Aplicações da Dimensão de Hausdorff em Sistemas Dinâmicos Expansores

Sara Cristina Campos Borges

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Rio de Janeiro

Setembro de 2010

Aplicações da Dimensão de Hausdorff em Sistemas Dinâmicos Expansores

Sara Cristina Campos Borges

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza - IM/UFRJ

Profa. Katrin Grit Gelfert - IM/UFRJ

Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira - IMPA/RJ

Prof Regis Castijos Alves Soares Junior - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

Setembro de 2009

Dedicado in memorian a

Elisabete Meneses Borges

e

Mizael Peixoto Campos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter posto em meu caminho a opotunidade de cursar o mestrado. À CAPES pelo investimento financeiro nos meus estudos. Aos meus pais Pedro e Izabel por terem sempre me ensinado a importância dos estudos e sempre terem me apoiado a este respeito. À minha irmã Juliana e ao meu cunhado Gersom pelo apoio psicológico e financeiro quando mais precisei. Ao meu namorado Grigori por sempre ter ficado ao meu lado nas horas difíceis. À minha avó Maria Helena pelas muitas orações ao menino Jesus de Praga que fazia toda vez que eu tinha uma prova. A todos os queridos amigos que conheci durante toda a jornada do mestrado, em especial ao Alex pelo auxílio na confecção das figuras e ao Aldo pelas conversas de bar sobre Medida de Hausdorff. Ao meu orientador Alexander por ter de fato me orientado e apoiado não somente com respeito a dissertação quanto em todos os assuntos referentes aos estudos e ao mestrado. Aos professores Carlos Gustavo,Vitor, Regis e Katrin por terem tido a paciência de ler e corrigir toda esta dissertação e participarem da banca da defesa. A professora Cristiane Mendes por ter me direcionado ao mestrado com grande confiança em meu êxito. Em especial agradeço ao bom comandante pela confiança em seu soldado.

Ficha Catalográfica

Borges, Sara Cristina Campos.

Aplicações da Dimensão de Hausdorff em Sistemas Dinâmicos Expansores/ Sara Cristina Campos Borges. - Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2010.

145f.

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2010.

Referências Bibliográficas: f.144-145.

1. Dimensão de Hausdorff.

2. Transformações do Markov.

3. Dimensão de Bilingsley.

4. Transformação expansora.

I.Título

Universidade Federal do Rio de Janeiro,

Instituto de Matemática,

Programa de Pós-graduação do

Instituto de Matemática.

Aplicações da Dimensão de Hausdorff em Sistemas Dinâmicos Expansores

Sara Cristina Campos Borges

Orientador: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

O estudo do comportamento assintótico de órbitas tem grande destaque em pesquisas na área de sistemas dinâmicos. O objetivo desta dissertação é o estudo do comportamento de órbitas, obtidas por transformações expansoras, assintóticamente afastadas ou aproximadas de uma dada sequência via dimensão de Hausdorff.

Primeiramente, estudamos órbitas obtidas por uma transformação de Markov (caso particular de uma transformação expansora) do intervalo unitário e assintóticamente afastadas de uma determinada sequência. Mostramos que o conjunto dos pontos de tais órbitas possui mesma dimensão de Hausdorff que todo o intervalo.

O segundo resultado foi estudado no contexto de um espaço métrico separável localmente completo. Estudamos um sistema expansor (que possui uma medida e uma transformação expansora associadas) e consideramos a dimensão de Hausdorff com respeito à medida e a uma determinada grade. Neste contexto, concluimos que a dimensão do conjunto dos pontos, cuja órbita retorna infinitas vezes assintóticamente próxima a um dado ponto especial, pode ser estimada superiormente. Tal estimativa pode ser 1 ou uma constante que depende: da cardinalidade da partição associada à transformação; da entropia métrica da transformação; da velocidade de decrescimento da medida dos átomos das partições geradas por ramos de inversas da transformação com respeito à partição inicial.

Para solucionar tais problemas foram utilizadas ferramentas da teoria ergódica, da teoria da dimensão e da teoria da informação.

Applications of the Hausdorff Dimension in Expanding Dynamical Systems

Sara Cristina Campos Borges

Advisor: Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

The study of the asymptotic behavior of orbits has great importance on research in dynamical systems. The main goal of this text is the study of orbit behavior, obtained through expanding maps, asymptotically distanced or approximated from a given sequence, by Hausdorff dimension.

First, we study orbits obtained by a Markov transformation (a particular case of an expanding map) of the unit interval and asymptotically distanced from a given sequence. We show that the set of points of such orbits has the same Hausdorff dimension of the whole interval.

The second result was studied in the context of the locally complete separable metric space. We study an expanding system (which has a measure and an associated expanding map), also considering the Hausdorff dimension with respect to the measure and a given grid. In this context, we conclude that the dimension of the set of all points whose orbits return infinite times asymptotically close to a given special point, has an upper estimate. This estimate may be 1 or a constant that depends on: cardinality of the partition associated to the map; map metric entropy; speed of the decrease in the measure of atoms of the partitions generated by branches of the inverse transformation with respect to the initial partition.

Tools of ergodic theory, the theory of dimension and information theory were used to solve such problems.

Sumário

Introdução

Esta dissertação versa sobre a dimensão de Hausdorff, suas relações com a teoria dos números e suas aplicações à teoria ergódica dos sistemas dinâmicos.

Essencialmente, a tese tem como objetivo expor dois resultados. O primeiro é baseado no artigo de A. G. Abercrombie e R. Nair, intitulado *An exceptional set in the ergodic theory of Markov maps of the interval*, publicado em 1997 pelo periódico *Proceedings of the London Mathematical Society*, onde é demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 0.0.1 (Abercrombie, Nair). *Sejam* $\tau = (x_r)_{r=0}^{\infty}$ *uma sequência de números reais em* $[0,1]$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *uma função positiva tal que existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que* $f(r) \geq Cr^2$ *e* $T : [0,1] \to [0,1]$ *uma transformação de Markov com uma partição* $\mathcal{P}_0$ *definida sobre um conjunto* Δ*. Seja* $D > 0$ *uma certa constante e*

$$E_T(\tau, f) = \{x \in [0,1]; |\log d(x_r, \overline{\Omega_T(x)})| \leq Df(r)\}$$

onde $\Omega_T(x)$ *é a órbita do ponto* x *pela transformação de Markov. Então a dimensão de Hausdorff de* $E_T(\tau, f)$ *é* 1.

O teorema acima diz que a dimensão do conjunto dos pontos cuja órbita, por uma transformação de Markov, está assintóticamente afastada de uma sequência pré fixada, onde o afastamento é governado pela função f, é total. O problema de controlar o comportamento de órbitas de maneira assintótica é um dos problemas centrais em sistemas dinâmicos. A teoria ergódica oferece uma ferramenta para lidar com este problema, dado que o sistema possua alguma medida invariante suficientemente boa (por exemplo, absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue). De fato, isto é dado pelo célebre Teorema Ergódico de Birkhoff.

Porém tal teorema é restrito às órbitas que são "vistas" pela medida. Isto é, a análise assintótica ocorre para quase toda órbita com respeito à medida invariante. Resulta que o conjunto de órbitas analisados no teorema de Nair-Abercrombie é formado por um conjunto de medida nula com respeito à medida invariante natural do sistema. Mesmo assim, o teorema diz que tais órbitas não são desprezíveis do ponto de vista da teoria da dimensão.

De fato, uma das primeiras motivações dos estudos feitos para criar esta monografia foi encontrar uma classe de conjuntos excepcionais, isto é, conjuntos de medida de Lebesgue nula mas que possuem dimensão de Hausdorff total. Um cenário natural para encontrar tais conjuntos são os gerados por sistemas dinâmicos expansores. Pois então, conjuntos como os descritos no teorema de Nair e Abercrombie, expressarão propriedades dinâmicas interessantes do sistema.

O segundo resultado também versa sobre a dimensão de Hausdorff de conjuntos de órbitas com alguma propriedade de recorrência. Ele é baseado no preprint de J. L. Fernández, M. V. Melián e D. Pestana, em *Quantitative recurrence properties of expanding maps*. Embora seja mais fraco, no sentido que ele oferece apenas uma estimativa por cima da dimensão do conjunto, ele tem a vantagem de ser válido para dinâmicas expansoras sobre espaços mais gerais (o resultado anterior versa sobre dinâmicas no intervalo), em particular para variedades de dimensão finita arbitrária. Para este intuito, novas ferramentas da teoria ergódica entram em jogo para controlar tais órbitas, como a entropia da medida por exemplo. O resultado é o seguinte:

Teorema 0.0.2. *Seja* $(X, d, \mathcal{A}, \eta, T)$ *um sistema expansor tal que a partição* $\mathcal{P}_0$ *é finita. Seja* μ *a medida de probabilidade* T *invariante absolutamente contínua associada ao sistema. Sejam* $\{t_n\}$ *uma sequência não decrescente de inteiros positivos e* U *um conjunto aberto em* X *com* $\mu(U) > 0$. *Então, se* $x_0 \in X_0^+$, *onde, a grosso modo,* X_0^+ *é o conjunto de pontos obtidos por refinamento de uma partição gerada pela dinâmica unido com possíveis aderências, sendo*

$$\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\}) = \{x \in U \cap X_0; T^k(x) \in P(t_k, x_0) \text{ para infinitos } k\text{'s}\},$$

temos, denotando por $Dim_{\Pi,\eta}$ a dimensão de Hausdorff - η - grade, que

$$Dim_{\Pi,\eta}(\tilde{\mathcal{W}}(U,x_0,\{t_n\})) = Dim_{\Pi,\mu}(\tilde{\mathcal{W}}(U,x_0,\{t_n\})) \leq \min\left\{1, \frac{\log D}{h_\mu + \underline{L}(x_0)}\right\}$$

onde

$$\underline{L}(x_0)) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\eta(P(t_n,x_0))},$$

$h_\mu = h_\mu(T)$ e D é a cardinalidade de $\mathcal{P}_0$. Além disto, se $x_0 \in X_1$, onde X_1 é, também a grosso modo, um subconjunto dos pontos x cujas medidas dos átomos das partições (que geram X_0^+), aos quais x pertence, são assintoticamente dependentes da entropia da partição, então

$$Dim_{\Pi,\eta}(\tilde{\mathcal{W}}(U,x_0,\{t_n\})) = Dim_{\Pi,\mu}(\tilde{\mathcal{W}}(U,x_0,\{t_n\})) \leq \min\left\{1, \frac{\log D}{(1+\underline{w})h_\mu}\right\}$$

onde

$$\underline{w} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} t_n.$$

A seguir iremos detalhar o conteúdo desta monografia. No primeiro capítulo, a dimensão de Hausdorff será apresentada bem como suas propriedades. Iremos também falar um pouco sobre a medida de Lebesgue e a coincidência desta com certas medidas de Hausdorff. Em particular, iremos mostrar a desigualdade isodiamétrica, um resultado fundamental na teoria geométrica da medida. Mais ainda, apresentaremos alguns exemplos simples de conjuntos e calcularemos suas dimensões de Hausdorff, em particular apresentamos o conjunto de Cantor.

No segundo capítulo, apresentaremos a transformação de Gauss e veremos sua relação com a aproximação, via frações contínuas, de um número real por racionais. A teoria de aproximações Diofantinas é de suma importância no estudo da teoria dos números e, portanto, tal relação habilita o uso de métodos da teoria ergódica no estudo de questões da teoria dos números. Mais ainda, dividimos os números, essencialmente, em duas classes, os diofantinos e os de Liouville e estudamos a medida de Lebesgue e a dimensão de Hausdorff destes conjuntos. Em particular, obtemos que

Teorema 0.0.3. *A dimensão de Hausdorff do conjunto dos números mal aproximáveis é 1.*

Isto é uma versão fraca do teorema de Jarník (ver Apêndice A), onde tal teorema diz que o conjunto dos números α - Diofantinos tem dimensão $2/\alpha$, porém seguirá como corolário dos métodos ergódicos mais gerais que apresentaremos na dissertação.

No terceiro capítulo faremos uma exposição sobre transformações de Markov no intervalo, uma vez que são os sistemas dinâmicos usados no teorema de Nair - Abercrombie. Mostramos alguns exemplos e observamos que o mapa de Gauss pertence a esta classe de sistemas. Mais ainda, algumas propriedades ergódicas gerais são apresentadas, em particular a presença de uma medida invariante absolutamente contínua, que é obtida pelo teorema folclórico (enunciado em duas versões nos capítulos 3 e 6). Apresentamos também alguns resultados sobre distorção.

No quarto capítulo faremos uma breve e objetiva discussão sobre dimensão de Billingsley, que será uma ferramenta para calcular a dimensão de Hausdorff do conjunto citado no teorema de Abercrombie e Nair. De fato, sob certas condições, estas dimensões coincidem e isto nos permite estimar a dimensão de Hausdorff através da dimensão de Billingsley.

No quinto capítulo, demonstraremos o resultado de Nair e Abercrombie e estudaremos algumas consequências, em particular a versão fraca do teorema de Jarnik citado acima.

Finalmente, no sexto capítulo, iremos generalizar a idéia principal desta dissertação apresentando uma estimativa superior da dimensão de Hausdorff (μ - grade) de conjuntos de pontos cujas órbitas, em dinâmicas expansoras definidas em espaços métricos, possuem boas propriedades de recorrência, como no teorema de Fernández, Melián e Pestana.

Capítulo 1

Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff é uma ferramenta muito útil para o estudo de conjuntos muito irregulares. Sua definição é vinculada à definição de uma medida exterior que estudaremos na primeira seção deste capítulo e chamaremos de medida de Hausdorff. Na terceira seção falaremos de fato sobre tal dimensão, daremos sua definição e mostraremos algumas propriedades importantes. A vantagem de trabalhar com esta dimensão é que ela pode assumir qualquer valor real não negativo, o que permite atribuir medida de Hausdorff positiva a alguns conjuntos que possuem medida de Lebesgue (mais usual) nula ou infinita para toda dimensão (topológica) inteira (em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$, por exemplo) simplesmente modificando a noção de dimensão para a sua dimensão de Hausdorff. Na segunda seção mostraremos a equivalência entre as medidas de Hausdorff e de Lebesgue em dimensões naturais. Este fato nos levará a perceber que a primeira medida é, na realidade, uma generalização da segunda e, por isso, há importância na troca de dimensão para os casos de conjuntos muito irregulares. Por exemplo, o conjunto do terço médio de Cantor, que em $\mathbb{R}$ possui medida de Lebesgue nula, tem medida finita positiva com respeito a sua dimensão de Hausdorff que provaremos, na última seção, ser $\log 2/\log 3$. Além disto, também na quarta seção, iremos generalizar o conceito de conjunto de Cantor e mostrar uma técnica auxiliar simples para calcular a dimensão deste conjunto mais geral. Ao leitor interessado em maiores informações, indicamos a leitura de [3] de onde baseamos a teoria deste capítulo, exceto da Seção 1.2 que pode ser encontrada em [4].

Daqui em diante utilizaremos o símbolo # para indicar o fim das demonstrações das afirmações e $\square$ para o termino de provas de lemas, teoremas e propriedades.

1.1 Medida de Hausdorff

Dedicaremos, nesta seção, nossa atenção ao estudo da definição e das propriedades de medida de Hausdorff, sem a qual não poderemos definir a dimensão de Hausdorff.

1.1.1 Definição

Previamente precisaremos de duas definições auxiliares:

Definição 1.1.1 (Diâmetro). *Seja U um conjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. O diâmetro de U é definido como $|U| = \sup\{|x-y| : \ x, y \in U\}$, isto é, a maior distância que separa os pontos de U.*

Definição 1.1.2 (δ-cobertura). *Se $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ é tal que $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ com $0 \leq |U_i| \leq \delta$ para cada i, dizemos que $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma δ -cobertura de F.*

Logo, podemos definir:

Definição 1.1.3 (Medida de Hausdorff s-dimensional). *Dado s um número positivo, define-se $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ como o seguinte limite*

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

sendo

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s; \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ é } \delta \text{ - cobertura de } F\right\},$$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^n$. Denominamos $\mathcal{H}^s(F)$ a medida de Hausdorff s-dimensional de F.

Observe que não há problemas de existência do limite acima pois a definição implica que $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ cresce quando δ decresce, ou seja, $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ é monotona com relação a δ e poderíamos redefiní-la como

$$\mathcal{H}^s(F) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

Além disso, a definição acima, não necessita de pré requisitos, ao contrário, por exemplo, da medida de Lebesgue que, como veremos mais adiante, é definida através de produto de medidas.

Através de cálculos simples podemos mostrar que a medida de Hausdorff s-dimensional é uma *medida exterior*, ou seja, é uma função $\mu = \mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, com s e n fixos onde $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$, e satisfaz:

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

iii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ então $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Também pode-se afirmar que $\mathcal{H}^s$ é uma medida com respeito à σ - *álgebra de Borel* (σ - álgebra gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$), ou seja, se tomarmos A e B dois borelianos disjuntos, teremos que $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$.

De fato, segundo o critério de Caratheodory (ver Apêndice (A)), basta provar para A e B separados, ou seja, tais que $d(A, B) > 0$.

Já sabemos de iii) que

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B). \tag{1.1}$$

Seja $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ - cobertura de $A \cup B$ tal que $\delta < d(A, B)/4$. Esta cota de δ implica que, se $C_i \cap A \neq \emptyset$ e $C_j \cap B \neq \emptyset$, então $C_i \cap C_j = \emptyset$, o que nos permite definir

$$\mathcal{A} = \{i; C_i \cap A \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{B} = \{i; C_i \cap B \neq \emptyset\}.$$

Logo $\{C_i\}_{i\in\mathcal{A}}$ e $\{C_i\}_{i\in\mathcal{B}}$ são δ - coberturas respectivamente de A e B. Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s \geq \sum_{i\in\mathcal{A}} |C_i|^s + \sum_{i\in\mathcal{B}} |C_i|^s \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Como $\{C_i\}$ é arbitrária, segue que $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$. Fazendo $\delta \to 0$ temos

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B). \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) temos

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

$\square$

1.1.2 Propriedades

Estudaremos agora algumas propriedades importantes da medida de Hausdorff.

Propriedade 1.1.4 (Escala). *Seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma homotetia por um fator escalar $\lambda > 0$, ou seja, $S(x) = \lambda x$. Se $F \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\mathcal{H}^s\left(S\left(F\right)\right) = \lambda^s \mathcal{H}^s\left(F\right).$$

Demonstração:

Seja $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ - cobertura de F. Então $S(U_i) = \lambda U_i$ para cada i, o que implica

$$|S(U_i)| = \sup_{x,y \in U_i} |\lambda x - \lambda y| = \lambda \sup_{x,y \in U_i} |x - y| = \lambda |U_i|.$$

Logo, $\{S\left(U_i\right)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma $\lambda\delta$ - cobertura de $S\left(F\right)$. Temos então que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |S\left(U_i\right)|^s = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Assim, definindo:

$$\widetilde{S\left(F\right)} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |K_i|^s ; \{K_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ é } \lambda\delta \text{ - cobertura de } S(F) \right\}$$

e

$$\tilde{F} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |U_i|^s ; \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ é } \delta \text{ - cobertura de } F \right\},$$

obtemos

$$\tilde{F} \subset \widetilde{S\left(F\right)} \Rightarrow \inf \tilde{F} \geq \inf \widetilde{S\left(F\right)} \Rightarrow \mathcal{H}^s_{\lambda\delta}\left(S\left(F\right)\right) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_{\delta}\left(F\right).$$

Fazendo $\delta \to 0$ temos que $\mathcal{H}^s\left(S\left(F\right)\right) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s\left(F\right)$.

Trocando S por S^{-1}, F por $S\left(F\right)$ e λ por $\frac{1}{\lambda}$ podemos repetir os mesmos argumentos e teremos $\lambda^s \mathcal{H}^s\left(F\right) \leq \mathcal{H}^s\left(S\left(F\right)\right)$.

Portanto

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

$\square$

A propriedade de escala nos permite calcular medida de Hausdorff de conjuntos através de alguma homotetia, isto é, a compressão ou a dilatação de conjuntos de forma homogênea. Isto quer dizer que podemos ampliar conjuntos “muito pequenos”ou reduzir conjuntos “muito grandes”a fim de conseguir boas condições para medí-lo. Esta propriedade se mostra útil para calcular, por exemplo, fractais auto semelhantes, que são construídos de tal forma que podemos particioná-los em conjuntos idênticos em menor escala ao conjunto todo.

Para o próximo resultado prcisamos da seguinte definição:

Definição 1.1.5 (Aplicações Hölder Contínuas). *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que uma aplicação $f : F \to \mathbb{R}^m$ é Hölder contínua quando existem $c > 0$ e $\alpha > 0$ tais que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$$

para todos $x, y \in F$. Em particular, se $\alpha = 1$ denominamos aplicação Lipschitz contínua.

Propriedade 1.1.6 (Aplicações Hölder Contínuas). *Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$ e $f : F \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação Hölder contínua. Então, para cada $s \geq 0$, tem-se*

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F).$$

Demonstração:

Seja $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ uma δ - cobertura de F. Como f é Hölder contínua, temos que

$$|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$$

para cada i. Assim, $\{f(F \cap U_i)\}_{i=1}^\infty$ é uma $c\delta^\alpha$ - cobertura de $f(F)$. Temos então que

$$\sum_{i=1}^\infty |\, f(F \cap U_i)\,|^{s/\alpha} \leq \sum_{i=1}^\infty (c\,|\,U_i\,|^\alpha)^{s/\alpha} \leq \sum_{i=1}^\infty c^{s/\alpha}\,|\,U_i\,|^s = c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^\infty |\,U_i\,|^s.$$

Desta forma $\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s_\delta(F)$. Como $\alpha > 0$, temos que $\delta \to 0$ implica $c\delta^\alpha \to 0$. Portanto

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

$\square$

Esta propriedade, como a da escala, nos permite medir um conjunto através de uma transformação deste por uma aplicação com determinada continuidade em outro conjunto mais adequado, ou simples, à medição.

Corolário 1.1.7 (Aplicações Lipschitz Contínuas). *Seja $f : F \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitz contínua. Então*

$$\mathcal{H}^s\left(f\left(F\right)\right) \leq c^s \mathcal{H}^s\left(F\right).$$

O corolário acima é uma consequência imediata da propriedade das aplicações Hölder contínuas e está citada nesta seção por sua relevância. Para $c = 1$, podemos afirmar, por exemplo, que a medida de Hausdorff é invariante por isometrias. Veremos uma definição formal de uma medida invariante por uma aplicação ou, equivalentemente, de uma aplicação invariante por uma medida, na Seção 3.3 do terceiro capítulo.

Propriedade 1.1.8 (s - Monotonicidade). *Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, temos que se $\delta < 1$, então $s \mapsto \mathcal{H}^s\left(F\right)$ é não crescente. Além disso, se $r < s < t$ e $\mathcal{H}^s\left(F\right) < \infty$, então $\mathcal{H}^t\left(F\right) = 0$ e $\mathcal{H}^r\left(F\right) = \infty$.*

Demonstração:

Sejam $r < s < t$, $\delta < 1$ e $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ - cobertura de F. Logo, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^r = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{r-s} |U_i|^s \geq \delta^{r-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Como $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ é qualquer, temos que as inequações acima implicam $\mathcal{H}^t\left(F\right) \leq \mathcal{H}^s\left(F\right) \leq \mathcal{H}^r\left(F\right)$. Além disso, se $\mathcal{H}^s\left(F\right) < \infty$ então

$$\mathcal{H}^t\left(F\right) \leq \lim_{\delta \to 0} \delta^{t-s} \mathcal{H}^s\left(F\right) = 0$$

e

$$\mathcal{H}^r\left(F\right) \geq \lim_{\delta \to 0} \delta^{r-s} \mathcal{H}^s\left(F\right) = \infty.$$

Portanto $\mathcal{H}^t\left(F\right)=0$ e $\mathcal{H}^r\left(F\right)=\infty$.

$\square$

A propriedade acima nos permitirá encontrar naturalmente a definição da dimensão de Hausdorff que estudaremos na Seção 1.3 deste capítulo.

1.2 Relação entre a Medida de Hausdorff e a Medida de Lebesgue

Nesta seção será demonstrado que as medidas de Hausdorff e de Lebesgue são equivalentes. De fato, dado $n\in\mathbb{N}$ constante, mostraremos que $\mathcal{H}^n=c_n\mathcal{L}^n$ com c_n dependendo apenas de n. Para isso precisaremos de dois resultados importantes, a desigualdade isodiamétrica, que relaciona a medida de Lebesgue n - dimensional de um conjunto com seu diâmetro, e o teorema das coberturas de Vitali.

Para alcançar o resultado desejado, precisaremos antes definir a medida de Lebesgue:

Definição 1.2.1 (**Medida de Lebesgue Unidimensional).** *Dado $A\subset\mathbb{R}^1$, definimos a medida de Lebesgue unidimendional $\mathcal{L}^1$ em $\mathbb{R}^1$ por*

$$\mathcal{L}^1(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|;\ A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i,\ C_i\subset\mathbb{R}\right\}.$$

Seja $A\subset\mathbb{R}$. Definindo os conjuntos:

$$\tilde{C}=\left\{\{C_i\}_{i=1}^{\infty};A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i,\ C_i\subset\mathbb{R}\ \forall i\right\},$$

$$\tilde{D}=\left\{\{D_i\}_{i=1}^{\infty};A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}D_i,\ D_i\subset\mathbb{R}\text{ conexo }\forall i\right\},$$

obtemos que, para toda família $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\tilde{D}$, $\mathcal{L}^1(A)\leq\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}|D_i|$ e assim

$$\mathcal{L}^1(A)\leq\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|D_i|;\{D_i\}_{i=1}^{\infty}\in\tilde{D}\right\}.$$

Por outro lado, toda família $\{C_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \tilde{C}$ pode ser vista como uma família $\{D_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty} \subset \tilde{D}$ sendo, para cada i, $C_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{i,j}$ e $D_{i,j}$ é uma componente conexa de C_i para cada j. Assim, como $A \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| \geq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |D_{i,j}|$$

o que implica

$$\mathcal{L}^1(A) \geq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |D_i|; \{D_i\}_{i=1}^{\infty} \in \tilde{D}\right\}.$$

Deste modo, podemos redefinir

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|;\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ C_i \subset \mathbb{R} \text{ conexo}\right\}.$$

Além disso, se tomamos $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ em $\mathbb{R}$, com C_i conexo para todo i, temos que cada C_i é um ponto ou um intervalo. Assim, fixado $\delta > 0$, podemos transformar cada intervalo C_i, que possui diâmetro maior ou igual a δ, em uma união de intervalos de diâmetro menor que δ para formar uma nova cobertura de A, digamos $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, com $\sum_{i=1}^{\infty} |D_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|$. Portanto

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|;\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ |C_i| < \delta \ \text{ e } C_i \subset \mathbb{R} \text{ conexo}\right\}.$$

O que implica, fazendo $\delta \to 0$,

$$\mathcal{L}^1(A) = \mathcal{H}^1(A).$$

Discutiremos, a partir daqui, o que ocorre em dimensões mais altas.

Definição 1.2.2 (Cubo). *Diremos que um cojunto $Q \in \mathbb{R}^n$ é um cubo quando Q for a resultante por uma translação, uma rotação e uma homotetia de $[0,1]^n = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ n vezes.*

Definição 1.2.3 (Medida de Lebesgue n-dimensional). *Indutivamente, definimos a medida de Lebesgue n - dimensional em $\mathbb{R}^n$ por*

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \times \ldots \times \mathcal{L}^1, \quad (n \text{ vezes})$$

(a definição de produto de medida está no Apêndice (A)). Assim, podemos (equivalentemente) definir, para $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i); \;\; Q_i \textit{ cubos}, \;\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\}.$$

Agora estamos prontos para seguir com o estudo dos teoremas auxiliares.

1.2.1 Desigualdade Isodiamétrica

Para fixar as ideias, começaremos dando algumas definições necessárias. Fixados $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $|a| = 1$, definiremos as seguintes notações para $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$L_b^a := \{b + ta;\; t \in \mathbb{R}\}, \quad P_a := \{x \in \mathbb{R}^n;\; \langle x, a\rangle = 0\},$$

$$S_a(A) := \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \left\{ b + at;\; |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_a^b) \right\}.$$

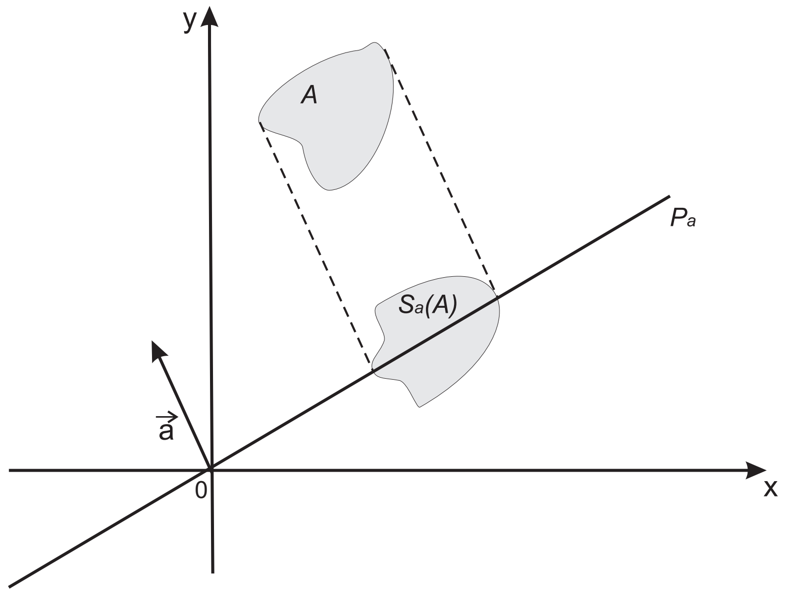

Figura 1.1: Simetrização de Steiner (em $\mathbb{R}^2$) de A com respeito ao "plano" P_a.

Observe que L_b^a é uma reta que passa pelo ponto b e é paralela ao vetor $\vec{a}$ de $\mathbb{R}^n$, P_a é um plano em $\mathbb{R}^n$ perpendicular ao vetor $\vec{a}$ e passa pela origem, e $S_a(A)$ é a *Simetrização de Steiner* de A com respeito ao plano P_a como ilustrado na Figura 1.1.

Para provar a desigualdade isodiamétrica vamos precisar dos seguintes lemas:

Lema 1.2.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ uma função $\mathcal{L}^n$ -mensurável. Então a região "sob o gráfico da f",*

$$A = \{(x, y);\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le f(x)\},$$

é $\mathcal{L}^{n+1}$ - mensurável.

Supriremos a prova do resultado acima devido ao fato de tal demonstração ser padrão na teoria da medida.

Lema 1.2.5. (Propriedades da Simetrização de Steiner)
i) $|S_a(A)| \le |A|$,
ii) Se A é $\mathcal{L}^n$ - mensurável, então $S_a(A)$ também é e $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$, ou seja, a simetrização de Steiner preserva a medida $\mathcal{L}^n$.

Demonstração:

i) Se $|A| = \infty$, não há o que mostrar. Suponha $|A| < \infty$. Deste modo $|A| = |\overline{A}|$, onde $\overline{A}$ é o fecho de A, e podemos supor A fechado. Seja $\epsilon > 0$ fixado e tome $x, y \in S_a(A)$ tal que $|S_a(A)| \le |x - y| + \epsilon$. Tomemos também $b = x - \langle x, a\rangle a$ e $c = y - \langle y, a\rangle a$.

<u>*Afirmação 1:*</u> $b, c \in P_a$.

De fato,

$$\langle b, a\rangle = \langle x - \langle x, a\rangle a, a\rangle = \langle x, a\rangle - \langle x, a\rangle.\langle a, a\rangle = \langle x, a\rangle - \langle x, a\rangle |a|^2 = \langle x, a\rangle - \langle x, a\rangle = 0.$$

Logo $b \in P_a$ e a demonstração é análoga para c.

#

$$\text{Definamos: } \begin{cases} B = \{t;\ b + ta \in A\}, \quad C = \{t;\ c + ta \in A\} \\ r = \inf B, \quad s = \sup B, \quad u = \inf C, \quad v = \sup C \end{cases}.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos $v - r \ge s - u$. Logo,

$$v - r = \frac{v - r}{2} + \frac{v - r}{2} \ge \frac{v - r}{2} + \frac{s - u}{2} = \frac{v - u}{2} + \frac{s - r}{2}. \tag{1.3}$$

Denotemos $w_B = \sup B - \inf B = s - r$ e $w_C = \sup C - \inf C = v - u$. Podemos observar que, para todos $t_1, t_2 \in B$,

$$w_B = s - r \ge |t_1 - t_2| = |t_1 - t_2||a| = |b + at_1 - (b + at_2)|$$

e disto segue que

$$w_B = s - r \geq \sup_{t_1,t_2 \in B} |b + at_1 - (b + at_2)| = |A \cap L_b^a| = \mathcal{L}^1(A \cap L_b^a) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a).$$

Procedendo analogamente encontramos $w_C = v - u \geq \mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)$. Assim,

$$w_B \geq \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \text{ e } w_C \geq \mathcal{H}^1(A \cap L_c^a). \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) temos:

$$v - r \geq \frac{w_B}{2} + \frac{w_C}{2} \geq \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)}{2} + \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)}{2}. \tag{1.5}$$

Como $x = b + \langle x, a\rangle a$ e $y = c + \langle x, a\rangle a$ pertencem a $S_a(A)$, temos ainda que

$$|\langle x, a\rangle| \leq \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)}{2} \text{ e } |\langle y, a\rangle| \leq \frac{\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)}{2}. \tag{1.6}$$

pela definição de $S_a(A)$. Desta forma, de (1.5) e (1.6) segue

$$v - r \geq |\langle x, a\rangle| + |\langle y, a\rangle| \geq |\langle x, a\rangle - \langle y, a\rangle|. \tag{1.7}$$

Observemos que, como A é fechado, temos $b + ra \in A$ e $c + va \in A$. Para ver isto basta tomar sequências $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ em B e $\{t'_n\}_{n=1}^\infty$ em C tais que $t_n \to r$ e $t'_n \to v$ então $\{b+t_na\}_{n=1}^\infty$ e $\{c+t'_na\}_{n=1}^\infty$ são sequências em A tais que $b+t_na \to b+ra$ e $c+t'_na \to c+va$. Assim, de (1.7) e da afirmação 1, segue que

$$\begin{aligned}
(|S_a(A)| - \epsilon)^2 &\leq |x - y|^2 \\
&\leq |b - c|^2 + |\langle x, a\rangle - \langle y, a\rangle|^2 |a|^2 \\
&= |b - c|^2 + |\langle x, a\rangle - \langle y, a\rangle|^2 \\
&\leq |b - c|^2 + (v - r)^2 \\
&= |b - c|^2 + |v - r|^2 |a|^2 \\
&= |(b + ra) - (c + va)|^2 \\
&\leq |A|^2.
\end{aligned}$$

Portanto $|A| \geq |S_a(A)| - \epsilon$ e, como ϵ é arbitrário, temos $|S_a(A)| \leq |A|$.

ii) Como $\mathcal{L}^n$ é invariante por rotação, podemos assumir $a = e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ e, com isso, temos $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. Lembremos que $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$. Como A é $\mathcal{L}^n$ - mensurável então, para cada b, $A \cap L_b^a$ é $\mathcal{L}^n$ - mensurável. Além disso, como L_b^a é σ - finito com respeito à medida $\mathcal{L}^n$, $A \cap L_b^a$ é σ - finito (ver Apêndice A), então $\{x \in \mathbb{R};\ \mathcal{X}_{A\cap L_b^a}(x) \neq 0\}$, onde $\mathcal{X}$ denota a função característica, é $\mathcal{L}^n$ - mensurável e σ - finito, ou seja, $\mathcal{X}_{A\cap L_b^a}$ é σ - finita com respeito à $\mathcal{L}^n$. Assim, pelo teorema de Fubini (ver Apêndice A) temos que

$$b \to \int \mathcal{X}_{A\cap L_b^a}(x)d\mathcal{L}^1$$

é $\mathcal{L}^{n-1}$ - mensurável, ou seja, a aplicação $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida por $f(b) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ é $\mathcal{L}^{n-1}$ - mensurável e, recordando que $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$, obtemos

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{R^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A\cap L_b^a}(x)d\mathcal{H}^1 d\mathcal{L}^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db.$$

Logo, do lema acima, segue que $S_a(A) = \{(b, y);\ |y| \leq \frac{f(b)}{2}\} - \{(b, 0);\ L_b^a \cap A = \emptyset\}$ é $\mathcal{L}^n$ - mensurável e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(S_a(A)) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{S_a(A)\cap L_b^a}(x)d\mathcal{H}^1 d\mathcal{L}^{n-1} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{A\cap L_b^a}(x)d\mathcal{H}^1 d\mathcal{L}^{n-1} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db = \mathcal{L}^n(A).
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.6 (Desigualdade Isodiamétrica). *Para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem-se que*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{|A|}{2}\right)^n,$$

onde $\alpha(n) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ é a função Gamma em s.

Demonstração:

Suporemos $|A| < \infty$ pois,do contrário o resultado é trivial. Sendo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ vamos definir (indutivamente) $A_1 = S_{e_1}(A),\ A_2 = S_{e_2}(A_1), \ldots,\ A_n = S_{e_n}(A_{n-1}) = A^*$.

Afirmação 1: *A^* é simétrico com relação a origem.*

Observe que, da definição de simetrização de Steiner, temos a simetria de $A_1 = S_{e_1}(A)$ com respeito à P_{e_1}. Suponha, por indução, que $A_k = S_{e_k}(A_{k-1})$ é simétrico com relação a $P_{e_1}, P_{e_2}, \ldots, P_{e_k}$ e fixe $1 \leq j \leq k$. Sendo $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a reflexão com relação a P_{e_j}. Observe que, se $b \in P_{e_{k+1}}$ temos que $S_j(b) \in P_{e_{k+1}}$ pois a reflexão S_j fará o ponto b "se deslocar"dentro do próprio plano $P_{e_{k+1}}$. Além disso, teremos $S_j(A_k) = A_k$ pois, por hipótese de indução, A_k é simétrico em relação a P_{e_j}. Logo $\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_j b}^{e_{k+1}})$. Desta forma, temos que $\{t;\ b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t;\ S_j b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}$. Isto implica $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$, ou seja, A_{k+1} é simétrico com relação a P_{e_j}. Então A_{k+1} é simétrico em relação a $P_{e_1},\ P_{e_2}, \ldots,\ P_{e_k}$ e a $P_{e_{k+1}}$ por definição. Portanto, $A^* = A_n$ é simétrico com relação a $P_{e_1},\ P_{e_2}, \ldots,\ P_{e_n}$ e consequentemente é simétrico em relação a origem.

