Estabilidade Linear e Exponencial de Semigrupos C_0 e Aplicações

Francis Félix Córdova Puma

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Rio de Janeiro

julho de 2010

Estabilidade Linear e Exponencial de Semigrupos C_0 e Aplicações

Francis Félix Córdova Puma

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Jaime E. Muñoz Rivera - IM/UFRJ

Prof. Hugo Fernandez Sare - IM/UFRJ

Prof. Marcelo Cavalcanti - UEM

Prof. Mauro de Lima Santos - UFPA

Prof. Wladimir Neves - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

Julho de 2010

Aos meus pais

Viviana Puma e Felipe Córdova.

Aos meus irmãos

Antonio, Maykol e Henry.

Ficha Catalográfica

Francis Félix Córdova Puma.

Estabilidade Linear e Exponencial de Semigrupos C_0 e Aplicações /Francis Félix Córdova Puma.-

Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2010.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2010.

Referências Bibliográficas: f.64.

1. Estabilidade Exponencial.

2. Semigrupo C_0.

3. Misturas viscoelástica e com dissipação friccional.

Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática. III. Título.

Estabilidade Linear e Exponencial de Semigrupos C_0 e Aplicações

Francis Félix Córdova Puma

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Neste trabalho investigaremos o comportamento assintótico e analiticidade das soluções dos problemas de valor inicial e fronteira da teoria unidimensional para mistura de dois sólidos: viscoelástica e com dissipação friccional. Em cada caso, mostramos a existência e unicidade de soluções globais fortes. Nosso principal objetivo é apresentar as condições que asseguram a estabilidade exponencial, a analiticidade e a falta de analiticidade do semigrupo correspondente. A ferramenta utilizada é a teoria de semigrupos e operadores dissipativos em espaços de Hilbert. Especificamente o resultado de Pruss [23] sobre estabilidade exponencial de um semigrupo, o resultado de Renardy [25] sobre estabilidade linear e a caracterização de semigrupos analíticos desenvolvido por Liu e Zheng em seu livro [12].

palavras-chave: Estabilidade Exponencial; Estabilidade linear; Analiticidade; Semigrupo C_0; Misturas viscoelástica e com dissipação friccional.

Linear and Exponential Stability of C_0-semigroups and Applications

Francis Félix Córdova Puma

Supervisor: Jaime E. Muñoz Rivera

In this work we investigate the asymptotic behavior and analyticity of solutions to the initial boundary value problem for a one-dimensional theory of mixtures of viscoelastic and frictional solids. In each case, we show the existence and uniqueness of global strong solutions. Our main goal is to present conditions which insure the exponential stability, the analyticity and the lack of analyticity of the corresponding semigroup. The tool used is the theory of semigroups and dissipative operators in Hilbert spaces. Specifically the result of Pruss [23] on exponential stability of a semigroup, the result of Renardy [25] on linear stability and the characterization of analytical-semigroups developed by Liu and Zheng [12].

keywords: Exponential stability; Linear stability; Analyticity; C_0-semigroup; frictional and viscoelastic mixtures.

Conteúdo

Notações

- $C([0,\infty);X)$ denota o espaço das funções contínuas de $[0,\infty)$ em X.
- $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω.
- $\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C};\ (\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\}$ é o conjunto resolvente do operador A.
- $\sigma(A)=\mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é o espectro de A.
- $R(\lambda;A)=(\lambda I-A)^{-1}$ é o operador resolvente.
- I ou $\mathcal{I}$ representam o operador identidade.
- e^{At} denota o semigrupo C_0 gerado pelo operador A.
- $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$.
- $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$.
- $\rho_j>0$ representa a densidade de massa do material componente de uma mistura de sólidos.
- $A\succ 0$ denota, para uma matriz A, a propriedade de ser definida positiva.
- $\mathcal{Q}_A(\ ,\ )$ denota a forma quadrática associada à matriz A.
- $B\succeq 0$ denota, para uma matriz B, a propriedade de ser semidefinida positiva.

Introdução

Seja X um espaço de Banach complexo munido da norma $\|.\|_X$ e seja A o gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0, e^{At}, em X. Seja $w_0(A)$ o tipo do semigrupo e $w_\sigma(A)$ a cota espectral. Um dos problemas mais importante dentro da teoria de estabilização de semigrupos é saber quando o sistema apresenta decaimento exponencial. Em caso afirmativo, o problema seguinte é obter uma taxa ótima de decaimento, um caminho para tal fim é obter uma descrição do espectro $\sigma(e^{At})$ de e^{At} em termos do espectro $\sigma(A)$ de A. Tal descrição tem como consequência o princípio de estabilidade linear para e^{At}, isto é, $w_0(A) = w_\sigma(A)$. Tal igualdade também é chamada propriedade de crescimiento determinada pelo espectro (PCDE). Em geral, sabemos que a inclusão $e^{\sigma(A)t} \subseteq \sigma(e^{At})$ se verifica para todo gerador A (ver [22], [5]), mas tal inclusão pode ser estrita, ver por exemplo [5]. Este fato não permite relacionar diretamente os espectros do operador A e dos operadores e^{At} para $t \geq 0$. No entanto, existem várias classes de geradores A para os quais o espectro de e^{At} pode ser descrito em termos de $\sigma(A)$. Por exemplo, se

- A é limitado, então $\sigma(e^{At}) = e^{\sigma(A)t}$.
- X é um espaço de Hilbert e A é um operador normal, isto é, A e seu operador adjunto comutam, então $\sigma(e^{At}) = \overline{e^{\sigma(A)t}}$.
- e^{At} é contínuo em $\mathcal{L}(X)$ para todo $t > t_0 \geq 0$, então $\sigma(e^{At})\backslash\{0\} = e^{\sigma(A)t}$.

onde $\mathcal{L}(X)$ denota o espaço dos operadores lineares limitados em X munido com a norma usual. Em particular, o último item inclui os semigrupos de classe C_0, e^{At}, tais que e^{At} é compacto para todo $t > t_0 \geq 0$ e os semigrupos diferenciáveis para todo $t > t_0 \geq 0$. Prüss [23] mostrou uma caracterização do espectro $\sigma(e^{At})$ para semigrupos (não necessariamente de contrações) em espaços de Hilbert. Desta caracterização surgiram várias consequências importantes. Algumas destas consequências são:

- Caracterização da estabilidade exponencial de e^{At}, ver teorema (1.4.5).
- Caracterização dos semigrupos que possuem a propriedade (PCDE) que, como consequência obtem-se que os semigrupos analíticos têm tal propriedade.
- Condições suficientes para que uma classe de semigrupos apresente a propriedade (PCDE). Esta última foi demonstrada por Renardy [25].

Como $w_0(A) < 0$ é equivalente à estabilidade exponencial do semigrupo, a propriedade (PCDE) fornece um critério prático para verificar a estabilidade exponencial de um sistema de evolução dado. Pois neste caso é mais simples analisar o espectro do operador do que calcular o tipo do semigrupo $w_0(A)$. Assim, obtemos diferentes aplicações para as equações diferenciais parciais. Este trabalho está baseado nos artigos rescentes de J. Pruss [23] e [24] onde se descrevem caracterizações da estabilidade exponecial e polinomial de semigrupos respectivamente. Finalmente usamos o artigo de Renardy [25] para obter os resultados de estabilidade linear, isto é as condições que deve satisfazer o gerador A para que o tipo do semigrupo e^{At} seja igual à cota superior do espectro de A. Usaremos estes resultados para obter resultados de estabilização linear e exponencial para modelos de misturas de dois sólidos. Incluimos alguns resultados inéditos na estabilização exponencial de modelos de misturas com dissipação friccional e viscoelástica. O trabalho está dividido em 4 capítulos. No primeiro deles apresentamos os resultados clássicos de análise funcional e semigrupos que serão utilizados no trabalho. No capítulo 2 faremos uma análise detalhada do comportamento assintótico do modelo de mistura de sólidos com dissipação friccional, ressaltamos a relação entre o espectro do operador e o decaimento exponencial das soluções. No Capítulo 3 estudaremos a analiticidade do semigrupo associado ao modelo de mistura viscoelástica. No capítulo 4 estabeleceremos as conclusões dos resultados obtidos e observações relevantes à teoria de mistura de sólidos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo daremos algumas definições e estabeleceremos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados nos livros ou artigos mencionados nas referências.

1.1 Espaços de Sobolev e Resultados Básicos

Seja X um espaço vetorial normado.

Definição 1.1.1. (Sequência de Cauchy) *Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço normado X é chamada de Cauchy, quando a cada $\epsilon > 0$ corresponde um número natural N tal que $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$ para todo $n, m > N$.*

Definição 1.1.2. (Espaços de Banach e Hilbert) *O espaço X é dito de Banach se é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em X é convergente em X. Além disso, X é dito espaço de Hilbert se é um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e completo com respeito à norma $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$.*

Teorema 1.1.3. (Teorema da Aplicação Aberta) *Denotemos por E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e sobrejetivo de E em F. Então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$T(B_E(0,1)) \supseteq B_F(0,c)$$

onde $B_X(a,r)$ é a bola aberta em X de centro a e raio r, isto é,

$$B_X(a,r) = \{\ y \in X\ ;\ \|y-a\| < r\ \}$$

Demonstração. Ver [3].

Corolário 1.1.4. *Sejam E e F espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de E sobre F. Então T^{-1} é contínuo de F em E.*

Demonstração. Ver [3].

Definição 1.1.5. (Operador Fechado) *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : D(T) \subset E \to F$ um operador linear. Diremos que T é um operador fechado se seu gráfico*

$$G(T) = \{\ (x,y)\ ;\ \ x \in D(T)\ ,\ \ y = Tx\ \}$$

for um subconjunto fechado de $E \times F$.

Teorema 1.1.6. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear de E em F. Suponha que o gráfico de T, $G(T)$, seja fechado em $E \times F$. Então T é contínuo.*

Demonstração. Ver [3].

Corolário 1.1.7. *Sejam E e F espaços de Banach, $T : D(T) \subset E \to F$, $D(T)$ fechado em E. Se T é contínuo, então T é fechado.*

Demonstração. Ver [3].

No que segue, seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue. Suponhamos conhecidos os conceitos de função integrável, mensurável, conjunto de medida nula, etc.; ver, por exemplo, [26]. Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis sobre Ω, e escrevemos

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$$

como a norma $L^1(\Omega)$ da função f.

Teorema 1.1.8 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja (f_n) uma sucessão crescente de funções $L^1(\Omega)$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$. Então $f_n(x)$ converge quase sempre em Ω para um limite finito denotado por $f(x)$. Além disso $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.*

Demonstração. Ver [3].

Teorema 1.1.9. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sucessão de funções* $L^1(\Omega)$. *Suponha que*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *quase sempre em* Ω.

(b) *Existe uma função* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *quase sempre em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Demonstração. Ver [3].

Definição 1.1.10. *Denotaremos como* $C_c(\Omega)$ *o espaço das funções contínuas em* Ω *com suporte compacto, isto é,*

$$C_c(\Omega) \ = \ \{ \ f \in C(\Omega) \ ; \ \ f(x) = 0 \ \forall x \in \Omega \backslash K \ \ \textit{onde} \ \ K \subset \Omega \ \ \textit{é compacto} \ \} \ .$$

Teorema 1.1.11. (Teorema de Densidade) *O espaço* $C_c(\Omega)$ *é denso em* $L^1(\Omega)$, *isto é,*

$$\forall f \in L^1(\Omega) \ \ e \ \ \forall \epsilon > 0 \ , \ \ \exists f_1 \in C_c(\Omega) \ \ \textit{tal que} \ \ \|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon.$$

Demonstração. Ver [3].

Seja agora Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Definimos, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(\Omega)$ como o espaço das funções reais u, mensuráveis em Ω, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω. Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx \ ; \quad 1 \leq p < \infty$$

com a qual $L^p(\Omega)$ resulta ser um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ representa o espaço de todas as funções essencialmente limitadas em Ω com a norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \ \operatorname*{supess}_{x \in \Omega} |u(x)| \ .$$

Também neste caso $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach. Para os espaços $L^p(\Omega)$ é possível mostrar também um resultado análogo ao Teorema (1.1.11). Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Além disso, seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e denotamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$ definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Quando $\alpha = (0, 0..., 0)$, definimos $D^\alpha u = u$. Com estas notações definimos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como o espaço de todas as funções reais $u \in L^p(\Omega)$ tais que a derivada $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m$. A derivada considerada no sentido das distribuições. Definimos, em $W^{m,p}(\Omega)$, a norma

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx$$

com a qual $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado *espaço de Sobolev de ordem m.* Além disso, definimos o espaço de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o fecho do espaço C_0^∞ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$ e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

e norma dada por

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \; .$$

No caso particular em que $m = 1$, tem-se o espaço $H^1(\Omega)$ definido por

$$H^1(\Omega) \ := \ \{ \ u \in L^2(\Omega) \ ; \ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ ; \ \ i = 1, 2, ...n \ \}$$

e também é possível identificar via teorema do traço, os espaços

$$H_0^1(\Omega) \ := \ \{ \ u \in H^1(\Omega) \ ; \ \ u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega \ \}.$$

Ver [3].

Além disso, em $H^1(\Omega)$ temos o seguinte produto interno:

$$((u, v)) = \int_\Omega u(x) v(x) dx + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

e a norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \ .$$

Num espaço de Banach X, para todo $T > 0$, podemos definir também o espaço $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p < \infty$, formado por todas as funções vetoriais $u : [0,T] \to X$ mensuráveis e tais que $|u(t)|_X^p$ é integrável em $(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$, definimos a norma

$$\|u\|^p_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T \|u\|_X^p dt \ .$$

A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(x)\|_X \ .$$

Desta forma, $L^p(0,T;X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

Citaremos agora alguns resultados dos espaços $L^2(\Omega)$ e dos espaços de Sobolev que serão usados neste trabalho.

Teorema 1.1.12. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com p e q satisfazendo $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Demonstração. Ver [3].

Seja H um espaço normado com norma $\|\cdot\|$. A aplicação denotada por

$$a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$$

é chamada

(i) *Sesquilinear* se, para todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ e para todo $u, v, w \in H$, se verifica

$$a(\alpha_1 u + \alpha_2 v, w) = \alpha_1 a(u,w) + \alpha_2 a(v,w) \quad \text{e}$$

$$a(u, \beta_1 v + \beta_2 w) = \overline{\beta_1} a(u,v) + \overline{\beta_2} a(u,w).$$

(ii) *Contínua* se existe uma constante c tal que $|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|$, para todo $u, v \in H$.

(iii) *Positiva* se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$, para todo $v \in H$.

Observação 1.1.13. *Se*

$$a(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R},$$

então o conceito de sesquilinearidade é equivalente a bilinearidade.

Além disso, dizemos que a aplicação denotada por

$$\varphi(\cdot): H \longrightarrow \mathbb{C}$$

é *Antilinear*, se $\varphi(\alpha u) = \overline{\alpha}\varphi(u)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e para todo $u \in H$.

Lema 1.1.14. (Lema de Lax-Milgran) *Seja $a(\cdot,\cdot)$ uma forma sesquilinear, contínua e positiva. Então, para toda aplicação antilinear $\varphi : H \to \mathbb{C}$, existe uma única $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \ , \quad \forall v \in H$$

Demonstração. Ver [27].

Lema 1.1.15. (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva c_p que depende univocamente de Ω e n tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ , \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Demonstração. Ver [3].

1.2 Teoria de Semigrupos e algumas definições

De modo geral, um sistema dinâmico é uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de mapeamentos sobre um conjunto X satisfazendo

$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s) \ \ \forall\ t,s \geq 0, \\ T(0) &= I. \end{aligned}$$

Aqui X é o conjunto de todos os estados de um sistema, $t \in \mathbb{R}^+$ representa o tempo e $T(t)$ representa o mapeamento que descreve a mudança de um estado $x \in X$ para o estado $T(t)x$ no tempo t. No contexto linear o espaço X é um espaço vetorial e cada $T(t)$ é um operador linear em X, logo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado um semigrupo de operadores. A situação normal em que tais semigrupos de operadores aparecem naturalmente são os chamados problemas de Cauchy abstrato (ACP)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= Au(t) \ \ \forall t > 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

onde A é um operador linear em um espaço de Banach X. Em algumas situações concretas particulares a relação entre $T(t)$ e A é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{At} \\ A &= \left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Em geral, tal relação parece estar fora de alcance. No entanto, um simples pressuposto de continuidade no semigrupo (veja definição 1.2.1) produz que $T(t)$ se comporte como uma exponencial do operador A em espaços de Banach. Logo, uma teoria rica com um vasto campo e quase universal de aplicações. É o objetivo desta secção resumir esta teoria e apresentar algumas definições relevantes para este trabalho.

Definição 1.2.1. *Uma família parametrizada $T(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach X, é chamado semigrupo fortemente contínuo se*

(i) $T(0) = I$, *(I é o operador identidade em X),*

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$ *para todo* $t, s \geq 0$ *(propriedade de semigrupos),*

(iii) *Para cada $x \in X$, $T(t)x$ é contínua em t sobre* $[0, \infty)$.

Definição 1.2.2. *O operador linear A definido como*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0} \quad \textit{para todo} \quad x \in D(A),$$

em que

$$D(A) = \{ \, x \in X \; : \; \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \;\; \textit{existe} \, \}$$

é o domínio de A, é o gerador infinitesimal *do semigrupo $T(t)$.*

Chamaremos de semigrupo de classe C_0 ou simplesmente semigrupo C_0 a um semigrupo fortemente contínuo. Algumas vezes denotaremos $T(t)$ por e^{At}.

Definição 1.2.3. *Um semigrupo de operadores lineares limitados, $T(t)$, é dito* uniformemente contínuo *se*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\| \;=\; 0.$$

Teorema 1.2.4. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. Ver [22].

Teorema 1.2.5. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados. Suponha que*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} \;=\; A \;=\; \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Ver [22].

Teorema 1.2.6. *Sejam $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então se verificam:*

(a) *Para todo $x \in X$, temos que*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds \;=\; T(t)x.$$

(b) *Para todo $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) \;=\; T(t)x - x.$$

(c) *Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x \;=\; AT(t)x \;=\; T(t)Ax.$$

Em particular, a função $u = T(t)x$ satisfaz $\dfrac{d}{dt}u = Au$.

Demonstração. Ver [22].

Observação 1.2.7. *Sejam $T(t)$ um Semigrupo C_0 em um espaço de Banach X e A seu gerador. Os teoremas (1.2.5) e (1.2.6) implicam que a aplicação $u := T(t)x$ é a única solução para o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = & Au \\ u(0) & = & x. \end{cases} \tag{1.1}$$

Com regularidade

$$u \in C([0,\infty);X), \quad x \in X \tag{1.2}$$

$$u \in C([0,\infty);D(A)) \cap C^1([0,\infty);X), \quad x \in D(A). \tag{1.3}$$

Definição 1.2.8. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é dito semigrupo de contrações se*

$$\|T(t)\| \leq 1 \qquad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Definição 1.2.9. *Dizemos que um semigrupo C_0, $T(t)$, é exponencialmente estável se existe uma constante positiva μ e $M \geq 1$ tal que*

$$||T(t)|| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.4}$$

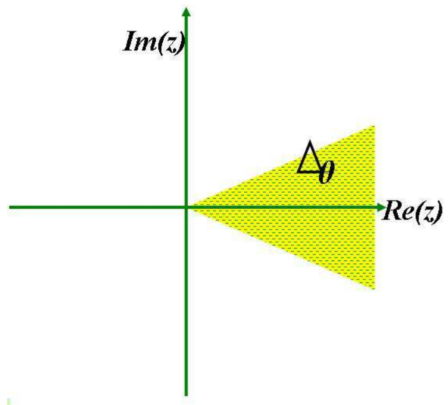

Figura 1.1: Região de Analiticidade

Definição 1.2.10. *Dizemos que $T(t)$ é analítico se admite uma extensão $\bar{T}(\lambda)$ para $\lambda \in \Delta_\theta$, onde $\Delta_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg(\lambda)| < \theta\}$ para algum $\theta > 0$ tal que $\lambda \mapsto \bar{T}(\lambda)$ é analítica e*

(a) $\lim_{\lambda \to 0} ||\bar{T}(\lambda)z - z|| = 0$, $\forall z \in X$, $\lambda \in \Delta_\theta$,

(b) $\bar{T}(\lambda + \mu) = \bar{T}(\lambda)\bar{T}(\mu)$, *para todo* $\lambda, \mu \in \Delta_\theta$,

ou equivalentemente (ver Pazy [22]), existe uma constante $K > 0$ tal que

$$||A\bar{T}(t)|| \leq Kt^{-1}, \ \forall t > 0.$$

Dado o operador A gerador de algum semigrupo C_0 em um espaço de Hilbert X, para recuperar o semigrupo $T(t) := e^{At}$, é necessário introduzir outro objeto,

$$\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X), \tag{1.5}$$

definiremos a seguir o domínio para que esta aplicação tenha sentido.

Definição 1.2.11. (Resolvente e Espectro) *Seja A um operador linear em X não necessariamente limitado. Definimos o conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, como o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é um operador inversível, isto é, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear e limitado em X. Além disso, definimos o Espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, como o complemento do resolvente de A, isto é, $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.*

É importante ressaltar que o espectro de A é formado por três subconjuntos disjuntos: o *Espectro Pontual* $\sigma_p(A)$, o *Espectro Contínuo* $\sigma_c(A)$ e o *Espectro Residual* $\sigma_r(A)$. Estes subconjuntos são definidos da seguinte forma: $\lambda \in \sigma_p(A)$ se $\lambda I - A$ não é injetivo; $\lambda \in \sigma_c(A)$ se $\lambda I - A$ é injetivo, $\lambda I - A$ não é sobrejetivo mas a imagem de $\lambda I - A$ é densa em X e, finalmente, $\lambda \in \sigma_r(A)$ se $\lambda I - A$ é injetivo e sua imagem não é densa em X. Destas três definições segue que $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ e $\sigma_r(A)$ são disjuntos e sua união é exatamente $\sigma(A)$.
Denotemos como $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ o *operador resolvente* de A ou simplesmente o *resolvente* de A.

