, dizemos que A é **raiz quadrada** de T . Se, além disso, A for positivo, A é chamado **raiz quadrada positiva** de T e escrevemos $A = T^{1/2}$.*

Teorema 2.3. *Sejam $T, S \in B(H)$. Se T e S são positivos e $TS = ST$, então TS é positivo.*

Demonstração: Se $S = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos $S \neq 0$ e definimos a sequência (S_n) indutivamente por $S_1 = \frac{S}{\|S\|}$ e $S_{n+1} = S_n - S_n^2$. Vamos provar que $0 \leq S_n \leq I$, $n \in \mathbb{N}$. Como S é positivo e $S_1 = \frac{S}{\|S\|}$ temos, $0 \leq S_1 \leq I$, pelo Teorema 1.14.

Suponhamos que $0 \leq S_n \leq I$ e provemos que $0 \leq S_{n+1} \leq I$. Antes disso notemos que

$$\begin{aligned} S_n^2(I - S_n) + S_n(I - S_n)^2 &= S_n^2 - S_n^3 + S_n - 2S_n^2 + S_n^3 \\ &= S_n - S_n^2 = S_{n+1} \end{aligned}$$

Agora como $0 \leq S_n \leq I$, então $I - S_n$ é positivo. Observando que S_n e $(I - S_n)$ comutam, temos

$$\begin{aligned} (S_{n+1}x, x) &= ((S_n^2(I - S_n) + S_n(I - S_n)^2)x, x) \\ &= (S_n(I - S_n)S_nx, x) + ((I - S_n)S_n(I - S_n)x, x) \\ &= ((I - S_n)S_nx, S_nx) + (S_n(I - S_n)x, (I - S_n)x) \geq 0, \quad x \in H \end{aligned}$$

e S_{n+1} é positivo. Além disso,

$$((I - S_{n+1})x, x) = ((I - S_n)x, x) + (S_n^2x, x) \geq 0, \quad x \in H$$

e $S_{n+1} \leq I$. Logo $S_{n+1} = S_n - S_n^2$ define uma sequência de operadores auto-adjuntos, tais que $0 \leq S_n \leq I$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$\sum_{i=1}^n S_i^2 = \sum_{i=1}^n (S_i - S_{i+1}) = S_1 - S_{n+1} \leq S_1$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|S_i x\|^2 &= \sum_{i=1}^n (S_i x, S_i x) = \sum_{i=1}^n (S_i^2 x, x) = \left(\sum_{i=1}^n S_i^2 x, x \right) \\ &\leq (S_1 x, x), \text{ para quaisquer } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in H \end{aligned}$$

Logo $\sum_{i=1}^{\infty} \|S_i x\|^2 < \infty$. Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x = 0$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade $\sum_{i=1}^n S_i^2 x = S_1 x - S_{n+1} x$, obtemos $\left(\sum_{i=1}^{\infty} S_i^2 \right) x = S_1 x$. Notemos agora que se T comuta com S , T comuta com S_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\left(T \left(\sum_{i=1}^n S_i^2 \right) x, x \right) = \sum_{i=1}^n (S_i T S_i x, x) = \sum_{i=1}^n (T S_i x, S_i x) \geq 0, \quad x \in H$$

pela positividade de T . Assim

$$(T S_1 x, x) = \left(T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_i^2 \right) x, x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T \left(\sum_{i=1}^n S_i^2 \right) x, x \right) \geq 0, \quad x \in H$$

pela continuidade de T e do produto interno. Logo TS é positivo. ■

Lema 2.1. *Se $A, B, T \in B(H)$ são auto-adjuntos e $A \leq T \leq B$, então $\|T\| \leq \max\{\|A\|, \|B\|\}$.*

Demonstração: Seja $k = \max\{\|A\|, \|B\|\}$. Se $k = 0$, o resultado é obvio. Suponhamos $k > 0$ e, sendo $T_1 = T/k$, temos $\left\| \frac{A}{k} \right\| = \frac{\|A\|}{k} \leq 1$, pois $k \geq \|A\|$. Então, pelo Teorema 1.14, $-I \leq \frac{A}{k}$. Analogamente, $\frac{B}{k} \leq I$. Assim, $-I \leq T_1 \leq I$. Novamente pelo Teorema 1.14, $\|T_1\| \leq 1$, daí $\|T\| \leq k = \max\{\|A\|, \|B\|\}$, como queríamos. ■

Teorema 2.4. *Sejam $S, T_n \in B(H)$, auto-adjuntos e suponha $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq S$. Se $T_n T_m = T_m T_n$ e $S T_n = T_n S$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, então existe $T \in B(H)$, auto-adjunto, tal que $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$, $x \in H$.*

Demonstração: Consideremos (S_n) dada por $S_n = S - T_n$. É imediato da definição que S_n é auto-adjunto e positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que para $m < n$,

$$\begin{aligned} S_m^2 - S_m S_n &= S_m (S_m - S_n) = (S - T_m)(T_n - T_m) \\ &= (T_n - T_m)(S - T_m) \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de que T_n , T_m e S comutam dois a dois. Observemos ainda que $T_n - T_m$ e $S - T_m$ são positivos por hipótese. Pelo Teorema 2.3

$$S_m^2 - S_m S_n = (S - T_m)(T_n - T_m) \geq 0$$

ou seja, $S_m^2 \geq S_m S_n$. Pelos mesmos motivos

$$S_m S_n - S_n^2 = (S_m - S_n) S_n = (T_n - T_m)(S - T_n) \geq 0$$

e $S_m S_n \geq S_n^2$, ainda com $n > m$.

Então, para $m < n$, temos

$$(S_m^2 x, x) \geq (S_m S_n x, x) \geq (S_n^2 x, x), \quad x \in H$$

ou seja, $((S_n^2 x, x))$ é uma sequência decrescente de números reais (S_n é auto-adjunto) limitada inferiormente (por zero, visto que S_n é positivo). Logo $((S_n^2 x, x))$ é convergente. Agora, da desigualdade acima, obtemos $-2(S_m S_n x, x) \leq -2(S_n^2 x, x)$, daí

$$\begin{aligned} \|S_m x - S_n x\|^2 &= (S_m x - S_n x, S_m x - S_n x) \\ &= ((S_m - S_n)(S_m - S_n)x, x) \\ &= (S_m^2 x, x) - (S_m S_n x, x) - (S_n S_m x, x) + (S_n^2 x, x) \\ &= (S_m^2 x, x) - 2(S_m S_n x, x) + (S_n^2 x, x) \\ &\leq (S_m^2 x, x) - (S_n^2 x, x) \end{aligned}$$

Isso nos diz que $(S_n x)$ é uma sequência de Cauchy para qualquer $x \in H$. Como $S_n = S - T_n$, $(T_n x)$ é uma sequência de Cauchy e podemos, pela completude de H , definir $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. A verificação de que T é linear é simples. Para provar a continuidade, notemos que $T_n \in B(H)$, $n \in \mathbb{N}$ e que $T_1 \leq T_n \leq S \in B(H)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, pelo Lema 2.1, temos que, $\|T_n\| \leq \max\{\|T_1\|, \|S\|\} = k$, $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k \|x\| = k \|x\|, \quad x \in H$$

Por último, utilizando a continuidade do produto interno

$$(Tx, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x, T_n y) = (x, Ty), \quad \text{com } x, y \in H$$

ou seja, T é auto-adjunto. ■

Teorema 2.5. *Seja $T \in B(H)$ positivo. Então T possui uma única raiz quadrada positiva, em outras palavras, existe um único operador $A \in B(H)$ positivo tal que $T = A^2$.*

Demonstração: Se $T = 0$, basta tomar $A = 0$. Seja então $T \neq 0$. Afirmamos que, sem perda de generalidade, podemos supor $T \leq I$. De fato, se o resultado vale para $T \leq I$ e $S \neq 0$ é um operador positivo qualquer, consideramos $S_0 = S/\|S\|$. Existe $A \geq 0$ tal que $A^2 = S_0$. Seja $B = \|S\|^{1/2} A$. Notemos que B é positivo e mais,

$$B^2 = (\|S\|^{1/2} A)(\|S\|^{1/2} A) = \|S\| A^2 = \|S\| S_0 = S$$

Consideremos a sequência (A_n) dada por $A_0 = 0$ e $A_{n+1} = A_n + \frac{T - A_n^2}{2}$. Temos $A_n \in B(H)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Como A_n é combinação linear de potências de T , $A_n A_m = A_m A_n$ e $T A_n = A_n T$, com $n, m \in \mathbb{N}$. Agora $A_1 = T/2 \leq I$. Suponhamos que $A_n \leq I$ e mostremos que $A_{n+1} \leq I$. Com efeito,

$$\begin{aligned} I - A_{n+1} &= \left(I - A_n + \frac{A_n^2 - T}{2} \right) = \frac{2I - 2A_n + A_n^2 - T}{2} \\ &= \frac{I - 2A_n + A_n^2 + (I - T)}{2} = \frac{(I - A_n)^2 + (I - T)}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Logo $A_n \leq I$, $n \in \mathbb{N}$.

Novamente por indução, verifiquemos que $A_n \leq A_{n+1}$. Temos $A_0 = 0 \leq T/2 = A_1$. Se vale $A_{n-1} \leq A_n$,

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= \left(A_n + \frac{T - A_n^2}{2} \right) - \left(A_{n-1} + \frac{T - A_{n-1}^2}{2} \right) \\ &= A_n - A_{n-1} + \frac{A_{n-1}^2 - A_n^2}{2} = A_n - A_{n-1} + \frac{(A_{n-1} - A_n)(A_{n-1} + A_n)}{2} \\ &= (A_n - A_{n-1}) \left(I - \frac{A_{n-1} + A_n}{2} \right) \\ &= \frac{(A_n - A_{n-1})((I - A_n) + (I - A_{n-1}))}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

utilizando o Teorema 2.3 e que $A_n \leq I$, $n \in \mathbb{N}$.

Com isso, estamos com todas as hipóteses do Teorema 2.4, e podemos garantir a existência de um operador $A \in B(H)$ auto-adjunto tal que $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$, $x \in H$. Agora, pela definição de (A_n) , $Tx - A_n^2 x = 2(A_{n+1}x - A_n x)$. Daí

$$Tx - A^2 x = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx - A_n^2 x) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{n+1}x - A_n x) = 0$$

e $Tx = A^2 x$, $x \in H$. Como $A_n \geq A_{n-1} \geq \dots \geq A_1 \geq A_0 = 0$, A_n é positivo para todo n . Assim A , sendo limite de operadores positivos, é positivo.

Resta provar que o operador A obtido é único. Se $B \in B(H)$ é positivo e tal que $B^2 = T$, então $TB = B^2 B = BB^2 = BT$, ou seja, B comuta com T . Pela definição de (A_n) , B comuta com A_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo B comuta com A . Para $x \in H$, seja $y = (A - B)x$. Como A e B são positivos, $A + B$ também o é. Assim,

$$0 \leq ((A + B)y, y) = ((A^2 - B^2)x, y) = ((T - T)x, y) = 0$$

Então $(Ay, y) = (By, y) = 0$. Mas, pelo que acabamos de mostrar, existe $C \in B(H)$ positivo tal que $C^2 = B$ e $\|Cy\|^2 = (C^2 y, y) = (By, y) = 0 \Rightarrow Cy = 0 \Rightarrow By = C^2 y = 0$. Analogamente, $Ay = 0$. Logo

$$\|(A - B)x\|^2 = ((A - B)^2 x, x) = ((A - B)y, x) = (Ay, x) - (By, x) = 0$$

e $Ax = Bx$, para todo $x \in H$. ■

Corolário 2.1. *Seja $T \in B(H)$. Existe um único operador $A \in B(H)$ de modo que $A = (T^*T)^{1/2}$. Se $T \in K(H)$, então $A \in K(H)$. Além disso $\|Ax\| = \|Tx\|$, $x \in H$.*

Demonstração: A existência do operador A decorre do teorema anterior.

Se tomarmos $S = A$ na Proposição 1.4, temos $A^*A = A^2 = T^*T$, com T compacto. Logo A é compacto.

Agora

$$\|Ax\|^2 = (A^2x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2$$

Como $\|Ax\|$ e $\|Tx\|$ são positivos, $\|Ax\| = \|Tx\|$, $x \in H$. ■

Teorema 2.6. *Seja $T \in B(H)$. Existe $U \in B(H)$ tal que:*

- a) $T = UA$, $A = (T^*T)^{1/2}$.
- b) $\|Ux\| = \|x\|$, $x \in \overline{R(A)}$.
- c) $Ux = 0$, para $x \in \overline{R(A)}^\perp$.

Demonstração: a) Definimos $V : R(A) \rightarrow R(T)$, por $V(Ax) = Tx$, $x \in H$. Primeiramente V está bem definida. De fato, sejam $x_1, x_2 \in H$, tais que $y = Ax_1 = Ax_2$. Pelo corolário acima,

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| = \|A(x_1 - x_2)\| = \|Ax_1 - Ax_2\| = 0$$

Então $Tx_1 = Tx_2$, ou seja, $V(Ax_1) = V(y) = V(Ax_2)$.

É simples verificar que V é linear. Seja $y \in R(A)$, se $x \in H$ é tal que $y = Ax$, novamente pelo corolário anterior

$$\|Vy\| = \|VAx\| = \|Tx\| = \|Ax\| = \|y\|$$

então V é uma isometria. Estendemos V para $\tilde{V} : \overline{R(A)} \rightarrow \overline{R(T)}$, por $\tilde{V}y = \lim_{n \rightarrow \infty} V(Ax_n)$, onde $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$. Seja P a projeção de H em $\overline{R(A)}$ e $U : H \rightarrow \overline{R(T)}$, $Ux = \tilde{V}Px$, $x \in H$. Temos

$$UAx = \tilde{V}PAx = \tilde{V}Ax = Tx, \quad x \in H$$

- b) De fato, se $x \in \overline{R(A)}$ existe $(x_n) \subset H$ com $x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ e

$$\|Ux\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|UAx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = \|x\|$$

- c) Se $x \in \overline{R(A)}^\perp$ então $Px = 0$ e $Ux = \tilde{V}Px = \tilde{V}0 = 0$. ■

Observação 2.1. *O operador U obtido é unitário ($U^* = U^{-1}$).*

A expressão $T = UA$, onde U é unitário e A positivo é chamada **decomposição polar** do operador $T \in B(H)$.

Proposição 2.1. *Sejam $T \in K(H)$ e U o operador unitário obtido acima. Sabemos que $A = (T^*T)^{1/2}$ é compacto (Corolário 2.1). Então existe uma sequência (x_n) ortonormal de autovetores de A tal que (Ux_n) é ortonormal.*

Demonstração: Pelo Método de Ordenação existe (x_n) sequência ortonormal de autovetores. Já temos que $\|Ux_n\| = \|x_n\| = 1$. Agora

$$2 - \operatorname{Re}(Ux_n, Ux_m) = \|Ux_n - Ux_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 = 2$$

Então $\operatorname{Re}(Ux_n, Ux_m) = 0$.

Agora $x_n + ix_m \in R(A)$ e

$$2 - \operatorname{Im}(Ux_n, Ux_m) = \|Ux_n + iUx_m\|^2 = \|x_n + ix_m\|^2 = 2$$

e $\operatorname{Im}(Ux_n, Ux_m) = 0$. Logo $(Ux_n, Ux_m) = 0$ e (Ux_n) é um conjunto ortonormal. ■

Chegamos então ao resultado desejado.

Teorema 2.7 (Representação de Schmidt). *Sejam $T \in K(H)$, (α_n) a sequência de autovalores de $(T^*T)^{1/2}$ obtida no Método de Ordenação e (x_n) a sequência de autovetores (ortonormais) associados. Então existe um conjunto ortonormal (y_n) tal que*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x, x_n)y_n$$

Demonstração: O operador $A = (T^*T)^{1/2} \in K(H)$ é auto-adjunto e positivo pelo Teorema 2.5 e pelo Corolário 2.1. Então admite uma Representação de Schur (Teorema 2.2), digamos:

$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x, x_n)x_n$, onde $\alpha_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ (visto que A é positivo), (x_n) é ortonormal e $Ax_n = \alpha_n x_n$. Pela Proposição 1.6, (Ux_n) é ortonormal. Segue da decomposição polar (Teorema 2.6) que

$$Tx = UAx = U \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x, x_n)x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x, x_n)Ux_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x, x_n)y_n$$

onde $y_n = Ux_n$, $n \in \mathbb{N}$ ■

Definição 2.2. *Sejam $T \in K(H)$ e (α_n) a sequência de autovalores de $(T^*T)^{1/2}$, obtida no Método de Ordenação. O número*

$$\sigma_n(T) = \alpha_n$$

*será chamado o **enésimo valor singular** de T .*

Observação 2.2. *É bem conhecido que o enésimo valor singular de T pode ser definido como $\sigma_n(T) = \inf\{\|T - A\|; \text{posto } A < n\}$. É possível mostrar (ver [13], pág. 75) que tal definição conduz ao mesmo número, isto é, $\alpha_n = \sigma_n(T) = \inf\{\|T - A\|; \text{posto } A < n\}$. Por isso utilizaremos a caracterização acima sem maiores comentários.*

Corolário 2.2 (Propriedades dos Valores Singulares). *Sejam dados $T, S \in K(H)$ e $U, V \in B(H)$, então:*

- i) $\|T\| = \sigma_1(T) \geq \sigma_2(T) \geq \cdots \sigma_n(T) \geq \cdots$*
- ii) $\sigma_{n+m-1}(T + S) \leq \sigma_n(T) + \sigma_m(S)$.*
- iii) $\sigma_n(UTV) \leq \|U\| \|V\| \sigma_n(T)$.*

Demonstração: O item i) é decorrência direta da definição de valores singulares.

Seja A um operador de posto menor que $n + m - 1$. Podemos escrever $A = B + C$ onde B e C tem posto menores que n e m , respectivamente. Então

$$\|T + S - A\| \leq \|T - B\| + \|S - C\|$$

Tomando o ínfimo na desigualdade acima obtemos ii).

Agora, para iii), observamos que se A é um operador de posto menor que n , então UAV também o é. Desse modo,

$$\sigma_n(UTV) \leq \|UTV - UAV\| = \|U(T - A)V\| \leq \|U\| \|V\| \|T - A\|$$

Daí

$$\sigma_n(UTV) \leq \inf\{\|U\| \|V\| \|T - A\|; \text{posto } A < n\} = \|U\| \|V\| \sigma_n(T)$$

■

Definição 2.3. *A p -classe de Schatten é definida por*

$$\mathcal{S}_p(H) = \{T \in K(H); (\sigma_n(T)) \in \ell_p\}$$

Na Seção 2.3 veremos alguns fatos básicos acerca de tais classes.