#

Afirmação 2:

$$\mathcal{L}^n(A^*) \leq \alpha(n) \left(\frac{|A^*|}{2} \right)^n.$$

Seja $x \in A^*$. Como A^* é simétrico em relação a origem, temos que $-x \in A^*$. Logo,

$$|A^*| \geq 2|x| \Rightarrow |x| \leq \frac{|A^*|}{2} \Rightarrow A^* \subset B_{\frac{|A^*|}{2}}(0) \Rightarrow \mathcal{L}^n(A^*) \leq \mathcal{L}^n\left(B_{\frac{|A^*|}{2}}(0)\right) = \alpha(n) \left(\frac{|A^*|}{2} \right)^n.$$

#

Como $\overline{A}$ é $\mathcal{L}^n$ - mensurável, do Lema 1.2.5 segue que

$$\mathcal{L}^n((\overline{A})^*) = \mathcal{L}^n(S_{e_n}(\overline{A}_{n-1})) = \mathcal{L}^n(\overline{A}_{n-1}) = \mathcal{L}^n(S_{e_{n-1}}(\overline{A}_{n-2})) = \ldots = \mathcal{L}^n(\overline{A}),$$

e ainda

$$|(\overline{A})^*| = |S_{e_n}(\overline{A}_{n-1})| = |\overline{A}_{n-1}| = |S_{e_{n-1}}\overline{A}_{n-2}| = \ldots = |\overline{A}|$$

Destes fatos e da Afirmação 2 temos

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(\overline{A}) = \mathcal{L}^n((\overline{A})^*) \leq \alpha(n) \left(\frac{|(\overline{A})^*|}{2} \right)^n \leq \alpha(n) \left(\frac{|\overline{A}|}{2} \right)^n = \alpha(n) \left(\frac{|A|}{2} \right)^n.$$

□

Este teorema nos diz que a medida de Lebesgue de um conjunto A é menor ou igual ao volume de uma bola de raio $|A|/2$.

1.2.2 Teorema de Vitali

Demonstraremos agora o segundo teorema que utilizaremos para provar a equivalência entre as medidas de Hausdorff e de Lebesgue. Para isso, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.2.7 (Cobertura Fina). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e Δ uma coleção qualquer de conjuntos. Uma cobertura $A \subset \bigcup_{B \in \Delta} B$ é dita cobertura fina quando $\inf\{|B|;\ x \in B,\ B \in \Delta\} = 0$ para cada $x \in A$.*

Teorema 1.2.8 ("Covering Lemma" ou Teorema das Coberturas de Vitali). *Seja $\mathcal{F}$ uma família de bolas fechadas não degeneradas em $\mathbb{R}^n$ com $\sup\{|B|;\ B \in \mathcal{F}\} < \infty$. Então existe uma subcoleção $\mathcal{G}$ enumerável disjunta em $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \tilde{B}$ onde $\tilde{B}$ é a bola fechada concêntrica com B e com 5 vezes seu raio.*

Demonstração:

Denotemos $D = \sup\{|B|; B \subset \mathcal{F}\}$ e definamos, para cada $j \in N$,

$$\mathcal{F}_j = \left\{ B \in \mathcal{F};\ \frac{D}{2^j} < |B| \leq \frac{D}{2^{j-1}} \right\}.$$

Se $j = 1$, definamos

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ é subcoleção disjunta de } \mathcal{F}_1\}.$$

Temos então que $\mathcal{C}_1$ pode ser parcialmente ordenado pela inclusão. Além disso, se $\tilde{\mathcal{C}_1}$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{C}_1$, temos que $\bigcup_{C \in \tilde{\mathcal{C}_1}} C$ é limite superior de $\tilde{\mathcal{C}_1}$. Logo, pelo Lema de Zorn, existe $\mathcal{G}_1$ um elemento maximal de $\mathcal{C}_1$. Suponhamos definidos $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_{k-1}$. Tomamos então, analogamente ao que fizemos para encontrar $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_k$ elemento maximal de

$$\mathcal{C}_k = \left\{ \mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ é subcoleção disjunta de } \mathcal{F}_k \text{ tal que } B \in \mathcal{I} \Rightarrow B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{G}_i \right\}.$$

Observe que, como cada $\mathcal{G}_j$, $j \in \mathbb{N}$, é uma coleção disjunta de bolas não degeneradas de $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{G}_j$ é enumerável para todo $j \in \mathbb{N}$. Desta forma podemos tomar $\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j$ que é subcoleção disjunta enumerável de $\mathcal{F}$. Temos também que, se $B \in \mathcal{F}$, então existe

$j \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathcal{F}_j$ e, pela maximalidade de $\mathcal{G}_j$, segue que existe $B' \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{G}_i$ tal que $B' \cap B \neq \emptyset$. Logo $|B| \leq \dfrac{D}{2^{j-1}}$ e $|B'| \geq \dfrac{D}{2^j}$, assim

$$2^{j-1}|B| \leq D \leq 2^j|B'| \Rightarrow |B| \leq 2|B'| < 5r'$$

onde r' é o raio de B'. Portanto, $B \subset \tilde{B}'$, onde $\tilde{B}'$ é a bola concêntrica a B' e com raio 5 vezes maior que o de B', o que implica que $\bigcup_{B\in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in \mathcal{G}} \tilde{B}$.

$\square$

Deste teorema, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 1.2.9. *Assuma que $\mathcal{C}$ é uma cobertura fina de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ por bolas fechadas tais que* $\sup\{|B|;\ B \in \mathcal{C}\} < \infty$. *Então existe uma familia enumerável $\mathcal{G}$ de bolas disjuntas em $\mathcal{C}$ tal que para cada subconjunto finito $\{B_1,\ B_2, \ldots,\ B_m\} \subset \mathcal{C}$, temos que*

$$A - \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}-\{B_1,B_2,\ldots,B_m\}} \tilde{B},$$

onde $\tilde{B}$ é a bola fechada concêntrica com B e com 5 vezes seu raio.

Demonstração:

Tomemos $\mathcal{G}$ como no Lema das Coberturas de Vitali. Se $A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_k$ não há o que mostrar. Se não, seja $x \in A - \bigcup_{k=1}^{m} B_k$. Como $\mathcal{C}$ é uma cobertura fina, existe uma bola $B \in \mathcal{C}$ com $x \in B$ tal que $B \cap B_k = \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, m$. Da demonstração do lema acima temos que existe $B_i \subset \mathcal{G}$ tal que $x \in B \subset \tilde{B}_i$ e, da maximalidade de $\mathcal{G}$, $B_i \cap B \neq \emptyset$. Portanto

$$A - \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B\in\ \mathcal{G}-\{B_1,\ B_2,\ldots,\ B_m\}} \tilde{B}.$$

$\square$

1.2.3 Equivalência das medidas

Demonstrados os resultados auxiliares, podemos enfim provar o teorema desejado para esta seção.

Teorema 1.2.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ a função Gamma e $\alpha(n) = \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n \, em \; \mathbb{R}^n,$$

ou seja, a razão entre as medidas $\mathcal{L}^n$ e $\mathcal{H}^n$ é o volume de uma bola em $\mathbb{R}^n$ de raio $1/2$.

Demonstração:

Sejam A um subconjunto mensurável a Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Tomemos $\{C_j\}_{j=1}^\infty$ uma δ - cobertura de A. Da desigualdade isodiamétrica, temos que

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \alpha(n)\left(\frac{|C_j|}{2}\right)^n.$$

Assim, como $\alpha(n) > 0$, temos que

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \frac{\alpha(n)}{2^n} \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty |C_j|^n; \{C_j\}_{j=1}^\infty \text{ é } \delta \text{ - cobertura de } A\right\}.$$

Tomando $\delta \to 0$ temos

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}^n(A). \tag{1.8}$$

Temos, por definição, que

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \mathcal{L}^n(Q_i);\ \{Q_i\}_{i=1}^\infty \text{ coleção de cubos paralelos com } |Q_i| \leq \delta \text{ e } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty Q_i\right\}.$$

Consideramos os cubos Q_i paralelos aos eixos coordenados de $\mathbb{R}^n$.

<u>*Afirmação:*</u> *$\mathcal{H}^n$ é absolutamente contínua com respeito a $\mathcal{L}^n$.*

Para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, temos que $|Q|^n = n^{\frac{n}{2}}\mathcal{L}^n(Q)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty |Q_i|^n; Q_i \text{ são cubos e , } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty Q_i \text{ e } |Q_i| \leq \delta\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty n^{\frac{n}{2}}\mathcal{L}^n(Q_i); Q_i \text{ são cubos e , } A \subset \bigcup_{i=1}^\infty Q_i \text{ e } |Q_i| \leq \delta\right\} \\
&= n^{\frac{n}{2}}\mathcal{L}^n(A).
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$ temos que $\mathcal{H}^n(A) \leq n^{\frac{n}{2}}\mathcal{L}^n(A)$. Portanto, quando $\mathcal{L}^n(A) = 0$ temos $\mathcal{H}^n(A) = 0$, ou seja, $\mathcal{H}^n \ll \mathcal{L}^n$.

#

Sejam $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ fixados. Tome $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma δ - cobertura de A tal que cada Q_i é um cubo e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon.$$

Pelo corolário do Lema das Coberturas de Vitali se, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_i = \{B_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ é cobertura fina de Q_i por bolas fechadas, então existe, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma família $\mathcal{G}_i = \{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ de bolas disjuntas em $\mathcal{C}_i$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) &= \lim_{m\to\infty} \mathcal{L}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{m} B_k^i\right)\\
&\leq \lim_{m\to\infty} \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{B\in\mathcal{G}_i - \{B_1^i,\ldots,B_m^i\}} \tilde{B}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}^n \ll \mathcal{L}^n$, temos que $\mathcal{H}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}_\delta^n(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}_\delta^n(Q_i) &&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}_\delta^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}_\delta^n\left(B_k^i\right) &&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{2^n}|B_k^i|^n\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_k^i) &&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$ e ϵ tão pequeno quanto se queira, temos

$$\frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A). \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9) temos

$$\frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A).$$

□

No Capítulo 5, em que falaremos sobre as consequências do teorema principal desta dissertação, utilizaremos esta equivalência para relacionar a medida ergódica descrita no teorema folclórico (que estudaremos no terceiro capítulo) com a medida de Hausdorff.

1.3 Dimensão de Hausdorff

A propriedade de s - monotonicidade da medida de Hausdorff nos diz que se fizermos o gráfico de $s \to \mathcal{H}^s(F)$ existe um único valor crítico s em que $\mathcal{H}^s(F)$ dá um salto de ∞ para 0 (veja a figura (1.2)).

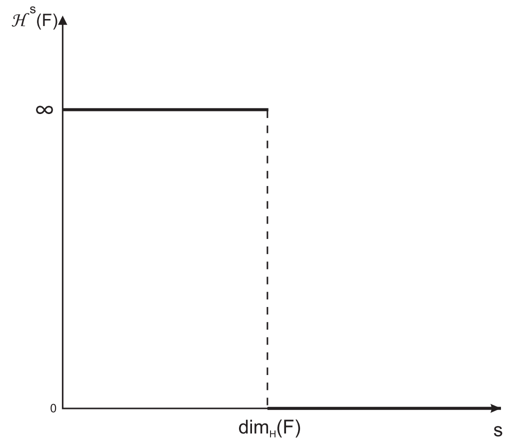

Figura 1.2: Gráfico da medida de Hausdorff s - dimensional de um conjunto em relação à s.

Este comportamento nos permite definir dimensão de Hausdorff da seguinte maneira:

Definição 1.3.1 (Dimensão de Hausdorff). *Dado $F \subset \mathbb{R}^n$ temos que a dimensão de Hausdorff de F é*

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Da definição, temos que:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad 0 \leq s < \dim_H F \\ 0, & \text{se} \quad s > \dim_H F. \end{cases}$$

Observe que, embora saibamos qual o comportamento do gráfico de $s \to \mathcal{H}^s(F)$, nada podemos concluir sobre $\mathcal{H}^s(F)$ quando $s = \dim_H F$ podendo esta admitir valores 0, ∞ ou ser finita e não nula. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.3.2 (s-conjunto). *Um conjunto de Borel $F \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim_H F = s$ e $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ é dito um s-conjunto.*

1.3.1 Propriedades

Demonstraremos abaixo algumas propriedades importantes da dimensão de Halsdorff utilizando as propriedades estudadas na Seção 1.2.

Propriedade 1.3.3 (Monotonicidade). *Se* $E \subset F$ *então* $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Demonstração:

Se $E \subset F$ pela propriedade da monotonicidade da medida de Hausdorff temos que $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para cada s. Sejam $\dim_H E = e$ e $\dim_H F = f$. Suponha $f < e$, e tome $f < s < e$, logo,

$$\infty = \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F) = 0$$

o que é uma contradição. Portanto $\dim_H E \leq \dim_H F$.

□

A propriedade acima nos permite dizer que a dimensão de Hausdorff é monótona não decrescente no seguinte sentido: se tomamos uma sequência crescente de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, para algum n, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m \subset \ldots$, segue que $\dim_H E_1 \leq \dim_H E_2 \leq \ldots \leq \dim_H E_m \ldots$.

Propriedade 1.3.4 (Estabilidade Enumerável). *Se* $F_1, F_2, \ldots$ *é uma sequência enumerável de conjuntos, então*

$$\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_{1\leq i<\infty}\{\dim_H F_i\}.$$

Demonstração:

Temos que

$$F_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \Rightarrow \dim_H F_j \leq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right), \quad \forall j = 1, 2, \ldots$$

o que implica

$$\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \geq \sup_{1\leq i<\infty}\{\dim_H F_i\}.$$

Se $\sup\limits_{1\leq i<\infty} \{\dim_H F_i\} = \infty$, então, da desigualdade acima, segue que

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1\leq i<\infty} \{\dim_H F_i\} = \infty.$$

Se $\sup\limits_{1\leq i<\infty} \{\dim_H F_i\} = s < \infty$, temos que, para $\delta > 0$ arbitrário,

$$\mathcal{H}^{s+\delta} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s+\delta} (F_i) = 0 \Rightarrow s \geq \dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right).$$

Portanto,

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1\leq i<\infty} \dim_H (F_i).$$

□

Se lembrarmos da monotonicidade da dimensão de Hausdorff, esta propriedade nos diz que a junção de uma quantidade enumerável de conjuntos de dimensão pequena a conjuntos de dimensão mais alta é desprezível. Isso nos possibilita estudar conjuntos mesmo que precisemos desconsiderar algumas partes dele.

Propriedade 1.3.5 (**Conjuntos Enumeráveis**). *Se F é um conjunto enumerável, então $\dim_H F = 0$.*

Demonstração:

Seja F um conjunto enumerável. Logo F pode ser escrito como $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ onde f_i é um elemento para todo i. Assim, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma δ - cobertura de F para qualquer $\delta > 0$. Desta forma temos que

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mid \{f_i\} \mid^s = 0$$

para todo $s > 0$ e todo $\delta > 0$. Logo, fazendo $\delta \to 0$, temos $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s > 0$. Portanto $\dim_H F = 0$.

□

Observe também que a enumerabilidade é indispensável na Propriedade (1.3.4) pois, por exemplo, temos $\dim_H \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} \{x\} = 1$ embora $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dim_H \{x\} = 0$. A propriedade acima, juntamente com a estabilidade enumerável, nos permite acrescentar ou retirar conjuntos enumeráveis do conjunto que se queira estudar sem alterar sua dimensão. Este fato nos será útil nos capítulos 2 e 5 em que calcularemos a dimensão de conjuntos de números bem ou mal aproximáveis.

Propriedade 1.3.6 (Conjuntos Abertos). *Se* $F \subset \mathbb{R}^n$ *é aberto, então* $\dim_H F = n$.

Demonstração:

Primeiramente, observemos que, se B é uma bola não degenerada em $\mathbb{R}^n$, então $0 < \mathcal{L}^n(B) < \infty$. Assim, do teorema (1.2.10), segue que $0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty$ o que implica $\dim_H(B) = n$. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Temos então que existe B bola n - dimensional tal que $B \subset F$ e, da Propriedade (1.3.3), segue que $n = \dim_H B \leq \dim_H F$. Por outro lado, como F é aberto e $F \subset \mathbb{R}^n$ podemos cobrir F por $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma família enumerável de bolas. Assim, da Propriedade (1.3.4), temos

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow n = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H B_i = \dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \geq \dim_H F.$$

Portanto $\dim_H F = n$.

□

Propriedade 1.3.7 (Aplicações Hölder Contínuas). *Sejam* $F \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : F \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação Hölder contínua. Então*

$$\dim_H f(F) \leq \left(\frac{1}{\alpha} \right) \dim_H F.$$

Demonstração:

Seja $s > \dim_H (F)$ então, como a função é Holder, pela Propriedade (1.1.6) temos que $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}} (f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s (F) = 0$. Assim, $\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$ para todo $s > \dim_H F$. Portanto $\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F$.

□

Corolário 1.3.8. a) *Se* $f : F \to \mathbb{R}^m$ *é uma transformação Lipschitz, então*

$$\dim_H f(F) \leq \dim_H F.$$

b) *Se $f : F \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação bi - Lipschitz, isto é*

$$c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x-y|$$

com $x, y \in F$ e $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ então

$$\dim_H f(F) = dim_H F.$$

Demonstração:

a) A demonstração é imediata da Propriedade (1.3.7) considerando $\alpha = 1$.

b) Da condição bi - Lipschtz temos que f é injetiva pois, se $f(x) = f(y)$ então

$$c_1|x-y| \leq |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Consideremos então a função $f^{-1} : f(F) \to F$ bijetiva. Observe que da Propriedade (1.3.7), temos

$$|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| = |x-y| \leq \frac{1}{c_1}|f(x) - f(y)|.$$

Consequentemente, f^{-1} é Lipschitz (em particular é Holder) donde temos que

$$\dim_H F = \dim_H f^{-1}(f(F)) \leq \dim_H f(F).$$

De a) segue $\dim_H F \geq \dim_H f(F)$. Portanto, $\dim_H F = \dim_H f(F)$.

$\square$

Este corolário nos diz que, se dois conjuntos possuem dimensões diferentes, então não pode existir uma transformação bi- Lipschitz entre eles.

1.4 Exemplos Simples

Nesta seção estudaremos dois exemplos simples de técnicas para calcular dimensão de Hausdorff de conjuntos fractais da reta.

Definição 1.4.1 (Conjunto do Terço Médio de Cantor)**.** *Sejam $E_0 = [0,1]$, E_1 o conjunto resultante da retirada do terço médio de E_0, ou seja, $E_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Indutivamente, seja E_k o conjunto obtido pela retirada do terço médio de cada intervalo em E_{k-1},* *assim, E_k consiste de 2^k intervalos de comprimento 3^{-k}. O conjunto do terço médio de Cantor é a interseção $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.*

Exemplo 1.4.2 (Terço Médio de Cantor). *Seja F o conjunto do terço médio de Cantor. Se definimos $s = \log 2/\log 3 \approx 0,6309$ então $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$, consequentemente* $\dim_H F = s$.

De fato, tomemos, indutivamente, E_k, o conjunto resultante da k - ésima etapa da construção do conjunto terço médio de Cantor para $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$. Observe que cada E_k é uma 3^{-k} - cobertura de F com 2^k elementos, digamos $E_k = \{I_{k_i}\}_{i=1}^{2^k}$ onde cada I_{k_i} é um intervalo da k -ésima etapa da construção de F. Assim, temos que

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leq \sum_{i=1}^{2^k} |I_{k_i}|^s = 2^k(3^{-k})^s = 2^k 3^{-k\log 2/\log 3} = 2^k 3^{\log_3 2^{-k}} = 2^k 2^{-k} = 1.$$

Fazendo $k \to \infty$, encontramos $\mathcal{H}^s(F) \leq 1$.

Por outro lado, tomemos uma cobertura $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de F tal que $|U_i| < \delta < 1$. Observemos que, como o conjunto de Cantor é compacto, podemos assumir a cobertura finita. Para cada i, temos que existe k_i tal que $3^{-(k_i+1)} \leq |U_i| < 3^{-k_i}$. Temos então que cada U_i pode intersectar no máximo um elemento de E_{k_i}. Tomemos $j > k_i$ natural.

<u>Afirmação:</u> *U_i intersecta no máximo 2^{j-k_i} intervalos de E_j.*

De fato, tome $j = k_i + n$ com $n \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar a afirmação por indução sobre n. Se $n = 1$, suponha que U_i intersecta $2^1 + 1$ intervalos de E_j. Logo, teriamos o diâmetro de U_i maior ou igual a soma das distâncias entre os intervalos de E_j que U_i intersecta mais o diâmetro do intervalo de E_j que está completamente contido em U_i. Assim, $|U_i| \geq 2.3^{-(k_i+1)} + 3^{-(k_i+1)} = 3^{k_i}$, o que é uma contradição. Desta forma, temos que U_i intersecta, no máximo, 2 intervalos de E_{k_i+1}. Agora, suponhamos que U_i intersecta, no máximo, 2^n intervalos de E_{k_i+n}. Logo, como cada intervalo de E_{k_i+n} contém dois intervalos de E_{k_i+n+1}, então U_i intersecta, no máximo, $2.2^n = 2^{n+1}$ intervalos de E_{k_i+n+1}. Portanto, temos que U_i intersecta no máximo 2^{j-k_i} intervalos de E_j.

#

Observemos então que o número máximo de intervalos de E_j que U_i intersecta é

$$2^{j-k_i} = 2^j.2^{-k_i} = 2^j.3^{\log_3^{2^{-k_i}}} = 2^j.3^{-k_i s} = 2^j.3^s.3^{-(k_i+1)s} \leq 2^j 3^s |U_i|^s.$$

Escolhendo j suficientemente grande tal que $\{U_i\}_{i=1}^m$ cobre E_j e observando que $\{U_i\}$ intersecta 2^j intervalos de E_j, pela afirmação e pela desigualdade acima, temos que

$$2^j \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{j-k_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^j 3^s |U_i|^s = 2^{j+1} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \frac{1}{2}.$$

Como $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ é arbitrária, segue que $\mathcal{H}^s_\delta(F) \geq 1/2$. Tomando $\delta \to 0$, encontramos $\mathcal{H}^s(F) \geq 1/2$.

Concluímos então que $1/2 \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$ o que implica $\dim_H F = \log 2/\log 3$.

□

Em geral, como podemos observar na demonstração acima, a estimativa inferior da dimensão de Hausdorff de um conjunto é técnica e trabalhosa, apresentando maior grau de dificuldade do que a estimativa superior.

Uma generalização da construção do conjunto de Cantor seria $\mathcal{K}$ da forma

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \quad \text{em que} \quad E_0 = [0,\,1], \quad E_k = \bigcup_{j=1}^{j_k} I_j^k \quad \text{e} \quad E_{k+1} \subsetneq E_k \;\; \forall k \in \mathbb{N},$$

sendo $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números naturais e I_j^k intervalos fechados em $[0,1]$, com comprimento tendendo a zero quando k tende a infinito, tais que cada I_j^k contém pelo menos dois intervalos do tipo I_j^{k+1}. Iremos denominar tais construções de conjuntos tipo Cantor. Segue abaixo um exemplo do cálculo da dimensão de um conjunto tipo Cantor em que é utilizado o auxílio de um recurso o qual chamaremos *distribuição de massa ou medida* (ver Apêndice A).

Exemplo 1.4.3. *Sejam $0 < s < 1$ e $\mathcal{K}$ um conjunto tipo cantor tal que, para cada I_j^k, os intervalos $I_1^{k+1}, I_2^{k+1}, \ldots, I_{m_j}^{k+1}$, com $m_j \geq 2$, contidos em I_j^k tem comprimentos iguais, igualmente espaçados, satisfazem*

$$|I_i^{k+1}|^s = |I_j^k|^s/m_j \quad (1 \leq i \leq m_j), \tag{1.10}$$

os pontos iniciais de I_j^k e I_1^{k+1} coincidem e o mesmo ocorre com os pontos finais de I_j^k e $I_{m_j}^{k+1}$. Então, $\dim_H \mathcal{K} = s$.

Primeiramente mostraremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\sum_j |I_j^k|^s = 1$. De fato; para $k = 0$ temos $|[0,1]|^s = 1^s = 1$. Indutivamente, supondo $\sum_j |I_j^k|^s = 1$ para algum k, segue que

$$\sum_j |I_j^{k+1}|^s = \sum_j \sum_{i=1}^{m_j} |I_i^{k+1}|^s = \sum_j \sum_{i=1}^{m_j} \frac{|I_j^k|^s}{m_j} = \sum_j m_j.\frac{|I_j^k|^s}{m_j} = \sum_j |I_j^k|^s = 1.$$

Agora, como $E_k = \{I_j^k\}_j$ cobre $\mathcal{K}$ e os comprimentos dos intervalos de E_k tendem a zero quando $k \to \infty$, temos que, dado $\delta > 0$, existe k suficientemente grande tal que $\max_j\{|I_j^k|\} \leq \delta$, e assim $\{I_j^k\}_j$ é δ - cobertura de $\mathcal{K}$. Desta forma obtemos $\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{K}) \leq \sum_j |I_j^k|^s = 1$ e, fazendo $\delta \to 0$, encontramos $\mathcal{H}^s(\mathcal{K}) \leq 1$. Logo $\dim_H(\mathcal{K}) \leq s$.

Para encontrar a estimativa inferior da dimensão, tomaremos uma medida (distribuição de massa) μ tal que $\mu([0,1]) = 1$ e nas etapas E_k seguintes dividimos a medida de cada intevalo I_j^k igualmente entre os intervalos I_i^{k+1} com $1 \leq i \leq m_j$. Desta forma temos $\mu(I_i^{k+1}) = \mu(I_j^k)/m_j$ com $1 \leq i \leq m_j$ e a equação (1.10) nos possibilita tomar $\mu(I_j^k) = |I_j^k|^s$ para todo k e todo j. Tomemos então um conjunto U com extremos em $\mathcal{K}$ e I_j^k o menor intervalo das etapas de construção de $\mathcal{K}$ contendo U. Sejam $I_1^{k+1}, I_2^{k+1}, \ldots, I_{m_j}^{k+1}$ os intervalos da etapa $k+1$ contidos em I_j^k. Assim, U intersecta $n \geq 2$ intervalos do tipo I_i^{k+1} com $1 \leq i \leq m_j$. Além disso, o espaçamento entre estes intervalos é

$$E = \frac{|I_j^k| - m_j|I_i^{k+1}|}{m_j - 1} \geq \frac{|I_j^k|\left(1 - m_j\frac{|I_i^{k+1}|}{|I_j^k|}\right)}{m_j}.$$

<u>*Afirmação:*</u> $1 - m_j.\dfrac{|I_i^{k+1}|}{|I_j^k|} \geq 1 - 2^{1-1/s}$

De fato, de (1.10) obtemos $|I_i^{k+1}|/|I_j^k| = (1/m_j)^{1/s}$ e, como $m_j \geq 2$ e $0 < s < 1$, temos

$$1 - m_j\frac{|I_i^{k+1}|}{|I_j^k|} = 1 - m_j\left(\frac{1}{m_j}\right)^{1/s} = 1 - m_j^{1-1/s} \geq 1 - 2^{1-1/s}.$$

#

Assim, segue $E \geq \{|I_j^k|(1 - 2^{1-1/s})\}/m_j$ e disto temos que

$$|U| \geq (n-1)E \geq (n-1)\frac{|I_j^k|(1 - 2^{1-1/s})}{m_j} \geq \frac{n}{2m_j}(1 - 2^{1-1/s})|I_j^k|.$$

Logo, chamando $C_s := 1 - 2^{1-1/s}$, encontramos, da definição de μ e da equação (1.10),

$$\begin{aligned}
\mu(U) &\leq n\mu(I_i^{k+1}) \\
&= n|I_i^{k+1}|^s \\
&= n\frac{1}{m_j}|I_j^k|^s \\
&\leq \frac{n}{m_j}\left(\frac{2m_j}{n}\frac{1}{C_s}\right)^s |U|^s \\
&= \left(\frac{n}{m_j}\right)^{1-s} 2^s C_s^{-s}|U|^s \\
&\leq 2^s C_s^{-s}|U|^s.
\end{aligned}$$

Da arbitrariedade de U, podemos tomar uma δ - cobertura $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\mathcal{K}$ e, repetindo a análise feita para U, obtemos

$$0 < \mu(\mathcal{K}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} C|U_i|^s = C\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

onde $C = 2^s C_s^{-s}$. Tomando o ínfimo sobre as coberturas $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ e fazendo $\delta \to 0$, concluímos que $0 < \mu(\mathcal{K}) \leq \mathcal{H}^s(\mathcal{K})$ e assim, $s \leq \dim_H \mathcal{K}$.

Portanto $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{K}) < \infty$ e $s = \dim_H \mathcal{K}$.

$\square$

Capítulo 2

A Transformação de Gauss e Aproximações Via Frações contínuas

Neste capítulo, estaremos interessados em discutir sobre algumas maneiras de aproximar números reais por números racionais, ou seja, as aproximações diofantinas. A finalidade desta discussão é fornecer um embasamento teórico necessário à compreensão de uma versão fraca do Teorema de Jarnik que demonstraremos, no Capítulo 5, como consequência de um dos principais resultados desta dissertação, o teorema de Nair e Abercrombie. O caminho que utilizaremos para observar tais aproximações é via frações contínuas que são intimamente relacionadas, como veremos mais adiante, com uma dinâmica expansora (ver capítulo 6), particularmente markoviana (ver capítulo 3), a transformação de Gauss. Neste momento, é importante observar que esta relação é o ponto de encontro entre dois ramos da matemática, a nobre área da teoria dos números e a área dos sistemas dinâmicos. Embora neste texto iremos apresentar apenas o necessário à demonstração do teorema supracitado, um leitor mais interessado pode encontrar mais informações em [5].

Dividiremos este capítulo em quatro seções. Na primeira, daremos as definições de frações contínuas e da transformação de Gauss e falaremos um pouco sobre como estes estão relacionados. Na segunda, veremos que a expansão em frações contínuas de um número real x dá origem à uma sequência de números racionais cujo limite é o próprio x, ou seja, uma aproximação de x por racionais. A tais números, chamaremos convergentes e estudaremos como suas propriedades, que estão associadas aos componentes da expansão que chamaremos de quocientes, interferem no tipo de aproximação diofantina que iremos estabelecer. Na terceira, apresentaremos uma medida de probabilidade que preserva a transformação de Gauss e é equivalente à medida de Lebesgue. Será interessante observar, mais tarde, que esta medida é a que encontramos no Teorema Folclórico, que aparece nos Capítulos 3 (Teorema (3.3.4)) e 6 (Teorema (6.2.3)), para a aplicação de Gauss. Por fim, na quarta seção, apresentaremos um conjunto de números que possuem, como iremos definir ainda neste capítulo, boas aproximações.

À partir de agora até o final desta dissertação, denotaremos a medida de Lebesgue por λ.

2.1 Expansão Via Frações Contínuas e sua relação com a Transformação de Gauss

Que todo número real pode ser aproximado por racionais, é um fato conhecido e justificado pela densidade de $\mathbb{Q}$ na reta. Contudo, podemos nos perguntar se há aproximações diofantinas que nos fornecem informações sobre o número e, como é de nosso interesse, mais especificamente, sobre alguma dinâmica deste ponto. A resposta para esta pergunta é sim e um exemplo é a seguinte:

Definição 2.1.1 (Expansão Via frações contínuas e quocientes). *Para cada elemento $x \in \mathbb{R}$ existem $a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots \in \mathbb{N}$ tais que*

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{a_1 + \ddots \cfrac{}{+\cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x. Esta expressão é dita expansão em frações contínuas de x, que denotaremos por $\lfloor x \rfloor + [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, e os números a_i são os quocientes de x.

Não é difícil provar que um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, possui uma expansão em frações contínuas finita. De fato, basta provar para $x \in (0, 1)$. Supondo

$x \in \mathbb{Q}$ podemos escrever $x = r_1/r_0$ sendo r_1 e r_0 números naturais e primos entre si tais que $r_0 > r_1$. Assim, pelo algoritmo da divisão existem $a_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tais que $r_2 < r_1$ e $r_0 = r_1 a_1 + r_2$. Pela construção acima, $a_1 = \lfloor r_0/r_1 \rfloor = \lfloor 1/x \rfloor$. Se $r_2 = 0$, então

$$x = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_1}{r_1 a_1 + r_2} = \frac{r_1}{r_1 a_1} = \frac{1}{a_1} = [a_1].$$

Se $r_2 > 0$, temos, novamente pelo algoritmo da divisão, que existem a_2 e r_3 naturais tais que $r_3 < r_2$ e $r_1 = r_2 a_2 + r_3$, sendo $a_2 = \lfloor \frac{r_1}{r_2} \rfloor$. Logo, se $r_3 = 0$, então

$$x = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_1}{a_1 r_1 + r_2} = \frac{a_2 r_2 + r_3}{a_1(a_2 r_2 + r_3) + r_2} = \frac{a_2 r_2}{a_1 a_2 r_2 + r_2} = \frac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [a_1, a_2].$$

Se não,

$$x = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_1}{a_1 r_1 + r_2} = \frac{a_2 r_2 + r_3}{a_1(a_2 r_2 + r_3) + r_2} = \frac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{a_2 r_2 + r_3}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$$

e podemos repetir o procedimento. Assim, construtivamente podemos obter sequências $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada por zero, $r_k = a_{k+1} r_{k+1} + r_{k+2}$, $a_k = \lfloor r_k/r_{k+1} \rfloor$, e

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \ddots \cfrac{1}{a_k + \cfrac{r_{k+1}}{r_k}}}.$$

Este processo é finito pois, como $r_k \in \mathbb{N}$, $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada por zero, temos que existem no máximo r_0 passos pois $r_0 > r_1 > r_2 > \ldots r_n > 0$ e $r_i \in \mathbb{N}$ para todo i. Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_{n+1} = 0$ e, desta maneira, $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. A recíproca é clara.

Observemos que a expansão em frações de um número racional não é única embora, no processo acima, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são determinados de forma única. Por exemplo,

$$\frac{79}{28} = 2 + [1, 4, 1, 1, 1, 1]$$

embora o processo acima nos forneça

$$\frac{79}{28} = 2 + [1, 4, 1, 1, 2].$$

Esta é a única ambiguidade na escolha deste tipo de expansão para um número racional.

Para analisar a expansão com relação aos números irracionais, vamos definir a seguinte dinâmica:

Definição 2.1.2 (Transformação de Gauss). *A transformação de Gauss* $T : [0,1] \to [0,1]$ *é definida por*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

Para o caso em que $x \in (0,1)$ é irracional, temos que $T(x)$ é irracional, a expansão via frações contínuas é infinita e podemos construir, de forma única, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n....]$ utilizando a transformação de Gauss da seguinte maneira: tomemos

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \text{e} \quad a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor.$$

Definamos indutivamente

$$a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x)) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor.$$

Da definição da aplicação de Gauss, segue

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - a_1 \Rightarrow x = \frac{1}{T(x)}.$$

Fazendo a composição no resultado acima, obtemos

$$T(x) = \frac{1}{a_1(T(x)) + T(T(x))} = \frac{1}{a_2(x) + T^2(x)}.$$

Suponhamos, por indução, $T^{n-1}(x) = 1/(a_n(x) + T^n(x))$. Logo obtemos

$$T^n(x) = T^{n-1}(x) = \frac{1}{a_n(T(x)) + T^n(T(x))} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{T^n(x)} \right\rfloor + T^{n+1}(x)},$$

o que implica $T^n(x) = 1/(a_{n+1}(x) + T^{n+1}(x))$. Desta forma

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)} = \frac{1}{a_1(x) + \dfrac{1}{a_2 + T^2(x)}} = \cdots = \cfrac{1}{a_1 + \ddots \cfrac{}{+\cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}.$$

Assim, $x = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x) + T^n(x)]$ onde $a_n(x) = \lfloor 1/T^n(x) \rfloor$.

É importante observar que a definição acima para a_n é válida mesmo para um número racional, desde que a divisão faça sentido e a expansão seja definida através do algoritmo de Euclides. Além disso, também segue desta definição que $a_n(T(x)) = a_{n+1}(x)$, o que nos leva a concluir que a aplicação de Gauss age como uma função deslocamento ou "shift"em relação à expansão via frações contínuas. Estes fatos nos fornecem mais uma preciosa informação, a de que a expansão indica por onde passa a órbita do ponto x da seguinte forma: se $x = [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, então $x \in [1/(a_1+1), 1/a_1]$, $T(x) \in [1/(a_2+1), 1/a_2]$, ... $T^n(x) \in [1/(a_n+1), 1/a_n]$ e etc... Podemos aqui concluir que as frações contínuas descrevem plenamente qualquer número real e associada a esta, está a dinâmica de Gauss que, através de sua órbita, nos mostra qual é tal fração de um determinado número.

2.2 Sobre Convergentes e Quocientes

Nesta seção discutiremos um pouco sobre as propriedades dos componentes da sequência convergente para um número x, naturalmente gerada pela expansão via frações contínuas deste, definidos como:

Definição 2.2.1 (Convergentes). *Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a_0 = \lfloor x \rfloor$ e $a_0 + [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ a expansão em frações contínuas de x. Dizemos que os números racionais*

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots \, + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$$

são os convergentes de x, para $k \in \mathbb{R}$.

Antes de falarmos sobre as propriedades dos convergentes, precisamos estabelecer algumas notações. Fixado $x \in [0,1]$, utilizaremos, neste capítulo, as seguintes convenções:

$$q_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = a_0 \quad \text{e} \quad p_{-1}(x) = q_0(x) = 1.$$

Denotaremos também a_i, p_i e q_i no lugar de $a_i(x)$, $p_i(x)$ e $q_i(x)$ sempre que x estiver subentendido no contexto das propriedades abaixo.

Propriedade 2.2.2 ([5] pág 34).

(A) *Para todo* $n \geq 1$ *se verifica*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad e \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

(B) *Para todo* $n \geq 0$

(I) $x = \dfrac{p_n + (T^n(x))p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))q_{n-1}}$

(II) $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$,

(III) $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$,

(C) *Para todo* $n \geq 2$ *se verifica*

$$p_n(x) \geq 2^{(n-2)/2} \quad e \quad q_n(x) \geq 2^{(n-1)/2}.$$

Como consequência destas propriedades, temos os seguinte lema:

Lema 2.2.3. *Seja* x *um número irracional e* p_k/q_k *seu* k *- ésimo convergente. Então, para todo* $k \geq 0$, *verifica-se*

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Demonstração:

Basta provar para $x \in (0,1)$. Seja $x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cup (0,1)$. Sendo p_n/q_n convergente de x, da propriedade (B.I) acima, temos que

$$x = \frac{p_n + (T^n(x))p_{n-1}}{q_n + (T^n(x))q_{n-1}}.$$

Disto e da propriedade (B.II), segue

$$\begin{aligned}
\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\
&= \left| \frac{T^n(x)(p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n)}{q_n^2 + T^n(x)q_{n-1}q_n} \right| \\
&= \left| \frac{T^n(x)(-1)^n}{q_n^2 + T^n(x)q_{n-1}q_n} \right| \\
&= \frac{T^n(x)}{q_n^2 + T^n(x)q_{n-1}q_n}.
\end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sabemos que $T^n(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e, desta forma, $T^n(x) \neq 0$. Assim, a equação acima implica

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 (T^n(x))^{-1} + q_{n-1} q_n}. \tag{2.1}$$

Temos que $a_{k+1}(x) = a_{k+1} = \lfloor (T^k(x))^{-1} \rfloor$, assim $a_{k+1} \leq (T^k(x))^{-1} < a_{k+1} + 1$, e disto segue que

$$q_k(a_{k+1} q_k + q_{k+1}) \leq q_k((T^k(x))^{-1} q_k + q_{k+1}). \tag{2.2}$$

Lembremos também que $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$ então

$$a_{k+1} = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k}. \tag{2.3}$$

Das equações (2.2) e (2.3) temos

$$q_k q_{k+1} \leq q_k^2 (T^k(x))^{-1} + q_k q_{k-1} < q_{k+1} q_k + q_k^2.$$

Disto e da equação (2.1), temos o resultado.