Observação 1.2.12. *No caso de dimensão finita temos que $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$ pois, se $\lambda I - A$ é injetivo, então $\lambda I - A$ é sobrejetivo.*

Observação 1.2.13. *No caso de A ser um operador não limitado com resolvente compacto, isto é, $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador compacto para algum λ_0, então $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$, logo $\sigma(A)$ está composto só por autovalores de A (isto é, $\sigma(A) = \sigma_p(A)$).*

Lema 1.2.14. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ é aberto. A função $R(\lambda; A)$ é analítica em $\rho(A)$.*

Demonstração. Ver [4].

Teorema 1.2.15. *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \;\leq\; Me^{\omega t} \qquad \textit{para todo} \quad 0 \leq t < \infty.$$

Demonstração. Ver [22].

Definição 1.2.16. *Seja e^{At} um semigrupo de classe C_0 gerado por A. Dizemos que $\omega_0(A)$ é o tipo do semigrupo gerado por A se*

$$\omega_0(A) \;=\; \lim_{t\to\infty} t^{-1} \ln \|e^{At}\| \;=\; \inf_{t>0} t^{-1} \ln \|e^{At}\|.$$

Observação 1.2.17. *É importante notar que $\omega = \omega_0(A)$ é o ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade do teorema (1.2.15), porém, proporciona informação do tipo de crescimento que possui o semigrupo gerado pelo operador A. Se $-\infty < \omega_0(A) < 0$, então o semigrupo e^{At} é exponencialmente estável com uma taxa de decaimento ótima determinada por $\omega_0(A)$.*

De fato, aplicando a definição (1.2.16) para $0 < \epsilon < |\omega_0(A)|$, obtemos

$$\omega_0(A) + \epsilon > \frac{\ln ||e^{At}||}{t} \quad \Rightarrow e^{(\omega_0(A)+\epsilon)t} \leq ||e^{At}||, \quad \forall t > N_\epsilon,$$

logo, usando a continuidade do operador e^{At} sobre o intervalo compacto $[0, N_\epsilon]$, concluímos que existe uma constante $M_\epsilon > 0$ tal que

$$||e^{At}|| \leq M_\epsilon e^{(\omega_0(A)+\epsilon)t}, \quad \forall t \geq 0$$

escolhendo $-\mu = \omega_0(A) + \epsilon < 0$, da definição 1.2.9, obtemos a estabilidade exponencial do semigrupo e^{At}.

Definição 1.2.18. *Seja X espaço de Hilbert e seja A um operador linear em X. Definimos, e denotamos por ω_σ, a cota superior do espectro de A, isto é,*

$$\omega_\sigma(A) \;=\; \sup \left\{ \; Re(\lambda) \;\; : \;\; \lambda \in \sigma(A) \; \right\} .$$

Definição 1.2.19. *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 gerado pelo operador A. Então dizemos que $T(t)$ satisfaz o princípio de estabilidade linear, se*

$$\omega_0(A) \;=\; \omega_\sigma(A).$$

Definição 1.2.20. *Um operador linear A definido em um espaço de Hilbert X, é dito dissipativo se, para todo $x \in D(A)$,*

$$Re(Ax, x) \leq 0, \tag{1.6}$$

onde $(. \,, \,.)$ denota o produto interno de X.

Uma caracterização útil dos operadores dissipativos é a seguinte:

Teorema 1.2.21. *Um operador linear A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \;\geq\; \lambda\|x\| \qquad \forall\, x \in D(A) \quad e \quad \lambda > 0.$$

Demonstração. Ver [22].

Sejam X um espaço de Hilbert com norma induzida $||\ .\ ||_X$ e T(t) o semigrupo C_0 gerado por um operador dissipativo A. Definimos para $u_0 \in D(A)$ (dado inicial) a função $u(t) := T(t)u_0$, solução do problema (1.1). Então procedendo formalmente temos que

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}||u(t)||_X^2 \ , \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u, u)_X \\ &= Re(\frac{du}{dt}, u)_X \\ &= Re(Au, u)_X \ . \end{aligned}$$

Onde a funcional $E(t)$ é chamada a energia do sistema e como A é dissipativo, da equação acima concluímos que

$$\frac{dE}{dt} \leq 0,$$

então, a energia $E(.)$ diminui em função do tempo t. No contexto físico, a maioria dos fenômenos são dissipativos, ou seja, a energia do sistema associado diminui com o tempo devido à ação de forças externas, tais como a resistência do meio em que eles ocorrem. É importante entender que a escolha do espaço $(X, ||\ .\ ||_X)$ é fundamental para determinar um sistema dissipativo.

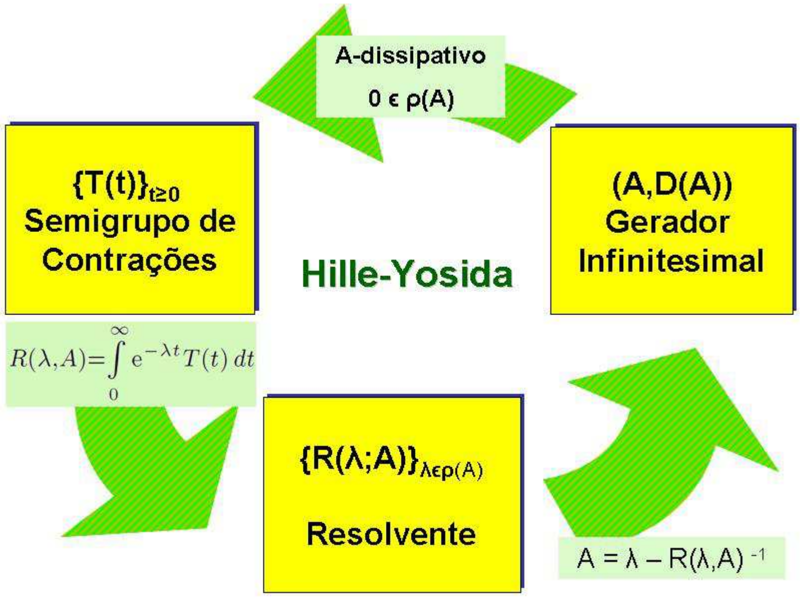

Figura 1.2: Operador-Semigrupo-Resolvente

1.3 Semigrupos C_0 gerados por operadores dissipativos

Tendo um gerador A de um semigrupo $T(t)$, a observação (1.2.5) nos garante a existência de uma única solução para o problema (1.1) dada por $u(t) = T(t)x$. Este fato nos diz que é fundamental conhecer as condições necessárias e suficientes para que um dado operador A, definido em um espaço de Hilbert X, seja gerador infinitesimal de algum semigrupo $T(t)$ tal que $u = T(t)x$ seja a solução de (1.1). Neste sentido apresentamos os importantes teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips.

Teorema 1.3.1. (Hille-Yosida) *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$ se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e, para todo $\lambda > 0$,*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [22].

Corolário 1.3.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $T(t)$, de contrações. Então o conjunto resolvente de A contém o semiplano positivo, isto é, $\mathbb{C}^+ := \{ \lambda : Re\lambda > 0 \} \subset \rho(A)$. Além disso, para todo $Re\lambda > 0$, temos que*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Demonstração. Ver [22].

Teorema 1.3.3. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $T(t)$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o semiplano $Re\lambda > \omega$ e*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \qquad \forall Re\lambda > \omega, \quad \forall n = 1, 2, ...$$

Demonstração. Ver [22].

Teorema 1.3.4. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear com domínio denso $D(A)$ em X.*

(i) *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo o espaço X, isto é, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X.*

(ii) *Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X, então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração. Ver [22].

Como consequência do teorema Lumer-Phillips, temos que um operador não limitado A, gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, é dissipativo se, e somente se, o semigrupo e^{At} é de contrações. Além disso, como corolário do teorema acima, o seguinte resultado será frequentemente usado neste trabalho para mostrar a existência e unicidade de soluções, em particular para sistemas associados a mistura de sólidos.

Corolário 1.3.5. *Seja A um operador linear (não limitado) densamente definido em X espaço de Hilbert. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, resolvente de A, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$ em X.*

Demonstração. Ver [22].

Definição 1.3.6. *Diremos que um semigrupo $T(t)$ de operadores em um espaço X é um grupo em X se as aplicações $t \mapsto T(-t)$ e $t \mapsto T(t)$ formam uma família de semigrupos para $t \geq 0$.*

Definição 1.3.7. *Seja X um espaço de Hilbert de produto interno $(.,.)$ e norma $||.||$. Um operador A é dito simétrico se $\overline{D(A)} = X$ e $A \subset A^*$, isto é, $(Ax, y) = (x, Ay)\ \forall\ x, y \in D(A)$. A é auto-adjunto se $A = A^*$. Um operador limitado é unitário se $U^* = U^{-1}$.*

Teorema 1.3.8. (Stone) *O operador A é o gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários sobre um espaço de Hilbert X se, e somente se, iA é auto-adjunto.*

Demonstração. Ver [22].

Lema 1.3.9. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0, $T(t) := e^{tA}$, atuando num espaço de Hilbert X e seja B um operador linear e contínuo de X. Então, $A + B$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)e^{tB}$.*

Demonstração. Ver [22].

1.4 Resultados sobre propriedades assintóticas de um semigrupo

Nesta seção apresentamos alguns resultados que são fundamentais para o estudo da estabilidade de sistemas dissipativos, em particular dos sistemas de mistura de sólidos. Consideramos uma equação de evolução linear no espaço de Hilbert H:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{du}{dt} & = & Au \\ u(0) & = & u_0. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Suponha que

(H_1) A gera um semigrupo C_0, $T(t) := e^{At}$, sobre H.

(H_2) $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \phi$.

A solução para (1.7) é

$$u(t) = T(t)u_0.$$

Definição 1.4.1. *Dizemos que a solução de (1.7) é fortemente estável se*

$$\lim_{t\to\infty} ||u(t)||_H = 0 \tag{1.8}$$

para todos os $u_0 \in H$.

Definição 1.4.2. *Dizemos que a solução de (1.7) é exponencialmente estável se o semigrupo $T(t)$ for um semigrupo exponencialmente estável (veja definição 1.2.9).*

Existem muitos sistemas que são fortemente estáveis, mas não de forma exponencial. Nesse caso, outros tipos de decaimento foram introduzidas.

Definição 1.4.3. *Dizemos que a solução de (1.7) decai a uma taxa de $f(t)$, se $f(t)$ é uma função positiva com*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

tal que

$$||u(t)||_H \leq f(t)||u_0||_{D(A)}, \quad t > 0, \tag{1.9}$$

para todos os $u_0 \in D(A)$.

Observação 1.4.4. *A norma sobre o lado direito de (1.9) não pode ser a norma de H. Caso contrário, por propriedades de semigrupo, (1.9) implica (1.4).*

De fato, por hipótese temos que

$$\lim_{t\to\infty} ||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} = 0 \Longrightarrow \quad \exists t_0 \in \mathbb{R}_+; \quad ||T(t_0)||_{\mathcal{L}(H)} < 1.$$

Denotemos por α a constante definida como

$$\alpha = ||T(t_0)||_{\mathcal{L}(H)} < 1.$$

Pelo algoritmo da divisão, todo número t pode ser escrito na forma

$$t = mt_0 + r$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r \leq t_0$. Como $T(t)$ é um operador contínuo, encontramos que existe $M > 0$, tal que

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leq M, \quad \forall\, t \in [0, t_0]\,.$$

Seja $t \in \mathbb{R}_+$, usando as propriedades de semigrupos, obtemos

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} = ||T(t_0)^m S(r)||_{\mathcal{L}(H)}.$$

De onde temos

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leq M\alpha^m.$$

Lembrando a definição de m, encontramos

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leq M_1 \alpha^{\gamma t},$$

onde $M_1 = M\alpha^{-\frac{r}{t_0}}$ e $\gamma = \frac{1}{t_0}$. Lembremos também que

$$\alpha^\gamma = e^{\gamma ln(\alpha)} = e^{-\beta}, \quad \beta > 0$$

pois $\alpha < 1$, assim,

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(H)} \leq M_1 e^{-\beta t}.$$

Isto é, $T(t)$ é exponencialmente estável.

O semigrupo $T(t)$ é fortemente estável se (H_2) é verdadeira (ver [6]). $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, (H_2) e

$$\sup\{||(i\beta I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)}; \beta \in \mathbb{R}\} < \infty,$$

estão satisfeitos. Além disso, a $T(t)$ é analítica se

$$||(i\beta I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} = \mathcal{O}(\frac{1}{\beta}).$$

Os resultados acima são importantes para o estudo assintótico das soluções do problema (1.7) e serão aplicados no estudo da estabilidade de sistemas relacionados a mistura de sólidos, (2.1)-(2.4) e (3.1)-(3.4), porém, são dados os seguintes teoremas:

Teorema 1.4.5. *Seja e^{At} um semigrupo de classe C_0 de contrações num espaço de Hilbert. Então e^{At} é exponencialmente estável se, e somente se,*

(i) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

(ii) $\limsup\limits_{|\beta| \to +\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$.

são verdadeiras.

Demonstração. Ver [12] e [23].

É conhecido que a igualdade

$$\sigma(e^{At}) = e^{\sigma(A)t}$$

implica a estabilidade linear do semigrupo e^{At}, isto é, $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$. Em geral, sabemos que a inclusão $e^{\sigma(A)t} \subseteq \sigma(e^{At})$ se verifica para todo gerador A (ver [22], [5]), mas tal inclusão pode ser estrita, ver por exemplo [5]. Este fato não permite relacionar diretamente os espectros do operador A e dos operadores e^{At} para $t \geq 0$. No entanto, existem várias classes de geradores A para os quais o espectro de e^{At} pode ser descrito em termos de $\sigma(A)$. Por exemplo, se

(i) A é limitado, então $\sigma(e^{At}) = e^{\sigma(A)t}$.

(ii) X é um espaço de Hilbert e A é um operador normal, isto é, A e seu operador adjunto comutam, então $\sigma(e^{At}) = \overline{e^{\sigma(A)t}}$.

(iii) e^{At} é contínuo em $\mathcal{L}(X)$ para todo $t > t_0 \geq 0$, então $\sigma(e^{At})\backslash\{0\} = e^{\sigma(A)t}$.

O próximo resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo (ω_0) é determinada pela cota superior do espectro (ω_σ).

Corolário 1.4.6. *Seja H espaço de Hilbert e seja e^{At} um semigrupo de classe C_0 em H gerado por A. Então e^{At} satisfaz o princípio de estabilidade linear se, e somente se,*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ : \ \ \exists M_\epsilon \geq 1 \quad \textit{tal que} \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \ \leq \ M_\epsilon \qquad \forall \ Re(\lambda) \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon$$

Demonstração. Ver [23].

Como consequência dos resultados acima, Renardy [25] estabeleceu condições suficientes para que o semigrupo, $T(t)$, gerado pela perturbação de um operador normal, A_0, satisfaça o princípio de estabilidade linear. Este resultado será aplicado no estudo do sistema de mistura de sólidos (veja teorema 2.3.2), porém enunciamos a seguir o resultado de Renardy.

Teorema 1.4.7. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A := A_0 + B$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 em H. Supomos que A_0 é um operador normal e B é limitado. Se existem $M > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) *Se* $\lambda \in \sigma(A_0)$ *e* $|\lambda| > M - 1$*, então* λ *é um autovalor isolado com multiplicidade finita.*

(b) *Se* $|z| > M$*, então o número de autovalores de* A_0 *no disco* $D(z, 1)$*, com suas multiplicidades, não excede* n*.*

Então e^{At} *satisfaz o princípio de estabilidade linear, isto é,* $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$*.*

Demonstração. Ver [25].

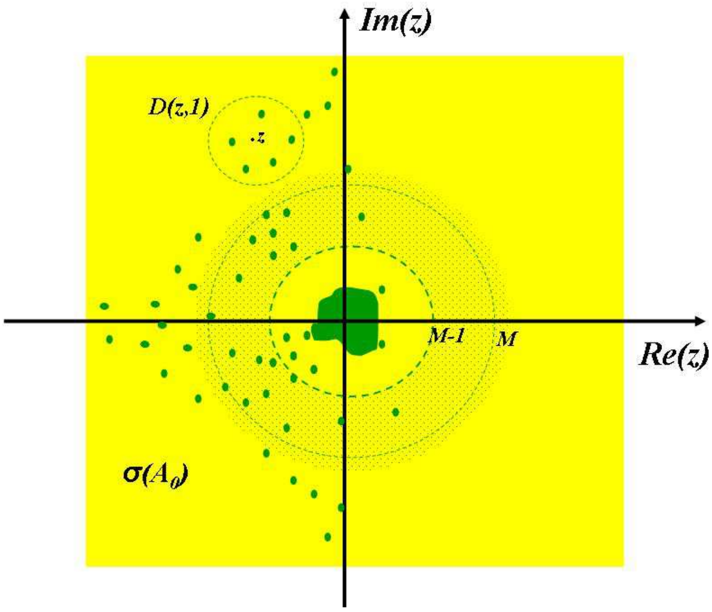

Figura 1.3: Teorema de Renardy

Observação 1.4.8. *Os corolários (1.4.6) e (1.4.7), nos dizem que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando esta propriedade é válida, diz-se também que o semigrupo possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro (PCDE).*

Para mostrarmos analiticidade usamos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.9. *Seja* $T(t) = e^{At}$ *um semigrupo* C_0 *de contrações gerado por um operador* A *num espaço de Hilbert* H*. Suponha que*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Então T(t) é analítico se, e somente se,

$$\limsup_{|\beta|\to+\infty} \|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Demonstração. Ver [12].

Observação 1.4.10. *Se $T(t)$ é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal A e $0 \in \rho(A)$, então $T(t)$ é exponencialmente estável, ou seja, existem C, $\mu > 0$ tais que*

$$||T(t)|| \leq Ce^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, o semigrupo apresenta a propriedade de crescimento determinada pelo espectro (PCDE).

De fato, sendo $\rho(A)$ um conjunto aberto e $0 \in \rho(A)$, existe $\mu > 0$ tal que $-\mu \in \rho(A)$ e pelo lema (1.3.9), $A + \mu I$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ uniformemente limitado, isto é,

$$||S(t)|| \leq C, \forall t \in [0, \infty).$$

Também, pelo lema (1.3.9), temos

$$S(t) = T(t)e^{\mu t}.$$

Logo, $T(t) = S(t)e^{-\mu t}$, isto é,

$$||T(t)|| \leq Ce^{-\mu t}, \forall t \geq 0.$$

Para sistemas fortemente estáveis que não são exponencialmente estavéis, existem vários métodos para obter a $f(t)$, que determine a taxa de decaimento polinomial, por exemplo, temos o Método da Energia combinada com a técnica de multiplicadores, proporcionando taxa de decaimento polinomial $\dfrac{1}{t}$. O método das Bases de Riesz foi utilizado em [13], que dá a taxa de decaimento polinomial baseada na relação assintótica da parte real e imaginária dos autovalores. Outro método é usando a desigualdade de Ingham que pode ser encontrada em [1]. A seguir consideramos o resultado de decaimento polinomial devido a Zhuangyi Liu e Bopeng Rao, que proporciona uma taxa $f(t) = (\frac{\ln t}{t})^{\frac{k}{l}} \ln t$, onde $k \in \mathbb{N}$ representa a regularidade do dado inicial.

Teorema 1.4.11. *Suponhamos que as hipóteses* (H_1) *e* (H_2) *são verdadeiras e que*

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \frac{1}{\beta^l}||(i\beta I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq M, \text{ para algum } l > 0. \tag{1.12}$$

Então para cada $k \in \mathbb{N}$ *existe uma constante* $C_k > 0$ *tal que*

$$||e^{tA}u_0||_H \leq C_k(\frac{\ln t}{t})^{\frac{k}{l}}(\ln t)||u_0||_{D(A^k)}, \tag{1.13}$$

para todo $u_0 \in D(A^k)$.

Demonstração. Ver [11].

Pode-se observar nos teoremas (1.4.5), (1.4.9) e (1.4.11) que a taxa de crescimento do operador resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ no eixo imaginário, $i\mathbb{R}$, está relacionada com a taxa de decaimento da solução (1.7). Se sabemos que (1.7) é fortemente estável mas não exponencialmente estável, então a condição (ii) do teorema (1.4.5) deve falhar, ou seja, o operador resolvente é ilimitado no eixo imaginário. Então o teorema (1.4.11) nos dá uma condição respeito à ordem de ilimitação do operador resolvente para obter um decaimento do tipo polinomial.

Para o caso de dimensão finita, isto é, $X = \mathbb{R}^n$, o estudo do comportamento assintótico das soluções do sistema (1.7), onde A é uma matriz quadrada $n\times n$, é basicamente o estudo dos autovalores de A, isto é, o estudo do espectro de A, devido a observação (1.2.12).

De fato, se conhecemos os autovalores da matriz A, conhecemos o comportamento assintótico das soluções do sistema (1.7), o qual é analisado e dividido nos seguintes casos:

Caso I.- *Todos os autovalores de* A *possuem parte real negativa.* Este caso importante é caracterizado pela seguinte propriedade:

$$|u(t)| \leq Ce^{-\gamma t}$$

para toda $u(t)$ solução de (1.7).

Caso II.- *Todos os autovalores de* A *possuem parte real positiva.* Neste caso teremos que

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$$

para toda $u(t)$ solução de (1.7).

Caso III.- *Todos os autovalores são imaginários puros.* Neste caso, as soluções são periódicas.