2.2 Alguns Resultados Auxiliares

Daremos agora uma caracterização dos ideais da álgebra $B(H)$.

Teorema 2.8. *Se $\mathcal{I}$ é um ideal à direita (esquerda) de $B(H)$ então $\mathcal{I}^* = \{A^*; A \in \mathcal{I}\}$ é um ideal à esquerda (direita) de $B(H)$.*

Demonstração: i) Se $A^*, B^* \in \mathcal{I}$, então

$$A^* + B^* = (A + B)^* \in \mathcal{I}$$

pois $A + B \in \mathcal{I}$.

ii) Sejam $A \in \mathcal{I}$ e $B \in B(H)$. Como $\mathcal{I}$ é um ideal à direita $AB^* \in \mathcal{I}$, então

$$BA^* = (AB^*)^* \in \mathcal{I}^*$$

Sendo $A \in \mathcal{I}$ arbitrário, concluímos que $\mathcal{I}^*$ é um ideal à esquerda. Analogamente pode-se mostrar que se $\mathcal{I}$ é um ideal à esquerda então $\mathcal{I}^*$ é um ideal à direita. ■

Teorema 2.9. *Um ideal $\mathcal{I}$ à direita (esquerda) é um ideal se, e somente se, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{I}$ é um ideal e consideremos $A \in \mathcal{I}$. Pelo Teorema 2.6, podemos escrever $A = UB$, onde U é unitário e B é positivo. Temos

$$A^* = B^*U^* = BU^* = U^*UBU^* = U^*AU \in \mathcal{I}$$

Donde segue que $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}$. Daí $\mathcal{I} = (\mathcal{I}^*)^* \subset \mathcal{I}^*$. Assim $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$.

($\Leftarrow$) Se $\mathcal{I}$ é um ideal à direita, pelo teorema anterior $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$ é um ideal à esquerda. Logo $\mathcal{I}$ é um ideal. ■

Teorema 2.10. *Seja $T \in B(H)$. Então*

i) *Existem operadores auto-adjuntos únicos $A, B \in B(H)$, tais que $T = A + iB$.*

ii) *T pode ser expresso como combinação linear de operadores unitários.*

Demonstração: i) Temos que $A = \frac{T + T^*}{2}$ e $B = \frac{T - T^*}{2i}$ satisfazem as hipóteses acima. Mostraremos que tais operadores são únicos. Se $T = A + iB$ então $T^* = A - iB$, daí $T + T^* = 2A$ e $T - T^* = 2iB$ e a unicidade segue.

ii) Como todo operador é escrito como combinação linear de auto-adjuntos, basta provar esse caso. Seja T auto-adjunto tal que $\|T\| \leq 1$. Então $\|T^2\| = \|T\|^2 \leq 1$ e $I - T^2 \geq 0$, pelo Teorema 1.14. Daí existe $(I - T^2)^{1/2}$, a raiz quadrada positiva de $I - T^2$ (Teorema 2.5). Seja $U = T + i(I - T^2)^{1/2}$. Temos que $U \in B(H)$ e

$$\begin{aligned} UU^* &= U^*U = (T - i(I - T^2)^{1/2})(T + i(I - T^2)^{1/2}) \\ &= T^2 + iT(I - T^2)^{1/2} - i(I - T^2)^{1/2}T + I - T^2 = I \end{aligned}$$

ou seja, U é unitário. Além disso, $T = \frac{U + U^*}{2}$. ■

No que se segue indicaremos o operador $A = (T^*T)^{1/2}$, por $|T|$. Vamos mostrar que se $T \in B(H)$ é auto-adjunto, então os operadores $T_+ = \frac{|T| + T}{2}$ e $T_- = \frac{|T| - T}{2}$ são positivos. Para isso usaremos o seguinte lema.

Lema 2.2. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Afirmamos que T é positivo se e somente se $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Teorema 1.12.

($\Leftarrow$) Vimos no Teorema 1.15 que $\sigma(T) \subset F(T) \subset [m(T), M(T)]$, onde $m(T)$ é $\inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$. É possível provar que $m(T)$ e $M(T)$ estão em $\sigma(T)$ (ver [13], pág. 52). Suponhamos que existe $x_0 \in H$, com $\|x_0\| = 1$, tal que $(Tx_0, x_0) < 0$. Então $m(T) < 0$ e é elemento de $\sigma(T)$. Logo $[0, \infty)$ não pode conter $\sigma(T)$ contradizendo a hipótese. ■

Teorema 2.11. *Seja $T \in B(H)$ auto-adjunto. Definimos os operadores $T_+ = \frac{|T| + T}{2}$ e $T_- = \frac{|T| - T}{2}$. Notemos que T_+ e T_- são auto-adjuntos e $T = T_+ - T_-$. Afirmamos que T_+ e T_- são positivos.*

Demonstração: Primeiramente observamos que $B^+(H)$ é fechado.

De fato, seja $(T_n) \subset B^+(H)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$. Fixado $x \in H$,

$$|((T - T_n)x, x)| \leq \|T - T_n\| \|x\|^2$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n x, x) = (Tx, x)$. Como $T_n \in B^+(H)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(T_n x, x) \geq 0$. Então $(Tx, x) \geq 0$, para x fixo, porém arbitrário. Logo $T \in B^+(H)$.

Agora

$$|T|^2 = (T^*T)^{1/2}(T^*T)^{1/2} = (T^2)^{1/2}(T^2)^{1/2} = T^2$$

e $|T|T = T|T|$ (ver [10], págs. 281 e 297). Assim

$$4T_+T_- = (|T| + T)(|T| - T) = |T|^2 - |T|T - T|T| - T^2 = 0 \quad (*)$$

Mostremos que T_+ é positivo. Como T_+ é auto-adjunto, temos que T_+^2 é positivo e $\sigma(T_+^2) \subset [0, \infty)$. Então existe $(I + nT_+^2)^{-1}$ e podemos definir a sequência (T_n) por $T_n = n(I + nT_+^2)^{-1}T_+^2$. Observemos que, de $(*)$

$$T_n|T| = n(I + nT_+^2)^{-1}T_+^2(T_+ + T_-) = n(I + nT_+^2)^{-1}T_+^3 = T_nT_+.$$

Como $(I + nT_+^2)T_+^2 = T_+^2(I + nT_+^2)$, podemos garantir $(I + nT_+^2)^{-1}T_+^2 = T_+^2(I + nT_+^2)^{-1}$. Assim

$$\begin{aligned} \|T_n|T| - T_+\|^2 &= \|n(I + nT_+^2)^{-1}T_+^3 - T_+\|^2 \\ &= \|(I + nT_+^2)^{-1}T_+(nT_+^2 - (I + nT_+^2))\|^2 \\ &= \|(I + nT_+^2)^{-1}T_+\|^2 \\ &= \|(I + nT_+^2)^{-1}T_+((I + nT_+^2)^{-1}T_+)^*\| \\ &= \|(I + nT_+^2)^{-2}T_+^2\| \leq \|(I + nT_+^2)^{-1}T_+^2\| \|(I + nT_+^2)^{-1}\| \\ &= \frac{1}{n} \|(I + nT_+^2)^{-1}(I + nT_+^2) - (I + nT_+^2)^{-1}\| \|(I + nT_+^2)^{-1}\| \\ &= \frac{1}{n} \|I - (I + nT_+^2)^{-1}\| \|(I + nT_+^2)^{-1}\| \quad (**) \end{aligned}$$

Como $\sigma(T_+^2) \subset [0, \infty)$, temos $\sigma(I + T_+^2) \subset [1, \infty)$. Agora, pelo item *iii*) do Lema 1.2, temos $\sigma((I + T_+^2)^{-1}) \subset [0, 1]$. Assim $(I + T_+^2)^{-1}$ é positivo, pelo Lema 2.2, e $\|(I + T_+^2)^{-1}\| \leq 1$ (Teorema 2.1). Do Teorema 1.14, temos

$$0 \leq (I + T_+^2)^{-1} \leq I \Rightarrow -I \leq -(I + T_+^2)^{-1} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq I - (I + T_+^2)^{-1} \leq I$$

Isso significa que $\|I - (I + T_+^2)^{-1}\| \leq 1$ e, por (**), temos $\|T_n|T| - T_+\|^2 \leq 1/n^{(1/2)}$. Agora $|T|$, T_+^2 são positivos e comutam. Pelo Teorema 2.5 e pelo resultado de [10] citado acima, garantimos a existência e comutatividade de $|T|^{1/4}$, $|T_+|^{1/2}$ e $\left(\frac{I}{n} + T_+^2\right)^{-1/2}$. Além disso

$$T_n|T| = \left(|T|^{1/4}|T_+|^{1/2} \left(\frac{I}{n} + T_+^2\right)^{-1/2} |T_+|^{1/2}|T|^{1/4}\right)^2$$

Notemos que $|T|^{1/4}|T_+|^{1/2} \left(\frac{I}{n} + T_+^2\right)^{-1/2} |T_+|^{1/2}|T|^{1/4}$ é auto-adjunto, logo $T_n|T|$ é positivo. Pela observação inicial, concluímos T_+ positivo. Analogamente para T_- . ■

2.3 A Desigualdade de Weyl

Lema 2.3. *Sejam T um operador compacto e (e_n) um conjunto ortonormal completo em H . Então $\lim_{n \rightarrow \infty} T e_n = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T e_n \neq 0$, então existe $\epsilon > 0$ e uma subsequência (u_n) de (e_n) tal que $\|T u_n\| > \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, T é compacto e é possível extrair de (u_n) uma subsequência (x_n) tal que $T x_n$ converge, digamos, para $x \in H$. Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, T^* x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T x_n, x) = (x, x)$$

Agora (e_n) é um conjunto ortonormal completo e, pelo Teorema 1.6 item *b*), podemos escrever $T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} (T^* x, e_n) e_n$. Como a série é convergente, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} (T^* x, e_n) = 0$, em particular, $\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^* x, x_n) = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} T x_n = x = 0$. Mas isso contradiz o fato de (x_n) ser uma subsequência de (u_n) que satisfaz $\|T u_n\| > \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.12. *Seja $T \in B(H)$. Uma condição necessária e suficiente para T ser compacto é que a sequência $((T U e_n, V e_n)) \in c_0$, para $U, V \in B(\ell_2, H)$, o conjunto dos operadores lineares limitados de ℓ_2 em H .*

Demonstração: Suponhamos que $((TUe_n, Ve_n)) \in c_0$ para $U, V \in B(\ell_2, H)$. Seja $\epsilon > 0$, com $\|T\| > \epsilon$. Como $\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Tx, y)|$, existem $x_1, y_1 \in H$, com $\|x_1\| = \|y_1\| = 1$ e $|(Tx_1, y_1)| \geq \epsilon$. Então o conjunto Γ das duplas (x_n, y_n) , onde $(x_n), (y_n)$ são ortonormais e tais que $|(Tx_n, y_n)| \geq \epsilon$, para todo $n = 1, \dots, k$ (n podendo, inclusive, percorrer todos os naturais), não é vazio. Podemos então considerar $(x_n, y_n) \in \Gamma$ maximal que satisfaz tal propriedade. Afirmamos que o conjunto de índices de (x_n, y_n) é finito. Se não fosse, poderíamos definir $U, V : \ell_2 \rightarrow H$, por $U(\xi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ e $V(\xi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n y_n$. Observando que (x_n) é ortonormal

$$\|U(\xi_n)\|^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n, \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \|(\xi_n)\|^2$$

ou seja, $U \in B(\ell_2, H)$. Analogamente $V \in B(\ell_2, H)$. Assim, por hipótese,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (TUe_n, Ve_n) = 0$$

contradizendo $|(Tx_n, y_n)| \geq \epsilon$, para $n \in \mathbb{N}$. Portanto o conjunto de índices de (x_n, y_n) é finito.

Sejam $Ax = \sum_{i=1}^n (x, x_i)x_i$ e $Bx = \sum_{i=1}^n (x, y_i)y_i$. Temos que $A, B \in B(H)$. Ainda,

$$(Ax, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x, x_i)x_i, y \right) = \sum_{i=1}^n (x, x_i)(x_i, y) = \sum_{i=1}^n (x, (y, x_i)x_i) = \left(x, \sum_{i=1}^n (y, x_i)x_i \right) = (x, Ay)$$

Logo A é auto-adjunto. Analogamente, B também é auto-adjunto. Daí $I - A$ e $I - B$ são auto-adjuntos. Afirmamos que $\|(I - B)T(I - A)\| \leq \epsilon$. Caso contrário, existiriam $x, y \in H$ tais que

$$\frac{1}{\|x\|\|y\|} |(T(I - A)x, (I - B)y)| = \left| \left((I - B)T(I - A) \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right| > \epsilon$$

isto é, $|(T(I - A)x, (I - B)y)| > \epsilon\|x\|\|y\|$. Da desigualdade acima, vemos que $(I - A)x \neq 0$ e $(I - B)y \neq 0$. Consideremos $x_0 = \frac{x - Ax}{\|x - Ax\|}$ e $y_0 = \frac{y - By}{\|y - By\|}$. Observando que A e B são projeções de norma um, obtemos $\|x - Ax\| \leq \|x\|$ e $\|y - By\| \leq \|y\|$. Assim,

$$\|x - Ax\|\|y - By\| |(Tx_0, y_0)| > \epsilon\|x\|\|y\| \Rightarrow |(Tx_0, y_0)| > \epsilon \frac{\|x\|}{\|x - Ax\|} \frac{\|y\|}{\|y - By\|} \geq \epsilon$$

Além disso

$$\begin{aligned} (x_i, x_0) &= \frac{1}{\|(I - A)x\|} (x_i, (I - A)x) = \frac{1}{\|(I - A)x\|} ((I - A)x_i, x) = \frac{1}{\|(I - A)x\|} (x_i - Ax_i, x) \\ &= \frac{1}{\|(I - A)x\|} (x_i - x_i, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Analogamente $(y_i, y_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Mas isso contradiz a maximalidade dos índices de (x_n, y_n) . Logo, $\|(I - B)T(I - A)\| \leq \epsilon$ e $\|T - C\| \leq \epsilon$, onde $C = TA - BT(I - A)$ é um operador de posto finito (pois A e B o são). Portanto T é aproximado por operadores de posto finito e, pelo Teorema 1.17, é compacto.

Para mostrar a recíproca, consideremos $T \in K(H)$ e $U, V \in B(\ell_2, H)$. Seja a aplicação $V^* : H \rightarrow \ell_2$ tal que $(V^*x, y) = (x, Vy)$. Observemos que V^* está bem definido e é linear. Agora

$$\|V^*\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(V^*x, y)| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Vy, x)| = \|V\| < \infty$$

Então $V^* \in B(H, \ell_2)$. Assim V^*TU é compacto. Pelo Lema 2.3, $\lim_{n \rightarrow \infty} V^*TUe_n = 0$, onde (e_n) é um conjunto ortonormal completo de ℓ_2 . Por outro lado

$$|(TUe_n, Ve_n)| = |(V^*TUe_n, e_n)| \leq \|V^*TUe_n\|$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Logo $((TUe_n, Ve_n)) \in c_0$. ■

Lema 2.4. *Seja $T \in B(H)$. Então $T \in K(H)$ se e somente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(T) = 0$, isto é $(\sigma_n(T)) \in c_0$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sendo T compacto, pelo Corolário 2.1, $A = (T^*T)^{1/2}$ também o é. Logo $(\sigma_n(T)) \in c_0$, pela definição de valores singulares e pelo Teorema 2.2.

($\Leftarrow$) Sabemos que $\sigma_n(T) = \inf\{\|T - A\|, \text{ onde posto } A < n\}$. Suponhamos que T não seja compacto. Pelo Teorema 1.17 existe $\epsilon > 0$, tal que para todo operador A de posto finito, temos $\|T - A\| > \epsilon$. Daí $\sigma_n(T) = \inf\{\|T - A\|, \text{ onde posto } A < n\} \geq \epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, contradizendo a hipótese. Logo T é aproximado por operadores de posto finito e é compacto, pelo Teorema 1.17. ■

Lema 2.5. *Sejam $T \in \mathcal{S}_p(H)$, $A \in B(H, \ell_2)$, $B \in B(\ell_2, H)$. Então $ATB \in \mathcal{S}_p(\ell_2)$.*

Demonstração: Vimos no item *iii*) do Corolário 2.2 que $\sigma_n(ATB) \leq \|A\| \|B\| \sigma_n(T)$. Com isso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(ATB)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|^p \|B\|^p \sigma_n(T)^p = \|A\|^p \|B\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)^p < \infty$$

e $ATB \in \mathcal{S}_p(\ell_2)$. ■

Com esses lemas podemos caracterizar os operadores de $\mathcal{S}_p$ de forma análoga a dos operadores compactos, apresentada no teorema anterior.

Teorema 2.13. *Seja $T \in B(H)$. Então $T \in \mathcal{S}_p(H)$ se, e somente se, a sequência dada por $((TUe_n, Ve_n)) \in \ell_p$, para $U, V \in B(\ell_2, H)$.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Se $((TUe_n, Ve_n)) \in \ell_p \subset c_0$, pelo Teorema 2.12, T é compacto, logo admite uma representação de Schmidt (Teorema 2.7)

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(x, x_n)y_n$$

$(x_n), (y_n)$ ortonormais. Sejam $U, V : \ell_2 \rightarrow H$, dadas por, $U(\xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$ e $V(\xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$. Tais aplicações são contínuas (ver demonstração do Teorema 2.12). Por hipótese temos, $((TUe_i, Ve_i)) \in \ell_p$. Mas,

$$(TUe_i, Ve_i) = (Tx_i, y_i) = (\sigma_i(T)y_i, y_i) = \sigma_i(T)$$

Logo $T \in \mathcal{S}_p(H)$.