□

Este lema nos diz que a aproximação dos convergentes de x pode ser estimada apenas em termos dos valores q_k.

Antes de enunciar o próximo lema, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.2.4 (Boa Aproximação). *A fração a/b, $b > 0$, é uma boa aproximação do número real x quando vale a desigualdade $|dx - c| > |bx - a|$ para todo $c/d \neq a/b$ com $0 < d \leq b$.*

Observando que a desigualdade acima é equivalente à

$$\left| x - \frac{c}{d} \right| > \left| x - \frac{a}{b} \right|,$$

podemos observar que as boas aproximações $a/b \in \mathbb{Q}$ são os números que se aproximam de x relativamente mais rápido que todos os racionais c/d para qualquer c inteiro e $0 < d \leq b$, por isso o status de boas. Como consequência desta definição e dos lemas anteriores, segue o

Lema 2.2.5 ([5] pág 70). *Toda boa aproximação de $x \in (0,1)$ é um convergente da sua expansão em frações contínuas.*

Deste fato, podemos concluir o próximo resultado.

Lema 2.2.6 ([5] pág 79). *Toda fração irredutível a/b satisfazendo a desigualdade*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

é um convergente de x.

Precisaremos dos lemas acima para demonstrar o próximo teorema que é uma propriedade dos

Definição 2.2.7 (Quocientes Limitados). *A expansão em frações contínuas $x = a_0 + [a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ possui quocientes limitados quando existe $M > 0$ tal que $|a_i| < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.2.8. *Considere uma constante $C > 0$, um número real*

$$x = a_0 \;\; + [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

e a desigualdade

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{C}{b^2} \qquad \text{com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Se $a_i < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então, para todo $C < C_0(M) = 1/(M+2)$, a desigualdade acima não tem solução. Se a sequência $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, então, para todo $C > 0$ a inequação possui infinitas soluções.

Demonstração:

Se a sequência $|a_i| \leq M$ para todo $i \in \mathbb{N}$ sendo $M \geq 1$, suponha, por absurdo, existir a/b irredutível em $\mathbb{Q}$ tal que

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}.$$

Sabemos que todo a/b satisfazendo esta desigualdade é um convergente de x, ou seja, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $a/b = p_k/q_k$. Assim, sendo $C < C_0(M) = 1/(M+2) \leq 1/2$, temos, segundo o Lema (2.2.3) e a propriedade (A) dos convergentes, que

$$\begin{aligned} \left|x - \frac{a}{b}\right| &> \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} \\ &= \frac{1}{q_k(q_k + a_{k+1}q_k + q_{k-1})} \\ &= \frac{1}{q_K^2\left(1 + a_k + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Lembrando que, na propriedade (A), $q_k \geq q_{k-1}$ e $a_k < M$, da hipótese segue

$$\frac{1}{1 + a_k + \frac{q_{k-1}}{q_k}} > \frac{1}{M+2}. \tag{2.6}$$

Das equações (2.5) e (2.6) obtemos

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| = \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)} = \frac{C_0(M)}{q_k^2} > \frac{C}{q_k^2}$$

o que é uma contradição. Portanto, a desigualdade (2.4) não possui solução.

Para o caso de x ter quocientes ilimitados, dado $C > 0$, existem infinitos números naturais k tais que $1/a_{k+1} < C$. Pelo Lema (2.2.3) e pela propriedade (A) dos convergentes, para cada k com tal característica, temos

$$\begin{aligned} \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| &\leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \\ &= \frac{1}{q_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1})} \\ &= \frac{1}{q_k^2 a_{k+1} + q_{k-1}} \\ &\leq \frac{C}{q_k^2}. \end{aligned}$$

Assim, para infinitos valores, a desigualdade (2.4) possui solução.

□

Em [5], pág 80, encontramos um resultado que nos diz que "para todo número irracional x, e toda constante $C \geq 1/\sqrt{5}$ existem infinitos valores p/q tais que $|x - p/q| < C/b^2$". Este fato é uma generalização do Teorema de Dirichlet que afirma a validade deste para $C = 1$. Observe que isto significa uma grande restrição, com relação à C, ao analisar o teorema acima. Veremos, no Capítulo 5, que o teorema acima nos diz que o conjunto dos números com quocientes limitados é o conjunto dos números 2 - Diofantinos (que definiremos em tal capítulo), o qual mostraremos ser um conjunto excepcional, isto é, possui medida de Lebesgue unidimensional nula mas dimensão de Hausdorff total 1.

2.3 A Medida de Gauss

Como a expansão em frações contínuas dos números reais está associada à órbita da transformação de Gauss T, seria interessante observar propriedades de recorrência, o que faremos para demonstrar a versão fraca do Teorema de Jarnik (ver Apêndice A), e para isso é necessário definir uma medida T - invariante. Infelizmente, a medida de Lebesgue não é T - invariante.

Na definição abaixo, estaremos considerando a σ - álgebra de Borel em $[0,1]$, portanto, pelo teorema de extensão de Caratheodory (ver Apendice), é suficiente definir a medida nos intervalos abertos.

Definição 2.3.1 (Medida de Gauss). *A medida de Gauss η do intervalo (a,b) de $[0,1)$ é dada por*

$$\eta(a,b) = \frac{1}{\log 2}\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Tal medida é a que estamos interessados e, além disso, a fórmula da medida de Gauss nos permite comparação com a medida de Lebesgue e isto é o que afirma o teorema a seguir.

Teorema 2.3.2. *A transformação de Gauss preserva a medida de Gauss e esta é equivalente à medida de Lebesgue.*

Demonstração:

1^a parte: (Invariância) O teorema da extensão de Caratheodory nos diz que, para provar o resultado desejado, basta demonstrá-lo para os intervalos da σ - álgebra de Borel sobre $[0,1]$.

Observemos primeiramente que, se $(a,b)\in[0,1]$, então

$$T^{-1}(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n+b},\frac{1}{n+a}\right).$$

De fato, como, para cada parte $[1/(n+1),1/n)$, a função $T_n : [1/(n+1),1/n) \to [0,1)$, sendo $T_n = T_g|_{[1/(n+1),1/n)}$, é bijetiva, contínua e monótona decrescente, temos que

$T^{-1}(a,b) = (T^{-1}(b), T^{-1}(a))$. Se $T_n^{-1}(\alpha) = \beta \in [1/(n+1), 1/n)$, então $\beta = 1/(n+\theta)$ para algum $\theta \in (0,1]$ e isso implica

$$\alpha = T_n(\beta) = n + \theta - \lfloor n + \theta \rfloor = n + \theta - n = \theta.$$

Assim, $T^{-1}(\alpha) = \beta = 1/(n+\alpha)$. Disto segue que

$$T^{-1}(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a} \right).$$

Do fato acima obtemos

$$\begin{aligned}
\eta(T^{-1}(a,b)) &= \eta(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a} \right)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \eta \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1 + 1/(n+a)}{1 + 1/(n+b)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \left[\log \left(\frac{n+a+1}{n+a} \right) - \log \left(\frac{n+b+1}{n+b} \right) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \left[\log(n+a+1) - \log(n+a) - \log(n+b+1) + \log(n+b) \right] \\
&= \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{b+1}{a+1} \right)
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade devida uma série de cancelamentos que podem ser observadas através das somas parciais, onde encontramos somas telescópicas.

2^a parte: (Equivalência) Seja A um subconjunto mensurável de $[0,1]$. Para $x \in [0,1)$, temos

$$\frac{1}{2\log 2} < \frac{1}{\log 2(x+1)} \leq \frac{1}{\log 2}.$$

Integrando obtemos

$$\int_A \frac{1}{2\log 2} dx < \int_A \frac{1}{\log 2(x+1)} dx \leq \frac{1}{\log 2} dx,$$

o que implica

$$\frac{1}{2\log 2} \lambda(A) < \eta(A) \leq \frac{1}{\log 2} \lambda(A).$$

Portanto η e λ são equivalentes.

$\square$

Para a demonstração do próximo teorema, precisamos do Lema abaixo cuja prova pode ser encontrada em [5] página 189.

Lema 2.3.3. *Considere a medida de Gauss* η *e defina, para cada* $i \in \mathbb{N}$, $E_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ *onde* $E_n = \{x = [a_1, \ldots, a_n, \ldots] \in [0,1); a_n > i\}$, *então* $\eta(E_\infty) = 1$

Observemos que E_∞ é o conjunto dos números reais cuja expansão contínuas possui uma infinidade de quocientes maiores que um dado número natural.

No caminho da prova de que os 2 - Diofantinos formam um conjunto excepcional, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.4. *A medida de Gauss do conjunto dos números com quocientes limitados é zero.*

Demonstração:

Basta mostrar para $x \in [0,1)$. Podemos redefinir tal conjunto como $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ sendo, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$L_i = \{x \in [0,1); \exists N(x) \text{ tal que } a_j(x) \leq i \ \forall j \geq N(x)\}.$$

e $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. De fato, se x possui quocientes limitados, então existe $l(x)$ tal que $a_j(x) \leq l(x)$ para todo j. Neste caso, basta tomar $i \geq l(x)$ e $N(x) = 1$ e temos $x \in L_i \subset L$. Por outro lado, se $x \in L$, então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_i$ o que implica a existência de $N(x)$ tal que $a_j \leq i$ para todo $j \geq N(x)$. Para esta situação, escolhendo $l(x) = \max\{a_1, \ldots, a_{N(x)}, i\}$, obtemos $a_j \leq l(x)$ para todo j, ou seja, x é um número com quocientes limitados.

A definição acima nos permite dizer que, para demonstrar o resultado desejado, basta provar que $\eta(L_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para isto, iremos precisar da

Afirmação : Dado $i \in N$, então

$$(L_i)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = E_\infty.$$

De fato, se $x \in (L_i)^c$, então, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $j \geq N$ tal que $a_j > i$. Assim, existem infinitos valores de j tais que $x \in E_j$ o que implica $x \in E_\infty$. Por outro lado, se $x \in E_\infty$ então $x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n \geq k$ tal que $a_n(x) > i$, o que implica $x \in (L_i)^c$.

#

Da afirmação acima e do lema (2.3.3), temos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\eta((L_i)^c) = 1$ e assim $\eta(L_i) = 0$. Portanto

$$\eta(L) = \eta(\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \eta(L_i) = 0.$$

□

A medida de Gauss η apresentada nesta seção possui mais uma propriedade interessante, a ergodicidade com relação a transformação de Gauss T. Em particular, considerando a σ - álgebra gerada pelo átomos da partição $\mathcal{P}$ associada a T como uma transformação Markoviana (ver capítulo 3), η é exata com respeito a T. Isto, juntamente aos fatos de que η é probabilidade T - invariante, nos leva a concluir que η é a Probabilidade única descrita no teorema Folclórico citado no capítulo 3.

2.4 A dimensão de Hausdorff do Conjunto dos Números de Liouville

O conjunto dos números de quocientes limitados, como veremos no Capítulo 5, está contido no complementar de um conjunto especial de números bem aproximáveis, os números de Liouville definidos abaixo. A demonstração apresentada nesta seção, tem como referência [6], página 9.

Definição 2.4.1 (Números de Liouville). *Um número $x \in \mathbb{R}$ é dito número de Liouville se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b > 1$ tais que*

$$0 < \left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^n}.$$

Embora tenha boa propriedade diofantina o teorema seguinte mostra que este conjunto é realmente pequeno e nada denso.

Teorema 2.4.2. *O conjunto dos números de Liouville possui dimensão de Hausdorff nula.*

Demonstração:

Precisamos provar que a medida de Hausdorff s - dimensional do conjunto $\mathcal{L}$ dos números de Liouville é nula para todo s. Inicialmente observemos o que ocorre para o conjunto $\mathcal{L} \cap (-m, m)$ sendo $m \in \mathbb{N}$.

Afirmação : Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\mathcal{L} \cap (-m, m) \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) = E.$$

De fato, suponha $x \in \mathcal{L} \cap (-m, m)$ com $x \notin E$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $q > 2$ e para todo $p \in [-mq, mq]$ temos que $x \notin (p/q - 1/q^n, p/q + 1/q^n)$ o que implica $|x - p/q| > 1/q^n$ e isso contradiz a definição de números de Liouville. Assim, $x \in E$.

#

Dados $\epsilon > 0$ e $s > 0$, vamos escolher n que satisfaça simultaneamente

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon, \quad ns > 2 \quad \text{e} \quad \frac{(2m+1)2^s}{ns-2} < \epsilon.$$

Cada intervalo $I_p = (p/q - 1/q^n, p/q + 1/q^n)$ tem comprimento $2/q^n \leq 1/2^{n-1} < \epsilon$. Logo, tomando os intervalos de E como ϵ - cobertura de $L \cap (-m, m)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(L \cap (-m, m)) &\leq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{2}{q^n} \right)^s \\
&= \sum_{q=2}^{\infty} (2mq + 1) \left(\frac{2}{q^n} \right)^s \\
&\leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2mq+1)2^s}{q^{ns}} \\
&\leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2m+1)2^s}{q^{ns-1}} \\
&\leq (2m+1)2^s \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{ns-1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2m+1)2^s \left[\frac{x^{-ns+2}}{-ns+2} \right]_1^{\infty} \\
&= 2^{-ns+2} \frac{(2m+1)2^s}{ns-2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Como ϵ é arbitrário, então $\mathcal{H}^s(\mathcal{L} \cap (-m, m)) = 0$ para todo $s > 0$. Desta forma, para todo $s > 0$

$$
0 \leq \mathcal{H}^s(\mathcal{L}) = \mathcal{H}^s \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\mathcal{L} \cap (-m, m)) \right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(\mathcal{L} \cap (-m, m)) = 0.
$$

$\square$

Este teorema nos leva a perguntar o que acontece com os números que não são bem aproximáveis, o conjunto dos números diofantinos ao qual dedicaremos uma seção no Capítulo 5.

Capítulo 3

Transformações de Markov

Neste capítulo falaremos sobre transformações de Markov, que são aplicações uniformemente expansoras a partir de um iterado suficientemente grande, definidas em uma quantidade enumerável de ramos, em que entenderemos por ramo cada parte conexa do domínio onde a transformação é diferenciavel, e possuem propriedades boas que nos permitem obter um certo controle sobre a separação de órbitas.

Na primeira seção definiremos transformação de Markov. Na segunda, daremos dois exemplos de tais aplicações, uma definida em finitos ramos e outra em infinitos. Por fim, na última seção discutiremos um pouco sobre algumas propriedades ergódicas das transformações e demonstraremos os primeiros lemas que utilizaremos para provar o teorema principal desta dissertação. Entre eles, obteremos uma estimativa para controlar a distorção (com respeito aos átomos de partições de Markov geradas por uma aplicação) e veremos que, se uma transformação possui finitos ramos, a distorção é limitada.

Os conceitos que definiremos neste capítulo serão utilizados por todo o texto a partir de agora.

Como preliminares para este capítulo, precisaremos definir uma partição especial. Sejam $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma aplicação e $\mathcal{P}_0 = \{P(j) : j \in \Lambda\}$ partição de $[0,1]$ em intervalos abertos (ignorando um conjunto enumerável) sendo Λ finita ou enumerável.

Definimos indutivamente partições

$$\mathcal{P}_k = \{P(j_0,\ j_1, \ldots,\ j_k);\ (j_0,\ j_1, \ldots,\ j_k) \in \Lambda^{k+1}\}$$

de $[0,1]$ da seguinte maneira:

$$P(j_0,\ j_1, \ldots,\ j_k) = P(j_0,\ j_1, \ldots,\ j_{k-1}) \cap T^{-k}(P(j_k)).$$

Assim temos $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k-1} \vee T^{-1}(\mathcal{P}_{k-1})$.

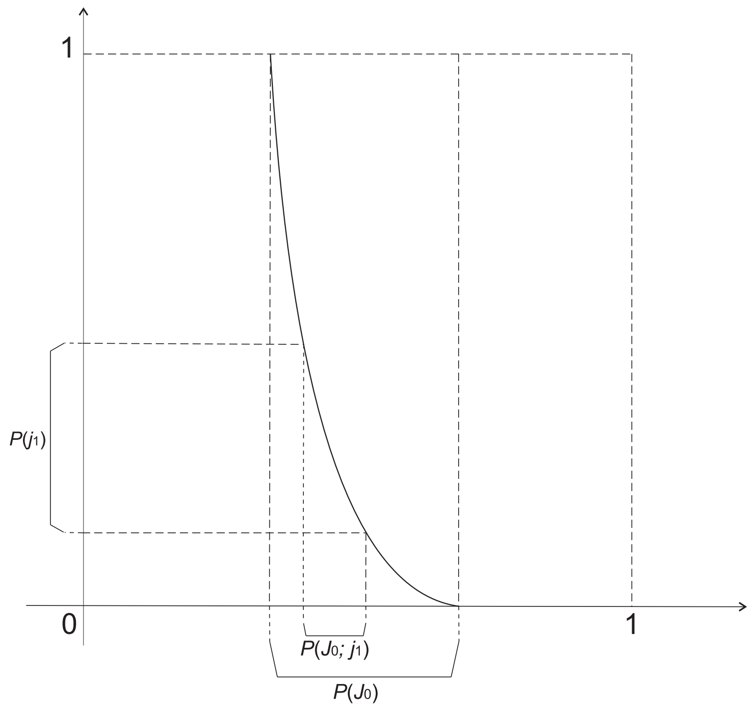

Figura 3.1: Construção de um átomo de $\mathcal{P}_1$.

Vamos definir também os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{U}_n = \bigcap_{m \leq n} \bigcup_{P \in \mathcal{P}_m} P, \quad \mathcal{U} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{P \in \mathcal{P}_m} P, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{P}_m.$$

Em palavras, $\mathcal{U}_n$ é o conjunto formado pela união de todos os pontos dos átomos da partição $\mathcal{P}_n$, ou seja, $[0,1]$ menos os pontos excluídos pela partição $\mathcal{P}_n$; $\mathcal{U}$ é o conjunto $[0,1]$ menos os pontos excluídos por todas as partições; e $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os átomos de todas as partições $\mathcal{P}_m$ de $[0,1]$.

Após algumas reflexões é possível observar que cada átomo da partição $\mathcal{P}_n$ pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$P(j_0, \ldots, j_n) = \{x \in [0,1]; T^k(x) \in P(j_k, \ldots, j_n) \ \forall\ 0 \leq k \leq n\}.$$

3.1 Definição

Agora estamos prontos para definirmos transformações de Markov.

Definição 3.1.1 (Transformações de Markov). *Dizemos que uma transformação* $T : [0,1] \to [0,1]$ *é Markov com partição* $\mathcal{P}_0$ *se as seguintes condições abaixo são satisfeitas:*

i) *para cada* $j \in \Lambda$ *existe* $\Lambda_j \subset \Lambda$ *tal que* $T(P(j)) = int\overline{\bigcup_{i \in \Lambda_j} P(i)}$*;*

ii) *temos* $\inf_{j \in \Lambda} \lambda(T(P(j))) > 0$*;*

iii) *a derivada* T' *de* T *é definida e* $1/T'$ *é limitada sobre* $\mathcal{U}_0$*;*

iv) *existe* $\beta > 1$ *tal que* $(T^n)' >> \beta^n$ *sobre* $\mathcal{U}_n$*, ou seja, existe* $K > 0$ *constante tal que* $|(T^n)'| \geq K\beta^n$ *para todo* $n \geq 1$*;*

v) *existe* $\gamma \in (0,1)$ *tal que*

$$|1 - T'(x)/T'(y)| << |x - y|^\gamma$$

para $(x,y) \in diag(\mathcal{P}_0)$*, onde* $diag(\mathcal{P}_n) = \{(x,y) \in P \times P;\ P \in \mathcal{P}_n\}$ *e* $a << b$ *significa que existe* $k > 0$ *tal que* $a \leq kb$*.*

Observe que i) nos diz que podemos particionar a imagem de $P(j)$ por átomos da própria $\mathcal{P}_0$. O item ii) nos diz que a imagem de cada átomo de $\mathcal{P}_0$ possui medida de Lebesgue não nula (lembrando que λ denota a medida de Lebesgue) e, além disso, existe um cert "comprimento"mínima para $T(P(j))$ para todo $j \in \Delta$. A condição iii) nos diz que a derivada nunca se anula, o que juntamente com o teorema do valor médio, permite que dois pontos distintos de um mesmo átomo da partição $\mathcal{P}_0$ nunca tenham a mesma imagem. Se calculássemos o expoente de Lyapunov em um ponto x e tivessemos: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |(T^n)'(x)| > \log \beta$ encontraríamos, para n suficientemente grande, $|(T^n)'(x)| \geq$

β^n e assim, a expansão dependeria do ponto. Isso nos diz que a propriedade iv) é mais forte do que a simples convergência pontual do expoente de Lyapunov pois uniformiza o limite, além disso, diz que T^n é uniformemente expansora a partir de um n suficientemente grande, o que também reforça o item iii). O teorema do valor médio nos dá a seguinte informação: dado um $j \in \Delta$ fixo, se $x, y \in P(j)$, existe $\zeta \in P(j)$ tal que $|T(x)-T(y)|/|x-y| = |T'(\zeta)|$. Tomando $\zeta_0 \in P(j)$ qualquer temos, da condição v), que

$$\begin{aligned} \left|\frac{T(x)-T(y)}{x-y}\right| &\leq |T'(\zeta)-T'(\zeta_0)| + |T'(\zeta_0)| \\ &\leq K'|T'(\zeta_0)||\zeta-\zeta_0|^\gamma + |T'(\zeta_0)| \\ &\leq K|P(j)|^\gamma + |T'(\zeta_0)| = C \end{aligned}$$

em que C não depende de x e y. Isto nos diz que, dentro de cada átomo de $\mathcal{P}_0$, a distorção é limitada. Isto quer dizer que se tomarmos um intervalo dentro de algum $P(j) \in \mathcal{P}_0$ e dividirmos o comprimento de sua imagem pelo seu comprimento este será menor que uma constante que não depende de tal intervalo, ou seja, esta razão é, de certa forma, controlada.

3.2 Exemplos

Nesta seção apresentamos exemplos de transformações Markov.

Exemplo 3.2.1 (β **- transformação).** *Para um número $\beta \in \mathbb{N}$ defina $T_\beta(x) = \langle \beta x \rangle$ onde $\langle y \rangle$ denota a parte fracionária de y é uma transformação Markov.*

De fato, definimos, para $\Lambda = \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$, as partições:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_0 = \left\{ \left(\dfrac{j_0}{\beta}, \dfrac{j_0+1}{\beta} \right);\ j_0 \in \Lambda \right\}, \\ \mathcal{P}_1 = \left\{ \left(\dfrac{j_0}{\beta} + \dfrac{j_1}{\beta^2}, \dfrac{j_0}{\beta} + \dfrac{j_1+1}{\beta^2} \right);\ (j_0, j_1) \in \Lambda^2 \right\}, \\ \vdots \\ (\textit{indutivamente}) \\ \vdots \\ \mathcal{P}_n = \left\{ \left(\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \dfrac{j_l}{\beta^{l+1}}, \sum_{l=0}^{n-1} \dfrac{j_l}{\beta^{l+1}} + \dfrac{j_n+1}{\beta^{n+1}} \right);\ (j_0, j_1, \ldots, j_n) \in \Lambda^{n+1} \right\}. \end{cases}$$

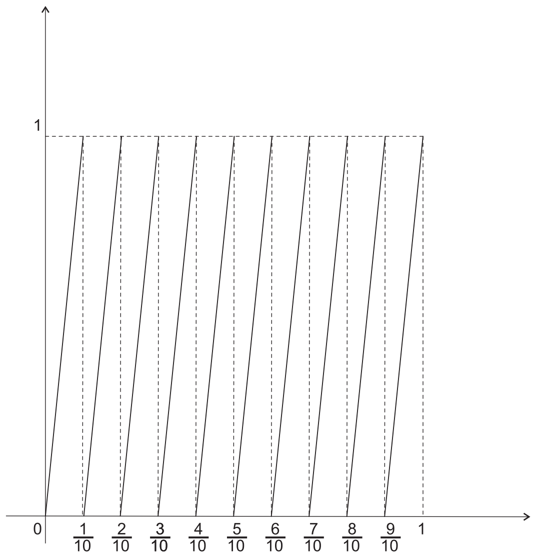

Figura 3.2: 10 - transformação.

Afirmação 1: $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k-1} \vee T^{-1}(\mathcal{P}_{k-1})$.

De fato, observe que, por construção, os átomos de $\mathcal{P}_k$ são encontrados na divisão exata de cada átomo de $\mathcal{P}_{k-1}$ em β intervalos iguais de diâmetro $1/\beta^k$. Fixando $P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}})$ temos:

$$\begin{aligned}
|P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}}) \cap T^{-k}(P(j_k))| &= |P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}}) \cap T^{-1}(P(j_0, j_1, \ldots, j_{k-1}))| \\
&= \left| \sum_{l=0}^{k-2} \frac{\tilde{j_l}}{\beta^{l+1}} + \frac{\widetilde{j_{k-1}} + 1}{\beta^k} - \sum_{l=0}^{k-2} \frac{\tilde{j_l}}{\beta^{l+1}} - \frac{\widetilde{j_{k-1}}}{\beta^k} \right| \\
&= \frac{1}{\beta^k}.
\end{aligned}$$

Como em $P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}})$ os conjuntos $T^{-1}(P(j_0, j_1, \ldots, j_{k-1}))$ são intervalos abertos disjuntos pois $T|_{(P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}}))}$ é bijeção, temos única possibilidade

$$P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}}) \cap T^{-n}(P(j_{k-1})) = P(\tilde{j_0}, \tilde{j_1}, \ldots, \widetilde{j_{k-1}}, j_k)$$

com $j_k \in \Lambda$.

#

Afirmação 2: T é de Markov com a partição $\mathcal{P}_0$.

De fato,

(i) $T(P(j)) = (0,1) = int\overline{\Big((0, \frac{1}{\beta}) \cup \ldots \cup (\frac{\beta-1}{\beta}, 1)\Big)} = int\overline{\bigcup_{i \in \Lambda} P(i)}$.

(ii) $\inf_{j\in\Lambda} \lambda(T(P(j))) = 1 > 0.$

(iii) Para cada $P(j)$ temos que para todo $x \in P(j)$

$$(T'(x))^{-1} = \left(\frac{d}{dx}(\beta x - \lfloor \beta x \rfloor)\right)^{-1} = \frac{1}{\beta}$$

é claramente limitada.

(iv) Para cada $P(j)$ temos que para todo $x \in P(j)$, como vimos em (iii), temos $T'(x) = \beta$. Logo

$$(T^k)'(x) = \prod_{i=1}^{k} T'(T^{k-i}(x)) = \beta^k.$$

(v) Sejam $x, y \in P(j)$ e qualquer $\gamma \in (0,1)$, temos

$$\left|\frac{T'(y) - T'(x)}{T'(y)}\right| = \left|\frac{\beta - \beta}{\beta}\right| = 0 \leq |x-y|^{\gamma}.$$

Portanto, de (i),(ii),(iii),(iv) e (v) segue que T é Markov.

#

Exemplo 3.2.2 (Aplicação de Gauss). $T_g(x) = \begin{cases} \left\langle \frac{1}{x} \right\rangle & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$ *é uma transformação de Markov.*

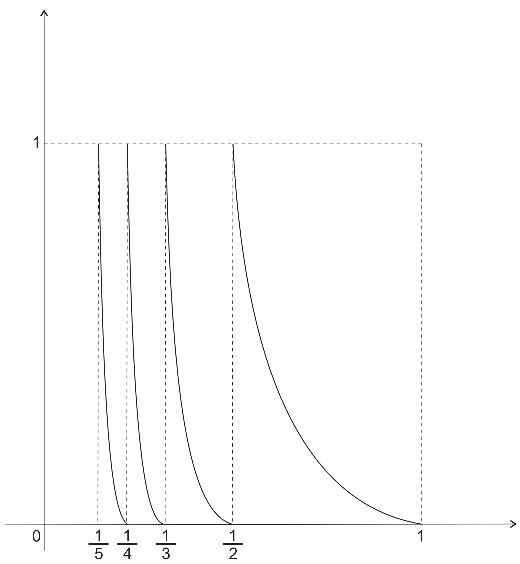

Figura 3.3: Transformação de Gauss.

De fato, tome
$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(i) Temos que

$$P(j) = \left(\frac{1}{j+1},\ \frac{1}{j} \right) \Rightarrow T(P(j)) = (0,1) = int \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{i+1},\ \frac{1}{i} \right)} = int \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P(i)}.$$

(ii) Para cada $P(j)$ temos $\inf_{j\in\mathbb{N}} \lambda(T(P(j))) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \lambda((0,1)) = 1 > 0$.

(iii) Temos $\mathcal{U}_0 = \bigcap_{m\leq 0} \bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P = \mathcal{P}_0$. Se $x \in [1/(j_0+1), 1/j_0] \in \mathcal{P}_0$, temos que $\lfloor 1/x \rfloor = j_0$, daí
$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - j_0 \Rightarrow T'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow |(T'(x))^{-1}| = |x^2| \leq 1.$$

(iv) Vamos particionar novamente o intervalo unitário $[0,1]$ em intervalos do tipo $[1-1/(n-1),\ 1-1/n]$. Observe que

$$\begin{aligned} T\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) &= \frac{1}{1-\frac{1}{n-1}} - \left\lfloor \frac{1}{1-\frac{1}{n-1}} \right\rfloor \\ &= \frac{n-1}{n-2} - 1 \\ &= \frac{1}{n-2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \left\lfloor \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \right\rfloor \\ &= \frac{n}{n-1} - 1 \\ &= \frac{1}{n-1}, \end{aligned}$$

ou seja, que $T\left([1-1/(n-1),\ 1-1/n]\right) = [1/(n-1), 1/(n-2)]$ é um dos átomos da partição inicial. Observe também que se $I = [1-1/(n-1),\ 1-1/n]$, temos

$$\begin{aligned} T'(T(I)) &= \left[-\left(\frac{1}{n-1}\right)^{-2},\ -\left(\frac{1}{n-2}\right)^{-2} \right] \\ &= [-(n-1)^2,\ -(n-2)^2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}T'(I) &= \left[-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{-2},\ -\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2}\right]\\ &= \left[-\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{2},\ -\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2}\right].\end{aligned}$$

Assim, se $x \in I$ temos

$$|(T^2)'(x)| = |T'(T(x))T'(x)| \geq (n-2)^2\,(n/(n-1))^2\,.$$

Note que

$$(n-2)\,(n/(n-1)) - \sqrt{2} \geq 0 \Rightarrow n \geq (2+\sqrt{2}+\sqrt{6})/2 \cong 2,9 \Rightarrow n \geq 3.$$

Desta forma, para $n \geq 3$ temos $(T^2)'(x) \geq (\sqrt{2})^2$. Temos também $|T'(x)| \geq 1$. Se $n = 2$, obtemos $I = (0, 1/2)$. Se $x \in I$, segue que $1/2 > x \Rightarrow x^{-2} \geq 4$ implica $|T'(x)| \geq 2 > (\sqrt{2})$. Daí

$$\begin{cases} T'(T(x))T'(x) \geq (\sqrt{2})^2 & \text{se} \quad T(x) \in \left(1-\dfrac{1}{n-1},\ 1-\dfrac{1}{n}\right), n \geq 3 \\ \\ T'(T(x))T'(x) \geq 1.(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 & \text{se} \quad T(x) \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Deste fato segue que

$$|(T^{2m})'(x)| = \left|\prod_{i=0}^{m-1}(T^2)'(T^{2i}(x))\right| \geq (\sqrt{2})^{2m}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ Logo, pelo algorítimo da divisão, existem $m \in \mathbb{N}$ e $r = 0$ ou $r = 1$ tais que $n = 2m + r$. Se $r = 0$, então

$$|(T^n)'(x)| = |(T^{2m+r})'(x)| = |(T^{2m})'(x)| \geq (\sqrt{2})^{2m} = \sqrt{2}^n.$$

Se $r = 1$, temos

$$|(T^n)'(x)| = |(T^{2m+r})'(x)| = |(T^{2m})'(T(x))T'(x)| \geq (\sqrt{2})^{2m}.\sqrt{2} = \sqrt{2}^n.$$

(v) Para $x, y \in diag(\mathcal{P}_0)$ temos

$$\begin{aligned}
\left|1 - \frac{T'(x)}{T'(y)}\right| &= \left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| \\
&= \frac{1}{x^2}|x+y||x-y| \\
&= \frac{1}{x^2}|x+y||x-y|^{1/2}|x-y|^{1/2} \\
&\leq (n+1)^2.\frac{2}{n}.\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}|x-y|^{1/2} \\
&\leq \frac{2(n+1)^2}{n^2}|x-y|^{1/2}
\end{aligned}$$

cujo limite é $2|x-y|^{1/2}$ quando n tende a zero. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ ocorre $2(n+1)^2/n^2 \leq 2$. Tomando $K = \max\{8, \ldots, [2(n+1)^2]/[n^2] \leq 2, 2\}$ temos

$$\left|1 - \frac{T'(x)}{T'(y)}\right| \leq K|x-y|^{1/2}.$$

3.3 Consequências da Definição de Transformações de Markov

Nesta seção demonstraremos algumas consequências da definição de transformação de Markov que serão úteis para a demonstração do teorema principal. Antes disto, discutiremos brevemente sobre a ergodicidade das transformações de Markov. Para isto, daremos algumas definições.

Definição 3.3.1 (Aplicação Invariante). *Uma aplicação mensurável $T : X \to X$ sobre um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \eta)$ é dita invariante se $\eta(T^{-1}(A)) = \eta(A)$, ou seja, a medida de um conjunto da σ - álgebra é preservada por sua imagem inversa.*

Definição 3.3.2 (Sistema Exato). *Um sistema dinâmico $(X, \mathcal{A}, \eta, T)$ é dito exato quando a σ - álgebra $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathcal{A})$ somente contém conjuntos de medida 0 ou 1.*

Definição 3.3.3 (Sistema Ergódico). *Um sistema dinâmico $(X, \mathcal{A}, \eta, T)$, em um espaço de probabilidade, é dito ergódico quando $\eta(A) = 0$ ou $\eta(A) = 1$ sempre que $T^{-1}(A) = A$ com $A \in \mathcal{A}$, ou seja, todo conjunto invariante por sua imagem inversa possui medida nula ou total.*

Observe que todo sistema exato é ergódico.

De fato, se $(X, \mathcal{A}, \eta, T)$ é um sistema dinâmico exato, então temos que

$$T^{-1}(A) = A \Rightarrow A = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \Rightarrow A \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\mathcal{A}) \Rightarrow \eta(A) = 0 \text{ ou } \eta(A) = 1.$$

O teorema seguinte é denominado folclore pois os avanços para sua prova podem ser encontrados nos trabalhos de diversos matemáticos e, portanto, sua demonstração não pode ser atribuida a nehum autor em específico. Uma versão (para transformações uniformemente expansoras C^2 por partes) deste resultado foi provado por A. Losota e J. A. Yorke no artigo [7]. Além disto, veremos, no capítulo 6, que as transformações de Markov são, de forma mais geral, transformações expansoras, que definiremos em tal capítulo. Com esta observação, podemos fornecer mais uma referência, o livro [10] página 102.

Teorema 3.3.4 (**Teorema Folclore**)**.** *Se a aplicação $T : [0,1] \to [0,1]$ é Markov, então ela preserva uma medida η equivalente à medida de Lebesgue e o sistema dinâmico $([0,1], \mathcal{B}, \eta, T)$, em que $\mathcal{B}$ denota a σ - álgebra de Borel sobre $[0,1]$, é exato.*

O teorema acima nos fornece uma ponte entre as teorias de transformações de Markov e de dimensão de Hausdorff pois, como vimos no capítulo 1, as medidas de Hausdorff e de Lebesgue são equivalentes, o que nos permite dizer que a medida, citada no resultado, preservada por uma transformação de Markov é equivalente à medida de Hausdorff.

Teorema 3.3.5 (**Teorema ergódico de Birkhoff**)**.** *Seja (X, β, μ) um sistema dinâmico ergódico, sendo μ uma medida de probabilidade, $T : X \to X$ uma transformação invariante e $f \in L^1(X, \beta, \mu)$. Então*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j(x)) = \int_A f d\mu$$

para quase todo ponto em X.

Uma consequência dos teoremas folclórico e de Birkhoff é que $([0,1], \mathcal{B}, \eta, T)$ é um sistêma dinâmico ergódico e, além disto, para todo $A \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_A(T^n(x)) = \eta(A)$$

para quase todo ponto com respeito à medida de Lebesgue, ou seja, a medida é igual à média temporal (ou média de Birkhoff) com relação à função característica $\chi : A \to R$ tal que

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}.$$

Vamos agora estudar algumas propriedades das transformações de Markov que utilizaremos ao longo deste texto.

Lema 3.3.6. *Seja T uma transformação de Markov com partição $\mathcal{P}_0$. Para cada inteiro não negativo n, a partição $\mathcal{P}_n$ é uma coleção de intervalos abertos (os átomos da partição) sobre cada um dos quais T^{n+1} é contínua e injetiva.*

Demonstração:

Vamos demonstrar por indução.

Se $n = 0$ temos por definição que $\mathcal{P}_0$ é um conjunto de intervalos abertos. Além disso, de (iii) segue que T' é definida e $\frac{1}{T'}$ é limitada sobre $\mathcal{U}_0$. Logo, existe $k > 0$ tal que $|T'| > k$. Com isso, T' não muda de sinal em cada átomo $P(j_0)$ de $\mathcal{P}_0 = \mathcal{U}_0$. Assim, T é injetiva em cada $P(j_0)$. Portanto, $\mathcal{P}_0$ é uma coleção de intervalos abertos em cada dos quais T é contínua e injetiva.