Os autovalores de A são determinados resolvendo um polinômio de grau no máximo n. Portanto, o próximo resultado pode ser um critério para obter a desigualdade do Caso I.

Teorema 1.4.12. (Teorema de Hurwitz) *As raizes do polinômio*

$$q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

possuem parte real negativa se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:

- $\dfrac{a_1}{a_0} > 0,\ \dfrac{a_2}{a_0} > 0,\ ...,\ \dfrac{a_n}{a_0} > 0$.

- $D_1 := a_1 > 0$, $D_2 := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} > 0$, $D_3 := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} > 0,\ ...,$

- $D_k := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & ... & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & ... & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_k \end{bmatrix} > 0,$ *onde* $a_j = 0$ *se* $j > n$.

Demonstração. Ver [15].

Observação 1.4.13. *As determinantes,* $\{D_k\}_{k=1}^n$*, são chamadas determinantes de Hurwitz.*

Se $q(x) = L_4x^4 + L_3x^3 + L_2x^2 + L_1x + L_0$, então as determinantes de Hurwitz correspondentes são:

- $D_1 = L_3$
- $D_2 = L_3L_2 - L_4L_1$
- $D_3 = L_1(L_3L_2 - L_4L_1) - L_0L_3^2$
- $D_4 = (L_1(L_3L_2 - L_4L_1) - L_0L_3^2)L_0$.

Capítulo 2

Mistura de Sólidos com dissipação Friccional

2.1 Introdução

Os sistemas de mistura de sólidos é um assunto que tem recebido muita atenção nos últimos anos. Os primeiros trabalhos sobre este tema foram as contribuções de Truesdell e Toupin (1960), Green e Naghdi (1965,1968) ou Bowen e Wiese (1969). Apresentações dessas teorias podem ser encontradas nos artigos de Atkin e Craine [2] ou Iesan D. [7]. Nos últimos anos, um crescente interesse tem sido dirigido para o estudo das propriedades qualitativas das soluções de este tipo de modelos. Em particular, podemos encontrar vários resultados sobre a existência, unicidade, depêndencia contínua e estabilidade assintótica, ver [8] ,[9] ,[20] ou [21] . Queremos enfatizar o estudo do comportamento das soluções para o caso de uma viga unidimensional composta por uma mistura de dois sólidos (elástica com atrito) e queremos saber quando podemos esperar estabilidade exponencial das soluções de esta classe de sistemas. No contexto mecânico o decaimento exponencial significa que depois de um certo período de tempo os deslocamentos mecânicos são muito pequenos e podem ser desprezados; em caso contrário os deslocamentos podem ser apreciados no sistema após algum tempo, porém, a natureza das soluções determina o comportamento temporal do sistema e é importante ser capaz de classificá-los. Consideremos o sistema para mistura de sólidos com dissipação friccional

$$\rho_1 u_{tt} = a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - b_{11}u_t - b_{12}w_t \quad em \quad (0,l)\times(0,\infty) \tag{2.1}$$

$$\rho_2 w_{tt} = a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}u_t - b_{22}w_t \quad em \quad (0,l)\times(0,\infty) \tag{2.2}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x);\ u_t(x,0) = u_1(x);\ w(x,0) = w_o(x);\ w_t(x,0) = w_1(x) \quad em \quad (0,l) \tag{2.3}$$

e condições de fronteira

$$u(0,t) = u(l,t) = w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad em \quad (0,\infty)\ , \tag{2.4}$$

submetido às seguintes hipóteses:

(H.1) $\rho_1,\ \rho_2 > 0$.

(H.2) $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada, simétrica e definida positiva, isto é,

$$a_{11} > 0 \ \text{ e } \ \alpha := a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Portanto a forma quadrática associada é definida positiva:

$$\mathcal{Q}_A(x,y) := a_{11}x\overline{x} + a_{12}(x\overline{y} + y\overline{x}) + a_{22}y\overline{y} > 0 \ \ \forall\ (x,y) \in \mathbb{C}^2\backslash(0,0).$$

(H.3) $B = [b_{ij}]$ é uma matriz quadrada, simétrica e semidefinida positiva com $b_{11} > 0$. Portanto a forma quadrática associada é semidefinida positiva, isto é,

$$\mathcal{Q}_B(x,y) := b_{11}x\overline{x} + b_{12}(x\overline{y} + y\overline{x}) + b_{22}y\overline{y} \geq 0\ ,\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{C}^2.$$

Observação 2.1.1.

- *As hipóteses acima serão válidas no decorrer de todo o trabalho.*
- *Para dizer que as matrizes A e B satisfazem as hipóteses (H.2) e (H.3) respectivamente, adotamos a seguinte notação:*
  - *(I)* $\rho_1,\ \rho_2 > 0$.
  - *(II)* $A \succ 0$.
  - *(III)* $B \succeq 0$.
- *A matriz B será chamada de matriz de dissipação friccional, devido a que $\mathcal{Q}_B$ define o tipo de dissipação do operador associado ao sistema. Ver equação (2.6).*

2.2 Existência e Unicidade

Nesta seção mostraremos a boa colocação do problema para o modelo de mistura com dissipação friccional.

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} := H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l)$$

que, munido com o produto interno

$$\langle (u,w,v,\eta); (\widetilde{u},\widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{\eta}) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \int_0^l (a_{11} u_x \overline{\widetilde{u}}_x + a_{12}(u_x \overline{\widetilde{w}}_x + w_x \overline{\widetilde{u}}_x) + a_{22} w_x \overline{\widetilde{w}}_x) dx$$

$$+\rho_1 \int_0^l v \overline{\widetilde{v}} dx + \rho_2 \int_0^l \eta \overline{\widetilde{\eta}} dx \ ,$$

é um espaço de Hilbert. A norma induzida $||.||_{\mathcal{H}}$ é dada por

$$||(u,w,v,\eta)||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^l (a_{11} u_x \overline{u}_x + a_{12}(u_x \overline{w}_x + w_x \overline{u}_x) + a_{22} w_x \overline{w}_x) dx$$

$$+\rho_1 \int_0^l v \overline{v} dx + \rho_2 \int_0^l \eta \overline{\eta} dx \ .$$

Pode-se mostrar que tal norma é equivalente à norma usual $||.||$ de $\mathcal{H}$. Além disso,

$$||(u,w,v,\eta)||_{\mathcal{H}}^2 \geq c_0 \left\{ \int_0^l |u_x|^2 dx + \int_0^l |w_x|^2 dx + \int_0^l |v|^2 dx + \int_0^l |\eta|^2 dx \right\},$$

onde

$$c_0 = \min \left\{ \rho_1, \rho_2, \frac{\alpha}{2a_{11}}, \frac{\alpha}{2a_{22}} \right\}.$$

Definimos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ como

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\mathcal{A}) := H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \times H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \\ \\ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{I} & \mathcal{O} \\ \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \\ \dfrac{a_{11}}{\rho_1} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{a_{12}}{\rho_1} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\dfrac{b_{11}}{\rho_1} \mathcal{I} & -\dfrac{b_{12}}{\rho_1} \mathcal{I} \\ \\ \dfrac{a_{12}}{\rho_2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{a_{22}}{\rho_2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\dfrac{b_{12}}{\rho_2} \mathcal{I} & -\dfrac{b_{22}}{\rho_2} \mathcal{I} \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Logo, o problema de valor inicial e fronteira (2.1)-(2.4) pode ser reescrito como o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathcal{A}U &= U_t \\ U(0) &= (u_0, w_0, u_1, w_1). \end{cases}$$

Lema 2.2.1. *Sejam $\mathcal{A}$ o operador definido em (2.5), $A \succ 0$ e $B \succeq 0$. Então $\mathcal{A}$ é dissipativo, fechado e densamente definido em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Seja $U = (u, v, w, \eta) \in D(\mathcal{A})$. Então

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \left\langle \begin{bmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - b_{11}v - b_{12}\eta) \\ \frac{1}{\rho_2}(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}v - b_{22}\eta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \\ \eta \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l (a_{11}v_x\overline{u}_x + a_{12}(v_x\overline{w}_x + \eta_x\overline{u}_x) + a_{22}\eta_x\overline{w}_x)dx \\
&\quad + \int_0^l (a_{11}u_{xx}\overline{v} + a_{12}w_{xx}\overline{v} - b_{11}v\overline{v} - b_{12}\eta\overline{v})dx \\
&\quad + \int_0^l (a_{12}u_{xx}\overline{\eta} + a_{22}w_{xx}\overline{\eta} - b_{12}v\overline{\eta} - b_{22}\eta\overline{\eta})dx \\
&= \int_0^l (a_{11}v_x\overline{u}_x + a_{12}(v_x\overline{w}_x + \eta_x\overline{u}_x) + a_{22}\eta_x\overline{w}_x)dx \\
&\quad - \int_0^l (\overline{a_{11}v_x\overline{u}_x + a_{12}(v_x\overline{w}_x + \eta_x\overline{u}_x) + a_{22}\eta_x\overline{w}_x})dx \\
&\quad - \int_0^l (b_{11}v\overline{v} + b_{12}(\eta\overline{v} + \overline{\eta}v) + b_{22}\eta\overline{\eta})dx\ .
\end{aligned}$$

Tomando a parte real obtemos

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = -\int_0^l (b_{11}v\overline{v} + b_{12}(\eta\overline{v} + \overline{\eta}v) + b_{22}\eta\overline{\eta})dx \tag{2.6}$$

Como B é semidefinida positiva, temos que

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \leq 0,$$

isto é, $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Da definição e das imersões de Sobolev, podemos verificar facilmente que $\mathcal{A}$ é fechado e densamente definido em $\mathcal{H}$. $\square$

Lema 2.2.2. *Sejam $\mathcal{A}$ o operador definido em (2.5) e $A \succ 0$. Se B é a matriz nula, então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários de classe C_0 em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Sejam $U_1 = (u, w, v, \eta)$, $U_2 = (\widetilde{u}, \widetilde{w}, \widetilde{v}, \widetilde{\eta}) \in D(\mathcal{A})$. Então

$$\langle \mathcal{A}U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \left\langle \begin{bmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx}) \\ \frac{1}{\rho_2}(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{w} \\ \widetilde{v} \\ \widetilde{\eta} \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$$

$$= -\int_0^l (a_{11}u_x\overline{\widetilde{v}}_x + a_{12}(u_x\overline{\widetilde{\eta}}_x + w_x\overline{\widetilde{v}}_x) + a_{22}w_x\overline{\widetilde{\eta}}_x)dx$$
$$-\int_0^l v(a_{11}\overline{\widetilde{u}}_{xx} + a_{12}\overline{\widetilde{w}}_{xx})dx - \int_0^l \eta(a_{12}\overline{\widetilde{u}}_{xx} + a_{22}\overline{\widetilde{w}}_{xx})dx \ .$$

Logo,

$$\langle \mathcal{A}U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \langle U_1, -\mathcal{A}U_2 \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \ ,$$

o que implica que $D(-\mathcal{A}) \subseteq D(\mathcal{A}^*)$. Usando as definições dos espaços $D(\mathcal{A})$, $\mathcal{H}$ e as imersões de Sobolev, obtemos que $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Logo, $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto e aplicamos o teorema de Stone (1.3.8) para obter que o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários de classe C_0 em $\mathcal{H}$. □

Lema 2.2.3. *Sejam $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5) e $A \succ 0$. Então*

$$0 \in \rho(\mathcal{A}). \tag{2.7}$$

Demonstração. Dado $F = (f, g, h, p) \in \mathcal{H}$, mostraremos que existe um único vetor $U = (u, w, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$, tal que:

$$\mathcal{A}U = F. \tag{2.8}$$

A equação acima em termos das componentes se escreve:

$$v = f \tag{2.9}$$

$$\eta = g \tag{2.10}$$

$$a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - b_{11}v - b_{12}\eta = \rho_1 h \tag{2.11}$$

$$a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}v - b_{22}\eta = \rho_2 p \tag{2.12}$$

Substituíndo (2.9) e (2.10) em (2.11) e (2.12), obtemos

$$a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} = b_{11}f + b_{12}g + \rho_1 h := \widetilde{f}\ , \tag{2.13}$$

$$a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} = b_{12}f + b_{22}g + \rho_2 p := \widetilde{g}\ . \tag{2.14}$$

As equações acima se verificam no espaço $L^2(0,l)$, isto é, $(\widetilde{f},\widetilde{g}) \in L^2(0,l)\times L^2(0,l)$. Como a forma sesquilinear $\mathcal{B} : [H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)] \times [H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)] \to \mathbb{C}$, dada por:

$$\mathcal{B}((u,w),(\widetilde{u},\widetilde{w})) = \int_0^l (a_{11}u_x\overline{\widetilde{u}_x} + a_{12}(u_x\overline{\widetilde{w}}_x + w_x\overline{\widetilde{u}}_x) + a_{22}w_x\overline{\widetilde{w}}_x)dx \tag{2.15}$$

é contínua e positiva, aplicando o lema (1.1.14) de Lax-Milgran, dado $(-\widetilde{f},-\widetilde{g}) \in L^2(0,l)\times L^2(0,l)$ existe um único vetor $(u,w) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$ tal que

$$\mathcal{B}((u,w),(\phi,\psi)) = -\int_0^l \widetilde{f}\overline{\phi}dx - \int_0^l \widetilde{g}\overline{\psi}dx \tag{2.16}$$

para todo $(\phi,\psi) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$. Então

$$a_{11}\int_0^l u_x\overline{\phi}_x + a_{12}\int_0^l w_x\overline{\phi}_x = -\int_0^l \widetilde{f}\overline{\phi} \tag{2.17}$$

$$a_{12}\int_0^l u_x\overline{\psi}_x + a_{22}\int_0^l w_x\overline{\psi}_x = -\int_0^l \widetilde{g}\overline{\psi} \tag{2.18}$$

a primeira equação resulta de considerar $\psi = 0$ e a segunda de considerar $\phi = 0$. Logo

$$\int_0^l (a_{11}u + a_{12}w)_x\overline{\phi}_x = -\int_0^l \widetilde{f}\overline{\phi} \tag{2.19}$$

$$\int_0^l (a_{12}u + a_{22}w)_x\overline{\psi}_x = -\int_0^l \widetilde{g}\overline{\psi} \tag{2.20}$$

pela definição de derivada fraca, temos que

$$a_{11}u + a_{12}w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \tag{2.21}$$

$$a_{12}u + a_{22}w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \tag{2.22}$$

e como

$$u = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{11}u + a_{12}w) - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{12}u + a_{22}w) \tag{2.23}$$

$$w = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} + a_{11}^2}(a_{11}u + a_{12}w) + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{12}u + a_{22}w) \tag{2.24}$$

deduzimos que $u, w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ satisfazendo (2.11) e (2.12). Note que de (2.9) e (2.10), obtemos $U = (u,w,v,\eta) \in D(\mathcal{A})$.

Agora mostraremos que existe uma constante positiva independente de U e F tal que

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Usando as identidades (2.23)-(2.24), obtemos

$$u_{xx} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(a_{11}u+a_{12}w)_{xx} - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(a_{12}u+a_{22}w)_{xx} \tag{2.25}$$

$$w_{xx} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}+a_{11}^2}(a_{11}u+a_{12}w)_{xx} + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(a_{12}u+a_{22}w)_{xx} \tag{2.26}$$

e aplicando as equações (2.13) e (2.14), obtemos:

$$u_{xx} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(b_{11}f+b_{12}g+\rho_1 h) - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(b_{12}f+b_{22}g+\rho_2 p) \tag{2.27}$$

$$w_{xx} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}+a_{11}^2}(b_{11}f+b_{12}g+\rho_1 h) + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(b_{12}f+b_{22}g+\rho_2 p) \tag{2.28}$$

multiplicamos por $-\overline{u}$ e $-\overline{w}$ respectivamente as equações acima para obter

$$\begin{aligned}||u_x||^2 = &\frac{-a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(b_{11}\langle f,u\rangle + b_{12}\langle g,u\rangle + \rho_1\langle h,u\rangle)\\ &+\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(b_{12}\langle f,u\rangle + b_{22}\langle g,u\rangle + \rho_2\langle p,u\rangle)\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}||w_x||^2 = &\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}+a_{11}^2}(b_{11}\langle f,w\rangle + b_{12}\langle g,w\rangle + \rho_1\langle h,w\rangle)\\ &-\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}(b_{12}\langle f,w\rangle + b_{22}\langle g,w\rangle + \rho_2\langle p,w\rangle)\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ representa o produto interno em $L^2(0,l)$. Usando a desigualdade de Hölder e a definição da norma em $\mathcal{H}$ podemos encontrar uma constante positiva C_1 tal que

$$|b_{11}||\langle f,u\rangle| + |b_{12}||\langle g,u\rangle| + \rho_1|\langle h,u\rangle| \leq C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

$$|b_{12}||\langle f,w\rangle| + |b_{22}||\langle g,w\rangle| + \rho_2|\langle p,w\rangle| \leq C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

denotaremos $\alpha = a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ e aplicando as desigualdades acima nas equações (2.29) e (2.30), obtemos

$$||u_x||^2 \leq (\frac{a_{22}}{\alpha} + \frac{|a_{12}|}{\alpha})C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{2.31}$$

$$||w_x||^2 \leq (\frac{|a_{12}|}{\alpha} + \frac{a_{11}}{\alpha})C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{2.32}$$

multiplicamos $\overline{v}$ e $\overline{\eta}$ às equações (2.9) e (2.10) respectivamente e aplicamos a desigualdade de Hölder para obter

$$||v||^2 \leq C_2||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{2.33}$$

$$||\eta||^2 \leq C_2||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{2.34}$$

Das desigualdades (2.31)-(2.34) deduzimos que existe uma constante $C > 0$, independente de U e F, tal que

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Logo o operador $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, isto é, $0 \in \rho(\mathcal{A})$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sejam $A \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 em $\mathcal{H}$. Além disso, se $B \succeq 0$, então o semigrupo é de contrações.*

Demonstração. Da definição em (2.5), $\mathcal{A}$ é a soma dos operadores

$$\mathcal{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{I} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{I} \\ \frac{a_{11}}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{a_{12}}{\rho_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \frac{a_{12}}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{a_{22}}{\rho_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}}_{:=\ \mathcal{A}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & -\frac{b_{11}}{\rho_1}\mathcal{I} & -\frac{b_{12}}{\rho_1}\mathcal{I} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & -\frac{b_{12}}{\rho_2}\mathcal{I} & -\frac{b_{22}}{\rho_2}\mathcal{I} \end{bmatrix}}_{:=\ \mathcal{A}_2} \tag{2.35}$$

sendo o primeiro um operador normal, gerador de um grupo de operadores unitários de classe C_0 devido ao lema (2.2.2) e o segundo é um operador contínuo. Logo, pelo lema (1.3.9), $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 em $\mathcal{H}$.

Do lema (2.2.3) temos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Se $B \succeq 0$, do lema (2.2.1), obtemos que $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$. Logo aplicamos o corolário (1.3.5) para obter que o semigrupo, $e^{t\mathcal{A}}$, é de contrações em $\mathcal{H}$. $\square$

Proposição 2.2.5. *Sejam $A \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Então $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que para cada sequência limitada $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$, existe uma subsequência $\{F_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{A}^{-1}F_{n_k}$ é convergente em $\mathcal{H}$. Porém dividiremos a demonstração de tal resultado em duas afirmações.

Afirmação (1) Seja $\mathcal{A}$ um operador fechado, densamente definido em $\mathcal{H}$. Suponhamos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Então a injeção canônica

$$i : (D(\mathcal{A}), ||.||_{D(\mathcal{A})}) \longrightarrow (\mathcal{H}, ||.||_{\mathcal{H}})$$

é compacta se, e somente se $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto.

De fato, como $\mathcal{A}$ é um operador fechado e densamente definido em $\mathcal{H}$, então o espaço vetorial $D(\mathcal{A})$ é um espaço de Banach com a norma do gráfico dada por:

$$||U||_1 = ||U||_{\mathcal{H}} + ||\mathcal{A}U||_{\mathcal{H}} \tag{2.36}$$

como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, temos que $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e para todo $U \in D(\mathcal{A})$ podemos obter a seguinte estimativa

$$||U||_1 = ||\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}U||_{\mathcal{H}} + ||\mathcal{A}U||_{\mathcal{H}} \leq (||\mathcal{A}^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}+1)||\mathcal{A}U||_{\mathcal{H}} \leq (||\mathcal{A}^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}+1)||U||_1 \tag{2.37}$$

isto é, a norma do gráfico, $||.||_1$, é equivalente à norma

$$||U||_{D(\mathcal{A})} := ||\mathcal{A}U||_{\mathcal{H}}.$$

Além disso o operador

$$\mathcal{A}^{-1} : (\mathcal{H}, ||.||_{\mathcal{H}}) \longrightarrow (D(\mathcal{A}), ||.||_{D(\mathcal{A})}) \tag{2.38}$$

é um isomorfismo com inversa contínua $\mathcal{A}$ em $(D(\mathcal{A}), ||.||_{D(\mathcal{A})})$, pois $\mathcal{A}$ é fechado. Agora consideremos as seguintes aplicações:

$$(\mathcal{H}, ||.||_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\quad \mathcal{A}^{-1} \quad} (D(\mathcal{A}), ||.||_{D(\mathcal{A})}) \xrightarrow{\quad \mathcal{A} \quad} (\mathcal{H}, ||.||_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\quad \mathcal{A}^{-1} \quad} (\mathcal{H}, ||.||_{\mathcal{H}})$$

Logo, o operador $\mathcal{A}^{-1}$ é compacto se, e somente se a imersão $i : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é compacta.

A afirmação acima reduz a prova de $\mathcal{A}^{-1}$ ser compacto à verificação de que a imersão $i : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ seja compacta. Isso nos leva à seguinte afirmação.

Afirmação (2) Seja $\mathcal{A}$ o operador linear e $D(\mathcal{A})$ seu domínio definidos em (2.5). Então a imersão $i : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é compacta.