($\Rightarrow$) Sejam $T \in \mathcal{S}_p(H)$ e $U, V \in B(\ell_2, H)$. Consideremos o operador $V^* : H \rightarrow \ell_2$ que satisfaz $(V^*x, y) = (x, Vy)$. Vimos na demonstração do Teorema 2.12, que $V^* \in B(H, \ell_2)$. Seja $T_0 = V^*TU$. Pelo Lema 2.5, $T_0 \in \mathcal{S}_p(\ell_2)$. Assim T_0 possui uma representação de Schmidt (Teorema 2.7)

$$T_0x = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T_0)(x, x_n)y_n$$

onde $(x_n), (y_n)$ são conjuntos ortonormais. Sendo $q > 1$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (e_n) um conjunto ortonormal completo, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)|(x_i, e_n)|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)|(x_i, e_n)|^{2/p}|(x_i, e_n)|^{2/q} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/q} \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1). Utilizando que a função $x^{p/2}$ é crescente, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)|(x_i, e_n)|^2 \right)^{p/2} &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(x_i, e_n)|^2 \right)^{p/2q} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \quad (I) \end{aligned}$$

onde usamos que $\sum_{i=1}^{\infty} |(x_i, e_n)|^2 \leq \|e_n\|^2 = 1$ (desigualdade de Bessel (Teorema 1.3)).

Analogamente

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)|(y_i, e_n)|^2 \right)^{p/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(y_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \quad (II)$$

Como

$$(T_0 e_n, e_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)(e_n, x_i) y_i, e_n \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)(e_n, x_i)(y_i, e_n)$$

Temos

$$\begin{aligned} |(T_0 e_n, e_n)| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^{1/2} \sigma_i(T_0)^{1/2} |(e_n, x_i)| |(y_i, e_n)| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0) |(e_n, x_i)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0) |(y_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \quad (III) \end{aligned}$$

Agora por (I), (II) e (III)

$$\begin{aligned} |(T_0 e_n, e_n)|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0) |(e_n, x_i)|^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0) |(y_i, e_n)|^2 \right)^{p/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(y_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Com isso concluímos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |(T_0 e_n, e_n)|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(y_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p |(y_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p \sum_{n=1}^{\infty} |(x_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p \sum_{n=1}^{\infty} |(y_i, e_n)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T_0)^p \quad (IV) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é Hölder (Teorema 1.1), a igualdade seguinte é devido a convergência absoluta das séries e a igualdade após é devida a identidade de Parseval (Teorema 1.6), observado que (e_n) é um conjunto ortonormal completo.

Portanto $((T_0 e_n, e_n)) = ((T U e_n, V e_n)) \in \ell_p$. ■

Proposição 2.2. Para $T \in \mathcal{S}_p(H)$ definimos

$$s_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)^p \right)^{1/p}$$

Então s_p é uma norma em $\mathcal{S}_p$. Além disso

$$s_p(T) = \sup_{\|U\|=\|V\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(T U e_n, V e_n)|^p \right)^{1/p}$$

(e_n) é um conjunto ortonormal completo, e $U, V \in B(\ell_2, H)$.

Demonstração: Mostremos que $s_p(T) = \sup_{\|U\|=\|V\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p}$. Temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(V^*TUe_n, e_n)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(V^*TU)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|V^*\| \|U\| \sigma_n(T))^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)^p \right)^{1/p} = s_p(T) \end{aligned}$$

Logo $\sup_{\|U\|=\|V\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} \leq s_p(T)$.

Agora $T \in \mathcal{S}_p(H) \subset K(H)$ e possui representação de Schmidt (Teorema 2.7)

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(x, x_n)y_n$$

onde $(x_n), (y_n)$ são ortonormais. Definindo $U, V : \ell_2 \rightarrow H$, dadas por, $U(\xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$ e

$V(\xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$ temos $U, V \in B(\ell_2, H)$ e $\|U\| = \|V\| = 1$ (ver Teoremas 2.12 e 2.13).

Além disso

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(Tx_n, y_n)|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(\sigma_n(T)y_n, y_n)|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)^p \right)^{1/p} = s_p(T) \end{aligned}$$

Então $\sup_{\|U\|=\|V\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} \geq s_p(T)$ e concluímos a igualdade.

Mostremos agora, usando a igualdade acima, que s_p é uma norma.

i) Claramente $s_p(T) \geq 0$, pois $\sigma_n(T) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Agora se $s_p(T) = 0$, então $\sigma_n(T) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas $T \in \mathcal{S}_p(H)$ e possui representação de Schmidt (Teorema 2.7) digamos $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(x, x_n)y_n = 0$, $x \in H$. Sendo $T = 0$, temos que $\sigma_n(T) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Logo $s_p(T) = 0$.

ii) Notemos que

$$|\lambda T| = ((\lambda T)^* \lambda T)^{1/2} = (\bar{\lambda} T^* \lambda T)^{1/2} = (|\lambda|^2 T^* T)^{1/2} = |\lambda| (T^* T)^{1/2} = |\lambda| |T|$$

Então $\sigma_n(\lambda T) = |\lambda| \sigma_n(T)$, pela definição de valor singular. Daí

$$s_p(\lambda T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(\lambda T)^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p \sigma_n(T)^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)^p \right)^{1/p} = |\lambda| s_p(T)$$

iii) Temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |((T+S)Ue_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n) + (SUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(TUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(SUe_n, Ve_n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq s_p(T) + s_p(S) \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Minkowski (Teorema 1.2). Logo $s_p(T+S) \leq s_p(T) + s_p(S)$.

■

Observação 2.3. Na verdade, $\mathcal{S}_p(H)$ munido da norma definida acima é um espaço de Banach (Ver [13], pág. 84).

Teorema 2.14. Seja $T \in K(H)$ com autovalores (λ_n) tais que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto ortonormal $x_1, \dots, x_n$, tal que $(Tx_i, x_i) = \lambda_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Seja $z_i \in H$ autovetor associado a λ_i , $i = 1, \dots, n$, $E_n = [z_1, \dots, z_n]$ e $T_n = T|_{E_n}$. Notemos que T_n possui $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ como autovalores. Como E_n é o espaço gerado pelos autovetores associados, temos $T_n(E_n) \subset E_n$. Então T_n é um operador sobre um espaço de dimensão finita n e pode ser representado por uma matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$. Afirmamos que existe uma base ortonormal $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E_n para o qual a matriz A é tal que $a_{ij} = (Tx_i, x_j)$ e $a_{ij} = 0$ se $j > i$. Isso será provado por indução sobre a dimensão do espaço X .

Se $n = 1$ não há o que provar. Suponhamos que valha para $n - 1$. Seja λ um autovalor de T_n e $S_0 = (T_n - \lambda I)E_n$. Temos que $S_0 \neq E_n$. Isso significa que a dimensão de S_0 não é maior que $n - 1$. Seja $S \supset S_0$ subespaço de E_n de dimensão $n - 1$. Temos para $s \in S$ que $(T_n - \lambda I)s = s_0 \in S_0 \subset S$, então $T_n s = \lambda s + s_0 \in S$, ou seja, $T_n(S) \subset S$. Pela hipótese de indução existem $x_1, \dots, x_{n-1}$ ortonormais, tais que $a_{ij} = (Tx_i, x_j)$ se $j \leq i$ e $a_{ij} = 0$ se $j > i$. Agora $E_n = S \oplus N$, onde N é um subespaço de dimensão 1 do autoespaço relativo ao autovalor λ . Seja $x_n \in N$, tal que $\|x_n\| = 1$. Temos que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é o conjunto desejado.

Agora observamos que

$$((T - \lambda I)x_i, x_j) = (Tx_i, x_j) - \lambda(x_i, x_j) = (Tx_i, x_j)$$

para $i \neq j$. Em particular, se $j > i$, $((T - \lambda I)x_i, x_j) = (Tx_i, x_j) = 0$. Então a matriz B que representa $T_n - \lambda I$ é triangular inferior e

$$\det B = \prod_{i=1}^n b_{ii} = \prod_{i=1}^n (\lambda - (T_n x_i, x_i))$$

Como os autovalores de T_n são as raízes de $\det B$, concluímos $\lambda_i = (T_n x_i, x_i) = (T x_i, x_i)$.

■

Com isso podemos finalmente provar a desigualdade de Weyl.

Teorema 2.15 (Desigualdade de Weyl). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T \in K(H)$. Então*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)^p \right)^{1/p}$$

onde $(\lambda_n(T))$ e $(\sigma_n(T))$ são, respectivamente, os autovalores e os valores singulares de T .

Demonstração: Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ o conjunto ortonormal completo obtido no Teorema 2.14, tal que $(T x_i, x_i) = \lambda_i$. Definimos $U, V : \ell_2 \rightarrow H$, por $U(e_i) = V(e_i) = x_i$, $i \leq n$ e $U(e_i) = V(e_i) = 0$, $i > n$. Como U e V tem posto finito, $U, V \in B(\ell_2, H)$. Além disso é simples verificar que $\|U\| = \|V\| = 1$. Então, pela Proposição 2.2 e pelo Teorema 2.13, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i(T)|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^n |(T x_i, x_i)|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |(T U e_i, V e_i)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{\|U\|=\|V\|=1} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |(T U e_i, V e_i)|^p \right)^{1/p} \right] = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Como n é arbitrário, a desigualdade acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos então fazer $n \rightarrow \infty$, obtendo

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(T)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p}$$

■

Observação 2.4. *Se $T \in \mathcal{S}_p(H)$ então o lado esquerdo da desigualdade de Weyl é dominado por $s_p(T) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p}$ e portanto é finito. Esse fato será importante no que se segue.*

Capítulo 3

O Teorema de Lidskii

Nesse capítulo, após introduzirmos os operadores de Hilbert-Schmidt e a chamada classe de Traço, definimos dois tipos de traços em $B(H)$, a saber, o traço funcional e o traço espectral. Finalmente, após provar a desigualdade de Hardy (Teorema 3.8) e resultados importantes devido a König, apresentamos o Teorema de Lidskii, que mostra que os traços definidos anteriormente coincidem na classe de Schatten $S_1(H)$.

3.1 A classes de Hilbert-Schmidt e a Classe de Traço

Definição 3.1. A *classe de Hilbert-Schmidt* consiste dos operadores lineares limitados $T : H \rightarrow H$ tais que para algum conjunto ortonormal completo (y_n) de H ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ty_n\|^2 < \infty$$

Nesse caso escrevemos $T \in HS(H)$.

Exemplo. Seja (e_n) o conjunto ortonormal completo canônico de ℓ_2 . Consideremos o operador $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, dado por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x, e_n) e_n$$

Temos $\|Te_n\|^2 = \frac{1}{n^2}$. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \text{ e } T \in HS(\ell_2)$$

Teorema 3.1. Seja $T \in B(H)$. Então $T \in HS(H)$ se e somente se $T^* \in HS(H)$ e se (x_n) é um conjunto ortonormal completo arbitrário em H , $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 < \infty$. Além disso, todas essas somas têm o mesmo valor.

Demonstração: Sejam (y_n) um conjunto ortonormal completo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ty_n\|^2 < \infty$ e (x_n) um conjunto ortonormal completo arbitrário. Pela identidade de Parseval (Teorema 1.6) $\|Ty_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |(Ty_n, x_m)|^2$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ty_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(Ty_n, x_m)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |(y_n, T^*x_m)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*x_m\|^2$$

onde a segunda igualdade decorre da definição de T^* e da convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(Ty_n, x_m)|^2$.

Assim $T^* \in HS(H)$ e $\sum_{m=1}^{\infty} \|T^*x_m\|^2$ possui o mesmo valor para qualquer conjunto ortonormal (x_m) .

Agora, como $T^* \in HS(H)$, podemos refazer os cálculos acima para esse operador concluindo que $T = T^{**} \in HS(H)$ e que a soma $\sum_{m=1}^{\infty} \|Tx_m\|^2$ independe do conjunto ortonormal (x_n) , encerrando a demonstração. ■

O teorema acima nos permite definir uma norma em $HS(H)$ dada por

$$hs(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 \right)^{1/2},$$

onde $(x_n) \subset H$ é um conjunto ortonormal completo. O mesmo teorema nos diz ainda que $hs(T) = hs(T^*)$.

O próximo teorema permitirá identificar a classe de Hilbert-Schmidt com a 2-classe de Schatten. Faremos então uma breve exposição acerca de tal classe.

Seja T um operador compacto. Temos que o operador T^*T é compacto (Corolário 1.4), auto-adjunto e positivo. Nessas condições, podemos garantir a existência de um único operador A auto-adjunto, positivo, tal que $A^2 = T^*T$. Além disso, $A = (T^*T)^{1/2} \in K(H)$ (Corolário 2.1). Podemos escrever esse operador na sua representação de Schur, Teorema 2.2,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, x_n)x_n$$

onde $\lambda_n \geq 0$ são os autovalores de A e $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Escrevendo $\lambda_n = \sigma_n(T)$, pelo Teorema 2.7, a representação de Schmidt de T é

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(x, x_n)y_n$$

onde (x_n) são os autovetores ortonormais associados a $(\sigma_n(T))$ e (y_n) conjunto ortonormal.

Teorema 3.2. *A classe de Hilbert-Schmidt é idêntica a 2-classe de Schatten no seguinte sentido, $HS(H) = \mathcal{S}_2(H)$ e $hs(T) = s_2(T)$.*

Demonstração: Sejam $T \in HS(H)$ e (x_n) um conjunto ortonormal completo em H . Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2$ é absolutamente convergente, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 < \epsilon^2$$

Seja $Px = \sum_{n=1}^{n_0} (x, x_n)x_n$, a projeção ortogonal de x em $[x_1, x_2, \dots, x_{n_0}]$. Então, para $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|(T - TP)x\| &= \left\| T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n)x_n \right) - T \left(\sum_{n=1}^{n_0} (x, x_n)x_n \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n)Tx_n - \sum_{n=1}^{n_0} (x, x_n)Tx_n \right\| = \left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (x, x_n)Tx_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(x, x_n)| \|Tx_n\| \leq \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 \right)^{1/2} < \|x\| \epsilon \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1) no penúltimo passo.

Então $\|T - TP\| \leq \epsilon$ e T é aproximado por operadores de posto finito. Portanto T é compacto (Teorema 1.17) e possui uma representação de Schmidt (Teorema 2.7) $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(T)(x, u_j)v_j$, onde (u_j) e (v_j) são ortonormais. Em particular,

$$\|Tx_n\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(T)(x_n, u_j)v_j, \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l(T)(x_n, u_l)v_l \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(T)^2 |(x_n, u_j)|^2$$

Assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(T)^2 |(x_n, u_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_j(T)^2 |(x_n, u_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(T)^2$$

sendo que a penúltima igualdade decorre da convergência absoluta da série em questão e a última da identidade de Parseval (Teorema 1.6). Donde concluímos que $T \in \mathcal{S}_2(H)$ e $s_2(T) = hs(T)$.

Seja agora $T \in \mathcal{S}_2(H)$. T é compacto pela definição de $\mathcal{S}_2(H)$ e possui representação de Schmidt (Teorema 2.7). Pelos cálculos acima obtemos $T \in HS(H)$ e $hs(T) = s_2(T)$.

■

Definição 3.2. A **classe de Traço** consiste dos operadores lineares $T : H \rightarrow H$ limitados que possuam uma representação, isto é, operadores que podem ser escritos na forma $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)x_n$, onde $x_n, y_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty$. Nesse caso escrevemos $T \in TC(H)$.

Seja $v(T) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| \right\}$, onde $\sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)x_n$ é uma representação para T . A aplicação $v : TC(H) \rightarrow \mathbb{R}$ define uma norma em $TC(H)$. O próximo resultado identifica $(TC(H), v)$ com $(\mathcal{S}_1, s_1)$ tal como $(HS(H), hs)$ pôde ser identificado com $(\mathcal{S}_2, s_2)$.

Teorema 3.3. *A classe de Traço é idêntica a 1-classe de Schatten no seguinte sentido, $TC(H) = \mathcal{S}_1(H)$ e $v(T) = s_1(T)$.*

Demonstração: Se $T \in TC(H)$ então T admite uma representação e consequentemente é o limite de operadores de posto finito. Dessa forma T é compacto, pelo Teorema 1.17, e possui uma representação de Schmidt, Teorema 2.7,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(x, x_n)y_n, \quad (x_n) \text{ e } (y_n) \text{ conjuntos ortonormais.}$$

Pela definição de $v(T)$, dado $\epsilon > 0$ existe uma representação de T , $\sum_{n=1}^{\infty} (x, w_n)z_n$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| \|z_n\| < v(T)(1 + \epsilon)$. Temos

$$\sigma_n(T) = (Tx_n, y_n) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} (x_n, w_m)z_m, y_n \right) = \sum_{m=1}^{\infty} (x_n, w_m)(z_m, y_n) \in \mathbb{R}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x_n, w_m)(z_m, y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(x_n, w_m)| |(z_m, y_n)| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, w_m)| |(z_m, y_n)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, w_m)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(z_m, y_n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \|w_m\| \|z_m\| < v(T)(1 + \epsilon) \end{aligned}$$

onde o penúltimo passo é a desigualdade de Bessel (Teorema 1.3). Com isso mostramos que $T \in \mathcal{S}_1(H)$ e $s_1(T) \leq v(T)$.

Por outro lado, se $T \in \mathcal{S}_1(H)$, então T tem representação de Schmidt (Teorema 2.7), digamos $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)(x, z_n)x_n$, onde $\|x_n\| = \|z_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)x_n,$$

$y_n = \sigma_n(T)z_n$ é representação de T com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T) < \infty$$

Logo, $T \in TC(H)$ e $s_1(T) \geq v(T)$, o que encerra a demonstração. ■

3.2 O Traço Funcional, o Traço Espectral e o Teorema de Lidskii

Seja $T : H \rightarrow H$ um operador linear sobre um espaço complexo de Hilbert H , inicialmente de dimensão finita. Consideramos a matriz $A = (a_{ij})$ que representa o operador em uma base $(x_i)_{i=1}^n$ de H . Definimos o **traço matricial** de T como sendo a soma dos elementos da diagonal principal da matriz A , isto é,

$$\mathrm{tr}_M T = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Sabemos que essa definição não depende da base de H . Em particular se $(x_i)_{i=1}^n$ é ortonormal, temos $a_{ij} = (Tx_i, x_j)$ e $\mathrm{tr}_M T = \sum_{i=1}^n (Tx_i, x_i)$. Além disso se $(x_i)_{i=1}^n$ for uma base ortonormal de autovetores

$$\mathrm{tr}_M T = \sum_{i=1}^n (Tx_i, x_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i, x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Nosso objetivo agora é estender o conceito de traço matricial (que é um funcional linear contínuo), para operadores lineares contínuos sobre um espaço de Hilbert H de dimensão infinita e separável.