Suponha $\mathcal{P}_{n-1}$ coleção de intervalos abertos em cada dos quais T^n é contínua e injetiva. Como já sabemos que $P(j_n) \in \mathcal{P}_0$ é aberto e T^n é contínua, temos que $T^{-n}P(j_n)$ é aberto e assim

$$P(j_0, j_1, \ldots, j_n) = P(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}) \cap T^{-n}(P(j_n))$$

é aberto. Além disso, por (iv) temos que existe $\beta > 1$ tal que $(T^{n+1})' >> \beta^n > 1 > 0$. Logo, em cada átomo $P(j_0, j_1, \ldots, j_n) \in \mathcal{P}_n$, $(T^{n+1})'$ não muda de sinal. Assim T^{n+1} é injetiva em cada $P(j_0, j_1, \ldots, j_n)$. Portanto $\mathcal{P}_n$ é uma coleção de intervalos abertos em cada um dos quais T^{n+1} é contínua e injetiva.

□

Corolário 3.3.7. *O conjunto $[0, 1]\backslash\mathcal{U}$ é enumerável.*

Demonstração:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
[0,1]\backslash\mathcal{U} &= \bigcup_{n=0}^{\infty}([0,1]\backslash\mathcal{U}_n) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty}\left([0,1]\backslash\bigcap_{m\geq n}\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P\right)\right) \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{n}\left([0,1]\backslash\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P\right)\right).
\end{aligned}
$$

Logo, basta mostrar que, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $[0,1]\backslash\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P\right)$ é enumerável. Temos, do Lema (3.3.6), que $\bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P$ é união disjunta de intervalos abertos em $[0,1]$, logo, o conjunto destes conjuntos é enumerável e, como $\mathcal{P}_m$ é partição de $[0,1]$, os elementos de $[0,1]\backslash\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P\right)$ são os extremos destes intervalos e, portanto, $[0,1]\backslash\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_m} P\right)$ é enumerável.

□

Utilizaremos, futuramente, o lema acima na construção de medidas suportadas nos átomos de $\mathcal{P}$. Isto será possível pois o fato de $[0,1]\backslash\mathcal{U}$ ser enumerável nos permite anular a medida de tal conjunto, ou seja, poderemos desconsiderar os pontos extremos dos átomos das partições $\mathcal{P}_n$ para todo n. Lembremos também que este resultado é muito mais forte quando falamos em medida de Hausdorff pois ele implica $dim_H([0,1]\backslash\mathcal{U}) = 0$.

Lema 3.3.8. *Para todo* $n \in \mathbb{N}_0$, $\max_{P\in\mathcal{P}_n} \lambda(P) << \beta^{-n}$.

Demonstração:

De (iv) temos que existe $\beta > 1$ tal que $(T^n)' >> \beta^n$. Do fato que cada $P \in \mathcal{P}_n$ é intervalo aberto, temos que $\lambda(P) = \sup_{x,y\in P} |x-y|$. Logo temos que, para cada $x, y \in P$, existe z entre x e y tal que

$$1 \geq |T^n(x) - T^n(y)| = |(T^n)'(z)||x-y| \Rightarrow |x-y| \leq \frac{1}{|(T^n)'(z)|} << \frac{1}{\beta^n}.$$

Portanto $\lambda(P) << \beta^{-n}$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$, ou seja, $\max_{P\in\mathcal{P}_n} \lambda(P) << \beta^{-n}$.

□

Este resultado nos diz que o tamanho dos átomos das partições $\mathcal{P}_n$ diminuem à uma velocidade comparável a β^{-n} onde β é o mesmo da condição (iv) da definição de transformação de Markov. Além disto, o tamanho dos átomos tende exponencialmente rápido a zero quando n tende a infinito. Utilizaremos este lema juntamente com o Lema (4.2.4) do Capítulo 4 para comparar medidas que iremos criar à frente com a medida de Lebesgue em relação aos átomos das partições $\mathcal{P}_n$.

Lema 3.3.9. *O conjunto* $[0,1]\backslash\mathcal{U}$ *é denso.*

Demonstração:

Lembrando que $\mathcal{U} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n} P$ temos que, se $x \in [0,1]$, então existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que x é extremo ou está no interior de algum átomo $P \in \mathcal{P}_n$. Se x for extremo de algum $P \in \mathcal{P}_n$ não há o que mostrar. Se não, sejam $\epsilon > 0$ e $\beta > 1$ como na condição (iv) da definição de transformações de Markov. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\beta^{-n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Assim, como, pelo Lema (3.3.8), $\max_{P\in\mathcal{P}_{n_0}} \lambda(P) << \beta^{-n_0}$ e $\mathcal{P}_{n_0}$ é uma partição de $[0,1]$, existe $P \in \mathcal{P}_{n_0}$ tal que $P \in (x-\epsilon,\ x+\epsilon)$. Desta forma, sendo $P = (y,z)$, temos que $x,\ z \in (x-\epsilon,\ x+\epsilon) \cap ([0,1]\backslash\mathcal{U})$. Portanto $[0,1]\backslash\mathcal{U}$ é denso.

$\square$

A densidade de $[0,1]\backslash\mathcal{U}$ implica que em qualquer vizinhança V contida em $[0,1]$ existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ com $P \in \mathcal{P}_n$ dentro de V. Disto segue a densidade dos átomos de de $\mathcal{P}$ em $[0,1]$.

Lema 3.3.10. *Para* (x,y) *em diag*$(\mathcal{P}_n)$ *temos* $(T^n)'(x)/(T^n)'(y) << 1$ *uniformemente em* n.

Demonstração:

Da condição (v) da definição de transformação de Markov e da regra da cadeia, temos que existem $C > 0$ e $0 < \gamma < 1$ tais que

$$\begin{aligned} \left|\frac{(T^n)'(x)}{(T^n)'(y)}\right| &= \prod_{j=0}^{n-1} \left|\frac{T'(T^j(x))}{T'(T^j(y))}\right| \\ &\le \prod_{j=0}^{n-1} (C|T^j(x) - T^j(y)|^\gamma + 1), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{(T^n)'(x)}{(T^n)'(y)}\right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1}\log(C|T^j(x)-T^j(y)|^\gamma+1)\\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1}(C|T^j(x)-T^j(y)|^\gamma),\end{aligned}$$

então

$$\left|\frac{(T^n)'(x)}{(T^n)'(y)}\right| \leq \exp\sum_{j=0}^{n-1}(C|T^j(x)-T^j(y)|^\gamma). \tag{3.1}$$

Como temos T^n contínua e derivável em cada átomo de $\mathcal{P}_n$, para $(x,y)\in diag(\mathcal{P}_n)$ segue do Teorema do Valor Médio e da condição (iv) da definição de transformação de Markov que existe $\beta>1$ (uniformemente em j) tal que

$$|T^n(x)-T^n(y)| = |(T^{n-j})'(x_0)||T^j(x)-T^j(y)| \geq \beta^{n-j}|T^j(x)-T^j(y)|.$$

Assim, de (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{(T^n)'(x)}{(T^n)'(y)}\right| &\leq \exp\sum_{j=0}^{n-1}(C[(\beta^{n-j})^\gamma]^{-1}|T^n(x)-T^n(y)|^\gamma)\\ &\leq \exp\left[C|T^n(x)-T^n(y)|^\gamma\sum_{k=0}^{\infty}(\beta^{-\gamma})^k)\right]\\ &\leq \exp\left[C\left(1/(1-\beta^{-\gamma})\right)^{-1}\right]\end{aligned}$$

com $\exp\left[C\left(1/(1-\beta^{-\gamma})\right)^{-1}\right]>0$.

□

Observemos que $(T^n)'(x)/(T^n)'(y) << 1$ garante a existência de algum $k>0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ temos $|(T^n)'(x)/(T^n)'(y)|\leq k$, ou seja, uma limitação uniforme para $(T^n)'(x)/(T^n)'(y)$ com $(x,y)\in diag(\mathcal{P}_n)$. Além disso, como x e y são arbitrários, temos $1/k\leq(T^n)'(x)/(T^n)'(y)\leq k$, fato que nos será muito útil na demostração do lema (3.3.11) seguinte.

Lema 3.3.11. *Existem constantes positivas A e B tais que*

$$A\frac{\lambda(P(j_{n-1},j_n))}{\lambda(P(j_{n-1}))} \leq \frac{\lambda(P(j_0,\ldots,j_n))}{\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1}))} \leq B\frac{\lambda(P(j_{n-1},j_n))}{\lambda(P(j_{n-1}))}$$

uniformemente em $n\geq1$ e $P(j_0,\ldots,j_n)$ em $\mathcal{P}_n$.

Demonstração:

Como $P(j_{n-1}, j_n) = T^{n-1}(P(j_0, \ldots, j_n))$, do Teorema do Valor Médio, existe $x \in P(j_0, \ldots, j_n)$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda(P(j_{n-1}, j_n)) &= \lambda(T^{n-1}(P(j_0, \ldots, j_n))) \\ &= (T^{n-1})'(x)\lambda(P(j_0, \ldots, j_n)), \end{aligned}$$

então

$$\lambda(P(j_0, \ldots, j_n)) = ((T^{n-1})'(x))^{-1}\lambda(P(j_{n-1}, j_n)).$$

Analogamente $\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1})) = ((T^{n-1})'(y))^{-1}\lambda(P(j_{n-1}))$. Assim

$$\frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} = \frac{(T^{n-1})'(y)}{(T^{n-1})'(x)} \frac{\lambda(P(j_{n-1}, j_n))}{\lambda(P(j_{n-1}))}.$$

Logo, do Lema (3.3.10), existe $k > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$

$$\frac{1}{k} \frac{\lambda(P(j_{n-1}, j_n))}{\lambda(P(j_{n-1}))} \leq \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \leq k \frac{\lambda(P(j_{n-1}, j_n))}{\lambda(P(j_{n-1}))}.$$

□

O lema acima nos garante o controle da distorção através da comparação da medida de Lebesgue dos átomos das primeiras partições $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$. Este controle será imprescindível na demonstração do caso infinito do Teorema de *Abercrombie e Nair* no Capítulo 5. Além disto, utilizaremos este resultado para demonstrar o lema seguinte que também tem grande importância na prova de tal teorema.

Lema 3.3.12. *Se $\mathcal{P}_0$ é finito, então*

$$\inf \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} > 0$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os elementos (não vazios) $P(j_0, \ldots, j_n) \in \mathcal{P}_n$.

Demonstração:

Como $\mathcal{P}_0$ é finito, segue que $\mathcal{P}_1$ também é finito e existem

$$0 < M = \max_{P \in \mathcal{P}_0} \lambda(P) \quad \text{e} \quad 0 < m = \min_{P \in \mathcal{P}_1} \lambda(P).$$

Do Lema (3.3.11) temos que existe $A > 0$ tal que para todo $n \geq 1$

$$\frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \geq A\frac{\lambda(P(j_{n-1}, j_n))}{\lambda(P(j_{n-1}))} \geq A\frac{m}{M} > 0.$$

Portanto

$$\inf \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} > 0.$$

□

Este fato reforça o que já havíamos observado quando definimos transformações de Markov. Anteriormente percebemos que existe uma certa distorção limitada se estudamos esta com relação a cada átomo de $\mathcal{P}_0$. De maneira mais forte, o lema acima nos garante que, se tivermos a partição inicial finita, não precisamos mais de tal restrição e o resultado é global, ou seja, a distorção é, de fato, limitada. Esta limitação,como veremos mais à frente, é uma das importantes informações que possibilita a demonstração do Teorema de *Abercrombie e Nair* para o caso finito.

Capítulo 4

Dimensão de Billingsley

Neste capítulo estudaremos um pouco sobre dimensão de Billingsley. Embora tal dimensão tenha teoria mais ampla do que o conteúdo abordado, nosso estudo será feito de forma estritamente direcionada à demonstração de um dos teoremas principais deste texto.

Na primeira seção falaremos sobre a definição de tal dimensão veremos que esta é bem similar à definição de dim_H, embora dependa de uma medida, e mostraremos algumas características e propriedades desta que nos serão um pouco familiares já que também são similares a algumas propriedades da dimensão de Hausdorff.

Na segunda seção estreitaremos de vez os laços entre as dimensões de Hausdorff e de Billingsley provando que elas coincidem sob algumas condições. Além disto, estimaremos, sob certas hipóteses, a razão entre as dimensões de Billingsley de um conjunto relativas a duas medidas distintas, construiremos uma classe de medidas de probabilidade com propriedades boas para utilizarmos na demonstração do teorema de Nair e Abercrombie, e provamos que para uma probabilidade μ Boreliana sobre $[0, 1]$, a dimensão de Billingsley de um conjunto de medida μ não nula com relação a esta probabilidade é total.

4.1 Definição

Para estudar a dimensão de Billingsley precisaremos considerar algumas definições preliminares:

Definição 4.1.1 (Rede). *Uma rede enumerável sobre um conjunto $u_0 \subset [0,1]$ é uma coleção $\mathcal{B}$ de conjuntos de Borel de u_0 com as seguintes condições:*

1. *o conjunto u_0 é a união de todos os elementos de $\mathcal{B}$;*

2. *se u e v são elementos de $\mathcal{B}$, então $u \subset v$ ou $v \subset u$ ou $u \cap v = \emptyset$;*

3. *para cada $u \in \mathcal{B}$, o conjunto*

$$\sigma(u) := \{v \in \mathcal{B}; v \subset u \text{ e se } w \in \mathcal{B} \text{ e } v \subset w \subset u \text{ então } w \in \{u, v\}\}$$

forma uma partição de u;

4. *Para $z \in u_0$ temos $\{z\} = \displaystyle\bigcap_{u \in \mathcal{B},\ z \in u} u$.*

Podemos imaginar $\mathcal{B}$ como sendo uma rede de renda cujas partições compõem seu traçado.

Observemos que $\mathcal{P}$, como definido no capítulo 3, é uma rede e este fato é o que realiza a conexão entre as transformações de Markov e a teoria sobre dimensão Billingsley que estamos estudando neste capítulo. Além disso, se $u \in \mathcal{P}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u = P \in \mathcal{P}_n$ e $\sigma(P)$ é o conjunto dos átomos de $\mathcal{P}_{n+1}$ contidos em P.

Definição 4.1.2 (Função Posto). *Seja $u_0 \subset [0,1]$ e $\mathcal{B}$ uma rede de u_0. A função posto h de $v \in \mathcal{B}$ é definida por*

$$h(v) = card(\{u \in \mathcal{B}; v \subset u, v \neq u\})$$

onde $card(H)$ é a cardinalidade de um conjunto H.

Novamente tomando $\mathcal{P}$ como rede, temos que, se $P \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, então $h(P)$ é o número de átomos de $\mathcal{P}_i$, com $0 \leq i < n$, que contém P, ou seja, $h(P) = n$.

Definição 4.1.3 (Caminho de Rede). *Sejam $u_0 \subset [0,1]$ e $\mathcal{B}$ uma rede de u_0. Um caminho ρ de $\mathcal{B}$ é uma sequência $(u_j) = (u_j(\rho))$ (finita ou não) com $u_{j+1} \in \sigma(u_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$, tal que $h(u_j) = j$. Denotaremos o conjunto dos caminhos de $\mathcal{B}$ por $\rho\mathcal{B}$.*

Cada elemento de $\mathcal{B}$ pode ser identificado a uma sequência $(u_j)_{j=0}^{N} = (u_j(\rho))_{j=0}^{N}$, com $N \in \mathbb{N}_0 \cup \infty$, $u_{j+1} \in \sigma(u_j)$ e $u_{j+1} \neq u_j$, pela intersecção dos conjuntos da sequência. Este fato, justifica o nome "caminho". Observe também que, neste caso, temos $h(u_j) = j$. Além disso, podemos identificar u_0 com um subconjunto de $\rho\mathcal{B}$ definindo, para cada $z \in u_0$ e $j \in \mathbb{N}$, $u_j(z)$ como o único $u \in \mathcal{B}$ satisfazendo $z \in u$ e $h(u) = j$.

Importante: No caso de $\rho\mathcal{B}$ ser uma σ-álgebra, sendo μ uma medida sobre u_0, então μ é σ- aditiva sobre $\mathcal{B}$ e, pelo teorema de extensões de medidas, existe uma única extensão de μ sobre $\rho\mathcal{B}$. Por um abuso de notação, tambem denotaremos tal medida por μ. *Em todo o restante do capítulo estaremos nos referindo a medidas deste tipo quando tomarmos μ medida sobre $\rho\mathcal{B}$.*

Definição 4.1.4 (μ - θ - cobertura). *Dados $\theta > 0$, uma medida μ e um conjunto $E \in R^n$ não vazio, uma μ - θ - cobertura de E é uma coleção $(E_n)_{n \in 0}^{\infty}$ de conjuntos tais que $E \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < \theta$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

Definição 4.1.5. *Sejam $u_0 \subset [0,1]$, uma rede $\mathcal{B}$ de u_0, um caminho $\rho\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$, uma medida μ não-atômica sobre $\rho\mathcal{B}$ e $E \subset \rho\mathcal{B}$. Definimos*

$$\ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(E_n))^{\gamma}; (E_n)_{n=0}^{\infty} \text{ é } \mu \ - \ \theta \text{ - cobertura de } E : E_n \in \mathcal{B} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\} \text{ e}$$

$$\ell^{\gamma}_{\mu}(E) = \lim_{\theta \to 0} \ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E).$$

Lembrando das propriedades de medida (μ é uma medida), podemos afirmar que ℓ^{γ}_{μ} é uma medida exterior e uma medida com respeito à σ - álgebra de Borel e as demonstrações destes fatos são análogas às que fizemos no Capítulo 1 para a medida de Hausdorff colocando μ no lugar de $|\ |$.

Observe que $\ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E)$ é não crescente em relação à θ. De fato; seja $\theta_1 < \theta_2$. Fazendo

$$\widetilde{\ell^{\gamma}_{\mu,\theta_1}}(E) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(E_n))^{\gamma}; (E_n)_{n=0}^{\infty} \text{ é } \mu \ - \ \theta_1 \text{ - cobertura de } E : E_n \in \mathcal{B} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

$$\widetilde{\ell^{\gamma}_{\mu,\theta_2}}(E) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(E_n))^{\gamma}; (E_n)_{n=0}^{\infty} \text{ é } \mu \; - \; \theta_2 \text{ - cobertura de } E : E_n \in \mathcal{B} \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

segue que $\widetilde{\ell^{\gamma}_{\mu,\theta_1}}(E) \subset \widetilde{\ell^{\gamma}_{\mu,\theta_2}}(E)$. Tomando os ínfimos temos $\ell^{\gamma}_{\mu,\theta_1}(E) \geq \ell^{\gamma}_{\mu,\theta_2}(E)$. Isto nos leva a notar que

$$\ell^{\gamma}_{\mu}(E) = \sup_{\theta > 0} \ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E).$$

Além disso, se $0 < \theta < 1$ e $\ell^{d}_{\mu} < \infty$ e $\gamma > d$, sendo $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ uma μ - θ - cobertura de E com $B_n \in \mathcal{B} \; \forall n \in \mathbb{N}_0$, segue

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu(B_n))^{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(B_n))^{\gamma - d} (\mu(B_n))^{d} \leq \theta^{\gamma - d} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu(B_n))^{d}.$$

Tomando o ínfimo encontramos $\ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E) \leq \theta^{\gamma-d} \ell^{d}_{\mu,\theta}(E)$. Fazendo $\theta \to 0$ temos $\ell^{\gamma}_{\mu}(E) = 0$. Analogamente, fazendo $d < \gamma$ encontramos $\ell^{\gamma}_{\mu}(E) = \infty$. Assim,

$$\ell^{\gamma}_{\mu}(E) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \gamma < d \\ 0 & \text{se} \quad \gamma > d \end{cases}.$$

Este comentário nos mostra que está bem definida a seguinte:

Definição 4.1.6 (Dimensão de Billingsley). *Sejam $u_0 \subset [0,1]$, uma rede $\mathcal{B}$ de u_0, um caminho $\rho\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$, uma medida μ sobre $\rho\mathcal{B}$ e $E \subset \rho\mathcal{B}$. Denotaremos $d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E)$ a dimensão de Billingsley de E com respeito a $\mathcal{B}$ e a μ definida por*

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E) = \inf\{0 \leq \gamma \leq \infty; \ell^{\gamma}_{\mu}(E) = 0\} = \sup\{0 \leq \gamma \leq \infty; \ell^{\gamma}_{\mu}(E) = \infty\}.$$

A dimensão de Billingsley possui propriedades similares às da dimensão de Hausdorff. Estudaremos aqui algumas que precisaremos saber para demonstrar os lemas da próxima seção:

Propriedade 4.1.7 (Monotonicidade). *Sejam $u_0 \subset [0,1]$, uma rede $\mathcal{B}$ de u_0, um caminho $\rho\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$, uma medida não atômica μ sobre $\rho\mathcal{B}$, $E \subset \rho\mathcal{B}$ e $F \subset \rho\mathcal{B}$. Se $E \subset F$, então $d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E) \leq d^{\mathcal{B}}_{\mu}(F)$.*

Demonstração:

Dado $\theta > 0$, observemos que toda μ - θ - cobertura de F $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma μ - θ - cobertura de E. Disto segue que $\ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E) \leq \ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(F)$ para todo $\gamma > 0$. Fazendo $\theta \to 0$, encontramos $\ell^{\gamma}_{\mu}(E) \leq \ell^{\gamma}_{\mu}(f)$. Suponha que $d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E) > s > d^{\mathcal{B}}_{\mu}(F)$. Logo

$$\infty = \ell^{s}_{\mu}(E) \leq \ell^{s}_{\mu}(F) = 0$$

o que é um absurdo. Portanto $d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E) \leq d^{\mathcal{B}}_{\mu}(F)$.

□

Propriedade 4.1.8 (Estabilidade Enumerável). *Sejam $u_0 \subset [0,1]$, uma rede $\mathcal{B}$ de u_0, um caminho $\rho\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$ e uma medida não atômica μ sobre $\rho\mathcal{B}$. Se $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ é uma sequência enumerável de conjuntos em $\rho\mathcal{B}$, então*

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E_i)\}.$$

A demonstração desta propriedade é análoga à prova da propriedade (1.3.4) de dimensão de Hausdorff com $d^{\mathcal{B}}_{\mu}$ e $\ell^{s+\delta}_{\mu}$ respectivamente nos lugares de $\dim_H$ e $\mathcal{H}^{s+\delta}$.

Propriedade 4.1.9 (Conjuntos Enumeráveis). *Sejam $u_0 \subset [0,1]$, uma rede $\mathcal{B}$ de u_0, um caminho $\rho\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$, uma medida não atômica μ sobre $\rho\mathcal{B}$ e $E \subset \rho\mathcal{B}$. Se E é um conjunto enumerável, então $d^{\mathcal{B}}_{\mu}(E) = 0$.*

Demonstração:

Se E é um conjunto enumerável, podemos escrevê-lo como $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Logo, dado $\theta > 0$, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma μ - θ - cobertura de E. E assim, para todo $\gamma > 0$ temos

$$\ell^{\gamma}_{\mu,\theta}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(e_i) = 0.$$

Fazendo $\theta \to 0$, encontramos $\ell^{\gamma}_{\mu}(E) = 0$ para todo $\gamma > 0$. Portanto, $d^{\mathcal{B}}_{\mu} = 0$.

□

4.2 Lemas Importantes Sobre a Dimensão de Billingsley

Nesta seção daremos continuação aos estudos dos lemas que precisaremos para demonstrar o resutado de Nair e Abercrombie:

Lema 4.2.1. *Se $\mathcal{P}_0$ é finito, existe $C > 0$ tal que, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e qualquer $x \in [0,1]$, o conjunto $B_\delta(x) \cap [0,1]$ pode ser coberto (módulo 0) por dois elementos P, Q de $\mathcal{P}$ satisfazendo $\max(\lambda(P), \lambda(Q)) < C\delta$.*

Demonstração:

Tomemos $\delta < \min_{P \in \mathcal{P}_0} \lambda(P)$. Neste caso, a bola $B_\delta(x)$ possui, no máximo, um ponto de $\mathcal{U}_0$. Provaremos aqui que

$$C = \inf \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, P_{n-1}))}$$

que tem sua existência garantida pelo Lema (3.3.12). Dividiremos esta demonstração em três casos:

<u>1º caso</u>: Suponhamos que

$$B_\delta(x) \cap [(0,1) \setminus \mathcal{U}_0] = \{y\} \neq \emptyset.$$

Subdividiremos o estudo deste caso à análise do que ocorre nos seguintes intervalos:

$$\text{A) } [x - \delta, y],$$
$$\text{B) } [y, x + \delta].$$

Para estudar A) tomemos $h \in \mathbb{N}$ (devido ao Lema(3.3.9)) tal que $[x-\delta, y] \cap \{[0,1] \setminus \mathcal{U}_h\} \supset \{y, y_1\}$, com $y \neq y_1$, e $[x-\delta, y] \cap \{[0,1] \setminus \mathcal{U}_{h-1}\} = \{y\}$. Para a parte B) consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que $[y, x+\delta] \cap \{[0,1] \setminus \mathcal{U}_k\} \supset \{y, y_2\}$, com $y \neq y_2$, e $[y, x+\delta] \cap \{[0,1] \setminus \mathcal{U}_{k-1}\} = \{y\}$. Podemos assim considerar

$$P^* = (y_1, y) = P(j_0, j_1, \ldots, j_h) \in \mathcal{P}_h,$$
$$P = P(j_0, j_1, \ldots, j_{h-1}) \in \mathcal{P}_{h-1},$$
$$Q^* = (y, y_2) = P(i_0, i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_k \quad \text{e}$$
$$Q = P(i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}) \in \mathcal{P}_{k-1}.$$

Do Lema (3.3.12) segue que existe $C > 0$ tal que $\lambda(P^*)/\lambda(P) \geq C$ e $\lambda(Q^*)/\lambda(Q) \geq C$. Assim,

$$P^* \cup Q^* \subset \{B_\delta(x) \cap [0,1]\} \subset P \cup Q$$

sendo

$$\lambda(P) \leq C\lambda(P^*) < C\delta \quad \text{e} \quad \lambda(Q) \leq C\lambda(Q^*) < C\delta.$$

2º caso: Suponhamos que

$$B_\delta(x) \cap \{0,1\} = \{y\} \neq \emptyset.$$

Neste caso teremos $P = Q$ procedendo como em 1º-A) quando $y = 0$ e como em 1º-B) quando $y = 1$.

3º caso: Suponhamos que

$$B_\delta(x) \cap \{[0,1]\backslash \mathcal{U}_0\} = \emptyset.$$

Tome $h \in \mathbb{N}$ tal que $I = B_\delta(x) \cap \{[0,1]\backslash \mathcal{U}_h\} \neq \emptyset$ e $B_\delta(x) \cap \{[0,1]\backslash \mathcal{U}_{h-1}\} = \emptyset$. Se I for unitário, digamos $I = \{y\}$, podemos proceder como no primeiro caso. Se I possuir mais de um elemento, isto implica que existem $P^* = P(j_0, j_1, \ldots, j_h) \in \mathcal{P}_h$ e $P = P(j_0, j_1, \ldots, j_{h-1}) \in \mathcal{P}_{h-1}$ tais que

$$P^* \subset \{B_\delta(x) \cap [0,1]\} \subset P$$

Podemos utilizar o Lema (3.3.12) novamente para encontrar

$$\lambda(P) \leq C\lambda(P^*) < C\delta.$$

Assim, basta tomar $P = Q$ e o resultado segue.

□

Este lema nos diz que qualquer bola com raio menor que o tamanho do menor átomo de $\mathcal{P}_0$ pode ser coberto por dois átomos de $\mathcal{P}$ de tamanhos menores que o raio da bola vezes o ínfimo da distorção e precisaremos deste fato para provar o seguinte:

Lema 4.2.2. *Se $\mathcal{P}_0$ é finito, então, para cada subconjunto de Borel E de $[0,1]$ tem-se $d_\lambda^{\mathcal{P}}(E) = \dim_H E$.*

Demonstração:

Como, pelo lema (3.3.7), O conjunto $[0,1]\backslash \mathcal{U}$ é enumerável, as propriedades (4.1.8) e (4.1.9) nos dizem que, para alcançar o resultado desejado, basta provar para o caso

$$E \cap \mathcal{U} = E'.$$

Sejam $\delta > 0$ e λ a medida de Lebesgue unidimensional. Denominaremos

$$\tilde{\mathcal{H}}_\delta^\gamma(E') = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^\gamma ; (U_n)_{n=1}^{\infty} \text{ é } \delta \text{ - cobertura de } E' \right\},$$

$$\tilde{\ell}^{\gamma}_{\delta,\lambda}(E') = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(U_n))^{\gamma}; (U_n)_{n=1}^{\infty} \text{ é } \lambda \ - \ \delta \text{ - cobertura de } E' : U_n \in \mathcal{P} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Por um lado, tome $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ uma λ - δ - cobertura aberta de E'. Lembrando que os abertos de $[0,1]$ são do tipo $(a,b) \cap [0,1]$ ou união enumerável destes, podemos encontrar uma família $(I_m)_{m=1}^{\infty}$ de intervalos sendo

$$|I_m| = \lambda(I_m) < \delta, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(U_n))^{\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda(I_m))^{\gamma}.$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(U_n))^{\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda(I_m))^{\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty} |I_m|^{\gamma} \in \tilde{\mathcal{H}}^{\gamma}_{\delta}(E').$$

Daí, concluímos que para todo $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(U_n))^{\gamma} \in \tilde{\ell}^{\gamma}_{\delta,\lambda}(E')$ existe $\sum_{m=1}^{\infty} |I_m|^{\gamma} \in \tilde{\mathcal{H}}^{\gamma}_{\delta}(E')$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(U_n))^{\gamma} \leq \sum_{m=1}^{\infty} |I_m|^{\gamma}$. Desta forma temos

$$\mathcal{H}^{\gamma}_{\delta}(E') = \inf \tilde{\mathcal{H}}^{\gamma}_{\delta}(E') \leq \inf \tilde{\ell}^{\gamma}_{\lambda,\delta}(E') = \ell^{\gamma}_{\lambda,\delta}(E').$$

Fazendo $\delta \to 0$ encontramos $\mathcal{H}^{\gamma}(E') \leq \ell^{\gamma}_{\lambda}(E')$ o que implica $\dim_H E' \leq d^{\mathcal{P}}_{\lambda}(E')$.

Por outro lado, tomemos $\delta < \max_{P \in \mathcal{P}_0} \lambda(P)$ e $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ uma δ - cobertura de E' com $U_n \in \mathcal{B}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada n, existe uma bola B^n_{δ} de diâmetro menor do que δ tal que $U_n \subset B^n_{\delta}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^{\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} |B^n_{\delta}|^{\gamma}$. Do lema (4.2.1), segue que cada B^n_{δ} pode ser coberta (módulo 0) por um conjunto do tipo $(P_n \cup Q_n)$ em que existe $C > 0$ tal que $\lambda(P_n) < C\delta$ e $\lambda(Q_n) < C\delta$ e portanto $(P_n \cup Q_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma λ - $2C\delta$ - cobertura de E'. Disto temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^{\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} |B^n_{\delta}|^{\gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(B^n_{\delta}))^{\gamma} \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda(P_n \cup Q_n))^{\gamma}.$$

Assim, para todo $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^{\gamma} \in \tilde{\mathcal{H}}^{\gamma}_{\delta}(E')$ existe $\sum (\lambda(P_n \cup Q_n))^{\gamma} \in \tilde{\ell}^{\gamma}_{\lambda,2C\delta}$ tal que $\sum (\lambda(P_n \cup Q_n))^{\gamma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^{\gamma}$. Isto implica que

$$\mathcal{H}^{\gamma}_{\delta}(E') = \inf \tilde{\mathcal{H}}^{\gamma}_{\delta}(E') \geq \inf \tilde{\ell}^{\gamma}_{\lambda,2C\delta}(E') = \ell^{\gamma}_{\lambda,2C\delta}(E').$$

Deste fato segue $\mathcal{H}^{\gamma}(E') \geq \ell^{\gamma}_{\lambda}(E')$ e logo $\dim_H E' \geq d^{\gamma}_{\lambda}(E')$.

Portanto $\dim_H E' = d^{\gamma}_{\lambda}(E')$.

$\square$

O resultado acima nos diz que, no caso em que a partição inicial da rede é finita, a dimensão de Hausdorff coincide com a dimensão de Billingsley com respeito à medida de Lebesgue. Isto nos dá a ponte entre as duas dimensões que precisamos para demonstrar o caso finito do teorema de Nair e Abercrombie. Além disto, na prova utilizaremos fortemente os três lemas que mostraremos a seguir. Antes, daremos a seguinte definição:

Definição 4.2.3. *Sendo $\mathcal{B}$ uma rede enumerável sobre $[0,1]$, para cada $x \in [0,1]$, definimos $u_n(x)$ como o único elemento u de $\mathcal{B}$ tal que $x \in u$ e $h(u) = n$.*

O elemento $u_n(x)$ está bem definido pois, se $x \in u_1 \cap u_2$ e $u_1 \neq u_2$, então $u_1 \cap u_2 \neq \emptyset$ o que implica $u_1 \subset u_2$ ou $u_2 \subset u_1$. Se, sem perda de generalidade, $u_1 \subset u_2$, temos $h(u_1) \geq h(u_2) + 1 \neq h(u_2)$ e portanto a definição é boa.

Para demonstrar o próximo lema, precisaremos adotar as seguintes convenções: para $\xi > 0$ e $\eta < 1$

$$\begin{cases} \dfrac{\log \xi}{\log 0} = \dfrac{\log 1}{\log \eta} = \dfrac{\log 1}{\log 0} = 0 \\ \dfrac{\log 0}{\log \eta} = \dfrac{\log \xi}{\log 1} = \dfrac{\log 0}{\log 1} = \infty \\ \dfrac{\log 0}{\log 0} = \dfrac{\log 1}{\log 1} = 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Lema 4.2.4. *Sejam μ_1, μ_2 probabilidades não atômicas de Borel sobre $[0,1]$ e seja ν uma rede enumerável de Borel sobre $[0,1]$. Suponha $E \subset [0,1]$ satisfazendo*

$$E \subset \left\{ x \in [0,1] : \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log(\mu_2(u_n(x)))}{\log(\mu_1(u_n(x)))} \geq \delta \right\}. \tag{4.2}$$

Então $d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E) \geq \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E)$.

Demonstração:

Iremos dividir esta demonstração em dois casos.

<u>1º caso</u> A princípio assumiremos $\mu_1(u_n(x)) > 0$ para todo $x \in E$. Para demonstrar este caso basta provar que

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E) < \xi \Rightarrow d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E) \leq \xi/\delta.$$

De fato, supondo por absurdo $d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E) < \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E) < \epsilon < \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E)$ o que, pela hipótese, implica

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E) \leq \epsilon/\delta < (\delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E))/\delta = d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E)$$

o que é uma contradição.

Tome $x \in E$. Logo, existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N(x)$ tem-se $\mu_2(u_n(x)) \leq (\mu_1(u_n(x)))^\delta$. Defina

$$E_\rho = \{x \in E; \mu_1(u_n(x)) \geq \rho \text{ ou } \mu_2(u_n(x)) \leq (\mu_1(u_n(x)))^\delta,\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

onde $\rho = 1/N$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Observe que E_ρ cresce quando ρ decresce, ou seja, $\rho_1 < \rho_2$ implica $E_{\rho_2} \subset E_{\rho_1}$. Além disso, $E_\rho \uparrow E$ quando $\rho \downarrow 0$ pois, se $x \in E$, temos que se $n \leq N(x)$ então $u_n(x) \supset u_{N(x)}(x)$ o que implica $\mu_1(u_n(x)) \geq \mu_1(u_{N(x)}(x))$ e, tomando $\rho = 1/N_0$ tal que $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \geq N(x)$ e $\mu_1(u_{N(x)}(x)) \geq 1/N_0$, obtemos $x \in E_\rho$.

Como, pela propriedade (4.1.8),

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E) = d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}\left(\bigcup_{\rho>0} E_\rho\right) = \sup_{\rho>0} d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E_\rho),$$

basta provar que $d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E_\rho) \leq \xi/\delta$ para todo ρ. Tome $0 < \rho_1 < \rho$ e $\epsilon_1 > 0$. Como $d_{\mu_1}(E_\rho) \leq d_{\mu_1}(E) < \xi$, temos que existe $(P_i)_{i=1}^\infty$ uma μ_1 - ρ_1 - cobertura de E_ρ tal que $\sum_{i=1}^\infty \mu_1(P_i)^\xi < \epsilon_1$. Podemos supor, para cada i, $P_i = u_n(x_i)$ para algum x_i de E_ρ. Disto, e do caso que $\mu_1(P_i) \leq \rho_1 < \rho$, segue $\mu_2(P_i) \leq (\mu_1(P_i))^\delta \leq \rho_1$, o que implica $(P_i)_{i=1}^\infty$ ser uma μ_2 - ${\rho_1}^\delta$ - cobertura de E_ρ e

$$\sum_{i=1}^\infty (\mu_2(P_i))^{\xi/\delta} \leq \sum_{i=1}^\infty (\mu_1(P_i))^\xi < \epsilon_1.$$

Desta forma obtemos $\ell^{\xi/\delta}_{\mu_2,\rho_1^\delta}(E_\rho) \leq \ell^\xi_{\mu_1,\rho_1} < \epsilon_1$. Tomando $\rho_1 \to 0$ e $\epsilon_1 \to 0$ temos $\ell^{\xi/\delta}_{\mu_2}(E_\rho) \leq \ell^\xi_{\mu_1} = 0$. Logo, $d_{\mu_2}(E_\rho) \leq \xi/\delta$.

<u>2º caso</u> Agora, suponha existir $x \in E$ tal que $\mu_1(u_n(x)) = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Defina, para $\mu = \mu_1$ ou $\mu = \mu_2$,

$$E_\mu = \{x \in E; \exists n \in \mathbb{N} : \mu(u_n(x)) = 0\}.$$

e tome uma μ - θ - cobetura $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ de E_μ tal que $P_i = u_n(x_i)$ para algum $x_i \in E_\mu$. Temos que

$$\ell^s_{\mu,\delta}(E_\mu) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\mu(P_i))^s = 0$$

para todo $\theta > 0$ e para todo $s > 0$, o que implica $\ell^s_\mu(E_\mu) = 0$ para todo $s > 0$. Assim, $d^{\mathcal{B}}_\mu(E_\mu) = 0$. Disto e da propriedade (4.1.8) segue que

$$d^{\mathcal{B}}_\mu(E) = d^{\mathcal{B}}_\mu(E_\mu \cup (E\backslash E_\mu)) = \sup\{d^{\mathcal{B}}_\mu(E_\mu), d^{\mathcal{B}}_\mu(E\backslash E_\mu)\} = d^{\mathcal{B}}_\mu(E\backslash E_\mu).$$

Se x pertence ao conjunto à direita da equação (4.2) e $\mu_1(u_n(x)) = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então, pelas convenções em (4.1), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_2(u_m(x)) = 0$ e daí $E\backslash E_{\mu_2} \subset E\backslash E_{\mu_1}$ o que implica $d^{\mathcal{B}}_\mu(E\backslash E_{\mu_2}) \leq d_\mu(E\backslash E_{\mu_1})$ para todo μ. Disto e do primeiro caso temos

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E\backslash E_{\mu_1}) \geq \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E\backslash E_{\mu_1}) \geq \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E\backslash E_{\mu_2}).$$

Logo,

$$d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E) = d^{\mathcal{B}}_{\mu_1}(E\backslash E_{\mu_1}) \geq \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E\backslash E_{\mu_2}) = \delta d^{\mathcal{B}}_{\mu_2}(E).$$

$\square$

Este lema nos fornece uma condição para podermos comparar a dimensão de Billingsley entre duas medidas diferentes, de fato, podemos estimar a razão entre estas dimensões.

