Desigualdade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional

Gleison do Nascimento Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Didier Jacques François Pilod

Rio de Janeiro
Agosto de 2010

Desigualdade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional

Gleison do Nascimento Santos
Orientador: Didier Jacques François Pilod

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Didier Jacques François Pilod- IM/UFRJ (Presidente)

Prof. Roger Peres de Moura - CCN/UFPI

Prof. José Felipe Linares Ramirez - IMPA

Prof. Xavier Carvajal Paredes

Rio de Janeiro
Agosto de 2010

Ficha Catalográfica

Santos, Gleison Nascimento.
Desigualdade de Calderón para comutadores
e a regra de Leibniz fracional/ Gleison do Nascimento Santos.-
Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2010.
vi, 61f.: il., 1cm.
Orientador: Didier Jacques François Pilod
Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2010.
Referências Bibliográficas: f. 60-61.
1. Desigualdade de Calderón.
2. comutador.
3. regra de Leibniz.
4. Littlewood-Paley. I. Pilod, Didier Jacques François
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do
Instituto de Matemática. III. Título.

Agradecimentos

Aos meus irmãos Gláubert e Gláudima, e a dona Socorro, minha mãe, pelos conselhos e consolos nessa difícil etapa de minha vida. Gostaria também de agradecer a Roger Peres de Moura, meu professor de graduação, pelos muitos conselhos e ensinamentos em matemática. Agradeçoo também a meu orientador Didier Pilod, meu orientador, pelos muitos ensinamentos e pela sua paciência.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Desiguadade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional

Gleison do Nascimento Santos

Orientador: Didier Jacques François Pilod

Apresentamos a desigualdade de Calderón para comutadores generalizada e a regra de Leibniz fracional. O ponto crucial nessas provas é o uso da teoria de Littlewood-Paley.
palavras-chave: Desigualdade de Calderón, comutador, regra de Leibniz, Littlewood-Paley.

Desigualdade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional

Gleison do Nascimento Santos

Supervisor: Didier Jacques François Pilod

We present the inequality for Calderón commutators generalized and fractional Leibniz rule. The crucial point in these proofs is the use of Littlewood-Paley theory.
keywords: Calderón inequality, comutator, Leibniz rule, Litllewood-Paley theory.

Conteúdo

1 Preliminares **6**
1.1 Notações . . . 6
1.2 Alguns resultados básicos . . . 8
1.3 O teorema de Littlewood-Paley . . . 11

2 Desigualdade de Calderón para comutadores **23**
2.1 Introdução . . . 23
2.2 Lemas técnicos . . . 23
2.3 Prova do teorema de Calderón para comutadores . . . 32

3 A regra de Leibniz fracional **40**
3.1 Derivadas fracionárias . . . 40
3.2 Alguns lemas técnicos . . . 41
3.3 Estimativas para a derivada fracionária do produto . . . 48
3.4 A regra de Leibniz no caso $p_1 = \infty$ e $\alpha_1 = 0$ . . . 50
3.5 Aplicação da Regra de Leibniz fracional . . . 58

Introdução

A Análise Harmônica é um ramo da Matemática que investiga as noções de série de Fourier, transformada de Fourier e suas generalidades. As técnicas reais em Análise Harmônica desenvolvidas na segunda metade do século XX por Calderón-Zygmund, Stein, Coifman, Meyer entre outros, têm profundas conexões e aplicações em diversas áreas da Matemática moderna, como geometria, teoria dos números, equações diferenciais parciais ou teoria ergódica.

Aqui estudaremos dois resultados de grande relevância na Análise Harmônica, a desigualdade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional. O comutador de dois operadores A, B é definido por $[A, B] = AB - BA$. Trataremos em particular dos comutadores da forma $[T, M_a]$ onde T é um operador agindo num espaço de funções e M_a é o operador de multiplicação pontual por a, tratado em [1] por R. Coifman, Rochberg e Weiss para estender a teoria clássica dos espaços de Hardy H^p a dimensões mais altas. Esse tipo de comutador surge naturalmente na seguinte situação: Considere uma função a real com derivada limitada e $\Gamma(x) = x + ia(x)$ uma curva Lipschitz no plano complexo. Definimos então a integral de Cauchy de uma função f ao longo de Γ por

$$C_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - z} dt.$$

$C_\Gamma f$ define uma função analítica em $\Omega_+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; y > a(x)\}$. Na fronteira Γ de Ω_+ seu valor é dado por

$$\lim_{\epsilon \to 0} C_\Gamma f(\Gamma(x) + i\epsilon),$$

que pode ser expressado também por

$$\frac{1}{2}\Big[f(x) + \frac{i}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)(1 + ia'(y))}{x - y + i(a(x) - a(y))} dy\Big].$$

Isso nos motiva a considerar o operador

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x - y + i(a(x) - a(y))} dy$$

com núcleo associado $K(x, y) = \frac{1}{x-y+i(a(x)-a(y))}$. Quando $\|a'\|_{L^\infty} < 1$, $K(x, y)$ pode ser escrito como uma série geométrica

$$K(x, y) = \frac{1}{x - y} \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \Big(\frac{a(x) - a(y)}{x - y}\Big)^k.$$

Assim é natural considerarmos os operadores da forma

$$T_k f(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\left(\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\right)^k \frac{f(y)}{x-y}dy$$

cujo núcleo associado é

$$K_k(x,y) = \frac{1}{x-y}\left(\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\right)^k.$$

Quando $k=1$, temos o operador

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{a(x)-a(y)}{(x-y)^2}f(y)dy.$$

Um argumento de integração por partes nos dá

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{a(y)f'(y)}{x-y}dy - a(x)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f'(y)}{x-y}dy + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{a'(y)f(y)}{x-y}dy.$$

Daí,

$$Tf(x) = H(af') - aH(f') + H(a'f) = [H, M_a]f' + H(a'f) \tag{1}$$

onde H é a transformada de Hilbert definida por

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy.$$

Podemos nos perguntar se o operador T é limitado em L^p, para $1<p<+\infty$. A resposta é sim, não só para T, mas para todos os T_k. Este fato pode ser provado combinando a teoria de integrais singulares de Calderón-Zygmund(os núcleos K_k são núcleos standard na notação de Coifman-Meyer [1]) e variantes do Teorema $T1$ [5]. Uma outra maneira de obter que o operador T é limitado em L^p seria estimando o comutador em (1). Isso mostra que o estudo desse tipo de comutador é relevante, já que ele nos permite obter limitação do operador T sem o uso do teorema $T1$. Usando que o operador T, bem como o operador H, são limitados, podemos obter da expressão (1) a desigualdade de Calderón para comutadores

$$\|[H,a]f'\|_{L^p} \le c\|a'\|_{L^\infty}\|f\|_{L^p}.$$

Neste trabalho, estudamos uma generalização dessa desigualdade, enuciada a seguir:

Teorema 0.1. *Se T é um dos operadores P_+, P_-, ou a transformada de Hilbert H, e $1<p<+\infty$ então para cada $l, m \in \mathbb{Z}_+$ existe uma constante $c = c(p,m,l) > 0$ tal que*

$$\|\partial_x^l [T,a]\partial_x^m f\|_{L^p} \le c\|\partial_x^{l+m} a\|_{L^\infty}\|f\|_{L^p}.$$

O resultado acima foi provado por L. Dawson, H. McGahagan e G. Ponce em [4] e aplicado ao estudo das propriedades de decaimento das equações de Schrödinger do tipo

$$\partial_t u - i\Delta u = f(|u|)u, \qquad \partial_t u - i(\Delta u + W(x,t)u) = F(x,t).$$

A Diferenciação é geralmente tida como uma operação discreta, por exemplo, derivadas de ordem 1, 2, ... Nesse contexto a famosa regra de Leibniz

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{d^j f}{dx^j} \frac{d^{n-j} g}{dx^{n-j}}$$

nos dá a expressão exata para a derivada do produto de duas funções. Entretanto, em algumas circunstâncias considera-se derivadas de ordem fracional D^α com $0 < \alpha < 1$, onde D^α é o potencial de Riesz de ordem $-\alpha$. Nesse contexto é natural nos perguntarmos se há uma regra análoga para a derivada do produto de duas funções. Para derivadas fracionárias não temos uma expressão exata, porém vale a seguinte estimativa:

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g - gD^\alpha f\|_{L^p} \leq c\|D^{\alpha_1} f\|_{L^{p_1}} \|D^{\alpha_2} g\|_{L^{p_2}}$$

onde $1 < p, p_1, p_2 < +\infty$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ e $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$. Essa estimativa, chamada *regra de Leibniz fracional*, foi provada em 1993 por Kenig, Ponce e Vega em [10]. Ela tem várias aplicações, como por exemplo, em EDP, onde ela se tornou uma ferramenta muito importante na obtenção de boa colocação para algumas equações de evolução não lineares.

Os resultados acima, a desigualdade de Calderón para comutadores e a regra de Leibniz fracional compartilham o fato de poderem ser ambas provadas usando a teoria de Littlewood-Paley. Ela foi desenvolvida na primeira metade século do XX e permitiu estender certos resultados sobre operadores em L^2 a L^p, $1 < p < +\infty$. Por exemplo, em L^2, podemos assegurar a limitação de um operador dado por um multiplicador usando o teorema de Plancherel. Agora se queremos garantir a limitação de um multiplicador em L^p para $p \neq 2$, o teorema de Plancherel não é suficiente. Usando as técnicas da teoria de Littlewood-Paley podemos conseguir a limitação em L^p de multiplicadores, quando $1 < p < +\infty$. Dois resultados nessa direção são o teorema de Mihlin e o teorema de Littlewood-Paley , que apresentaremos neste trabalho em uma dimensão. A idéia básica da teoria é decompor uma função numa soma de funções f_k com freqüências localizadas nos intervalos diádicos da reta. Mais precisamente, seja $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ a decomposição da reta em intervalos diádicos. Consideramos

$$f_k = \{\eta(2^{-k}\cdot)\hat{f}\}^\vee,$$

para uma certa função suave η. O resultado fundamental é o teorema de Littlewood-Paley, que diz que podemos comparar a norma em L^p de f com a norma L^p da função quadrado

$$S(f) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2\right)^{1/2}.$$

Isso nos permite comparar o tamanho da função f em termos do tamanho de cada uma das funções f_k na norma L^p. Essa técnica é uma ferramenta poderosa e nos permite obter resultados de grande importância, no caso aqui, a desigualdade de Calderón para comutadores generalizada e a regra de Leibniz fracional. Finalmente, observamos que para obter a regra de Leibniz no caso $\alpha_2 = 0$, $p_2 = +\infty$ e $p_1 = p$, é preciso utilizar técnicas mais sofisticadas como o espaço BMO introduzido por J. Nirenberg e F. John. Uma consequência imediata da regra de Leibniz fracional nesse caso é que $W^{s,p}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach com relação ao produto pontual de funções, para qualquer $s > 0$ e $1 < p < +\infty$.

O trabalho obedece à seguinte sequência:

No primeiro capítulo, damos algumas nocões e notações preliminares a fim de situar o leitor aos fatos que são usados nos capítulos seguintes, e tornar o texto o mais auto-contido possível. Aí, demonstramos o teorema de Littlewood-Paley generalizado.

No segundo Capítulo enuciamos e provamos a desigualdade de Calderón para comutadores generalizada, utilizando as técnicas de decomposição diádica de uma função. O ponto crucial nessa prova é o teorema de Littlewood-paley generalizado.

No terceiro capítulo provamos a regra de Leibniz fracional, também utilizando a mesma técnica empregada no capítulo 2. Finalizamos o trabalho dando uma aplicação da regra de Leibniz, mostrando que o espaço de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach, para $1 < p < +\infty$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações

Nesta seção daremos algumas notações que serão úteis ao longo do texto.

Por comodidade, nas várias desigualdades que aparecem no texto, frequentemente denotaremos por um mesmo c uma constante positiva, mesmo essa representando quantidades distintas de uma expressão para outra.

Se $0 < a < b$ então $\pm[a, b]$ denotará o conjunto

$$\pm[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < |x| < b\}.$$

Se J é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$ então $|J|$ denotará a sua medida de Lesbesgue.

$\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$ denotarão, respectivamente, os conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \ \text{ e } \ \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $supp(f)$ denotará o suporte de f que é o conjunto

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Se (X, μ) é um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$, $L^p(X, \mu)$ denotará o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{C}$ tais que $|f|^p$ é integrável e para cada $f \in L^p(X, \mu)$, $\|f\|_{L^p}$ denotará

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(X, \mu)$ denotará o conjunto de todas as funções mensuráveis essencialmente limitadas, isto é, o conjunto das funções f tais que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0,$$

para algum $c > 0$. Para cada $f \in L^\infty(X, \mu)$, $\|f\|_{L^\infty}$ denotará

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

Quando $X = \mathbb{R}^n$, denotaremos simplesmente $L^p(\mathbb{R}^n)$, deixando implícito que a medida em questão é a medida de Lebesgue.

Denotaremos por $S(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Schwartz todas as funções de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty, \quad \forall \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

onde

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

e

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

$\hat{f}$ denotará a transformada de Fourier de uma dada função f, que é definida, quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por

$$\hat{f}(\xi) = c \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi}}$ e $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

De modo semelhante, $\check{f}$ denotará a transformada de Fourier inversa, que quando $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, é dada por

$$\check{f}(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

$f * g$ denotará a convolução de duas funções f e g, que é dada por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy,$$

desde que a integral faça sentido.

Utilizaremos também alguns operadores:

M denotará a função maximal de Hardy-Littlewood que é definida por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|I_r|} \int_{I_r} |f(x-y)| dy, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

onde $I_r = (-r, r)$.

P_+ denotará o operador de projeção nas frequências positivas, definido via transformada de Fourier por

$$(P_+ f)^\wedge(\xi) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

De modo análogo, P_- denotará o operador de projeção nas frequências negativas, dado pela expressão

$$(P_- f)^\wedge(\xi) = \chi_{\mathbb{R}_-}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

H denotará a transformada de Hilbert, que é dada no espaço de Schwarz $S(\mathbb{R})$ por

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

É sabido que da definição acima tem-se

$$(Hf)^\wedge(\xi) = -isgn(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Sejam L e T dois operadores definidos num espaço X. Então $[L,T] : X \to X$ denotará o comutador de L e T, dado por

$$[T,L]f = TLf - LTf.$$

Denotaremos simplesmente por $[T,a]$ no caso particular em que L é o operador de multiplicação por a.

1.2 Alguns resultados básicos

Essa seção destina-se a apresentar resultados que serão utilizados de maneira essencial no trabalho.

Proposição 1.1. *$supp(f*g) \subset \overline{supp(f)+supp(g)}$*

Demonstração. De fato, se $x \notin supp(f)+supp(g)$, então para todo $y \in supp(f)$ temos que $x-y \notin supp(g)$ e daí $g(x-y)=0$. Assim

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{supp(f)} f(y)g(x-y)dy = 0.$$

Logo

$$\{x \in \mathbb{R} : (f*g)(x) \neq 0\} \subset supp(f)+supp(g).$$

Portanto

$$\begin{aligned} supp(f*g) &= \overline{\{x \in \mathbb{R} : (f*g)(x) \neq 0\}} \\ &\subset \overline{supp(f)+supp(g)}. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2 (Propriedades da transformada de Fourier)**.** .
i)$(f*g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$;
ii)$(f(h+\cdot))^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{ih\xi}$;
iii) $(fe^{ih\xi})^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi-h)$;
iv) $(f(\lambda\cdot))^\wedge(\xi) = \lambda^{-n}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$;
v) $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi)$;
vi) $(-i\xi_j f)^\wedge(\xi) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}$.

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 1.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja (X,μ) um espaço de medida. Se $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ são tais que $1/p + 1/q = 1$, então*

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

para toda $f \in L^p(X,\mu)$ e toda $g \in L^q(X,\mu)$.

Demonstração. Ver [8] ou [7]. □

Proposição 1.4. *Seja (X,μ) um espaço de medida. Se $f \in L^p(X,\mu)$, com $1 \leq p < \infty$, e q é tal que $1/p + 1/q = 1$, então*

$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\left|\int_X f(x)\overline{g(x)}dx\right| : g \in L^q(X,\mu), \quad \|g\|_{L^q} = 1\right\}.$$

Demonstração. Segue do teorema de dualidade de Riesz, ver [8] capítulo 16. □

Proposição 1.5 (Desigualdade de Minkowski para integrais)**.** *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida σ- finitos e seja $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $f(\cdot,y) \in L^p(X,\mu)$ para quase todo $y \in Y$, então $x \longmapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y) \in L^p(X,\mu)$ e*

$$\left\|\int_Y f(\cdot,y)d\nu(y)\right\|_{L^p} \leq \int_X \|f(\cdot,y)\|_{L^p}d\nu(y)$$

Demonstração. Ver [7]. □

Proposição 1.6. *Seja (X,μ) um espaço de medida e seja $p_0 \in [1,+\infty)$. Então $f \in L^\infty(X,\mu) \cap L^{p_0}(X,\mu)$, se, e somente se, $f \in L^p(X,\mu)$, para todo $p \in [p_0,\infty)$, e $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} < \infty$.*

Demonstração. Se $f \in L^\infty(X,\mu) \cap L^{p_0}(X,\mu)$ então, dado $p \in [p_0,+\infty)$ temos

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_X |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}d\mu(x) \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}d\mu(x) < +\infty.$$

Logo, $f \in L^p(X,\mu)$ e além disso,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-p_0}{p}}\|f\|_{L^{p_0}}^{\frac{p_0}{p}} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{p_0}{p}}\|f\|_{L^{p_0}}^{\frac{p_0}{p}},$$

donde $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} < \infty$.

Agora suponhamos que $f \in L^p(X,\mu)$ para todo $p \in [p_0,+\infty)$, e que $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_{L^p} < +\infty$. Então existe $K > 0$ tal que $\|f\|_{L^p} \leq K$ para todo $p \in [p_0,+\infty)$. Considere o conjunto

$$J = \{x \in X; |f(x)| \geq K + 1\}.$$

Temos que

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \geq \int_J |f(x)|^p d\mu(x) \geq (K+1)^p \mu(J).$$

Logo

$$\mu(J) \leq \left(\frac{K}{K+1}\right)^p$$

para todo $p \in [p_0, +\infty)$. Fazendo p tender a $+\infty$, obtemos que $\mu(J) = 0$. Daí $f \in L^\infty(X, \mu)$. $\square$

Teorema 1.1 (Plancherel)**.** *Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

Demonstração. Ver [6] ou [7]. $\square$

Proposição 1.7. *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$, $\epsilon > 0$, tal que*

$$\psi(r) = \sup_{|y|>r} |\varphi(y)|\,, \quad r > 0,$$

satisfaz

$$\int_0^{+\infty} \psi(r)dr = c < \infty.$$

Então vale

$$\sup_{\epsilon>0} |\varphi_\epsilon * f(x)| \leq cMf(x),$$

onde M denota a função maximal de Hardy-Littlewood.