Uma tentativa natural para estender tal conceito é tomar um conjunto ortonormal completo (x_i) em H e definir $\widetilde{\mathrm{tr}}_M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (Tx_i, x_i)$. Surgem então duas questões. Em que classe de operadores $\widetilde{\mathrm{tr}}_M$ está bem definido? Tal soma depende do conjunto ortonormal (x_n) ? O próximo exemplo nos diz que a classe de Hilbert-Schmidt $\mathcal{S}_2(H)$ é muito grande.

Exemplo. Consideremos o operador em ℓ_2 do exemplo anterior, dado por $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x, e_n) e_n$.

Temos $(Te_n, e_n) = \frac{1}{n}$, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

não converge. Logo $\widetilde{\mathrm{tr}}_M(T)$ não está bem definido.

Admitiremos o resultado (ver [13], pág. 98):

Proposição 3.1. Se $T \in \mathcal{S}_1(H)$ é possível encontrar operadores $A \in \mathcal{S}_p(H)$ e $B \in \mathcal{S}_q(H)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tais que $T = AB$.

Teorema 3.4. Sejam $T, S \in \mathcal{S}_2(H)$ e (x_n) um conjunto ortonormal completo em H . Então $\sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, S^*x_n)$ é absolutamente convergente e seu valor independe da escolha de (x_n) .

Demonstração: Seja (y_n) um outro conjunto ortonormal completo em H . Então

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |(Tx_n, S^*x_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\sum_{m=1}^{\infty} (Tx_n, y_m)y_m, \sum_{l=1}^{\infty} (S^*x_n, y_l)y_l \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |(Tx_n, y_m) \overline{(S^*x_n, y_m)}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |(Tx_n, y_m)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |(S^*x_n, y_m)|^2 \right)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| \|S^*x_n\| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|S^*x_n\|^2 \right)^{1/2} = s_2(T) s_2(S^*) \end{aligned}$$

Assim a série $\sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, S^*x_n)$ é absolutamente convergente e consequentemente podemos trocar a ordem do somatório, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, S^*x_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Tx_n, y_m) \overline{(S^*x_n, y_m)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, T^*y_m) \overline{(x_n, Sy_m)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (Sy_m, x_n) \overline{(T^*y_m, x_n)} = \sum_{m=1}^{\infty} (Sy_m, T^*y_m) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\sum_{m=1}^{\infty} (Ty_m, S^*y_m) = \sum_{n=1}^{\infty} (Sx_n, T^*x_n)$$

Em particular, para $(y_n) = (x_n)$ temos $\sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, S^*x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Sx_n, T^*x_n)$. Donde segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, S^*x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Sx_n, T^*x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (Ty_m, S^*y_m)$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, S^*x_n)$ independe da escolha de (x_n) . ■

Esse último teorema nos permite introduzir o seguinte conceito.

Definição 3.3. *Sejam $A, B \in \mathcal{S}_2(H)$ e (x_n) um conjunto ortonormal completo em H . Defini-mos $\text{tr}_2(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax_n, B^*x_n)$.*

Agora, como observamos antes, podemos decompor $T \in \mathcal{S}_1(H)$ em $T = BA$, com A, B em $\mathcal{S}_2(H)$. Essa decomposição não é única. No entanto, se DC é outra decomposição para T , temos

$$\begin{aligned} \text{tr}_2(A, B) &= \sum_{n=1}^{\infty} (Ax_n, B^*x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (BAx_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (DCx_n, x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Cx_n, D^*x_n) = \text{tr}_2(C, D) \end{aligned}$$

Definição 3.4. Para $T \in \mathcal{S}_1(H)$ definimos seu **traço funcional** por

$$\mathrm{tr}_\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, x_n)$$

onde (x_n) é um conjunto ortonormal completo em H .

Pelos cálculos anteriores e pelo Teorema 3.4, $\mathrm{tr}_\phi(T)$ está bem definido, ou seja, independe da decomposição $T = BA$ e do conjunto ortonormal completo (x_n) . Uma outra expressão para o traço funcional é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 3.5. Seja T um operador em $\mathcal{S}_1(H)$ com representação dada por $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)z_n$,

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \|z_n\| < \infty$. Então,

$$\mathrm{tr}_\phi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n, y_n)$$

Demonstração: Seja (x_m) um conjunto ortonormal completo em H , temos

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_\phi(T) &= \sum_{m=1}^{\infty} (Tx_m, x_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_m, y_n)z_n, x_m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x_m, y_n)(z_n, x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (x_m, y_n)x_m, \sum_{l=1}^{\infty} (x_l, z_n)x_l \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \overline{(y_n, x_m)}x_m, \sum_{l=1}^{\infty} \overline{(z_n, x_l)}x_l \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\left(\sum_{m=1}^{\infty} (y_n, x_m)x_m, \sum_{l=1}^{\infty} (z_n, x_l)x_l \right)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(y_n, z_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n, y_n) \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é devida a identidade de Parseval (Teorema 1.6). ■

Corolário 3.1. $\mathrm{tr}_\phi(T)$ é um funcional linear contínuo em $(\mathcal{S}_1(H), s_1)$.

Demonstração: Sejam $T, S \in \mathcal{S}_1(H)$. Escrevemos $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)z_n$ e $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)v_n$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \|z_n\| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| \|v_n\| < \infty$. Uma representação para $T+S$ é $\sum_{n=1}^{\infty} (x, r_n)s_n$, onde $r_{2n} = y_n$, $r_{2n+1} = u_n$, $s_{2n} = z_n$ e $s_{2n+1} = v_n$. Assim, pelo teorema anterior

$$\mathrm{tr}_\phi(T+S) = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n, r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (z_n, y_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n, u_n) = \mathrm{tr}_\phi(T) + \mathrm{tr}_\phi(S)$$

Por outro lado, pela definição do traço funcional

$$\mathrm{tr}_\phi(\lambda T) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda Tx_n, x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (Tx_n, x_n) = \lambda \mathrm{tr}_\phi(T)$$

onde (x_n) é conjunto ortonormal completo.

Agora para mostrar que $\text{tr}_\phi(T)$ é contínuo em $(\mathcal{S}_1(H), s_1)$, notamos que para qualquer representação de T

$$|\text{tr}_\phi(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(z_n, y_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| \|y_n\|$$

Logo $|\text{tr}_\phi(T)|$ é cota inferior para $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| \|y_n\|$. Como $v(T)$ é a maior cota, temos

$$|\text{tr}_\phi(T)| \leq v(T) = s_1(T)$$

■

Seja $T \in \mathcal{S}_1(H)$. Pela desigualdade de Weyl (Teorema 2.15), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T) = s_1(T)$$

onde $(\lambda_n(T))$ são os autovalores de T , ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)$ é absolutamente convergente. Dessa forma, podemos definir o **traço espectral** em $\mathcal{S}_1(H)$, dado por

$$\text{tr}_\sigma(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)$$

Surtem então duas questões:

1º) tr_σ é um funcional linear contínuo?

2º) $\text{tr}_\sigma(T) = \text{tr}_\phi(T)$, $T \in \mathcal{S}_1(H)$ como em dimensão finita?

Vamos começar provando a linearidade de $\text{tr}_\sigma(T)$ para operadores de posto finito.

Teorema 3.6. *Sejam T, S operadores de posto finito. Então*

$$\text{tr}_\sigma(T + S) = \text{tr}_\sigma(T) + \text{tr}_\sigma(S)$$

Demonstração: Sendo T e S operadores de posto finito, temos que $T + S$ também o é. Além disso o espaço $M = [R(T) \cup R(S) \cup R(T + S)]$ é de dimensão finita. Notemos ainda que $T(M) \subset T(H) = R(T) \subset M$. Analogamente $S(M) \subset M$ e $(T + S)(M) \subset M$. Sejam T_M, S_M e $(T + S)_M$ as restrições de T, S e $T + S$ à M respectivamente. Esses operadores atuam sobre um espaço de dimensão finita e vale

$$\begin{aligned} \text{tr}_\sigma((T + S)_M) &= \text{tr}_\sigma(T_M + S_M) = \text{tr}_M(T_M + S_M) \\ &= \text{tr}_M(T_M) + \text{tr}_M(S_M) = \text{tr}_\sigma(T_M) + \text{tr}_\sigma(S_M) \end{aligned}$$

Agora T_M e S_M tem os mesmos autovalores que T e S e o resultado segue. ■

Temos que $F(H)$ é denso em $\mathcal{S}_1(H)$. Pela desigualdade de Weyl (Teorema 2.15) e, pelo teorema anterior, temos para $T, S \in F(H)$

$$|\mathrm{tr}_\sigma(S) - \mathrm{tr}_\sigma(T)| = |\mathrm{tr}_\sigma(S - T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(S - T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(S - T) = s_1(S - T)$$

ou seja, tr_σ é linear e contínuo em $F(H)$. Logo admite uma extensão contínua a $\mathcal{S}_1(H)$, digamos $\tilde{\mathrm{tr}}$. O próximo teorema mostra que já conhecemos tal extensão.

Teorema 3.7. $\tilde{\mathrm{tr}}(T) = \mathrm{tr}_\phi(T)$, para $T \in \mathcal{S}_1(H)$.

Demonstração: Mostraremos que $\tilde{\mathrm{tr}} \equiv \mathrm{tr}_\phi$ em $F(H)$. Para tanto, usaremos indução sobre a dimensão da imagem de T .

Se $T \in \mathcal{S}_1(H)$ tem posto 1, pela representação de Schmidt (Teorema 2.7), $Tx = (x, v)u$. Pelo Teorema 3.5, $\mathrm{tr}_\phi(T) = (u, v)$. Agora, se $Tx = \lambda x$, para algum $x \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, então $(x, v)u = \lambda x$ e $u = \frac{\lambda x}{(x, v)}$. Disso segue que,

$$\mathrm{tr}_\sigma(T) = \lambda = \lambda \frac{(x, v)}{(x, v)} = \left(\frac{\lambda x}{(x, v)}, v \right) = (u, v) = \mathrm{tr}_\phi(T)$$

Agora suponhamos que posto $T = n$. Então $Tx = \sum_{i=1}^n (x, v_i)u_i$ e usando, além do provado acima, a linearidade de $\mathrm{tr}_\sigma(T)$ em operadores de posto finito (Teorema 3.6), temos

$$\mathrm{tr}_\sigma(T) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_\sigma((x, v_i)u_i) = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i) = \mathrm{tr}_\phi(T)$$

Portanto $\tilde{\mathrm{tr}}(T) = \mathrm{tr}_\sigma(T) = \mathrm{tr}_\phi(T)$, com $T \in F(H)$. Como $\tilde{\mathrm{tr}}$ e tr_ϕ são contínuos e coincidem em um subconjunto denso de $\mathcal{S}_1(H)$ concluímos $\tilde{\mathrm{tr}} \equiv \mathrm{tr}_\phi$ em $\mathcal{S}_1(H)$. ■

Teorema 3.8 (Desigualdade de Hardy). *Seja $p > 1$, $m \in \mathbb{N}$, $a_i \geq 0$ e $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Então*

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^m a_n^p$$

Demonstração: Seja $q > 0$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{A_n}{n}\right)^p - \frac{pa_n}{p-1} \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} &= \left(\frac{A_n}{n}\right)^p - \frac{p}{p-1} \left(n \frac{A_n}{n} - (n-1) \frac{A_{n-1}}{n-1}\right) \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} \\
 &\leq \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \left(1 - \frac{pn}{p-1}\right) + \frac{p(n-1)}{p-1} \left[\frac{\left(\frac{A_n}{n}\right)^{(p-1)q}}{q} + \frac{\left(\frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^p}{p} \right] \\
 &= \frac{p-1}{p-1} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \left(1 - \frac{pn}{p-1}\right) + \frac{(n-1)}{p-1} \left[(p-1) \left(\frac{A_n}{n}\right)^p + \left(\frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^p \right] \\
 &= \frac{1}{p-1} \left[\left(\frac{A_n}{n}\right)^p (p-1 - np + (n-1)(p-1)) + (n-1) \left(\frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^p \right] \\
 &= \frac{1}{p-1} \left[(n-1) \left(\frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^p - n \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \right]
 \end{aligned}$$

onde a desigualdade é devida ao Lema 1.1. Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^m \left[\left(\frac{A_n}{n}\right)^p - \frac{pa_n}{p-1} \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} \right] &\leq \frac{1}{p-1} \left(\sum_{n=2}^m \frac{1}{p-1} \left[(n-1) \left(\frac{A_{n-1}}{n-1}\right)^p - n \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \right] - A_1^p \right) \\
 &= -\frac{m}{p-1} \left(\frac{A_m}{m}\right)^p \leq 0
 \end{aligned}$$

onde estamos assumindo $A_0 = 0$. Daí, pela desigualdade de Hölder (Teorema 1.1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^p &\leq \sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} \frac{pa_n}{p-1} \leq \left(\sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^m \left(\frac{pa_n}{p-1}\right)^p \right)^{1/p} \\
 &= \left(\sum_{n=1}^m \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \right)^{1/q} \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^m a_n^p \right)^{1/p}
 \end{aligned}$$

E o resultado segue. ■

Observação 3.1. A Desigualdade de Hardy é válida se $m = \infty$. A verificação dessa afirmativa é feita utilizando argumentação análoga a generalização das desigualdades de Hölder e Minkowski para o caso infinito (ver demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2).

Teorema 3.9 (König). Seja $0 < p < 1$. Para $T \in \mathcal{S}_1(H)$ seja

$$s_1^{(p)}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k(T)^p \right)^{1/p}$$

Então

- 1) $s_1(T) \leq s_1^{(p)}(T) \leq \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p} s_1(T)$.
- 2) $s_1^{(p)}(T + S) \leq \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p} [s_1^{(p)}(T) + s_1^{(p)}(S)]$, com $T \in \mathcal{S}_1(H)$.

Demonstração: Pelo item *i*) do Corolário 2.2, $\sigma_1(T) \geq \sigma_2(T) \geq \sigma_3(T) \geq \dots$ temos que $\sum_{k=1}^n \sigma_k(T)^p \geq n\sigma_n(T)^p$. Assim

$$s_1^{(p)}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k(T)^p \right)^{1/p} \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n(T)^p)^{1/p} = s_1(T)$$

Seja $q = \frac{1}{p} > 1$. Da desigualdade de Hardy (Teorema 3.8 e Observação 3.1),

$$\begin{aligned} s_1^{(p)}(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k(T)^p \right)^{1/p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k(T)^{1/q} \right)^q \\ &\leq \left(\frac{q}{q-1} \right)^q \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T) = \left(\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p}-1} \right)^{1/p} s_1(T) = \left(\frac{1}{1-p} \right)^{1/p} s_1(T) \end{aligned}$$

O que prova 1).

Agora, pelo provado acima, temos

$$s_1^{(p)}(T+S) \leq \left(\frac{1}{1-p} \right)^{1/p} s_1(T+S) \leq \left(\frac{1}{1-p} \right)^{1/p} [s_1(T) + s_1(S)] \leq \left(\frac{1}{1-p} \right)^{1/p} [s_1^{(p)}(T) + s_1^{(p)}(S)]$$

■

Lema 3.1 (Localização de Autovalores). *Seja T um operador compacto sobre H . Então para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $p > 0$,*

$$|\lambda_n(T)| \leq \beta_{n,p}(T) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p}$$

Demonstração: Lembramos que $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \dots$, de acordo com o Método de Ordenação. Com isso,

$$n|\lambda_n(T)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i(T), \quad n \in \mathbb{N}$$

pela desigualdade de Weyl (Teorema 2.15). Mas

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sigma_i(T) &= \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} \frac{\sum_{i=1}^n (\sigma_i(T)^p)^{1/p}}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i(T)^p}{\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p} \right)^{1/p} \right) \\ &\leq n^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} \quad (*) \end{aligned}$$

onde usamos, na última desigualdade, que $\sup \left\{ \sum_{i=1}^n x_i, x_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i^p = 1 \right\} = n^{1-1/p}$.

Daí segue que $n|\lambda_n(T)| \leq n^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p}$, ou seja,

$$|\lambda_n(T)| \leq n^{-1/p} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} = \beta_{n,p}(T), \quad n \in \mathbb{N}$$

■

Lema 3.2. *Seja $0 < p < 1$ e $T, S \in K(H)$. Então,*

$$i) \beta_{2n,p}(T + S) \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\beta_{n,p}(T) + \beta_{n,p}(S)).$$

$$ii) \beta_{2n-1,p}(T) \leq 2^{1/p} \beta_{2n,p}(T).$$

Demonstração: i) Temos

$$\begin{aligned} \beta_{2n,p}(T + S) &= \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \sigma_i(T + S)^p \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{2i-1}(T + S)^p + \sum_{i=1}^n \sigma_{2i}(T + S)^p \right) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{1}{2n} 2 \sum_{i=1}^n \sigma_{2i-1}(T + S)^p \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p + \sum_{i=1}^n \sigma_i(S)^p \right) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i(T)^p + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i(S)^p \right)^{1/p} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\beta_{n,p}(T) + \beta_{n,p}(S)) \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos que a sequência $(\sigma_n(T))$ é decrescente, na segunda que $\sigma_{2i-1}(T + S) \leq \sigma_i(T) + \sigma_i(S)$ (item ii) do Corolário 2.2), na terceira que $(a + b)^p \leq a^p + b^p$, $p \in (0, 1)$ e na última que $\sup\{(x^p + y^p)^{1/p}, x, y > 0, x + y = 1\} = 2^{\frac{1}{p}-1}$ e um cálculo semelhante a (*) no lema anterior.

ii) Temos que

$$\begin{aligned} \beta_{2n-1,p}(T) &= \left(\frac{1}{2n-1} \sum_{i=1}^{2n-1} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} = \left(\left[\frac{1}{2n(2n-1)} + \frac{1}{2n} \right] \sum_{i=1}^{2n-1} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{2}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p} = 2^{1/p} \beta_{2n,p}(T) \end{aligned}$$

■

Teorema 3.10 (König). *Sejam $T_0, T_n \in \mathcal{S}_1(H)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} s_1(T_n - T_0) = 0$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |\lambda_n(T_j)| < \epsilon, \quad j = 0, 1, \dots$$

Demonstração: Fixemos $p \in (0, 1)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} s_1(T_n - T_0) = 0$, pelo Teorema 3.9 temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_1^{(p)}(T_0 - T_n) < \epsilon_p$, para $n \geq n_0$. Temos ainda que $T_0 \in \mathcal{S}_1(H)$ e $s_1^{(p)}(T_0) < \infty$, pelo mesmo motivo. Desse modo existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m_0}^{\infty} \beta_{n,p}(T_0) < \epsilon_p$. Sabemos do Lema 3.1 que $|\lambda_k(T_n)| \leq \beta_{k,p}(T_n)$ $k \in \mathbb{N}$. Utilizando o Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned} \sum_{m=2m_0}^{\infty} |\lambda_m(T_n)| &\leq \sum_{m=2m_0}^{\infty} \beta_{m,p}(T_n) \leq \sum_{m=m_0}^{\infty} \beta_{2m-1,p}(T_n) + \sum_{m=m_0}^{\infty} \beta_{2m,p}(T_n) \\ &\leq (2^{1/p} + 1) \sum_{m=m_0}^{\infty} \beta_{2m,p}(T_n) = (2^{1/p} + 1) \sum_{m=m_0}^{\infty} \beta_{2m,p}(T_0 - (T_0 - T_n)) \\ &\leq (2^{1/p} + 1) 2^{1/p-1} \left(\sum_{m=m_0}^{\infty} \beta_{m,p}(T_0) + \sum_{m=m_0}^{\infty} \beta_{m,p}(T_0 - T_n) \right) \\ &\leq (2^{1/p} + 1) 2^{1/p-1} (\epsilon_p + s_1^{(p)}(T_0 - T_n)) < (2^{1/p} + 1) 2^{1/p-1} (\epsilon_p + \epsilon_p) < \epsilon \end{aligned}$$

para $\epsilon_p < \epsilon$ conveniente e $n \geq n_0$.