Lema 4.2.5. *Suponha que a função* $\mu' : \mathcal{P}\backslash\{[0,1]\} \to [0,1]$ *satisfaz* $\displaystyle\sum_{v\in\sigma(u)} \mu'(v) = 1$ *para todo* $u \in \mathcal{P}$. *Então existe uma única medida de probabilidade* μ *sobre* $[0,1]$ *satisfazendo* $\mu(u)\mu'(v) = \mu(v)$ *para todos* $u, v \in \mathcal{P}$ *tal que* $v \in \sigma(u)$.

Demonstração:

Primeiramente, observe que $\mathcal{P}$ é um semi-anel (ver Apêndice A). Definamos, lembrando que $u = P(j_0, \ldots, j_n)$ para alguns $j_0, \ldots, j_n \in \Delta$, a medida $\nu : \mathcal{P} \to [0,1]$ sobre o semi-anel $\mathcal{P}$ da seguinte forma:

$$\nu(P(j_0,\ldots,j_n)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad u = \emptyset \\ \mu'(P_0) & \text{se} \quad n = 0 \\ \displaystyle\prod_{k\leq n} \mu'(P(j_0,\ldots,j_k)) & \text{se} \quad n > 0 \end{cases}$$

A medida ν está bem definida pois:

i) $\nu(\emptyset) = 0$,

ii) Se $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma coleção disjunta de conjuntos em $\mathcal{P}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} u_i \in \mathcal{P}$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} u_i = P_m \in \mathcal{P}_m.$$

Sabendo que

$$\sigma(P(j_0, \ldots, j_n)) = \{P(j_0, \ldots, j_n, j); j \in \Delta\},$$

da definição da ν e da hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \nu(P(j_0, \ldots, j_n)) &= \prod_{k \le n} \mu'(P(j_0, \ldots, j_k)) \\ &= \left[\prod_{k \le n} \mu'(P(j_0, \ldots, j_k))\right] . \sum_{j \in \Delta} \mu'(P(j_0, \ldots, j_n, j)) \\ &= \sum_{j \in \Delta} \left[\prod_{k \le n} \mu'(P(j_0, \ldots, j_k)) . \mu'(P(j_0, \ldots, j_n, j))\right] \\ &= \sum_{j \in \Delta} \nu(P(j_0, \ldots, j_n, j)) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{P}_{n+1} \cap P(j_0, \ldots, j_n)} \nu(P) \end{aligned} \tag{4.3}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Denotando

$$\begin{aligned} K_m &= \{P \in \mathcal{P}_{m+1} \cap P_m \cap \{u_i\}_{i=1}^{\infty}\}, \\ \tilde{K}_m &= \{P \in (\mathcal{P}_{m+1} \cap P_m) \backslash K_n\}, \\ K_{m+n} &= \{P \in \mathcal{P}_{m+n+1} \cap P_m \cap \{u_i\}_{i=1}^{\infty}\}, \\ \tilde{K}_{m+n} &= \left\{P \in (\mathcal{P}_{m+n+1} \cap \tilde{K}_{m+n-1}) \backslash K_{m+n}\right\} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução obtemos, de (4.3),

$$\nu(P_m) = \sum_{P \in K_m} \nu(P) \; + \sum_{P \in K_{m+1}} \nu(P) \; + \cdots + \sum_{P \in K_{m+n}} \nu(P) \; + \sum_{P \in \tilde{K}_{m+n}} \nu(P)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} u_i\right) &= \nu(P_m) \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu(P_m) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{P\in K_m} \nu(P) + \sum_{P\in K_{m+1}} \nu(P) + \dots + \sum_{P\in K_{m+n}} \nu(P) + \sum_{P\in \tilde{K}_{m+n}} \nu(P)\right] \\
&= \sum_{P\in K_m} \nu(P) + \sum_{P\in K_{m+1}} \nu(P) + \dots + \sum_{P\in K_{m+n}} \nu(P) + \dots \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\left(P \in \mathcal{P}_{m+n} \cap P_m \cap \{u_i\}_{i=1}^{\infty}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(u_i).
\end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de extensão de medidas (ver Apêndice A) existe uma única medida de probabilidade μ sobre $[0,1]$ que estende ν. Além disso, se $u = P(j_0,\dots,j_n) \in \mathcal{P}$ e $v = P(j_0,\dots,j_n,j_{n+1}) \in \sigma(u)$, então

$$\begin{aligned}
\mu(u)\mu'(v) &= \mu(P(j_0,\dots,j_n))\mu'(P(j_0,\dots,j_n,j_{n+1})) \\
&= \left[\prod_{k\le n} \mu'(j_0,\dots,j_k)\right].\mu'(P(j_0,\dots,j_n,j_{n+1})) \\
&= \prod_{k\le n+1} \mu'(j_0,\dots,j_k) \\
&= \mu(v).
\end{aligned}$$

Basta agora mostrar a unicidade de μ. Suponha η probabilidade sobre $[0,1]$ tal que $\eta(u)\mu'(v) = \eta(v)$ para todos $u, v \in \mathcal{P}$ tal que $v \in \sigma(u)$. Desta forma

$$\eta(u) = \eta(u).\sum_{v\in\sigma(u)} \mu'(v) = \sum_{v\in\sigma(u)} \eta(u)\mu'(v) = \sum_{v\in\sigma(u)} \eta(v).$$

e, analogamente, $\mu(u) = \sum_{v\in\sigma(u)} \mu(v)$. Disto e da hipótese temos

$$\sum_{v\in\sigma(u)} \left(\frac{\eta(v)}{\eta(u)}\right) = \sum_{v\in\sigma(u)} \left(\frac{\mu(v)}{\mu(u)}\right) \Rightarrow \frac{1}{\eta(u)} = \frac{1}{\mu(u)} \Rightarrow \mu(u) = \eta(u).$$

Portanto μ é única.

$\square$

Lema 4.2.6. *Seja μ uma medida de probabilidade Boreliana não atômica sobre $[0,1]$ e seja $\mathcal{B}$ uma rede Boreliana enumerável sobre $[0,1]$. Se $E \subset [0,1]$, então $\mu(E) > 0$ implica $d_\mu^{\mathcal{B}}(E) = 1$.*

Demonstração:

Sejam $\theta > 0$ e $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ uma μ - θ - cobertura de E com : $B_n \in \mathcal{B}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\mu(E) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Isto implica $\ell_{\mu,\theta}^1(E) \geq \mu(E) > 0$. Fazendo $\theta \to 0$ temos $\ell_\mu^1(E) > 0$. Assim, $d_\mu^{\mathcal{B}}(E) \geq 1$.

Por outro lado, como μ é não atômica, podemos tomar uma cobertura por intervalos $(I_i)_{i=1}^n$ de $[0,1]$ de tal forma que $\mu(I_i) = n^{-1}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Disto segue que

$$\ell_{\mu,n^{-1}}^{\gamma}([0,1]) \leq \sum_{i=1}^{n} (\mu(I_i))^{\gamma} = n^{1-\gamma}$$

para todo $\gamma \geq 0$. Supondo $\gamma > 1$ temos, fazendo $n \to \infty$, $\ell_\mu^\gamma(E) \leq \ell_\mu^\gamma([0,1]) \leq 0$. Assim, $\ell_\mu^\gamma(E) = 0$ para todo $\gamma > 1$ o que implica $d_\mu^{\mathcal{B}}(E) \leq 1$.

Portanto $d_\mu^{\mathcal{B}}(E) = 1$.

□

Capítulo 5

O resultado de Abercrombie e Nair

Neste capítulo iremos falar sobre o teorema principal do artigo de Abercrombie e Nair [1]. Tal teorema calcula a dimensão de Hausdorff de conjuntos em que cada um destes é definido observando a órbita de um ponto por uma transformação de Markov. Portanto, definamos Órbita.

Definição 5.0.7 (Órbita de um ponto). *Diremos que a órbita de um ponto $x \in D$ por uma transformação $T : D \to D$ é o conjunto*

$$\Omega_T(x) = \{T^n(x); n \in \mathbb{N}_0\}$$

Agora, podemos apresentar os conjuntos:

Definição 5.0.8. *Se $\tau = (x_r)_{r=0}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tais que $0 \leq x_r \leq 1$, $T : [0,1] \to [0,1]$ e $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, é uma função positiva, definimos*

$$E_T(\tau, f) = \{x \in [0,1]; |\log d(x_r, \overline{\Omega_T(x)})| << f(r)\}$$

Enfim, o resultado é o seguinte:

Teorema 5.0.9 (Abercrombie, Nair). *Sejam $\tau = (x_r)_{r=0}^{\infty}$ uma sequência de números reais em $[0,1]$, $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ uma função positiva tal que $f(r) >> r^2$ e $T : [0,1] \to [0,1]$ uma transformação de Markov com uma partição $\mathcal{P}_0$ definida sobre um conjunto Δ. Então* $\dim_H E_T(\tau, f) = 1$.

Observemos que, se $x \in E_T(\tau, f)$, então existe $k > 0$ constante tal que

$$|\log d(x_r, \overline{\Omega(x)})| \leq kf(r)$$

o que implica

$$-kf(r) \leq \log d(x_r, \overline{\Omega(x)}) \leq kf(r)$$

e, exponenciando,

$$e^{-kf(r)} \leq d(x_r, \overline{\Omega(x)}) \leq e^{kf(r)}$$

Como $f(r) >> r^2$, podemos reescrever

$$e^{-kr^2} \leq d(x_r, \overline{\Omega(x)}) \leq e^{kr^2}.$$

Como $d(x_r, \overline{\Omega(x)}) < 1$, a desigualdade do lado direito não nos acrescenta nenhuma informação. Contudo, a desigualdade da esquerda nos diz que os pontos de $E_T(\tau, f)$ são aqueles que estão assintoticamente afastados da órbita de x e veremos que cada um destes conjuntos, variando τ e T, possui dimensão total.

Na primeira seção, estudaremos os últimos três lemas que, juntamente aos lemas dos Capítulos 3 e 4, nos permitirão a demonstração do teorema principal. Na segunda seção, demonstraremos o teorema para o caso em que a partição $\mathcal{P}_0$ da transformação de Markov considerada é finita. O caso infinito será provado na terceira seção. Por fim, na quarta seção, mostraremos algumas consequências do teorema, entre eles um sobre números Diofantinos e outro sobre números não normais.

5.1 Um Pouco Sobre Teoria da Informação

Antes da demonstração do resultado de Abercrombie e Nair, vamos estudar, de forma objetiva à prova, um pouco sobre teoria da informação. Esta teoria trata sequências finitas como palavras e suas componentes como letras cujo alfabeto Δ é um conjunto enumerável ou finito de números, que no nosso caso serão naturais, ou $\Delta^j = \{(w_0, w_1, \ldots, w_j); w_i \in \Delta\ \forall i = 1, \ldots, j\}$.

Definição 5.1.1 (Palavra Boa). *Dizemos que uma palavra* $W = (w_0, \ldots, w_n) \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta^j$ *é boa quando não existe inteiro positivo* m *tal que* $m < (n+1)/2$ *e*

$$w_0 = w_m, \ldots, w_{n-m} = w_n.$$

Esta definição nos diz que uma palavra é boa quando não é formada pela repetição das m primeiras letras em sequência com o início das repetições ocorrendo antes da metade da palavra, por exemplo

$$(w_0, w_1, w_2, w_3, w_0, w_1, w_2, w_3, w_0, w_1)$$

não é uma palavra boa enquanto que $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$, tal que $w_i \neq w_j$ para todo $i \neq j$, é uma palavra boa.

Definição 5.1.2 (palavra prática). *Uma palavra* $W = (w_0, \ldots, w_n) \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta^j$ *é dita prática quando* $W = (w_0, \ldots, w_{n-1}, w'_n)$ *é boa para cada* $w'_n \in \Delta \backslash \{w_n\}$.

A definição acima nos diz que uma palavra será prática se pudermos trocar sua última letra por qualquer outra para torná-la boa. Exemplos: Tomando o alfabeto $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $W_1 = (1, 2, 1, 2, 1, 2)$ não é boa embora seja prática, $W_2 = (1, 2, 1, 2, 1, 5)$ é boa mas não é prática, $W_3 = (1, 2, 3, 4, 5)$ é boa e prática.

Poderíamos aqui nos perguntar se existem palavras que não são boas nem práticas. Descobriremos, através do lema a seguir, que a resposta para esta pergunta é negativa.

Lema 5.1.3. *Seja* $W = (w_0, \ldots, w_n)$ *uma palavra em* Δ^{n+1}. *Se existe um inteiro positivo* m *menor que* $(n+1)/2$ *tal que*

$$w_0 = w_m, w_1 = w_{m+1}, \ldots, w_{n-m-1} = w_{n-1}, \text{ mas } w_{n-m} \neq w_n, \tag{5.1}$$

então não existe inteiro positivo m' *menor que* $1 + n/2$ *tal que*

$$w_0 = w_{m'}, w_1 = w_{m'+1}, \ldots, w_{n-m'} = w_n, \tag{5.2}$$

ou seja, W *é boa.*

Demonstração:

Suponha existir tal m'.

1º caso: Se $m' < m$, podemos tomar m' o menor inteiro positivo que satisfaz as condições (5.2). Desta forma, teremos que m' divide m pois, se $m = qm' + r$ para algum $q \in \mathbb{N}$ e algum $0 < r < m'$, então, da condição $m < (1+n)/2$, temos

$$n > 2m - 1 = 2qm' + 2r - 1 = (q+1)m' + r - 1 + (q-1)m' + r \geq (q+1)m' + r - 1.$$

Daí, de (5.1) segue que

$$w_{(q+1)m'+r-1} = w_{m'-1}$$

e de (5.2),

$$w_{(q+1)m'+r-1} = w_{r-1},$$

o que implica

$$w_{m'-1} = w_{r-1}.$$

Aplicando (5.2) obtemos

$$w_0 = w_{m'} = w_r, w_1 = w_{r+1}, \ldots, w_{m'-1} = w_{m'+r-1}$$

e além disso, como $n - m - qm' < n - m$, de (5.1) temos

$$w_{n-m-qm'} = w_{n-qm'}$$

e, como $n - qm' < n - m'$, de (5.2) segue,

$$w_{n-qm'} = w_n,$$

isto implica

$$w_{n-r} = w_n.$$

Assim, $r < m'$ e satisfaz (5.2), o que contradiz a minimalidade de m'. Podemos então escrever $m = qm'$. Disto e do fato que $n - m'q \geq n - m'$ segue, usando (5.2),

$$w_n \neq w_{n-m} = w_{n-m'q} = w_n,$$

o que é uma contradição.

2º caso: Se $m' > m$, tomemos m o menor inteiro positivo que satisfaz (5.1). Por cálculos similares aos feitos no primeiro caso podemos concluir que m divide m', ou seja, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m' = qm$. Também similarmente, para qualquer inteiro positivo m_1 menor que $1 + n/2$ que satisfaça (5.1), m divide m_1. Assim, m divide $m_1 - m'$, digamos $m_1 - m' = \tilde{q}m$. Se $\tilde{q}m > 0$, dos fatos que $n - m > n - m'$ e $m' + \tilde{q}m = m_1 > 0$, segue de (5.1) que

$$w_n = w_{n-m'} = w_{n-m'-\tilde{q}m} = w_{n-m_1} \neq w_n.$$

Se $\tilde{q}m < 0$, temos $m' - m_1 = -\tilde{q}m > 0$ e, como $n - m > n - m_1$, o resultado segue analogamente. Isso nos leva novamente a uma contradição.

□

Observe que do lema anterior segue naturalmente o seguinte corolário:

"Se $W \in \Delta^{n+1}$ não é prática, então W é boa".

Ganhamos também, pela contrapositiva que toda palavra que não é boa é prática.

Lema 5.1.4. *Seja $W = (w_0, \dots, w_n) \in \Delta^{n+1}$. Então $W' = (w_0, \dots, w_{n-1}, w'_n)$ é boa para todo $w'_n \in \Delta \backslash \{w_n\}$ ou $W_1 = (w_0, ..., w_n, w_{n+1})$ é boa para todo $w_{n+1} \in \Delta$.*

Demonstração:

Primeiramente considere W tal que existe $m < (1 + n)/2$ com

$$w_0 = w_m, \dots, w_{n-m-1} = w_{n-1}.$$

Se $w_{n-m} = w_n$, W não é boa. Daí, pelo Lema (5.1.3), temos que W é prática, o que implica $W' = (w_0, \dots, w_{n-1}, w'_n)$ é boa para todo $w'_n \in \Delta \backslash \{w_n\}$. Por outro lado, se $w_{n-m} \neq w_n$ (W não é prática), temos que $W_1 = (w_0, ..., w_n, w_{n+1})$ é boa para todo $w_{n+1} \in \Delta$ pois, do contrário teríamos $m'' < (n + 1)/2 < 1 + n/2$ tal que

$$w_0 = w_{m''}, w_1 = w_{m''+1}, \dots, w_{n-m''} = w_n, w_{n-m''+1} = w_{n+1},$$

o que implica que W não é boa e isso contradiz o Lema (5.1.3).

Agora, considere W tal que não exista $\tilde{m} < (n + 1)/2$ e

$$w_0 = w_{\tilde{m}}, \dots, w_{n-\tilde{m}-1} = w_{n-1}.$$

Isto claramente implica W' boa pois, do contrário, tal $\tilde{m}$ existiria.

$\square$

Antes de enunciar o próximo lema, adotaremos as seguintes notações:

1) Para $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\epsilon > 0$, $e_f(r) := \exp(-\epsilon^{-1} f(r))$,

2) Se $A = (a_0, \ldots, a_p)$ e $B = (b_0, \ldots, b_q)$, $A \int B$ significa que $a_p \neq b_q$ e apenas uma das condições abaixo ocorre:

$$a_{p-q} = b_0, \ldots, a_{p-1} = b_{q-1}$$

ou

$$a_0 = b_{q-p}, \ldots, a_{p-1} = b_{q-1}$$

conforme $p \geq q$ ou $q \geq p$.

Por exemplo, se $A = (1, 3, 5, 7, 2, 3, 5, 4, 9)$, $B = (2, 3, 5, 4, 5)$ e $C = (7, 2, 3, 5, 4, 9)$, temos que $A \int B$, $C \int B$, mas não ocorre $A \int C$ pois as últimas letras destas palavras são iguais. A notação $A \int B$ significa que se trocarmos a última letra da menor palavra pela última letra da maior, o resultado estará completamente contido no final da palavra maior.

O lema que demonstraremos a seguir é essencial à demonstração do caso finito do teorema de Abercrombie e Nair. Contudo possui uma prova extremamente técnica e longa. Portanto, o leitor que não estiver interessado em estudá-la por alguma outra razão, não encontrará dificuldades na compreensão do teorema mesmo que assuma tal lema como verdadeiro.

Lema 5.1.5. *Sejam $(x_r)_{r=0}^{\infty}$ uma sequência de números em $(0, 1)$, Δ finito e $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ tal que $f(r) >> r^2$. Para ϵ escolhido suficientemente pequeno, existem inteiros N_r e N'_r dependendo de ϵ e palavras*

$$W_r = (w_{r,0}, w_{r,1}, \ldots, w_{r,N_r}) \quad e \quad W'_r = (w'_{r,0}, w'_{r,1}, \ldots, w'_{r,N'_r})$$

com $r \in \mathbb{N}_0$ tais que valem as seguintes condições:

I) *para cada* $r \in \mathbb{N}_0$ *temos*

$$B_{e_{f(r)}}(x_r) \subset \overline{P(w_{r,0}, w_{r,1}, \ldots, w_{r,N_r}) \cup P(w'_{r,0}, w'_{r,1}, \ldots, w'_{r,N_r})},$$

II) *todas as palavras* W_r *e* W'_r *são práticas,*

III) *se* A *e* B *são palavras em* $(W_r)_{r=0}^{\infty}$ *ou* $(W'_r)_{r=0}^{\infty}$*, então não ocorre* $A \int B$*,*

IV)

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{N_r} + \frac{1}{N'_r}\right) < \infty$$

e a soma da esquerda tende a zero com ϵ*.*

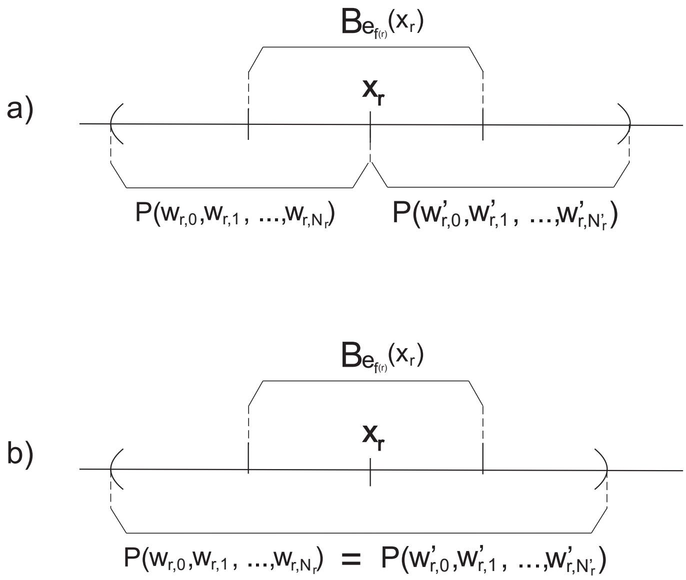

Figura 5.1: A figura a) ilustra as vizinhanças $P(W_r)$ e $P(W'_r)$ encontradas no caso que x_r é extremo de algum átomo de alguma partição $\mathcal{P}_n$. Caso contrário, a vizinhaça é única e é simbolizada na figura b). Tais vizinhaças nos permitem transferir o conceito métrico, representado pela bola, para o contexto da teoria da informação através das sequências W_r e W'_r.

Demonstração:

Para cada r, escolha $(w_{r,h})_{h=0}^{\infty}$ e $(w'_{r,h})_{h=0}^{\infty}$ da seguinte maneira: se $x_r \in \mathcal{U}$, $w_{r,h} = w'_{r,h} = j_h(x_r)$, se $x_r \in [0,1] \backslash \mathcal{U}$, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que c é o menor inteiro tal que $x_r \in \mathcal{U}_c$. Neste caso, para $h \leq c$ escolha $w_{r,h} = w'_{r,h} = j_h(x_r)$, para $h > c$ escolha $w_{r,h}$ e $w'_{r,h}$ de tal forma que x_r é o ponto final do intervalo $\overline{P(w_{r,0},\ldots,w_{r,h})}$ e o ponto inicial do intervalo $\overline{P(w'_{r,0},\ldots,w'_{r,h})}$. Observe que, para todo $h \in \mathbb{N}_0$ e todo $r \in \mathbb{N}_0$, temos

$$x_r \in \overline{P(w_{r,0},\ldots,w_{r,h}) \cup P(w'_{r,0},\ldots,w'_{r,h})}.$$

Ainda para cada r, tome $\overline{N}_r = \overline{N}_r(\epsilon)$ denotando o maior inteiro positivo tal que

$$(x_r - e_f(r), x_r) \subset P(w_{r,0},\ldots,w_{r,\overline{N}_r})$$

e $\overline{N}'_r = \overline{N}'_r(\epsilon)$ o maior inteiro positivo tal que

$$(x_r, x_r + e_f(r)) \subset P(w'_{r,0},\ldots,w'_{r,\overline{N}'_r}).$$

Consideremos a sequência $(\overline{W}(p))_{p=0}^{\infty}$ de elementos

$$\overline{W}_r = (w_{r,0},\ldots,w_{r,\overline{N}_r}) \;\; e \;\; \overline{W}'_r = (w'_{r,0},\ldots,w'_{r,\overline{N}'_r})$$

ordenados não decrescentemente por seus comprimentos, ou seja, se $\overline{N}(p)$ denota o comprimento ($\overline{N}_r$ ou $\overline{N}'_r$) da palavra $\overline{W}(p)$, então $p < q$ implica $\overline{N}(p) \leq \overline{N}(q)$. Para $n \leq \overline{N}(p)$, consideremos $\overline{W}(p,n)$ o segmento inicial de $\overline{W}(p)$ de comprimento n. Por exemplo, se $\overline{W}(p) = (w'_{r,0},\ldots,w'_{r,\overline{N}'_r})$, então $\overline{W}(p,n) = (w'_{r,0},\ldots,w'_{r,n})$. Denotemos (lembrando que Δ é finito)

$$m = \min \lambda(P(j)) \quad \text{e} \quad C = \inf \frac{\lambda(P(j_0,\ldots,j_n))}{\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1}))}.$$

Do lema (3.3.12) segue que $C > 0$ e, por definição, $C < 1$. Por indução temos

$$mC^n \leq \lambda(P(j_0,\ldots,j_n)).$$

De fato, se $n = 0$ obtemos $\lambda \geq m = C^0 m$ e se a afirmação é verdadeira para algum $n-1 \in \mathbb{N}_0$, segue

$$\begin{aligned}
\lambda(P(j_0,\ldots,j_n)) &= \frac{\lambda(P(j_0,\ldots,j_n))}{\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1})) \\
&\geq CC^{n-1}m \\
&= C^n m.
\end{aligned}$$

Em particular temos $mC^{M_r+1} \leq \lambda(P(w_{r,0},\ldots,w_{r,M_r+1}))$ onde $M_r = \overline{N}_r$ ou $M_r = \overline{N}'_r$. Isso implica, da definição de M_r e do fato que $f(r) >> r^2$,

$$e_f(r) = e^{-\epsilon^{-1}f(r)} \geq \lambda(P(w_{r,0},\ldots,w_{r,M_r+1})) \geq mC^{M_r+1},$$

o que implica

$$\epsilon^{-1}f(r) \leq |\log(mC^{M_r+1})| \leq |\log m| + (M_r+1)|\log C|,$$

então

$$A\epsilon^{-1}r^2 \leq |\log m| + (M_r+1)|\log C| \tag{5.3}$$

com $A > 0$. Isso nos diz que $M_r \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$. Assim, para qualquer $k > 0$, posso escolher ϵ suficientemente pequeno tal que $M_r \geq kr^2$. De fato, tomando

$$\epsilon \leq A/(k|\log C| + |\log m| + |\log C|)$$

temos, por (5.3),

$$\begin{aligned} M_r &\geq \frac{A\epsilon^{-1}r^2 - |\log m|}{|\log c|} - 1 \\ &\geq \left(k + \frac{|\log m|}{|\log C|} + 1\right) r^2 - \frac{|\log m|}{|\log C|} - 1 \\ &= kr^2 + (r^2-1)\left(\frac{|\log m|}{|\log C|} + 1\right) \\ &\geq kr^2. \end{aligned}$$

Com isso, para ϵ suficientemente pequeno, podemos encontrar inteiros positivos $\tilde{N}(p)$ satisfazendo

$$2 \leq \tilde{N}(0), \quad \overline{N}(p)/2 \leq \tilde{N}(p) \leq \overline{N}(p) \quad \text{e} \quad \tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1) > 4p.$$

Isto ocorre pois, observando que ϵ é inversamente proporcional a k, podemos escolher $k \geq 32M$ onde $M = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$, de tal forma que ϵ seja pequeno o suficiente para que $\overline{N}(0) \geq 8$. Escolhamos então $\tilde{N}(0) = \max\{\overline{N}(0)/2, 6\}$, assim

$$4 \leq \frac{\overline{N}(0)}{2} \leq \tilde{N}(0) \leq 8 \leq \overline{N}(0)$$

Temos que $\overline{N}(1) > k \geq 32M \geq 32$, logo defina $\tilde{N}(1) = \max\{\overline{N}(1)/2, 30\}$ e temos que

$$16 \leq \overline{N}(1)/2 \leq \tilde{N}(1) \leq 32 \leq \overline{N}(1),$$

além disto,

$$\tilde{N}(1) - \tilde{N}(0) \geq 30 - 4 \geq 2.$$

Supondo, indutivamente, escolhidos $\tilde{N}(0), \tilde{N}(1), \ldots, \tilde{N}(p)$ sendo $\tilde{N}(p) = \max\{\overline{N}(p)/2, 32p^2-2\}$, tome $\tilde{N}(p+1) = \max\{\overline{N}(p+1)/2, 32(p+1)^2 - 2\}$ temos que

$$16(p+1)^2 \leq \overline{N}(p+1)/2 \leq \tilde{N}(p+1) \leq 32(p+1)^2 \leq \overline{N}(p+1),$$

além disto,

$$\tilde{N}(p+1) - \tilde{N}(p) \geq 32(p+1)^2 - 2 - 32p^2 = 64p + 30 > 4(p+1).$$

o que nos garante a segunda e a terceira condições. Podemos também assumir

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\overline{N}(p)} < \frac{1}{32}$$

pois

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\overline{N}(p)} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{kp^2} = \frac{1}{32M} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{32}.$$

Mostraremos agora que existem inteiros positivos $N(p)$ satisfazendo $\tilde{N}(p)/2 \leq N(p) \leq \tilde{N}(p)$ tais que cada $W(p) = \overline{W}(p, N(p))$ é prática e $W(p) \int W(q)$ não ocorre para quaisquer inteiros não negativos p e q. Como a relação $\int$ é irreflexiva e simétrica, é suficiente mostrar que $W(p) \int W(q)$ falha quando $p < q$. Do fato que $2 \leq \tilde{N}(0)$, podemos escolher $N(0)$ do seguinte modo: se $\overline{W}(p, \tilde{N}(0) - 1) = (\tilde{w}_{r,0}, \ldots, \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-1})$, com $\tilde{w} = w$ ou $\tilde{w} = w'$, não é boa ou não existe $a < \tilde{N}(0)/2$ tal que

$$\tilde{w}_{r,o} = \tilde{w}_{r,a}, \ldots, \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-a-2} = \tilde{w}_{\tilde{N}(0)-2},$$

vimos , na demonstração do lema (5.1.4), que

$$\overline{W}'(p, \tilde{N}(0) - 1) = (\tilde{w}_{r,0}, \ldots, \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-2}, w)$$

é boa para todo $w \in \Delta \backslash \{\tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-1}\}$, ou seja, $\overline{W}(p, \tilde{N}(0) - 1)$ é prática e podemos tomar $\tilde{N}(0)/2 \leq \tilde{N}(0) - 1 = N(0) \leq \tilde{N}(0)$. Se $\overline{W}(p, \tilde{N}(0) - 1)$ é tal que existe $a < \tilde{N}(0)/2$ com

$$\tilde{w}_{r,0} = \tilde{w}_{r,a}, \ldots, \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-a-2} = \tilde{w}_{r,\tilde{N}-2} \quad \text{e} \quad \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-a-1} \neq \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-1},$$

então, de acordo com o lema (5.1.4), $\overline{W}(p, \tilde{N}(0))$ é boa, e mais, para todo $w \in \Delta\{\tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)}\}$, $(\tilde{w}_{r,0}, \ldots, \tilde{w}_{r,\tilde{N}(0)-1}, w)$ também é boa, ou seja, $\overline{W}(p, \tilde{N}(0))$ é prática e podemos tomar

$\tilde{N}(0)/2 \leq N(0) = \tilde{N}(0)$. Suponha $N(0), \ldots, N(p-1)$ escolhidos satisfazendo as condições desejadas e defina

$$H(p) := \{n \in (\tilde{N}(p-1), \tilde{N}(p)] \cap \mathbb{Z}; \overline{W}(p,n) \text{ é prática}\}.$$

O lema (5.1.4) nos diz que, a cada dois números consecutivos em $(\tilde{N}(p-1), \tilde{N}(p))$, pelo menos um deles está em $H(p)$. Logo,

$$card(H(p)) \geq \frac{\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1)}{2}.$$

Para cada $q \in [0, p-1]$, denote

$$h_q(p) = card\left\{n \in H(p); \overline{W}(p,n) \int W(q)\right\}.$$

Suponha que, para inteiros positivos $n < n'$ tenhamos q tal que

$$\overline{W}(p,n) \int W(q) \quad \text{e} \quad \overline{W}(p,n') \int W(q).$$

Seja $W^*(q)$ a palavra obtida de $W(q)$ mudando sua última letra para a última letra de $\overline{W}(p,n')$. Da definição da relação $\int$ segue que $W^*(q) \neq W(q)$ e, como $W(q)$ é prática, $W^*(q)$ é boa.

Devemos ter $n' - n \geq N(q)/2$. De fato, se $n \leq -N(q)$ é claro que $n' - n \geq N(q) > N(q)/2$. Se $n > n' - N(q)$, então

$$n - (n' - N(q)) > n' - n.$$

Definamos $W_1^*(q)$ sendo a palavra obtida de $W(q)$ mudando sua última letra para a última letra de $\overline{W}(p,n)$ e consideremos, sem perda de generalidade, $W(p,n') = (w_{r,0}, \ldots, w_{r,n'})$. Como $\overline{W}(p,n') \int W(q)$ e $\overline{W}(p,n) \int W(q)$, temos

$$W^*(q) = (w_{r,n'-N(q)+1}, \ldots, w_{r,n'}) \quad \text{e} \quad W_1^*(q) = (w_{r,n-N(q)+1}, \ldots, w_{r,n}).$$

Daí, sabendo que $n - N(q) < n' - N(q)$, da suposição acima segue que

$$(w_{r,n+1}, \ldots, w_{r,n'-1}) = (w_{r,2n-n'+1}, \ldots, w_{r,n-1}).$$

Além disso, tomando $s \in \mathbb{N}$ e $0 \leq v < n - n'$ tais que $n - (n' - N(q)) = q(n' - n) + v$, teremos que

$$(w_{r,(t+1)n-tn'+1}, \ldots, w_{r,tn-(t-1)n'}) = (w_{r,2n-n+1}, \ldots, w_{r,n})$$

sendo $1 \leq t \leq s$. Assim, podemos concluir que existe uma sequência se repetindo a partir de antes da mentade da palavra $W(q)$ cuja repetição termina na penúltima letra, isto implica que, se $w_{r,n} \neq w_{r,n'}$, $W(q)$ não é prática e, se $w_{r,n} = w_{r,n'}$, $W^*(q)$ não é boa, o que é uma contradição. Portanto, $n-(n'-N(q)) \leq n'-n$, o que implica $n'-n \geq N(q)/2$. Isso nos diz que a diferença do número de letras entre duas palavras que possuem a relação $\int$ com a palavra $W(q)$ é de pelo menos $N(q)/2$ e disto segue

$$h_q(p) \leq 1 + 2(\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1))/N(q).$$

Logo, denotando

$$h(p) = card\left\{n \in H(p); \overline{W}(p,n) \int W(q) : q \in [0, p-1]\right\}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
h(p) &\leq \sum_{q=0}^{p-1} h_q(p) \\
&\leq \sum_{q=0}^{p-1} \left(1 + \frac{2(\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1))}{N(q)}\right) \\
&\leq p + 2(\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1)) \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{N(q)} \\
&\leq p + 2(\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1)) \sum_{q=0}^{p-1} \frac{4}{\overline{N}(q)} \\
&\leq p + 8(\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1)) \frac{1}{32} \\
&= \frac{4p + (\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1))}{4} \\
&< \frac{(\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1)) + (\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1))}{4} \\
&= \frac{\tilde{N}(p) - \tilde{N}(p-1)}{2} \\
&\leq card(H(p)).
\end{aligned}$$

Concluímos então que existe n_p em $H(p)$ tal que $\overline{W}(p, n_p) \int W(q)$ falha para todo $q \in [0, p-1]$. Podemos então tomar $W(p) = \overline{W}(p, n_p)$, o que implica $N(p) = n_p$.

Finalmente, para cada $r \in \mathbb{N}_0$, encontremos $p \in \mathbb{N}_0$ tal que $\overline{W}_r = \overline{W}(p)$ e escolhamos $W_r = W(p) = \overline{W}(p, n_p)$. Façamos o mesmo para encontrar W'_r. Da nossa longa construção, podemos concluir que W_r e W'_r satisfazem I), II) e III). Resta-nos mostrar que a condição IV) é satisfeita. Para isso, observe que $N(p) \geq \overline{N}(p)/4$, daí

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{N_r} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{N(p)} \leq 4 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\overline{N}(p)} \leq \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Similarmente temos $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{N'_r} \leq \frac{1}{8}$. Assim

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_r} + \frac{1}{N'_r} \right) \leq \frac{1}{4} < \infty.$$

Além disso, como

$$N_r \geq \frac{A\epsilon^{-1}r^2 - |\log m|}{|\log c|} - 1$$

e o mesmo vale para N'_r, por 5.3, temos

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_r} + \frac{1}{N'_r} \right) \leq \sum_{r=0}^{\infty} 2 \left(\frac{A\epsilon^{-1}r^2 - |\log m|}{|\log C|} \right)^{-1} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

□

5.2 Demonstração para o caso de Δ finito

Faremos, nesta seção, a análise do teorema principal deste capítulo para transformações de Markov com partição $\mathcal{P}_0$ finita e consideraremos $\Lambda = \Delta = 1, 2, ..., n$ tal que $n = card(\mathcal{P}_0)$.

Suponhamos $T : [0,1] \to [0,1]$ uma transformação que, com uma partição $\mathcal{P}$, satisfaz ii), iii), iv) e v) da definição de transformação de Markov e, no lugar de i), satisfaça:

i') para cada j em Δ existe $\Delta_j \subset \Delta$ com $card(\Delta_j) \geq 3$ tal que $T(P(j)) = int\, \overline{\bigcup_{i \in \Delta_j} P(i)}$.

Afirmação : Para demonstrar o Teorema (5.0.9), não há perda de generalidade ao considerarmos T como acima no lugar de uma transformação de Markov.

De fato, suponha S uma transformação de Markov com uma partição $\mathcal{Q}_0$. Pela condição iv), existe $\beta > 1$ tal que $|S'(x)| \geq \beta$ para todo $x \in [0,1]$. Logo, se $card(\mathcal{Q}_0) = 1$, pela propriedade iii), S é contínua em $[0,1]$ e, pela propriedade iv),

$$|S(x) - S(y)| = |S'(x_0)||x - y| \geq \beta|x - y|.$$

Assim, tomando x muito próximo a 0 e y muito próximo a 1 teremos

$$|S(x) - S(y)| \geq \beta > 1,$$

o que é uma contradição. Desta forma, temos $card(\mathcal{Q}_0) \geq 2$. Disto segue que existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $S^{h+1} = T$ é Markov com $\mathcal{Q}_h$ e satisfaz i'), pois

$$\mathcal{Q}_h = \{Q(j_0, j_1, \ldots, j_h); j_i \in \Delta\}$$

possui pelo menos 2^{h+1} elementos, ou seja, $card(\mathcal{Q}_h) \geq 4 > 3$ se $h \geq 1$ e

$$S^{h+1}(Q(j_0, \ldots, j_h)) = S(Q(j_h)) = int\overline{\bigcup_{i\in\Delta_j} Q(i)} = int\overline{\bigcup_{i\in\Delta_j}\bigcup_{l_i\in\Delta_i} Q(l_0, l_1, \ldots, l_{h-1}, i)},$$

o que mostra a condição i').