Demonstração. Ver [13] Teorema 2, capítulo III.

$\square$

Nos resultados a seguir usaremos a seguinte definição:

Definição 1.1. *Um operador $T : L^p \longrightarrow L^q$ é dito (p,q) fraco, $q < \infty$, se existir uma constante $c > 0$ tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q, \forall \ \ \lambda > 0.$$

T é dito (p,q) forte, se ele for um operador limitado de L^p em L^q. Para $q = \infty$, T é dito (p,∞) fraco, se ele for limitado de L^p em L^∞.

Teorema 1.2 (Hardy-Littlewood)**.** *A função maximal de Hardy-Littlewood é um operador $(1,1)$ fraco e (p,p) forte, se $1 < p \leq \infty$.*

Demonstração. Ver [5] ou [13]. $\square$

Teorema 1.3 (Riesz-Kolmogorov). *A transformada de Hilbert é um operador* $(1,1)$ *fraco e* (p,p) *forte para* $1 < p < \infty$.

Demonstração. Ver [5] ou [13]. $\square$

Como consequência do teorema de Riesz-Kolmogorov segue:

Proposição 1.8. P_+ *e* P_- *são* $(1,1)$ *fraco e* (p,p) *fortes, para* $1 < p < \infty$

Demonstração. De fato, isso segue do teorema de Riesz-Kolmogorov, notando-se que

$$P_+ = iH + I_d \;\; e \;\; P_- = iH - I_d.$$

$\square$

1.3 O teorema de Littlewood-Paley

Um dos interesses da análise harmônica é o estudo de operadores dados por multiplicadores, que são operadores da forma $Tf = \{m\hat{f}\}^{\vee}$, onde m seja uma função em $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Como exemplos desses tipos de operadores podemos citar a transformada de Hilbert H, e também os operadores $P_+, \;\; P_-$. Desde que m é uma função limitada segue pelo Teorema de Plancherel que um operador dado por um multiplicador m é limitado em $L^2(\mathbb{R})$. O mesmo não é válido em $L^p(\mathbb{R})$ em geral. No entanto, impondo certas condições sobre os multiplicadores, o teorema a seguir nos garante que o operador é limitado.

Teorema 1.4 (Mihlin). *Seja* $m : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \;\; C^1$*, tal que* $|m^{(j)}(\xi)| \leq B|\xi|^{-j}, \;\; \forall \;\; \xi \neq 0, \;\; j = 0, 1$. *Então, existe uma constante* $c = c(p) > 0$*, tal que para todo* $1 < p < \infty$*,*

$$\|T_m f\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}, \;\; \forall \;\; f \in L^p(\mathbb{R}),$$

onde T_m *é dado por* $(T_m f)^{\wedge}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$.

Demonstração. Ver [12] ou [13] capítulo 4. $\square$

Se η uma função real suave tal que

$$\eta \geq 0, supp(\eta) \subset \pm[1/2, 2]$$

e

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta(2^{-j}x) = 1, \;\; \forall \;\; x \neq 0.$$

Agora considere os operadores Q_j, dados por $\widehat{Q_j f}(\xi) = \eta(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$.

Teorema 1.5 (Littlewood-Paley). *Se* η *satisfaz as condições acima, então existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$c^{-1}\|f\|_{L^p} \leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}, \;\; \forall f \in L^p(\mathbb{R}^{\ltimes}).$$

Demonstração. Ver [12] ou [13]. $\square$

A estimativa na norma $L^p(\mathbb{R})$ da função $\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2\right)^{1/2}$, chamada função quadrada, será de grande ultilidade tanto na demonstração do teorema de Calderón para comutadores quanto na demonstração da regra de Leibniz fracional. Para isso apresentaremos uma versão mais geral do teorema acima, onde a função η satisfaz condições menos restritivas.

Teorema 1.6 (Teorema de Littlewood-Paley generalizado)**.** *Seja $\eta \in C^1(\mathbb{R} - \{0\})$, que verifica*

$$\left|\frac{d}{d\xi}\eta(\xi)\right| \leq \left\{ \begin{array}{l} c|\xi|^{\gamma-1}\ ,\ |\xi| \leq 1 \\ c|\xi|^{-\gamma-1}\ ,\ |\xi| \geq 1 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

para algum $\gamma > 0$ e $c > 0$, e além disso, existem $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$, tais que

$$\tilde{c}_1 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\eta(2^{-j}\xi)|^2 \leq \tilde{c}_2 \tag{1.2}$$

para todo $\xi \neq 0$. Então se $1 < p < \infty$, vale:

a)

$$\tilde{c}^{-1}\|f\|_{L^p} \leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq \tilde{c}\|f\|_{L^p}; \tag{1.3}$$

b)

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f_j \right\|_{L^p} \leq c \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{,L^p} \tag{1.4}$$

para toda sequência $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ em $\subset S(\mathbb{R})$.

A demonstração do teorema acima seguirá a mesma idéia da demonstração do teorema de Littlewood-Paley em [12]. As condição (1.1) e (1.2) serão usadas para verificarmos as hipóteses do Teorema de Mihlin, e então obter desigualdade do ítem a) do teorema. O ítem b) seguirá de a) usando-se dualidade e a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Assim como na demonstração do teorema de Littlewood-Paley, em [12], iremos considerar uma sequência de funções $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $\Omega = [0,1]$ dadas por

$$r_j(w) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \text{se}\ \frac{k}{2^j} \leq w < \frac{k+1}{2^j},\ k\ \text{par} \\ -1,\ \text{se}\ \frac{k}{2^j} \leq w < \frac{k+1}{2^j},\ k\ \text{ímpar} \end{array} \right.$$

Essas funções são chamadas de funções de Rademacher que são variáveis aleatória independentes, *i.e.* se ρ é a medida de probabilidade em Ω então

$$\rho(\{r_j < a\} \cap \{r_j < b\}) = \rho(\{r_j < a\})\rho(\{r_j < b\}),\ \ \forall\ \ a\ \neq\ \ b.$$

Começaremos com alguns lemas técnicos.

Lema 1.1. *Para todo $n \geq 1$ e toda sequência $\{a_j\}_{j=1}^n$ em $\mathbb{C}$, temos*

$$\rho\Big(\Big\{\Big|\sum_{j=1}^n a_j r_j\Big| > \lambda\Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\Big)^{1/2}\Big\}\Big) \leq 4e^{-\lambda^2/2}, \quad \forall \;\; \lambda > 0.$$

Demonstração. Sejam $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{j=0}^n |a_j|^2$ e $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_j r_j$ onde os r_j são as funções de Rademacher. Queremos mostrar que para cada $\lambda > 0$,

$$\rho(\{|S_n| > \lambda\sigma\}) \leq 4e^{-\lambda^2/2}.$$

Primeiramente suponhamos que os a_j são reais. Desde que as funções r_j são variáveis aleatórias independentes vale

$$\int_\Omega e^{tS_n(w)} d\rho(w) = \int_\Omega \prod_{j=1}^n e^{ta_j r_j(w)} d\rho(w) = \prod_{j=1}^n \int_\Omega e^{ta_j r_j(w)} d\rho(w). \tag{1.5}$$

Agora note que

$$\int_\Omega e^{ta_j r_j(w)} d\rho(w) = \cosh(ta_j), \quad \forall \;\; j = 1\ldots, n.$$

De fato, como $\Omega = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{2^j} I_k^j$, onde $I_k^j = [\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}]$ e $r_j \equiv 1$ em I_k^j para k par, e $r_j \equiv -1$ em I_k^j para k ímpar então

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{ta_j r_j(w)} d\rho(w) &= \sum_{k\ par} \int_{I_k^j} e^{ta_j} d\rho(w) + \sum_{k\ impar} \int_{I_k^j} e^{-ta_j} d\rho(w)\\ &= e^{ta_j} \sum_{k\ par} \int_{I_k^j} d\rho(w) + e^{-ta_j} \sum_{k\ impar} \int_{I_k^j} d\rho(w)\\ &= \frac{1}{2}e^{ta_j} + \frac{1}{2}e^{-ta_j} = \cosh(ta_j).\end{aligned}$$

Em seguida, usaremos que

$$\cosh(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

De fato

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-x)^k}{k!}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{k\ par} 2\frac{x^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\frac{x^2}{2})^k}{k!}\\ &= e^{\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

Então pela desigualdade (1.6) temos que

$$\int_\Omega e^{ta_j r_j(w)} d\rho(w) \leq e^{\frac{t^2}{2}a_j^2}.$$

Logo usando (1.5) e essa última desigualdade, obtemos

$$\int_\Omega e^{tS_n(w)} d\rho(w) \leq e^{\frac{t^2}{2}\sigma^2}. \tag{1.7}$$

Deduzimos de (1.7) que

$$\begin{aligned}\rho(\{S_n > \lambda\sigma\}) &= \int_\Omega \chi_{\{S_n > \lambda\sigma\}}(w) d\rho(w) \\ &\leq \int_\Omega \frac{e^{tS_n(w)}}{e^{t\lambda\sigma}} d\rho(w) \\ &\leq e^{\frac{t^2}{2}\sigma^2 - t\lambda\sigma},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Logo, escolhendo $t = \frac{\lambda}{\sigma}$, obtemos

$$\rho(\{S_n > \lambda\sigma\}) \leq e^{-\lambda^2/2}. \tag{1.8}$$

De modo similar,

$$\begin{aligned}\rho(\{S_n < -\lambda\sigma\}) &= \int_\Omega \chi_{\{s_n < -\lambda\sigma\}}(w) d\rho(w) \\ &\leq \int_\Omega \frac{e^{tS_n(w)}}{e^{-t\lambda\sigma}} d\rho(w) \\ &\leq e^{\frac{t^2}{2}\sigma^2 + t\lambda\sigma} \leq e^{-\lambda^2/2},\end{aligned}$$

escolhendo $t = -\frac{\lambda}{\sigma}$. Daí temos que

$$\begin{aligned}\rho(\{|S_n| > \lambda\sigma\}) &\leq \rho(\{S_n > \lambda\sigma\}) + \rho(\{S_n < -\lambda\sigma\}) \\ &\leq 2e^{-\lambda^2/2}.\end{aligned}$$

Para finalizar, quando os a_j são complexos, consideramos

$$\sigma_1 = \left(\sum_{j=1}^n Re(a_j)^2\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \left(\sum_{j=1}^n Im(a_j)^2\right)^{1/2}.$$

Notemos que

$$\{|S_n| > \lambda\sigma\} \subset \{|Re(S_n)| > \lambda\sigma_1\} \cup \{|Im(S_n)| > \lambda\sigma_2\}.$$

De fato, se $|Re(S_n(w))| \leq \lambda\sigma_1$ e $|Im(S_n(w))| \leq \lambda\sigma_2$ então

$$|S_n(w)| = \left(|Re(S_n(w))|^2 + |Im(S_n(w))|^2\right)^{1/2} \leq \lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2} = \lambda\sigma.$$

Logo
$$\rho(\{|S_n| > \lambda\sigma\}) \leq \rho(\{|Re(S_n)| > \lambda\sigma_1\}) + \rho(\{|Im(S_n)| > \lambda\sigma_2\}).$$
Então, como pelo caso anterior vale
$$\rho(\{|Re(S_n)| > \lambda\sigma_1\}) \leq 2e^{-\lambda^2/2} \quad \text{e} \quad \rho(\{|Im(S_n)| > \lambda\sigma_2\}) \leq 2e^{-\lambda^2/2}$$
temos que
$$\rho(\{|S_n| > \lambda\sigma\}) \leq 4e^{-\lambda^2/2}.$$
$\square$

Lema 1.2 (Desigualdade de Khinchin)**.** *Para todo* $p \in [1, \infty)$ *existe* $c = c(p) > 0$ *tal que*
$$c^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{p/2} \leq \int_\Omega \left|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j(w)\right|^p d\rho(w) \leq c\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{p/2}, \tag{1.9}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam σ e S_n como na demonstração do lema anterior. Temos de uma propriedade de L^p que,
$$\begin{aligned}\int_\Omega |S_n(w)|^p d\rho(w) &= \int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1}\rho(\{|S_n| > \lambda\})d\lambda \\ &= \sigma^p \int_0^{+\infty} p\mu^{p-1}\rho(\{|S_n| > \mu\sigma\})d\mu.\end{aligned}$$
Pelo lema anterior obtemos
$$\int_\Omega |S_n(w)|^p d\rho(w) \leq 4\sigma^p \int_0^{+\infty} p\mu^{p-1}e^{-\mu^2/2}d\mu = \sigma^p c(p).$$
Daí segue que
$$\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} a_j r_j(w)\right|^p d\rho(w) \leq c\left(\sum_{i=1}^{n} |a_j|^2\right)^{p/2}, \tag{1.10}$$
o que prova a segunda desigualdade em (1.9)

Agora, vamos mostrar a primeira desigualdade. Para isso consideremos dois casos.
Caso 1: $p = 1$. Deduzimos usando a desigualdade de Hölder e (1.10) que
$$\begin{aligned}\int_\Omega |S_n|^2 d\rho(w) &= \int_\Omega |S_n|^{2/3}|S_n|^{4/3}d\rho(w) \\ &\leq \left(\int_\Omega |S_n|d\rho(w)\right)^{2/3}\left(\int_\Omega |S_n|^4 d\rho(w)\right)^{1/3} \\ &\leq c\left(\int_\Omega |S_n|d\rho(w)\right)^{2/3}\sigma^{4/3}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |S_n|^2 d\rho(w) &= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n a_j r_j\right)\left(\sum_{k=1}^n \overline{a_k} r_k\right) d\rho(w) \\
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^n |a_j|^2 r_j^2 d\rho(w) + \int_\Omega \sum_{j\neq k} a_j \overline{a_k} r_j r_k d\rho(w) \\
&= \sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \sum_{j\neq k} a_j \overline{a_k} \int_\Omega r_j r_k d\rho(w).
\end{aligned}$$

Já que as funções r_j são variáveis aleatórias independentes segue que

$$\int_\Omega r_j r_k d\rho(w) = \int_\Omega r_j d\rho(w) \int_\Omega r_k d\rho(w) \ \ \forall \ \ j \neq k.$$

Como

$$\int_\Omega r_j d\rho(w) = 0,$$

segue que

$$\int_\Omega r_j r_k d\rho(w) = 0 \ \ \forall \ \ j \neq k.$$

Assim, obtemos

$$\int_\Omega |S_n|^2 d\rho(w) = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 = \sigma^2. \tag{1.12}$$

Logo, substituindo em (1.11), obtemos

$$\sigma^2 \leq c\left(\int_\Omega |S_n| d\rho(w)\right)^{2/3} \sigma^{4/3}.$$

Logo

$$c^{-1}\sigma \leq \int_\Omega |S_n| d\rho(w).$$

E isso completa a prova do primeiro caso.
Caso 2: $1 < p < \infty$. Seja q tal que $1/p + 1/q = 1$. Usando a desigualdade de Hölder, deduzimos da segunda desigualdade em (1.9) e de (1.12) que

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_\Omega S_n \overline{S_n} d\rho(w) \\
&\leq \left(\int_\Omega |S_n|^p d\rho(w)\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |S_n|^q d\rho(w)\right)^{1/q} \\
&\leq c(q)^{1/q} \left(\int_\Omega |S_n|^p d\rho(w)\right)^{1/p} \sigma.
\end{aligned}$$

Logo
$$\sigma^p \leq c \int_\Omega |S_n|^p d\rho(w),$$
o que conclui a prova do Lema 1.2. $\square$

Agora estamos prontos para dar uma prova do Teorema 1.6.