De fato, dada $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $D(\mathcal{A})$, mostraremos que existe uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$. Pela hipótese, temos $||\mathcal{A}U_n||_{\mathcal{H}} \leq C$ que em termos das componentes se escreve

$$||(v_n, \eta_n, \frac{a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx} - b_{11}v_n - b_{12}\eta_n}{\rho_1}, \frac{a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx} - b_{12}v_n - b_{22}\eta_n}{\rho_2})||^2_{\mathcal{H}} \leq C^2. \tag{2.39}$$

Se denotamos por $\mathcal{Q}_A$ a forma quadrática associada à matriz A, que por hipótese é definida positiva e aplicamos a definição da norma em $\mathcal{H}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^l \mathcal{Q}_A(v_{nx}, \eta_{nx})dx &\leq C^2 && (2.40)\\
||a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx} - b_{11}v_n - b_{12}\eta_n||^2 &\leq C^2 && (2.41)\\
||a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx} - b_{12}v_n - b_{22}\eta_n||^2 &\leq C^2 && (2.42)
\end{aligned}$$

Como A é uma matriz definida positiva, temos $det(A) := \alpha > 0$ e podemos obter a seguinte estimativa:

$$c_1^2\{||v_n||^2 + ||\eta_n||^2\} \leq c_0^2\{||v_{nx}||^2 + ||\eta_{nx}||^2\} \leq \int_0^l \mathcal{Q}_A(v_{nx}, \eta_{nx})dx \leq C^2 \tag{2.43}$$

onde $c_0^2 = \min\{\frac{\alpha}{2a_{11}}, \frac{\alpha}{2a_{22}}\}$ e c_1^2 é a constante correspondente à desigualdade de Poincaré. Aplicando as propriedades de norma, de (2.41) e (2.42) obtemos

$$\begin{aligned}
||a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx}|| &\leq ||b_{11}v_n + b_{12}\eta_n|| + C\\
||a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx}|| &\leq ||b_{12}v_n + b_{22}\eta_n|| + C
\end{aligned}$$

Aplicamos (2.43) nas desigualdades acima para obter

$$\begin{aligned}
||a_{11}u_{nxx} + a_{12}w_{nxx}|| &\leq C_2 && (2.44)\\
||a_{12}u_{nxx} + a_{22}w_{nxx}|| &\leq C_2 && (2.45)
\end{aligned}$$

onde $C_2 = c_1^{-1}C(|b_{11}| + |b_{22}| + 2|b_{12}| + 2c_1)$. Usamos as identidades (2.25) e (2.26) e as desigualdades (2.44)-(2.45) para obter:

$$\begin{aligned}
||u_{nxx}|| &\leq C_3 && (2.46)\\
||w_{nxx}|| &\leq C_3 && (2.47)
\end{aligned}$$

onde $C_3 = (\frac{a_{22}}{\alpha} + 2\frac{|a_{12}|}{\alpha} + \frac{a_{11}}{\alpha})C_2 + \frac{C}{c_0}$, das desigualdades (2.43), (2.46) e (2.47) obtemos:

$$||u_n||^2_{H_0^1\cap H^2} + ||w_n||^2_{H_0^1\cap H^2} + ||v_n||^2_{H_0^1} + ||\eta_n||^2_{H_0^1} \leq C_4 \tag{2.48}$$

onde $C_4 = 2(\frac{C^2}{c_0^2} + C_3^2) > 0$.

Como as imersões $H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l) \hookrightarrow H_0^1(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ são contínuas densas e compactas, então existe uma subsequência

$$U_{n_k} = (u_{n_k}, w_{n_k}, v_{n_k}, \eta_{n_k}) \in \mathcal{H} \equiv H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l)$$

que converge em $\mathcal{H}$. Portanto a imersão

$$i : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$$

é compacta.

Usando as afirmações (1) e (2) está demonstrado que $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto. $\square$

Corolário 2.2.6. *Sejam $A \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Então*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda \textit{ é um autovalor de } \mathcal{A}\} \tag{2.49}$$

Demonstração. Do lema (2.2.5), temos que o operador $\mathcal{A}$ posui resolvente compacto e aplicando a observação (1.2.13), obtemos (2.49). $\square$

2.3 Estabilidade Linear

Nesta seção mostraremos que o princípio de estabilidade linear é verdadeiro para o semi-grupo associado ao sistema (2.1)-(2.4), isto é,

$$w_0(\mathcal{A}) = w_\sigma(\mathcal{A}).$$

Para obter tal resultado usaremos as ideias de M. Renardy expostas em [25]. Começaremos mostrando uma caracterização do espectro do operador $\mathcal{A}$ definido em (2.5).

Lema 2.3.1. *Sejam $A \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5), então*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ q_\nu(\lambda) = 0, \ \nu = \frac{n\pi}{l}\right\}$$

onde $q_\nu(x)$ é uma sequência de polinômios de quarto grau em $\mathbb{R}[x]$.

Demonstração. Seja $U = (u, w, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$ e consideremos a equação espectral

$$\lambda U - \mathcal{A}U = 0$$

que, em termos das componentes, se escreve

$$\lambda u = v \tag{2.50}$$

$$\lambda w = \eta \tag{2.51}$$

$$\rho_1\lambda v - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + b_{11}v + b_{12}\eta = 0 \tag{2.52}$$

$$\rho_2\lambda\eta - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + b_{12}v + b_{22}\eta = 0 \tag{2.53}$$

e, substituindo (2.50) e (2.51) em (2.52) e (2.53), obtemos

$$\rho_1\lambda^2 u - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + b_{11}\lambda u + b_{12}\lambda w = 0 \tag{2.54}$$

$$\rho_2\lambda^2 w - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + b_{12}\lambda u + b_{22}\lambda w = 0. \tag{2.55}$$

Como $u, w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$, podemos considerar as funções

$$u = F\text{sen}\,(\nu x),\ \ w = G\text{sen}\,(\nu x)$$

e, substituindo nas equações (2.54) e (2.55), obtemos que

$$(\rho_1\lambda^2 + a_{11}\nu^2 + b_{11}\lambda)F + (a_{12}\nu^2 + b_{12}\lambda)G = 0$$

$$(a_{12}\nu^2 + b_{12}\lambda)F + (\rho_2\lambda^2 + a_{22}\nu^2 + b_{22}\lambda)G = 0\ ,$$

isto é,

$$(\rho_1\lambda^2 + a_{11}\nu^2 + b_{11}\lambda)(\rho_2\lambda^2 + a_{22}\nu^2 + b_{22}\lambda) - (a_{12}\nu^2 + b_{12}\lambda)^2 = 0\ ,$$

pois $U \neq 0$ por ser autovector. Então $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} q_\nu(\lambda) := \rho_1\rho_2\lambda^4 + (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})\lambda^3 + (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11} + \frac{detB}{\nu^2})\nu^2\lambda^2 \\ +(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})\nu^2\lambda + \nu^4 detA = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Pois, neste caso se verifica, pelo corolario (2.2.6), que $\sigma(\mathcal{A})$ é composto somente por autovalores de $\mathcal{A}$. $\square$

Teorema 2.3.2. *Sejam $A \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5), então o princípio de estabilidade linear é verdadeiro, isto é,*

$$w_0(\mathcal{A}) = w_\sigma(\mathcal{A}).$$

Demonstração. De (2.35), $\mathcal{A}$ é a soma de um operador normal, o qual denotamos por $\mathcal{A}_1$ (aqui consideramos B a matriz nula) e um operador contínuo o qual denotamos por $\mathcal{A}_2$. Aplicando o lema (2.3.1) para $\mathcal{A}_1$ – equação (2.56) –, obtemos

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\lambda \in \mathbb{C}\ \ ;\ \ q_\nu(\lambda) := \rho_1\rho_2\lambda^4 + (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2\lambda^2 + \nu^4 \det A = 0\ ,\ \nu = \frac{n\pi}{l}\right\}\ ,$$

as raízes de cada polinômio $q_\nu(\lambda)$ são dadas pela fórmula

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2\rho_1\rho_2}\{(\rho_1 a_{22}+\rho_2 a_{11}) \pm \sqrt{(\rho_1 a_{22}+\rho_2 a_{11})^2 - 4\rho_1\rho_2 detA}\}\nu^2 \ .$$

Denotando

$$r_j = \sqrt{\frac{(\rho_1 a_{22}+\rho_2 a_{11}) + (-1)^j\sqrt{(\rho_1 a_{22}+\rho_2 a_{11})^2 - 4\rho_1\rho_2 \det A}}{2\rho_1\rho_2}}$$

obtemos que

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\pm\frac{n\pi i}{l} r_j \ ; \ j=1,2\right\} \ .$$

Se consideramos, por exemplo, $M = 2$ e $n_0 = 2\left\lfloor \frac{\pi r_2}{l} \right\rfloor \in \mathbb{N}$, como $\sigma(\mathcal{A}_1)$ é composto somente por autovalores simples, vemos que as condições do teorema (1.4.7) são satisfeitas. Logo, $w_0(\mathcal{A}) = w_\sigma(\mathcal{A})$. $\square$

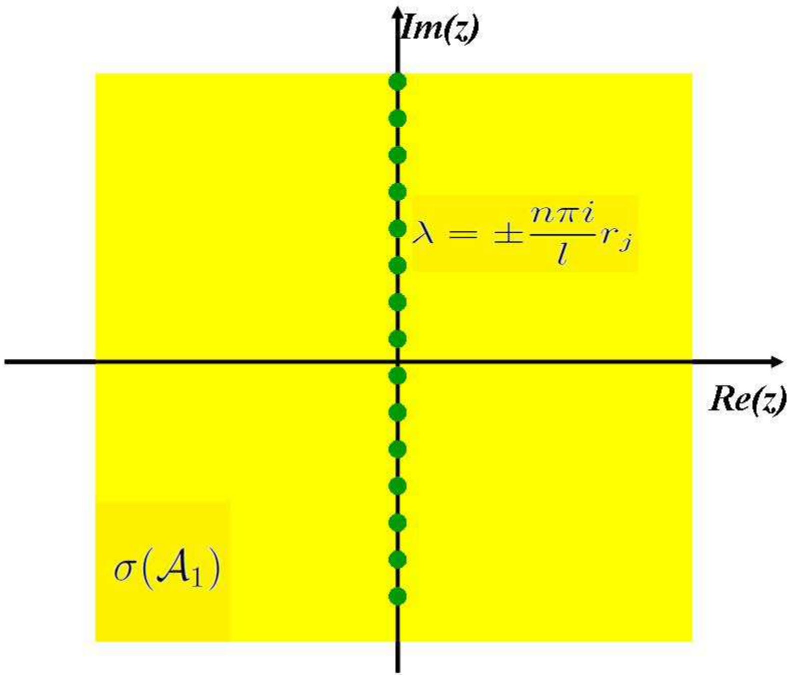

Figura 2.1: Espectro do operador $\mathcal{A}_1$

2.4 Estabilidade Exponencial

Nesta seção usaremos a caracterização de semigrupos exponencialmente estáveis expostas em [12]. As hipóteses:

(I) ρ_1, $\rho_2 > 0$.

(II) $A \succ 0$.

(III) $B \succeq 0$.

serão consideradas como válidas nesta seção.

Lema 2.4.1. *Seja $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Se assumimos*
a) $B \succ 0$.
b) B singular com $b_{11} > 0$ e $b_{12} = 0$.
Então

$$\{i\beta \; ; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \; .$$

Demonstração. Mostraremos este resultado usando argumentos de contradição. De fato, suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Logo, pelo corolário (2.2.6), temos que $i\lambda$ é um autovalor de $\mathcal{A}$. Então existe $U = (u, w, v, \eta) \in D(\mathcal{A})\backslash\{0\}$ tal que

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = 0 \; ,$$

que em termos das componentes se escreve

$$i\lambda u = v \tag{2.57}$$

$$i\lambda w = \eta \tag{2.58}$$

$$i\rho_1\lambda v - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + b_{11}v + b_{12}\eta = 0 \tag{2.59}$$

$$i\rho_2\lambda\eta - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + b_{12}v + b_{22}\eta = 0. \tag{2.60}$$

Por outro lado,

$$Re\,\langle (i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}$$

e, aplicando (2.6), obtemos

$$0 = \int_0^l (b_{11}v\overline{v} + b_{12}(\eta\overline{v} + \overline{\eta}v) + b_{22}\eta\overline{\eta})dx \tag{2.61}$$

Caso (a)

$B = [b_{ij}]$ é uma matriz definida positiva, então

$$\int_0^l (b_{11}v\overline{v} + b_{12}(\eta\overline{v} + \overline{\eta}v) + b_{22}\eta\overline{\eta})dx \geq c_0\{\int_0^l |v|^2dx + \int_0^l |\eta|^2dx\} \tag{2.62}$$

onde $c_0 = \min\left\{\frac{detB}{2b_{11}}, \frac{detB}{2b_{22}}\right\} > 0$, e aplicando (2.61), obtemos

$$\begin{cases} v = 0 \ em \ L^2(0,l) \\ \eta = 0 \ em \ L^2(0,l) \end{cases} \tag{2.63}$$

e, aplicando (2.63) em (2.57) e (2.58), obtemos

$$\begin{cases} u = 0 \ em \ L^2(0,l) \\ w = 0 \ em \ L^2(0,l) \ . \end{cases} \tag{2.64}$$

Substituindo (2.63) e (2.64) em (2.59) e (2.60) obtemos

$$\begin{cases} (a_{11}u + a_{12}w)_{xx} = 0 \ em \ L^2(0,l) \\ (a_{12}u + a_{22}w)_{xx} = 0 \ em \ L^2(0,l) \ . \end{cases} \tag{2.65}$$

Lembremos que A é uma matriz definida positiva, $detA > 0$, então

$$u = \frac{a_{22}}{detA}(a_{11}u + a_{12}w) - \frac{a_{12}}{detA}(a_{12}u + a_{22}w) \tag{2.66}$$

$$w = \frac{a_{11}}{detA}(a_{12}u + a_{22}w) - \frac{a_{12}}{detA}(a_{11}u + a_{12}w) \tag{2.67}$$

e aplicando estas identidades em (2.65), deduzimos que

$u = w = 0 \ em \ H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$. Além disso, de (2.57) e (2.58), temos

$$v = \eta = 0 \ em \ H_0^1(0,l) \ ,$$

isto é, $U = 0$ em $D(\mathcal{A})$, que é absurdo, por tanto

$$\{i\beta \ ; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(\mathcal{A}).$$

Caso (b)

Como $b_{11} > 0$ e $b_{22} = b_{12} = 0$, então, de (2.61) e (2.57), deduzimos que

$$u = v = 0 \text{ em } L^2(0,l), \tag{2.68}$$

aplicamos esta igualdade em (2.59) e (2.60) para obter,

$$\begin{cases} (a_{11}u + a_{12}w)_{xx} = 0 \\ (a_{12}u + a_{22}w)_{xx} = -\lambda^2 w. \end{cases} \tag{2.69}$$

Agora usamos as identidades (2.66) e (2.67) em (2.69), então

$$u_{xx} = \frac{\rho_2 a_{12}}{detA}\lambda^2 w_{xx} \ , \tag{2.70}$$

$$w_{xx} = \frac{-\rho_2 a_{11}}{detA}\lambda^2 w_{xx} \ . \tag{2.71}$$

De (2.71), temos
$$(1+\frac{\rho_2 a_{11}}{detA}\lambda^2)w_{xx}=0 \ \text{ em } \ L^2(0,l).$$
Se supomos que $\int_0^l |w_{xx}|^2dx>0$, da equação acima, temos
$$1+\frac{\rho_2 a_{11}}{detA}\lambda^2=0 \implies \lambda=i\sqrt{\frac{detA}{\rho_2 a_{11}}}\in i\mathbb{R},$$
portanto,
$$\int_0^l |w_{xx}|^2dx=0,$$
pois $\lambda\in\mathbb{R}$ por hipótese. Agora aplicamos este resultado em (2.69) para obter
$$u=w=0 \text{ em } H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l). \tag{2.72}$$
De (2.57), (2.68) e (2.72) deduzimos que $U=(u,w,v,\eta)=0$ em $D(\mathcal{A})$, que é absurdo, portanto
$$\{i\beta\ ;\beta\in\mathbb{R}\}\subseteq\rho(\mathcal{A}).$$
□

Lema 2.4.2. *Sejam $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5) e $B\succ 0$. Então*
$$\limsup_{|\beta|\to\infty}||(i\beta\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}||<\infty.$$

Demonstração. Mostraremos este resultado usando argumentos de contradição. De fato, suponhamos que
$$\limsup_{|\beta|\to\infty}||(i\beta\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}||=\infty\ .$$
Então existe uma sequência de vetores $\{F_n\}$ em $\mathcal{H}$ tal que
$$||(\lambda_n\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}F_n||_{\mathcal{H}}\geq n||F_n||_{\mathcal{H}}, \tag{2.73}$$
onde $\lambda_n=i\beta_n$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ e $\beta_n\longrightarrow\infty$. O lema (2.4.1) nos diz que $i\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$, logo existe uma única sequência
$U_n:=(u_n,w_n,v_n,\eta_n)\in D(\mathcal{A})$ tal que
$$\lambda_nU_n-\mathcal{A}U_n=F_n,\ ||U_n||_{\mathcal{H}}=1\ ,$$
assim, considerando (2.73), obtemos
$$||F_n||_{\mathcal{H}}\leq\frac{1}{n}\ ,\ ||U_n||_{\mathcal{H}}=1\ . \tag{2.74}$$

Logo, $F_n \to 0$ em $\mathcal{H}$ quando $n \to \infty$. Agora, calculando produto interno

$$\langle F_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_n \langle U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A} U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} \,,$$

tomando a parte real e aplicando (2.6) e (2.62), obtemos

$$c_0 \left\{ \int_0^l |v_n|^2 dx + \int_0^l |\eta_n|^2 dx \right\} \leq Re \langle F_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} \ . \tag{2.75}$$

De (2.74) e (2.75), deduzimos que

$$\begin{cases} v_n \to 0 \ em \ L^2(0,l) \\ \eta_n \to 0 \ em \ L^2(0,l) \ , \end{cases} \tag{2.76}$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado, da identidade

$$F_n = \lambda_n U_n - \mathcal{A} U_n,$$

onde $F_n = (f_n, g_n, h_n, p_n)$, temos que

$$\lambda_n u_n - v_n = f_n \tag{2.77}$$

$$\lambda_n w_n - \eta_n = g_n \tag{2.78}$$

$$\rho_1 \lambda_n v_n - a_{11} u_{nxx} - a_{12} w_{nxx} + b_{11} v_n + b_{12} \eta_n = h_n \rho_1 \tag{2.79}$$

$$\rho_2 \lambda_n \eta_n - a_{12} u_{nxx} - a_{22} w_{nxx} + b_{12} v_n + b_{22} \eta_n = p_n \rho_2 \ . \tag{2.80}$$

Como $|\lambda_n| \to \infty$, aplicando (2.76) em (2.77)-(2.78), deduzimos que

$$\begin{cases} u_n \to 0 \ em \ L^2(0,l) \\ w_n \to 0 \ em \ L^2(0,l). \end{cases} \tag{2.81}$$

Agora, de (2.76) e (2.81), temos

$$(u_n, w_n, v_n, \eta_n) \longrightarrow (0,0,0,0) \ em \ L^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l) \ .$$

Logo, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por (u_n, w_n, v_n, η_n), tal que

$$u_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quase sempre em} \quad (0,l)$$

$$w_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quase sempre em} \quad (0,l)$$

$$v_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quase sempre em} \quad (0,l)$$

$$\eta_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{quase sempre em} \quad (0,l)$$

o que é uma contradição com o fato de que $||U_n||_{\mathcal{H}} = 1$. Portanto,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} ||(i\beta\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty.$$

$\square$

Teorema 2.4.3. *Sejam $A \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Se $B \succ 0$, então o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração. Do teorema (2.2.4), temos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações em $\mathcal{H}$. Logo, dos lemas (2.4.1) e (2.4.2) temos também

(i) $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

(ii) $\limsup_{|\beta|\to+\infty} \|(i\beta\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\| = M < \infty$.

Assim, aplicando o teorema (1.4.5), segue o resultado. $\square$

Estudaremos a continuação a estabilidade do sistema quando a matriz B é singular com $b_{11} > 0$ e $b_{12} = 0$, porém consideraremos $a_{12} \neq 0$ para preservar o sistema acoplado.

Teorema 2.4.4. *Sejam $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5), B uma matriz singular com $b_{11} > 0$ e $b_{12} = 0$. Se $a_{12} \neq 0$, então o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração. O lema (2.4.1) nos diz que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$, logo a condição (i) do teorema (1.4.5) é satisfeito; para satisfazer a condição (ii) usaremos o método direto e mostraremos que:

$$||(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}$$

onde $C > 0$ é uma constante que independe de U, F e λ.