Sabemos que $\inf\limits_{j_0\in\Delta} \lambda(S(Q(j_0))) > 0$. Suponha

$$\inf_{Q\in Q_h} \lambda(S^h(Q(j_0, \ldots, j_{h-1}))) > 0.$$

Assim,

$$\inf_{J_i\in\Delta} \lambda(S^{h+1}(Q(j_0, \ldots, j_h))) = \inf_{J_i\in\Delta} \lambda S(S^h(Q(j_1, \ldots, j_h))) > 0,$$

e isso nos diz que vale ii).

Temos que

$$(S^{h+1})'(x) = \prod_{i=1}^{h+1} S'(S^{h+1-i}(x))$$

existe sobre $\mathcal{U}_{h+1}$ e

$$\left|\frac{1}{S'}\right| \leq L \Rightarrow \left|\frac{1}{(S^{h+1})'}\right| = \prod_{i=1}^{h+1}\left|\frac{1}{S'(S^{h+1-i})}\right| \leq L^{h+1}.$$

o que nos garante iii).

Existe $\beta > 1$ tal que $|(S^n)'| >> \beta^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular para os múltiplos de $h+1$ que conclui iv).

Já sabemos que existem $k > 0$ e $\gamma \in (0,1)$ tais que $|1 - S'(x)/S'(y)| \leq k|x-y|^\gamma$ para todos $x, y \in diag(\mathcal{P}_0)$. Sejam $x_1 = S(x)$ e $y_1 = S(y)$ com $x_1, y_1 \in diag(\mathcal{P}_1) \subset diag(\mathcal{P}_0)$, o que nos permite tomar $x, y \in diag(\mathcal{P}_0)$. Assim,

$$\left|1 - \frac{S'(x)}{S'(y)}\right| \leq \tilde{k}_1|x_1 - y_1|^\gamma = \tilde{k}_1|S(x) - S(y)| \leq \tilde{k}_1|S'(z)||x-y|^\gamma.$$

Desta forma, tomando $k_1 = \tilde{k}_1|S'(z)|$,

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{S'(x_1)}{S'(y_1)}\right|\left|1 + \frac{S'(x)}{S'(y)}\right| &= \left|1 - \frac{S'(x_1)}{S'(y_1)} + \frac{S'(x)}{S'(y)} - \frac{(S^2)'(x)}{(S^2)'(y)}\right| \\ &\geq \left|1 - \frac{(S^2)'(x)}{(S^2)'(y)}\right| - \left|\frac{S'(x_1)}{S'(y_1)} - \frac{S'(x)}{S'(y)}\right|, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{(S^2)'(x)}{(S^2)'(y)}\right| &\leq \left|1 - \frac{S'(x_1)}{S'(y_1)}\right|\left|1 + \frac{S'(x)}{S'(y)}\right| + \left|1 - \frac{S'(x_1)}{S'(y_1)}\right| + \left|1 - \frac{S'(x)}{S'(y)}\right| \\ &\leq k_1|x-y|^\gamma\left(1 + \left|\frac{(S)'(x)}{(S)'(y)}\right|\right) + k_1|x-y|^\gamma + k|x-y|^\gamma. \end{aligned}$$

Do lema (3.3.10) temos que existe $L > 0$ tal que $|(S)'(x)/(S)'(y)| \leq L$ para todos $x, y \in diag(\mathcal{P}_1)$. Logo

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{(S^2)'(x)}{(S^2)'(y)}\right| &\leq k_1|x-y|^\gamma(1+L) + k_1|x-y|^\gamma + k|x-y|^\gamma \\ &= ((2+L)k_1 + k)|x-y|^\gamma \\ &= \tilde{k}|x-y| \end{aligned}$$

onde $\tilde{k} = (2+L)k_1 + k$. Repetindo este processo $h+1$ vezes encontramos $K > 0$ tal que

$$\left|1 - \frac{(S^{h+1})'(x)}{(S^{h+1})'(y)}\right| \leq K|x-y|^\gamma,$$

que nos garante v).

Por fim, tome $\tau = (x_n)_{n=1}^\infty$ arbitrária e denote

$$\tau^{(h)} = (x_0, S(x_0), \ldots, S^h(x_0), x_1, S(x_1), \ldots, S^h(x_1), \ldots).$$

Se vale o teorema (5.0.9), então $dim_H(E_T(x^{(h)}, f)) = 1$. Temos que provar que $dim_H(E_S(\tau, f)) = 1$.

De fato; vamos escrever $\tau^{(h)} = S^{\overline{r}}(x_{\lfloor x/(h+1)\rfloor})$ onde $\overline{r}$ é o menor resto não negativo de r módulo $h+1$. Se o teorema(5.0.9) é verdadeiro para alguma f, então será verdadeiro para $g >> f$. Portanto, não há perda de generalidade em assumir f dominada por algum polinômio porque, se todo polinômio fosse dominado por f, bastaria provar o resultado para um deles que este valeria para f. Tal fato implica $f((h+1)r) << f(r)$, pois, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiria r_n tal que $f(r_n) > x^n f((h+1)r_n)$ para qualquer

$x \in \mathbb{R}$, ou seja, f(r) cresceria mais que polinomialmente o que contradiz o fato acima. Assim,

$$\begin{aligned} E_T(\tau^{(h)}, f) &= \{x; |\log d(S^{\overline{r}}(x_{\lfloor r/(h+1) \rfloor}), \overline{\Omega_{S^{h+1}}(x)})| << f(r)\} \\ &= \{x; |\log d(x_r, \overline{\Omega_S(S(x))})| << f((h+1)r)\} \\ &\subset E_S(x, f). \end{aligned}$$

#

A demonstração da afirmação acima nos diz que se tomarmos uma transformação T^n, com n suficientemente grande, sendo esta uma iteração de uma transformação de Markov T, T^n obedecerá a hipótese i') e, além disso, se for confirmada a validade do teorema (5.0.9) para T^n, então tal resultado também será verdadeiro para T.

Da mesma maneira, também podemos assumir, sem perda de generalidade que, no lugar de iv), T e $\mathcal{P}$ satisfazem

iv') existe $\beta > 1$ tal que $T' \geq \beta$ sobre $\mathcal{U}_0$.

De fato, se ocorre iv'), temos $|(T^n)'| = \prod_{i=0}^{n} |T'(T^{n-i})| \geq \beta^n$.

Teorema 5.2.1 (Caso Δ finito). *Seja Δ finito. Para cada sequência $\tau = (x_r)_{r=0}^{\infty}$ de números reais em $[0,1]$ e cada função positiva $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ tal que $f(r) >> r^2$ a dimensão de Hausdorff de $E_T(\tau, f)$ é 1.*

Demonstração:

Para cada $\epsilon > 0$ definamos

$$E_T(\tau, f, \epsilon) = \{x \in [0,1]; |\log d(x_r, \overline{\Omega(x)})| \leq \epsilon^{-1} f(r)\}.$$

Observemos que $E_T(\tau, f, \epsilon) \uparrow E_T(\tau, f)$ quando $\epsilon \to 0$. De fato, para todo $\epsilon > 0$ temos $E_T(\tau, f, \epsilon) \subset E_T(\tau, f)$, se $\epsilon_1 < \epsilon_2$, então

$$|\log d(x_r, \overline{\Omega(x)})| \leq \epsilon_2^{-1} f(r) < \epsilon_1^{-1} f(r)$$

o que implica $E_T(\tau, f, \epsilon_2) \subset E_T(\tau, f, \epsilon_1)$, ou seja, $E_T(\tau, f, \epsilon)$ cresce quando ϵ decresce e, se $x \in E_T(\tau, f)$, segue que existe $k > 0$ tal que $|\log(x_r, \overline{\Omega(x)})| \leq kf(r)$, assim, tomando $\epsilon = k^{-1}$ temos $x \in E_T(\tau, f, \epsilon)$, disto temos

$$E_T(\tau, f) \subset \bigcup_{\epsilon > 0} E_T(\tau, f, \epsilon).$$

Logo, temos o limite desejado, o que nos permite dizer que, para demonstrar este teorema, basta provar que $d_\lambda^{\mathcal{P}}(E_T(\tau, f, \epsilon)) \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Consideremos, para cada r inteiro não negativo, uma vizinhança $V_r = P_r \cup \{x_r\} \cup P'_r$, com $P_r = P(W_r)$ e $P'_r = P(W'_r)$ sendo W_r e W'_r as palavras encontradas no Lema (5.1.5), ou seja, $P_r = P(w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r})$ e $P'_r = P(w'_{r,0}, \ldots, w'_{r,N'_r})$. Lembremos que, no caso em que $x_r \in \mathcal{U}$, temos $P_r = P'_r$.

Para cada $x \in \mathcal{U}$, definamos a sequência $(j_n(x))_{n=0}^{\infty}$ pela condição $T^n(x) \in P(j_n(x))$, assim,

$$x = \bigcap_{n=0}^{\infty} P(j_0(x), \ldots, j_n(x)).$$

Denotemos

$$\lambda'(P(j_0, \ldots, j_n)) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} & \text{se} \quad n \neq 0 \\ \lambda(P(j_0)) & \text{se} \quad n = 0 \end{cases}.$$

Definamos então

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) = \lambda'(P(j_0, \ldots, j_n))$$

a menos que, para algum r, $n \geq N_r$ e $(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) = (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1})$, ou $n \geq N'_r$ e $(j_{n-N'_r}, \ldots, j_{n-1}) = (w'_{r,0}, \ldots, w'_{r,N'_r-1})$. Neste caso façamos

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) = 0 \text{ se } j_n = w_{r,N_r} \text{ ou } j_n = w'_{r,N'_r},$$

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) = \frac{\lambda'(P(j_0, \ldots, j_n))}{1 - \lambda'(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, w*))} \text{ se } j_n \neq w_{r,N_r} \text{ ou } j_n \neq w'_{r,N'_r}$$

com $w* = w_{r,N_r}$ ou $w* = w'_{r,N'_r}$ respectivamente. Observemos que, se r e s são tais que

$$(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) = (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1}) \quad \text{e} \quad (j_{n-N_s}, \ldots, j_{n-1}) = (w_{s,0}, \ldots, w_{s,N_s-1}),$$

então $w_{r,N_r} = w_{s,N_s}$ pois, do contrário, teríamos $W_s \int W_r$ o que contradiz a condição III) do lema (5.1.5). O mesmo ocorre para este caso com W'_s e W'_r no lugar de W_s e W_r. Isto nos diz que não há ambiguidade na definição de ν'.

Afirmação 1: Para cada $P(j_0, \ldots, j_{n-1})$ não vazio existe $j_n \in \mathbb{N}$ tal que $\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) > 0$.

De fato; se $(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) = (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1})$, então precisamos escolher $j_n \neq w_{r,N_r}$ pois, do contrário $\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) = 0$. Suponhamos que para todo $j_n \neq w_{r,N_r}$ seja verdadeiro que

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) = \frac{\lambda'(P(j_0, \ldots, j_n))}{1 - \lambda'(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, w*))} = 0,$$

isto implica

$$\lambda'(P(j_0, \ldots, j_n)) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} = 0 \Rightarrow \lambda(P(j_0, \ldots, j_n)) = 0$$

para todo $j_n \in \Delta$. Logo

$$\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1})) = \lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, w_{r,N_r}))$$
$$\Rightarrow \quad \lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1})) = \lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-N_r-1}, w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r}))$$

o que contradiz a condição i') pois esta nos diz que $P(j_0, \ldots, j_{n-1})$ deve ser união de pelo menos 3^{n-1} elementos distinto de $\mathcal{P}_n$ e neste caso teríamos que a medida de Lebesgue de $P(j_0, \ldots, j_{n-1})$ seria maior que a encontrada. Se $(j_{n-N'_r}, \ldots, j_{n-1}) = (w'_{r,0}, \ldots, w'_{r,N'_r-1})$, temos resultado análogo.

Se $(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) \neq (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1})$ e $(j_{n-N'_r}, \ldots, j_{n-1}) \neq (w'_{r,0}, \ldots, w'_{r,N'_r-1})$, Suponhamos que, para todo $j_n \in \Delta$ temos

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_n)) = \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_n))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} = 0.$$

o que implica $\lambda(j_0, \ldots, j_n) = 0$ para todo $j_n \in \Delta$. Assim

$$\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1})) = \sum_{j \in \Delta} \lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, j)) = 0$$

o que é contradição.

#

Denotemos

$$\nu(P(j_0, \ldots, j_n)) = \prod_{k \leq n} \nu'(P(j_0, \ldots, j_k)).$$

Afirmação 2: Usando o Lema (4.2.5) podemos verificar que ν é aditiva sobre $\mathcal{P}$ e estende unicamente uma probabilidade mensurável sobre $[0,1]$.

De fato; devemos mostrar que

$$\sum_{v\in\sigma(u)} \nu'(v) = 1$$

para todo $u \in \mathcal{P}$.

Seja $u = P(j_0, \dots, j_{n-1})$. Logo

$$\sigma(u) = \{P(j_0, \dots, j_{n-1}, j); j \in \Delta\}.$$

Se $(j_{n-N_r}, \dots, j_{n-1}) \neq (w_{r,0}, \dots, w_{r,N_r-1})$ e $(j_{n-N'_r}, \dots, j_{n-1}) \neq (w'_{r,0}, \dots, w'_{r,N'_r-1})$, então

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\sigma(u)} \nu'(v) &= \sum_{j\in\Delta} \nu'(P(j_0, \dots, j_{n-1}, j)) \\ &= \sum_{j\in\Delta} \frac{\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}))} \\ &= \frac{\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}))}{\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}))} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Se $(j_{n-N_r}, \dots, j_{n-1}) = (w_{r,0}, \dots, w_{r,N_r-1})$, então

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\sigma(u)} \nu'(v) &= \sum_{j\neq w_{r,N_r}} \nu'(P(j_0, \dots, j_{n-1}, j)) \\ &= \sum_{j\neq w_{r,N_r}} \frac{\lambda'(P(j_0, \dots, j_{n-1}, j))}{1-\lambda'(P(j_0, \dots, j_{n-1}, w_{r,N_r}))} \\ &= \sum_{j\neq w_{r,N_r}} \frac{\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}))-\lambda(P(j_0, \dots, j_{n-1}, w_{r,N_r}))} \\ &= 1.\end{aligned}$$

#

Temos então que $\mathcal{U} \cap supp(\nu)$ é o conjunto dos elementos $x \in \mathcal{U}$ tais que, para todo $r \in \mathbb{N}_0$, W_r, W'_r não aparecem na palavra $(j_n)_{n=0}^{\infty}$. Assim, para todo $x \in \mathcal{U} \cap supp(\nu)$, $T^n(x) \in [0,1]\backslash\overline{P_r \cup P'_r}$ para cada n e cada $r \in \mathbb{N}_0$. Logo, se $x \in \mathcal{U} \cap supp(\nu)$, então $x \in E(\tau, f, \epsilon)$. Como, pelo corolário (3.3.7), $[0,1]\backslash\mathcal{U}$ é enumerável, resta-nos mostrar que $d^{\mathcal{P}}_{\lambda}(supp(\nu)) \to 1$ quando $\epsilon \to 0$. Para isso, utilizaremos o Lema (4.2.4).

Considere $\mu_1 = \lambda$ e $\mu_2 = \nu$.

Afirmação 3: ν é uma probabilidade de Borel não atômica.

De fato; suponha existir $P(j_0, \ldots, j_n) \in \mathcal{P} \neq \emptyset$ com $\nu(P(j_0, \ldots, j_n)) > 0$ tal que para todo $P(j_0, \ldots, j_m) \subset P(j_0, \ldots, j_n)$ com $m > n$ tenhamos $\nu(P(j_0, \ldots, j_m)) = 0$. Logo, tomando $m > n$, temos

$$\prod_{k \leq m} \nu'(P(j_0, \ldots, j_k)) = 0$$

o que implica a existência de $k_0 \leq m$ tal que $\nu'(P(j_0, \ldots, j_{k_0})) = 0$ e, sem perda de generalidade, consideremos k_0 o menor número em que isto ocorre. Sabemos que $k_0 > n$ pois $\nu(P(j_0, \ldots, j_n)) > 0$. Assim, temos $\nu(P(j_0, \ldots, j_{k_0-1})) > 0$, e a afirmação 1 nos diz que existe $j \in \Delta$ tal que $\nu'(j_0, \ldots, j_{k_0-1}, j) > 0$ e disto segue

$$\nu(P(j_0, \ldots, j_{k_0})) = \nu(P(j_0, \ldots, j_{k_0-1}))\nu'(P(j_0, \ldots, j_{k_0-1})) > 0$$

com $K_0 > n$ o que é uma contradição. Portanto ν é não atômica.

#

Logo, do Lema (4.2.6), temos $d_\nu^{\mathcal{P}}(supp(\nu)) = 1$ para todo $\epsilon > 0$. Para cada $x \in \mathcal{U}$, denotemos

$$\mathcal{A}_r = \{k \in \mathbb{N}_0; j_{k-N_r}(x) = w_{r,0}, \ldots, j_{k-1}(x) = w_{r,N_r-1}\},$$

$$\mathcal{A}'_r = \{k \in \mathbb{N}_0; j_{k-N'_r}(x) = w'_{r,0}, \ldots, j_{k-1}(x) = w'_{r,N'_r-1}\},$$

$$\mathcal{A} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathcal{A}_r \quad \text{e} \quad \mathcal{A}' = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathcal{A}'_r.$$

Se $x \in \mathcal{U} \cap supp(\nu)$, lembrando que neste caso $u_k(x) = P(j_0(x), \ldots, j_k(x))$, segue direto da definição de ν' que $\nu'(u_k(x)) = \lambda'(u_k(x))$ para cada $k \in \mathbb{N}_0 \backslash (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')$. A condição $x \in supp(\nu)$ implica $j_k(x) \neq w_{r,N_r}$ para cada $k \in \mathcal{A}_r$ pois, do contrário, teríamos $\nu(P(j_0, \ldots, j_k)) = 0$. Logo, para este caso, pelo Lema (5.1.5), condição II, $(j_{k-N_r(x)}, \ldots, j_k(x))$ é boa. Assim, nenhum dos números $k+1, \ldots, k+(N_r-1)/2$ pode estar em $\mathcal{A}_r$ e daí

$$card\{k \leq n; k \in \mathcal{A}_r\} \leq \frac{2n}{N_r}.$$

Desta forma, temos

$$card\{k \leq n; k \in \mathcal{A}\} \leq \sum_{r=0}^{\infty} card\{k \leq n; k \in \mathcal{A}_r\} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2n}{N_r}. \tag{5.4}$$

Podemos repetir esta análise para $k \in \mathcal{A}'_r$ e encontrar

$$card\{k \leq n; k \in \mathcal{A}'\} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2n}{N'_r}. \tag{5.5}$$

Logo, para $x \in \mathcal{U} \cap supp(\nu)$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\log \nu(u_n(x))}{\log \lambda(u_n(x))}\right| &= \left|\frac{\log \prod_{k\leq n} \nu'(P(j_0,\ldots,j_k))}{\log \lambda(u_n(x))}\right| \\
&= \frac{\sum_{k\leq n} |\log \nu'(P(j_0,\ldots,j_k))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&= \frac{\sum_{k\leq n,\, k\notin \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \nu'(u_k(x))| + \sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \nu'(u_k(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&= \frac{\sum_{k\leq n,\, k\notin \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_k(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&+ \frac{\sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} \left|\log\left(\frac{\lambda'(u_k(x))}{1-\lambda'(P(j_0,\ldots,j_{k-1},w*))}\right)\right|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&= \frac{\sum_{k\leq n,\, k\notin \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_n(x))| + \sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_n(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&- \frac{\sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log(1-\lambda'(P(j_0(x),\ldots,j_{k-1}(x),w*))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&\geq \frac{\sum_{k\leq n} |\log \lambda'(u_k(x))| - \sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_k(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&= \frac{|\log \prod_{k\leq n} \lambda'(u_k(x))| - \sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_k(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&= \frac{|\log \lambda(u_n(x))| - \sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_k(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|} \\
&= 1 - \frac{\sum_{k\leq n,\, k\in \mathcal{A}\cup\mathcal{A}'} |\log \lambda'(u_k(x))|}{|\log \lambda(u_n(x))|},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

em que a única desigualdade acima é verdadeira pois

$$\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*)) \leq 1-\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*)),$$

o que implica

$$\begin{aligned}\lambda'(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*)) &\leq \frac{1}{\lambda(P(j_0,\ldots,j_{n-1}))}-\lambda'(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*))\\ &\leq 1-\lambda'(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*)),\end{aligned}$$

e disto temos

$$-|\log(\lambda'(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*)))| \leq -|\log(1-\lambda'(P(j_0,\ldots,j_{n-1},w*)))|.$$

Do Lema (3.3.12), temos que existe $0 < c = \inf(\lambda(P(j_0,\ldots,j_k))/\lambda(P(j_0,\ldots,j_{k-1})))$ tomado sobre todos os $P(j_0,\ldots,j_k) \in \mathcal{P}_k$ para $k \leq n$. Pelo Lema (3.3.8), encontramos $k_1 > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\max_{P\in\mathcal{P}_n} \lambda(P) \leq k_1\beta^{-n}.$$

Destes fatos e de (5.4), (5.5) e (5.6) segue

$$\begin{aligned}\left|\frac{\log\nu(u_n(x))}{\log\lambda(u_n(x))}\right| &\geq 1-\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{N_r}+\frac{2n}{N_r'}\right)\right)\left|\frac{\log c}{\log(k_1\beta^{-n})}\right|\\ &= 1-\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{N_r}+\frac{1}{N_r'}\right)\right)\left(\frac{|\log c|2n}{n\log\beta-|\log k_1|}\right)\\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\left(\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{N_r}+\frac{1}{N_r'}\right)\right)\left(\frac{|\log c|2}{\log\beta}\right).\end{aligned}$$

Disto e do lema (5.1.5), condição IV, concluímos que

$$\inf_{x\in\mathcal{U}\cap supp(\nu)}\left(\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{\log\nu(u_n(x))}{\log\lambda(u_n(x))}\right|\right)\longrightarrow 1 \tag{5.7}$$

quando $\epsilon \to 0$. Portanto, dos lemas (4.2.2) e (4.2.4), obtemos

$$1 \geq d_\lambda^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}\cap supp(\nu)) \geq 1\cdot d_\nu^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}\cap supp(\nu)) = 1$$

E o teorema está provado para o caso Δ finito.

$\square$

5.3 Demonstração para o Caso Δ infinito

Nesta seção, apresentaremos a prova do resultado geral, ou seja, para transformações de Markov com partição $\mathcal{P}_0$ infinita e tomaremos $\Lambda = \Delta = \mathbb{N}$.

Demonstração:

Como $\mathcal{P}_0$ é partição de $[0,1]$, temos $\sum_{y \in \mathbb{N}} \lambda(P(j)) = 1$. Dado $\epsilon' > 0$, escolhamos $Q = Q(\epsilon')$ tal que

$$\sum_{j>Q} \lambda(P(j)) < \epsilon'.$$

Definamos $R(0), R(1), \ldots, R(t)$ as componentes conexas de $\overline{\bigcup_{j>Q} P(j)}$. Observemos que t é finito pois $R(0), R(1), \ldots, R(t)$ são separados apenas pelos finitos intervalos $P(0), P(1), \ldots, P(Q)$, logo $t \leq Q+1$. Definamos também, para cada $1 \leq k \leq t$,

$$R_0(k) = R(k) \backslash T(\bigcup_{j \leq Q} P(j));$$
$$R_l(k) = R(k) \cap T(P(l))$$

para $0 \leq l \leq Q$. Cometendo um abuso de notação, consideremos $R_0(k), R_1(k), \ldots, R_l(k)$ descartando todos os que forem vazios mas preservando a definição (neste caso, $l \leq Q$). Observemos que $\{R_i(k)\}_{i=1}^{l}$ é uma partição de $R(k)$. Consideremos a aplicação $\tilde{T} : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\tilde{T} = T$ em $P(j)$ quando $0 \leq j \leq Q$ e $\tilde{T}$ sendo a função linear crescente sobrejetiva de $R_i(k)$ em $[0,1]$ para $0 \leq i \leq l$ e $1 \leq k \leq t$ (veja a figura (5.2)).

Afirmação 1: $\tilde{T}$ é Markov com a partição finita

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = \{P(0), P(1), \ldots, P(Q), R_0(1), R_1(1), \ldots, R_0(t), R_1(t), \ldots, R_l(t)\} = \{\tilde{P}(i)\}_{i \in \tilde{\Delta}}$$

de $[0,1]$ onde $\tilde{\Delta} = 1, 2, ..., Q + l.t$ (preservando a ordem).

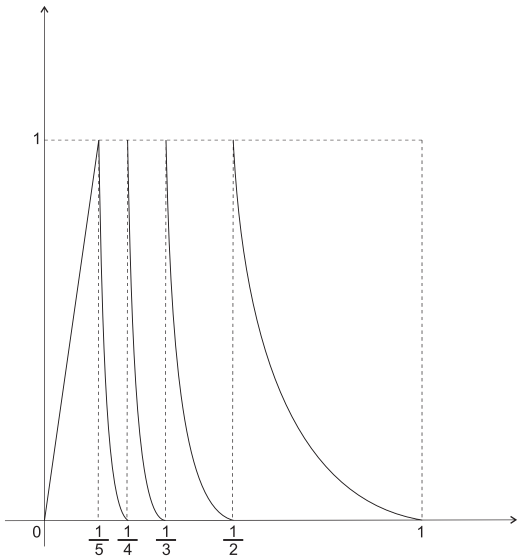

Figura 5.2: Construção de $\tilde{T}$ para a transformação de Gauss para $Q = 5$.

De fato,

i) Como T é Markov, para cada $j \in \Delta$, existe $\Delta_j \subset \Delta$ tal que $T(P(j)) = int \overline{\bigcup_{i \in \Delta_j} P(i)}$.

Assim, se $v \in \tilde{\Delta}$ e $v \leq Q$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\tilde{P}(v)) &= T(P(v)) \\
&= int \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{t} R_v(k) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \Delta_v,\, i \leq Q} P(i) \right)} \\
&= int \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{t} R_v(k) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \tilde{\Delta}_v,\, i \leq Q} \tilde{P}(i) \right)}.
\end{aligned}$$

Se $v \in \tilde{\Delta}$ e $v > Q$, então

$$(0,1) = \tilde{T}(\tilde{P}(v)) = int \left(\bigcup_{i \in \tilde{\Delta}} \tilde{P}(i) \right).$$

ii) Se $j > Q$, então $(0,1) = \tilde{T}(\tilde{P}(j))$. Logo, o ínfimo das medidas das imagens por $\tilde{T}$ dos átomos $\tilde{P}(i)$ onde $i \in \tilde{\Delta}$ pode ser tomado com $i \leq Q$. Assim,

$$\inf_{i \in \tilde{\Delta}} \lambda(\tilde{T}(\tilde{P}(i))) = \inf_{i \in \tilde{\Delta},\, i \leq Q} \lambda(\tilde{T}(\tilde{P}(i))) = \inf_{i \in \Delta,\, i \leq Q} \lambda(T(P(i))) \geq \inf_{i \in \Delta} \lambda(T(P(i))) > 0.$$

pois T é Markov.

iii) Em $\tilde{P}(j)$ com $j \leq Q$, temos $\tilde{T} = T$, logo, como T é Markov com $\mathcal{P}_0$, $\tilde{T}' = T'$ é definida e $(\tilde{T}')^{-1} = (T')^{-1}$ é limitada em $\tilde{P}(j) = P(j)$. Em $\tilde{P}(j)$ com $j > Q$, digamos $\tilde{P}(j) = (a, b)$, como $\tilde{T}$ é a função linear crescente que leva (a, b) em $(0, 1)$, segue que $\tilde{T}'(x) = (b - a)^{-1}$ para todo $x \in (a, b)$ é definida e $|(\tilde{T}'(x))^{-1}| = (b - a)$, ou seja, $(\tilde{T}'(x))^{-1}$ é limitada.

iv) Suponha $n = 1$. Tomemos $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}_1$, digamos $\tilde{P} = \tilde{P}(j_0, j_1)$. Logo, para $x \in \tilde{P}$,

$$\tilde{T}'(x) = \begin{cases} T'(x) & \text{se} \quad 0 \leq j_0 \leq Q \\ (b-a)^{-1} & \text{se} \quad j_0 > Q \text{ e } \tilde{P}(j_0) = (a, b) \end{cases}.$$

Sabemos que T é Markov com $\mathcal{P}_0$, assim, existe $\beta > 1$ tal que $(T^n)' >> \beta$ em $\mathcal{U}_n$. Desta forma, $\tilde{T}' >> \beta$ em $\tilde{P}$ se $0 \leq j_0 \leq Q$. Disto segue que

$$\tilde{T}' >> \min \left\{ (\max_{i\tilde{\Delta}, i>Q} P(i))^{-1}, \beta \right\} = \tilde{\beta},$$

ou seja, existe $\tilde{\beta} > 1$ tal que $\tilde{T}' >> \tilde{\beta}$. Segue da regra da cadeia que, dado $n \geq 1$,

$$(\tilde{T}^n)' = \prod_{i=0}^{n-i} \tilde{T}'(\tilde{T}^{n-i}) >> \tilde{\beta}^n$$

em $\mathcal{U}_n$.

v) Sejam $x, y \in \tilde{P}(j) \in \tilde{\mathcal{P}}_0$. Se $0 \leq j \leq Q$, então $\tilde{P}(j) = P(j)$ e, como T é Markov, segue a distorção limitada em $\tilde{P}(j)$, ou seja, existe $\gamma \in (0, 1)$ tal que

$$\left| 1 - \frac{\tilde{T}'(x)}{\tilde{T}'(y)} \right| << |x - y|^\gamma.$$

Se $j > Q$, obtemos $\tilde{T}'(x) = \tilde{T}'(y) = (b - a)^{-1}$ para $P(j) = (a, b)$. Logo,

$$\left| 1 - \frac{\tilde{T}'(x)}{\tilde{T}'(y)} \right| = \left| 1 - \frac{(b-a)^{-1}}{(b-a)^{-1}} \right| = 0 << |x - y|^\gamma$$

sendo γ como anteriormente.

Portanto, de i), ii), iii), iv) e v), temos que $\tilde{T}$ é Markov com $\tilde{\mathcal{P}}_0$.

#

Dado $\epsilon > 0$, definamos aqui o seguinte conjunto:

$$E_T(\tau, f, \epsilon, \epsilon') = \{x \in E_T(\tau, f, \epsilon); j_k(x) \leq Q(\epsilon') \; \forall k\}$$

sendo $E_T(\tau, f, \epsilon)$ como definido no caso finito. Podemos então observar que, para mostrar este teorema, basta provar que $d_\lambda^{\tilde{\mathcal{P}}}(E_T(\tau, f, \epsilon, \epsilon')) \to 1$ quando ϵ e ϵ' tendem a zero. De fato, se $\epsilon' \to 0$ temos que $Q \to \infty$ e assim $E_T(\tau, f, \epsilon, \epsilon') \uparrow E_T(\tau, f, \epsilon)$ e já vimos que, se $\epsilon \to 0$, então $E_T(\tau, f, \epsilon) \uparrow E_T(\tau, f)$. Logo, $d_\lambda^{\mathcal{P}}(E_T(\tau, f, \epsilon, \epsilon')) \to d_\lambda^{\mathcal{P}}(E_T(\tau, f))$ quando ϵ e ϵ' tendo a zero.

Trocando, se necessário, T por T^{h+1} para algum h natural que depende de ϵ' da mesma maneira que fizemos para a condição i') no início da Seção 5.1, podemos assumir, sem perda de generalidade:

i") Para cada $1 \leq j \leq Q$, existe $\tilde{\Lambda}_j \subset \Lambda$ com $card\left\{\tilde{\Lambda}_j \cap \{1, 2, \ldots, Q\}\right\} \geq 3$ tal que

$$\tilde{T}(\tilde{P}(j)) = int\overline{\bigcup_{i \in \tilde{\Lambda}_j} \tilde{P}(i)}$$

no lugar da condição i) da definição de Markov. Isto é possível pois, como $\tilde{T}$ é Markov, a condição iv) nos diz que ela é uma função expansora, além disso, adicionando a condição i) a esta informação, obtemos que, a cada iterada de $\tilde{T}$, $\tilde{T}^n(\tilde{P}(j))$ contém pelo menos um átomo a mais de $\mathcal{P}_0$ que $\tilde{T}^{n-1}(\tilde{P}(j))$ exceto quando este é o intervalo $(0, 1)$. Assim, basta escolher h suficientemente grande e T^{1+h} será $Markov$ (como provado no início da Seção 5.1) e satisfará i"). Isto nos permite argumentar como feito para o caso finito. Definamos λ' e $\tilde{\nu}\,'$ sobre $\tilde{\mathcal{P}}$ do mesmo modo que λ' e $\nu\,'$ no caso finito. Consideremos $\tilde{\nu}$ a medida de probabilidade sobre $[0, 1]$ obtida de

$$\tilde{\nu}(\tilde{P}(j_0, j_1, \ldots, j_n)) = \prod_{k \leq n} \tilde{\nu}\,'(\tilde{P}(j_o, \ldots, j_k))$$

segundo o Lema (4.2.5). Definamos também

$$\nu_1{}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n)) = \begin{cases} 0 & se \quad j_n > Q \\ \dfrac{\tilde{\nu}\,'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n))}{\sum\limits_{j \leq Q} \tilde{\nu}\,'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))} & se \quad j_n \leq Q \end{cases}$$

se todo $1 \leq j_k \leq Q$ para $k \in 1, \ldots, n-1$ e

$$\nu_1{}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n)) = \tilde{\nu}\,'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n))$$

caso contrário, ou seja, se existir $k \in 1, \ldots, n-1$ tal que $j_k > Q$.

Afirmação 2: $\displaystyle\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) = 1$ para todo $\tilde{P}_1 \in \tilde{\mathcal{P}}$.

De fato, observemos primeiramente que, se $\tilde{P}_1 = \tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1})$, então

$$\sigma(\tilde{P}_1) = \{\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j) \in \tilde{P}; j \in \tilde{\Delta}\}.$$

Logo,

$$\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) = \sum_{j\in\tilde{\Lambda}} {\nu_1}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1})).$$

Se, para todo $k \in 1, \ldots, n-1$ tivermos $1 \le j_k \le Q$,

$$\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) = \sum_{j\in\tilde{\Lambda},\, j>Q} 0 + \sum_{j\in\tilde{\Lambda},\, j\le Q} \left(\frac{\tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j))}{\displaystyle\sum_{j\le Q} \tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))} \right) = 1.$$

Se existe $k \in 1, \ldots, n-1$ tal que $j_k > Q$,

$$\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) = \sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} \tilde{\nu}'(\tilde{P}) = \sum_{j\in\tilde{\Lambda}} \tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))$$

Logo, se

$$(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) \ne (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1}) \quad \text{e} \quad (j_{n-N'_r}, \ldots, j_{n-1}) \ne (w'_{r,0}, \ldots, w_{r,N'_r-1})$$

(definidas como no Lema (5.1.5)) teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) &= \sum_{j\in\tilde{\Lambda}} \lambda'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j)) \\
&= \sum_{j\in\tilde{\Lambda}} \frac{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{j\in\tilde{\Lambda}} \lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \\
&= \frac{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n - 1))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n - 1))} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

se não, suponhamos, sem perda de generalidade,

$$(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) \ne (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1}),$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) &= \sum_{j\in\tilde{\Lambda}\backslash\{w_{r,N_r}\}} \tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))\\
&= \sum_{j\in\tilde{\Lambda}\backslash\{w_{r,N_r}\}} \frac{\lambda'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{1-\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},w_{r,N_r}))}\\
&= \sum_{j\in\tilde{\Lambda}\backslash\{w_{r,N_r}\}} \left(\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)\left(1-\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},w_{r,N_r}))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{\displaystyle\sum_{j\in\tilde{\Lambda}\backslash\{w_{r,N_r}\}} \lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)\times\\
&\times \left(\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))-\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},w_{r,N_r}))}\right)\\
&= \left(\frac{\displaystyle\sum_{j\in\tilde{\Lambda}\backslash\{w_{r,N_r}\}} \lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)\left(\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}{\displaystyle\sum_{j\in\tilde{\Lambda}\backslash\{w_{r,N_r}\}} \lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{\tilde{P}\in\sigma(\tilde{P}_1)} {\nu_1}'(\tilde{P}) = 1.$

#

A afirmação acima nos garante que ${\nu_1}'$ satisfaz as condições do Lema (4.2.5) ($\mathcal{B}=\tilde{\mathcal{P}}$), assim, existe uma única medida ν_1 sobre $[0,1]$ satisfazendo $\nu_1(u).{\nu_1}'(v)=\nu_1(v)$ para todos $u,v\in\tilde{\mathcal{P}}$ tais que $v\in\sigma(u)$. Deste modo, segue que

$$\begin{aligned}
\nu_1(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_n)) &= \nu_1(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1})){\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_n))\\
&= \nu_1(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-2})){\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1})){\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_n))\\
&= \ldots\\
&= \nu_1([0,1])\prod_{k=0}^{n}{\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_k))\\
&= \prod_{k=0}^{n}{\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_k)). \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

De forma semelhante ao que fizemos na afirmação 3 da prova do caso finito podemos demonstrar que ν_1 é não atômica. Além disso, ν_1 é suportada sobre $E_T(\tau, f, \epsilon, \epsilon')$ pois, se $x \notin E_T(\tau, f, \epsilon, \epsilon')$, então $x \in \tilde{P}(j_0, \ldots, j_n)$ com $j_v > Q(\epsilon')$ para algum $v \in \{0, \ldots, n\}$, daí, por (5.8),

$$\nu_1(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n)) = \prod_{k=0}^{n} {\nu_1}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_k)) = {\nu_1}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_v)) \prod_{k=0,\, k\neq v}^{n} {\nu_1}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_k)) = 0.$$

Logo, para demonstrar o resultado desejado, basta provar que $d_\lambda^{\tilde{\mathcal{P}}}(supp(\nu_1))$ tende a 1 quando ϵ e ϵ' tendem a zero.