Demonstração do teorema 1.6. Começamos com a prova de a). Para isso consideremos $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ as funções de Rademacher e para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos
$$m_n(\xi, w) = \sum_{j=-n}^{n} r_j(w)\eta(2^{-j}\xi).$$
Verifiquemos que m_n satisfaz as hipóteses do teorema de Mihlin. Para ver que m_n é limitada note que, pela desigualdade de Khinchin e pela condição (1.2) do teorema 1.6 temos
$$\|m_n(\xi,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} = \left\{\int_\Omega |\sum_{j=-n}^{n} \eta(2^{-j}\xi) r_j(w)|^p d\rho(w)\right\}^{1/p} \leq \left\{\sum_{j=-n}^{n} |\eta(2^{-j}\xi)|^2\right\}^{1/2} \leq \tilde{c}_2^{1/2},$$
para cada $\xi \neq 0$. Daí, para cada $\xi \neq 0$ fixado temos
$$m_n(\xi,\cdot) \in L^p(\Omega,\rho) \;\text{ e }\; \|m_n(\xi,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq \tilde{c}_2^{1/2},$$
para $p \in [1, +\infty)$. Pela proposição 1.6 temos que
$$m_n(\xi,\cdot) \in L^\infty(\Omega,\rho) \;\text{ e }\; \|m_n(\xi,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{c}_2^{1/2}.$$
Logo
$$\sup_{\xi\neq 0} \|m_n(\xi,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{c}_2^{1/2}.$$
Portanto m_n é limitada e além disso, ela é limitada por uma constante que independe de n. Vamos agora analisar $\frac{\partial}{\partial\xi} m_n$.
$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi} m_n(\xi,w)\right| \leq \sum_{j=-n}^{n} 2^{-j} \left|\frac{d}{d\xi}\eta(2^{-j}\xi)\right| = |\xi|^{-1} \sum_{j=-n}^{n} |2^{-j}\xi| \left|\frac{d}{d\xi}\eta(2^{-j}\xi)\right|. \tag{1.13}$$
Notemos que para cada $\xi \neq 0$, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que
$$2^{j_0-1} \leq |\xi| < 2^{j_0}.$$
Se $|j_0| < n$, separamos o último somatório em (1.13) em duas partes:
$$I = \sum_{j=-n}^{j_0-1} |2^{-j}\xi| \left|\frac{d}{d\xi}\eta(2^{-j}\xi)\right| \;\text{ e }\; II = \sum_{j=j_0}^{n} |2^{-j}\xi| \left|\frac{d}{d\xi}\eta(2^{-j}\xi)\right|.$$

No primeiro somatório note que $|2^{-j}\xi| \geq 2^{j_0-1-j}$, e como $j \leq j_0 - 1$ então $|2^{-j}\xi| \geq 1$. Daí, segue de (1.1) que

$$\left|\frac{d}{d\xi}\eta(2^{-j}\xi)\right| \leq c|2^{-j}\xi|^{-\gamma-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} I &\leq c\sum_{j=-n}^{j_0-1} |2^{-j}\xi||2^{-j}\xi|^{-\gamma-1} = c\sum_{j=-n}^{j_0-1} |2^{-j}\xi|^{-\gamma} \\ &\leq c\sum_{j=-n}^{j_0-1} 2^{-(j_0-1-j)\gamma} = c\sum_{j=0}^{j_0+n-1} 2^{-\gamma j} \\ &\leq c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma j} = c\frac{1}{1-2^{\gamma}} = c(\gamma). \end{aligned}$$

No segundo somatório, temos que

$$|2^{-j}\xi| < 2^{j_0-j} \leq 1,$$

pois $j \geq j_0$, e então deduzimos de (1.1) que

$$\left|\frac{d}{d\xi}\eta(2^{-j}\xi)\right| \leq c|2^{-j}\xi|^{\gamma-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} II &\leq c\sum_{j=j_0}^{n} |2^{-j}\xi||2^{-j}\xi|^{\gamma-1} = c\sum_{j=j_0}^{n} |2^{-j}\xi|^{\gamma} \\ &\leq c\sum_{j=j_0}^{n} 2^{(j_0-j)\gamma} = c\sum_{j=0}^{j_0+n} 2^{-j\gamma} \\ &\leq c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\gamma j} = \frac{c}{1-2^{-\gamma}} = \tilde{c}(\gamma). \end{aligned}$$

Suponhamos agora $|j_0| \geq n$. Se $j_0 \leq -n$, então o somatório em (1.13) pode ser estimado assim como estimamos II. Se $j_0 \geq n$ então o somatório em (1.13) pode ser estimado assim como estimamos I. Assim, em qualquer caso, $|j_0| < n$ ou $|j_0| \geq n$, obtemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}m_n(\xi, w)\right| \leq c|\xi|^{-1},$$

onde c é uma constante que independe de n. Então pelo teorema de Mihlin, existe $c = c(p) > 0$ tal que

$$\|T_{m_n} f\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}, \quad \forall \ f \in \quad L^p(\mathbb{R}),$$

onde T_{m_n} é dado por $(T_{m_n}f)^\wedge(\xi) = m_n(\xi)\hat{f}(\xi)$. Por outro lado,

$$\|T_{m_n}f\|_{L^p} = \left\|\left\{m_n\widehat{f}\right\}^\vee\right\|_{L^p} = \left\|\sum_{j=-n}^{n} r_j\{\eta(2^{-j}\cdot)\widehat{f}\}^\vee\right\|_{L^p} = \left\|\sum_{j=-n}^{n} r_j(w)Q_jf\right\|_{L^p}.$$

Integrando sobre o espaço de medida (Ω,ρ) temos

$$\int_\Omega\left(\int_\mathbb{R}\left|\sum_{j=-n}^{n} r_j(w)Q_jf(x)\right|^p dx\right)d\rho(w) \leq c\|f\|_{L^p}^p.$$

Logo, segue do teorema de Fubini que

$$\int_\mathbb{R}\left(\int_\Omega\left|\sum_{j=-n}^{n} r_j(w)Q_jf(x)\right|^p d\rho(w)\right)dx \leq c\|f\|_{L^p}^p.$$

Agora usando o lema de Khinchin, obtemos

$$\int_\mathbb{R}\left(\sum_{j=-n}^{n}|Q_jf(x)|^2\right)^{p/2} dx \leq c\|f\|_{L^p}^p.$$

Fazendo n tender para $+\infty$, obtemos, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int_\mathbb{R}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|Q_jf(x)|^2\right)^{p/2} dx \leq c\|f\|_{L^p}^p$$

i.e.,

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|Q_jf|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}.$$

Isso demonstra a segunda desigualdade do ítem a) do teorema.

Agora vamos à demonstração da primeira desigualdade do ítem a) do teorema.

Seja $g \in S(\mathbb{R})$, tal que $\|g\|_{L^q} \leq 1$, onde $1/p + 1/q = 1$. Seja θ o argumento do número complexo

$$\int_\mathbb{R} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Pelo teorema de Plancherel temos:

$$\begin{aligned}\left|\int_\mathbb{R} f(x)\overline{g(x)}dx\right| &= \left(\int_\mathbb{R} f(x)\overline{g(x)}dx\right)e^{-i\theta}\\ &= \int_\mathbb{R} f(x)\overline{g(x)e^{i\theta}}dx\\ &= \int_\mathbb{R} \hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}d\xi. \qquad (1.14)\end{aligned}$$

Segue então que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}d\xi \in \mathbb{R}+$$

e daí

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}d\xi &= \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\,(\hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)})d\xi. \qquad (1.15)\end{aligned}$$

Agora, como por hipótese

$$\tilde{c} \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\eta(2^{-j}\xi)|^2, \quad \forall \quad \xi \neq 0$$

segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right) &\leq \tilde{c}^{-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\eta(2^{-j}\xi)|^2 \operatorname{Re}\left(\hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right) \\ &= \tilde{c}^{-1}\operatorname{Re}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\eta(2^{-j}\xi)|^2 \hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right) \\ &= \tilde{c}^{-1}\operatorname{Re}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \eta(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)\overline{\eta(2^{-j}\xi)(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right) \\ &= \tilde{c}^{-1}\operatorname{Re}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (Q_jf)^\wedge(\xi)\overline{Q_j(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right). \qquad (1.16)\end{aligned}$$

Logo, segue de (1.16) e do teorema de Plancherel que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\left(\hat{f}(\xi)\overline{(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right)d\xi &\leq \tilde{c}^{-1}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (Q_jf)^\wedge(\xi)\overline{Q_j(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}\right)d\xi \\ &= \tilde{c}^{-1}\operatorname{Re}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} (Q_jf)^\wedge(\xi)\overline{Q_j(e^{i\theta}g)^\wedge(\xi)}d\xi \\ &= \tilde{c}^{-1}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} (Q_jf)(x)\overline{(Q_j(e^{i\theta}g))(x)}dx.\end{aligned}$$

Agora, usando as desigualdades de Cauchy- Schwarz, Hölder bem como a parte a) do teorema já provada, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} (Q_jf)(x)\overline{(Q_j(e^{i\theta}g))(x)}dx \leq \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_jf(x)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j(e^{i\theta}g)(x)|^2\right)^{1/2} dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j (e^{i\theta} g)(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q} \\
&\leq c \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \|e^{i\theta} g\|_{L^q} \\
&\leq c \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j f(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \right| \leq c \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_k f(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}
$$

para toda $g \in L^q(\mathbb{R})$, com $\|g\|_{L_q} \leq 1$. Logo, usando dualidade (Proposição 1.4) obtemos a desigualdade desejada.

Por fim, provemos a parte b).

Seja $g \in S(\mathbb{R})$ e $1 < q < +\infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$. Usando o teorema de Plancherel e a desigualdade de Cauchy- Schwarz temos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f_j(x) \right\} \overline{g(x)} dx \right| &= \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} Q_j f_j(x) \overline{g(x)} dx \right| \\
&= \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \eta_j(\xi) \hat{f}_j(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \right| \\
&= \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_j(\xi) \overline{(Q_j g)^\wedge(\xi)} d\xi \right| \\
&= \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_j(x) \overline{Q_j g(x)} dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j(x) \overline{Q_j g(x)} \right\} dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j g(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j(x)|^2 \right)^{1/2} dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Hölder e a desigualdade (1.3)

$$
\left| \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f_j(x) \right\} \overline{g(x)} dx \right| \leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j g|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}
$$

$$\leq c\|g\|_{L^q}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}.$$

Logo, obtemos por dualidade que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}Q_jf_j\right\|_{L^p} &= \sup_{\left\{\begin{array}{l} g\in L^q\\ \|g\|_{L^q}=1\end{array}\right.}\left|\int_{\mathbb{R}}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}Q_jf_j(x)\right\}\overline{g(x)}dx\right|\\ &\leq c\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f_j|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p},\end{aligned}$$

o que conclui a prova do Teorema 1.6. □

Capítulo 2

Desigualdade de Calderón para comutadores

2.1 Introdução

Neste capítulo provaremos o seguinte teorema

Teorema 2.1 (Teorema de Calderón para comutadores generalizado)**.** *Seja T um dos operadores P_+, P_- ou H. Então para qualquer $1 < p < \infty$ e qualquer $l, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ existe uma constante $c = c(p, m, l) > 0$ tal que*

$$\|\partial_x^l [T; a] \partial_x^m f\|_{L^p} \leq c \|\partial_x^{l+m} a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}.$$

O teorema de Calderón tem várias aplicações em equações diferenciais parciais, por exemplo, em [4] Dawson, McGahagan e Ponce , utilizaram essa estimativa de comutadores envolvendo as projeções P_+ e P_- para obter propriedades de decaimento de uma classe de equações de Schrödinger do tipo

$$\partial_t u + i\Delta u = f(|u|)u, \quad \partial_t u - i(\Delta u + W(x,t)u) = F(x,t).$$

O teorema acima foi provado por Dawson, McGahagan e Ponce em [4], usando as técnicas da Teoria de Littlewood-Paley. O caso particular em que $l = 0$ e $m = 1$ já havia sido provado por Calderón usando a teoria das integrais singulares. Aqui, na generalidade que estamos considerando, os argumentos usados na demonstração do caso particular em que $l = 0, m = 1$, não funcionam. Para demonstrar o Teorema 2.1 vamos seguir a demonstração em [4].

2.2 Lemas técnicos

Nessa seção apresentaremos uma série de resultados e definições que nos auxiliarão na prova do teorema de Calderón para comutadores. Começamos com a construção de uma função suave η suportada em $\pm[1/2, 2]$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(2^{-k}\xi) = 1, \quad \forall \ \ \xi \neq 0.$$

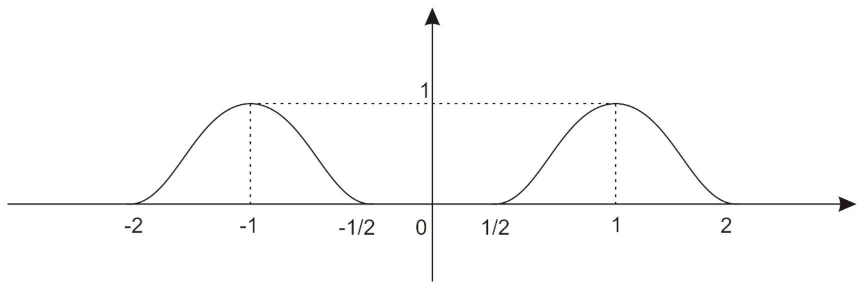

Figura 2.1: gráfico da função η

Para obtermos uma tal função, consideramos uma função suave ϕ, suportada em $[-2, 2]$ e constante igual a 1 em $[-1, 1]$. Definimos η por

$$\eta(\xi) = \phi(|\xi|) - \phi(2|\xi|).$$

Segue que se $\xi \neq 0$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(2^{-k}\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} [\phi(2^{-k}|\xi|) - \phi(2^{-k+1}|\xi|)] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} [\phi(2^{-k}|\xi|) - \phi(2^{-k+1}|\xi|)] \\
&= \lim_{n\to+\infty} [\phi(2^{-n}|\xi|) - \phi(2^{n+1}|\xi|)].
\end{aligned}$$

Temos que $2^{-n}|\xi| \to 0$ quando $n \to +\infty$ e, desde que $\xi \neq 0$, temos que $2^{n+1}|\xi| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} [\phi(2^{-n}|\xi|) - \phi(2^{n+1}|\xi|)] = \phi(0) = 1.$$

Além disso $supp(\eta) \subset \pm[1/2, 2]$, pois se $\xi \notin \pm[1/2, 2]$ então ou $|\xi| < 1/2$ ou $|\xi| > 2$. No primeiro caso $|\xi| < 1$ e $2|\xi| < 1$, donde $\phi(|\xi|) = \phi(2|\xi|)$. No segundo caso $\phi(|\xi|) = \phi(2|\xi|)$ também, pois $|\xi|$ e $2|\xi| > 2$. Em qualquer dos casos, $\phi(|\xi|) - \phi(2|\xi|) = 0$. Portanto $\eta(\xi) = 0$, para todo $\xi \notin \pm[1/2, 2]$.

Considerando η como acima definimos o operador Q_k por

$$Q_k f = \{\eta(2^{-k}\cdot)\hat{f}\}^{\vee}.$$

A partir dos operadores Q_k, definimos o operador P_k, dado por

$$P_k f = \sum_{j\leq k-3} Q_j f.$$

Note que

$$(P_k f)^\wedge(\xi) = p(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi),$$

com $p \equiv 1$ em $[-1/8, 1/8]$ e $supp(p) \subset [-1/4, 1/4]$. De fato, como

$$\eta(\xi) = \phi(|\xi|) - \phi(2|\xi|),$$

então

$$\begin{aligned}
(P_k f)^\wedge(\xi) &= \hat{f}(\xi) \sum_{j \leq k-3} (\phi(2^{-j}|\xi|) - \phi(2^{-j+1}|\xi|)) \\
&= \hat{f}(\xi) \lim_{n \to -\infty} \sum_{j=n}^{k-3} \big(\phi(2^{-j}|\xi|) - \phi(2^{-j+1}|\xi|)\big) \\
&= \hat{f}(\xi) \lim_{n \to -\infty} (\phi(2^{3-k}|\xi|) - \phi(2^{-n+1}|\xi|)) \\
&= \hat{f}(\xi)\phi(8 \cdot 2^{-k}|\xi|) =: p(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Já que $supp(\phi) \subset [-2, 2]$, segue que

$$supp(p) = supp(\phi(8|\cdot|)) \subset [-1/4, 1/4].$$

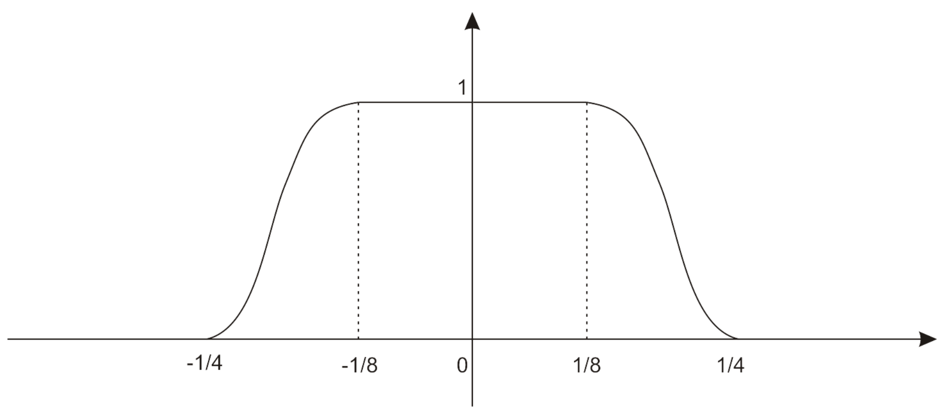

Figura 2.2: gráfico da função p

Consideramos também o operador $\tilde{Q}_k$ definido por

$$\tilde{Q}_k = \{\tilde{\eta}(2^{-k}\cdot)\hat{f}\}^\vee$$

onde $\tilde{\eta}$ é uma função suave comsuporte em $\pm[1/8, 8]$ e constante igual a 1 em $\pm[1/4, 4]$.

Finalmente, considere a função $\tilde{p}$, suave de suporte compacto e tal que $\tilde{p} \equiv 1$ em $[-10, 10]$. A partir de $\tilde{p}$ definimos o operador $\tilde{P}_k$, dado por

$$\tilde{P}_k f = \{\tilde{p}(2^{-k}\cdot)\hat{f}\}^\vee.$$

Agora notamos alguns fatos sobre os suportes dos operadores acima.

Lema 2.1. $supp((Q_k f)^\wedge) \subset \pm[2^{k-1}, 2^{k+1}]$

Demonstração. De fato, se $\xi \notin \pm[2^{k-1}, 2^{k+1}]$ então $2^{-k}\xi \notin \pm[1/2, 2]$ e daí,

$$(Q_k f)^\wedge(\xi) = \eta(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi) = 0.$$

□

Lema 2.2. $supp((P_k f)^\wedge) \subset [-2^{k-2}, 2^{k-2}]$

Demonstração. De fato, se $|\xi| > 2^{k-2}$ então $2^{-k}|\xi| \geq 1/4$, e daí

$$(P_k f)^\wedge(\xi) = p(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi) = 0.$$

□

Lema 2.3. $supp((Q_k f P_k g)^\wedge) \subset \pm[2^{k-2}, 2^{k+2}]$

Demonstração. De fato,

$$(Q_k f P_k g)^\wedge = (Q_k f)^\wedge * (P_k g)^\wedge.$$

Logo, pela Proposição 1.1

$$\begin{array}{rcl} supp(Q_k f P_k g)^\wedge & \subset & \overline{supp(Q_k f)^\wedge + supp(P_k g)^\wedge} \\ & \subset & \pm[2^{k-1}, 2^{k+1}] + [-2^{k-2}, 2^{k-2}]. \end{array}$$

Para completar note que

$$\pm[2^{k-1}, 2^{k+1}] + [-2^{k-2}, 2^{k-2}] = \pm[2^{k-2}, 2^{k+2}].$$

De fato, se $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \pm[2^{k-1}, 2^{k+1}] + [-2^{k-2}, 2^{k-2}]$, digamos

$$\xi_1 \in [2^{k-1}, 2^{k+1}], \quad \xi_2 \in [-2^{k-2}, 2^{k-2}]$$

então

$$2^{k-2} = 2^{k-1} - 2^{k-2} \leq \xi \leq 2^{k+1} + 2^{k-2} = 9 \cdot 2^{k-2} \leq 2^{k+2}.$$

Logo $\xi \in [2^{k-2}, 2^{k+2}]$. De modo análogo, se $\xi = \xi_1 + \xi_2$, com $\xi_1 \in [-2^{k+1}, -2^{k-1}]$, então $\xi \in [-2^{k+2}, -2^{k-2}]$.