Como $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$, então para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ existe um único vetor $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$i\lambda u - v = f_1 \tag{2.82}$$

$$i\lambda w - \eta = f_2 \tag{2.83}$$

$$i\rho_1\lambda v - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + b_{11}v = f_3 \tag{2.84}$$

$$i\rho_2\lambda\eta - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} = f_4. \tag{2.85}$$

Agora multiplicamos por u as equações (2.84) e (2.85),

$$\rho_1\langle v, -i\lambda u\rangle + a_{11}\langle u_x, u_x\rangle + a_{12}\langle w_x, u_x\rangle + b_{11}\langle v, u\rangle = \langle f_3, u\rangle \tag{2.86}$$

$$\rho_2\langle \eta, -i\lambda u\rangle + a_{12}\langle u_x, u_x\rangle + a_{22}\langle w_x, u_x\rangle = \langle f_4, u\rangle, \tag{2.87}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em $L^2(0,l)$. Logo obtemos

$$a_{22}\rho_1\langle v, -i\lambda u\rangle + a_{11}a_{22}\langle u_x, u_x\rangle + a_{12}a_{22}\langle w_x, u_x\rangle + b_{11}a_{22}\langle v, u\rangle = a_{22}\langle f_3, u\rangle \tag{2.88}$$

$$a_{12}\rho_2\langle \eta, -i\lambda u\rangle + a_{12}^2\langle u_x, u_x\rangle + a_{12}a_{22}\langle w_x, u_x\rangle = a_{12}\langle f_4, u\rangle \tag{2.89}$$

subtraindo as equações, obtemos

$$a_{22}\rho_1\langle v, -i\lambda u\rangle - a_{12}\rho_2\langle \eta, -i\lambda u\rangle + \alpha||u_x||^2 + b_{11}a_{22}\langle v, u\rangle = \tag{2.90}$$

$$a_{22}\langle f_3, u\rangle - a_{12}\langle f_4, u\rangle.$$

Aplicando (2.82), temos

$$\alpha||u_x||^2 = a_{22}\rho_1||v||^2 + b_{11}a_{22}\langle v, u\rangle - a_{12}\rho_2\langle \eta, v\rangle + a_{22}\rho_1\langle v, f_1\rangle \tag{2.91}$$

$$+a_{22}\langle f_3, u\rangle - a_{12}\langle f_4, u\rangle - a_{12}\rho_2\langle \eta, f_1\rangle.$$

Por outro lado podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que:

$$a_{22}\rho_1|\langle v, f_1\rangle| + |a_{12}|\rho_2|\langle \eta, f_1\rangle| + a_{22}|\langle f_3, u\rangle| + |a_{12}||\langle f_4, u\rangle| \leq C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{2.92}$$

Agora aplicamos (2.92) na equação (2.91) e usando a desigualdade de Young com $N > 0$ e $N_1 > 0$, para obter

$$\alpha||u_x||^2 \leq \frac{b_{11}a_{22}C_0}{4N_1}||u_x||^2 + \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N}||\eta||^2 + C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{2.93}$$

$$+(b_{11}a_{22}N_1 + |a_{12}|\rho_2 N + a_{22}\rho_1)||v||^2.$$

Da equação (2.6) e a hipótese $b_{22} = b_{12} = 0$, obtemos

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -b_{11}\int_0^l |v|^2 dx,$$

como $(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U = F$, então

$$Re\,\langle U, F\rangle_{\mathcal{H}} = Re\,\langle U, (i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U\rangle_{\mathcal{H}} = b_{11}\int_0^l |v|^2 dx$$

logo

$$||v||^2 \leq \frac{1}{b_{11}}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{2.94}$$

Agora escolhemos $N_1 = \frac{a_{22}b_{11}C_0}{2\alpha} > 0$ e aplicamos (2.94) em (2.93) para obter

$$\frac{\alpha}{2}||u_x||^2 \leq \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N}||\eta||^2 + C_2||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{2.95}$$

onde

$$C_2 := C_2(N) = \frac{b_{11}a_{22}N_1 + |a_{12}|\rho_2 N + a_{22}\rho_1}{b_{11}} + C_1 > 0.$$

Por outro lado multiplicamos por w à equação (2.84), então

$$\rho_1\langle v, -i\lambda w\rangle + a_{11}\langle u_x, w_x\rangle + a_{12}\langle w_x, w_x\rangle + b_{11}\langle v, w\rangle = \langle f_3, w\rangle$$

e aplicamos (2.83) e a desigualdade de Young com $M > 0$, $N_2 > 0$ e $N_3 > 0$ para obter

$$|a_{12}|||w_x||^2 \leq \rho_1 M||v||^2 + \frac{\rho_1}{4M}||\eta||^2 + a_{11}N_2||u_x||^2 + \frac{a_{11}}{4N_2}||w_x||^2$$

$$+b_{11}N_3||v||^2 + \frac{b_{11}C_0}{4N_3}||w_x||^2 + C_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Como $a_{12} \neq 0$, escolhemos $N_3 = \frac{C_0 b_{11}}{2|a_{12}|} > 0$ e $N_2 = \frac{a_{11}}{|a_{12}|} > 0$, então da desigualdade acima obtemos

$$\frac{|a_{12}|}{4}||w_x||^2 \leq \frac{\rho_1}{4M}||\eta||^2 + a_{11}N_2||u_x||^2 + C_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

onde

$$C_4 := C_4(M) = \frac{\rho_1 M}{b_{11}} + N_3 + C_3 > 0$$

e multiplicando por constantes positivas temos

$$\frac{\alpha|a_{12}|}{16a_{11}N_2}||w_x||^2 \leq \frac{\rho_1\alpha}{16a_{11}N_2M}||\eta||^2 + \frac{\alpha}{4}||u_x||^2 + \frac{\alpha C_4}{4a_{11}N_2}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{2.96}$$

agora somamos (2.95) e (2.96), então

$$\frac{\alpha|a_{12}|}{16a_{11}N_2}||w_x||^2 + \frac{\alpha}{4}||u_x||^2 \leq (\frac{\rho_1\alpha}{16a_{11}N_2M} + \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N})||\eta||^2 + (\frac{\alpha C_4}{4a_{11}N_2} + C_2)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}},$$

definimos $C_5 = \min\{\frac{\alpha|a_{12}|}{16a_{11}N_2}, \frac{\alpha}{4}\} > 0$ e $C_6 = \frac{\alpha C_4}{4a_{11}N_2} + C_2 > 0$, logo obtemos

$$C_5(||w_x||^2 + ||u_x||^2) \leq (\frac{\rho_1\alpha}{16a_{11}N_2M} + \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N})||\eta||^2 + C_6||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{2.97}$$

Por outro lado multiplicamos por w à equação (2.85) e aplicando (2.83) deduzimos que

$$-\rho_2\langle \eta, \eta\rangle - \rho_2\langle \eta, f_2\rangle + a_{12}\langle u_x, w_x\rangle + a_{22}\langle w_x, w_x\rangle = \langle f_4, w\rangle$$

e aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\rho_2||\eta||^2 \leq (|a_{12}| + a_{22})(||u_x||^2 + ||w_x||^2) + C_7||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

e multiplicando por constantes positivas, obtemos

$$\frac{\rho_2 C_5(|a_{12}|+a_{22})^{-1}}{2}||\eta||^2 \leq \frac{C_5}{2}(||u_x||^2+||w_x||^2)+\frac{C_5C_7}{2}(|a_{12}|+a_{22})^{-1}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \quad (2.98)$$

Escolhemos

$$M = \frac{\rho_1\alpha(|a_{12}|+a_{22})}{4\rho_2 a_{11}C_5N_2} > 0$$
$$N = 2|a_{12}|(|a_{12}|+a_{22})C_5^{-1} > 0,$$

agora somamos os extremos correspondentes das desigualdades (2.97) e (2.98) para obter

$$\frac{C_5}{2}(||u_x||^2+||w_x||^2)+\frac{\rho_2 C_5(|a_{12}|+a_{22})^{-1}}{8}||\eta||^2 \leq (C_6+\frac{C_5C_7}{2}(|a_{12}|+a_{22})^{-1})||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \quad (2.99)$$

Definimos as constantes positivas C_8 e C_9 sendo como

$$\begin{aligned} C_8 &= \min\{\frac{C_5}{2}, \frac{\rho_2 C_5(|a_{12}|+a_{22})^{-1}}{8}, 1\} \\ C_9 &= C_6+\frac{C_5C_7}{2}(|a_{12}|+a_{22})^{-1}+\frac{1}{b_{11}} \end{aligned}$$

logo, aplicando estas definições e (2.94) na desigualdade (2.99) deduzimos que

$$C_8(||u_x||^2+||w_x||^2+||v||^2+||\eta||^2) \leq C_9||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \quad (2.100)$$

Implicando que existe uma constante positiva $C > 0$ independente de U , F e λ tal que

$$||(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C$$

Logo, usando o teorema (1.4.5), obtemos a estabilidade exponencial do semigrupo associado. □

Observação 2.4.5. *A energia do sistema (2.1)-(2.4) se define por*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (a_{11}u_x^2+2a_{12}u_xw_x+a_{22}w_x^2+\rho_1u_t^2+\rho_2w_t^2)dx\ . \quad (2.101)$$

Logo, é simples verificar que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^l (b_{11}u_t^2+2b_{12}u_tw_t+b_{22}w_t^2)dx\ . \quad (2.102)$$

Por outro lado, denotando

$$-\gamma_0 = \sup\{Re(\lambda); \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

e aplicando os teoremas de estabilidade linear (2.3.2) e estabilidade exponencial (2.4.3), obtemos que, se

- *$A \succ 0$ e $B \succ 0$.*

- *$A \succ 0$, B é uma matriz singular com $b_{11} > 0$, $b_{12} = 0$ e $a_{12} \neq 0$.*

Então, a energia do sistema (2.1)-(2.4) decai exponencialmente com uma taxa γ_0 determinada pelo espectro, isto é,

$$\left| \begin{array}{l} E(t) \leq e^{-\gamma_0 t} E(0) \\ -\gamma_0 = w_\sigma(\mathcal{A}). \end{array} \right.$$

Note também que, para obter γ_0, precisamos somente trabalhar com os autovalores de $\mathcal{A}$. Este fato será utilizado na seguinte seção.

2.5 Análise Espectral do operador $\mathcal{A}$

Estudaremos a estabilidade exponencial do sistema (2.1)-(2.4) quando

(I) ρ_1, $\rho_2 > 0$.

(II) $A \succ 0$.

(III) B singular com $\max\{b_{11}, b_{22}\} > 0$.

O caso $b_{12} = 0$ e $b_{11} > 0$ foi estudado no teorema (2.4.4). Ainda estamos sobre as hipóteses dos teoremas (2.2.4) e (2.3.2). Por outro lado é conhecido que a estabilidade exponencial do semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ é equivalente a $w_0(\mathcal{A}) < 0$ (Ver [23]). Portanto, para obter a estabilidade exponencial do sistema (2.1)-(2.4), mostraremos que $w_\sigma(\mathcal{A}) < 0$, devido a que o semigrupo possui a propriedade PCDE (teorema 2.3.2).

Do Lema (2.3.1), temos que $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ se, e somente se,

$$q_\nu(\lambda) := l_{4,\nu}\lambda^4 + l_{3,\nu}\lambda^3 + l_{2,\nu}\lambda^2 + l_{1,\nu}\lambda + l_{0,\nu} = 0,$$

para algum ν, onde:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \det A > 0 \\
\nu &= \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N} \\
r &= a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} \\
l_{0,\nu} &= \alpha\nu^4 \\
l_{1,\nu} &= r\nu^2 \\
l_{2,\nu} &= (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2 \\
l_{3,\nu} &= l_3 \ = \ (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11}) \\
l_{4,\nu} &= l_4 \ = \ \rho_1\rho_2
\end{aligned}
$$

Mostraremos que, sobre condições apropriadas entre os coeficientes, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que os polinômios $q_\nu(x - \epsilon_0)$ possuam todas as raízes com parte real negativa. Desenvolvendo o polinômio $q_\nu(x - \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, obtemos

$$
q_\nu(x-\epsilon) = L_{4,\nu}(\epsilon)x^4 + L_{3,\nu}(\epsilon)x^3 + L_{2,\nu}(\epsilon)x^2 + L_{1,\nu}(\epsilon)x + L_{0,\nu}(\epsilon)
$$

onde,

$$
\begin{aligned}
L_{4,\nu}(\epsilon) &= L_4 \ = \ \rho_1\rho_2 && (2.103) \\
L_{3,\nu}(\epsilon) &= (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11}) - 4\rho_1\rho_2\epsilon && (2.104) \\
L_{2,\nu}(\epsilon) &= 6\rho_1\rho_2\epsilon^2 + (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2 - 3(\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})\epsilon && (2.105) \\
L_{1,\nu}(\epsilon) &= 3(\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})\epsilon^2 - 4\rho_1\rho_2\epsilon^3 + r\nu^2 - 2(\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\epsilon\nu^2 && (2.106) \\
L_{0,\nu}(\epsilon) &= \rho_1\rho_2\epsilon^4 - (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})\epsilon^3 + (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\epsilon^2\nu^2 - r\epsilon\nu^2 + \alpha\nu^4. && (2.107)
\end{aligned}
$$

2.5.1 Análise espectral - Estabilização exponencial

Mostraremos uma lista de lemas técnicos concernentes ao espectro do operador que serão usados para obter a estabilidade exponencial do semigrupo $e^{t\mathcal{A}}$.

Lema 2.5.1. *Existe $\epsilon_1 > 0$ tal que*

$$
L_{j,\nu}(\epsilon) > 0, \ \forall \ \epsilon \in [0, \epsilon_1)
$$

uniformemente de $\nu = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$ e $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Demonstração. Definimos

$$r = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}. \tag{2.108}$$

Pelas hipóteses,

$$a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \ ,$$

$$b_{11}b_{22} = b_{12}^2$$

e , como

$$\frac{a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}}{2} \geq \sqrt{a_{11}b_{22}a_{22}b_{11}} \ ,$$

deduzimos

$$r = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} > 0.$$

Por outro lado, agrupando convenientemente os termos de $L_{0,\nu}(\epsilon)$ e $L_{1,\nu}(\epsilon)$ obtemos

$$L_{0,\nu}(\epsilon) = \rho_1\rho_2\epsilon^4 + \big((\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2 - (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})\epsilon\big)\,\epsilon^2 + (\alpha\nu^2 - r\epsilon)\nu^2 \tag{2.109}$$

$$L_{1,\nu}(\epsilon) = 3\epsilon^2\left((\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11}) - \frac{4}{3}\rho_1\rho_2\epsilon\right) + \left(r - 2(\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\epsilon\right)\nu^2 \ . \tag{2.110}$$

Considerando (2.103)-(2.107), (2.109) e (2.110), escolhemos

$$2\epsilon_1 := \min\left\{\frac{\pi^2}{3l^2}\frac{(\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})}{(\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})};\ \frac{(\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})}{4\rho_1\rho_2};\ \frac{r}{2(\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})};\ \frac{\alpha\pi^2}{rl^2}\right\} \ .$$

Assim, quando $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ temos

$$L_{j,\nu}(\epsilon) > 0 \ ,$$

para todo $\nu = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$ e $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Além disso, como

$$L_{j,\nu}(0) = l_{j,\nu} \ ,$$

então

$$L_{j,\nu}(\epsilon) > 0, \ \forall\ \epsilon \in [0, \epsilon_1) \ .$$

□

Definimos as constantes positivas $\widetilde{a}$ e $\widetilde{b}$, sendo como

$$\widetilde{a} = a_{11}\rho_2 + a_{22}\rho_1 \tag{2.111}$$

$$\widetilde{b} = b_{11}\rho_2 + b_{22}\rho_1 \tag{2.112}$$

Lema 2.5.2. *Suponhamos que*

$$2\gamma := \widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2 > 0,$$

então para cada $\delta \in (0,1)$*, existe* $\epsilon_\delta > 0$ *tal que*

$$D_{2,\nu}(\epsilon) := \det \begin{bmatrix} L_{3,\nu}(\epsilon) & L_{1,\nu}(\epsilon) \\ L_{4,\nu}(\epsilon) & L_{2,\nu}(\epsilon) \end{bmatrix} > 2\gamma\delta\nu^2 \ ; \ \forall \ \epsilon \in [0, \epsilon_\delta)$$

uniformemente de $\nu = \dfrac{n\pi}{l}$*,* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. De (2.103)-(2.107), obtemos as seguintes igualdades

$$L_{3,\nu}L_{2,\nu}(\epsilon) = (\widetilde{b} - 4\rho_1\rho_2\epsilon)(6\rho_1\rho_2\epsilon^2 + \widetilde{a}\nu^2 - 3\widetilde{b}\epsilon)$$

$$L_{3,\nu}L_{2,\nu}(\epsilon) = 6\rho_1\rho_2\widetilde{b}\epsilon^2 + \widetilde{a}\widetilde{b}\nu^2 - 3\widetilde{b}^2\epsilon - 24\rho_1^2\rho_2^2\epsilon^3 - 4\widetilde{a}\rho_1\rho_2\epsilon\nu^2 + 12\widetilde{b}\rho_1\rho_2\epsilon^2.$$

$$-L_{1,\nu}L_{4,\nu}(\epsilon) = -3\widetilde{b}\rho_1\rho_2\epsilon^2 + 4\rho_1^2\rho_2^2\epsilon^3 - r\rho_1\rho_2\nu^2 + 2\widetilde{a}\rho_1\rho_2\epsilon\nu^2.$$

Logo,

$$L_{3,\nu}L_{2,\nu}(\epsilon) - L_{1,\nu}L_{4,\nu}(\epsilon) = 5\rho_1\rho_2(3\widetilde{b} - 4\rho_1\rho_2\epsilon)\epsilon^2 + ((\widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2) - (2\widetilde{a}\rho_1\rho_2 + \frac{3\widetilde{b}^2}{\nu^2})\epsilon)\nu^2.$$

Como $\delta \in (0,1)$ e $2\gamma = \widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2$, então:

$$L_{3,\nu}L_{2,\nu}(\epsilon) - L_{1,\nu}L_{4,\nu}(\epsilon) = 5\rho_1\rho_2(3\widetilde{b} - 4\rho_1\rho_2\epsilon)\epsilon^2 + \left(2\gamma(1-\delta) - (2\widetilde{a}\rho_1\rho_2 + \frac{3\widetilde{b}^2}{\nu^2})\epsilon\right)\nu^2 + 2\gamma\delta\nu^2.$$

Escolhemos

$$\epsilon_\delta = \min\left\{\frac{3\widetilde{b}}{8\rho_1\rho_2}, \frac{\gamma(1-\delta)}{2\widetilde{a}\rho_1\rho_2 + \frac{3\widetilde{b}^2 l^2}{\pi^2}}\right\} > 0.$$

Logo, se $\epsilon \in [0, \epsilon_\delta)$, então

$$D_{2,\nu}(\epsilon) := L_{3,\nu}L_{2,\nu}(\epsilon) - L_{1,\nu}L_{4,\nu}(\epsilon) > 2\gamma\delta\nu^2.$$

□

Lema 2.5.3. *Se* $2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha > 0$*, onde* $\gamma > 0$ *foi definido no lema (2.5.2), então existe* $\epsilon_3 > 0$ *tal que*

$$D_{3,\nu}(\epsilon) := \det \begin{bmatrix} L_{3,\nu}(\epsilon) & L_{1,\nu}(\epsilon) & 0 \\ L_{4,\nu}(\epsilon) & L_{2,\nu}(\epsilon) & L_{0,\nu}(\epsilon) \\ 0 & L_{3,\nu}(\epsilon) & L_{1,\nu}(\epsilon) \end{bmatrix} > 0, \ \forall \ \epsilon \in [0, \epsilon_3)$$

uniformemente de $\nu = \dfrac{n\pi}{l}$*,* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como

$$D_{3,\nu} = \det \begin{bmatrix} L_{3,\nu} & L_{1,\nu} & 0 \\ L_{4,\nu} & L_{2,\nu} & L_{0,\nu} \\ 0 & L_{3,\nu} & L_{1,\nu} \end{bmatrix} = L_{1,\nu}\left((L_{3,\nu}L_{2,\nu} - L_{1,\nu}L_{4,\nu}) - 2\delta\gamma\nu^2\right) + 2L_{1,\nu}\delta\gamma\nu^2 - L_{0,\nu}L_{3,\nu}^2 \,.$$

Substituíndo (2.103)-(2.107) na identidade acima, obtemos

$$D_{3,\nu}(\epsilon) = L_{1,\nu}(\epsilon)(D_{2,\nu}(\epsilon) - 2\delta\gamma\nu^2) + 2(3\widetilde{b}\epsilon^2 - 4\rho_1\rho_2\epsilon^3 + r\nu^2 - 2\widetilde{a}\epsilon\nu^2)\delta\gamma\nu^2$$

$$-(\rho_1\rho_2\epsilon^4 - \widetilde{b}\epsilon^3 + \widetilde{a}\epsilon^2\nu^2 - r\epsilon\nu^2 + \alpha\nu^4)(\widetilde{b} - 4\rho_1\rho_2\epsilon)^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_{3,\nu}(\epsilon) &= L_{1,\nu}(\epsilon)\left(D_{2,\nu}(\epsilon) - 2\delta\gamma\nu^2\right) + 6\widetilde{b}\epsilon^2\left(1 - \frac{4\rho_1\rho_2}{3\widetilde{b}}\epsilon\right)\delta\gamma\nu^2 + \epsilon^3\left(\widetilde{b}^3 - 9\widetilde{b}^2\rho_1\rho_2\epsilon\right) \\ &+8\rho_1^2\rho_2^2\epsilon^5\left(3\widetilde{b} - 2\rho_1\rho_2\epsilon\right) + \epsilon\nu^2\left(r\widetilde{b}^2 - (\widetilde{a}\widetilde{b}^2 + 8\widetilde{b}\rho_1\rho_2)\epsilon\right) + 16\epsilon^3\rho_1^2\rho_2^2(r - \widetilde{a}\epsilon)\nu^2 \\ &+8\widetilde{a}\widetilde{b}\rho_1\rho_2\epsilon^3\nu^2 + 8\rho_1\rho_2\alpha\epsilon(\widetilde{b} - 2\rho_1\rho_2\epsilon)\nu^4 + \left((2\gamma\delta r - \alpha\widetilde{b}^2) - 4\gamma\delta\widetilde{a}\epsilon\right)\nu^4. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Escolhemos $\delta \in (0,1)$ tal que

$$\alpha\widetilde{b}^2 < 2\gamma\delta r < 2\gamma r,$$

logo definimos

$$\epsilon_3 := \min\left\{\epsilon_1, \epsilon_\delta, \frac{r}{4\widetilde{a}}, \frac{\widetilde{b}}{9\rho_1\rho_2}, \frac{r\widetilde{b}}{\widetilde{a}\widetilde{b} + 8\rho_1\rho_2 r}, \frac{2\gamma\delta r - \alpha\widetilde{b}^2}{4\gamma\delta\widetilde{a}}\right\} > 0,$$

como $2\gamma\delta r - \alpha\widetilde{b}^2 > 0$, de (2.113) deduzimos que:

$$D_{3,\nu}(\epsilon) > 0, \ \forall\, \epsilon \in [0, \epsilon_3).$$

□

Lema 2.5.4. *Se as hipóteses do lema (2.5.3) são satisfeitas, então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que*

$$D_{4,\nu}(\epsilon) := \det \begin{bmatrix} L_{3,\nu}(\epsilon) & L_{1,\nu}(\epsilon) & 0 & 0 \\ L_{4,\nu}(\epsilon) & L_{2,\nu}(\epsilon) & L_{0,\nu}(\epsilon) & 0 \\ 0 & L_{3,\nu}(\epsilon) & L_{1,\nu}(\epsilon) & 0 \\ 0 & L_{4,\nu}(\epsilon) & L_{2,\nu}(\epsilon) & L_{0,\nu}(\epsilon) \end{bmatrix} > 0 \ , \quad \forall\, \epsilon \in [0, \epsilon_0]$$

uniformemente de $\nu = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\epsilon_0 = \dfrac{\epsilon_3}{2}$. Se $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, aplicamos os lemas (2.5.1)-(2.5.3) para obter que $L_{0,\nu}(\epsilon) > 0$ e

$$D_{4,\nu}(\epsilon) = D_{3,\nu}(\epsilon) L_{0,\nu}(\epsilon) > 0 \ .$$

□

Teorema 2.5.5. *Seja $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Se*

- $2\gamma := \widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2$
- $2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha > 0$,

então o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável.