Analogamente a T_0 , para cada $i = 1, \dots, n_0$, existe k_i , tal que

$$\sum_{m=k_i}^{\infty} |\lambda_m(T_i)| \leq \sum_{m=k_i}^{\infty} \beta_{m,p}(T_i) < \epsilon$$

para $i = 1, \dots, n_0$. Tomando $N_0 = \max\{k_1, k_2, \dots, k_{n_0}, 2m_0\}$ temos $\sum_{m=N_0}^{\infty} |\lambda_m(T_j)| < \epsilon$, com $j = 0, 1, \dots$ ■

Nosso objetivo é mostrar que tr_σ é contínuo em $\mathcal{S}_1(H)$. Para isso, necessitamos construir um certo operador P , que é uma projeção e comuta com T , ou seja, $P^2 = P$ e $TP = PT$. Para definir tal operador precisamos de algumas propriedades do resolvente $\rho(T)$. Lembremos que (Teorema 1.7):

Propriedades. *i) Se $\zeta \in \rho(T)$ e $|\zeta - \eta| < \|R_\zeta\|^{-1}$, então $\eta \in \rho(T)$.*

ii) Se $|\zeta| > \|T\|$, então $\zeta \in \rho(T)$ e $R_\zeta = \zeta^{-1}(I + \zeta^{-1}T + \zeta^{-2}T^2 + \dots)$.

iii) Se $\zeta, \eta \in \rho(T)$, então $R_\zeta - R_\eta = (\eta - \zeta)R_\zeta R_\eta$.

iv) A função resolvente, $\phi : \rho(T) \rightarrow B(H)$, dada por $\phi(\zeta) = R_\zeta$ é contínua.

Com isso estamos prontos para definir o operador P desejado. Consideremos um círculo $C_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$ inteiramente contido em $\rho(T)$. Seja $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = 2\pi$, uma partição P' do intervalo $[0, 2\pi]$ e $\theta'_j \in [\theta_{j-1}, \theta_j]$, $j = 1, \dots, n$. Seja a soma

$$S(P') = \sum_{j=1}^n \phi(re^{i\theta'_j})(re^{i\theta_j} - re^{i\theta_{j-1}}) \in B(H)$$

Sendo $|P'| = \max_{j=1, \dots, n} |\theta_j - \theta_{j-1}|$ é possível mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $|P'| < \delta$ e $|Q'| < \delta$, temos $\|S(P') - S(Q')\| < \epsilon$. Logo podemos obter uma

sequência (P'_n) de partições e uma sequência (δ_n) de números reais positivos de modo que, se $|P'_n| < \delta_n$ e $n > m$

$$\|S(P'_n) - S(P'_m)\| < 1/m$$

ou seja, $(S(P'_n)) \subset B(H)$ é uma sequência de Cauchy. Como $B(H)$ é completo, $(S(P'_n))$ possui limite $S \in B(H)$. Daí podemos mostrar que $S = \lim_{|P'| \rightarrow 0} S(P')$. Denotaremos

$$S = \int_{C_r} R_\zeta d\zeta$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 3.11. *Seja $A = C_r \setminus D_s$, onde $D_s = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < r\}$ e $r > s$, uma região anular contida em $\rho(T)$. Então*

$$\int_{C_r} R_\zeta d\zeta = \int_{C_s} R_\zeta d\zeta$$

Para demonstração, ver [13], pág. 42.

Definimos o operador P como sendo

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\zeta d\zeta$$

onde C é um círculo em $\rho(T)$.

Utilizando o teorema acima, através da definição de $\int_C R_\zeta d\zeta$ podemos mostrar que P satisfaz as propriedades desejadas, mais explicitamente:

Teorema 3.12. *P é uma projeção que comuta com T .*

Demonstração: Vamos mostrar que $(2\pi i)^2 P^2 = (2\pi i)^2 P$. Para isso usaremos o teorema anterior. Para $r > 0$ tal que $C_r \subset \rho(T)$, existe $s < r$ de modo que a região anular $A = C_r \setminus D_s$ esteja contida em $\rho(S)$ (visto que $\sigma(T)$ tem o zero como único ponto de acumulação). Então

$$\begin{aligned} (2\pi i)^2 P^2 &= \left(\int_{C_r} R_\zeta d\zeta \right) \left(\int_{C_r} R_\eta d\eta \right) = \left(\int_{C_r} R_\zeta d\zeta \right) \left(\int_{C_s} R_\eta d\eta \right) \\ &= \int_{C_r} \int_{C_s} R_\zeta R_\eta d\eta d\zeta = \int_{C_r} \int_{C_s} (\eta - \zeta)^{-1} (R_\zeta - R_\eta) d\eta d\zeta \\ &= \int_{C_r} \int_{C_s} (\eta - \zeta)^{-1} R_\zeta d\eta d\zeta - \int_{C_r} \int_{C_s} (\eta - \zeta)^{-1} R_\eta d\eta d\zeta \\ &= \int_{C_r} R_\zeta \int_{C_s} \frac{1}{\eta - \zeta} d\eta d\zeta - \int_{C_s} R_\eta \int_{C_r} \frac{1}{\eta - \zeta} d\zeta d\eta \\ &= 0 - \int_{C_s} R_\eta (-2\pi i) d\eta = 2\pi i \int_{C_s} R_\eta d\eta \\ &= 2\pi i \int_{C_r} R_\zeta d\zeta = (2\pi i)^2 P \end{aligned}$$

Agora, para verificar que P comuta com T , basta observar que T comuta com R_ζ . De fato, com isso, escrevendo a soma de Riemann, temos $TS(P') = S(P')T$, para qualquer partição P' de $[0, 2\pi]$. Logo

$$TP = T \left(\lim_{|P'| \rightarrow 0} S(P') \right) = \lim_{|P'| \rightarrow 0} TS(P') = \left(\lim_{|P'| \rightarrow 0} S(P') \right) T = PT$$

■

Sendo P uma projeção, P é a identidade em sua imagem, indicada por H_P . Além disso, $TP = PT$, o que implica $T(H_P) \subset H_P$. Logo a restrição $T_1 = T|_{H_P} \in B(H_P)$. Por outro lado, $Q = I - P$ também é uma projeção que comuta com T . Logo $T_2 = T|_{H_Q} \in B(H_Q)$. Além disso, $H = H_P \oplus H_Q$. Agora, como R_ζ , $\zeta \in \rho(T)$ comuta com T , temos

$$R_\zeta P = R_\zeta P R_\zeta^{-1} R_\zeta = R_\zeta R_\zeta^{-1} P R_\zeta = P R_\zeta$$

Analogamente R_ζ comuta com Q . Sejam então R_ζ^1 e R_ζ^2 as restrições de R_ζ a H_P e H_Q respectivamente.

Teorema 3.13. Para $T \in B(H)$, $\rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$.

Demonstração: Seja $\zeta \in \rho(T)$. Devemos mostrar que $\zeta I_P - T_1$ e $\zeta I_Q - T_2$ são invertíveis, onde I_P e I_Q denotam o operador identidade sobre H_P e H_Q , respectivamente. Como $\zeta \in \rho(T)$, temos $R_\zeta(\zeta I - T) = (\zeta I - T)R_\zeta = I$. Restringindo a H_P , obtemos

$$R_\zeta^1(\zeta I_P - T_1) = (\zeta I_P - T_1)R_\zeta^1 = I_P$$

ou seja, $\zeta I_P - T_1$ é invertível com R_ζ^1 o operador resolvente de T_1 e $\zeta \in \rho(T_1)$. Analogamente R_ζ^2 é o operador resolvente de T_2 e $\zeta \in \rho(T_2)$.

Reciprocamente, se $\zeta \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$, então existem operadores S_1 e S_2 de modo que $S_1(\zeta I_P - T_1) = I_P$ e $S_2(\zeta I_Q - T_2) = I_Q$. Definimos S por $Sx = S_1(Px) + S_2(Qx)$. Temos, para $x \in H_P$,

$$(\zeta I - T)Sx = (\zeta I - T)S_1(Px) + (\zeta I - T)S_2(Qx) = (\zeta I_P - T_1)S_1x = x$$

Analogamente $(\zeta I - T)Sx = x$, para $x \in H_Q$. Agora, como $H = H_P \oplus H_Q$, concluímos que $(\zeta I - T)Sx = x$, $x \in H$. Semelhantemente $S(\zeta I - T) = I$. Logo $(\zeta I - T)$ é invertível e $\zeta \in \rho(T)$. ■

Como o espectro de T é o complementar do resolvente temos $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$, ou seja, a projeção P divide o espectro de T em duas partes. O próximo teorema caracteriza tais partes.

Teorema 3.14. Sendo T_1 e T_2 como acima e $\text{int } C$ e $\text{ext } C$ indicando o interior e o exterior de C , $\sigma(T_1) = \sigma(T) \cap \text{int } C$ e $\sigma(T_2) = \sigma(T) \cap \text{ext } C$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que para $\zeta \in \text{ext } C$ temos que $\zeta \in \rho(T_1)$. Seja $\eta \in \rho(T)$. Então $(\zeta I - T)R_\eta = (\eta I - T)R_\eta + (\zeta - \eta)R_\eta$. Assim

$$\begin{aligned} (\zeta I - T) \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\eta (\zeta - \eta)^{-1} d\eta &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\zeta I - T) R_\eta (\zeta - \eta)^{-1} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_C (\zeta - \eta) (\zeta - \eta)^{-1} R_\eta d\eta \\ &= \frac{I}{2\pi i} \int_C \frac{d\eta}{\zeta - \eta} + \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\eta d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\eta d\eta = P \end{aligned}$$

visto que $\int_C \frac{d\eta}{\zeta - \eta} = 0$, pois $\zeta \in \text{ext } C$. Como P é a identidade em H_P , existe $(\zeta I_P - T_1)^{-1}$, ou seja $\zeta \in \rho(T_1)$, como queríamos. Assim $\sigma(T_1) \subset \text{int } C$. Como $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$, $\sigma(T_i) \subset \sigma(T)$, para $i = 1, 2$. Logo $\sigma(T_1) \subset \sigma(T) \cap \text{int } C$. Analogamente, se $\zeta \in \text{int } C$, teremos $\frac{I}{2\pi i} \int_C \frac{d\eta}{\zeta - \eta} = -1$ e

$$(\zeta I - T) \frac{1}{2\pi i} \int_C R_\eta (\zeta - \eta)^{-1} d\eta = -I + P = -Q$$

ou seja, $(\zeta I_Q - T_2)$ é invertível e $\zeta \in \rho(T_2)$. Assim $\sigma(T_2) \subset \sigma(T) \cap \text{ext } C$. Agora, como $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$, concluímos $\sigma(T_1) = \sigma(T) \cap \text{int } C$ e $\sigma(T_2) = \sigma(T) \cap \text{ext } C$. ■

Definição 3.5. *Sejam $T \in K(H)$ e $r > 0$. Diremos que r é T -**admissível** se o círculo C_r está contido no resolvente de T .*

Nesse caso escrevemos

$$P_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} R_\lambda d\lambda$$

Sabemos que P_r é projeção, então escrevemos $T^i = TP_r$ e $T^e = T(I - P_r)$.

Lema 3.3. *Seja $T \in K(H)$. Temos*

- i) $\sigma(T^i) = \{\lambda \in \sigma(T); |\lambda| < r\}$ e $\sigma(T^e) = \{\lambda \in \sigma(T); |\lambda| > r\}$.
- ii) Se $T \in K(H)$ e $r > 0$ é T -admissível, então posto $T^e < \infty$
- iii) Se $T \in \mathcal{S}_1(H)$ então $\text{tr}_\sigma(T) = \text{tr}_\sigma(T^i) + \text{tr}_\sigma(T^e)$.

Demonstração: i) Decorre diretamente da definição de T^i , T^e e do Teorema 3.14.

ii) Primeiramente observamos que, de acordo com o Teorema 2.10, T pode ser escrito como $T = A + iB$, onde $A = \frac{T + T^*}{2}$ e $B = \frac{T - T^*}{2i}$ são auto-adjuntos. Sendo $T \in K(H)$, temos $A, B \in K(H)$, pelo Teorema de Schauder (Teorema 1.18). Agora, se T não é de posto finito, então A ou B não o são. Assim podemos supor sem perda de generalidade que T é auto-adjunto. Suponhamos que o posto de $T^e = T(I - P_r) \in K(H)$ não é finito e consideremos a sequência (λ_n) em $\sigma(T^e)$ obtida no Método de Ordenação. Temos, pelo item anterior, que $\lambda_n > r > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa que (λ_n) não tende a zero. Mas (λ_n) está em $\sigma(T)$, pois $\sigma(T) = \sigma(T^i) \cup \sigma(T^e)$ pelo item anterior. Mas, na

demonstração do Teorema 2.2, vimos que o único ponto de acumulação de $\sigma(T)$ é o zero. Portanto T^e é de posto finito.

iii) Isso decorre do fato de que $T = T^i + T^e$ e

$$\mathrm{tr}_\sigma(T) - \mathrm{tr}_\sigma(T^e) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i = \mathrm{tr}_\sigma(T^i)$$

■

Teorema 3.15. *A função tr_σ é contínua em $\mathcal{S}_1(H)$.*

Demonstração: Seja (T_n) uma sequência em $\mathcal{S}_1(H)$ convergindo para $T_0 \in \mathcal{S}_1(H)$. Pelo Teorema de König (Teorema 3.10), dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_j)| < \epsilon$$

para $j = 0, 1, \dots$. Como o espectro de T_0 é enumerável, existe $r > 0$ T_0 -admissível de modo que $Nr < \epsilon$. Consideramos então $T_0^i = T_0 P_r$ e $T_0^e = T_0(I - P_r)$. Agora, como $\sigma(T_0^i) \subset \sigma(T_0)$, temos que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_0^i)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_0)|$$

Além disso, pelo Teorema 3.14, $|\lambda_n(T_0^i)| < r$, $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que,

$$|\mathrm{tr}_\sigma(T_0^i)| \leq \sum_{n=1}^N |\lambda_n(T_0^i)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_0^i)| < Nr + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_0)| < 2\epsilon \quad (I)$$

Como a aplicação $\phi : \rho(T_0) \rightarrow B(H)$, definida por $\phi(\lambda) = R_\lambda$ é contínua, existe $c = \max\{||R_\lambda||, |\lambda| = r\}$. Notemos que $c > 0$, pois R_λ é invertível para todo λ . Além disso c depende de r , que por sua vez depende de N , o qual depende de ϵ . Logo c depende apenas de ϵ e é possível obter $q \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{q}{c} + \frac{cq r^2}{1-q} < \epsilon$$

Seja ainda $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_1(T_0 - T_j) < q/c$, $j \geq j_0$.

Afirmativa 1. *r é T_j -admissível se $j \geq j_0$.*

De fato, para $|\lambda| = r$, seja

$$S = R_\lambda \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} (T_j - T_0)^n R_\lambda^n \right)$$

Pelo item *i*) do Corolário 2.2, temos

$$\|T\| = \sigma_1(T) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T) = s_1(T), \quad T \in \mathcal{S}_1(H)$$

Daí

$$\begin{aligned} \|S\| &= \left\| R_\lambda \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} (T_j - T_0)^n R_\lambda^n \right) \right\| \leq \|R_\lambda\| \left\| I + \sum_{n=1}^{\infty} (T_j - T_0)^n R_\lambda^n \right\| \\ &\leq \|R_\lambda\| \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|(T_j - T_0)^n R_\lambda^n\| \right) \leq \|R_\lambda\| \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{c^n} c^n \right) \\ &= \|R_\lambda\| + \|R_\lambda\| \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty \end{aligned}$$

pois $0 < q < 1$. Agora, como

$$\|(T_j - T_0)R_\lambda\| \leq \|T_j - T_0\| \|R_\lambda\| \leq \frac{q}{c} c = q < 1$$

temos pela Expansão de Neumann (Teorema 1.7) que

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} [(T_j - T_0)R_\lambda]^n = (I - (T_j - T_0)R_\lambda)^{-1}$$

Então,

$$\begin{aligned} (\lambda I - T_j)S &= ((\lambda I - T_0) - (T_j - T_0))S = (R_\lambda^{-1} - (T_j - T_0))(R_\lambda(I - (T_j - T_0)R_\lambda)^{-1}) \\ &= (I - (T_j - T_0)R_\lambda)(I - (T_j - T_0)R_\lambda)^{-1} = I \end{aligned}$$

mostrando que r é T_j -admissível, $j \geq j_0$ e que S é o operador resolvente $R_\lambda(T_j)$, que será denotado simplesmente por $R_\lambda(j)$.