□

Lema 2.4. $supp(Q_k f Q_{k-j} g)^\wedge \subset [-10 \cdot 2^k, 10 \cdot 2^k], \quad \forall \quad |j| \leq 2$

Demonstração. De fato, usando a Proposição 1.1, temos que

$$\begin{array}{rcl} supp(Q_k f Q_{k-j} g)^\wedge & = & supp(Q_k f)^\wedge * (Q_{k-j} g)^\wedge \\ & \subset & \overline{supp(Q_k f)^\wedge + supp(Q_{k-j} g)^\wedge} \\ & \subset & \pm[2^{k-1}, 2^{k+1}] + \pm[2^{k-j-1}, 2^{k-j+1}]. \end{array}$$

Se $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \pm[2^{k-1}, 2^{k+1}] + \pm[2^{k-j-1}, 2^{k-j+1}]$, digamos,

$$\xi_1 \in [2^{k-1}, 2^{k+1}], \quad \xi_2 \in [2^{k-j-1}, 2^{k-j+1}]$$

então

$$2^{k-1} + 2^{k-1-j} \leq \xi \leq 2^{k+1} + 2^{k+1-j}.$$

Como $j \geq -2$, então $2^{k+1} + 2^{k+1-j} = 2^{k+1}(1 + 2^{-j}) \leq 2^{k+1}(1 + 2^2) = 10 \cdot 2^k$. Logo, nesse caso $-10 \cdot 2^k \leq \xi \leq 10 \cdot 2^k$. Analisando os outros casos de modo análogo, conclui-se que $\pm[2^{k-1}, 2^{k+1}] + \pm[2^{k-j-1}, 2^{k-j+1}] \subset [-10 \cdot 2^k, 10 \cdot 2^k]$ e daí segue o lema. $\square$

Lema 2.5. *$supp(P_k a P_- Q_k f)^\wedge \subset \mathbb{R}_-$, para quaisquer funções a e f.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
(P_k a P_- Q_k f)^\wedge(\xi) &= (P_k a)^\wedge * (P_- Q_k g)^\wedge(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} (P_k a)^\wedge(\xi - y)(P_- Q_k g)^\wedge(y) dy \\
&= \int_J (P_k a)^\wedge(\xi - y)(P_- Q_k g)^\wedge(y) dy,
\end{aligned}$$

onde $J = \{y \in \mathbb{R} : \xi - y \in supp(p(2^{-k} \cdot))\} \cap supp(\eta(2^{-k} \cdot)) \cap \mathbb{R}_-$. Ora, se $\xi - y \in supp(p(2^{-k} \cdot))$ e $y \in supp(Q_k) \cap \mathbb{R}_-$ então $-2^{k-2} \leq \xi - y \leq 2^{k-2}$ e $-2^{k+1} \leq y \leq -2^{k-1}$. Logo $\xi = \xi - y + y \leq 2^{k-2} - 2^{k-1} < 0$. Logo, se $\xi \geq 0$ então $J = \emptyset$ e daí $(P_k a P_- Q_k f)^\wedge(\xi) = 0$. Portanto $supp(P_k a P_- Q_k f)^\wedge \subset \mathbb{R}_-$. $\square$

Usando esses fatos sobre os suporte temos

$$\tilde{Q}_k(Q_k f P_k g) = Q_k f P_k g. \tag{2.1}$$

De fato

$$(\tilde{Q}_k(Q_k f P_k g))^\wedge(\xi) = \tilde{\eta}(2^{-k}\xi)(Q_k f P_k g)^\wedge(\xi).$$

E como $\tilde{\eta}(2^{-k}\xi) = 1$ para todo $\xi \in \pm[2^{k-2}, 2^{k+2}]$, segue do Lema 2.3 que

$$(\tilde{Q}_k(Q_k f P_k g))^\wedge(\xi) = (Q_k f P_k g)^\wedge(\xi), \quad \forall \ \ \xi.$$

Temos também

$$\tilde{P}_k(Q_k f Q_{k-j} g) = Q_k f Q_{k-j} g, \quad \forall \ \ |j| \leq 2. \tag{2.2}$$

De fato, já que $\tilde{p}(2^{-k}\xi) = 1, \forall \ \ \xi \in [-10 \cdot 2^k, 10 \cdot 2^k]$ segue do Lema 2.4 que

$$\begin{aligned}
(\tilde{P}_k(Q_k f Q_{k-j} g))^\wedge(\xi) &= p(2^{-k}\xi)(Q_k f Q_{k-j} g)^\wedge(\xi) \\
&= (Q_k f Q_{k-j} g)^\wedge(\xi)
\end{aligned}$$

para todo $|j| \leq 2$.

Na prova do teorema de Calderón para comutadores precisaremos usar frequentemente o teorema de Littlewood-Paley generalizado. Para isso desenvolveremos alguns critérios para que um multiplicador satisfaça as condições (1.1) e (1.2) desse teorema.

Lema 2.6. *Se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tem suporte compacto então*

$$\left|\frac{d}{d\xi}\varphi(\xi)\right| \leq \begin{cases} c|\xi|^{\gamma-1}\ ,\ |\xi| \leq 1 \\ c|\xi|^{-\gamma-1}\ ,\ |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

para algum $\gamma > 0$.

Demonstração. Como φ é de classe C^∞ em $supp(\varphi)$, existe $c > 0$ tal que $|\varphi'(\xi)|,\ \ |\xi^2\varphi'(\xi)| \leq c$ para todo $\xi \in supp(\varphi)$. Como $\varphi', \xi^2\varphi' \equiv 0$ fora de $supp(\varphi)$ então

$$|\varphi'(\xi)|, \quad |\xi^2\varphi'(\xi)| \leq c$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Logo

$$\left|\frac{d}{d\xi}\varphi(\xi)\right| \leq \begin{cases} c|\xi|^{\gamma-1}\ ,\ |\xi| \leq 1 \\ c|\xi|^{-\gamma-1}\ ,\ |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

para $\gamma = 1$ □

Lema 2.7. *Se $\varphi = \tilde{\eta}$ ou $xi^m\eta(2^j\cdot)$, com $m, j \in \mathbb{Z}$, então φ satisfaz as condições* (1.1) *e* (1.2) *do Teorema 1.6.*

Demonstração. De fato, como $supp(\varphi)$ é compacto, então pelo lema anterior φ satisfaz a condição (1.1).

Vejamos agora a condição (1.2). Usando que φ tem suporte compacto e que não contém a origem temos que, existem $0 < a < b$ tais que $supp(\varphi) \subset \pm[a, b]$. Daí, $\varphi(2^{-k}\xi) \neq 0$ implica $a < 2^{-k}|\xi| < b$. Logo

$$\log_2|\xi| - \log_2 b \leq k \leq \log_2|\xi| - \log_2 a.$$

Seja $J(\xi) = \{k \in \mathbb{Z} : \log_2|\xi| - \log_2 b \leq k \leq \log_2|\xi| - \log_2 a\}$. Temos que $card(J(\xi)) \leq \log_2 b - \log_2 a$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 &= \sum_{k\in J(\xi)} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 \leq \|\varphi\|^2_{L^\infty} card(J(\xi)) \\ &\leq \|\varphi\|^2_{L^\infty}(\log_2 b - \log_2 a) =: \tilde{c}_2. \end{aligned}$$

Vejamos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 \geq \tilde{c}_1, \quad \forall \ \ \xi \neq 0,$$

para alguma constante $\tilde{c}_1$. Se $\varphi = \tilde{\eta}$, basta notar que para cada $\xi \neq 0$ existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-k_0}\xi \in \pm[1/4, 4]$. Daí, como $\tilde{\eta} \equiv 1$ em $\pm[1/4, 4]$ temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 \geq \varphi^2(2^{-k_0}\xi) = 1.$$

Agora se $\varphi = \xi^m \eta(2^j \cdot)$ seja $J(\xi)$ o conjunto dos índices k tais que $\varphi(2^{-k}\xi) \neq 0$. Assim

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 = \sum_{k\in J(\xi)} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2.$$

Mas, $\varphi(2^{-k}\xi) \neq 0$ implica que $1/2 \leq 2^{-k+j}|\xi| \leq 2$. Se $m \geq 0$, então para cada $k \in J(\xi)$ temos $|\varphi(2^{-k}\xi)|^2 = |2^{-k}\xi|^{2m}\eta^2(2^{-k+j}\xi) \geq 4^{-m(j+1)}\eta^2(2^{-k+1}\xi)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 &= \sum_{k\in J(\xi)} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 \geq 4^{-m(j+1)} \sum_{k\in J(\xi)} \eta^2(2^{-k+j}\xi) \\
&= 4^{-m(j+1)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta^2(2^{-k+j}\xi). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Agora note que para cada $\xi \neq 0$, existem no máximo três inteiros k, tais que $\eta(2^{-k}\xi) \neq 0$. De fato, se $\eta(2^{-k_0}\xi) \neq 0$, então $1/2 \leq |2^{-k_0}\xi| \leq 2$. Se $k \notin \{k_0 - 1, k_0, k_0 + 1\}$ então ou $k_0 - k \geq 2$, donde $|2^{-k}\xi| = 2^{-k_0+k_0-k}|\xi| \geq 2^{-k_0+2}|\xi| \geq 2$; ou $k_0 - k \leq -2$, donde $|2^{-k}\xi| = 2^{k_0-k-k_0}|\xi| \leq 2^{-k_0-2}|\xi| \leq 1/2$. Em qualquer dos casos, temos $2^{-k}\xi \notin \pm[1/2, 2]$, donde $\eta(2^{-k}\xi) = 0$. Como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta(2^{-k}\xi) = 1$$

então existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\eta(2^{-k_0}\xi) \geq 1/3$. Daí, o somatório em (2.3) é maior ou igual a 1/9. Portanto

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(2^{-k}\xi)|^2 \geq \frac{4^{-m(j+1)}}{9}.$$

Quando $m \leq 0$, procedemos de maneira análoga. □

Lema 2.8. *Seja $\nu \in \mathbb{R}$. Se $p_\nu(\xi) = e^{-i\nu\xi}\xi p(\xi)$, então p_ν satisfaz as condições (1.1) com constante da forma $c = a + b|\nu|$ e (1.2) com constantes independentes de ν.*

Demonstração. De fato

$$\frac{d}{d\xi}p_\nu(\xi) = e^{i\xi\nu}(p(\xi) + \xi p'(\xi)) + i\nu e^{i\xi\nu}\xi p(\xi).$$

Para $0 \leq |\xi| \leq 1$ note que como $p \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ então existe $c > 0$ tal que $|p(\xi)|, |p'(\xi)| < c$. Daí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{d\xi}p_\nu(\xi)\right| &= |e^{i\xi\nu}(p(\xi) + \xi p'(\xi)) + i\nu e^{i\xi\nu}\xi p(\xi)| \\
&\leq |p(\xi)|(1 + |\nu||\xi|) + |\xi||p'(\xi)| \leq c(1 + |\nu||\xi|) + c|\xi| \\
&\leq c(1 + |\xi|) + c|\nu| \leq c(1 + |\nu|).
\end{aligned}$$

Agora, se $|\xi| \geq 1$, então a condição

$$\left|\frac{d}{d\xi}p_\nu\right| \leq c_\nu|\xi|^{-\gamma-1},$$

com $c_\nu = c(1+|\nu|)$, é obviamente satisfeita pois $p_\nu \equiv 0$ em $|\xi| \geq 1$. Portanto

$$\left|\frac{d}{d\xi}p_\nu(\xi)\right| \leq \begin{cases} c|\xi|^{\gamma-1}\ , & |\xi| \leq 1 \\ c|\xi|^{-\gamma-1}\ , & |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

para algum $\gamma > 0$. Além disso a constante c é da forma $c = a + b|\nu|$.

Agora verifiquemos a condição (1.2). Como $supp(p_\nu) \subset [-1/4, 1/4]$ então $p_\nu(2^{-k}\xi) \neq 0$ implica $2^{-k}|\xi| \leq 1/4$, i.e., $k \geq \log_2|\xi| + 2$. Daí, para todo $\xi \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |p_\nu(2^{-k}\xi)|^2 &= \sum_{k \geq \lfloor \log_2|\xi|+2\rfloor} |p_\nu(2^{-k}\xi)|^2 \leq \sum_{k \geq \lfloor \log_2|\xi|+2\rfloor} 4^{-k}|\xi|^2 \\ &\leq |\xi|^2 \sum_{k \geq \lfloor \log_2|\xi|+2\rfloor} 4^{-k} \leq \frac{|\xi|^2}{3}4^{-\log_2|\xi|} \\ &= 1/3.\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\xi \neq 0$, temos que $|2^{-k}\xi| \leq 1/8$, se, e somente se $k \geq \log_2|\xi| + 3$. Daí, como $p \equiv 1$ em $[-1/8, 1/8]$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |p_\nu(2^{-k}\xi)|^2 &\geq \sum_{k \geq \lfloor \log_2|\xi|+3\rfloor} 4^{-k}|\xi|^2 p^2(2^{-k}\xi) \\ &= \sum_{k \geq \lfloor \log_2|\xi|+3\rfloor} 4^{-k}|\xi|^2 \geq \frac{|\xi|^2}{3}4^{-\log_2|\xi|-1} \\ &= 1/12.\end{aligned}$$

□

Lema 2.9. *Seja* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$*. Para cada* $\theta \in \mathbb{R}$ *defina* φ_θ *por* $\varphi_\theta(\xi) = e^{i\theta\xi}\varphi(\xi)$*. Se*

$$T_k^\theta f := \{\varphi_\theta(2^{-k}\cdot)\hat{f}\}^\vee$$

então

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |T_k^\theta f| \leq cM(f) \tag{2.4}$$

onde $c > 0$ *é uma constante que independe de* θ*.*

Demonstração. De fato, temos

$$T_k^\theta(f) = \varphi_k^\theta * f,$$

com

$$\varphi_k^\theta = 2^k\check{\varphi}(\theta + 2^k\cdot).$$

Seja

$$\psi_\theta(r) = \sup_{|y|>r} |\check{\varphi}(\theta + y)|.$$

Pela Proposição 1.7 é suficiente provarmos que

$$\int_0^{+\infty} \psi_\theta(r)dr = c < +\infty,$$

onde c é uma constante que independe de θ. Com efeito temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \psi_\theta(r)dr &= \int_0^{+\infty} \sup_{|y|\geq r} |\check{\varphi}(\theta+y)|dr \\
&= \int_0^{+\infty} \sup_{|y-\theta|\geq r} |\check{\varphi}(y)|dr.
\end{aligned}$$

Façamos a mudança de variáveis $s = r - |\theta|$. Temos então

$$\int_0^{+\infty} \sup_{|y-\theta|\geq r} |\check{\varphi}(y)|dr = \int_{-|\theta|}^{+\infty} \sup_{|y-\theta|\geq s+|\theta} ||\check{\varphi}(y)|ds.$$

Desde que $|y-\theta| \geq s + |\theta|$ implica $|y| \geq s$, temos

$$\int_{-|\theta|}^{+\infty} \sup_{|y-\theta|\geq s+|\theta} ||\check{\varphi}(y)|ds \leq \int_{-|\theta|}^{+\infty} \sup_{|y|\geq s} |\check{\varphi}(y)|ds.$$

Daí

$$\int_0^{\infty} \psi_\theta(r)dr \leq \int_{-|\theta|}^{+\infty} \sup_{|y|\geq s} |\check{\varphi}(y)|ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{|y|\geq s} |\check{\varphi}(y)|ds.$$

Note agora que, como $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, então $\check{\varphi} \in S(\mathbb{R})$. Portanto

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{|y|\geq s} |\check{\varphi}(y)|ds &= \int_{|s|\leq 1} \sup_{|y|\geq s} |\check{\varphi}(y)|ds + \int_{|s|>1} \sup_{|y|\geq s} |\check{\varphi}(y)|ds \\
&\leq \|\check{\varphi}\|_{0,0} \int_{|s|\leq 1} ds + \int_{|s|>1} \frac{1}{s^2}|y|^2|\check{\varphi}|ds \\
&\leq 2\|\check{\varphi}\|_{0,0} + \|\check{\varphi}\|_{2,0} \int_{|s|\geq 1} \frac{1}{s^2} ds \\
&\leq c < +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto $\psi_\theta \in L^1([0,+\infty))$, com

$$\int_0^{+\infty} \psi_\theta(r)dr = c < \infty,$$

onde c independe de θ. $\square$

2.3 Prova do teorema de Calderón para comutadores

Nessa seção vamos dar uma prova do Teorema 2.1. Começamos por notar que podemos assumir sem perda de generalidade que T é P_+, já que $H = iP_+ - iP_-$ e $P_+ + P_- = I_d$. Observe também que

$$\partial_x^l [P_+; a]h = \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} [P_+; \partial_x^k a] \partial_x^{l-k} h.$$

De fato, já que para toda f temos $\partial_x^l P_+ f = P_+ \partial_x^l f$, segue da regra de Leibniz que

$$\begin{aligned}
\partial_x^l [P_+; a]h &= \partial_x^l (P_+(ah) - aP_+h) \\
&= P_+ \partial_x^l (ah) - \partial_x^l (aP_+h) \\
&= P_+ (\sum_{k=0}^{l} c_{k,l} \partial_x^k a \partial_x^{l-k} h) - \sum_{k=0}^{l} c_{k,l} \partial_x^k a P_+ \partial_x^{l-k} h \\
&= \sum_{k=0}^{l} c_{l,k} \left(P_+(\partial_x^k a \partial_x^{l-k} h) - \partial_x^k a P_+ \partial_x^{l-k} h \right) \\
&= \sum_{k=0}^{l} c_{l,k} [P_+; \partial_x^k a] \partial_x^{l-k} h.
\end{aligned}$$

Portanto é suficiente considerar o caso onde $l = 0$ na desigualdade. Observe ainda que

$$\begin{aligned}
[P_+; a]\partial_x^m f &= P_+(a\partial_x^m f) - aP_+\partial_x^m f \\
&= P_+((aP_+ + aP_-)\partial_x^m f) - aP_+\partial_x^m f \\
&= P_+(aP_-\partial_x^m f) + (P_+ - I_d)(aP_+\partial_x^m f) \\
&= P_+(aP_-\partial_x^m f) - P_-(aP_+\partial_x^m f).
\end{aligned}$$