Demonstração. Do lema (2.3.1) temos

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ \ ; \ \sum_{j=0}^{4} l_{j,\nu}\lambda^j = 0 \ , \ \nu = \frac{n\pi}{l} \right\} \ .$$

Seja $\{q_\nu(x)\}_\nu$ a sequência de polinômios de quarto grau em $\mathbb{R}[x]$ com coeficientes definidos por

$$\begin{aligned} l_{4,\nu} &= l_4 = \rho_1\rho_2 \\ l_{3,\nu} &= l_3 = (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11}) \\ l_{2,\nu} &= (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2 \\ l_{1,\nu} &= r\nu^2 \\ l_{0,\nu} &= \alpha\nu^4 \ . \end{aligned}$$

Desenvolvendo $q_\nu(x - \epsilon)$ obtemos o polinômio:

$$q_\nu(x - \epsilon) = L_{4,\nu}(\epsilon)x^4 + L_{3,\nu}(\epsilon)x^3 + L_{2,\nu}(\epsilon)x^2 + L_{1,\nu}(\epsilon)x^1 + L_{0,\nu}(\epsilon)$$

e aplicando os Lemas (2.5.1)-(2.5.4), garantimos a existência de $\epsilon_0 > 0$ tal que

- $L_{0,\nu}(\epsilon_0) > 0$, $L_{1,\nu}(\epsilon_0) > 0$, $L_{2,\nu}(\epsilon_0) > 0$ e $L_{3,\nu}(\epsilon_0) > 0$
- $D_{2,\nu}(\epsilon_0) > 0$
- $D_{3,\nu}(\epsilon_0) > 0$
- $D_{4,\nu}(\epsilon_0) > 0$

Isto é, as condições do teorema (1.4.12) de Hurwitz são satisfeitas, implicando que

$$Re(\lambda) < -\epsilon_0, \ \forall \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}),$$

como

$$w_0(\mathcal{A}) = w_\sigma(\mathcal{A}) < 0 \ ,$$

então o semigrupo associado é exponencialmente estável. $\square$

A continuação mostraremos, via o teorema de Hurwitz, que existem condições necessárias para que o semigrupo associado seja exponencialmente estável.

Proposição 2.5.6. *Sejam $A \succ 0$, B uma matriz singular e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Então as seguintes condições são necessárias para que o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ seja exponencialmente estável:*

- $\max\{b_{11}, b_{22}\} > 0.$
- $2\gamma := \widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2 > 0.$
- $2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha > 0.$

Demonstração. Do Lema (2.3.1), temos que $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ se, e somente se,

$$q_\nu(\lambda) := l_4\lambda^4 + l_3\lambda^3 + l_{2,\nu}\lambda^2 + l_{1,\nu}\lambda + l_{0,\nu} = 0,$$

para algum ν, onde:

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{n\pi}{l}, \ n \in \mathbb{N} \\
\alpha &= detA > 0 \\
r &= a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} \\
l_{0,\nu} &= \alpha\nu^4 > 0 \\
l_{1,\nu} &= r\nu^2 \\
l_{2,\nu} &= (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2 > 0 \\
l_3 &= (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11}) \\
l_4 &= \rho_1\rho_2 > 0
\end{aligned}$$

Logo, as determinantes de Hurwitz são:

$$\begin{aligned}
D_{1,\nu} &= l_3 \\
&= \rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11}\ . \\
D_{2,\nu} &= l_3 l_{2,\nu} - l_{1,\nu} l_4 \\
&= (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})(\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})\nu^2 - r\rho_1\rho_2\nu^2 \\
&= (\widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2)\nu^2. \\
D_{3,\nu} &= D_{2,\nu} l_{1,\nu} - l_{0,\nu} l_3^2 \\
&= (2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha)\nu^4. \\
D_{4,\nu} &= D_{3,\nu} l_{0,\nu} \\
&= \alpha\nu^8(2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha)\ .
\end{aligned}$$

Se alguma das condições dadas não é verdadeira, aplicando o teorema (1.4.12) de Hurwitz, obtemos $\lambda_\nu \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que

$$Re(\lambda_\nu) \geq 0$$

logo, concluimos que

$$w_\sigma(\mathcal{A}) \geq 0,$$

isto é, $w_0(\mathcal{A}) \geq 0$. Por tanto o semigrupo associado não é exponencialmente estável. □

O teorema (2.5.5) e a proposição (2.5.6) nos levan ao seguinte resultado.

Teorema 2.5.7. *Sejam $A \succ 0$, B uma matriz singular com $\max\{b_{11}, b_{22}\} > 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (2.5). Então $e^{t\mathcal{A}}$ é exponencialmente estável se, e somente se, $2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha > 0$.*

Na seguinte seção daremos um sistema que não satisfaz a condição do teorema (2.5.5) e não é exponencialmente estável.

2.5.2 Soluções Particulares

A estabilidade exponencial de um semigrupo, $e^{t\mathcal{A}}$, de operadores limitados em $\mathcal{H}$ está fortemente relacionado ao comportamento assintótico da função $U = e^{t\mathcal{A}}x$ que é solução do problema

$$\begin{aligned} \mathcal{A}U &= U_t \\ U(0) &= x \end{aligned}$$

isto é, para qualquer $x \in D(\mathcal{A})$, a solução possui decaimento exponencial. Se o semigrupo não for exponencialmente estável significa que existem dados iniciais, $x \in D(\mathcal{A})$, tais que $U = e^{t\mathcal{A}}x$ não posui decaimento do tipo exponencial. Daremos um exemplo de sistema que satisfaz o princípio de estabilidade linear ($w_0(\mathcal{A}) = w_\sigma(\mathcal{A})$) e que não é exponencialmente estável, compararemos este resultado com o teorema (2.5.5).

Exemplo 2.5.8. *Consideremos o sistema*

$$u_{tt} = u_{xx} - u_t - w_t \quad em \quad (0,\pi) \times (0,\infty) \tag{2.114}$$

$$w_{tt} = w_{xx} - u_t - w_t \quad em \quad (0,\pi) \times (0,\infty) \tag{2.115}$$

com condições de fronteira

$$u(0,t) = u(\pi,t) = w(0,t) = w(\pi,t) = 0 \quad em \quad (0,\infty)\ , \tag{2.116}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x,0) = sen(2x) \quad &; \quad u_t(x,0) = 0 \quad em \quad (0,\pi). \\ w(x,0) = 0 \quad &; \quad w_t(x,0) = 0 \quad em \quad (0,\pi). \end{aligned} \tag{2.117}$$

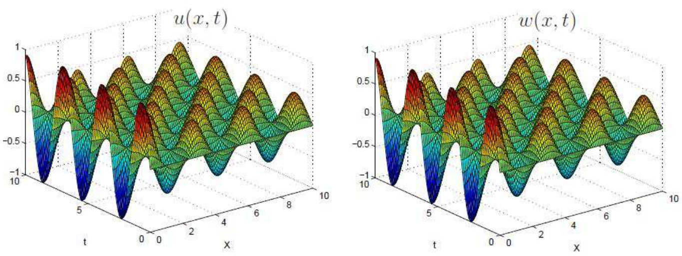

Figura 2.2: Não decaimento exponencial

Hipôtesis do teorema (2.5.5):

- $2\gamma := \widetilde{a}\widetilde{b} - r\rho_1\rho_2$
- $2\gamma r - \widetilde{b}^2\alpha > 0$

Identificando constantes:

- $\rho_1 = \rho_2 = 1$
- $\alpha = 1$
- $\widetilde{a} = \widetilde{b} = 2$
- $r = 2$
- $\gamma = 1$
- $2\gamma r - \widetilde{b}^2 \alpha = 0$

Por outro lado as soluções do sistema (2.114)-(2.117) são dadas por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}cos(2t)sen(2x) + \frac{1}{2}e^{-t}sen(2x)\left(cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}sen(\sqrt{3}t)\right)$$

$$w(x,t) = -\frac{1}{2}cos(2t)sen(2x) + \frac{1}{2}e^{-t}sen(2x)\left(cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}sen(\sqrt{3}t)\right).$$

Como podemos ver a solução não tem decaimento exponencial (ver figura 2.2). Agora daremos outras condições iniciais para obter decaimento exponencial das soluções.

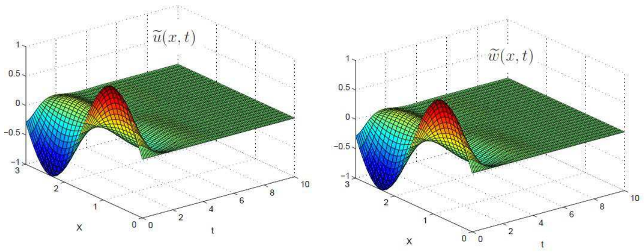

Figura 2.3: Decaimento exponencial

Consideremos o sistema (2.114)-(2.117) com condições iniciais:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= sen(2x) \quad ; \quad u_t(x,0) = 0 \;\; em \;\; (0,\pi). \\ w(x,0) &= sen(2x) \quad ; \quad w_t(x,0) = 0 \;\; em \;\; (0,\pi). \end{aligned} \tag{2.118}$$

Neste caso as soluções são dadas por:

$$\widetilde{u}(x,t) = \widetilde{w}(x,t) = sen(2x)e^{-t}\left(cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}sen(\sqrt{3}t)\right)$$

e podemos observar na figura (2.3) que as soluções apresentan decaimento exponencial.

Capítulo 3

Modelos de Mistura Viscosa

3.1 Introdução

Consideremos o sistema para a mistura de dois sólidos viscoelástica

$$\rho_1 u_{tt} = a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} + b_{11}u_{xxt} + b_{12}w_{xxt} \quad em \quad (0,l)\times(0,\infty) \tag{3.1}$$

$$\rho_2 w_{tt} = a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + b_{12}u_{xxt} + b_{22}w_{xxt} \quad em \quad (0,l)\times(0,\infty) \tag{3.2}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_o(x); u_t(x,0) = u_1(x); w(x,0) = w_o(x); w_t(x,0) = w_1(x) \quad em \quad (0,l) \tag{3.3}$$

e condições de fronteira

$$u(0,t) = u(l,t) = w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad em \quad (0,\infty)\ , \tag{3.4}$$

submetido às seguintes hipóteses:

(I) $\rho_1,\ \rho_2 > 0$.

(II) $A \succ 0$.

(III) $B \succeq 0$.

onde $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ e $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$ são as matrizes que determinam o operador não limitado associado ao sistema de mistura viscoelástica.

3.2 Existência e Unicidade

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} := H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l)$$

o qual, munido com o produto interno

$$\langle (u,w,v,\eta);(\widetilde{u},\widetilde{w},\widetilde{v},\widetilde{\eta})\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l (a_{11}u_x\overline{\widetilde{u}}_x + a_{12}(u_x\overline{\widetilde{w}}_x + w_x\overline{\widetilde{u}}_x) + a_{22}w_x\overline{\widetilde{w}}_x)dx$$

$$+\rho_1\int_0^l v\overline{\widetilde{v}}dx + \rho_2\int_0^l \eta\overline{\widetilde{\eta}}dx\ ,$$

é um espaço de Hilbert. A norma induzida $||.||_{\mathcal{H}}$ é dada por

$$||(u,w,v,\eta)||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^l (a_{11}u_x\overline{u}_x + a_{12}(u_x\overline{w}_x + w_x\overline{u}_x) + a_{22}w_x\overline{w}_x)dx$$

$$+\rho_1\int_0^l v\overline{v}dx + \rho_2\int_0^l \eta\overline{\eta}dx, \tag{3.5}$$

Além disso,

$$||(u,w,v,\eta)||_{\mathcal{H}}^2 \geq c_0\{\int_0^l |u_x|^2dx + \int_0^l |w_x|^2dx + \int_0^l |v|^2dx + \int_0^l |\eta|^2dx\},$$

onde

$$c_0 = min\{\rho_1, \rho_2, \frac{\alpha}{2a_{11}}, \frac{\alpha}{2a_{22}}\}.$$

Definimos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$, como sendo

$$\mathcal{A}(u,w,v,\eta) = \begin{pmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} + b_{11}v_{xx} + b_{12}\eta_{xx}) \\ \frac{1}{\rho_2}(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + b_{12}v_{xx} + b_{22}\eta_{xx}) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

com domínio,

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \ & \{\ U = (u,w,v,\eta) \in \mathcal{H};\ \ (v,\eta) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \\ & a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta \in H^2(0,l) \\ & a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta \in H^2(0,l)\ \}\ . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Teorema 3.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (3.6)-(3.7). Então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Mostraremos este resultado usando o corolário (1.3.5), isto é, verificaremos que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

De fato, seja $U = (u, v, w, \eta) \in D(\mathcal{A})$. Então

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{bmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - b_{11}v_{xx} - b_{12}\eta_{xx}) \\ \frac{1}{\rho_2}(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}v_{xx} - b_{22}\eta_{xx}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \\ \eta \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \int_0^l (a_{11}v_x\overline{u}_x + a_{12}(v_x\overline{w}_x + \eta_x\overline{u}_x) + a_{22}\eta_x\overline{w}_x)dx \\
&+ \int_0^l (a_{11}u_{xx}\overline{v} + a_{12}w_{xx}\overline{v} - b_{11}v_{xx}\overline{v} - b_{12}\eta_{xx}\overline{v})dx \\
&+ \int_0^l (a_{12}u_{xx}\overline{\eta} + a_{22}w_{xx}\overline{\eta} - b_{12}v_{xx}\overline{\eta} - b_{22}\eta_{xx}\overline{\eta})dx \\
&= \int_0^l (a_{11}v_x\overline{u}_x + a_{12}(v_x\overline{w}_x + \eta_x\overline{u}_x) + a_{22}\eta_x\overline{w}_x)dx \\
&- \int_0^l (\overline{a_{11}v_x\overline{u}_x + a_{12}(v_x\overline{w}_x + \eta_x\overline{u}_x) + a_{22}\eta_x\overline{w}_x})dx \\
&- \int_0^l (b_{11}v_x\overline{v}_x + b_{12}(\eta_x\overline{v}_x + \overline{\eta}_x v_x) + b_{22}\eta_x\overline{\eta}_x)dx \; .
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real obtemos

$$
Re \, \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l (b_{11}v_x\overline{v}_x + b_{12}(\eta_x\overline{v}_x + \overline{\eta}_x v_x) + b_{22}\eta_x\overline{\eta}_x)dx \; . \tag{3.8}
$$

Como B é semidefinida positiva, teremos que

$$
Re \, \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0,
$$

isto é, $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Da definição é simples verificar que $\mathcal{A}$ é fechado e densamente definido em $\mathcal{H}$.

Agora, mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. De fato, sejam $U = (u, w, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$ e $F = (f, g, h, p) \in \mathcal{H}$ tal que

$$
\mathcal{A}U = F
$$

que, em termos das componentes, se escreve

$$\begin{aligned}
v &= f \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) && (3.9)\\
\eta &= g \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) && (3.10)\\
a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} + b_{11}v_{xx} + b_{12}\eta_{xx} &= \rho_1 h \quad \text{em} \quad L^2(0,l) && (3.11)\\
a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} + b_{12}v_{xx} + b_{22}\eta_{xx} &= \rho_2 p \quad \text{em} \quad L^2(0,l)\ . && (3.12)
\end{aligned}$$

Consideremos a forma sesquilinear, contínua e positiva

$$M : (H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)) \times (H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$M\left((u,w),(\phi,\psi)\right) = \int_0^l \left(a_{11}u_x\overline{\phi}_x + a_{12}(u_x\overline{\psi}_x + w_x\overline{\phi}_x) + a_{22}w_x\overline{\psi}_x\right) dx\ .$$

Definimos o funcional $G : H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\begin{aligned}
G(\phi,\psi) &= -\int_0^l (b_{11}v_x + b_{12}\eta_x)\overline{\phi}_x dx - \rho_1 \int_0^l h\overline{\phi} dx\\
&\quad - \int_0^l (b_{12}v_x + b_{22}\eta_x)\overline{\psi}_x dx - \rho_2 \int_0^l p\overline{\psi} dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o lema de Lax-Milgran (1.1.14), teremos que existem $(u,w) \in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ determinados de forma única tal que

$$M\left((u,w),(\phi,\psi)\right) = G(\phi,\psi); \quad \forall\ (\phi,\psi) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l).$$

Como, $v = f$ em $H_0^1(0,l)$ e $\eta = g$ em $H_0^1(0,l)$, obtemos que existe um único $U = (u,w,v,\eta) \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo

$$\mathcal{A}U = F\ .$$

Além disso é simples verificar que

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}},\ \forall\ F \in \mathcal{H}$$

ou equivalentemente

$$||\mathcal{A}^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}},\ \forall\ F \in \mathcal{H}$$

isto é, $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador limitado. Portanto

$$0 \in \rho(\mathcal{A}).$$

Aplicando o corolário (1.3.5), obtemos o resultado. □

3.3 Analiticidade

Nesta seção provaremos que o semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$, associado ao sistema (3.1)-(3.4), é analítico quando as matrizes A e B são definidas positivas. Usaremos a caraterização dos semigrupos analíticos dada por Z. Liu em [12]. Por simplicidade dividiremos a demonstração em dois lemas.

Lema 3.3.1. *Sejam $A \succ 0$, $B \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (3.6)-(3.7). Então*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em três partes, primeiro vejamos que a função $||(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||$ é contínua em algum intervalo contendo o zero.

Parte (i)

Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, para todo número real λ, $|\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$, temos que

$$||i\lambda\mathcal{A}^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1,$$

logo $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{I})$ é inversível em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então $\mathcal{A}^{-1}(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})$ é inversível em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, isto é,

$$i\lambda \in \rho(\mathcal{A}); \quad \forall\ \lambda \in (-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1})\ .$$

Como o operador resolvente $R(\mu; \mathcal{A}) = (\mu\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ é analítico em $\rho(\mathcal{A})$, temos em particular que $||(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||$ é uma função contínua em λ, $\lambda \in (-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1})$.

Parte (ii)

Seja $M > 0$ tal que

$$\sup\left\{||(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||;\ |\lambda| < ||\mathcal{A})^{-1}||^{-1}\right\} = M < \infty\ .$$

Para $|\lambda - \lambda_0| < M^{-1}$ e $|\lambda_0| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$, temos

$$||(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}|| < 1\ .$$

Logo $\mathcal{I} + (\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ é inversível em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e como

$$(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) = (i\lambda_0\mathcal{I} - \mathcal{A})(\mathcal{I} + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1})\ ,$$

então $(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})$ é inversível em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $i\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Como λ_0 foi escolhido arbitrariamente, tal que $|\lambda_0| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$, deduzimos que

$$\left\{i\lambda \ ; \ |\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} + M^{-1}\right\} \subset \rho(\mathcal{A}) \ ,$$

além disso, a função $||(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}||$ é contínua em $\lambda \in (-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}-M^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}+M^{-1})$.