Com isso temos, para $j \geq j_0$

$$|\operatorname{tr}_\sigma(T_j^i)| \leq \sum_{n=1}^N |\lambda_n(T_j^i)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_j^i)| < Nr + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n(T_j)| < 2\epsilon \quad (II)$$

Afirmativa 2. $s_1(R_\lambda(j) - R_\lambda) \leq \frac{cq}{1-q}$, $j \geq j_0$.

De fato, pelo que acabamos de mostrar e pelo item *i*) do Corolário 2.2,

$$\begin{aligned} s_1(R_\lambda(j) - R_\lambda) &= s_1 \left(R_\lambda + R_\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (T_j - T_0)^n R_\lambda^n - R_\lambda \right) = s_1 \left(R_\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (T_j - T_0)^n R_\lambda^n \right) \\ &\leq \|R_\lambda\| s_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (T_j - T_0)^n R_\lambda^n \right) \leq \|R_\lambda\| \sum_{n=1}^{\infty} s_1((T_j - T_0)^n R_\lambda^n) \\ &\leq \|R_\lambda\| \sum_{n=1}^{\infty} s_1(T_j - T_0)^n \|R_\lambda\|^n \leq c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{c} \right)^n c^n = c \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{cq}{1-q} \end{aligned}$$

pois $q < 1$

Afirmativa 3. $T^i = TP_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda R_\lambda d\lambda$.

Com efeito,

$$T^i = TP_r = T \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} R_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} TR_\lambda d\lambda$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} TR_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} (T - \lambda I) R_\lambda d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda R_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} Id\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda R_\lambda d\lambda$$

Como

$$\int_{C_r} Id\lambda = I \int_{C_r} d\lambda = \int_0^{2\pi} rie^{i\theta} d\theta = 0$$

concluimos

$$T^i = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} TR_\lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \lambda R_\lambda d\lambda$$

Afirmativa 4. $s_1(T_0^i - T_j^i) \leq \frac{cr^2q}{1-q}$.

Pela Afirmativa 3,

$$s_i(T_0^i - T_j^i) = \frac{1}{2\pi} s_1 \left(\int_{C_R} \lambda (R_\lambda - R_\lambda(j)) d\lambda \right) \leq \frac{r}{2\pi} \int_{C_R} s_1(R_\lambda - R_\lambda(j)) |d\lambda| \leq \frac{r}{2\pi} \int_{C_R} \frac{cq}{1-q} |d\lambda|$$

onde a última desigualdade segue da Afirmativa 2. Agora,

$$\int_{C_R} |d\lambda| = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

e segue,

$$s_1(T_0^i - T_j^i) \leq \frac{r}{2\pi} \frac{cq}{1-q} \int_{C_R} |d\lambda| = \frac{cr^2q}{1-q}$$

Afirmativa 5. $s_1(T_j^e - T_0^e) \leq \frac{q}{c} + \frac{cr^2q}{1-q}$.

Pela afirmativa anterior,

$$s_1(T_j^e - T_0^e) \leq s_1(T_j - T_j^i - (T_0 - T_0^i)) \leq s_1(T_j - T_0) + s_1(T_j^i - T_0^i) \leq \frac{q}{c} + \frac{cr^2q}{1-q}$$

para $j \geq j_0$.

Podemos agora concluir a demonstração do teorema. Sabemos que r é T_0 -admissível, pela escolha de r . Por outro lado, vimos na Afirmativa 1 que r é T_j -admissível, para $j \geq j_0$. Então, pelo Lema 3.3, item *ii*), T_0^e e T_j^e são operadores de posto finito. Logo,

$$|\text{tr}_\sigma(T_j^e) - \text{tr}_\sigma(T_0^e)| = |\text{tr}_\sigma(T_j^e - T_0^e)| \leq s_1(T_j^e - T_0^e) \leq \frac{q}{c} + \frac{cr^2q}{1-q} < \epsilon \quad (III)$$

Assim, pelo item *iii*) do Lema 3.3

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{tr}_\sigma(T_j) - \operatorname{tr}_\sigma(T_0)| &= |\operatorname{tr}_\sigma(T_j^i) - \operatorname{tr}_\sigma(T_0^i) + \operatorname{tr}_\sigma(T_j^e) - \operatorname{tr}_\sigma(T_0^e)| \\
 &\leq |\operatorname{tr}_\sigma(T_j^i)| + |\operatorname{tr}_\sigma(T_0^i)| + |\operatorname{tr}_\sigma(T_j^e) - \operatorname{tr}_\sigma(T_0^e)| \\
 &< 2\epsilon + 2\epsilon + \epsilon = 5\epsilon
 \end{aligned}$$

Donde a penúltima estimativa decorre de (I), (II) e (III). ■

Teorema 3.16 (Traço de Lidskii). *Para $T \in \mathcal{S}_1(H)$, $\operatorname{tr}_\sigma(T) = \operatorname{tr}_\phi(T)$.*

Demonstração: No teorema anterior mostramos que tr_σ é contínuo em $\mathcal{S}_1(H)$. Então tr_σ coincide com $\widetilde{\operatorname{tr}}$, a extensão contínua a partir de operadores de posto finito. Mas no Teorema 3.7 vimos que essa extensão coincide com tr_ϕ em $\mathcal{S}_1(H)$. Logo $\operatorname{tr}_\sigma(T) = \operatorname{tr}_\phi(T)$. Além disso como tr_ϕ é linear, podemos dizer o mesmo de tr_σ , concluindo que tr_σ é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{S}_1(H)$. ■

Em vista do Teorema de Lidskii, passamos a indicar $\operatorname{tr}_\sigma(T)$, ou $\operatorname{tr}_\phi(T)$, simplesmente por $\operatorname{tr}(T)$. Notemos que para operadores que atuam sobre espaços de dimensão finita, o traço matricial coincide com o traço funcional e com o traço espectral. Assim tr_ϕ e tr_σ generalizam tr_M . Por isso indicamos tr_M também por tr .

Capítulo 4

Os Teoremas de Yang-Liu, Calkin e os Operadores Irregulares

Nesse último capítulo apresentamos o Teorema de Yang-Liu, o Teorema de Calkin e os chamados operadores irregulares. O Teorema de Lidskii nos permite utilizar tanto o traço funcional quanto o traço espectral na desigualdade estabelecida por Yang e Liu. Já o Teorema de Calkin conduz naturalmente a um estudo abstrato da função traço e, em especial, à questão: O ideal gerado por um operador compacto é domínio de algum traço finito? O objetivo final do capítulo é fornecer a resposta para essa questão, que foi dada por Varga em [15]. Dessa forma concluímos o trabalho mostrando que o ideal gerado por um operador compacto em $B(H)$ é domínio natural de um traço quando o operador é irregular no sentido da Definição 4.2.

4.1 O Teorema de Yang-Liu

Em 2000, Yang provou (ver [16]) a seguinte desigualdade para matrizes positivas semi-definidas A e B com entradas em $\mathbb{C}$

$$\mathrm{tr}(AB)^k \leq \mathrm{tr}(A)^k \mathrm{tr}(B)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde tr indica o traço matricial.

O próximo resultado a ser apresentado generaliza tal desigualdade para operadores positivos T e S na classe de traço $\mathcal{S}_1(H)$, onde H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

Teorema 4.1 (Yang-Liu). *Se T e $S \in \mathcal{S}_1(H)$ são operadores auto-adjuntos e positivos, então*

$$\mathrm{tr}(TS)^k \leq \mathrm{tr}(T)^k \mathrm{tr}(S)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde tr indica o traço funcional ou espectral.

Demonstração: Como T e S são operadores compactos auto-adjuntos e positivos em $\mathcal{S}_1(H)$, ambos possuem representação de Schur (Teorema 2.2) $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(T)(x, x_i)x_i$ e $Sx = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(S)(x, y_i)y_i$, onde (x_i) e (y_i) são conjuntos ortonormais completos. Sejam $T_n x = \sum_{i=1}^n \sigma_i(T)(x, x_i)x_i$, $S_n x = \sum_{i=1}^n \sigma_i(S)(x, y_i)y_i$ e $M_n = [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$. Seja então $P_n : H \rightarrow M_n$, a projeção de H sobre M_n .

Os operadores $\widetilde{T}_n = P_n T P_n$ e $\widetilde{S}_n = P_n S P_n$ são positivos semi-definidos, isto é, possuem representação matricial na base $\{x_i, y_j, i, j \in \mathbb{N}\}$, com entradas não-negativas. Dado $\epsilon > 0$, como $T \in \mathcal{S}_1(H)$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T) < \epsilon/2$. Observando que $s_1((\cdot, x_i)) = 1$, para todo i e $\|P_n\| = 1$, pelo Corolário 2.2 temos,

$$\begin{aligned} s_1(T - \widetilde{T}_n) &\leq s_1(T - T_n) + s_1(T_n - \widetilde{T}_n) \\ &= s_1\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T)(\cdot, x_i)\right) + s_1\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T)P_n(\cdot, x_i)P_n\right) \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T)s_1((\cdot, x_i)) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T)s_1(P_n(\cdot, x_i)P_n) \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T)\|P_n\|s_1((\cdot, x_i))\|P_n\| = 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i(T) < \epsilon \end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar que $s_1(S - \widetilde{S}_n) < \epsilon$, para n suficientemente grande. Pela desigualdade de Weyl (Teorema 2.15) temos

$$|\operatorname{tr}(T) - \operatorname{tr}(S)| \leq s_1(T - S)$$

para quaisquer $T, S \in \mathcal{S}_1(H)$. Donde segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(\widetilde{T}_n) = \operatorname{tr}(T)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(\widetilde{S}_n) = \operatorname{tr}(S)$. Assim

$$\begin{aligned} |(\operatorname{tr}(T))^k (\operatorname{tr}(S))^k - (\operatorname{tr}(\widetilde{T}_n))^k (\operatorname{tr}(\widetilde{S}_n))^k| &\leq |(\operatorname{tr}(T))^k - (\operatorname{tr}(\widetilde{T}_n))^k| (\operatorname{tr}(S))^k \\ &\quad + |(\operatorname{tr}(\widetilde{T}_n))^k| |(\operatorname{tr}(S))^k - (\operatorname{tr}(\widetilde{S}_n))^k| \\ &= |\operatorname{tr}(T) - \operatorname{tr}(\widetilde{T}_n)| \left| \sum_{i=1}^{k-1} (\operatorname{tr}(T))^{k-i} (\operatorname{tr}(\widetilde{T}_n))^{i-1} \right| |(\operatorname{tr}(S))^k| \\ &\quad + |(\operatorname{tr}(\widetilde{T}_n))^k| |\operatorname{tr}(S) - \operatorname{tr}(\widetilde{S}_n)| \left| \sum_{i=1}^{k-1} (\operatorname{tr}(S))^{k-i} (\operatorname{tr}(\widetilde{S}_n))^{i-1} \right| \end{aligned}$$

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{tr}(\widetilde{T}_n))^k (\operatorname{tr}(\widetilde{S}_n))^k = (\operatorname{tr}(T))^k (\operatorname{tr}(S))^k$

Agora, usaremos indução para provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_1((TS)^k - (\widetilde{T}_n \widetilde{S}_n)^k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Para

$k = 1$, temos

$$\begin{aligned} s_1(TS - \widetilde{T_n \widetilde{S_n}}) &= s_1(TS - T\widetilde{S_n} + T\widetilde{S_n} - \widetilde{T_n \widetilde{S_n}}) \\ &\leq s_1(T(S - \widetilde{S_n})) + s_1((T - \widetilde{T_n})\widetilde{S_n}) \\ &\leq \|T\|s_1(S - \widetilde{S_n}) + \|\widetilde{S_n}\|s_1(T - \widetilde{T_n}) < \epsilon \end{aligned}$$

para n suficientemente grande.

Suponhamos que para $k > 1$ fixo, vale $\lim_{n \rightarrow \infty} s_1((TS)^k - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k) = 0$. Temos então que

$$\begin{aligned} s_1((TS)^{k+1} - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^{k+1}) &\leq s_1((TS)^k(\widetilde{T_n \widetilde{S_n}}) - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^{k+1}) + s_1((TS)^{k+1} - (TS)^k(\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})) \\ &\leq \|\widetilde{T_n \widetilde{S_n}}\|s_1((TS)^k - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k) + \|(TS)^k\|s_1(TS - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})) < \epsilon \end{aligned}$$

para n suficientemente grande.

Logo, por indução, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_1((TS)^k - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como

$$|\operatorname{tr}(TS)^k - \operatorname{tr}(\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k| = |\operatorname{tr}((TS)^k - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k)| \leq s_1((TS)^k - (\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k),$$

segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k = \operatorname{tr}(TS)^k$.

Em suma, verificamos acima que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{tr}(\widetilde{T_n})^k (\operatorname{tr}(\widetilde{S_n}))^k) = (\operatorname{tr}(T))^k (\operatorname{tr}(S))^k$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k = \operatorname{tr}(TS)^k$. Agora, do resultado provado por Yang para matrizes positivas semi-definidas, temos

$$\operatorname{tr}(\widetilde{T_n \widetilde{S_n}})^k \leq \operatorname{tr}(\widetilde{T_n})^k \operatorname{tr}(\widetilde{S_n})^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, concluímos

$$\operatorname{tr}(TS)^k \leq \operatorname{tr}(T)^k \operatorname{tr}(S)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

■

4.2 O Teorema de Calkin

O próximo teorema afirma que os ideais $F(H)$ e $K(H)$ são ideais minimal e maximal em $B(H)$, respectivamente, no seguinte sentido: Se $\mathcal{I}$ é um ideal tal que $\{0\} \subset \mathcal{I} \subsetneq F(H)$ então $\mathcal{I} = \{0\}$. Analogamente, se $K(H) \subsetneq \mathcal{I} \subset B(H)$ então $\mathcal{I} = B(H)$.

Teorema 4.2 (Calkin). *Seja $\mathcal{I}$ um ideal não-trivial de $B(H)$. Então $\mathcal{I}$ contém os operadores de posto finito e está contido nos operadores compactos definidos sobre H . Simbolicamente $F(H) \subset \mathcal{I} \subset K(H)$.*

Demonstração: Mostremos que $F(H) \subset \mathcal{I}$. Para isso vamos considerar inicialmente um operador $T \in F(H)$ de posto um. Sabemos que T se escreve $Tx = (x, u)v$, onde $u, v \in H \setminus \{0\}$. Seja $A \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$. Existe $e \in H$ tal que $Ae \neq 0$. Consideramos então os operadores $B, C \in F(H)$ definidos por $Bx = \frac{(x, Ae)v}{\|Ae\|^2}$ e $Cx = \frac{(x, v)e}{\|v\|^2}$. Temos $BAC \in \mathcal{I}$ e daí, $BACT \in \mathcal{I}$. Por outro lado

$$\begin{aligned} BACTx &= BAC((x, u)v) = (x, u)BACv = (x, u)BA \left(\frac{(v, v)e}{\|v\|^2} \right) = (x, u)BAe \\ &= (x, u) \frac{(Ae, Ae)v}{\|Ae\|^2} = (x, u)v = Tx, \quad x \in H, \end{aligned}$$

ou seja, $T = BACT \in \mathcal{I}$. Assim $\mathcal{I}$ contém os operadores de posto um. Como um operador de posto n nada mais é que a soma de n operadores de posto um, concluímos que $F(H) \subset \mathcal{I}$.

Resta mostrar que $\mathcal{I} \subset K(H)$. Suponhamos que exista $A \in \mathcal{I} \setminus K(H)$. Vamos mostrar que $I \in \mathcal{I}$, concluindo que $\mathcal{I} = B(H)$. Para isso usaremos o seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [4] págs. 110 e 111: $A \in B(H)$ é compacto se e somente se cada subespaço fechado próprio E de $R(A)$ possui dimensão finita.

Logo se $A \in B(H) \setminus K(H)$ então $R(A)$ contém um subespaço fechado $M \neq R(A)$ de dimensão infinita.

Seja $N(A) = \{x \in H; Ax = 0\}$ o núcleo de A . Sabemos que $H = N(A) \oplus E$. Consideremos $A_1 : E \rightarrow R(A)$, dada por $A_1x = Ax$, $x \in E$. Como A é contínua, A_1 é contínua e possui uma inversa $A_1^{-1} : R(A) \rightarrow E$ também contínua. Assim o conjunto $\mathfrak{U} = A_1^{-1}(M) \subset E$ é fechado (M é fechado) e consequentemente, um espaço de Hilbert (com a norma induzida por H).

Então existem $X, Y \in B(H)$ com $R(X) = \mathfrak{U}$ e $R(Y) = M$, isometrias parciais (para definição ver [3], pág. 365). Seja então $B = Y^*AX$. Por construção $R(B) = H$. Agora,

$$Bu = 0 \Rightarrow AXu = 0 \Rightarrow Xu \in N(A) \cap R(X) \subset N(A) \cap E = \{0\} \Rightarrow Xu = 0 \Rightarrow u = 0$$

Então existe $B^{-1} \in B(H)$.

Agora $B \in \mathcal{I}$, pois $A \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ é ideal. Daí segue que $I = BB^{-1} \in \mathcal{I}$, ou seja, $\mathcal{I} = B(H)$.

■

Definição 4.1. Um **traço** é uma função $\phi : B^+(H) \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes condições:

- i) $\phi(T + S) = \phi(T) + \phi(S)$, $T, S \in B^+(H)$
- ii) $\phi(\lambda T) = \lambda \phi(T)$, $T \in B^+(H)$ e $\lambda \geq 0$

iii) $\phi(UTU^*) = \phi(T)$, $T \in B^+(H)$ e $U \in B(H)$ é tal que $U^* = U^{-1}$ (dizemos que ϕ é **unitariamente invariante**).

Diremos ainda que um traço é **finito** quando tomar valores apenas em $[0, +\infty)$.

Observação 4.1. Pelo Teorema 2.11 é possível estender linearmente um traço para o conjunto dos operadores auto adjuntos em $B(H)$ desde que ele seja finito.