Segue daí que é suficiente mostrarmos que

$$\|P_+(aP_-\partial_x^m f)\|_{L^p} \leq \|\partial_x^m a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}. \tag{2.5}$$

Vamos então provar a desigualdade (2.5). Para isso consideramos as decomposições

$$\hat{a}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}(\xi)\eta(2^{-k}\xi), \quad \hat{f}(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi)\eta(2^{-l}\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Temos então

$$\begin{aligned}
(aP_-\partial_x^m f)^\wedge(\xi) &= \hat{a} * (P_-\partial_x^m f)^\wedge(\xi) \\
&= \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta(2^{-k}\cdot)\hat{a} * \sum_{l \in \mathbb{Z}} \eta(2^{-l}\cdot)(P_-\partial_x^m f)^\wedge \Big)(\xi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(Q_k a)^\wedge * \sum_{l\in\mathbb{Z}}(Q_l P_-\partial_x^m f)^\wedge\Big)(\xi) \\
&= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}(Q_k a)^\wedge * (Q_l P_-\partial_x^m f)^\wedge(\xi) \\
&= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}}(Q_k a Q_l P_-\partial_x^m f)^\wedge(\xi).
\end{aligned}
$$

Logo

$$
P_+(aP_-\partial_x^m f) = P_+\Big(\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f\Big). \tag{2.6}
$$

Decompomos o somatório do lado direito de (2.6) em três partes:

$$
\sum_{k,l\in\mathbb{Z}} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f = \sum_{l-k\leq -3} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f + \sum_{l-k\geq 3} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f + \sum_{|k-l|\leq 2} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f.
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{l-k\leq -3} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\leq k-3} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_j a P_- P_k \partial_x^m f,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{l-k\geq 3} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k\leq l-3} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_l a P_- Q_k \partial_x^m f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{|k-l|\leq 2} Q_k a P_- Q_k \partial_x^m f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|l-k|\leq 2} Q_k a P_- Q_l \partial_x^m f \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|l|\leq 2} Q_k a P_- Q_{k-l} \partial_x^m f.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
P_+(aP_-\partial_x^m f) &= P_+\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k a P_- P_k \partial_x^m f\Big) \\
&+ P_+\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k a P_- Q_k \partial_x^m f\Big) \\
&+ P_+\Big(\sum_{|l|\leq 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k a P_- Q_{k-l} \partial_x^m f\Big) \\
&= I + II + III.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Vamos então estimar cada um dos termos I, II e III. Segue do Lema 2.5 que a parcela II é nula. Portanto falta estimar apenas I e III. Para avaliar I, usamos (2.1) para obter

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_+(Q_k a P_k P_- \partial_x^m f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_+\tilde{Q}_k(Q_k a P_k P_- \partial_x^m f) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k^+(Q_k a P_k P_- \partial_x^m f) \end{aligned}$$

onde $\tilde{Q}_k^+ = P_+\tilde{Q}_k$, isto é, o multiplicador referente à função $\tilde{\eta}_k^+(\xi) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)$. Por outro lado, segue da fórmula da inversão que

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k^+(Q_k a P_k P_- \partial_x^m f)(x) &= c\int (\tilde{Q}_k^+(Q_k a P_k P_- \partial_x^m f))^\wedge(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= c\int \tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)(Q_k a P_k P_- \partial_x^m f)^\wedge(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= c\int \tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)(Q_k a)^\wedge * (P_k P_- \partial_x^m f)^\wedge(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Podemos reescrever o termo do lado direito de (2.8) como

$$\begin{aligned} & c\int \tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)\left(\int (Q_k a)^\wedge(\xi-\mu)(P_k P_- \partial_x^m f)^\wedge(\mu) d\mu\right) e^{ix\xi} d\xi \\ =\; & c\int\int \tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)\eta(2^{-k}(\xi-\mu))\hat{a}(\xi-\mu)p(2^{-k}\mu)\chi_{\mathbb{R}_-}(\mu)\mu^m \hat{f}(\mu) e^{ix\xi} d\mu d\xi \\ =\; & c\int\int \tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))\eta(2^{-k}\xi)\hat{a}(\xi)p(2^{-k}\mu)\chi_{\mathbb{R}_-}(\mu)\mu^m \hat{f}(\mu) e^{ix(\xi+\mu)} d\xi d\mu. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} I &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\int e^{ix(\xi+\mu)}\tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))\eta(2^{-k}\xi)p(2^{-k}\mu)\left(\frac{\mu}{\xi}\right)^m (\partial_x^m a)^\wedge(\xi)\chi_{\mathbb{R}_-}(\mu)\hat{f}(\mu) d\xi d\mu \\ &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\int e^{ix(\xi+\mu)} m_k(\xi,\mu)(\partial_x^m a)^\wedge(\xi)(P_- f)^\wedge(\mu) d\xi d\mu, \end{aligned}$$

onde $m_k(\xi,\mu) = m(2^{-k}\xi, 2^{-k}\mu)$ e $m(\xi,\mu) = \tilde{\eta}^+(\xi+\mu)\eta(\xi)p(\mu)\left(\frac{\mu}{\xi}\right)^m$.

Sejam $q, h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $q \equiv 1$ em $supp(\eta)$, $h \equiv 1$ em $supp(p)$, $supp(h) \subset [-1/2, 1/2]$, e $supp(q) \subset \pm[1/4, 4]$. Então, vale

$$m(\xi,\mu) = \tilde{\eta}^+(\xi+\mu)\eta(\xi)\mu p(\mu)\tau(\xi,\mu),$$

com $\tau(\xi,\mu) = q(\xi)h(\mu)\mu^{m-1}/\xi^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Deste modo podemos escrever τ como a transformada de Fourier de uma função r em $S(\mathbb{R}^2)$

$$\tau(\xi,\mu) = c\int\int e^{i(\theta\xi+\nu\mu)} r(\theta,\nu) d\theta d\nu. \tag{2.9}$$

Observação: Existe uma boa razão para considerarmos a função τ como acima. Por exemplo, poderíamos considerar τ com o termo $\frac{\mu^m}{\xi^m}$, no lugar de $\frac{\mu^{m-1}}{\xi^m}$ e ainda assim τ seria uma função suave de suporte compacto. A razão de escolhermos τ dessa forma é que podemos obter um operador associado ao multiplicador $\mu p(\mu)$ que, pelo Lema 2.8, satisfaz as hipóteses do Teorema 1.6. Já se escolhêssemos τ simplesmente por

$$\tau(\xi,\mu) = q(\xi)h(\mu)\mu^m/\xi^m$$

nos depararíamos futuramente com um multiplicador associado à função $p(\mu)$, que não satisfaz as hipóteses do Teorema 1.6, crucial nessa prova.

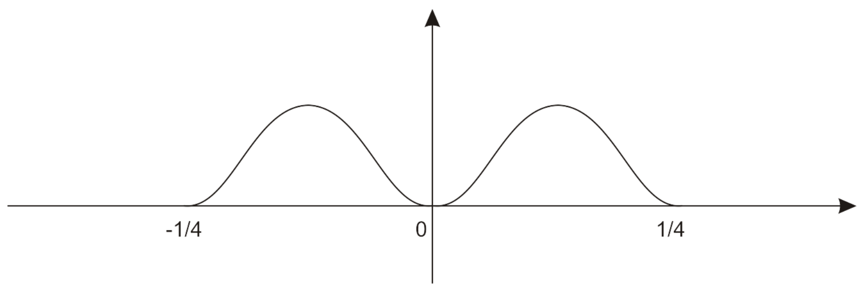

Figura 2.3: gráfico da função $\mu p(\mu)$

Afirmação: Se denotarmos por Q_k^θ e P_k^ν os multiplicadores associados respectivamente às funções $\eta_{k,\theta}(\xi) = e^{-i\theta 2^{-k}\xi}\eta(2^{-k}\xi)$ e $p_{k,\nu}(\mu) = e^{-i2^{-k}\nu\mu}2^{-k}\mu p(2^{-k}\mu)$ então

$$I = c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k^+(P_k^\nu P_- f Q_k^\theta \partial_x^m a)r(\theta,\nu)d\theta d\nu \tag{2.10}$$

De fato, substituindo (2.9) na expressão de $m_k(\xi,\mu)$, obtemos

$$m_k(\xi,\mu) = c\int\int e^{i(2^{-k}\xi\theta + 2^{-k}\mu\nu)}r(\theta,\nu)d\theta d\nu \;\; \tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))\eta(2^{-k}\xi)2^{-k}\mu p(2^{-k}\mu)$$

Logo, deduzimos usando o teorema de Fubini, a fórmula da inversão e as propriedades da transformada de Fourier enuciadas na Proposição 1.2

$$\begin{aligned}
I &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\int e^{ix(\xi+\mu)}\left(\int\int e^{i(2^{-k}\xi\theta+2^{-k}\mu\nu)}r(\theta,\nu)d\theta d\nu\right)\tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))\eta(2^{-k}\xi) \\
&\quad \times 2^{-k}\mu p(2^{-k}\mu)(\partial_x^m a)^\wedge(\xi)(P_- f)^\wedge(\mu)d\xi d\mu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\int e^{ix(\xi+\mu)}\tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))e^{i2^{-k}\xi\theta}\eta(2^{-k}\xi)(\partial_x^m a)^\wedge(\xi) \\
&\quad \times e^{i2^{-k}\mu\nu}2^{-k}\mu p(2^{-k}\mu)(P_- f)^\wedge(\mu)d\xi d\mu \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\int e^{ix(\xi+\mu)}\tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))(Q_k^\theta\partial_x^m a)^\wedge(\xi)(P_k^\nu P_- f)^\wedge(\mu)d\xi d\mu \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int (P_k^\nu P_- f)^\wedge(\mu)\int e^{ix(\xi+\mu)}\tilde{\eta}^+(2^{-k}(\xi+\mu))(Q_k^\theta(\partial_x^m a)e^{i\mu\cdot})^\wedge(\xi+\mu)d\xi d\mu \\
&\quad \times r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int (P_k^\nu P_- f)^\wedge(\mu)\int e^{ix\xi}\tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)(Q_k^\theta(\partial_x^m a)e^{i\mu\cdot})^\wedge(\xi)d\xi d\mu \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int e^{ix\xi}\tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)\int (P_k^\nu P_- f)^\wedge(\mu)(Q_k^\theta\partial_x^m a e^{i\mu\cdot})^\wedge(\xi)d\mu d\xi \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int e^{ix\xi}\tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)\int (P_k^\nu P_- f)^\wedge(u)(Q_k^\theta\partial_x^m a)^\wedge(\xi-u)du d\xi \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int e^{ix\xi}\tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)((P_k^\nu P_- f)^\wedge * (Q_k^\theta\partial_x^m a)^\wedge)(\xi)d\xi \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int e^{ix\xi}\tilde{\eta}^+(2^{-k}\xi)(P_k^\nu P_- f Q_k^\theta\partial_x^m a)^\wedge(\xi)d\xi \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int e^{ix\xi}(\tilde{Q}_k^+(P_k^\nu P_- f Q_k^\theta\partial_x^m a))^\wedge(\xi)d\xi \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu \\
&= c\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k^+(P_k^\nu P_- f Q_k^\theta\partial_x^m a) \;\; r(\theta,\nu)d\theta d\nu.
\end{aligned}$$

Isso conclui a Afirmação.

Segue aplicando a desigualdade de Minkowski para integrais a (2.10) que

$$\begin{aligned}
\|I\|_{L^p} &= \left\|\int\int\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q_k^\theta\partial_x^m a P_k^\nu P_- f)r(\theta,\nu)d\theta d\nu\right\|_{L^p} \\
&\leq \int\int\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q_k^\theta\partial_x^m a P_k^\nu P_- f)\right\|_{L^p}|r(\theta,\nu)|d\theta d\nu. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.7 vale o teorema de Littlewood-Paley genaralizado para a função $\tilde{\eta}$. Daí, deduzimos de (1.4) que

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q_k^\theta\partial_x^m a P_k^\nu P_- f)\right\|_{L^p} \leq c\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^\theta\partial_x^m a P_k^\nu P_- f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}.$$

Por outro lado, usando o Lema 2.9, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^\theta\partial_x^m a P_k^\nu P_- f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p} &\leq \left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^\theta\partial_x^m a|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|P_k^\nu P_- f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p} \\
&\leq c\|M(\partial_x^m a)\|_{L^\infty}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|P_k^\nu P_- f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 2.8 podemos aplicar novamente o teorema de Litttlewood-Paley generalizado, dessa vez à função p_ν, e daí concluir que

$$\left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k^\nu P_- f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq c_\nu \|P_- f\|_{L^p}.$$

Como P_- é (p,p) forte, segue que

$$\left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k^\nu P_- f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq c \cdot c_\nu \|f\|_{L^p}.$$

Logo

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k (Q_k^\theta \partial_x^m a P_k^\nu P_- f) \right\|_{L^p} \leq c \cdot c_\nu \|M(\partial_x^m a)\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}.$$

Usando agora que a função maximal é (∞,∞) forte, concluimos que

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k (Q_k^\theta \partial_x^m a P_k^\nu P_- f) \right\|_{L^p} \leq c \cdot c_\nu \|\partial_x^m a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}.$$

Portanto, deduzimos de (2.11) que

$$\begin{aligned}
\|I\|_{L^p} &\leq \int\int \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k (Q_k^\theta \partial_x^m a P_k^\nu P_- f) \right\|_{L^p} |r(\theta,\nu)| d\theta d\nu \\
&\leq c\|\partial_x^m a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p} \int\int c_\nu |r(\theta,\nu)| d\theta d\nu \\
&= c\|\partial_x^m a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p} \int\int (1+|\nu|)|r(\theta,\nu)| d\theta d\nu \\
&\leq c\|\partial_x^m a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p},
\end{aligned}$$

já que $r \in S(\mathbb{R}^2)$.

Vamos agora estimar a norma $\|\cdot\|_{L^p}$ de III. Usando (2.2) temos

$$\begin{aligned}
III &= P_+ \left(\sum_{|j|\leq 2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k a P_- Q_{k-j} \partial_x^m f \right) \\
&= \sum_{|j|\leq 2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_+ (Q_k a P_- Q_{k-j} \partial_x^m f).
\end{aligned}$$

Sejam Q_k^* e Q_{k-j}^{**} os multiplicadores associados, respectivamente, às funções

$$\eta_k^*(\xi) = \frac{\eta(2^{-k}\xi)}{(2^{-k}\xi)^m} \quad \text{e} \quad \eta_{k-j}^{**}(\xi) = (2^{-k}\xi)^m \eta(2^{-(k-j)}\xi).$$

Temos

$$\begin{aligned}(Q_k a Q_{k-j} P_- \partial_x^m f)^\wedge(\xi) &= (Q_k a)^\wedge * (Q_{k-j} P_- \partial_x^m f)^\wedge(\xi)\\ &= \eta(2^{-k}\cdot)\hat{a} * \eta(2^{-(k-j)}\cdot)(P_- \partial_x^m f)^\wedge(\xi)\\ &= \left(\frac{\eta(2^{-k}\cdot)}{2^{-km}}\hat{a} * 2^{-km}\eta(2^{-(k-j)}\cdot)\chi_{\mathbb{R}_-}(\partial_x^m f)^\wedge\right)(\xi)\\ &= c\left(\frac{\eta(2^{-k}\cdot)}{(2^{-k}\cdot)^m}(\cdot)^m\hat{a} * (2^{-k}\cdot)^m\eta(2^{-(k-j)}\cdot)\chi_{\mathbb{R}_-}\hat{f}\right)(\xi)\\ &= c(Q_k^*\partial_x^m a)^\wedge * (Q_{k-j}^{**}P_- f)^\wedge(\xi)\\ &= c(Q_k^*\partial_x^m a Q_{k-j}^{**}P_- f)^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

Portanto

$$Q_k a Q_{k-j} P_- \partial_x^m f = Q_k^* \partial_x^m a Q_{k-j}^{**} P_- f. \tag{2.12}$$

Daí,

$$III = \sum_{|j|\leq 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} P^+(Q_k^*\partial_x^m a Q_{k-j}^{**}P_- f). \tag{2.13}$$

Segue aplicando a desigualdade de Minkowski a (2.13) e do fato P_+ ser (p,p) forte, que

$$\|III\|_{L^p} \leq \sum_{|j|\leq 2}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^*\partial_x^m a Q_{k-j}^{**}P_- f\right\|_{L^p}. \tag{2.14}$$

Aplicando o Lema 2.9 em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}\|III\|_{L^p} &\leq c\sum_{|j|\leq 2}\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^*\partial_x^m a|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_{k-j}^{**}P_- f\right\|_{L^p}\\ &\leq cM(\partial_x^m a)\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^{**}P_- f\right\|_{L^p}\end{aligned}$$

Usando o fato de M ser (∞,∞) forte obtemos

$$\|III\|_{L^p} \leq c\|\partial_x^m a\|_{L^\infty}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^{**}P_- f\right\|_{L^p} \tag{2.15}$$

Agora note que

$$\tilde{Q}_k Q_k^{**} = Q_k^{**}. \tag{2.16}$$

Pelo Lema 2.7 a função $\tilde{\eta}$ satisfaz as condições do teorema de Littlewood-Paley generalizado, e daí por (2.16) e (1.4) temos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^{**}P_- f\right\|_{L^p} &= c\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k Q_k^{**}P_- f\right\|_{L^p}\\ &\leq c\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{**}P_- f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 2.7 a função $\eta^{**}(\xi) = \xi^m \eta(2^j \xi)$ satisfaz as condições do teorema de Littlewood-Paley generalizado. Daí, segue de (1.3) que

$$\left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k^{**} P_- f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq c \|P_- f\|_{L^p}$$

Portanto, deduzimos

$$\|III\|_{L^p} \leq c \|\partial_x^m a\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}.$$

Isso conclui a prova do teorema.

$\square$

Capítulo 3

A regra de Leibniz fracional

3.1 Derivadas fracionárias

Seja f uma função em $S(\mathbb{R})$, é bem sabido que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$(\partial_x^k f)^\wedge(\xi) = i^k \xi^k \hat{f}(\xi),$$

ou seja,

$$\partial_x^k f = \{i^k \xi^k \hat{f}\}^\vee. \tag{3.1}$$

Tal fórmula motiva a definição da derivada de ordem α quando α é real.