Se $j_k \leq Q$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j>Q} \lambda'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j)) &= \sum_{j>Q} \frac{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \\
&= \frac{\sum_{j>Q} \lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \\
&= \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1})) - \sum_{j\leq Q} \lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \\
&= \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1})) - \sum_{j\leq Q} \lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \\
&= \sum_{j>Q} \frac{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_0, \ldots, j_{n-1}))}.
\end{aligned}$$

Disto e do Lema (3.3.11), segue que existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\sum_{j>Q} \lambda'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1})) \leq B \sum_{j>Q} \frac{\lambda(P(j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_{n-1}))}.$$

Do Lema (3.3.10), sabemos que existe $K_2 > 0$ tal que

$$|T'(x)/T'(y)| \leq K_2$$

para $(x, y) \in diag(\mathcal{P}_0)$. Consideremos então

$$K_2 = \sup_{(x,y)\in diag(\mathcal{P}_0)} |T'(x)/T'(y)|$$

e, do teorema do valor médio, temos $(x_0, y_0) \in diag(\mathcal{P}_0)$ tal que

$$\begin{aligned}
\sum_{j>Q} \lambda'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j)) &= B \sum_{j>Q} \frac{\lambda(P(j_{n-1}, j))}{\lambda(P(j_{n-1}))} \\
&= B \sum_{j>Q} \frac{|T'(y_0)|^{-1} \lambda(T(P(j_{n-1}, j)))}{|T'(x_0)|^{-1} \lambda(T(P(j_{n-1})))} \\
&= B \left| \frac{T'(x_0)}{T'(y_0)} \right| \sum_{j>Q} \frac{\lambda(T(P(j_{n-1}, j)))}{\lambda(T(P(j_{n-1})))} \\
&\leq BK_2 \sum_{j>Q} \frac{\lambda(T(P(j_{n-1}, j)))}{\lambda(T(P(j_{n-1})))}.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \inf_{j \in \Lambda} \lambda(T(P(j)))$ e lembrando que $\sum_{j>Q} \lambda(P(j)) \leq \epsilon'$ encontramos

$$\begin{aligned}
\sum_{j>Q} \lambda'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j)) &\leq BK_2 \sum_{j>Q} \frac{\lambda(T(P(j_{n-1}, j)))}{\lambda(T(P(j_{n-1})))} \\
&= BK_2 \sum_{j>Q} \frac{\lambda(P(j))}{\lambda(T(P(j_{n-1})))} \\
&= BK_2 \alpha^{-1} \epsilon'.
\end{aligned}$$

Observando que B, K_2 e α não dependem de ϵ', podemos denotar $c = BK_2\alpha^{-1}$. Assim, para qualquer $x \in \mathcal{U} \cap supp(\nu_1)$ temos que, para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$, $j_k \leq Q$. Se

$$(j_{n-N_r}, \ldots, j_{n-1}) \neq (w_{r,0}, \ldots, w_{r,N_r-1}) \quad \text{e} \quad (j_{n-N'_r}, \ldots, j_{n-1}) \neq (w'_{r,0}, \ldots, w'_{r,N'_r-1}),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
{\nu_1}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n)) &= \frac{\tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_n))}{\sum_{j \leq Q} \tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))} \\
&= \frac{\tilde{\nu}'(P(j_0, \ldots, j_n))}{\sum_{j \leq Q} \tilde{\lambda}'(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0, \ldots, j_n)) \left(\sum_{j \leq Q} \frac{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0, \ldots, j_n)) \left(\frac{\sum_{j \leq Q} \lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}, j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0, \ldots, j_{n-1}))} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))-\sum\limits_{j>Q}\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(1-\sum_{j>Q}\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(1-\sum_{j>Q}\lambda'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))\right)^{-1} \\
&\leq \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))(1-c\epsilon')^{-1}. \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se

$$
(j_{n-N_r},\ldots,j_{n-1})=(w_{r,0},\ldots,w_{r,N_r-1}) \quad \text{ou} \quad (j_{n-N'_r},\ldots,j_{n-1})=(w'_{r,0},\ldots,w'_{r,N'_r-1}),
$$

então

$$
\begin{aligned}
\nu_1'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_n)) &= \frac{\tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_n))}{\sum\limits_{j\leq Q}\tilde{\nu}'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\sum_{j\leq Q}\frac{\lambda'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{1-\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},w^*))}\right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\frac{1-\lambda'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},w^*))}{\sum\limits_{j\leq Q}\lambda'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}\right) \\
&\leq \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\sum_{j\leq Q}\lambda'(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))\right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\sum_{j\leq Q}\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\frac{\sum\limits_{j\leq Q}\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)^{-1} \\
&= \tilde{\nu}'(P(j_0,\ldots,j_n))\left(\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))-\sum\limits_{j>Q}\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\ldots,j_{n-1}))}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{\nu}\,'(P(j_0,\dots,j_n))\left(1-\sum_{j>Q}\frac{\lambda(\tilde{P}(j_0,\dots,j_{n-1},j))}{\lambda(\tilde{P}(j_0,\dots,j_{n-1}))}\right)^{-1}\\
&= \tilde{\nu}\,'(P(j_0,\dots,j_n))\left(1-\sum_{j>Q}\lambda'(\tilde{P}(j_0,\dots,j_{n-1},j))\right)^{-1}\\
&\leq \tilde{\nu}\,'(P(j_0,\dots,j_n))(1-c\epsilon')^{-1}. \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Logo, de (5.9) e (5.10),

$$
{\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\dots,j_n)) \leq \tilde{\nu}\,'(P(j_0,\dots,j_n))(1-c\epsilon')^{-1}
$$

e, de (5.8),

$$
\begin{aligned}
\nu_1(\tilde{P}(j_0,\dots,j_n)) &= \prod_{k=0}^{n} {\nu_1}'(\tilde{P}(j_0,\dots,j_k))\\
&\leq \prod_{k=0}^{n} \tilde{\nu}\,'(P(j_0,\dots,j_k))(1-c\epsilon')^{-1}\\
&= \tilde{\nu}(P(j_0,\dots,j_n))(1-c\epsilon')^{-1},
\end{aligned}
$$

o que implica, sendo $u_n(x)=\tilde{P}(j_0,\dots,j_n)$,

$$
\log \nu_1(u_n(x)) \leq \log[\tilde{\nu}(u_n(x)))(1-c\epsilon')^{-1}],
$$

e disto segue

$$
\begin{aligned}
\frac{\log \nu_1(u_n(x))}{\log \lambda(u_n(x))} &\geq \frac{\log[\tilde{\nu}(u_n(x))(1-c\epsilon')^{-1}]}{\log \lambda(u_n(x)}\\
&\geq \frac{\log \tilde{\nu}(u_n(x)) - \log[1-c\epsilon']}{\log \lambda(u_n(x)))},
\end{aligned}
$$

logo, tomando o limite para $n\to\infty$,

$$
\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log \nu_1(u_n(x)))}{\log \lambda(u_n(x))} \geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\log \tilde{\nu}(u_n(x)) - \log[1-c\epsilon']}{\log \lambda(u_n(x)))}\right)
$$

para $x\in\mathcal{U}\cap supp(\nu_1)$. A redução ao caso finito nos permite usar (5.7) e assim, quando $\epsilon'\to 0$ e $\epsilon\to 0$, encontramos

$$
\inf_{x\in\mathcal{U}\cap supp(\nu_1)}\left(\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{\log \nu_1(u_n(x)))}{\log \lambda(u_n(x))}\right|\right) \to 1.
$$

Portanto, dos Lemas (4.2.4) e (4.2.6), obtemos

$$
1 \geq d_{\lambda}^{\tilde{P}}(\mathcal{U}\cap supp(\nu_1)) \geq d_{\nu_1}^{\tilde{P}}(\mathcal{U}\cap supp(\nu_1)) = 1
$$

e o teorema está provado para o caso Δ infinito.

$\square$

5.4 Consequências

Nesta seção, apresentaremos alguns conjuntos que possuem dimensão de Hausdorff igual a 1 como consequência do resultado de Abercrombie e Nair. A primeira destas consequências é um pouco imediata e é a seguinte:

Teorema 5.4.1. *Para $x_0 \in [0,1]$, sejam T uma transformação de Markov no intervalo unitário e*

$$E_T(x_0) = \{x \in [0,1] : x_0 \in [0,1] \backslash \overline{\Omega_T(x)}\}.$$

Então, a dimensão de Hausdoff de $E_T(x_0)$ é 1.

Demonstração:

Tome $\tau = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0)_{n\in\mathbb{N}}$. Logo, tomando $f(n) >> n^2$, temos que

$$E_T(x_0, f) = \{x \in [0,1]; |\log(\overline{\Omega_T(x), x_0})| << f(n)\}$$

tem dimensão 1 segundo o Teorema (5.0.9). Mas, pela definição, $E_T(x_0, f)$ é um conjunto de pontos cujo fecho da órbita está afastada de x_0. Portanto $E_T(x_0, f) \subset E_T(x_0)$ e, pela monotonicidade da dimensão de Hausdorff temos

$$1 = dim_H(E_T(x_0, f)) \leq dim_H(E_T(x_0)) \leq 1.$$

□

Os próximos conjuntos serão apresentados em duas subseções.

5.4.1 Números Diofantinos

Abaixo, iremos definir números diofantinos de duas maneiras diferentes, embora equivalentes, pois cada uma nos será útil à nossa conveniência.

Definição 5.4.2 (Número Diofantino). *Os números que não são Liouville são ditos diofantinos.*

Definição 5.4.3 (Número Diofantino). *Um número real x é dito diofantino se existem $C > 0$ e $n \geq 1$ tais que para todo $p/q \in \mathbb{Q}$ tem-se*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}.$$

<u>Afirmação</u> : Esta definições são equivalentes.

De fato; vamos mostrar que o conjunto $\mathcal{L}*$ complementar ao conjunto descrito na segunda definição é o conjunto dos números de Liouville. Tome $x \in \mathcal{L}*$. Logo, para todo $C > 0$ e todo $n > 1$ existe $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^n}.$$

Em particular, para $C = 1$, temos que x é Liouville. Por outro lado, se x é Liouville, dados $n > 1$ e $C > 0$, tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/(2^m) < C$. Da definição dos números de Liouville, temos que existe $p/q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+m}} \leq \frac{1}{q^n 2^m} \leq \frac{C}{q^m}.$$

Portanto $x \in \mathcal{L}*$.

#

Definição 5.4.4 (Número mal aproximável ou 2-diofantino). *Um número real irracional x é dito mal aproximável se existe uma constante $C(x) > 0$ tal que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{C(x)}{q^2}$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$. Denotaremos o conjunto destes números por $\mathbb{D}$.

Um pouco sobre o conjunto já foi discutido no Capítulo 2. Portanto, resta apenas observar as consequências dos estudos feitos até agora.

Teorema 5.4.5. *A medida de Hausdorff unidimensional de $\mathbb{D}$ é igual a zero.*

Demonstração:

Do Teorema (2.2.8), temos que $\mathbb{D}$ é o conjunto dos números irracionais de quocientes limitados que, segundo o Teorema (2.3.4), possui medida de Gauss η nula. Como, pelo Teorema (2.3.2), η é equivalente à λ que, por sua vez é equivalente à $\mathcal{H}^1$, temos $\mathcal{H}^1(\mathbb{D}) = 0$.

□

Teorema 5.4.6. *A dimensão de Hausdorff do conjunto dos números 2-diofantinos é* 1.

Demonstração:

Vamos mostrar que $E_T(0)$ para a transformação de Gauss como definido no Teorema (5.4.1) é tal que $E_T(0) \subset D$. Tome $x \in E(0)$. Logo existe $k(x) > 0$ tal que $|T^n(x)| > k(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica a existência de $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/m_0 < k(x)$ e para todo $m > m_0$, $m \in \mathbb{N}$ temos que m não aparece na expansão em frações contínuas de x. Deste modo, concluímos que x possui quocientes limitados. Do Teorema (2.2.8), segue que, para todo $C > C_0(m_0) = 1/(m_0 + 2)$, não existe $p/q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^2}$$

o que implica $x \in \mathbb{D}$ e, como x é arbitrário, em $E(0)$, segue $E(0) \subset \mathbb{D}$. Portanto, da monotonicidade da dimensão de Hausdorff,

$$1 = dim_H(E(0)) \leq dim_H(\mathbb{D}) \leq 1.$$

□

Corolário 5.4.7. *O conjunto dos números mal aproximáveis é excepcional, ou seja, possui dimensão de Hausdorff total (igual a 1) embora tenha medida de Lebesgue unidimensional nula.*

5.4.2 Números não-Normais

Suponha $\beta \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ com a expansão β - ádica

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\beta^k}$$

onde $a_k \in \mathbb{Z} \cap [0, \beta)$.

Para uma sequência finita $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ de inteiros em $[0, \beta)$ defina

$$N(x, M, b_1, \ldots, b_r) = card\{1 \leq j \leq M; a_j = b_1, \ldots, a_j + r - 1 = b_r\}$$

Definição 5.4.8 (Número normal). *Um número x é normal na base β quando, para todo sequência $(b_1, \ldots, b_r)$, ocorrer*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{N(x, M, b_1, \ldots, b_r)}{M} = \frac{1}{\beta^r}.$$

Um número x é dito normal quando é normal na base β para todo β.

Teorema 5.4.9. *A dimensão de Hausdorff do conjunto dos números não-normais para a base β é igual a 1.*

Demonstração:

Consideremos a sequência $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$, a transformação de Markov $T(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$ com a partição que definimos para tal aplicação no terceiro capítulo e tomemos, para cada $x \in \mathcal{U}$,

$$x = \bigcap_{m=0}^{\infty} P(j_0(x), j_1(x), \ldots, j_m(x)).$$

Consideremos agora o conjunto

$$N = \{x \in \mathcal{U}; \forall P(j_0(x), j_2(x), \ldots, j_m(x)), (j_{m-r+1}(x), \ldots, j_m(x)) \neq (b_1, b_2, \ldots, br)\}.$$

Primeiramente observe que N é um subconjunto dos números não normais na base β, portanto, basta mostrar que $dim_H(N) = 1$.

Como a partição é finita, definamos λ' sendo a distorção como no teorema principal para o caso finito,

$$\nu'(P(j_0, j_1, \ldots, j_m)) = \lambda'(P(j_0, j_1, \ldots, j_m))$$

a menos que, $(j_{m-r+1}, \ldots, j_{m-1}) = (b_1, \ldots, b_{r-1})$. Neste caso façamos

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_m)) = 0 \text{ se } j_m = b_r,$$

$$\nu'(P(j_0, \ldots, j_m)) = \frac{\lambda'(P(j_0, \ldots, j_m))}{1 - \lambda'(P(j_0, \ldots, j_{n-1}, b_r))} \text{ se } j_m \neq b_r.$$

Para todo $P(j_0, \ldots, j_{m-1}) \neq \emptyset$, existe $j_m \in \Delta = \mathbb{N} \cap [0, \beta)$ tal que $\nu'(P(j_0, \ldots, j_{m-1}, j_m)) > 0$. De fato, se $j_m \neq b_r$ então $\nu'(P(j_0, \ldots, j_m)) = 0$ implica $\lambda(P(j_0, \ldots, j_{m-1}, j)) = 0$ para todo $j \neq b_r$. Neste caso, se $(j_{m-r+1}, \ldots, j_{m-1}) \neq (b_1, \ldots, b_{r-1})$, então

$$\lambda(P(j_0, \ldots, j_{m-1})) = \sum_{j\in\Delta} (P(j_1, \ldots, j_{m-1}, j)) = 0$$

o que é uma contradição, e, se $(j_{m-r+1},\dots,j_{m-1})=(b_1,\dots,b_{r-1})$, então

$$\lambda(P(j_0,\dots,j_{m-1}))=\sum_{j\in\Delta}(P(j_1,\dots,j_{m-1},j))=\lambda(P(j_0,\dots,j_{m-r},b_1,\dots,b_r))$$

o que também é uma contradição.

Do fato acima e por raciocínio análogo ao que fizemos na demonstração do teorema principal para o caso finito, podemos afirmar que ν estende uma medida de probabilidade de borel não atômica sobre [0,1]. Além disso, temos que $N=supp(\nu)$ e do Lema (4.2.6), temos que $d_\nu^{\mathcal{P}}(N)=1$. Definindo, para cada $x\in N$

$$\mathcal{A}=\{k\in\mathbb{N}_0; j_{k-r+1}=b_1,\dots,j_{m-1}=b_{r-1}\},$$

e denotando $u_k(x)=P(j_0(x),\dots,j_k(x))$, encontramos $card\{k\le M\mathcal{A}\}\le(2M)/r$, e por contas análogas às feitas no teorema principal, trocando apenas $\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'$ por $\mathcal{A}$, encontramos

$$\left|\frac{\log\nu(u_n(x))}{\log\lambda(u_n(x))}\right|\ge 1-\frac{\displaystyle\sum_{k\le M,\,k\in\mathcal{A}}|\log\lambda'(u_k(x))|}{|\log\lambda(u_n(x))|}.$$

Do Lema (3.3.12), temos que existe $0<c=\inf(\lambda(P(j_0,\dots,j_k))/\lambda(P(j_0,\dots,j_{k-1})))$ tomado sobre todos os $P(j_0,\dots,j_k)\in\mathcal{P}_k$ para $k\le n$. Pelo Lema (3.3.8), encontramos $k_1>0$ e $\gamma>0$ tais que

$$\max_{P\in\mathcal{P}_n}\lambda(P)\le k_1\gamma^{-n}.$$

Destes fatos e de (5.4), (5.5) e (5.6) segue

$$\left|\frac{\log\nu(u_n(x))}{\log\lambda(u_n(x))}\right|\ge 1-\left(\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{|\log c|2n}{n\log\beta-|\log k_1|}\right)\overset{M\to\infty}{\longrightarrow}1$$

Disto concluímos que

$$\inf_{x\in\mathcal{U}\cap supp(\nu)}\left(\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{\log\nu(u_n(x))}{\log\lambda(u_n(x))}\right|\right)\longrightarrow 1$$

quando $\epsilon\to 0$. Portanto, dos Lemas (4.2.2) e (4.2.4), obtemos

$$1\ge d_\lambda^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}\cap supp(\nu))\ge 1\cdot d_\nu^{\mathcal{P}}(\mathcal{U}\cap supp(\nu))=1$$

Portanto, $\dim_H(N)=1$.

$\square$

Capítulo 6

Estimativa Superior da Dimensão em Transformações Expansoras de Espaços Métricos

Já realizamos estimativas de dimensão de Hausdorff, em um espaço compacto da reta, de conjuntos de pontos relacionados às transformações de Markov. Visando mostrar tal resultado para um caso mais geral, dedicaremos este capítulo à uma estimativa superior da dimensão de Hausdorff μ - grade de conjuntos formados por pontos, em espaços métricos, com boas propriedades de recorrência em relação a uma transformação expansora. Escreveremos este texto objetivando a demonstração do resultado e teremos como referência base uma pré-publicação de Fernández, Melián e Pestana [2]. Não faremos aqui as estimativas inferiores por estas serem muito extensas e envolverem um maior embasamento teórico, podendo estas serem assunto suficiente para uma outra dissertação. Contudo, o leitor que se interessar, poderá encontrá-las na mesma referência.

Na primeira seção, exibiremos todas as definições que iremos utilizar para alcançar nosso objetivo. Em seguida, na próxima seção, demonstraremos os lemas e por fim daremos a prova do resultado.

Consideraremos (X, d) sendo um espaço métrico separável localmente completo com uma medida finita, não atômica η sobre a σ - álgebra $\mathcal{A}$ dos conjuntos de Borel e cujo suporte é X.

6.1 Definições

A fim de calcular estimativas de dimensão em espaços métricos mais gerais que o intervalo, o qual temos considerado até agora, necessitamos generalizar também as definições com as quais trabalhamos anteriormente. Por esta razão, dedicamos esta seção a apresentar tais definições que utilizaremos no decorrer do capítulo.

A primeira definição, que generaliza a definição de transformação de Markov é a seguinte:

Definição 6.1.1 (Transformações expansoras). *Dizemos que $(X, d, \mathcal{A}, \eta, T)$ é um sistema expansor se $(X, \mathcal{A}, \eta)$ é um espaço de medida finita, η é não atômica com suporte X, (X, d) é um espaço métrico localmente completo e separável, $\mathcal{A}$ é σ - álgebra de Borel e $T : X \to X$ é uma transformação mensurável satisfazendo as seguintes propriedades:*

(A) *Existe uma coleção de conjuntos $\mathcal{P}_0 = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X tal que $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_0} |P| < \infty$ e*

1. *$\eta(P_i) > 0$,*
2. *$P_i \cap P_j = \emptyset$ se $i \neq j$,*
3. *$\eta(X \backslash \bigcup\limits_i P_i) = 0$,*
4. *$T|_{P_i}$ é injetiva,*
5. *para cada P_i, se $P_j \cap T(P_i) \neq \emptyset$, então $P_j \subset T(P_i)$,*
6. *para cada P_i, se $P_j \subset T(P_i)$, então $T|_{P_i}^{-1} : T(P_i) \cap P_j \to P_i$ é aberta,*
7. *existe um número natural $n_0 > 0$ tal que $\eta(T^{-n_0}(P_i) \cap P_j) > 0$ para todos $P_i, P_j \in \mathcal{P}_0$;*

(B) *Existe $J : X \to [0, \infty)$, $J > 0$ em $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}_0} P$, tal que para todo $P \in \mathcal{P}_0$ e todo subconjunto de Borel de P_i temos*

$$\eta(T(A)) = \int_A J d\eta$$

e existem constantes absolutas $0 < \alpha < 1$ *e* $C_1 > 0$ *tais que para todos* $x, y \in P_i$

$$\left|\frac{J(x)}{J(y)} - 1\right| \leq C_1 d(T(x), T(y))^{\alpha};$$

(C) *Definimos, indutivamente,* $\{\mathcal{P}_i\}$ *de conjuntos abertos*

$$\mathcal{P}_1 = \bigcup_{P_j \in \mathcal{P}_0} \{T|_{P_i}^{-1}(P_j); P_j \in \mathcal{P}_0, P_j \subset T(P_i)\}$$

e, em geral,

$$\mathcal{P}_n = \bigcup_{P_j \in \mathcal{P}_0} \{T|_{P_i}^{-1}(P_j); P_j \in \mathcal{P}_{n-1}, P_j \subset T(P_i)\}.$$

Existem constantes absolutas $\beta > 1$ *e* $C_2 > 0$ *tais que para todos* x, y *no mesmo elemento de* $\mathcal{P}_n$

$$d(T^n(x), T^n(y)) \geq C_2 \beta^n d(x, y).$$

As propriedades (A.1), (A.2), (A.3) e as definições de $\mathcal{P}_n$ nos mostram que tais partições são as markovianas que definimos no Capítulo 3. Também podemos notar que a propriedade (A.5) é a mesma propriedade i) da definição de transformação de Markov. O operador J é o Jacobiano da função T. No caso de T Markov $T' = J$, e semelhantemente ao que observamos na propriedade v) do capítulo 3, (B) mostra que o jacobiano possui propriedade Holder com relação à imagem dos conjuntos e é responsável pelo controle da distorção. O nome expansor se deve à propriedade (C) e equivale à propriedade iv) de Markov. Esta propriedade também nos diz que, como $\sup_{P \in \mathcal{P}_0} |P| < \infty$, então

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_{P \in \mathcal{P}_n} |P|) = 0.$$

Precisaremos também definir uma dimensão local auxiliar para obter a estimativa do resultado principal deste capítulo.

Definição 6.1.2 (Dimensão de uma Medida). *As* $\mathcal{P}_0$ *dimensões inferior e superior de uma medida* ν *no ponto* $x \in X$ *são definidas, respectivamente, por*

$$\overline{\delta}_{\nu}(x) = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log \nu(P(n, x))}{\log |P(n, x)|},$$

$$\underline{\delta}_{\nu}(x) = \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log \nu(P(n, x))}{\log |P(n, x)|},$$

onde $P(n, x)$ *denota o átomo de* $\mathcal{P}_n$ *que contém o ponto* $x \in X$.

Observe que esta dimensão relaciona a medida com o diâmetro de um conjunto.

Também precisamos generalizar a medida e a dimensão de Hausdorff.

Definição 6.1.3 (**Medida** η **- Hausdorff** α **- Dimensional**). *Dado um conjunto* $F \subset X$ *e* $0 < \alpha \leq 1$*, definimos a medida* η *Hausdorff* α *dimensional de* F *como*

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\eta}(F) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{H}^{\alpha}_{\eta,\epsilon}(F)$$

onde

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\eta,\epsilon}(F) = \inf \sum_{i} (\eta(B_i))^{\alpha}$$

com o ínfimo tomado sobre todas as ϵ *- coberturas por bolas de* F.

Analogamente ao que fizemos para $\mathcal{H}^{\alpha}$, podemos demonstrar que $\mathcal{H}^{\alpha}_{\eta}$ é uma medida de Borel.

A diferença básica entre a definição acima e a descrita no Capítulo 1 é a dependência de uma outra medida, o que refina nossa antiga definição, onde η é substituida pelo diâmetro.

Definição 6.1.4 (**Dimensão** η **- Hausdorff**). *A dimensão* η *- Hausdorff de* $F \subset X$ *é definida como*

$$Dim_{\eta}(F) = \inf\{\alpha; \mathcal{H}^{\alpha}_{\eta}(F) = 0\} = \sup\{\alpha; \mathcal{H}^{\alpha}_{\eta}(F) > 0\}.$$

Se $X \subset \mathbb{R}^n$, então a dimensão λ - Hausdorff coincide com $1/n$ vezes a dimensão de Hausdorff.

A definição abaixo é um análogo, para espaços métricos, da rede que definimos no Capítulo 4.

Definição 6.1.5 (**Grade**). *Uma grade é uma coleção* $\Pi = \{\mathcal{B}_n\}$ *de partições de* X*, cada uma delas constituídas por conjuntos abertos disjuntos e tais que, para todo* $B_n \in \mathcal{B}_n$*, existe um único* $B_{n-1} \in \mathcal{B}_{n-1}$ *tal que* $B_n \subset B_{n-1}$ *e* $\sup_{B \in \mathcal{B}_n} diam(B) \to 0$ *quando* $n \to \infty$.

Podemos aqui observar que $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma grade e, a partir de agora, sempre iremos nos referir a esta quando falarmos em grade.

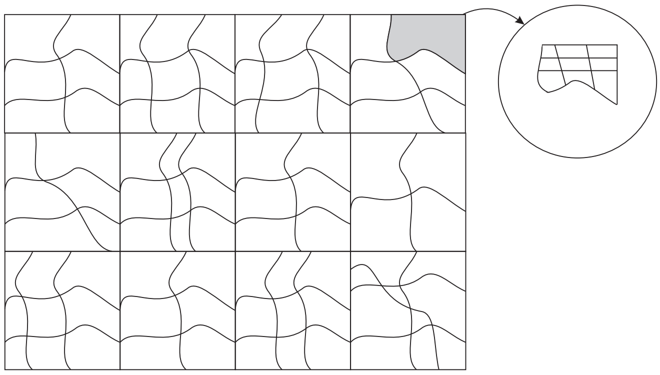

Figura 6.1: Ilustração de uma grade.

Agora podemos definir a medida e a dimensão com as quais iremos trabalhar:

Definição 6.1.6 (**Medida de Hausdorff η - grade α - dimensional**). *Dados uma grade $\Pi = \{\mathcal{P}_n\}$ de X e $0 < \alpha \leq 1$, a medida de Hausdorff η - grade α - dimensional de qualquer $F \subset X$ é definida como*

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\eta}(F) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\eta,n}(F)$$

onde

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\eta,n}(F) = \inf \sum_i (\eta(P_i))^{\alpha}$$

com o ínfimo sendo tomado sobre todas as coberturas $\{P_i\}$ de F com conjuntos $P_i \in \bigcup_{k\geq n} \mathcal{P}_k$.

Definição 6.1.7 (**Dimensão de Hausdorff η - grade**). *Dada uma grade $\Pi = \{\mathcal{P}_n\}$ de X, a dimensão de Hausdorff η - grade de um conjunto F é definida como*

$$Dim_{\Pi,\eta}(F) = \inf\{\alpha; \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\eta}(F) = 0\} = \sup\{\alpha; \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\eta}(F) > 0\}.$$

Se $X \subset \mathbb{R}$, teremos que $\mathcal{H}^{\alpha}_{\lambda}(F) \leq \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\lambda}(F)$ para todo $F \in \mathbb{R}$, assim,

$$Dim_{\lambda}(F) \leq Dim_{\Pi,\lambda}(F).$$

Definição 6.1.8 (**ν - Partição**). *Seja $(X, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida. Uma ν - partição de X é uma família $\mathcal{P}$ de conjuntos mensuráveis com medida positiva satisfazendo:*

1. *se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, então $\nu(P_1 \cap P_2) = 0$,*

2. $\nu\left(X \backslash \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P\right) = 0.$

Segue das propriedades 1 e 2 que $\mathcal{P}$ deve ser finita ou enumerável.

Definição 6.1.9 (Entropia da partição). *Seja $\mathcal{P}$ uma ν - partição de X. A entropia de $\mathcal{P}$ é definida como*

$$H_\nu(P) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \nu(P)\log\frac{1}{\nu(P)}.$$

Definição 6.1.10 (Entropia da Transformação Relativa à Partição). *Se uma transformação mensurável $T : X \to X$ preserva a medida ν e $\mathcal{P}$ é uma ν - partição, então definimos como entropia de T com respeito à $\mathcal{P}$ o seguinte limite:*

$$h_\nu(T,\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\nu(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{P})).$$

A definição acima é possível pois

$$\frac{1}{n}H_\nu(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}(\mathcal{P}))$$

é decrescente.

Definição 6.1.11 (Entropia). *Sob as condições da definição anterior, definimos entropia de T como*

$$h_\nu(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_\nu(T,\mathcal{P}) < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as ν - partições de X.

6.2 Resultados Sobre Entropia e Transformações Expansoras

Nesta seção, estudaremos os lemas que precisaremos para demonstrar a estimativa superior desejada. O primeiro resultado é um teorema clássico de teoria ergódica e sua demonstração pode ser encontrada em [8] página 268.

Teorema 6.2.1 (Shannon, McMillan, Breiman). *Seja $(X, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de probabilidade e seja $T : X \to X$ uma transformação ergódica que preserva ν. Seja $\mathcal{P}$ uma ν - partição com entropia finita $H_\nu(\mathcal{P})$. Então*

$$h_\nu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\nu(P(n,x))}$$

para ν quase todo ponto $x \in X$.

Este teorema descreve a entropia relativa a partição como uma média da "variação"de medidas dos átomos que contem o ponto x.

Lema 6.2.2. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de probabilidade, $T : X \to X$ uma transformação ergódica preservando ν e $\mathcal{P}$ uma partição com entropia $H_\nu(\mathcal{P})$ finita. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência decrescente de conjuntos $\{E_N^\epsilon\}_{N\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\nu(E_N^\epsilon) \to 0 \qquad \textit{quando } N \to \infty$$

e, para todo $x \in X \backslash E_N^\epsilon$,

$$e^{-j(h_\nu+\epsilon)} < \nu(P(n,x)) < e^{-j(h_\nu-\epsilon)}$$

para todo $j \geq N$ com $h_\nu = h_n u(T, \mathcal{P})$.

Demonstração:

Como $H_\nu(\mathcal{P}) < \infty$, o Teorema de Shannon, McMillan, Breiman nos diz que

$$h_\nu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\nu(P(n,x))}$$

para ν quase todo ponto $x \in X$. Assim, existe $S \subset X$ com $\nu(S) = 0$ tal que, para todo $x \in X \backslash S$, existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{1}{j} \log \frac{1}{\nu(P(j,x))} - h_\nu \right| < \epsilon$$

para todo $j \geq n(x)$. Definamos então

$$F_j^\epsilon = \left\{ x \in X; \left| \frac{1}{j} \log \frac{1}{\nu(P(j,x))} - h_\nu \right| < \epsilon \right\}.$$

É claro que os conjuntos F_j^ϵ não são todos vazios. Além disso,

$$E := \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq N} (X\backslash F_j^\epsilon) \subset S.$$

De fato; se $E \not\subseteq S$, então existe $x \in E \cap (X\backslash S)$, ou seja, existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_j^\epsilon$ para todo $j \geq n(x)$, o que implia $x \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\geq N} F_j^\epsilon = E^c$ e isto é uma contradição.

Tomemos

$$E_N^\epsilon = \bigcup_{j\geq N} (X\backslash F_j^\epsilon).$$

Por definição, $E_{n+1} \subset E_n$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e, como $E \subset S$, temos $\nu(E_N^\epsilon) \to 0$ quando $N \to \infty$. Ainda mais, se $x \in X\backslash E_N^\epsilon$, então $x \in F_j^\epsilon$ para todo $j \geq N$ e

$$\left| \frac{1}{j} \log \frac{1}{\nu(P(j,x))} - h_\nu \right| < \epsilon$$

o que implica

$$j(h_\nu - \epsilon) \leq \log \frac{1}{\nu(P(j,x))} \leq j(h_\nu + \epsilon)$$

e, exponenciando, obtemos

$$e^{-j(h_\nu+\epsilon)} \leq \nu(P(j,x)) \leq e^{-j(h_\nu-\epsilon)}.$$

□

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$J_n(x) = J(x)J(T(x))\ldots J(T^{n-1}(x)), \qquad \text{para } x \in \bigcup_{P\in\mathcal{P}_{n-1}} P.$$

Disto segue que

$$\int_A f(T^n(x))J_n(x)d\eta(x) = \int_{T^n(A)} f(x)d\eta(x) \tag{6.1}$$

para toda $f \in L_1(\eta)$ e, em particular,

$$\eta(T^n(A)) = \int_A J_n d\eta$$

para cada conjunto mensurável A contido em algum elemento de $\mathcal{P}_{n-1}$.

Observe que as propriedades de J_n fornecem ao jacobiano as mesmas características do jacobiano tradicional definido para transformações em R^n. São elas: regra da cadeia e mudança de variáveis. Tais características no permitem, como vimos acima, trabalhar com composições de transformações.

O teorema abaixo é uma generalização do teorema folclore que demonstramos no Capítulo 3 e sua demonstração pode ser encontrada em [8] página 214.

Teorema 6.2.3 (Folclore). *Seja $(X, d, \mathcal{A}, \eta, T)$ sistema expansor. Então existe única medida de probabilidade μ sobre $\mathcal{A}$ que é absolutamente contínua com respeito à η tal que*

(i) *T preserva a medida μ,*

(ii) *$d\mu/d\eta$ é Hölder contínua,*

(iii) *$\mu \asymp \eta$, ou seja, existe $k > 0$ tal que*

$$\frac{1}{k}\eta(A) \leq \mu(A) \leq k\eta(A)$$

para todo $A \in \mathcal{A}$,

(iv) *T é exata com respeito à μ,*

(v) $\mu(B) = \dfrac{1}{\eta(X)} \lim\limits_{n\to\infty} \eta(T^{-n}(B))$ *para todo $B \in \mathcal{A}$.*

Iremos nos referir à μ descrita no teorema acima por MPIAC, medida de probabilidade invariante absolutamente contínua, associada ao sistema.

Considerando as partições $\mathcal{P}_n$ como na definição de transformações expansoras, definiremos aqui algumas notações:

- para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Upsilon_n = \cup\{P; P \in \mathcal{P}_n\}$,
- $X_0 = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n} P$,
- X_0^+ é o conjunto X_0 unido ao conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existe uma sequência $\{P_n\}$ com $P_n \in \mathcal{P}_n$ e $P_{n+1} \subset P_n$ tais que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{P_n} = \{x\}$;.

Observe que $\eta(\Upsilon_n)$ é total segundo a propriedade (A.3) da definição de mapas expansores, ou seja, $\eta(X \backslash \Upsilon_n) = 0$. Além disso, se $x \in \Upsilon_n$, então $T(x) \in \Upsilon_{n-1}$ e, se $x \in X_0$, então $P(n,x)$ é definido para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^l(x) \in X_0$ para todo $l \in \mathbb{N}$ e $P(n, T^l(x))$ é definido para todos $n, l \in \mathbb{N}$. O conjunto X_0 tem medida η total pois $X \backslash X_0 \subset \bigcup_{n \geq 0} (X \backslash \Upsilon_n)$ que possui medida η nula. Uma consequência da definição de $P(n,x)$ é que, para $n \geq 1$,

$$T(P(n,x)) = P(n-1, T(x)). \tag{6.2}$$

Como, para $x \in X_0$, $P(n+1,x) \subset P(n,x)$ e $|P(n,x)| \to 0$ quando $n \to \infty$, temos $\bigcap_n P(n,x) = \{x\}$. Temos também, por (6.2), que

$$T^n(P(n,x)) = P(0, T^n(x))$$

e assim,

$$\begin{aligned} P(k,x) &= T^{-1}|_{P(0,x)} T^{-1}|_{P(0,T(x))} \circ \cdots \circ T^{-1}|_{P(0,T^{k-1}(x))} \left(P(0, T^k(x))\right) \\ &= T^{-1}|_{P(0,x)} T^{-1}|_{P(0,T(x))} \circ \cdots \circ T^{-1}|_{P(0,T^{k-2}(x))} \left(T^{-1}(P(0,T^k(x))) \cap P(0, T^{k-1}(x)\right) \\ &= \ldots \\ &= \bigcap_{n=0}^{k} T^{-n(P(0,T^n(x)))}. \end{aligned}$$

Logo

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} (P(0, T^n(x))) = \bigcap_{n=0}^{\infty} P(n,x) = \{x\}$$

e a sequência $\{P(T^n(x))\}_n$ determina o ponto x.

Lema 6.2.4. *Seja $(X, d, \mathcal{A}, \eta, T)$ um sistema expansor. Existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que, para todo $x \in X_0^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, se $x, y \in P(n,x)$, então*

$$\frac{J_s(x)}{J_s(y)} \leq C \qquad \textit{para } s = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Além disso, se $\sup_{P \in \mathcal{P}_0} |T(P)| < \infty$, então (6.3) é válida para $s = n+1$.

Demonstração: Para o caso $s \leq n$, a prova segue analogamente à do Lema (3.3.10) trocando T por J (já que J_s se comporta como a derivada com relação à regra da cadeia) e podemos utilizar a propriedade (C) da definição de mapas expansores no lugar do teorema do valor médio. Para o caso $s = n+1$, observe que

$$\frac{J_{n+1}(x)}{J_{n+1}(y)} = \frac{J(T^{n+1(x)})}{J(T^{n+1}(y))} \frac{J_n(x)}{J_n(y)}.$$

Pelo caso acima e pelas propriedade (B) da definição de transformações expansoras, existem $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ tais que

$$\frac{J_{n+1}(x)}{J_{n+1}(y)} \leq \frac{J(T^{n+1(x)})}{J(T^{n+1(y)})}C_1 \leq C_1(C_2 d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y))^\alpha + 1)$$

como $x, y \in P(n, x_0)$ implica $T^{n+1}(x), T^{n+1}(y) \in P(0, T^n(x_0))$, então

$$\frac{J_{n+1}(x)}{J_{n+1}(y)} \leq C_1(C_2|T(P(0,T^n(x_0)))|^\alpha + 1) \leq C_1(C_2 \sup_{P \in \mathcal{P}_0} |T(P(0,T^n(x_0)))|^\alpha + 1).$$

□

Lema 6.2.5. *Se $A \subset \mathcal{A}$ e $Q \in \mathcal{P}_m$ para algum m, então*

$$\eta(T^{-l}(A) \cap Q) = \int_A \sum_{y \in T^{-l}(x) \cap Q} \frac{1}{J_l(y)} d\eta$$

para $l = 1, 2, \ldots$.