Proposição 4.1. Seja ϕ uma função em $B^+(H)$ que assume valores não negativos (possivelmente $+\infty$) tal que $\phi(T + S) = \phi(T) + \phi(S)$ e $\phi(\lambda T) = \lambda\phi(T)$, $T, S \in B^+(H)$ e $\lambda \geq 0$. Para que ϕ seja um traço, isto é, que $\phi(UTU^*) = \phi(T)$, $T \in B^+(H)$ e U unitário, é necessário e suficiente que $\phi(TT^*) = \phi(T^*T)$, para todo $T \in B^+(H)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $T \in B(H)$. Pela decomposição polar (Teorema 2.6), T se escreve na forma $T = UA$, onde U é unitário e A positivo. Temos

$$T^*T = A^*U^*UA = AA = A^2 \text{ e } TT^* = UAA^*U^* = UA^2U^*$$

Dáí,

$$\phi(TT^*) = \phi(UA^2U^*) = \phi(A^2) = \phi(T^*T)$$

($\Leftarrow$) Consideremos agora $T \in B^+(H)$ e U unitário. Como T é positivo, possui uma única raiz quadrada positiva $T^{1/2}$. Temos

$$\begin{aligned} \phi(UTU^*) &= \phi(UT^{1/2}(T^{1/2})^*U^*) = \phi(UT^{1/2}(UT^{1/2})^*) = \phi((UT^{1/2})^*UT^{1/2}) \\ &= \phi((T^{1/2})^*U^*UT^{1/2}) = \phi(T) \end{aligned}$$

ou seja ϕ é traço. ■

Exemplo. A aplicação $\varphi : B^+(H) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n, e_n)$$

onde (e_n) é um conjunto ortonormal completo, é um traço de acordo com a Definição 4.1. Isso significa que se restringirmos o traço funcional, ou espectral, a $\mathcal{S}_1^+(H)$ e atribuirmos $+\infty$ em $B^+(H) \setminus \mathcal{S}_1^+(H)$ obteremos um traço.

Se $T \in B^+(H)$, temos $(Tx, x) \geq 0$, $x \in H$. Em particular $(Te_i, e_i) \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$ ((e_i) conjunto ortonormal completo). Assim $\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, e_i) \geq 0$. Como φ é restrição de tr , as condições i) e ii) já foram verificadas no Capítulo 3. Verifiquemos iii) usando a proposição acima.

$$\begin{aligned} \varphi(TT^*) &= \sum_{i=1}^{\infty} (TT^*e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (T^*e_i, T^*e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \|T^*e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (Te_i, Te_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (T^*Te_i, e_i) = \varphi(T^*T) \end{aligned}$$

Observação 4.2. *É natural questionar a existência de traços que não sejam proporcionais ao traço acima. Em 1966, Dixmier construiu um traço, definido apenas em uma subclasse de $B^+(H)$, que tem valor finito onde o traço usual diverge (quando tal divergência for logarítmica) e se anula quando o traço usual é finito. Para um estudo desse traço ver [7].*

Proposição 4.2. *Seja $\mathcal{I}$ ideal de $B(H)$. Então cada elemento de $\mathcal{I}$ é combinação linear de elementos de $\mathcal{I}^+ = \{T \in \mathcal{I}, T \geq 0\}$.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{I}$. Vimos no Teorema 2.10 item i) que podemos escrever $T = T_1 + T_2$, onde $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ e $T_2 = \frac{i}{2}(T - T^*)$. Afirmamos que $T_1, T_2 \in \mathcal{I}$. Para isso é suficiente verificar que $T^* \in \mathcal{I}$. Mas isso decorre imediatamente do Teorema 2.9 que diz que se $\mathcal{I}$ é ideal, então $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$.

Assim basta provar o caso em que T é auto-adjunto. Nesse caso podemos escrever $T = T_1 - T_2$, onde $T_1 = \frac{|T|+T}{2}$ e $T_2 = \frac{|T|-T}{2}$ ($|T| = (T^*T)^{1/2}$). O Teorema 2.11 garante a positividade desses operadores, provando o resultado. ■

Lema 4.1. *Seja M_0 subconjunto de $B^+(H)$ com as seguintes propriedades:*

- i) *Se $T \in M_0$ e U é um operador unitário em $B(H)$, temos $U^*TU \in M_0$*
- ii) *Se $S \in M_0$ e $T \in B^+(H)$ é majorado por S ($T \leq S$), então $T \in M_0$*
- iii) *Se $T \in M_0$ e $S \in M_0$, então $T + S \in M_0$*

Então o conjunto $\mathcal{N} = \{T \in B(H); TT^ \in M_0\}$ é um ideal de $B(H)$ e $M_0 = (\mathcal{N}^2)^+$.*

Demonstração: Mostremos que $\mathcal{N}$ é um ideal

- i) Sejam $T, S \in \mathcal{N}$, temos

$$\begin{aligned} 2TT^* + 2SS^* - (T + S)(T + S)^* &= 2TT^* + 2SS^* - TT^* - TS^* - ST^* - SS^* \\ &= TT^* - TS^* - ST^* + SS^* = (T - S)(T - S)^* \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja $(T + S)(T + S)^* \leq 2TT^* + 2SS^* \in M_0$ (pois $T, S \in \mathcal{N}$ e pela propriedade iii) de M_0). Assim $(T + S)(T + S)^* \in M_0$ por ii). Logo $T + S \in \mathcal{N}$, pela definição de $\mathcal{N}$.

ii) Seja $T \in \mathcal{N}$. Dado $S \in B(H)$, devemos mostrar que $TS, ST \in \mathcal{N}$. Sabemos (Teorema 2.10 ii)) que todo elemento de $B(H)$ é combinação linear de operadores unitários de $B(H)$. Digamos $S = \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n$, com $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ e $U_1, \dots, U_n$ unitários. Suponhamos $U_i T \in \mathcal{N}$ e $|\lambda_i|^2 \leq k \in \mathbb{N}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então $\lambda_i U_i T \in \mathcal{N}$, $i \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$(\lambda_i U_i T)(\lambda_i U_i T)^* = |\lambda_i|^2 (U_i T)(U_i T)^* \leq k (U_i T)(U_i T)^* \in M_0$$

Disso segue que $ST = \lambda_1 U_1 T + \dots + \lambda_n U_n T \in \mathcal{N}$, pelo provado em i). Analogamente, se tivermos $TU_i \in \mathcal{N}$, podemos concluir que $TS \in \mathcal{N}$. Isso reduz a mostrar que $TU, UT \in \mathcal{N}$, onde $T \in \mathcal{N}$ e U é unitário. Temos

$$(TU)(TU)^* = TUU^*T^* = TT^* \in M_0$$

$$(UT)(UT)^* = UTT^*U^* \in M_0 \text{ (pela propriedade } i) \text{ de } M_0)$$

Portanto $\mathcal{N}$ é um ideal de $B(H)$. Resta mostrar que $M_0 = (\mathcal{N}^2)^+$.

Se $S \in M_0 \subset B^+(H)$, sabemos pelo Teorema 2.5 que existe $S^{1/2} \in B^+(H)$, a raiz quadrada positiva de S . Temos $S^{1/2}(S^{1/2})^* = S^{1/2}S^{1/2} = S \in M_0$, isso significa que $S^{1/2} \in \mathcal{N}$, conseqüentemente $S \in \mathcal{N}^2$, ou seja, $M_0 \subset (\mathcal{N}^2)^+$.

Reciprocamente seja $T \in (\mathcal{N}^2)^+$ então, pelo Teorema 2.9, T é soma de operadores da forma AB^* , com $A, B \in \mathcal{N}$. Se T é auto-adjunto a identidade

$$AB^* = (A+B)(A+B)^* - (A-B)(A-B)^* + i(A+iB)(A+iB) - i(A-iB)(A-iB)^*$$

mostra que T é majorado por um operador da forma $\sum_{i=1}^n C_i C_i^*$, com $C_i \in M_0$, ou seja, por um operador em $\mathcal{N}$. Se $T \geq 0$, então $T \in M_0$, assim $(\mathcal{N}^2)^+ \subset M_0$. ■

Lema 4.2. *Sejam $T, S \in B^+(H)$, tais que $T \leq S$. Então existe um único operador $A \in B(H)$ tal que $S^{1/2} = AT^{1/2}$.*

Demonstração: Para todo $x \in H$, temos

$$\begin{aligned} \|T^{1/2}x\|^2 &= (T^{1/2}x, T^{1/2}x) = (T^{1/2}T^{1/2}x, x) = (Tx, x) \\ &\leq (Sx, x) = (S^{1/2}x, S^{1/2}x) = \|S^{1/2}x\|^2 \end{aligned}$$

Isso mostra que a aplicação linear $C : S^{1/2}(H) \rightarrow H$ dada por $C(u) = T^{1/2}x$, onde x é tal que $S^{1/2}x = u$, está bem definida e é contínua. Seja B a extensão contínua de C à $\overline{S^{1/2}(H)}$. Temos, $T^{1/2}x = BS^{1/2}x$, $x \in H$. Daí podemos estender B continuamente a H da seguinte forma

$$Ax = \begin{cases} BS^{1/2}x, & x \in \overline{S^{1/2}(H)} \\ T^{1/2}x, & x \notin \overline{S^{1/2}(H)} \end{cases}$$

É simples verificar que A é a única aplicação satisfazendo $T^{1/2}x = AS^{1/2}x$, $x \in H$. ■

Proposição 4.3. *Seja $M_0 \subset B^+(H)$. Então existe um ideal M de $B(H)$ tal que $M_0 = M^+$ se e somente se M_0 satisfaz as propriedades i), ii) e iii) do lema anterior.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se M_0 é a parte positiva de M , temos para $T, S \in M_0 = M^+$ e U unitário

$$((T+S)x, x) = (Tx, x) + (Sx, x) \geq 0, \quad x \in H$$

$$(U^*TUx, x) = (TUX, UX) \geq 0, \quad x \in H$$

Isso que dizer que i) e iii) são satisfeitas. Agora para verificar ii), seja $T \in M_0$ e $S \in B^+(H)$ tal que $S \leq T$. Pelo lema acima existe $A \in B(H)$ tal que $S^{1/2} = AT^{1/2}$, de onde segue que

$S = S^{1/2}S^{1/2} = S^{1/2}(S^{1/2})^* = AT^{1/2}(T^{1/2})^*A^* = AT^{1/2}T^{1/2}A^* = ATA^* \in M^+$, pois $T \in M^+$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente se M_0 é um subconjunto de $B^+(H)$ satisfazendo *i*), *ii*) e *iii*), o Lema 4.1 nos diz que M_0 é a parte positiva do ideal $\mathcal{N}^2$, lá definido. ■

O próximo teorema afirma que o **domínio natural** de um traço ϕ , isto é o conjunto dos $T \in B^+(H)$, tal que $\phi(T) < \infty$ é a parte positiva de um ideal, denotado por $\mathfrak{F}_\phi$.

Teorema 4.3. *Seja ϕ um traço em $B^+(H)$. O conjunto $M_0 = \{T \in B^+(H), \phi(T) < \infty\}$ é a parte positiva de um ideal em $B(H)$, denotado por $\mathfrak{F}_\phi$, isto é, $M_0 = (\mathfrak{F}_\phi)^+$.*

Demonstração: Com efeito, sendo $T, S \in M_0$ e U operador unitário, temos pela definição de traço

$$i) \phi(U^*TU) = \phi(T) < \infty \Rightarrow U^*TU \in M_0$$

ii) Se $S \in B^+(H)$ e $S \leq T \in M_0$, então $T - S \in B^+(H)$. Como $\phi(T) = \phi(T - S) + \phi(S)$ temos que S (e $T - S$) são elementos de M_0 .

$$iii) \phi(T + S) = \phi(T) + \phi(S) < \infty$$

Portanto M_0 satisfaz as condições do Lema 4.1. Pela proposição anterior M_0 é a parte positiva de um ideal, como queríamos. ■

4.3 Traços e Ideais Principais

Nosso objetivo é responder a seguinte questão: quais ideais são domínios de algum traço não-trivial, isto é, de um traço não proporcional ao usual. Tal resposta foi dada por Varga em [15] para ideais principais, isto é, ideais gerados por um elemento $A \in B(H)$, que será denotado $\mathcal{I}(A)$. Ao longo dessa seção iremos efetuar a seguinte mudança de notação $\sigma_n(A) = s_n$ e $S_n(A) = S_n = \sum_{i=1}^n s_i$.

Definição 4.2. *Sejam $A \in B(H)$ e (S_n) e (s_n) as sequências definidas acima. Dizemos que A é:*

i) regular, se existe $c > 0$ tal que $S_n \leq cns_n$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) irregular, se não for regular, isso equivale a dizer que $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{n_k s_{n_k}}{S_{n_k}} = 0$, para

alguma subsequência de $\left(\frac{ns_n}{S_n}\right)$.

Lema 4.3. *As afirmativas seguintes são equivalentes:*

i) (s_n) é irregular

$$ii) \inf_n \frac{S_{kn}}{S_n} = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$iii) \inf_n \frac{S_{kn}}{S_n} < 3, \quad k \in \mathbb{N}$$

iv) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{3kn_k}}{S_{n_k}} = 1$, para alguma subsequência (n_k) de (n) .

Demonstração: (i) $\Leftrightarrow$ ii)) Notemos inicialmente que, devido ao fato de (s_n) ser decrescente

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(k-1)ns_{kn}}{S_n} &= \frac{S_n + (k-1)ns_{kn}}{S_n} \leq \frac{S_n + s_{n+1} + \cdots + s_{kn}}{S_n} \\ &= \frac{S_{kn}}{S_n} \leq 1 + \frac{(k-1)ns_n}{S_n} \end{aligned}$$

Daí obtemos as seguintes desigualdades

$$1 < 1 + \frac{(k-1)ns_{kn}}{S_{kn}} \leq 1 + \frac{(k-1)ns_{kn}}{S_n} \leq \frac{S_{kn}}{S_n} \leq 1 + \frac{(k-1)ns_n}{S_n} \quad (*)$$

Se (s_n) é irregular, existe subsequência de $\left(\frac{ns_n}{S_n}\right)$ tal que $\lim_{n'_k \rightarrow \infty} \frac{ns_{n'_k}}{S_{n'_k}} = 0$. Então $(*)$ nos diz que $\lim_{n'_k \rightarrow \infty} \frac{S_{kn'_k}}{S_{n'_k}} = 1$, ou seja, $\inf_n \frac{S_{kn}}{S_n} = 1$.

Reciprocamente se $\inf_n \frac{S_{kn}}{S_n} = 1$, temos por $(*)$ que $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(k-1)n_i s_{kn_i}}{S_{kn_i}}\right) = 1$, para alguma subsequência indexada por (n_i) . Assim $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{n_i s_{kn_i}}{S_{kn_i}} = 0$. Portanto (s_n) é irregular.

(ii) $\Leftrightarrow$ iii)) Temos que ii) $\Rightarrow$ iii). Suponhamos então que $\inf_n \frac{S_{kn}}{S_n} = \alpha > 1$, para algum k . Como $\alpha > 1$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^p > 3$. Assim

$$\frac{S_{k^p n}}{S_n} = \frac{S_{k^p n}}{S_{k^{p-1}n}} \cdots \frac{S_{k^2 n}}{S_{kn}} \frac{S_{kn}}{S_n} \geq \alpha^p > 3, \quad n \in \mathbb{N}$$

Logo $\inf_n \frac{S_{k^p n}}{S_n} \geq 3$, contradizendo a hipótese.

(ii) $\Leftrightarrow$ iv)) Temos

$$\begin{aligned} \frac{3k-2}{3k-1}S_n + \frac{1}{3k-1}S_{3kn} &= S_n + \frac{S_{3kn} - S_n}{3k-1} \leq S_n + \frac{(3k-1)(s_{n+1} + \cdots + s_{2n})}{3k-1} \\ &\leq S_n + s_{n+1} + \cdots + s_{2n} = S_{2n} \end{aligned}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned} (3k-2)S_n + S_{3kn} \leq (3k-1)S_{2n} &\Rightarrow 3k-2 + \frac{S_{3kn}}{S_n} \leq (3k-1)\frac{S_{2n}}{S_n} \\ &\Rightarrow \frac{S_{3kn}}{S_n} - 1 \leq (3k-1)\left(\frac{S_{2n}}{S_n} - 1\right) \end{aligned}$$

Por hipótese $\inf_n \frac{S_{2n}}{S_n} = 1$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{S_{2n_k}}{S_{n_k}} - 1 < \frac{1}{k^2}$.

Assim

$$\frac{S_{3kn_k}}{S_{n_k}} - 1 \leq (3k-1)\left(\frac{S_{2n_k}}{S_{n_k}} - 1\right) < \frac{3k-1}{k^2} < \epsilon$$

para k suficientemente grande, ou seja, $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{S_{3kn_k}}{S_{n_k}} = 1$.

Reciprocamente, a desigualdade $1 \leq \frac{S_{k_0 n_k}}{S_{n_k}} \leq \frac{S_{kn_k}}{S_{n_k}}$, $k > k_0$, diz que $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{S_{k_0 n_k}}{S_{n_k}} = 1$, ou seja, $\inf_n \frac{S_{kn_k}}{S_{n_k}} = 1$, onde $k \in \mathbb{N}$. ■

Seja $T \in K(H)$. É claro que $\mathcal{I}(T) = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathcal{I}_r(T)$, onde $\mathcal{I}_r(T)$ indica o conjunto dos operadores da forma $\sum_{i=1}^r X_i T Y_i$, com $X_i, Y_i \in B(H)$, $i = 1, \dots, r$.

Lema 4.4. *Seja $B \in B(H)$. Se $B \in \mathcal{I}_r(A)$ então $s_{r(n-1)+1}(B) \leq k s_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ e algum $k > 0$.*

Demonstração: Se $B \in \mathcal{I}_r(T)$, então $B = \sum_{i=1}^r X_i A Y_i$, com $X_i, Y_i \in B(H)$, $i = 1, \dots, r$. Do Corolário 2.2, temos

$$\begin{aligned} s_{r(n-1)+1}(B) &= s_{rn+1-r}(B) \leq \sum_{i=1}^r s_n(X_i A Y_i) \leq \sum_{i=1}^r s_n(A) \|X_i\| \|Y_i\| \\ &= s_n(A) \left(\sum_{i=1}^r \|X_i\| \|Y_i\| \right) \end{aligned}$$

Tomando $k = \sum_{i=1}^r \|X_i\| \|Y_i\|$, o resultado segue. ■

Consideremos novamente os traços funcional e espectral introduzidos no Capítulo 3. Temos o seguinte resultado auxiliar:

Lema 4.5. *Se $A \in K(H)$ e P é uma projeção de posto n , então*

$$|\operatorname{tr}(AP)| \leq S_n(AP) \leq S_n(A)$$

onde tr denota o traço funcional ou espectral.