Definição 3.1. *Se $f \in S(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos o potencial de Riesz de f de ordem $-\alpha$ ou derivada fracional de ordem α, denotada por $D^\alpha f$, por*

$$D^\alpha f = \{|\xi|^\alpha \hat{f}\}^\vee.$$

Segue imediato da definição que $D^{\alpha+\beta} = D^\alpha D^\beta$. Assim para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$D^\alpha = D^{\lfloor \alpha \rfloor} D^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor},$$

onde $\lfloor \alpha \rfloor$ é o maior inteiro menor que α. Além disso, para todo natural k temos

$$D^k = H^k \partial_x^k,$$

onde H é a Transformada de Hilbert. De fato, por indução, se $k = 1$, então usando transformada de Fourier temos que $D^1 = H\partial_x$. Se a fórmula é válida para $k-1$, então usando que a transformada de Hilbert e o operador derivação comutam temos

$$D^k = D^{k-1} D^1 = D^{k-1} H \partial_x = H^{k-1} \partial_x^k H \partial_x = H^k \partial_x^k.$$

Dado α qualquer real positivo, existem únicos $k \in \mathbb{Z}$ e $\beta \in (0,1)$, tais que, $\alpha = k + \beta$. Daí

$$D^\alpha = D^\beta H^k \partial_x^k.$$

Por esta razão, nas estimativas em norma L^p da derivada de ordem α, nos restringiremos ao caso $\alpha \in (0,1)$, tendo em vista que a limitação na norma L^p da transformada de Hilbert já é conhecida.

3.2 Alguns lemas técnicos

Consideramos aqui, ainda os operadores $Q_k,\ \ P_k,\ \ \tilde{Q}_k\ \ e\ \ \tilde{P}_k$ como no capítulo anterior. Recordamos que

$$Q_k f P_k g = \tilde{Q}_k(Q_k f P_k g) \tag{3.2}$$

e que

$$Q_k f Q_{k-j} g = \tilde{P}_k(Q_k f Q_{k-j} g), \ \ \forall \ \ |j| \leq 2. \tag{3.3}$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j f\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} Q_l g\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f P_k g + \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k f Q_k g + \sum_{|j|\leq 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f Q_{k-j} g. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$, tais que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Para $j \in \{1,2\}$, definimos os multiplicadores

$$\psi^j(\xi) = |\xi|^{\alpha_j} p(\xi), \quad \eta^j(\xi) = |\xi|^{-\alpha_j}\eta(\xi)$$

e os operadores associados

$$(\Psi_k^j f)^\wedge(\xi) = \psi^j(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi), \quad (Q_k^j f)^\wedge(\xi) = \eta^j(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi).$$

Similarmente,

$$\eta^3(\xi) = |\xi|^{\alpha}\tilde{p}(\xi), \quad \eta^4(\xi) = |\xi|^{\alpha_1}\eta(\xi), \quad e \quad \eta^5(\xi) = |\xi|^{\alpha_2}\eta(\xi)$$

e definimos de modo semelhante os operadores associados $Q_k^3,\ \ Q_k^4,\ \ Q_k^5$. Finalmente, para cada μ e ν fixados, sejam

$$\eta^{\nu,j}(\xi) = \exp(i\nu\xi)\eta^j(\xi), \quad \eta^{\mu,j}(\xi) = \exp(i\mu\xi)\xi|\xi|^{-\alpha_j}p(\xi)$$

com $j = 1,2$ e denotamos por $Q_k^{\nu,j},\ \ Q_k^{\mu,j}$ os seus respectivos operadores associados.

Lema 3.1. *Dado $\alpha \in (0,1)$, temos*

$$\begin{aligned} D^\alpha(fg) - fD^\alpha g - gD^\alpha f &= \sum_{|j|\leq 2} 2^{j\alpha_2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^3(Q_k^1 D^{\alpha_1} f Q_{k-j}^2 D^{\alpha_2} g) \\ &\quad - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(\psi_k^1 D^{\alpha_2} g Q_k^1 D^{\alpha_1} f) \\ &\quad - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k^2 D^{\alpha_2} g \psi_k^2 D^{\alpha_1} f) \\ &\quad - \sum_{|j|\leq 2} 2^{-j\alpha_1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^1 D^{\alpha_1} f Q_{k-j}^4 D^{\alpha_2} g \\ &\quad - \sum_{|j|\leq 2} 2^{j\alpha_2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^2 D^{\alpha_2} g Q_{k-j}^5 D^{\alpha_1} f \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \int\int \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}fQ_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)\right] r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
&+ \quad \int\int \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k^{\nu,2}D^{\alpha_2}gQ_k^{\mu,1}D^{\alpha_1}f)\right] r_2(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
&=: \quad I - II - III - IV - V + VI + VII
\end{aligned}
$$

onde r_1, $r_2 \in S(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Usando (3.2), (3.3) e (3.4) temos

$$
\begin{aligned}
D^\alpha(fg) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} D^\alpha\tilde{Q}_k(Q_kfP_kg) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} D^\alpha\tilde{Q}_k(P_kfQ_kg) + \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} D^\alpha\tilde{Q}_k(Q_kfQ_{k-j}g) \\
&=: I_1 + II_1 + III_1, \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fD^\alpha g &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(P_kD^\alpha gQ_kf) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_kD^\alpha gP_kf) + \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_kfQ_{k-j}D^\alpha g \\
&=: I_2 + II_2 + III_2. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Trocando f por g em (3.6), temos

$$
\begin{aligned}
gD^\alpha f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(P_kD^\alpha fQ_kg) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_kD^\alpha fP_kg) + \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_kgQ_{k-j}D^\alpha f \\
&=: I_3 + II_3 + III_3. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Afirmação 1: $I = III_1$, $II = I_2$, $III = I_3$, $IV = III_2$ e $V = III_3$.
Só provaremos aqui a identidade $I = III_1$, já que as demonstrações das demais identidades seguem a mesma idéia. De fato, aplicando a transformada de Fourier em I temos

$$
\begin{aligned}
\hat{I}(\xi) &= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{j\alpha_2}Q_k^3(Q_k^1(D^{\alpha_1}f)Q_{k-j}^2(D^{\alpha_2}g)))^\wedge(\xi) \\
&= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j\alpha_2}|2^{-k}\xi|^\alpha\tilde{p}(2^{-k}\xi)(Q_k^1(D^{\alpha_1}f)Q_{k-j}^2(D^{\alpha_2}g))^\wedge(\xi) \\
&= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j\alpha_2}|2^{-k}\xi|^\alpha\tilde{p}(2^{-k}\xi)((Q_k^1(D^{\alpha_1}f))^\wedge * (Q_{k-j}^2(D^{\alpha_2}g))^\wedge)(\xi) \\
&= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j\alpha_2}|2^{-k}\xi|^\alpha\tilde{p}(2^{-k}\xi)\{\eta(2^{-k}\cdot)|2^{-k}\cdot|^{-\alpha_1}|\cdot|^{\alpha_1}\hat{f} * \eta(2^{-(k-j)}\cdot)|2^{-(k-j)}\cdot|^{-\alpha_2}|\cdot|^{\alpha_2}\hat{g}\}(\xi) \\
&= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{j\alpha_2}|2^{-k}\xi|^\alpha\tilde{p}(2^{-k}\xi)\{\eta(2^{-k}\cdot)2^{k\alpha_1}\hat{f} * \eta(2^{-(k-j)}\cdot)2^{(k-j)\alpha_2}\hat{g}\}(\xi) \\
&= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi|^\alpha\tilde{p}(2^{-k}\xi)\{(Q_kf)^\wedge * (Q_{k-j}g)^\wedge\}(\xi) = \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi|^\alpha\tilde{p}(2^{-k}\xi)(Q_kfQ_{k-j}g)^\wedge(\xi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi|^{\alpha}(\tilde{Q}_k(Q_k f Q_{k-j} g))^{\wedge}(\xi) = \sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (D^{\alpha}\tilde{Q}_k(Q_k f Q_{k-j} g))^{\wedge}(\xi)\\
&= \Big(\sum_{|j|\le 2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} D^{\alpha}\tilde{Q}_k(Q_k f Q_{k-j} g)\Big)^{\wedge}(\xi).
\end{aligned}
$$

Logo $I = III_1$.

Usando a afirmação 1 acima, vemos que é suficiente provar que $VI = I_1 - II_3$ e $VII = II_1 - II_2$. Vemos ambas as provas são análogas, provaremos apenas a primeira igualdade. Com efeito, por (3.5) e (3.7) temos

$$
I_1 - II_3 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(D^{\alpha}\tilde{Q}_k(P_k g Q_k f) - \tilde{Q}_k(P_k g Q_k D^{\alpha} f)\Big). \tag{3.8}
$$

Observamos que a transformada de Fourier em ξ do termo dentro da soma em (3.8) é dada por

$$
\begin{aligned}
& |\xi|^{\alpha}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)(P_k g Q_k f)^{\wedge}(\xi) - \tilde{\eta}(2^{-k}\xi)(P_k g Q_k D^{\alpha} f)^{\wedge}(\xi)\\
={}& |\xi|^{\alpha}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)((P_k g)^{\wedge} * (Q_k f)^{\wedge})(\xi) - \tilde{\eta}(2^{-k}\xi)((P_k g)^{\wedge} * (Q_k D^{\alpha} f)^{\wedge})(\xi)\\
={}& |\xi|^{\alpha}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\int (P_k g)^{\wedge}(\zeta)(Q_k f)^{\wedge}(\xi-\zeta)d\zeta - \tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\int (P_k g)^{\wedge}(\zeta)(Q_k D^{\alpha} f)^{\wedge}(\xi-\zeta)d\zeta\\
={}& |\xi|^{\alpha}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\int p(2^{-k}\zeta)\hat{g}(\zeta)\eta(2^{-k}(\xi-\zeta))\hat{f}(\xi-\zeta)d\zeta\\
& -\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\int p(2^{-k}\zeta)\hat{g}(\zeta)\eta(2^{-k}(\xi-\zeta))|\xi-\zeta|^{\alpha}\hat{f}(\xi-\zeta)d\zeta\\
={}& \int \tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\eta(2^{-k}(\xi-\zeta))p(2^{-k}\zeta)(|\xi|^{\alpha} - |\xi-\zeta|^{\alpha})\hat{g}(\zeta)\hat{f}(\xi-\zeta)d\zeta.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
& D^{\alpha}\tilde{Q}_k(P_k g Q_k f)(x) - \tilde{Q}_k(P_k g Q_k D^{\alpha} f)(x)\\
={}& c\int (D^{\alpha}\tilde{Q}_k(P_k g Q_k f) - \tilde{Q}_k(P_k g Q_k D^{\alpha} f))^{\wedge}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\\
={}& c\iint \tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\eta(2^{-k}(\xi-\zeta))p(2^{-k}\zeta)(|\xi|^{\alpha} - |\xi-\zeta|^{\alpha})\hat{g}(\zeta)\hat{f}(\xi-\zeta)e^{ix\xi}d\zeta d\xi\\
={}& c\iint \exp\{ix(\xi+\zeta)\}\eta(2^{-k}\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))p(2^{-k}\zeta)(|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha})\hat{f}(\xi)\hat{g}(\zeta)d\zeta d\xi\\
={}& c\int\int \exp\{ix(\xi+\zeta)\}|\zeta|^{-\alpha_2}p(2^{-k}\zeta)|\xi|^{-\alpha_1}\eta(2^{-k}\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))\\
& \quad \times\{|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}\}|\xi|^{\alpha_1}\hat{f}(\xi)|\zeta|^{\alpha_2}\hat{g}(\zeta)d\zeta d\xi.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_1 - II_3 ={}& c\int\int \exp\{ix(\xi+\zeta)\}|\zeta|^{-\alpha_2}p(2^{-k}\zeta)|\xi|^{-\alpha_1}\eta(2^{-k}\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))\\
& \times\{|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}\}(D^{\alpha_1} f)^{\wedge}(\xi)(D^{\alpha_2} g)^{\wedge}(\zeta)d\zeta d\xi.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Considere

$$m_k(\xi,\zeta) = |\zeta|^{-\alpha_2} p(2^{-k}\zeta)|\xi|^{-\alpha_1}\eta(2^{-k}\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))\{|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}\}.$$

Temos então que a expressão em (3.9) é igual a

$$c\int\int \exp\{ix(\xi+\zeta)\} m_k(\xi,\zeta)(D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi)(D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)d\zeta d\xi. \tag{3.10}$$

Note que $m_k(\xi,\zeta) = m(2^{-k}\xi, 2^{-k}\zeta)$, onde

$$m(\xi,\zeta) = |\zeta|^{-\alpha_2}p(\zeta)|\xi|^{-\alpha_1}\eta(\xi)\tilde{\eta}(\xi+\zeta)\{|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}\}$$

e, recordando o suporte de η e $\tilde{\eta}$ dados no capítulo anterior temos

$$supp(m) \subset \{(\xi,\zeta) \in \mathbb{R}^2 : 1/8 \leq |\xi+\zeta| \leq 8, \quad |\zeta| \leq 1/4, \quad 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}.$$

Sejam h, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tais que $h \equiv 1$ em $supp(\eta)$, $g \equiv 1$ em $supp(p)$ e $supp(g) \cap supp(h) = \emptyset$. Assim

$$m(\xi,\zeta) = \zeta|\zeta|^{-\alpha_2}p(\zeta)|\xi|^{-\alpha_1}\eta(\zeta)\tilde{\eta}(\xi+\zeta)\tau_1(\xi,\zeta),$$

onde

$$\tau_1(\xi,\zeta) = g(\zeta)h(\xi)\left[\frac{|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}}{\zeta}\right].$$

Afirmação 2: $\tau_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Para ver isso, note primeiro que

$$\frac{|\xi+\zeta|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}}{\zeta} = \alpha\int_0^1 |s\zeta+\xi|^{\alpha-1}ds.$$

Como $supp(g)$ e $supp(h)$ são compactos e disjuntos, existe $c > 0$ ($c =$ distância de $supp(g)$ a $supp(h)$) tal que $|s\zeta + \xi| \geq c$, para todo $\zeta \in supp(g)$ e todo $\xi \in supp(h)$. Daí,

$$\int_0^1 |s\zeta+\xi|ds \leq c^{\alpha-1}.$$

Portanto

$$\frac{|\zeta+\xi|^{\alpha} - |\xi|^{\alpha}}{\zeta}$$

é uma função suave sem singularidades para $\zeta \in supp(g)$ e $\xi \in supp(h)$. Como $g, h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, então $\tau_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Sabendo-se então que $\tau \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, a fórmula da inversão nos garante que existe $r_1 \in S(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\tau(\xi,\zeta) = c\int\int \exp\{i(\mu\xi+\nu\zeta)\}r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
& m_k(\xi,\zeta)(D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi)(D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta) \\
= \;& c\int\int \exp\{i(\mu 2^{-k}\xi+\nu 2^{-k}\zeta)\}2^{-k}\zeta|2^{-k}\zeta|^{-\alpha_2}p(2^{-k}\zeta)(D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta) \\
& |2^{-k}\xi|^{-\alpha_1}\eta(2^{-k}\xi)(D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int\int \exp\{i\mu 2^{-k}\zeta\}2^{-k}\zeta|2^{-k}\zeta|^{-\alpha_2}p(2^{-k}\zeta)(D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta) \\
& \exp\{i\nu 2^{-k}\xi\}|2^{-k}\xi|^{-\alpha_1}\eta(2^{-k}\xi)(D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int\int (Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu.
\end{aligned}
$$

Logo, substituindo essa última expressão em (3.10) e usando o teorema de Fubini obtemos

$$
\begin{aligned}
& D^\alpha\tilde{Q}_k(P_kgQ_kf)(x)-\tilde{Q}_k(P_kD^\alpha fQ_kg)(x) \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi\int_\zeta \exp\{ix(\xi+\zeta)\}(Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))d\zeta d\xi\right] \\
& \times r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi\int_\zeta \exp\{ix(\xi+\zeta)\}(Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f\cdot e^{i\zeta\cdot})^\wedge(\xi+\zeta)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))d\zeta d\xi\right] \\
& \times r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\zeta(Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)\int_\xi \exp\{ix(\xi+\zeta)\}(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f\cdot e^{i\xi\cdot})^\wedge(\xi+\zeta)\tilde{\eta}(2^{-k}(\xi+\zeta))d\xi d\zeta\right] \\
& \times r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\zeta(Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)\int_\xi \exp\{ix\xi\}(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f\cdot e^{i\zeta\cdot})^\wedge(\xi)\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)d\xi d\zeta\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi \exp\{ix\xi\}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\int_\zeta(Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f\cdot e^{i\zeta\cdot})^\wedge(\xi)d\zeta d\xi\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi \exp\{ix\xi\}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)\int_\zeta(Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge(\zeta)(Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}f)^\wedge(\xi-\zeta)d\zeta d\xi\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi \exp\{ix\xi\}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)((Q_k^{\mu,2}D^{\alpha_2}g)^\wedge * (Q_k^{\nu,1}D^{\alpha_1}g)^\wedge)(\xi)d\xi\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi \exp\{ix\xi\}\tilde{\eta}(2^{-k}\xi)(Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g)Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f))^\wedge(\xi)d\xi\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu\left[\int_\xi \exp\{ix\xi\}(\tilde{Q}_k(Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g)Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)))^\wedge(\xi)d\xi\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu \\
= \;& c\int_\mu\int_\nu \tilde{Q}_k(Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g)Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f))r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
I_1 - II_3 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (D^\alpha \tilde{Q}_k(P_k g Q_k f) - \tilde{Q}_k(P_k D^\alpha f Q_k g)) \\
&= c\int_\mu \int_\nu \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2} g) Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1} f))\right] r_1(\mu,\nu) d\mu d\nu.
\end{aligned}
$$

□

Para estimar a norma L^p da derivada produto $D^\alpha(fg) - fD^\alpha g - gD^\alpha f$ devemos estimar a norma L^p de cada uma das parcelas I, II, III, IV, V, VI e VII que aparecem no Lema 3.1. Para estimar essas parcelas, a idéia será usar a mesma técnica utilizada na demonstração do teorema de Calderón, aplicando o teorema de Littlewood-Paley nos multiplicadores envolvidos. Portanto, se queremos estimar a norma L^p de $D^\alpha(fg) - fD^\alpha g - gD^\alpha f$ devemos começar provando que os multiplicadores envolvidos pertencem à classe de funções que satisfazem o teorema de Litllewood-Paley generalizado, enuciado no Capítulo 1.