Parte (iii)

Agora, por contradição suponha que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$. Pelo argumentado em (ii), existe $\omega \in \mathbb{R}$ com $||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} \leq |\omega|$, tal que

$$\{i\lambda; \ |\lambda| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

e

$$\sup\left\{||(i\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}||; \ |\lambda| < |\omega|\right\} = \infty \ .$$

Além disso, deve existir uma sequência $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} |\lambda_n| < |\omega| \ , \\ \lambda_n \to \omega \qquad \text{quando } n \to \infty \end{cases} \tag{3.13}$$

e duas sequências de vetores $U_n = (u_n, w_n, v_n, \eta_n) \in D(\mathcal{A})$ e $F_n = (f_n, g_n, h_n, p_n) \in \mathcal{H}$ tais que

$$\begin{cases} (i\lambda_n\mathcal{I}-\mathcal{A})U_n &= F_n \\ \quad ||U_n||_{\mathcal{H}} &= 1 \\ \quad F_n \to 0 & \text{em} \ \ \mathcal{H} \ \text{ quando } n \to \infty. \end{cases} \tag{3.14}$$

Considerando a equação anterior e aplicando (3.8), teremos que

$$Re\,\langle F_n, U_n\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l (b_{11}v_{nx}\overline{v}_{nx} + b_{12}(\eta_{nx}\overline{v}_{nx} + \overline{\eta}_{nx}v_{nx}) + b_{22}\eta_{nx}\overline{\eta}_{nx})dx \ . \tag{3.15}$$

Como a matriz B é definida positiva, de (3.15) deduzimos que

$$C_0\left\{\int_0^l |v_{nx}|^2dx + \int_0^l |\eta_{nx}|^2dx\right\} \leq ||F_n||_{\mathcal{H}}||U_n||_{\mathcal{H}} \ ,$$

o qual implica que

$$\begin{cases} v_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) \\ \eta_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) \ . \end{cases} \tag{3.16}$$

De (3.14), obtem-se também que

$$i\lambda_n u_n = v_n + f_n \;\; \text{em} \;\; H_0^1(0,l) \; ,$$

$$i\lambda_n w_n = \eta_n + g_n \;\; \text{em} \;\; H_0^1(0,l) \; .$$

Como $\lambda_n \to \omega$, das equações anteriores deduzimos

$$\begin{cases} u_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) \\ w_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l) \; . \end{cases} \tag{3.17}$$

De (3.16) e (3.17), concluímos que

$$U_n = (u_n, w_n, v_n, \eta_n) \to 0 \;\; \text{em} \;\; H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \; ,$$

o qual contradiz o fato de que $||U_n||_{\mathcal{H}} = 1$. Portanto,

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \; .$$

□

Lema 3.3.2. *Sejam $A \succ 0$, $B \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (3.6)-(3.7). Então existe uma constante $C > 0$, independente de $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$||\lambda(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < C \; .$$

Demonstração. Pelo lema (3.3.1), dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (f, g, h, p) \in \mathcal{H}$, existe um único vetor $U = (u, w, v, \eta) \in D(\mathcal{A})$, tal que

$$i\lambda u - v = f \quad \text{em } H_0^1(0,l) \tag{3.18}$$

$$i\lambda w - \eta = g \quad \text{em } H_0^1(0,l) \tag{3.19}$$

$$i\lambda\rho_1 v - (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta)_{xx} = \rho_1 h \text{ em } L^2(0,l) \tag{3.20}$$

$$i\lambda\rho_2 \eta - (a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta)_{xx} = \rho_2 p \text{ em } L^2(0,l) \tag{3.21}$$

Aplicando (3.8), obtemos a seguinte igualdade

$$Re\,\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l (b_{11}v_x\overline{v}_x + b_{12}(\eta_x\overline{v}_x + \overline{\eta}_x v_x) + b_{22}\eta_x\overline{\eta}_x)dx \; .$$

Como a matriz B é definida positiva, deduzimos que

$$C_0 \left\{ \int_0^l |v_x|^2 dx + \int_0^l |\eta_x|^2 dx \right\} \leq ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \ , \tag{3.22}$$

onde $C_0 = min \left\{ \frac{detB}{2b_{11}}, \ \frac{detB}{2b_{22}} \right\} > 0$. Calculando o produto interno em $L^2(0,l)$ de (3.20) e (3.21) com u e v respectivamente, temos

$$i\lambda\rho_1 \int_0^l v\overline{u} dx + a_{11} \int_0^l |u_x|^2 dx + a_{12} \int_0^l w_x \overline{u}_x dx + b_{11} \int_0^l v_x \overline{u}_x dx$$

$$+ b_{12} \int_0^l \eta_x \overline{u}_x dx = \rho_1 \int_0^l h\overline{u} dx \tag{3.23}$$

$$i\lambda\rho_2 \int_0^l \eta\overline{w} dx + a_{12} \int_0^l u_x \overline{w}_x dx + a_{22} \int_0^l |w_x|^2 dx + b_{12} \int_0^l v_x \overline{w}_x dx$$

$$+ b_{22} \int_0^l \eta_x \overline{w}_x dx = \rho_2 \int_0^l p\overline{w} dx. \tag{3.24}$$

Somando as duas equações anteriores, obtemos

$$\int_0^l (a_{11} u_x \overline{u}_x + a_{12}(u_x \overline{w}_x + \overline{u}_x w_x) + a_{22} w_x \overline{w}_x) dx = -b_{11} \int_0^l v_x \overline{u}_x dx - b_{12} \int_0^l \eta_x \overline{u}_x dx$$

$$-b_{12} \int_0^l v_x \overline{w}_x dx - b_{22} \int_0^l \eta_x \overline{w}_x dx - i\lambda\rho_1 \int_0^l v\overline{u} dx - i\lambda\rho_2 \int_0^l \eta\overline{w} dx$$

$$+ \rho_1 \int_0^l h\overline{u} dx + \rho_2 \int_0^l p\overline{w} dx. \tag{3.25}$$

Como A é uma matriz definida positiva, temos que

$$\int_0^l (a_{11} u_x \overline{u}_x + a_{12}(u_x \overline{w}_x + \overline{u}_x w_x) + b_{22} w_x \overline{w}_x) dx \geq C_1 \left\{ \int_0^l |u_x|^2 dx + \int_0^l |w_x|^2 dx \right\},$$

onde $C_1 = min \left\{ \frac{detA}{2a_{11}}, \frac{detA}{2a_{22}} \right\} > 0$. Agora, aplicamos esta última desigualdade e substituimos as equações (3.18) e (3.19) em (3.25) , assim,

$$C_1 \left\{ \int_0^l |u_x|^2 dx + \int_0^l |w_x|^2 dx \right\} \leq +b_{11} \int_0^l |v_x||u_x| dx + |b_{12}| \int_0^l |\eta_x||u_x| dx$$

$$+|b_{12}| \int_0^l |v_x||w_x| dx + b_{22} \int_0^l |\eta_x||w_x| dx + \rho_1 \int_0^l |v|^2 dx + \rho_1 \int_0^l |v||f| dx$$

$$+\rho_2 \int_0^l |\eta|^2 dx + \rho_2 \int_0^l |\eta||g| dx + \rho_1 \int_0^l |h||u| dx + \rho_2 \int_0^l |p||w| dx. \tag{3.26}$$

Pela definição de $||.||_{\mathcal{H}}$ em (3.5), é simples ver que

$$\rho_1 \int_0^l |h||u| dx + \rho_2 \int_0^l |p||w| dx + \rho_1 \int_0^l |v||f| dx + \rho_2 \int_0^l |\eta||g| dx \leq k||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \ , \tag{3.27}$$

para algum $k>0$. Além disso, consideremos

$$ab \leq Na^2 + \frac{b^2}{4N};\ \forall\ a,b \in \mathbb{R}^+$$

e (3.22), assim,

$$b_{11}\int_0^l |v_x||u_x|dx + |b_{12}|\int_0^l |\eta_x||u_x|dx + |b_{12}|\int_0^l |v_x||w_x|dx + b_{22}\int_0^l |\eta_x||w_x|dx$$

$$\leq \frac{2k_1N}{C_0}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{k_1}{2N}\left\{\int_0^l |u_x|^2dx + \int_0^l |w_x|^2dx\right\}\ , \tag{3.28}$$

onde $k_1 = max\left\{b_{11}, b_{22}, |b_{12}|\right\} > 0\ e\ N \in \mathbb{N}$. Agora, substituímos (3.27) e (3.28) em (3.26), para obter

$$C_1\left\{\int_0^l |u_x|^2dx + \int_0^l |w_x|^2dx\right\} \leq (k_2k + \frac{2k_1N}{C_0})||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{k_1}{2N}\left\{\int_0^l |u_x|^2dx + \int_0^l |w_x|^2dx\right\}\ ,$$

também, consideremos $N \geq \frac{k_1}{C_1}$, assim

$$\int_0^l |u_x|^2dx + \int_0^l |w_x|^2dx \leq k_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{3.29}$$

onde $k_3 = 4(\frac{k_2k}{2C_1} + \frac{k_1N}{C_0C_1})$. De (3.18) e (3.19), temos

$$i\lambda u_x - v_x = f_x$$

e

$$i\lambda w_x - \eta_x = g_x\ ,$$

multiplicando as equações anteriores por $-iu_x$ e $-iw_x$ respectivamente, obtemos

$$|\lambda|\int_0^1 |u_x|^2dx \leq \left(\int_0^1 |f_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |u_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |v_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |u_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|\lambda|\int_0^1 |w_x|^2dx \leq \left(\int_0^1 |g_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |w_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |\eta_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |w_x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Somando as desigualdades anteriores e aplicando a definição de $||.||_{\mathcal{H}}$, temos que existe uma constante $k_4>0$ tal que

$$|\lambda|\left\{\int_0^1 |u_x|^2dx + \int_0^1 |w_x|^2dx\right\} \leq k_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 |u_x|^2dx + \int_0^1 |w_x|^2dx + \int_0^1 |v_x|^2dx + \int_0^1 |\eta_x|^2dx\right\}\ . \tag{3.30}$$

Aplicando (3.22) e (3.29) em (3.30), temos

$$|\lambda|\left\{\int_0^1 |u_x|^2dx + \int_0^1 |w_x|^2dx\right\} \leq k_5||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.31}$$

Finalmente, multiplicamos (3.20) e (3.21) por v e η respectivamente, para obter

$$i\lambda\rho_1 \int_0^l |v|^2 dx + \int_0^l (a_{11}u_x\overline{v}_x + a_{12}w_x\overline{v}_x + b_{11}|v_x|^2 + b_{12}\eta_x\overline{v}_x)dx = \rho_1 \int_0^l h\overline{v}dx \tag{3.32}$$

$$i\lambda\rho_2 \int_0^l |\eta|^2 dx + \int_0^l (a_{12}u_x\overline{\eta_x} + a_{22}w_x\overline{\eta_x} + b_{12}v_x\overline{\eta_x} + b_{22}|\eta_x|^2)dx = \rho_2 \int_0^l p\overline{\eta}dx\ . \tag{3.33}$$

Somando e tomando a parte imaginária temos

$$\lambda\rho_1 \int_0^l |v|^2 dx + \lambda\rho_2 \int_0^l |\eta|^2 dx = Im\left\{\rho_1 \int_0^l h\overline{v}dx + \rho_2 \int_0^l p\overline{\eta}dx\right\}$$

$$+Im\left\{\int_0^l (a_{11}u_x\overline{v}_x + a_{12}w_x\overline{v}_x + a_{12}u_x\overline{\eta_x} + a_{22}w_x\overline{\eta_x})dx\right\}.$$

Usando (3.22) e (3.29) na equação anterior, existe $k_6 > 0$ tal que

$$|\lambda|\left\{\int_0^l |v|^2 dx + \int_0^l |\eta|^2 dx\right\} \leq k_6||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.34}$$

Agora, de (3.31) e (3.34), deduzimos que

$$|\lambda|||(u,w,v,\eta)||^2_{\mathcal{H}} \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

onde $C > 0$. Assim,

$$|\lambda|||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}$$

ou equivalentemente

$$||\lambda(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C$$

e C é uma constante positiva independente de λ, $U \in D(\mathcal{A})$ e $F \in \mathcal{H}$. Logo nosso resultado esta completo. □

Teorema 3.3.3. *Sejam $A \succ 0$, $B \succ 0$ e $\mathcal{A}$ o operador linear definido em (3.6)-(3.7). Então o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ é analítico.*

Demonstração. Dos lemas (3.3.1) e (3.3.2), temos

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})\ ,$$

$$||\lambda(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < C\ .$$

Logo, obtemos

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} ||\lambda(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty.$$

Aplicando o teorema (1.4.9), obtemos que $e^{\mathcal{A}t}$ é analítico. □

3.4 Não Analiticidade

Nesta seção estudaremos a analiticidade do sistema (3.1)-(3.4) quando

(I) ρ_1, $\rho_2 > 0$.

(II) $A \succ 0$.

(III) B é uma matriz singular com $b_{11} > 0$.

Assim ainda estamos sobre as hipóteses do teorema (3.2.1). Mostraremos que o semigrupo $e^{t\mathcal{A}}$ não é analítico aplicando o teorema 1.4.9. Daremos uma sequência λ_n em $\mathbb{R}$, $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, e uma sequência limitada $F_n \in \mathcal{H}$ tal que

$$||\lambda_n(i\lambda_n\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}F_n||_{\mathcal{H}} \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Dividiremos tal estudo em dois casos.

Caso I: $b_{12} = 0$

Se $a_{12} = 0$, então $w(x,t)$ é solução de:

$$\begin{cases} \rho_2 w_{tt}(x,t) &=& a_{22}w_{xx}(x,t) \\ w(0,t) &=& 0 \\ w(l,t) &=& 0 \,. \end{cases}$$

Que não é uniformemente estável. Logo concluimos que o semigrupo $e^{t\mathcal{A}}$ não possui extensão analítica e não é exponencialmente estável.

Porém, para que o sistema continúe acoplado consideraremos $a_{12} \neq 0$. Primeiro mostraremos que o semigrupo, $e^{t\mathcal{A}}$, é exponencialmente estável, logo mostraremos que não existe uma extensão analítica de tal semigrupo.

Lema 3.4.1. *Suponha que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $F \in \mathcal{H}$ o sistema $(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})U = F$ possui uma solução $U \in D(\mathcal{A})$. Se $a_{12} \neq 0$, então*

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}$$

onde C é uma constante positiva independente de λ.

Demonstração. Da hipótese temos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ existe um vetor $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$i\lambda u - v = f_1 \tag{3.35}$$

$$i\lambda w - \eta = f_2 \tag{3.36}$$

$$i\rho_1\lambda v - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}v_{xx} = f_3 \tag{3.37}$$

$$i\rho_2\lambda\eta - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} = f_4. \tag{3.38}$$

Agora multiplicamos por u as equações (3.37) e (3.38),

$$\rho_1\langle v, -i\lambda u\rangle + a_{11}\langle u_x, u_x\rangle + a_{12}\langle w_x, u_x\rangle + b_{11}\langle v_x, u_x\rangle = \langle f_3, u\rangle \tag{3.39}$$

$$\rho_2\langle \eta, -i\lambda u\rangle + a_{12}\langle u_x, u_x\rangle + a_{22}\langle w_x, u_x\rangle = \langle f_4, u\rangle, \tag{3.40}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno em $L^2(0,l)$. Logo obtemos

$$a_{22}\rho_1\langle v, -i\lambda u\rangle + a_{11}a_{22}\langle u_x, u_x\rangle + a_{12}a_{22}\langle w_x, u_x\rangle + b_{11}a_{22}\langle v_x, u_x\rangle = a_{22}\langle f_3, u\rangle \tag{3.41}$$

$$a_{12}\rho_2\langle \eta, -i\lambda u\rangle + a_{12}^2\langle u_x, u_x\rangle + a_{12}a_{22}\langle w_x, u_x\rangle = a_{12}\langle f_4, u\rangle \tag{3.42}$$

subtraindo as equações, obtemos

$$a_{22}\rho_1\langle v, -i\lambda u\rangle - a_{12}\rho_2\langle \eta, -i\lambda u\rangle + \alpha||u_x||^2 + b_{11}a_{22}\langle v_x, u_x\rangle = \tag{3.43}$$

$$a_{22}\langle f_3, u\rangle - a_{12}\langle f_4, u\rangle.$$

Aplicando (3.35), temos

$$\alpha||u_x||^2 = a_{22}\rho_1||v||^2 - b_{11}a_{22}\langle v_x, u_x\rangle - a_{12}\rho_2\langle \eta, v\rangle + a_{22}\rho_1\langle v, f_1\rangle \tag{3.44}$$

$$+a_{22}\langle f_3, u\rangle - a_{12}\langle f_4, u\rangle - a_{12}\rho_2\langle \eta, f_1\rangle.$$

Por outro lado podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que:

$$a_{22}\rho_1|\langle v, f_1\rangle| + |a_{12}|\rho_2|\langle \eta, f_1\rangle| + a_{22}|\langle f_3, u\rangle| + |a_{12}||\langle f_4, u\rangle| \le C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.45}$$

Agora aplicamos (3.45) na equação (3.44) e usando a desigualde de Young com $N > 0$ e $N_1 > 0$, para obter

$$\alpha||u_x||^2 \le \frac{b_{11}a_{22}}{4N_1}||u_x||^2 + \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N}||\eta||^2 + C_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.46}$$

$$+(b_{11}a_{22}N_1 + C_0|a_{12}|\rho_2 N + C_0 a_{22}\rho_1)||v_x||^2.$$

Onde C_0 é a constante da desigualdade de Poincaré. Da equação (3.8) e a hipótese, $b_{22} = b_{12} = 0$, obtemos

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -b_{11}\int_0^l |v_x|^2 dx,$$

como $(i\lambda I - A)U = F$, então

$$Re\,\langle U, F\rangle_{\mathcal{H}} = Re\,\langle U, (i\lambda I - A)U\rangle_{\mathcal{H}} = b_{11}\int_0^l |v_x|^2 dx$$

logo

$$||v_x||^2 \leq \frac{1}{b_{11}}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.47}$$

Agora escolhemos $N_1 = \frac{a_{22}b_{11}}{2\alpha} > 0$ e aplicamos (3.47) em (3.46) para obter

$$\frac{\alpha}{2}||u_x||^2 \leq \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N}||\eta||^2 + C_2||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{3.48}$$

onde

$$C_2 := C_2(N) = \frac{b_{11}a_{22}N_1 + C_0|a_{12}|\rho_2 N + C_0 a_{22}\rho_1}{b_{11}} + C_1 > 0.$$

Por outro lado multiplicamos por w a equação (3.37), então

$$\rho_1\langle v, -i\lambda w\rangle + a_{11}\langle u_x, w_x\rangle + a_{12}\langle w_x, w_x\rangle + b_{11}\langle v_x, w_x\rangle = \langle f_3, w\rangle$$

e aplicamos (3.36) e a desigualdade de Young con $M > 0$, $N_2 > 0$ e $N_3 > 0$ para obter

$$|a_{12}|||w_x||^2 \leq C_0\rho_1 M||v_x||^2 + \frac{\rho_1}{4M}||\eta||^2 + a_{11}N_2||u_x||^2 + \frac{a_{11}}{4N_2}||w_x||^2$$

$$+b_{11}N_3||v_x||^2 + \frac{b_{11}}{4N_3}||w_x||^2 + C_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Como $a_{12} \neq 0$, escolhemos $N_3 = \frac{b_{11}}{|a_{12}|} > 0$ e $N_2 = \frac{a_{11}}{2|a_{12}|} > 0$, então da desigualdade acima obtemos

$$\frac{|a_{12}|}{4}||w_x||^2 \leq \frac{\rho_1}{4M}||\eta||^2 + a_{11}N_2||u_x||^2 + C_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

onde

$$C_4 := C_4(M) = \frac{\rho_1 C_0 M}{b_{11}} + N_3 + C_3 > 0$$

e multiplicando por constantes positivas temos

$$\frac{\alpha|a_{12}|}{16a_{11}N_2}||w_x||^2 \leq \frac{\rho_1\alpha}{16a_{11}N_2M}||\eta||^2 + \frac{\alpha}{4}||u_x||^2 + \frac{\alpha C_4}{4a_{11}N_2}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{3.49}$$

agora somamos (3.48) e (3.49), então

$$\frac{\alpha|a_{12}|}{16a_{11}N_2}||w_x||^2 + \frac{\alpha}{4}||u_x||^2 \leq (\frac{\rho_1\alpha}{16a_{11}N_2M} + \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N})||\eta||^2 + (\frac{\alpha C_4}{4a_{11}N_2} + C_2)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}},$$

definimos $C_5 = \min\{\frac{\alpha|a_{12}|}{16a_{11}N_2}, \frac{\alpha}{4}\} > 0$ e $C_6 = \frac{\alpha C_4}{4a_{11}N_2} + C_2 > 0$, logo obtemos

$$C_5(||w_x||^2 + ||u_x||^2) \leq (\frac{\rho_1\alpha}{16a_{11}N_2M} + \frac{|a_{12}|\rho_2}{4N})||\eta||^2 + C_6||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.50}$$

Por outro lado multiplicamos por w a equação (3.38) e aplicando (3.36) deduzimos que

$$-\rho_2\langle\eta,\eta\rangle - \rho_2\langle\eta, f_2\rangle + a_{12}\langle u_x, w_x\rangle + a_{22}\langle w_x, w_x\rangle = \langle f_4, w\rangle$$

e aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\rho_2||\eta||^2 \leq (|a_{12}| + a_{22})(||u_x||^2 + ||w_x||^2) + C_7||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

e multiplicando por constantes positivas, obtemos

$$\frac{\rho_2C_5(|a_{12}| + a_{22})^{-1}}{2}||\eta||^2 \leq \frac{C_5}{2}(||u_x||^2 + ||w_x||^2) + \frac{C_5C_7}{2}(|a_{12}| + a_{22})^{-1}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.51}$$

Escolhemos

$$\begin{aligned} M &= \frac{\rho_1\alpha(|a_{12}| + a_{22})}{4\rho_2a_{11}C_5N_2} > 0 \\ N &= 2|a_{12}|(|a_{12}| + a_{22})C_5^{-1} > 0, \end{aligned}$$

agora somamos os extremos correspondentes das desigualdades (3.50) e (3.51) para obter

$$\frac{C_5}{2}(||u_x||^2 + ||w_x||^2) + \frac{\rho_2C_5(|a_{12}| + a_{22})^{-1}}{8}||\eta||^2 \leq (C_6 + \frac{C_5C_7}{2}(|a_{12}| + a_{22})^{-1})||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.52}$$