Demonstração: Observamos que P tem posto n , então AP tem posto menor ou igual a n , assim como $B = (AP)^*(AP)$. Agora se C é tal que $C^2 = B$, então o posto de C deve ser no máximo n (caso contrario, tomando uma base ortonormal de autovalores, teríamos posto $B > n$). Logo $|AP|$ tem no máximo n autovalores, ou seja $s_1(AP) = S_n(AP)$ (lembrando que os autovalores são tomados em ordem decrescente). Pela desigualdade de Weyl (Teorema 2.15) temos,

$$|\operatorname{tr}(AP)| \leq s_1(AP) = S_n(AP) = \sum_{i=1}^n s_i(AP) \leq \sum_{i=1}^n s_i(A) \|P\| = \sum_{i=1}^n s_i(A) = S_n(A)$$

onde usamos ainda que $s_n(AP) \leq \|P\| s_n(A)$ e que $\|P\| = 1$ pois P é uma projeção sobre um espaço de dimensão finita. ■

Teorema 4.4. *Seja $A \in K(H)$. Se A é irregular, então $\mathcal{I}^+(A)$ é o domínio natural de um traço não-nulo.*

Demonstração: Fixado A , denotemos $(s_n(A))$ por (s_n) . Seja B um operador compacto. Podemos obter $((e_n(B)))$ conjunto ortonormal tal que $B^*Be_n = s_n^2(B)e_n(B)$ (Ver Método de Ordenação no Capítulo 2). Consideremos então $E_n(B)$ a projeção sobre o espaço $H_n(B) = [e_1(B), \dots, e_n(B)]$. Suponhamos A irregular. Nosso objetivo é definir um traço cujo domínio é $\mathcal{I}^+(A)$. Para isso consideremos (P_k) sequência de projeções e definimos a sequência $(\phi_{P_k}(B))$ dada por $\phi_{P_k}(B) = \frac{\text{tr}(BP_k)}{S_{n_k}}$. Afirmamos que $(\phi_{P_k}(B))$ é limitada quando posto $P_k \leq Mkn_k$, $k \in \mathbb{N}$ e $M \in \mathbb{N}$ fixo.

De fato, temos $B \in \mathcal{I}_r(A)$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.4,

$$s_{rn}(B) \leq s_{rn-1}(B) \leq \dots \leq s_{r(n-1)+1}(B) \leq cs_n(A)$$

para alguma constante positiva c , ou seja,

$$\sum_{i=0}^{r-1} s_{rn-i}(B) \leq rcs_n(A) \quad (*)$$

daí,

$$S_{rn}(B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} s_{ri-j}(B) \leq \sum_{i=1}^n rcs_i(A) = rc \sum_{i=1}^n s_i(A) = rcS_n(A)$$

Assim

$$|\text{tr}(BP_k)| \leq S_{Mkn_k}(B) \leq MS_{kn_k}(B) \leq MS_{rkn_k}(B) \leq MrcS_{kn_k}(A)$$

onde usamos o Lema 4.5, propriedades de $(S_n(B))$ e $(*)$. Logo

$$|\phi_{P_k}(B)| = \frac{|\text{tr}(BP_k)|}{S_{n_k}} \leq \frac{rMcS_{kn_k}(A)}{S_{n_k}}$$

Como A é irregular e $\frac{S_{kn_k}}{S_{n_k}} \leq \frac{S_{3kn_k}}{S_{n_k}}$, pelo item *iv*) do Lema 4.3, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{kn_k}(A)}{S_{n_k}(A)} = 1$, consequentemente $\left(\frac{S_{kn_k}(A)}{S_{n_k}(A)} \right)$ é limitada. Logo $(\phi_{P_k}(B))$ é limitada.

Tomemos então $P_k(B) = E_{kn_k}(B)$ e $\phi_k(B) = \phi_{P_k}(B)$. Notemos que $\phi : \mathcal{I}(A) \rightarrow \ell_\infty$, $\phi(B) = (\phi_k(B))$ é positivo ($(x_n) \in \ell_\infty$ é positivo se $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$) e unitariamente invariante. Com efeito, se $B \in \mathcal{I}^+(A)$ então os autovalores $\lambda_i(B)$ de B são positivos. Além disso temos, $\text{tr}(BP_k) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{kn_k} \geq 0$ pela definição de P_k . Então $\phi_k(B) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\phi(B) \geq 0$. Agora se (P_k) é a sequência de projeções associada a B então (P'_k) dada por $P'_k = U^*P_kU$ é a sequência de projeções associada a U^*BU (no espaço $[U^*e_1, \dots, U^*e_{kn_k}]$, onde $(U^*e_n)_{n=1}^{kn_k}$ é ortonormal pela Proposição 2.1).

i) U^*P_kU é projeção: $(U^*P_kU)^2 = U^*P_kUU^*P_kU = U^*P_k^2U = U^*P_kU$

ii) Se λ_n é autovalor associado a e_n (por B), então λ_n é autovalor associado a U^*e_n (por (U^*BU)): $(U^*BU)(U^*e_n) = U^*Be_n = \lambda_n U^*e_n$

Logo

$$\phi_k(U^*BU) = \frac{\text{tr}(U^*BU P'_k)}{S_{n_k}} = \frac{\text{tr}(U^*BU U^* P_k U)}{S_{n_k}} = \frac{\text{tr}(U^*B P_k U)}{S_{n_k}} = \frac{\text{tr}(B P_k)}{S_{n_k}} = \phi_k(B), \quad k \in \mathbb{N}$$

ou seja, ϕ é unitariamente invariante.

Entretanto não podemos garantir que ϕ é linear. Consideremos então a aplicação quociente $\pi : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty/c_0$, $\pi(x) = \bar{x}$ e definimos a aplicação $\tau : \mathcal{I}(A) \rightarrow \ell_\infty$, por $\tau(B) = \pi \circ \phi(B)$. Temos que τ é unitariamente invariante pois ϕ o é. Para falarmos em positividade de τ precisamos definir uma ordem parcial em ℓ_∞/c_0 . Consideramos a seguinte relação $\bar{x} \leq \bar{y}$ se existe $e \in c_0$ tal que $x \leq y + e$. Tal relação é uma relação de ordem parcial (ver [9], pág. 17). Com essa definição a positividade de τ decorre diretamente da positividade de ϕ . Devemos mostrar que τ é linear. Para isso definimos.

Definição 4.3. *Sejam (P_k) e (R_k) sequências de projeções. Diremos que (P_k) é **amarrada** a (R_k) se $P_k \leq R_k$ e posto $R_k \leq 3$ posto P_k .*

Observação 4.3. *Se (R_k) é amarrada a $(P_k(B)) = (P_k)$ então $P_k(H) \subset R_k(H)$, $k \in \mathbb{N}$.*

Seja $x \in (R_k(H))^\perp$. Temos $0 \leq (P_k x, x) \leq (R_k x, x) = 0$. Disso segue que

$$(x, P_k x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^{kn_k} (x, e_j) e_j \right) = \sum_{i=1}^{kn_k} |(x, e_i)|^2 e_i = 0$$

isto é, $(x, e_i) = 0$, com $i = 1, \dots, kn_k$.

Dessa forma, $(x, u) = 0$, para todo $u \in P_k(H) = [e_1, \dots, e_{kn_k}]$, ou seja, $x \in (P_k(H))^\perp$. Assim $P_k(H) \subset R_k(H)$, visto que $(R_k(H))^\perp \subset (P_k(H))^\perp$.

Lema 4.6. *Se $B \in \mathcal{I}(A)$ e (R_k) é amarrada a $(P_k(B))$, então, $\tau_{R_k}(B) = \tau(B)$.*

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathcal{I}_r(A)$ e suponha $k \geq r$. Então

$$\begin{aligned} |\phi_{R_k}(B) - \phi_k(B)| S_{n_k} &= |\text{tr}(B R_k) - \text{tr}(B P_k(B))| = |\text{tr}(B(R_k - P_k(B)))| \\ &\leq S_{2kn_k}(B(R_k - P_k(B))) \leq S_{3kn_k}(B) - S_{kn_k}(B) \\ &\leq S_{3rkn_k}(B) - S_{rn_k}(B) = \sum_{i=rn_k+1}^{3rkn_k} s_i(B) = \sum_{j=n_k+1}^{3kn_k} \sum_{l=1}^r s_{r(j-1)+l}(B) \\ &\leq \sum_{j=n_k+1}^{3kn_k} r c s_j(A) = r c (S_{3kn_k} - S_{n_k}) \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade decorre do Lema 4.5 (note que $\text{posto}(R_k - P_k(B)) \leq 2kn_k$, pois $P_k(H) \subset R_k(H)$), a segunda pelo fato de que $R_k - P_k(B)$ se anula no espaço $[e_1, \dots, e_{kn_k}] = P_k(B)$ e a soma dos primeiros $2kn_k$ autovalores de $B(R_k - P_k(B))$ é

menor ou igual que a soma dos $2kn_k$ autovalores seguintes a $s_{kn_k}(B)$ tomados em ordem decrescente. Já a última desigualdade é $(*)$. Daí temos

$$|\phi_{R_k}(B) - \phi_k(B)| \leq rc \left(\frac{S_{kn_k}}{S_{n_k}} - 1 \right) \rightarrow 0, \text{ quando } n_k \rightarrow \infty$$

pois A é irregular (Lema 4.3). Logo $\tau_{R_k}(B) = \tau(B)$. ■

Sejam B_1 e $B_2 \in \mathcal{I}(A)$. Consideremos $B_3 = B_1 + B_2$ e R_k a projeção sobre o espaço gerado por $\bigcup_{i=1}^3 H_{kn_k}(B_i)$. Então (R_k) é amarrada a $(P_k(B_i))$, para todo $i = 1, 2, 3$. Pelo lema acima, $\tau(B_i) = \tau_{R_k}(B_i)$, $i = 1, 2, 3$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi_{R_k}(B_3) &= \frac{\text{tr}(B_3 R_k)}{S_{n_k}} = \frac{\text{tr}((B_1 + B_2) R_k)}{S_{n_k}} = \frac{\text{tr}(B_1 R_k)}{S_{n_k}} + \frac{\text{tr}(B_2 R_k)}{S_{n_k}} \\ &= \phi_{R_k}(B_1) + \phi_{R_k}(B_2) \end{aligned}$$

Assim $\tau(B_3) = \tau_{R_k}(B_3) = \tau_{R_k}(B_1) + \tau_{R_k}(B_2) = \tau(B_1) + \tau(B_2)$. Agora

$$\phi_k(\lambda B) = \frac{\text{tr}(\lambda B P_k(B))}{S_{n_k}} = \lambda \frac{\text{tr}(B P_k(B))}{S_{n_k}} = \lambda \phi_k(B)$$

daí $\tau(\lambda B) = \lambda \tau(B)$. Portanto τ é linear, positivo e unitariamente invariante.

Finalmente seja p um funcional linear positivo em ℓ_∞ , com $c_0 \subset N(p)$, tal como um limite de Banach (ou o apresentado em [7] pág. 27). Seja $q = p \circ \pi$.

Então $f = p \circ \phi = q \circ \tau : \mathcal{I}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo, positivo e unitariamente invariante, além de ser finito em $\mathcal{I}(A)$. Portanto f é um traço finito em $\mathcal{I}^+(A)$. ■

Apêndice

Como é de conhecimento geral o importante Teorema de Hahn-Banach possui muitas formas e consequências (ver, por exemplo [5] e [12]). Apresentamos abaixo a forma que utilizamos no texto da dissertação assim como o corolário do referido teorema, que fazemos uso ao longo do trabalho.

Teorema de Hahn-Banach. *Sejam X um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:*

- i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para quaisquer $x, y \in X$.*
- ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x \in X$ e $\lambda \geq 0$.*

Consideremos um funcional linear contínuo f sobre um subespaço Y de X , de modo que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in Y$. Então existe um funcional linear contínuo F sobre X tal que $F(x) = f(x)$, com $x \in Y$ e $F(x) \leq p(x)$, para $x \in X$.

Demonstração: Consideremos a família $\mathcal{F}$ de todas as extensões lineares g de f tais que $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M_g$ (domínio de g). Definimos a seguinte relação em $\mathcal{F}$: $g \leq h$ quando $M_g \subset M_h$ e $h|_{M_g} = g$. É simples mostrar $\leq$ é uma relação de ordem parcial e que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ possui cota superior. Pelo Lema de Zorn, existe g maximal, isto é $g|_Y = f$ e $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M_g$ e $g' \leq g$ com g' em um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ contendo g . Com isso, basta mostrar que $M_g = X$.

Suponhamos $M_g \neq X$, então existe $y_1 \in X \setminus M_g$. Sejam $M_{g'} = M_g \oplus [y_1]$ e $g' : M_{g'} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por, $g'(y + \lambda y_1) = g(y) + \lambda c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante. Para que g' seja uma extensão de g devemos provar que $g'(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M_{g'}$ e alguma constante $c \in \mathbb{R}$ apropriada. Sejam $x, y \in M_g$ arbitrários. Temos

$$g(y) - g(x) = g(y - x) \leq p(y - x) \leq p(y + y_1) + p(-y_1 - x)$$

daí, $-p(y_1 - x) - g(x) \leq p(y + y_1) - g(y)$.

Como o lado esquerdo da desigualdade independe de y e o lado direito independe de x é possível obter $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$I) \quad c \leq p(y + y_1) - g(y)$$

$$II) \quad -p(y_1 - x) - g(x) \leq c$$

Se $\lambda = 0$, a desigualdade $g'(y + \lambda y_1) \leq p(y + \lambda y_1)$ é trivial. Se $\lambda > 0$, substituindo y por y/λ em I), obtemos

$$c \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + y_1\right) - g\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}p(y + \lambda y_1) - \frac{g(y)}{\lambda}$$

ou seja, $g'(y + \lambda y_1) = g(y) + \lambda c \leq p(y + \lambda y_1)$. Analogamente obtemos a última desigualdade para $\lambda < 0$ substituindo y por y/λ em II).

Portanto, g' é uma extensão de g contrariando sua maximilidade. ■

Corolário. *Seja Y um subespaço de um espaço normado X sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para cada funcional linear contínuo $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$, existe $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ funcional linear contínuo tal que $F|_Y = f$ e $\|F\| = \|f\|$, onde $\mathbb{K}$ indica $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Consideremos primeiro o caso real. Tomemos $p(x) = \|f\||x|$. É simples verificar que p satisfaz todas as hipóteses do teorema. Então existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F|_Y = f$ e $F(x) \leq p(x) = \|f||x|$. Daí obtemos $|F(x)| \leq \|f||x|$, ou seja, $\|F\| \leq \|f\|$. Mas, como f é restrição de F , $\|f\| \leq \|F\|$, donde segue a igualdade.

Suponhamos agora que X é um espaço normado sobre o corpo dos complexos. Para cada $y \in Y$ sejam $f_1(y), f_2(y) \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $f(y) = f_1(y) + if_2(y)$, $y \in Y$. Temos que f_1 e f_2 são funcionais lineares reais. Além disso

$$|f_1(y)| \leq |f(y)| \leq \|f\||y|$$

ou seja, f_1 é contínuo. Então, pelo Teorema de Hahn-Banach, é possível obter um funcional $F_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\|F_1\| \leq \|f\|$ e $F_1(y) = f_1(y)$, $y \in Y$. Consideremos $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(x) = F_1(x) - iF_1(iy)$.

É simples ver que $F(x + y) = F(x) + F(y)$ assim como $F(\lambda x) = \lambda F(x)$, para $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como

$$F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = i(F_1(x) - iF_1(ix)) = iF(x)$$

concluimos F linear.

Mostremos que F é extensão de f . Para $y \in Y$, temos

$$f_1(iy) + if_2(iy) = f(iy) = if(y) = if_1(y) - f_2(y)$$

Então $f_2(y) = -f_1(iy)$, ou seja,

$$f(y) = f_1(y) - if_1(iy) = F_1(y) - iF_1(iy) = F(y), \quad y \in Y$$

Assim F é extensão de f .

Para provar que $\|F\| = \|f\|$ escrevemos $F(x) = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Temos

$$|F(x)| = r = F(x)e^{-i\theta} = F(e^{-i\theta}x) = F_1(e^{-i\theta}x) \leq \|F_1\||e^{-i\theta}x| \leq \|f\||x|$$

onde usamos que $re^{-i\theta}x = F_1(x) - iF_1(ix)$ na última igualdade e que $\|F_1\| \leq \|F\|$ na última desigualdade. Então $\|F\| \leq \|f\|$. Por outro lado F é extensão de f e $\|F\| \geq \|f\|$. Logo $\|F\| = \|f\|$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] BRATTELI, O. AND ROBINSON D.W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics: C^* - and W^* -Algebras; Symmetry Groups; Decomposition of States*, volume I, second edition, Theoretical and Mathematical Physics, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [2] CALKIN, J., *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Annals of Mathematics, (2) vol. 42(1941), pp. 839-873.
- [3] DIXMIER, J., *Von Neumann Algebras*, North-Holland Publishing Company, New York, 1981.
- [4] DOUGLAS, R. G., *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 179, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] DUNFORD, N. AND SCHWARTZ, J. T., *Linear Operators Part I: General Theory*, Wiley Classics Library Edition Published, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [6] GOHBERG, I. AND KREIN, M. G., *Introduction to the Theory of Non-selfadjoint Operators*, Translations of American Mathematical Society, vol. 18, Providence, R.I, 1969.
- [7] HALLACK, A. A., *O Traço de Dixmier e O Teorema do Traço de Connes*, Dissertação de Mestrado, UFRJ, 1998.
- [8] HELMBERG G., *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North-Holland Publishing Company, New York, 1969.
- [9] JAMESON, G., *Ordered Linear Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 141, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [10] KATO, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 132, Springer-Verlag, New York, 1966.

-
- [11] LIU, L., *A trace class operator inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 328(2006), pp. 1484-1486.
 - [12] NARICI, L., *On The Hahn-Banach Theorem*, To appear in Proceedings of the Second International Course of Mathematical Analysis in Andalucia, Spain.
 - [13] RETHERFORD, J. R., *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, London Mathematical Society Student Texts, 27, Cambridge University Press, 1993.
 - [14] RUNDE, V., *A new and simple proof of Schauder's theorem*, arXiv:1010.1298v2 [math.FA] 22 Oct 2010.
 - [15] VARGA, J. V., *Traces on irregular ideals*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 107(1989), pp. 715-723.
 - [16] YANG, X., *A matrix trace inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 250(2000), pp. 372-374.