Notemos que, como $\eta \in C_0^\infty$, segue que os multiplicadores $\eta^1, \eta^2, \eta^4, \eta^5$ e $\eta^{\nu,j}$ $(j = 1,2)$ pertencem também a $C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Logo, pelo Lema 2.6 do capítulo anterior eles satisfazem a condição (1.1). Seguindo a mesma idéia do Lema 2.7 temos que $\eta^1, \eta^2, \eta^4, \eta^5$ e $\eta^{\nu,j}(j = 1,2)$ satisfazem a condição (1.2). Agora passaremos a invertigar as outras funções.

Lema 3.2. *Se $\varphi = \psi^j, \eta^3$ ou $\eta^{\mu,j}$, então φ satisfaz as condições* (1.1) *e* (1.2) *do Teorema 1.6. Além disso, no caso $\varphi = \eta^{\mu,j}$, a constante que verifica a condição* (1.1) *pode ser tomada da forma $c(\mu) = a + b|\mu|$ e as constantes que verificam a condição* (1.2) *independem de μ.*

Demonstração. Começamos analisando o operador ψ^j. Para todo $\xi \neq 0$ temos

$$
\frac{d}{d\xi}\psi^j(\xi) = \alpha_j |\xi|^{\alpha_j - 1} p(\xi) + |\xi|^{\alpha_j} \frac{d}{d\xi} p(\xi).
$$

Como $p \in C_0^\infty$, então

$$
\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \alpha_j |\xi|^{2\alpha_j} p(\xi) + |\xi|^{2\alpha_j+1} \frac{d}{d\xi} p(\xi) \right|, \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \alpha_j p(\xi) + |\xi| \frac{d}{d\xi} p(\xi) \right| < c < \infty.
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{d\xi}\psi^j(\xi)\right| &= \left|\alpha_j |\xi|^{\alpha_j - 1} p(\xi) + |\xi|^{\alpha_j} \frac{d}{d\xi} p(\xi)\right| \\
&\leq c|\xi|^{\alpha_j - 1}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{d\xi}\psi^j(\xi)\right| &= \left|\alpha_j|\xi|^{\alpha_j-1}p(\xi)+|\xi|^{\alpha_j}\frac{d}{d\xi}p(\xi)\right| \\
&= \left|\alpha_j|\xi|^{2\alpha_j}p(\xi)+|\xi|^{2\alpha_j+1}\frac{d}{d\xi}p(\xi)\right||\xi|^{-(\alpha_j+1)} \\
&\leq c|\xi|^{-\alpha_j-1},
\end{aligned}
$$

para todo $\xi \neq 0$. Logo tomando $\gamma = \alpha_j$, segue que ψ^j satisfaz o lema.

Na análise de ψ^j, a única propriedade de p usada foi que esta função tem suporte compacto. Assim, η^3 também satisfaz a condicão (1.1), já que η^3, a menos da função $\tilde{p}$, que também tem suporte compacto, tem a mesma forma de ψ^j. Olhando os passos do Lema 2.8 nos convecemos que ψ^j e η^3 também satisfazem a condição (1.2).

Por fim analisemos o multiplicador $\eta^{\mu,j}$.

$$
\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi) = i\mu e^{i\mu\xi}\xi|\xi|^{-\alpha_j}p(\xi)+e^{i\mu\xi}[(1-\alpha_j)|\xi|^{-\alpha_j}+\xi|\xi|^1-\alpha_j p'(\xi)].
$$

Logo

$$
\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| \leq |\mu||\xi|^{1-\alpha_j}|p(\xi)|+(1-\alpha_j)|\xi|^{-\alpha_j}+|\xi|^{1-\alpha_j}|p'(\xi)|
$$

Logo, para todo $\gamma > 0$ temos

$$
\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| \leq \left(|\mu||\xi|^{2-\alpha_j-\gamma}|p(\xi)|+(1-\alpha_j)|\xi|^{1-\alpha_j-\gamma}+|\xi|^{2-\alpha_j-\gamma}|p'(\xi)|\right)|\xi|^{\gamma-1} \tag{3.11}
$$

e

$$
\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| \leq \left(|\mu||\xi|^{\gamma-\alpha_j}|p(\xi)|+(1-\alpha_j)|\xi|^{\gamma-\alpha_j+1}+|\xi|^{\gamma-\alpha_j}|p'(\xi)|\right)|\xi|^{-\gamma-1}. \tag{3.12}
$$

Seja $0 < \gamma \leq 1-\alpha_j$. Então se $|\xi| \leq 1$ em (3.11), temos

$$
\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| \leq \left(|\mu|\|p\|_{L^\infty}+(1-\alpha_j)+\|p'\|_{L^\infty}\right)|\xi|^{\gamma-1}
$$

Portanto existem $a_1, b_1 > 0$ tal que

$$
\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| \leq (a_1+b_1|\mu|)|\xi|^{\gamma-1},
$$

para todo $|\xi| \leq 1$. Agora quando $|\xi| \geq 1$, note que como $\eta^{\mu,j} \in C_0^\infty$ então existe $R > 0$ tal que $\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| = 0$ para todo $|\xi| \geq R$. Por outro lado, se fizermos $1 \leq |\xi| \leq R$ em (3.12) obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{d\xi}\eta^{\mu,j}(\xi)\right| &\leq \left(|\mu|\|\xi^{\gamma-\alpha_j}p\|_{L^\infty}+(1-\alpha_j)R^{\gamma-\alpha_j+1}+\|\xi^{\gamma-\alpha_j}p'\|_{L^\infty}\right)|\xi|^{-\gamma-1} \\
&\leq (a_2+b_2|\mu|)|\xi|^{-\gamma-1},
\end{aligned}
$$

para algum $a_2, b_2 > 0$. Portanto existem $a_2, b_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{d}{d\xi} \eta^{\mu,j}(\xi) \right| \leq (a_2 + b_2|\mu|)|\xi|^{-\gamma-1}$$

para todo $|\xi| \geq 1$. Tomando $c = a + b|\mu|$, com $a = \max\{a_1, a_2\}$, $b = \max\{b_1, b_2\}$, concluimos a demonstração. A demonstração de que $\eta^{\mu,j}$ satifaz a condição (1.2) segue os mesmos passos do Lema 2.8. □

3.3 Estimativas para a derivada fracionária do produto

A regra de Leibniz usual nos dá uma expressão para a derivada ordinária do produto de duas funções a saber

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{j=1}^{n} c_{j,n} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-j}} f \frac{d^j}{dx^j} g.$$

Aqui nós estudaremos a derivada fracional do produto de duas funções a fim de obter, não uma expressão, mas uma estimativa para a mesma. Mais precisamente, gostaríamos de estimar

$$D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f \tag{3.13}$$

na norma $L^p(\mathbb{R})$. Usando os lemas da seção anterior, temos em mão todas as ferramentas para estimar a norma L^p da derivada fracional do produto de duas função.

Teorema 3.1 (Regra de Leibniz fracional)**.** *Sejam $p \in (1, +\infty)$ e $p_1, p_2 \in (1, +\infty)$, tais que, $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ e sejam $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ com $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Então existe $c > 0$, tal que,*

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g - gD^\alpha f\|_{L^p} \leq c\|D^{\alpha_1} f\|_{L^{p_1}} \|D^{\alpha_2} g\|_{L^{p_2}} \tag{3.14}$$

para toda f, g.

Demonstração. A idéia é estimar cada uma das parcelas I, II, III, IV, V, VI e VII da Poposição 3.1 usando o raciocínio utilizado na demonstração do teorema de Calderón, com o auxílio dos lemas acima. Usando a desigualdade de Minkowski, Teorema 1.6 b (aplicado a Q_k^3), Lema 2.9, Proposição 1.7 e a desigualdade de Hölder, respectivamente, vemos que:

$$\begin{aligned} \|I\|_{L^p} &= \left\| \sum_{|j|\leq 2} 2^{j\alpha_2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^3(Q_k^1(D^{\alpha_1} f) Q_{k-j}^2(D^{\alpha_2} g)) \right\|_{L^p} \\ &\leq c \sum_{|j|\leq 2} \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k^3(Q_k^1(D^{\alpha_1} f) Q_{k-j}^2(D^{\alpha_2} g)) \right\|_{L^p} \\ &\leq c \sum_{|j|\leq 2} \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_k^1(D^{\alpha_1} f) Q_{k-j}^2(D^{\alpha_2} g)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\sum_{|j|\leq 2}\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|Q^2_{k-j}(D^{\alpha_2}g)|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^1_k(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}\\
&\leq c\sum_{|j|\leq 2}\left\|M(D^{\alpha_2}g)|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^1_k(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}\\
&\leq c\left\|M(D^{\alpha_2}g)\right\|_{L^{p_2}}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^1_k(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^{p_1}}\\
&\leq c\left\|D^{\alpha_2}g\right\|_{L^{p_2}}\left\|D^{\alpha_1}f\right\|_{L^{p_1}}.
\end{aligned}
$$

As estimativas de II e III seguem a mesma idéia, já que os operadores envolvidos também satisfazem o teorema de Littlewood-Paley generalizado. Seguimos agora com a estimativa de IV. Usando a desiguladade de Cauchy-Schwarz e a desiguladade de Hölder e o teorema de Littlewood-Paley generalizado temos

$$
\begin{aligned}
\|IV\|_{L^p} &= \left\|\sum_{|j|\leq 2}2^{j-\alpha_1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q^1_k(D^{\alpha_1}f)Q^4_{k-j}(D^{\alpha_2}g)\right\|_{L^p}\\
&\leq \sum_{|j|\leq 2}2^{j-\alpha_1}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q^1_k(D^{\alpha_1}f)Q^4_{k-j}(D^{\alpha_2}g)\right\|_{L^p}\\
&\leq \sum_{|j|\leq 2}2^{j-\alpha_1}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^1_k(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^4_{k-j}(D^{\alpha_2}g)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}\\
&\leq \sum_{|j|\leq 2}2^{j-\alpha_1}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^1_k(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^{p_1}}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q^4_{k-j}(D^{\alpha_2}g)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^{p_2}}\\
&\leq c\sum_{|j|\leq 2}2^{j-\alpha_1}\left\|D^{\alpha_1}f\right\|_{L^{p_1}}\left\|D^{\alpha_2}g\right\|_{L^{p_2}}\\
&\leq c\left\|D^{\alpha_1}f\right\|_{L^{p_1}}\left\|D^{\alpha_2}g\right\|_{L^{p_2}}.
\end{aligned}
$$

A estimativa de V segue os mesmos passos da estimativa de IV.

Estimamos agora VI e VII.

$$
\begin{aligned}
\|VI\|_{L^p} &= \left\|\int\int\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q^{\nu,1}_k(D^{\alpha_1}f)Q^{\mu,2}_k(D^{\alpha_2}g))\right]r_1(\mu,\nu)d\mu d\nu\right\|_{L^p}\\
&\leq \int\int\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q^{\nu,1}_k(D^{\alpha_1}f)Q^{\mu,2}_k(D^{\alpha_2}g))\right\|_{L^p}|r_1(\mu,\nu)|d\mu d\nu.
\end{aligned}
$$

Agora estimamos o integrando assim como fizemos para I. Com efeito, usando o teorema de Littlewood-Paley generalizado ao operador $\tilde{Q}_k$, o Lema 2.9 e a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g))\right\|_{L^p} &\leq c\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}\\
&\leq c\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g)|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}\\
&\leq c\left\|M(D^{\alpha_2}g)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}\\
&\leq c\left\|M(D^{\alpha_2}g)\right\|_{L^{p_2}}\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^{p_1}}.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 3.2 podemos aplicar o teorema de Littlewood-Paley generalizado ao operador $Q_k^{\nu,1}$ e a constante que aparece no teorema é da forma $c(\nu)=a+b|\nu|$. Daí

$$\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^{p_1}} \leq c(\nu)\|D^{\alpha_1}f\|_{L^{p_1}}.$$

Logo

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g))\right\|_{L^p} \leq c(a+b|\nu|)\|D^{\alpha_2}g\|_{L^{p_2}}\|D^{\alpha_1}f\|_{L^{p_1}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|VI\|_{L^p} &\leq \int\int\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{Q}_k(Q_k^{\nu,1}(D^{\alpha_1}f)Q_k^{\mu,2}(D^{\alpha_2}g))\right\|_{L^p}|r_1(\mu,\nu)|d\mu d\nu\\
&\leq c\|D^{\alpha_2}g\|_{L^{p_2}}\|D^{\alpha_1}f\|_{L^{p_1}}\int\int(a+b|\nu|)|r_1(\mu,\nu)|d\mu d\nu.
\end{aligned}$$

Desde que $r_1\in S(\mathbb{R}^2)$ segue que a última integral é finita. Portanto, concluimos que

$$\|VI\|_{L^p}\leq c\|D^{\alpha_2}g\|_{L^{p_2}}\|D^{\alpha_1}f\|_{L^{p_1}}.$$

A estimativa de VII segue os mesmos passos. □

3.4 A regra de Leibniz no caso $p_1=\infty$ e $\alpha_1=0$

Na seção anterior o teorema de Littlewood-Paley generalizado se demonstrou suficiente para obtermos a estimativa (3.14), no caso onde $p,p_1,p_2\in(1,+\infty)$. Agora queremos investigar o caso onde $p_1 = +\infty, p_2 = p$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$. Nesse caso, não basta somente aplicar o teorema de Littlewood-Paley generalizado assim como fizemos na seção anterior. Para tratar desse caso especial, desenvolveremos primeiro algumas ferramentas envolvendo o espaço BMO.

Consideremos a decomposição diádica de $\mathbb{R}$, que consiste da coleção de todos os intervalos da forma

$$\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right),$$

com $m, k \in \mathbb{Z}$. Note que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único intervalo diádico de tamanho 2^{-k} e que contém x, o qual denotaremos por $I_k(x)$.

Dada uma sequência $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de funções, consideramos

$$A(\{f_k\})(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|I_k(x)|}\int_{I_k(x)} |f_k(y)|^2 dy\right)^{1/2} \tag{3.15}$$

e

$$C(\{f_k\})(x) = \sup_{\substack{J\ni x \\ J \text{ diádico}}} \left(\frac{1}{|J|} \sum_{\substack{I\subset J \\ I \text{ diádico} \\ |I|=2^{-k}}} \int_I |f_k(y)|^2 dy\right)^{1/2}. \tag{3.16}$$

Proposição 3.1. *Para quaisquer sequências de funções $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ temos*

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k(x)||g_k(x)|dx \leq c\int_{\mathbb{R}} A(\{f_k\})(x)C(\{g_k\})(x)dx$$

Para demonstrar a proposição acima adataremos o método aplicado por R. Coifman, Y. Meyer e E. M. Stein na prova do Teorema 1 em [3] ao caso discreto.

Primeiro identificaremos uma sequência de funções $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ como uma função $f(x,k)$ em $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Consideraremos $\mathbb{Z}$ com a medida de contagem que denotaremos por μ. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja

$$\Gamma(x) = \{(y,k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}; y \in I_k(x)\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k(x)\times\{k\}.$$

Assim, o operador (3.15) pode ser reescrito como

$$A(\{f_k\})(x) = A(f)(x) = \left(\int_{\Gamma(x)} |f(y,k)|^2 \frac{dyd\mu(k)}{2^{-k}}\right)^{1/2}.$$

Para cada $J \subset \mathbb{R}$ diádico, seja

$$\begin{aligned}\hat{J} &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{(y,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}; y\in I, I\subset J,\ I\text{diádico},\ |I|=2^{-k}\} \\ &= \bigcup_{2^{-k}\leq|J|}\{(y,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}; y\in J\} = \bigcup_{2^{-k}\leq|J|} J\times\{k\}\end{aligned}$$

Assim o operador em (3.16) pode ser reescrito como

$$C(\{f_k\})(x) = C(f)(x) = \sup_{\substack{J \ni x \\ J \quad diádico}} \left\{ \frac{1}{|J|} \int_{\hat{J}} |f(y,k)|^2 dy d\mu(k) \right\}^{1/2}. \tag{3.17}$$

Para cada $F \subset \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$R(F) = \bigcup_{x \in F} \Gamma(x).$$

Lema 3.3. *Se $\phi(y,k)$ é uma função mensurável não negativa então*

$$\int_F \left\{ \int_{\Gamma(x)} \phi(y,k) dy d\mu(k) \right\} dx \leq \int_{R(F)} \phi(y,k) 2^{-k} dy d\mu(k).$$

Demonstração. De fato, note primeiro que

$$(y,k) \in \Gamma(x) \Leftrightarrow y \in I_k(x) \Leftrightarrow \frac{x-y}{2^{-k}} \in I_0(0) \Leftrightarrow \chi\left(\frac{x-y}{2^{-k}}\right) = 1,$$

onde χ é a função característica do intervalo $I_0(0)$. Daí, segue do teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \int_F \left\{ \int_{\Gamma(x)} \phi(y,k) dy d\mu(k) \right\} dx &= \int_F \left\{ \int_{\Gamma(x)} \phi(y,k) \chi\left(\frac{x-y}{2^{-k}}\right) dy d\mu(k) \right\} dx \\ &\leq \int_F \left\{ \int_{R(F)} \phi(y,k) \chi\left(\frac{x-y}{2^{-k}}\right) dy d\mu(k) \right\} dx \\ &\leq \int_{R(F)} \phi(y,k) \left\{ \int_F \chi\left(\frac{x-y}{2^{-k}}\right) dx \right\} dy d\mu(k). \end{aligned}$$

Como

$$\int_F \chi\left(\frac{x-y}{2^{-k}}\right) dx \leq \int_{I_k(y)} dx = |I_k(y)| = 2^{-k},$$

segue o lema. □

Para cada $h > 0$, vamos considerar o conjunto

$$\Gamma^h(x) = \{(y,k) \in \Gamma(x); 2^{-k} \leq h\}.$$

Definimos

$$A(f|h)(x) = \left(\int_{\Gamma^h(x)} |f(y,k)|^2 \frac{dy d\mu(k)}{2^{-k}} \right)^{1/2}.$$