Demonstração:

Como $\mathcal{P}_m$ é partição de X, podemos supor, sem perda de generalidade, que $A \subset P \in \mathcal{P}_m$. Logo, existe uma coleção disjunta $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com cada B_j dentro de um átomo $P_j \in \mathcal{P}_{m+l}$ tais que $\cup B_j = T^{-l}(A) \cap Q$ e, segundo a propriedade (A.4) da definição de transformações expansoras, $T^l|_{B_j} : B_j \to A$ é uma bijeção. Denotemos a inversa de $T^l|_{B_j}$ por S_j. Assim, $T^l(S_j(A)) = A$ e temos

$$\begin{aligned}
\eta(T^{-l}(A) \cap Q) &= \sum_j \eta(B_j) &&= \sum_j \eta(S_j(A)) \\
&= \sum_j \int_{S_j(A)} d\eta &&= \sum_j \int_{S_j(A)} \frac{J_l(x)}{J_l(S_j(T^l(x)))} d\eta \\
&= \sum_j \int_{T^l(S_j(A))} \frac{1}{J_l(S_j(x))} d\eta(x) &&= \sum_j \int_A \frac{1}{J_l(S_j(x))} d\eta(x) \\
&= \int_A \sum_j \frac{1}{J_l(S_j(x))} d\eta(x).
\end{aligned}$$

Fazendo, para cada j, $S_j(x) = y$ e notando que $y \in T^{-l}(x) \cap Q$, obtemos o resultado.

□

Lema 6.2.6. *Se $x \in P_0 \in \mathcal{P}_0$ e $z \in Q \in \mathcal{P}_m$, então*

$$\sum_{y \in T^{-l}(x) \cap Q} \frac{1}{J_l(y)} \leq \begin{cases} C\eta(P(l,z)) & se \quad l < m \\ C\eta(Q) & se \quad l \geq m \end{cases}$$

com $C > 0$ uma constante dependendo de $\mathcal{P}_0$.

Demonstração:

Já vimos anteriormente que $T(P(n,x)) = P(n-1, T(x))$ e, pelo Lema (6.2.4), temos

$$\begin{array}{rclcl} \eta(\mathcal{P}_0) & = & \eta(P(0,x)) & = & \eta(P(0,T^{-l}(y))) \\ & = & \eta(T^l(P(l,y))) & = & \int_{T^l(P(l,y))} d\eta \\ & = & \int_{P(l,y)} J_l(z)d\eta(z) & \leq & D\int_{P(l,y)} J_l(y)d\eta(z) \\ & = & DJ_l(y)\eta(P(l,y)). & & \end{array}$$

Isso implica

$$\frac{1}{J_l(y)} \leq D\frac{\eta(P(l,y))}{\eta(P_0)}$$

onde $D > 0$ é uma constante absoluta. Se $l \geq m$, então $P(l,y) \subset Q$ para todo $y \in T^{-l}(x) \cap Q$ e assim,

$$\sum_{y\in T^{-l}(x)\cap Q} \frac{1}{J_l(y)} \leq D\frac{1}{\eta(P_0)} \sum_{y\in T^{-l}(x)\cap Q} \eta(P(l,y)) \leq \frac{D}{\eta(P_0)}\eta(Q).$$

Se $l < m$, então $Q = P(m,y) \subset P(l,y)$. Assim, para qualquer $z \in Q$, temos $P(l,y) = P(l,z)$. Disto segue

$$\sum_{y\in T^{-l}(x)\cap Q} \frac{1}{J_l(y)} \leq \frac{D}{\eta(P_0)}.$$

Fazendo $C = D/\eta(P_0)$ obtemos o resultado.

□

Lema 6.2.7. *Seja μ a MPIAC associada ao sistema expansor $(X, d, \mathcal{A}, \eta, T)$. Seja $A \in \mathcal{A}$ e $Q \in \mathcal{P}_m$ com $A, Q \subset P_0 \in \mathcal{P}_0$. Então temos que*

$$\mu(T^{-l}(A) \cap Q) \leq \begin{cases} C\mu(A)\mu(P(l,z)) & se \quad l < m \\ C\mu(A)\mu(Q) & se \quad l \geq m \end{cases}$$

onde z é qualquer ponto de Q e $C > 0$ é uma constante que depende de P_0.

Demonstração: Pelo Teorema (6.2.3 (iii)) e pela hipótese que $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_l} |P| < \infty$ da propriedade (A) da definição de mapas expansores, existe $k > 0$ tal que

$$\frac{1}{k}\eta \leq \mu \leq k\eta.$$

Dos Lemas (6.2.5) e (6.2.6), segue

$$\begin{array}{rcl} \mu(T^{-l}(A)\cap Q) & \leq & k\eta(T^{-l}(A)\cap Q) \quad = \quad k\int_A \sum_{y\in T^{-l}(x)\cap Q} \frac{1}{J_l(y)} d\eta(x) \\ & \leq & k\int_A C\eta(P(l,z))d\eta(x) \quad = \quad kC\eta(A)\eta(P(l,z)) \\ & \leq & C\mu(A)\mu(P(l,z)) \end{array}$$

se $l < m$ e , analogamente,

$$\mu(T^{-l}(A)\cap Q) \leq C\mu(Q)\mu(A)$$

se $l \geq m$.

□

O lema acima nos diz que o sistema (T,μ) é misturador, ou seja, se $A, B \subset X$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A)\cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Lema 6.2.8. *Seja $(X, \mathcal{A}, \eta, T)$ um sistema expansor tal que a entropia $H_\mu(\mathcal{P}_0)$ da partição $\mathcal{P}_0$, com respeito à única medida de probabilidade T - invariante que é absolutamente contínua com respeito à η, é finita. Seja X_1 denotando o seguinte subconjunto de X_0:*

$$X_1 = X_0 \backslash [\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_N E_N^{1/m}]$$

com $\{E_N^{1/m}\}$ os conjuntos definidos no Lema (6.2.2) para $\epsilon = 1/m$. Então $\eta(X_1) = \eta(X)$ e, além disso, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ temos

$$\frac{1}{M} e^{-n(h_\mu + 1/m)} < \eta(P(n, x_0)) < M e^{-n(h_\mu - 1/m)}$$

com $M > 0$ dependendo de $P(0, x_0)$.

Demonstração:

Na demonstração do Lema (6.2.2), provamos que $\mu(\bigcap_N E_N^{1/m}) = 0$. Assim, pelo Teorema (6.2.3), obtemos $\eta(\bigcap_N E_N^{1/m}) = 0$ e disto segue que $\eta(X_1^c) = 0$ o que implica $\eta(X_1) = \eta(X)$. Além disto, se $x_0 \in X_1$, então $x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_N E_N^{1/m}$, ou seja, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in X \backslash E_N^{1/m}$. Assim, pelo Lema (6.2.2) temos

$$\frac{1}{M} e^{-n(h_\mu + 1/m)} < \mu(P(n, x_0)) < M e^{-n(h_\mu - 1/m)}.$$

Do fato de μ ser comparável à η, obtemos o resultado.

$\square$

Lema 6.2.9. *Se $A \in \mathcal{A}$ é um subconjunto de $\bigcup_{P\in\mathcal{P}_0} P$ então*

$$Dim_{\Pi,\eta}(A) = Dim_{\Pi,\mu}(A) \quad e \quad Dim_{\eta}(A) = Dim_{\mu}(A).$$

Demonstração:

Demonstraremos aqui o caso da dimensão η - grade e o outro caso é similar. As propriedades (A.2) e (A.3) da definição de mapas expansores nos dizem que

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in\mathcal{P}_0} \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\eta}(A\cap P) &= \sum_{P\in\mathcal{P}_0} \liminf_{n\to\infty} \sum_i (\eta(A\cap P\cap P_i)) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \sum_i \left[\eta\left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_0} A\cap P\cap P_i\right) + \eta\left(A\cap P_i \cap \left(X\setminus \bigcup_{P\in\mathcal{P}_0} P\right)\right)\right]^{\alpha} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \sum_i (\eta(A\cap P_i)) \\
&= \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\eta}(A)
\end{aligned}$$

onde todos os ínfimos são tomados sobre todas as coberturas $\{P_i\}$ de X com $P_i \in \bigcup_{k\geq n} \mathcal{P}_k$. Analogamente, obtemos $\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\mu}(A) = \sum_{P\in\mathcal{P}_0} \mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\mu}(A\cap P)$. Como consequência de (iii) do teorema (6.2.3) temos que $\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\eta}(A\cap P)$ é comparável com $\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\mu}(A\cap P)$ com $P \in \mathcal{P}_0$. Assim, $\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\eta}(A) = 0$ se e somente se $\mathcal{H}^{\alpha}_{\Pi,\,\mu}(A) = 0$, o que implica o resultado.

$\square$

6.3 Estimativa superior para conjunto de pontos recorrentes

Iremos agora demonstrar o resultado desejado. Mostraremos uma estimativa da dimensão de Hausdorff μ - grade do conjunto dos pontos cuja órbita está sempre retornando para próximo de um ponto x_0 pré fixado e acompanham a convergência de uma sequência de átomos das partições $\mathcal{P}_n$ em que se encontram x_0.

Teorema 6.3.1. *Seja $(X, d, \mathcal{A}, \eta, T)$ um sistema expansor tal que a partição $\mathcal{P}_0$ é finita. Seja μ a MPIAC associada. Seja $\{t_n\}$ uma sequência não decrescente de inteiros positivos e U um conjunto aberto em X com $\mu(U) > 0$. Então, se $x_0 \in X_0^+$ sendo*

$$\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\}) = \{x \in U \cap X_0; T^k(x) \in P(t_k, x_0) \text{ para infinitos } k\text{'s}\}$$

temos que

$$Dim_{\Pi,\eta}(\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\})) = Dim_{\Pi,\mu}(\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\})) \leq \min\left\{1, \frac{\log D}{h_\mu + \underline{L}(x_0)}\right\}$$

onde

$$\underline{L}(x_0)) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\eta(P(t_n, x_0))},$$

$h_\mu = h_\mu(T)$ e D é a cardinalidade de $\mathcal{P}_0$. Além disto, se $x_0 \in X_1$, então

$$Dim_{\Pi,\eta}(\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\})) = Dim_{\Pi,\mu}(\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\})) \leq \min\left\{1, \frac{\log D}{(1+\underline{w})h_\mu}\right\}$$

onde

$$\underline{w} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} t_n.$$

Demonstração:

Definamos

$$\mathcal{F}_n = \{T^{-n}(P(t_n, x_0)) \cap Q; Q \in \mathcal{P}_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

Observe que $\mathcal{G}_N$ é uma cobertura de $\tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\})$. De fato; se $x \in \tilde{\mathcal{W}}(U, x_0, \{t_n\})$, então $T^k(x) \in P(t_k, x_0)$ para infinitos valores de $k > N$. Logo, $x \in T^{-k}(P(t_k, x_0))$ para infinitos k's. Como $\mathcal{F}_k$ é partição de $T^{-k}(P(t_k, x_0))$, temos que $x \in \mathcal{F}_k$ para infinitos destes conjuntos, o que implica $x \in \mathcal{G}_N$.

Para $F \in \mathcal{F}_n$, existe $Q \in \mathcal{P}_n$ tal que $F = T^{-n}(P(t_n, x_0)) \cap Q$. Pelo lema (6.2.7), existe $C > 0$, tal que

$$\mu(F) = \mu(T^{-n}(P(t_n, x_0)) \cap Q) \leq C\mu(P(t_n, x_0))\mu(Q)$$

onde C é uma constante dependendo de $\mathcal{P}_0$. Assim,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{F \in \mathcal{F}_k} \mu(F)^\tau \leq \sum_{k=N}^{\infty} C\mu(P(t_n, x_0))^\tau \sum_{Q \in \mathcal{P}_k} \mu(Q)^\tau \tag{6.4}$$

Vamos considerar as seguintes subcoleções de $\mathcal{P}_k$:

$$\mathcal{P}_{k,pequeno} = \{Q \in \mathcal{P}_k; \mu(Q) \leq e^{-kh_\mu}\}$$
$$\mathcal{P}_{k,grande} = \{Q \in \mathcal{P}_k; \mu(Q) > e^{-kh_\mu}\}.$$

Como $card(\mathcal{P}_0) = D$ temos

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}_{k,pequeno}} \mu(Q)^\tau \leq card\mathcal{P}_k e^{-kh_\mu} = D^k e^{-kh_\mu} \quad \text{e}$$

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}_{k,grande}} \mu(Q)^\tau = \sum_{Q\in\mathcal{P}_{k,grande}} \frac{1}{\mu(Q)^{1-\tau}}\mu(Q) \leq e^{kh_\mu(1-\tau)} \sum_{Q\in\mathcal{P}_k} \mu(Q) = e^{kh_\mu(1-\tau)}.$$

Do fato que $h_\mu \leq H_\mu(\mathcal{P}_0) \leq \log D$, segue

$$e^{h_\mu} \leq D \Rightarrow e^{kh_\mu(1-\tau)} = e^{kh_\mu}e^{-kh_\mu\tau} \leq D^k e^{-kh_\mu\tau}$$

Por (6.4), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{F\in\mathcal{F}_k} \mu(F)^\tau &\leq C\sum_{k=N}^{\infty} \mu(P(t_n,x_0))^\tau \sum_{Q\in\mathcal{P}_k}\mu(Q)^\tau \\
&= C\sum_{k=N}^{\infty} \mu(P(t_n,x_0))^\tau \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}_{k,pequeno}}\mu(Q)^\tau + \sum_{Q\in\mathcal{P}_{k,grande}}\mu(Q)^\tau\right) \\
&\leq C\sum_{k=N}^{\infty} \mu(P(t_n,x_0))^\tau \left(D^k e^{-kh_\mu\tau} + D^k e^{-kh_\mu\tau}\right) \\
&= 2C\sum_{k=N}^{\infty} \mu(P(t_n,x_0))^\tau D^k e^{-kh_\mu\tau}. \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

A parte (iii) do Teorema (6.2.3) nos permite dizer que

$$\mu(P(t_k,x_0)) \asymp \lambda(P(t_k,x_0))$$

Logo, para ϵ pequeno e t_k suficientemente grande,

$$\underline{L}(x_0) - \epsilon \leq \frac{1}{k}\log\frac{1}{\lambda(P(t_k,x_0))},$$

ou seja,

$$k(\underline{L}(x_0) - \epsilon) \leq \log\frac{1}{\lambda(P(t_k,x_0))},$$

e, exponenciando, temos

$$e^{-k(\underline{L}(x_0)-\epsilon)} \geq \lambda(P(t_k,x_0)) \asymp \mu(P(t_k,x_0)).$$

Deste fato e de (6.5) segue

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{F\in\mathcal{F}_k}\mu(F)^{\tau}\leq 2C\sum_{k=N}^{\infty}D^k e^{-k\tau(h_\mu+\underline{L}(x_0)-\epsilon)}.$$

E assim, tomando

$$\tau>\frac{\log D}{h_\mu+\underline{L}(x_0)-\epsilon},$$

existe $\gamma>0$ suficientemente pequeno tal que

$$\tau\geq\frac{\log D+\gamma}{h_\mu+\underline{L}(x_0)-\epsilon},$$

e, desta forma,

$$\begin{aligned}\sum_{G\in\mathcal{G}_N}\mu(G)^{\tau} &= \sum_{k=N}^{\infty}\sum_{F\in\mathcal{F}_k}\mu(F)^{\tau}\\ &\leq 2C\sum_{k=N}^{\infty}D^k e^{-k(\log D+\gamma)}\\ &= 2C\sum_{k=N}^{\infty}e^{-k\gamma}\\ &\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{G}_N$ é cobertura de $\tilde{\mathcal{W}}(U,x_0,\{t_n\})$, então

$$Dim_{\Pi,\eta}(\tilde{\mathcal{W}}(U,x_0,\{t_n\}))\leq\tau$$

para todo

$$\tau>\frac{\log D}{h_\mu+\underline{L}(x_0)-\epsilon}.$$

Fazendo $\epsilon\to 0$ e usando o Lema (lema 66) obtemos o resultado para $x_0\in X_0$.

Se $x_0\in X_1$, temos, pelo Lema (6.2.8), que para todo $m\in\mathbb{N}$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $n\geq N$,

$$\frac{1}{M}e^{-t_n(h_\mu+1/m)}<\eta(P(t_n,x_0))<Me^{-t_n(h_\mu-1/m)},$$

ou seja,

$$\frac{1}{M}e^{t_n(h_\mu-1/m)}<\frac{1}{\eta(P(t_n,x_0))}<Me^{t_n(h_\mu+1/m)},$$

o que implica

$$\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{M}+t_n\left(h_\mu-\frac{1}{m}\right)\right)<\frac{1}{n}\log\frac{1}{\eta(P(t_n,x_0))}<\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{M}+t_n\left(h_\mu+\frac{1}{m}\right)\right)$$

onde M é uma constante dependendo de P_0. Tomando o limite com $n \to \infty$ obtemos

$$\overline{L}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{t_n}{n} h_\mu \right) = h_\mu \overline{w}$$

e disto segue o resultado para $x_0 \in X_1$.

$\square$

Apêndice A

Considerações em Teoria da Medida

Este capítulo do apêndice contém algumas informações sobre teoria da medida (definições e teoremas) citadas durante o texto. Caso o leitor não se lembre de tais conceitos e resultados poderá recordar aqui ou, se achar que tais informações são insuficientes ou não tenha estudado teoria de medida, recomendo (como pré requisito para esta dissertação) [12] e [4]. Algumas definições apresentadas nesta parte do apêndice foram retiradas também de [11].

Definição A.0.2 (Ordenação Parcial). *Uma ordenação parcial num conjunto X é uma relação binária $\prec$ em X que é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.*

Definição A.0.3 (Conjunto Totalmente Ordenado). *Um conjunto totalmente ordenado é um conjunto parcialmente ordenado no qual quaisquer dois elementos são comparáveis de acordo com a ordenação parcial dada.*

Definição A.0.4 (Elemento Maximal e Limite Superior). *Seja $(X, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. $\zeta \in X$ é um elemento maximal em X se para todo $\xi \in X$ com $\zeta \prec \xi$, segue-se que $\xi = \zeta$. Um elemento $\eta \in X$ é um limite superior de $Y \subset X$ se $\xi \prec \eta$, para todo $\xi \in Y$.*

Lema A.0.5 (Zorn). *Um conjunto não vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

Definição A.0.6 (Semi-anel). *Seja X um conjunto qualquer, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{S}$ é semi-anel (de X) se*

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

2. $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.

3. *Se* $A, B \in \mathcal{S}$ *então* $A \backslash B$ *pode ser escrito como união finita e de subconjuntos dois a dois disjuntos de* $\mathcal{S}$.

O teorema abaixo é, na verdade, uma parte do teorema de extensões de medidas que pode ser encontrado na integra e com demonstração em [12] (pag 29).

Teorema A.0.7 (Extensão de Medidas). *Seja* X *um conjunto,* $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ *um semi-anel e* $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty)$ *uma medida. Então,* $\exists!$ σ*-álgebra* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *com* $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ *tal que existe uma única medida* ν *definida em* $\mathcal{A}$ *que extende* μ *e* $(X, \mathcal{A}, \nu)$ *é espaço de medida completo.*

Definição A.0.8 (Conjunto Mensurável). *Seja* μ *uma medida exterior definida em um semi-anel formado por subconjuntos de* X*. Um conjunto* $A \subset X$ *é dito* μ *- mensurável se, para todo* $B \subset X$ *tem-se* $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$.

Definição A.0.9 (Função mensurável). *Sejam* X *um conjunto,* Y *um espaço topológico e* μ *uma medida em* X*. Uma função* $f : X \to Y$ *é dita* μ *- mensurável quando para cada aberto* $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ *é* μ *- mesurável.*

Definição A.0.10 (Conjunto σ - finito). *Um subcunjunto* $A \subset X$ *é dito* σ *- finito com respeito a uma medida* μ *definida em* X *quando pode-se escrever* $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$*, onde* B_k *é* μ *- mensurável e* $\mu(B_k) < \infty$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Definição A.0.11 (Função σ - finita). *Uma função* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *é dita* σ *- finita com respeito a uma medida* μ *definida em* X *quando* f *é* μ *- mensurável e* $\{x;\ f(x) \neq 0\}$ *é* σ *- finito com respeito a* μ.

Definição A.0.12 (Espaço-produto, medida-produto). *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espaços de medidas* σ*-finitos. Definimos o espaço produto destes espaços como o espaço de medida* $(Z, \mathcal{C}, \eta)$ *onde:*

- $Z = X \times Y$;

- *$\mathcal{C}$ é a sigma álgebra gerada por $\{A \times B;\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$. Isto é, a menor σ - álgebra que contém todos os $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$.*

- *$\eta : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é medida que satisfaz $\eta(A \times B) = \mu(A).\nu(B)$.*

Teorema A.0.13 (Fubini). *Seja μ uma medida definida em X e ν uma medida definida em Y.*

i)Então $\mu \times \nu$ é uma medida regular definida em $X \times Y$.

ii)Se $A \subset X$ é μ - mensurável e $B \subset Y$ é ν - mensurável, então $A \times B$ é $\mu \times \nu$ - mensurável e $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ iii)Se $S \subset X \times Y$ é σ - finito com respeito a $\mu \times \nu$, então $S_y = \{x;\ (x, y) \in S\}$ é μ - mensurável para ν quase todo ponto y, $S_x = \{y;\ (x, y) \in S\}$ é ν - mensurável para μ quase todo ponto x, $\mu(S_y)$ é ν integrável e $\nu(S_x)$ é μ integrável. Além disso,

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \int_X \nu(S_x) d\mu(y)$$

iv)Se S é $\mu \times \nu$ - integrável, e f é σ - finita com respeito a $\mu \times \nu$ então a aplicação

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ é } \nu \text{ - integrável,}$$
$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \text{ é } \mu \text{ - integrável,}$$

e

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x).$$

Teorema A.0.14 (Critério de Caratheodory). *Seja μ uma medida exterior sobre $\mathbb{R}^n$. Se $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para todos os conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $d(A, B) > 0$, então μ é uma medida de Borel.*

Definição A.0.15 (Distribuição de Massa ou de Medida). *Uma medida sobre um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ é dita uma distribuição de massa (ou de medida).*

Proposição A.0.16 (Princípio de Distribuição de Massa ou de Medida). *Seja μ uma distribuição de massa sobre F e suponha que, para algum s, existem números $c > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

para todo conjunto U com $|U| \leq \epsilon$. Então $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ e

$$s \leq \dim_H F.$$

O resultado abaixo é o único conceito não básico para estudos em um curso de Mestrado presente neste capítulo do apêndice. Portanto, um leitor interessado poderá encontrar sua demonstração em [3] pág 142.

Teorema A.0.17 (Jarník). *Suponha $\alpha > 2$. Seja F o conjunto dos números $x \in [0,1]$ para os quais a inequação*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\alpha}$$

para infinitos inteiros p e infinitos inteiros positivos q. Então $\dim_H(F) = 2/\alpha$.

Apêndice B

Dimensão Box - Counting (contando caixas)

Neste Capítulo do Apêndice apresentamos, sem muitas explicações, um outro conceito de dimensão que auxilia estimativas da dimensão de Hausdorff.

B.1 Definição

Definição B.1.1 (Dimensão Box - Counting). *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$, F não vazio e limitado e seja $N_\delta(F)$ o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo $\delta > 0$ que pode cobrir F. Então definimos:*

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{B.1}$$

a dimensão Box - Counting inferior e

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{B.2}$$

a dimensão Box - Counting superior.

Se os limites são iguais,

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \tag{B.3}$$

é o limite Box - Counting de F.

Observação B.1.2. *Admitiremos δ suficientemente pequeno tal que $-\log\delta$ seja estritamente positivo.*

Existem outras 5 definições equivalentes de dimensão Box-Counting, o que proporciona escolha conveniente do método de cálculo da dimensão.

O método da malha de cubos: Considere de uma δ - malha de cubos, ou seja, uma malha de cubos de lado de comprimento δ

$$[m_1\delta, (m_1+1)\,\delta] \times \ldots \times [m_n\delta, (m_n+1)\,\delta] \text{ onde } m_1, m_2, \ldots m_n \text{ são inteiros.}$$

Vamos denotar $N'_\delta(F)$ o número de cubos da malha que intersectam F.

Assim, $N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$ pois o conjunto de cubos de lado δ que intersectam F é uma $\delta\sqrt{n}$ - cobertura de F.

Se $\delta\sqrt{n} < 1$ então

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F) \Rightarrow \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} = \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta - \log\sqrt{n}}$$

Fazendo $\delta \to 0$, o que implica $\delta\sqrt{n} \to 0$, temos que

$$\underline{\dim}_B F \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{B.4}$$

e também

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{B.5}$$

Por outro lado, posso cobrir um conjunto de diâmetro no máximo $\delta\sqrt{n}$ por, no máximo, 3^n cubos com lados de comprimento δ de uma malha. Logo:

$$\begin{aligned} N'_\delta(F) \leq 3^n N_{\delta\sqrt{n}}(F) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log 3^n N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \leq \frac{\log 3^n}{-\log\delta\sqrt{n}} + \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log\delta\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$ temos que $\delta\sqrt{n} \to 0$ e daí

$$\overline{\dim}_B(F) \geq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{B.6}$$

e também

$$\underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{B.7}$$

Das desigualdades (B.4), (B.6), (B.5), (B.7) temos que

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

As contas acima mostram que para encontrar a dimensão Box - Counting de um conjunto podemos tomar, ao invés de conjuntos quaisquer de diâmetro no máximo δ, uma malha de cubos de lado δ.

Outra equivalência para a definição da dimensão Box - Counting é o:

O método dos cubos arbitrários: Tome $N'_\delta(F)$ como sendo o menor número de cubos arbitrários de lado δ necessários para cobrir o conjunto F.

Por um lado, esta cobertura de cubos será uma $\delta\sqrt{n}$ - cobertura de F, logo

$$N'_\delta(F) \geq N_{\delta\sqrt{n}}(F) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B(F) \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \\ \\ \overline{\dim}_B(F) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \end{cases} \tag{B.8}$$

Por outro lado, podemos considerar cada conjunto de uma δ - cobertura de F contido em um cubo de lado δ. Assim:

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \\ \\ \overline{\dim}_B(F) \geq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \end{cases} \tag{B.9}$$

De (B.8) e (B.9) temos

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

e

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

O método das bolas fechadas arbitrárias: Tome $N'_\delta(F)$ como sendo o menor número de bolas fechadas arbitrárias de raio δ necessários para cobrir o conjunto F.

Claramente, esta será uma δ - cobertura de F, logo

$$N'_\delta(F) \geq N_\delta(F) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B(F) \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \\ \\ \overline{\dim}_B(F) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \end{cases} \tag{B.10}$$

Por outro lado, podemos tomar, para cada bola, uma bola concêntrica de raio 3δ e teremos. Assim:

$$N'_\delta(F) \leq N_{3\delta}(F) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \\ \\ \overline{\dim}_B(F) \geq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \end{cases} \tag{B.11}$$

De (B.10) e (B.11) temos

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

e

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

O método das bolas disjuntas: Seja $N'_\delta(F)$ o maior número de bolas disjuntas de raio δ com centros em F.

Observe que se $B_1(x_1), B_2(x_2), \ldots, B_{N'_\delta(F)}(x_{N'_\delta(F)})$ são tais bolas de raio δ e centros x_i em F com $i = 1, 2, \ldots, N'_\delta(F)$, então $D_1(x_1), D_2(x_2), \ldots, D_{N'_\delta(F)}(x_{N'_\delta(F)})$ são bolas de raio 2δ concêntricas com $B_i(x_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, N'_\delta(F)$ tais que $F \subset \bigcup_{i=1}^{N'_\delta(F)} D_i(x_i)$. Isso ocorre pois, se não, existiria $x \in F$ tal que $x \notin D_i(x_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, N'_\delta(F)$, logo, sendo $d(x,y)$ distâcia de x a y e $B_\delta(x)$ bola de centro x e raio δ,

$$d(x, x_i) > 2\delta \Rightarrow d(x,y) > \delta \ \forall y \in B_i \Rightarrow \overline{B_\delta(x)} \cap \left(\bigcup_{i_1}^{N'_\delta(F)} B_i(x_i) \right) = \emptyset$$

e temos que $\{\overline{B_\delta(x)}\} \cup \{B_i(x_i)\}_{i_1}^{N'_\delta(F)}$ é um conjunto com $N'_\delta(F) + 1$ bolas disjuntas com raios δ e centros em F, o que contradiz a maximalidade de $N'_\delta(F)$.

Desta forma, temos

$$N'_\delta(F) \geq N_{4\delta}(F) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B(F) \geq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \\ \\ \overline{\dim}_B(F) \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \end{cases} \tag{B.12}$$

Por outro lado, seja $\{U_j\}_j$ uma coleção qualquer de conjuntos de diâmetro no máximo δ que cobre F. Temos que $\{U_j\}_j$ cobre $\{x_i\}_{i_1}^{N'_\delta(F)}$ e cada U_j cobre no máximo um dos x_i pois se $x_l, x_k \in U_j$ com $l \neq k$ então, como os B_j são disjuntos, $d(x_l, x_k) \geq 2\delta$ o que contradiz o fato de $|U_j| \leq \delta < 2\delta$ (para δ pequeno).

Assim, cada bola B_i deve conter pelo menos um U_j e daí

$$N'_\delta(F) \leq N_\delta(F) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \\ \\ \overline{\dim}_B(F) \geq \overline{\lim}_{\delta\to 0} \dfrac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \end{cases} \tag{B.13}$$

De (B.12) e (B.13) temos

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

e

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

Estes métodos nos permitem redefinir de maneira mais completa a dimensão Box - Counting do seguinte modo:

Definição B.1.3 (Dimensão Box - Counting)**.** *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$, F não vazio e limitado. Definimos:*

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta\,(F)}{-\log\delta}$$

a dimensão Box - Counting inferior e

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta\,(F)}{-\log\delta}$$

a dimensão Box - Counting superior

Onde $N_\delta(F)$ é:

1)o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo $\delta > 0$ que pode cobrir F ou

2)o número de cubos de uma δ - malha de cubos que intersectam F ou

3)o menor número de cubos de lado de comprimento δ que cobrem F ou

4)o menor número de bolas fechadas com raio δ que cobrem F ou

5)o maior número de bolas disjuntas com raio δ com centros em F

Se os limites são iguais,

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

é o limite Box - Counting de F.

Observação B.1.4. *Para obter a dimensão Box - Counting de um conjunto F é suficiente considerar nas equações* (B.1) *e* (B.2) *os limites com $\delta_k \to 0$ sendo (δ_k) uma sequência decrescente tal que $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ paraalguma constante $0 < c < 1$ (em particular para $\delta_k = c^k$).*

De fato:

Inicialmente considere $\max\limits_{k\in\mathbb{N}} \delta_k < 1$ o tome $\delta < \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$. Como $\delta_k \downarrow 0$, existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_{k+1} \leq \delta \leq \delta_k$.

Disto segue que $N_{\delta_k}(F) \leq N_\delta(F) \leq N_{\delta_{k+1}}(F)$ e $\dfrac{1}{-log\delta_{k+1}} \leq \dfrac{1}{-\log\delta} \leq \dfrac{1}{-\log\delta_k}$ o que implica

$$\frac{N_{\delta_k}(F)}{-log\delta_k - \log c} \leq \frac{N_{\delta_k}(F)}{-log\delta_k + \log\left(\frac{\delta_k}{\delta_{k+1}}\right)} = \frac{N_{\delta_k}(F)}{-log\delta_{k+1}} \leq \frac{N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq$$

$$\frac{N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_k} = \frac{N_{\delta_{k+1}}(F)}{-log\delta_{k+1} + \log\left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\right)} \leq \frac{N_{\delta_{k+1}}(F)}{-log\delta_{k+1} + \log c}$$

Ou seja,

$$\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k - \log c} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_{k+1} + \log c}$$

Fazendo $\delta \to 0$, temos que $\delta_k \to 0$ e assim

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} = \overline{\lim_{\delta_k\to 0}} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

e

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \lim_{\delta_k \to 0} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

B.2 Propriedades

Propriedade B.2.1. *Se* $B_1 \subset B_2$ *então* $\overline{\dim}_B B_1 \leq \overline{\dim}_B B_2$ *e* $\underline{\dim}_B B_1 \geq \underline{\dim}_B B_2$

Demonstração:

Tomemos $B_1 \subset B_2$. Dado $\delta > 0$, C_1 a malha de cubos necessária para cobrir B_1, e C_2 a malha de cubos necessária para cobrir B_2, temos que

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow C_1 \subset C_2 \Rightarrow N_\delta(B_1) \leq N_\delta(B_2).$$

Portanto

$$\frac{\log N_\delta(B_1)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(B_2)}{-\log \delta} \Rightarrow \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(B_1)}{-\log \delta} \geq \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(B_2)}{-\log \delta} \Rightarrow \underline{\dim}_B B_1 \geq \underline{\dim}_B B_2.$$

Analogamente, temos que $\overline{\dim}_B B_1 \leq \overline{\dim}_B B_2$.

□

Propriedade B.2.2. $\overline{\dim}_B$ *é finitamente estável, isto é, dados* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ *então* $\overline{\dim}_B(E \cap F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$.

Demonstração:

Por um lado, da proposição (B.2.1) segue

$$\begin{cases} E \subset E \cup F \\ F \subset E \cup F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B (E \cup F) \\ \overline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B (E \cup F) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\dim}_B (E \cup F) \geq \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\} \tag{B.14}$$

Por outro lado, tome N_δ como malha de cubos e suponha, sem perda de generalidade, $N_\delta E \leq N_\delta F$. Logo, temos

$$N_\delta(E \cup F) \leq N_\delta(E) + N_\delta(F) \leq 2N_\delta(F) \Rightarrow \frac{\log N_\delta(E \cup F)}{-\log \delta} \leq \frac{2}{-\log \delta} + \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\dim}_B(E\cup F) \leq \overline{\dim}_B F \Rightarrow \overline{\dim}_B(E\cup F) \leq \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\} \tag{B.15}$$

Pelas equações (B.14) e (B.15) temos $\overline{\dim}_B(E\cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$.

□

Propriedade B.2.3. $\underline{\dim}_B$ *e* $\overline{\dim}_B$ *são bi-lipschitz invariantes.*

Demonstração:

Sejam $F \subset \mathbb{R}^n$, $f : F \to \mathbb{R}^n$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que $c_2|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_1|x-y|$ para todo $x, y \in F$.

Assim temos $c_2F = \{c_2x;\ x \in F\} \subset f(F) \subset c_1F = \{c_1x;\ x \in F\}$. Logo toda δ - malha de cubos de c_1F é *delta* - malha de cubos de $f(F)$ e temos

$$N_\delta(c_1F) \geq N_\delta(f(F)) \Rightarrow c_1^n N_\delta(f(F)) \geq N_\delta(f(F)) \Rightarrow \frac{\log c_1^n}{-\log\delta} + \frac{N_\delta(F)}{-\log\delta} \geq \frac{N_\delta(f(F))}{-\log\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B F \leq \underline{\dim}_B(f(F)) \\ \overline{\dim}_B F \geq \overline{\dim}_B(f(F)) \end{cases} \tag{B.16}$$

Além disso, toda δ - malha de cubos de $f(F)$ é *delta* - malha de cubos de c_2F e temos

$$N_\delta(c_2F) \leq N_\delta f((F)) \Rightarrow c_2^n N_\delta(F) \leq N_\delta(f(F)) \Rightarrow \frac{\log c_2^n}{-\log\delta} + \frac{N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{N_\delta(f(F))}{-\log\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B F \geq \underline{\dim}_B(f(F)) \\ \overline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B(f(F)) \end{cases} \tag{B.17}$$

De (B.16) e (B.17) segue o resultado.

□

Propriedade B.2.4. *Se* $\overline{F}$ *é o fecho de* $F \subset \mathbb{R}^n$ *então* $\underline{\dim}_B\overline{F} = \underline{\dim}_B F$ *e* $\overline{\dim}_B\overline{F} = \overline{\dim}_B F$.

Demonstração:

Seja $N_\delta(F)$ o menor número de bolas fechadas $\overline{B}_i$ com $i = 1, 2, \ldots N_\delta(F)$ que cobre F. Logo $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N_\delta(F)} \overline{B_i}$ é fechado e

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta(F)} \overline{B_i} \Rightarrow \overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta(F)} \Rightarrow N_\delta(F) \geq N_\delta(\overline{F}) \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dim}_B\overline{F} \geq \underline{\dim}_B F \\ \overline{\dim}_B\overline{F} \leq \overline{\dim}_B F \end{cases} \tag{B.18}$$

Além disso, $F \subset \overline{F}$. Segue da propriedade B.2.1 que

$$\begin{cases} \underline{\dim}_B \overline{F} \geq \underline{\dim}_B F \\ \overline{\dim}_B \overline{F} \leq \overline{\dim}_B F \end{cases} \tag{B.19}$$

De (B.18) e (B.19) temos o resultado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abercrombie, A. G.; Nair, R. An exceptional set in the ergodic theory of Markov maps of the interval Proc. London Math. Soc. (3) 75 (1997), no. 1, 221–240

[2] Fernández, J. L.; Melián, M. V.; Pestana, D., Quantitative recurrence properties of expanding maps (Pré print) arXiv.org ¿ math ¿ arXiv:math/0703222, 2007

[3] Falconer, K., Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, Segunda Edição, WILEY, 2005.

[4] Evans, L.C.; Gariepy, R.F., Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC PRESS,1992.

[5] Lorenzo J. Diaz Casado; Danielle de Rezende Jorge Uma introdução aos sistemas dinâmicos via frações contínuas Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2007

[6] Oxtoby, J. C Measure and Category Springer - Verlag, 1971

[7] Lasota, A.; Yorke, J. A. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, Transactions of the American Mathematical Society, volume 186, 1973, 481–488.

[8] Mañé, R., Teoria Ergódica, Primeira Edição, Projeto Euclides, IMPA, 1983.

[9] Billingsley, P. Ergodic theory and information, Wiley, New York, 1965

[10] Oliveira, K.; Viana, M. Introdução à Teoria Ergódica Notas de aula.

[11] Oliveira, C.R., Introdução à Análise Funcional, Segunda Edição, Quarta Impressão, IMPA, 2008.

[12] A. Armando de Castro Jr., Curso de Teori da Medida, Primeira Edição, Projeto Euclides, IMPA, 2004.