Fixada uma função g, considere a função

$$h(x) = \sup\{h > 0; A(g|h)(x) \leq \sqrt{2} C(g)(x)\}.$$

Lema 3.4. *Para cada intervalo diádico J de tamanho 2^{-k}, temos*

$$|\{x \in J; h(x) \geq 2^{-k}\}| \geq 2^{-k-1}.$$

Demonstração. Aplicando o lema anterior ao conjunto $F = \mathbb{R}$ e à função

$$\phi(y,k) = |g(y,k)|^2 2^k \chi_{\hat{J}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\Gamma(x)} |g(y,k)|^2 2^k \chi_{\hat{J}} dy d\mu(k) \right\} dx &\leq \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} |g(y,k)|^2 \chi_{\hat{J}} dy d\mu(k) \\ &= \int_{\hat{J}} |g(y,k)|^2 dy d\mu(k). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Juntando (3.17) e (3.18) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|J|} \int_J \left\{ \int_{\Gamma(x)} |g(y,j)|^2 \chi_{\hat{J}} \frac{dy d\mu(j)}{2^{-j}} \right\} dx &\leq \frac{1}{|J|} \int_{\hat{J}} |g(y,k)|^2 dy d\mu(k) \\ &\leq \inf_{x \in J} C^2(g)(x). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por outro lado, como $\Gamma^{2^{-k}}(x) \subset \hat{J}$ para todo $x \in J$ e $\Gamma^{2^{-k}}(x) \subset \Gamma(x)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|J|} \int_J A(g|2^{-k})^2(x) dx &= \frac{1}{|J|} \int_J \left\{ \int_{\Gamma^{2^{-k}}(x)} |g(y,j)|^2 \frac{dy d\mu(j)}{2^{-j}} \right\} dx \\ &\leq \frac{1}{|J|} \int_J \left\{ \int_{\Gamma(x)} |g(y,j)|^2 \chi_{\hat{J}} \frac{dy d\mu(j)}{2^{-j}} \right\} dx. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Assim, deduzimos de (3.19) e (3.20) que

$$\frac{1}{|J|} \int_J A(g|2^{-k})^2(x) dx \leq \inf_{x \in J} C^2(g)(x).$$

Note que, pela definição de $h(x)$, $A(g|2^{-k})(x) > \sqrt{2} C(g)(x)$ sempre que $h(x) < 2^{-k}$. Assim

$$\begin{aligned} \inf_{x \in J} C^2(g)(x) &\geq \frac{1}{|J|} \int_{\{x \in J; h(x) < 2^{-k}\}} A(g|2^{-k})^2(x) dx \\ &\geq \frac{1}{|J|} \int_{\{x \in J; h(x) < 2^{-k}\}} 2C(g)^2(x) dx \\ &\geq \frac{2}{|J|} \inf_{x \in J} C^2(g)(x) |\{x \in J; h(x) < 2^{-k}\}|. \end{aligned}$$

Logo

$$|\{x \in J; h(x) < 2^{-k}\}| \leq \frac{|J|}{2}.$$

Logo

$$|\{x \in J; h(x) \geq 2^{-k}\}| \geq \frac{|J|}{2} = 2^{-k-1}.$$

□

Lema 3.5. *Se $\phi(y,k)$ é uma função mensurável não negativa, então*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \phi(y,k)2^{-k-1}dyd\mu(k) \leq \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\Gamma^{h(x)}(x)} \phi(y,k)dyd\mu(k) \right\} dx.$$

Demonstração. Pelo teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\Gamma^{h(x)}(x)} \phi(y,k)dyd\mu(k) \right\} dx &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \chi_{\Gamma^{h(x)}(x)}(y,k)\phi(y,k)dyd\mu(k) \right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \phi(y,k) \left\{ \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma^{h(x)}(x)}(y,k)dx \right\} dyd\mu(k). \quad (3.21) \end{aligned}$$

Note que, para cada (y,k) fixado, temos que

$$\chi_{\Gamma^{h(x)}(x)}(y,k) = 1$$

se, e somente se, $x \in I_k(y)$ e $h(x) \geq 2^{-k}$. Daí, pelo lema anterior

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma^{h(x)}(x)}(y,k)dx &= \int_{\{x\in I_k(y);h(x)\geq 2^{-k}\}} dx \\ &= |\{x \in I_k(y); h(x) \geq 2^{-k}\}| \geq 2^{-k-1}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Substituindo essa última desigualdade em (3.21), concluimos a demonstração do lema. □

Demonstração da Proposição 3.1. Considere a função

$$\phi(y,k) = |f(y,k)||g(y,k)|2^k.$$

Pelo lema anterior temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} |f(y,k)||g(y,k)|dyd\mu(k) &= 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \phi(y,k)2^{-k-1}dyd\mu(k) \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\Gamma^{h(x)}(x)} \phi(y,k)dyd\mu(k) \right\} dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\Gamma^{h(x)}(x)} |f(y,k)||g(y,k)|\frac{dyd\mu(k)}{2^{-k}}dx \right\} \quad (3.23) \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz à integral em (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} |f(y,k)||g(y,k)|dyd\mu(k) &\leq 2\int_{\mathbb{R}} A(f|h(x))(x)A(g|h(x))(x)dx \\ &\leq 2\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} A(f|h(x))(x)C(g)(x)dx \\ &\leq 2\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} A(f)(x)C(g)(x)dx, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da proposição. $\square$

Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Então f_J denotará a média de f sobre o intervalo J, ou seja

$$f_J = \frac{1}{|J|} \int_J f(x) dx.$$

Denotaremos por $M^{\#}(f)$ a *função maximal sharp*, dada por

$$M^{\#}(f)(x) := \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|} \int_J |f(y) - f_J| dy.$$

Denotaremos por $BMO(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tais que $M^{\#}(f) \in L^\infty(\mathbb{R})$, munido da norma $\|f\|_* = \|M^{\#}(f)\|_{L^\infty}$. Note que $L^\infty(\mathbb{R}) \subset BMO(\mathbb{R})$, mais ainda, $\|\cdot\|_{BMO} \leq 2\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Consideramos também o espaço de Hardy $H^1(\mathbb{R})$, como sendo

$$H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^p(\mathbb{R}); Hf \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

Um resultado importante envolvendo os espaços acima é o seguinte:

Teorema 3.2. *Para cada $f \in BMO(\mathbb{R})$, a aplicação*

$$g \in H^1(\mathbb{R}) \longmapsto T_f(g) := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx \tag{3.24}$$

define um elemento de $H^1(\mathbb{R})^*$. Além disso, a aplicação

$$f \in BMO(\mathbb{R}) \longmapsto T_f \in H^1(\mathbb{R})^*$$

é um isomorfismo. Em outras palavras, o dual de $H^1(\mathbb{R})$ é $BMO(\mathbb{R})$ e todo elemento de $H^1(\mathbb{R})^*$ pode ser representado da forma (3.24).

Demonstração. Ver [14] Capítulo 4. $\square$

Lema 3.6. *Seja $f \in BMO(\mathbb{R})$. Então para cada intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}$, temos*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{I \subset J \\ |I| = 2^{-k}}} \|Q_k f\|^2_{L^2(I)} \leq c|J| \|f\|^2_{BMO}$$

onde $(Q_k f)^\wedge = m(2^{-k} \cdot) \hat{f}$, com m satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.6.

Demonstração. Ver [14] capítulo 4, Teorema 3. $\square$

A seguir consideraremos a função $S(f)$ denotada por

$$S(f)(x) = \left(\sum_{\substack{J \quad diádico \\ J \ni x \\ |J| = 2^{-k}}} \frac{1}{|J|} \int_J |Q_k f(y)|^2 dy \right)^{1/2},$$

onde $Q_k f = \{m(2^{-k} \cdot) \hat{f}\}^\vee$, e m é uma função que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.6.

Lema 3.7. *Para cada* $1 < p < +\infty$

$$\|S(f)\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver [11]. $\square$

Lema 3.8. *Sejam* m_1, m_2 *funções que satisfazem as hipóteses do teorema 1.6 e tal que* $|m_2| \leq \varphi$*, onde* φ *é decrescente e* $\int_{\mathbb{R}} \varphi < +\infty$*. Se* Q_k*,* Ψ_k *são dados por* $(Q_k f)^\wedge = m_1(2^{-k}\cdot)\hat{f}$*,* $(\Psi_k f)^\wedge = m_2(2^{-k}\cdot)\hat{f}$*, então*

a) $\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f_k\right\|_{H^1} \leq c\|A(\{f_k\})\|_{L^1}$*;*

b) $A(\{Q_k f \Psi_k g\})(x) \leq cS(f)(x)M(g)(x)$*.*

Demonstração. Primeiro note que, pelo teorema de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} Q_k f_k(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) Q_k g(x) dx.$$

Pela Proposição 3.1 temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} Q_k f_k(x) g(x) dx\right| &= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) Q_k g(x) dx\right| \\
\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |f_k(x)||Q_k g(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} A(\{f_k\})(x) C(\{Q_k g\})(x) dx.
\end{aligned}$$

Agora note que o Lema 3.6 implica que $C(\{Q_k g\})$ é limitada por $\|g\|_{L^\infty}$, para cada $g \in BMO(\mathbb{R})$. De fato, se $g \in BMO(\mathbb{R})$ então

$$\begin{aligned}
C(\{Q_k g\})(x) &= \sup_{\substack{J\ni x \\ J \text{ diádico}}} \frac{1}{|J|} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{I\subset J \\ I \text{ diádico} \\ |I|=2^{-k}}} \|Q_k g\|_{L^2(I)} \\
&\leq \sup_{\substack{J\ni x \\ J \text{ diádico}}} \frac{c}{|J|} |J| \|g\|_{BMO} \leq 2c\|g\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} Q_k f_k(x) g(x) dx\right| \leq c\|A(\{f_k\})\|_{L^1},$$

para toda $g \in BMO(\mathbb{R})$. Logo, pelo Teorema 3.2

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k f_k\right\|_{H^1} &= \sup_{\substack{g\in BMO \\ \|g\|_{BMO}\leq 1}} \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} (Q_k f_k)^\wedge(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi\right| \\
&\leq c\|A(\{f_k\})\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Para provar $b)$, basta usar o Lema 2.9, para obter

$$
\begin{aligned}
(A(\{Q_k f \Psi_k g\})(x))^2 &= \sum_{\substack{I \ni x \\ I\, diádico \\ |I| = 2^{-k}}} \frac{1}{|I|} \int_I |Q_k f(y)|^2 |\Psi g(y)|^2 dy \\
&\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\Psi_k g|^2 S(f)^2(x) \\
&\leq cM(g)^2(x) S(f)^2(x).
\end{aligned}
$$

Daí segue o resultado. □

Agora estamos prontos para estimar a derivada fracional do produto, como em (3.14), no caso em que $p_1 = +\infty$, $p_2 = p$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$.

Teorema 3.3. *Seja* $0 < \alpha < 1$ *e* $1 < p < +\infty$. *Então*

$$
\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g - gD^\alpha f\|_{L^p} \leq c\|g\|_{L^\infty} \|D^\alpha f\|_{L^p}.
$$

Demonstração. Pelo Lema 3.1 temos apenas quatro tipos de operadores a considerar:

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k(Q_k g Q_k D^\alpha f), \tag{3.25}
$$

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k g Q_k D^\alpha f, \tag{3.26}
$$

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k(\Psi_k g Q_k D^\alpha f), \tag{3.27}
$$

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k(Q_k g \Psi_k D^\alpha f). \tag{3.28}
$$

O argumento para limitar os termos (3.25) e (3.27) são similares. Deste modo estimaremos apenas (3.27). Sejam $q \in (1, +\infty)$ tal que $1/p + 1/q = 1$ e $h \in L^q(\mathbb{R})$, com $\|h\|_{L^q} \leq 1$. Então, argumentando como na seção anterior temos

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_k(\Psi_k g Q_k D^\alpha f) h dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi_k g Q_k D^\alpha f Q_k h dx \right| \\
\leq\;& \int_{\mathbb{R}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\Psi_k g| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k D^\alpha f||Q_k h| dx \leq \int_{\mathbb{R}} M(g) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k D^\alpha f||Q_k h| dx \\
\leq\;& c\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k D^\alpha f|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k h|^2 \Big)^{1/2} dx \\
\leq\;& c\|g\|_{L^\infty} \left\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k D^\alpha f|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^p} \left\| \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k h|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{L^q} \\
\leq\;& c\|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p} \|h\|_{L^q} \leq c\|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Vamos agora estimar (3.26). Ainda com a notação das seções anteriores temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k g Q_k D^\alpha f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k(Q_k g Q_k D^\alpha f).$$

Seja $h \in L^q(\mathbb{R})$, com $\|h\|_{L^q} \leq 1$. Então, pelo teorema de Plancherel e pela Proposição 3.1

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k(Q_k g Q_k D^\alpha f) h dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k g Q_k D^\alpha f P_k h dx\right| \\ \leq \quad \int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_k g Q_k D^\alpha f P_k h| dx &\leq c \int_{\mathbb{R}} A(\{Q_k D^\alpha f P_k h\}) C(\{Q_k g\}) dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.6, $C(\{Q_k g\})$ é limitada por $c\|g\|_{L^\infty}$. Por outro lado, pelo Lema 3.8

$$A(\{Q_k D^\alpha f P_k h\}) \leq c S(D^\alpha f) M(h).$$

Deste modo, combinando as desigualdade de Hölder, o Teorema 1.6, e usando que M é (q,q) forte, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k g Q_k D^\alpha f) h dx\right| &\leq c\|g\|_{L^\infty} \|S(D^\alpha f)\|_{L^p} \|M(h)\|_{L^q} \\ &\leq c\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \leq c\|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.4 temos

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k g Q_k D^\alpha f)\right\|_{L^p} &= \sup_{\substack{h\in L^q \\ \|h\|_{L^q}\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{Q}_k(Q_k g Q_k D^\alpha f) h dx\right| \\ &\leq c\|g\|_{L^\infty}\|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

A estimativa de (3.28) segue os mesmos passos da estimativa de (3.26). Concluimos assim a demonstração do teorema. □

3.5 Aplicação da Regra de Leibniz fracional

Encerramos dando uma aplicação da regra de Leibniz.

Definição 3.2. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem s e base L^p, que denotaremos por $W^{s,p}(\mathbb{R})$, para $1 \leq p \leq +\infty$, por*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}) = \{f \in S'(\mathbb{R}); J^s f = \{(1+\xi^2)^{s/2}\hat{f}\}^\vee \in L^p(\mathbb{R})\},$$

com norma $\|\cdot\|_{s,p}$ dada por

$$\|f\|_{s,p} := \|J^s f\|_{L^p}.$$

Proposição 3.2. *As normas* $\|f\|_{s,p}$ *e* $\|f\|_{L^p} + \|D^s f\|_{L^p}$ *são equivalentes, para todo* $1 \leq p \leq +\infty$.

Demonstração. Ver [13] Capítulo 5, Seção 3.2, Lema 3.2. □

Teorema 3.4 (Lema de Sobolev)**.** *Se* $s > 1/2$, *então* $fg \in W^{s,2}(\mathbb{R})$, *para toda* $f, g \in W^{s,2}(\mathbb{R})$. *Além disso*

$$\|fg\|_{s,2} \leq c_s \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}.$$

Demonstração. Ver [6], capítulo 3. □

Esse resultado nos diz que para $s > 1/2$, $W^{s,2}(\mathbb{R})$ é uma álgebra, com respeito ao produto de funções. Usando o Teorema 3.3, provaremos que $W^{s,p}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ é uma álgebra com relação ao produto de funções, para todo s positivo e $1 < p < +\infty$. Mais precisamente:

Teorema 3.5. *Sejam* $1 < p < +\infty$ *e* $s > 0$. *Se* $f, g \in W^{s,p}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ *então* $fg \in W^{s,p}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. *Além disso*

$$\|fg\|_{s,p} \leq c_s (\|f\|_{s,p} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{s,p}).$$

Ou seja $W^{s,p}(\mathbb{R})$ *é uma álgebra de Banach com respeito ao produto pontual de funções, para todo* $1 < p < +\infty$ *e* $s > 0$.

Demonstração. De fato, pelo Teorema 3.3, temos que para todo $0 < s < 1$

$$\|D^s(fg) - fD^s g - gD^s f\|_{L^p} \leq c \|g\|_{L^\infty} \|D^s f\|_{L^p}.$$

Logo, a desigualdade de Hölder implica que

$$\begin{aligned} \|D^s(fg)\|_{L^p} &\leq \|fD^s g\|_{L^p} + \|gD^s f\|_{L^p} + c\|D^s f\|_{L^p} \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \|D^s g\|_{L^p} + (1 + c)\|g\|_{L^\infty} \|D^s f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 3.2 concluimos que

$$\|fg\|_{s,p} \leq c(\|g\|_{L^\infty} \|g\|_{s,p} + \|f\|_{s,p} \|g\|_{L^\infty}).$$

□

Bibliografia

[1] R. Coifman, R. Rochberg e G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann of Math, **103** (1976), 611–635.

[2] R. Coifman e Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels,* Astérisque, **57** (1978).

[3] R. Coifman, Y. Meyer e E. M. Stein, *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis,* J. Funct. Anal. , **62** (1985), 304–335.

[4] L. Dawson, H. McGahagan e G. Ponce, *On the decay properties of solutions to a class of Schrödinger equations,* Proc. Amer. Math. Soc, **136** (2008), 2081–2090.

[5] J. Duoandikoetxea, "Fourier Analysis," Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, (2001).

[6] F. Linares, G. Ponce, "Introduction to Nonlinear Dispersive Equations". Springer, (2008).

[7] G. B. Folland, "Real Analysis,"A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs Tracts, (1984).

[8] C. Isnard, "Introdução à Medida e Integração". IMPA, Pojeto Euclides, (2007).

[9] V. M. Iorio, "EDP, Um Curso de Graduação", IMPA, Coleção Matemática Universitária, (1991).

[10] C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega,*Well-posedness and scattering results for the generalized KdV equation via the contraction principle,* Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 527–620.

[11] J. L. Rudio de Francia, F. J. Ruiz, e J. L. Torrea, *Calderón-Zygmund theory for operator valued kernels,* Adv. Math. **62**(1998) pp. 7–48.

[12] W. Schlag, "Lectures notes ", Wilhelm Schlag's home page.

[13] E. M. Stein, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1970).

[14] E. M. Stein, “Harmonic Analysis: Real-variables Methods, Orthogonality, and Oscilatory integrals”, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jarsey, (1993).