Definimos as constantes positivas C_8 e C_9 sendo como

$$\begin{aligned} C_8 &= \min\{\frac{C_5}{2}, \frac{\rho_2C_5(|a_{12}| + a_{22})^{-1}}{8}, 1\} \\ C_9 &= C_6 + \frac{C_5C_7}{2}(|a_{12}| + a_{22})^{-1} + \frac{C_0}{b_{11}} \end{aligned}$$

logo, aplicando estas definições e (3.47) na desigualdade (3.52) deduzimos que

$$C_8(||u_x||^2 + ||w_x||^2 + ||v||^2 + ||\eta||^2) \leq C_9||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.53}$$

Implicando que existe uma constante positiva $C > 0$ independente de U , F e λ tal que

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}$$

□

Proposição 3.4.2. *O semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ é exponencialmente estável.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$, pelo argumentado na demonstração do lema (3.3.1), isto é, deve existir uma sequência $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} |\lambda_n| < |\omega| \ , \\ \lambda_n \to \omega \qquad \text{quando } n \to \infty \end{cases} \tag{3.54}$$

e duas sequências de vetores $U_n = (u_n, w_n, v_n, \eta_n) \in D(\mathcal{A})$ e $F_n = (f_n, g_n, h_n, p_n) \in \mathcal{H}$ tais que

$$\begin{cases} (i\lambda_n \mathcal{I} - \mathcal{A})U_n & = & F_n \\ \quad ||U_n||_{\mathcal{H}} & = & 1 \\ \quad F_n \to 0 & \text{em} & \mathcal{H} \ \text{ quando } n \to \infty, \end{cases} \tag{3.55}$$

e usando a desigualdade do lema (3.4.1), obtemos que

$$||U_n||_{\mathcal{H}} \leq C||F_n||_{\mathcal{H}}$$

e aplicando (3.55), obtemos

$$1 = ||U_n||_{\mathcal{H}} \leq C||F_n||_{\mathcal{H}} \to 0$$

quando $n \to +\infty$, o qual é absurdo. Por tanto

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(A).$$

Logo o lema (3.4.1) implica

$$\limsup_{|\lambda| \to +\infty} \|(i\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$$

e usando o teorema (1.4.5) obtemos a estabilidade exponencial do semigrupo. □

Proposição 3.4.3. *O semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ não pode-se estender analiticamente.*

Demonstração. Seja $F = \big(0, 0, 0, sen(\frac{n\pi}{l}x)\big) \in \mathcal{H}$. Consideremos a equação espectral

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F \ ,$$

que em termos de suas componentes se escreve

$$i\lambda u - v = 0 \tag{3.56}$$

$$i\lambda w - \eta = 0 \tag{3.57}$$

$$i\lambda\rho_1 v - (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta)_{xx} = 0 \tag{3.58}$$

$$i\lambda\rho_2 \eta - (a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta)_{xx} = \rho_2 sen(\frac{n\pi}{l}x) \tag{3.59}$$

aplicando (3.56) e (3.57) em (3.58) e (3.59), obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda^2\rho_1 u - (a_{11}u + a_{12}w + ib_{11}\lambda u + ib_{12}\lambda w)_{xx} &= 0 \\
-\lambda^2\rho_2 w - (a_{12}u + a_{22}w + ib_{12}\lambda u + ib_{22}\lambda w)_{xx} &= \rho_2 sen(\frac{n\pi}{l}x).
\end{aligned}$$

lembremos que B é uma matriz singular e que $b_{12} = 0$, assim

$$-\lambda^2\rho_1 u - (a_{11}u + a_{12}w + ib_{11}\lambda u)_{xx} = 0 \tag{3.60}$$

$$-\lambda^2\rho_2 w - (a_{12}u + a_{22}w)_{xx} = \rho_2 sen(\frac{n\pi}{l}x). \tag{3.61}$$

Como $u, w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$, podemos considerar as funções

$$\begin{aligned}
u &= Asen(\frac{n\pi}{l}x) \\
w &= Bsen(\frac{n\pi}{l}x),
\end{aligned}$$

aplicando estas igualdades em (3.60) e (3.61), e denotando $\nu = \frac{n\pi}{l}$, obtemos

$$\begin{aligned}
-\lambda^2\rho_1 A + a_{11}\nu^2 A + a_{12}\nu^2 B + ib_{11}\lambda\nu^2 A &= 0 \\
-\lambda^2\rho_2 B + a_{12}\nu^2 A + a_{22}\nu^2 B - \rho_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases}
A[-\lambda^2\rho_1 + a_{11}\nu^2 + ib_{11}\lambda\nu^2] + a_{12}\nu^2 B = 0 \\
a_{12}\nu^2 A + B[a_{22}\nu^2 - \lambda^2\rho_2] - \rho_2 = 0.
\end{cases} \tag{3.62}$$

Definimos

$$\lambda_\nu = \sqrt{\frac{a_{22}}{\rho_2}}\nu \ . \tag{3.63}$$

Aplicando esta notação em (3.62), obtemos

$$\begin{cases}
A = \dfrac{\rho_2}{a_{12}\nu^2} \\
\\
B = (\dfrac{a_{22}\rho_1 - a_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\dfrac{1}{\nu^2} - i\sqrt{a_{22}\rho_2}(\dfrac{b_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\dfrac{1}{\nu} \ .
\end{cases} \tag{3.64}$$

Lembremos que $w = Bsen(\nu x)$, e aplicando (3.64) em (3.57), obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda_\nu\eta_\nu &= -\lambda_\nu^2 w \\
&= -\lambda_\nu^2 Bsen(\nu x) \\
&= -\lambda_\nu^2\left((\frac{a_{22}\rho_1 - a_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\frac{1}{\nu^2} - i\sqrt{a_{22}\rho_2}(\frac{b_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\frac{1}{\nu}\right) sen(\nu x)
\end{aligned}$$

Agora aplicando (3.63), temos

$$\begin{aligned} i\lambda_\nu \eta_\nu &= -\frac{a_{22}}{\rho_2}\nu^2\left((\frac{a_{22}\rho_1 - a_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\frac{1}{\nu^2} - i\sqrt{a_{22}\rho_2}(\frac{b_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\frac{1}{\nu}\right) sen(\nu x) \\ &= -\frac{a_{22}}{\rho_2}\left((\frac{a_{22}\rho_1 - a_{11}\rho_2}{a_{12}^2}) - i\sqrt{a_{22}\rho_2}(\frac{b_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\nu\right) sen(\nu x) \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^l |i\lambda_\nu \eta_\nu|^2 dx\right)^{1/2} &\geq \frac{a_{22}}{\rho_2}\left| (\frac{a_{22}\rho_1 - a_{11}\rho_2}{a_{12}^2}) - i\sqrt{a_{22}\rho_2}(\frac{b_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\nu \right| \sqrt{l/2} \\ &\geq \frac{a_{22}}{\rho_2}\sqrt{a_{22}\rho_2}(\frac{b_{11}\rho_2}{a_{12}^2})\sqrt{l/2}\nu \longrightarrow \infty \ , \end{aligned}$$

quando $\nu \to \infty$. Pela definição de $||.||_{\mathcal{H}}$ e lembrando que

$$i\lambda U_\nu = (i\lambda u_\nu, i\lambda w_\nu, i\lambda v_\nu, i\lambda \eta_\nu) \in D(\mathcal{A}) \ ,$$

deduzimos que

$$||i\lambda_\nu U_\nu||_{\mathcal{H}} = ||i\lambda_\nu (i\lambda_\nu \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} F_\nu||_{\mathcal{H}} \longrightarrow \infty \ , \tag{3.65}$$

quando $\nu \to \infty$. O que implica, pelo teorema (1.4.9), que o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ não pode-se estender analiticamente. □

Caso II: $b_{12} \neq 0$

Neste caso temos $b_{11}b_{22} = b_{12}^2 > 0$. Definimos:

- $\xi := b_{11} + b_{22} > 0$
- $p_{11} := \sqrt{\frac{b_{11}}{\xi}} > 0$
- $p_{12} := \frac{b_{12}}{|b_{12}|}\sqrt{\frac{b_{22}}{\xi}} \neq 0.$

Logo, obtemos

$$p_{11}^2 + p_{12}^2 = 1 \tag{3.66}$$

e

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & -p_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & -p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Denotemos por P à matriz ortogonal $[p_{ij}]$ e por D à matriz diagonal tais que

$$P^{-1} = P, \quad PDP = B. \tag{3.67}$$

Proposição 3.4.4. *Seja B uma matriz simétrica singular com $b_{11} > 0$. Então o semigrupo $e^{t\mathcal{A}}$ não é analítico.*

Demonstração. Seja $F = \Big(0, 0, \frac{g_1}{\rho_1} sen(\frac{n\pi}{l}x), \frac{g_2}{\rho_2} sen(\frac{n\pi}{l}x)\Big) \in \mathcal{H}$. Consideremos a equação espectral

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F\ ,$$

que en termos de suas componentes se escreve

$$i\lambda u - v \;=\; 0 \tag{3.68}$$

$$i\lambda w - \eta \;=\; 0 \tag{3.69}$$

$$i\lambda\rho_1 v - (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta)_{xx} \;=\; g_1 sen(\frac{n\pi}{l}x) \tag{3.70}$$

$$i\lambda\rho_2 \eta - (a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta)_{xx} \;=\; g_2 sen(\frac{n\pi}{l}x). \tag{3.71}$$

Aplicando (3.68) e (3.69) em (3.70) e (3.71), obtemos

$$-\lambda^2\rho_1 u - (a_{11}u + a_{12}w + ib_{11}\lambda u + ib_{12}\lambda w)_{xx} \;=\; g_1 sen(\frac{n\pi}{l}x) \tag{3.72}$$

$$-\lambda^2\rho_2 w - (a_{12}u + a_{22}w + ib_{12}\lambda u + ib_{22}\lambda w)_{xx} \;=\; g_2 sen(\frac{n\pi}{l}x). \tag{3.73}$$

Por outro lado, como $u, w \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$, podemos considerar as funções

$$u_\nu = A_\nu \text{sen}\,(\nu x)$$

$$w_\nu = B_\nu \text{sen}\,(\nu x)$$

onde $\nu = \frac{n\pi}{l}$ e colocando estas funções em (3.72) e (3.73) obtemos que

$$\begin{aligned} -\lambda^2\rho_1 A_\nu + a_{11}\nu^2 A_\nu + a_{12}\nu^2 B_\nu + ib_{11}\lambda\nu^2 A_\nu + ib_{12}\lambda\nu^2 B_\nu - g_1 &= 0 \\ -\lambda^2\rho_2 B_\nu + a_{12}\nu^2 A_\nu + a_{22}\nu^2 B_\nu + ib_{12}\lambda\nu^2 A_\nu + ib_{22}\lambda\nu^2 B_\nu - g_2 &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} A_\nu[-\lambda^2\rho_1 + a_{11}\nu^2 + ib_{11}\lambda\nu^2] + B_\nu[a_{12}\nu^2 + ib_{12}\lambda\nu^2] - g_1 = 0 \\ A_\nu[a_{12}\nu^2 + ib_{12}\lambda\nu^2] + B_\nu[-\lambda^2\rho_2 + a_{22}\nu^2 + ib_{22}\lambda\nu^2] - g_2 = 0. \end{cases} \tag{3.74}$$

Podemos reescrever (3.74) como

$$-\lambda^2\Phi X_\nu + \nu^2 A X_\nu + i\lambda\nu^2 B X_\nu = G \tag{3.75}$$

tal que:

- $X_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu \\ B_\nu \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$.

Então, para $Y_\nu = PX_\nu = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_\nu \\ \widetilde{B}_\nu \end{pmatrix}$, de (3.67) e (3.75), temos que

$$-\lambda^2 P\Phi PY_\nu + \nu^2 PAPY_\nu + i\lambda\nu^2 DY_\nu = PG. \tag{3.76}$$

Introduzimos também as seguintes notações:

- $PAP := \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}$

- $P\Phi P := \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$

- $PG := \begin{pmatrix} \widetilde{g}_1 \\ \widetilde{g}_2 \end{pmatrix}$.

Além disso, aplicando (3.66), obtemos as seguintes identidades:

- $\widetilde{a}_{11} = a_{11}p_{11}^2 + 2a_{12}p_{12}p_{11} + a_{22}p_{12}^2 = \mathcal{Q}_A(p_{11}, p_{12}) > 0$

- $\widetilde{a}_{22} = a_{11}p_{12}^2 - 2a_{12}p_{12}p_{11} + a_{22}p_{11}^2 = \mathcal{Q}_A(p_{12}, -p_{11}) > 0$

- $s_{11} = \rho_1 p_{11}^2 + \rho_2 p_{12}^2 > 0$

- $s_{22} = \rho_1 p_{12}^2 + \rho_2 p_{11}^2 > 0$

- $s_{12} = p_{11}p_{12}(\rho_1 - \rho_2)$.

Observação 3.4.5. *Devido a que o objetivo é obter uma sequência de números reais $\{\lambda_\nu\} \subset \mathbb{R}$ e uma sequência de vetores $\{F_\nu\} \subset \mathcal{H}$ tais que*

$$||\lambda_\nu(i\lambda_\nu\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}F_\nu||_{\mathcal{H}} \to \infty \text{ quando } \nu \to \infty, \tag{3.77}$$

para facilitar os cálculos e obter (3.77), consideraremos:

$$\rho_1 = \rho_2 \ .$$

Suponhemos que o caso $\rho_1 \neq \rho_2$ vai ter o mesmo comportamento.

Aplicando as notações, identidades acima e considerando $\rho_1 = \rho_2$ em (3.76) obtemos que:

$$\begin{cases} \widetilde{A}_\nu[-\lambda^2 s_{11} + \widetilde{a}_{11}\nu^2 + i\xi\lambda\nu^2] + \widetilde{B}_\nu[\widetilde{a}_{12}\nu^2] & = & \widetilde{g}_1 \\ \widetilde{A}_\nu[\widetilde{a}_{12}\nu^2] + \widetilde{B}_\nu[\widetilde{a}_{22}\nu^2 - \lambda^2 s_{22}] & = & \widetilde{g}_2. \end{cases} \tag{3.78}$$

Se $\widetilde{a}_{12} \neq 0$ **:**

Escolhemos

$$\lambda_\nu := \sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}}}\nu \ , \tag{3.79}$$

$$G := \begin{pmatrix} p_{12} \\ -p_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.80}$$

Aplicando esta notação em (3.78), obtemos

$$\begin{cases} \widetilde{A}_\nu & = & \dfrac{1}{\widetilde{a}_{12}\nu^2} \\ \\ \widetilde{B}_\nu & = & \dfrac{\widetilde{a}_{22} - \widetilde{a}_{11}}{\widetilde{a}_{12}^2}\dfrac{1}{\nu^2} - i\sqrt{\dfrac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}}}\dfrac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2}\dfrac{1}{\nu} \ . \end{cases} \tag{3.81}$$

Como, $PY_\nu = X_\nu$, isto é,

$$\nu^2 A_\nu = p_{11}\nu^2\widetilde{A}_\nu + p_{12}\nu^2\widetilde{B}_\nu \tag{3.82}$$

$$\nu^2 B_\nu = p_{12}\nu^2\widetilde{A}_\nu - p_{11}\nu^2\widetilde{B}_\nu \ , \tag{3.83}$$

então

$$\begin{aligned} \nu^2 A_\nu &= \frac{p_{11}}{\widetilde{a}_{12}} + p_{12}\left(\frac{\widetilde{a}_{22} - \widetilde{a}_{11}}{\widetilde{a}_{12}^2} - i\sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}}}\frac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2}\nu\right) \\ \nu^2 B_\nu &= \frac{p_{12}}{\widetilde{a}_{12}} - p_{11}\left(\frac{\widetilde{a}_{22} - \widetilde{a}_{11}}{\widetilde{a}_{12}^2} - i\sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}}}\frac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2}\nu\right) \ , \end{aligned}$$

logo

$$\nu^2|A_\nu| \geq |p_{12}|\sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}}}\frac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2}\nu \tag{3.84}$$

$$\nu^2|B_\nu| \geq p_{11}\sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}}}\frac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2}\nu \ . \tag{3.85}$$

Lembremos que $p_{11} > 0$, $w_\nu = B_\nu \text{sen}\,(\nu x)$ e aplicando (3.85), de (3.69) obtemos

$$\begin{aligned} ||i\lambda_\nu \eta_\nu||_{L^2(0,l)} &= \lambda_\nu^2 ||w_\nu||_{L^2(0,l)} \\ &= \lambda_\nu^2 |B_\nu| ||\text{sen}\,(\nu x)||_{L^2(0,l)} \\ &= \frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}} \sqrt{\frac{l}{2}} \nu^2 |B_\nu| \\ &\geq p_{11} \left(\sqrt{\frac{l}{2}} \left(\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2} \right) \nu. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\int_0^l |i\lambda_\nu \eta_\nu|^2 dx \right)^{1/2} \geq p_{11} \left(\sqrt{\frac{l}{2}} \left(\frac{\widetilde{a}_{22}}{s_{22}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\xi}{\widetilde{a}_{12}^2} \right) \nu \longrightarrow \infty,$$

quando $\nu \to \infty$. Pela definição de $||.||_{\mathcal{H}}$ e lembrando que

$$i\lambda U_\nu = (i\lambda u_\nu, i\lambda w_\nu, i\lambda v_\nu, i\lambda \eta_\nu) \in D(\mathcal{A}) \ ,$$

deduzimos que

$$||i\lambda_\nu U_\nu||_{\mathcal{H}} = ||i\lambda_\nu (i\lambda_\nu \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} F_\nu||_{\mathcal{H}} \longrightarrow \infty \ , \tag{3.86}$$

quando $\nu \to \infty$. O que implica, pelo teorema (1.4.9), que o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ não pode-se extender analíticamente.

Se $\widetilde{a}_{12} = 0$:

Neste caso, escolhemos

$$G = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{12} - p_{11} \end{pmatrix}$$

Logo, de (3.78), temos

$$\begin{cases} \widetilde{A}_\nu [-\lambda^2 s_{11} + \widetilde{a}_{11} \nu^2 + i\xi\lambda\nu^2] &= 1 \\ \widetilde{B}_\nu [\widetilde{a}_{22} \nu^2 - \lambda^2 s_{22}] &= 1, \end{cases} \tag{3.87}$$

e tomamos

$$\lambda_\nu := \sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22} \nu^2 - 1}{s_{22}}} > 0 \ , \tag{3.88}$$

para todo $\nu \geq \nu_0 \in \mathbb{N}$. Então $\widetilde{B}_\nu = 1$, além disso, de (3.87), obtemos

$$\nu^2 \widetilde{A}_\nu = \frac{1}{\nu^{-2} + (\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{22}) + i\xi \sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}\nu^2 - 1}{s_{22}}}}.$$

Logo,

$$|\widetilde{A}_\nu| \leq \nu^2|\widetilde{A}_\nu| \leq \frac{1}{\xi\sqrt{\frac{\widetilde{a}_{22}\nu^2-1}{s_{22}}}} \longrightarrow 0, \tag{3.89}$$

quando $\nu \to \infty$ e

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu^2|\widetilde{B}_\nu| = \infty. \tag{3.90}$$

Das identidades (3.82) e (3.83), obtemos

$$\begin{aligned} |A_\nu| &\geq |p_{12}||\widetilde{B}_\nu| - p_{11}|\widetilde{A}_\nu| && (3.91)\\ |B_\nu| &\geq p_{11}|\widetilde{B}_\nu| - |p_{12}||\widetilde{A}_\nu| \ . && (3.92) \end{aligned}$$

Como $p_{11} > 0$, $w_\nu = B_\nu \mathrm{sen}\,(\nu x)$ e aplicando (3.89)-(3.92), obtemos

$$\begin{aligned} ||i\lambda_\nu\eta_\nu||_{L^2(0,l)} &= \lambda_\nu^2||w_\nu||_{L^2(0,l)}\\ &= \lambda_\nu^2|B_\nu|||\mathrm{sen}\,(\nu x)||_{L^2(0,l)}\\ &= \frac{\widetilde{a}_{22}\nu^2-1}{s_{22}}\sqrt{\frac{l}{2}}|B_\nu|\\ &\geq (p_{11} - |p_{12}||\widetilde{A}_\nu|)\sqrt{\frac{l}{2}}\left(\frac{\widetilde{a}_{22}\nu^2-1}{s_{22}}\right) \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

quando $\nu \to \infty$. Pela definição de $||.||_{\mathcal{H}}$ deduzimos que

$$||i\lambda_\nu U_\nu||_{\mathcal{H}} = ||i\lambda_\nu(i\lambda_\nu\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}F_\nu||_{\mathcal{H}} \longrightarrow \infty\ , \tag{3.93}$$

quando $\nu \to \infty$. O que implica, pelo teorema (1.4.9), que o semigrupo de operadores gerado por $\mathcal{A}$ não pode-se estender analiticamente.

□

Capítulo 4

Conclusões

A teoria linear para misturas de sólidos estuda os deslocamentos das partículas de uma viga unidimensional, resultado da mistura de dois sólidos, com densidades de massa $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, estabelecendo os sistemas (2.1)-(2.4) e (3.1)-(3.4), com A e B matrizes simétricas, para tal estudo. Se denotamos $U = (u, w, u_t, w_t)$, então tais sistemas podem-se escrever como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}U & = & U_t \\ U(0) & = & U_0 \ . \end{array} \right.$$

Definimos a energia do sistema, $E_(t)$, como sendo:

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^l [\mathcal{Q}_A(u_x, w_x) + \rho_1|u_t|^2 + \rho_2|w_t|^2]dx.$$

Se $A \succ 0$, então $E(t) > 0$. O espaço de fase $\mathcal{H}$ é aquele onde a energia do sistema está bem definida. Isto é,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} & = & H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l). \\ E(t) & = & \frac{1}{2}||(u, w, u_t, w_t)||^2_{\mathcal{H}}. \end{array}$$

Para obter soluções globais fortes tomamos os dados iniciais $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1) \in D(\mathcal{A})$.

Definimos, formalmente, a dissipação do sistema como a variação da energia no tempo, isto é,

$$\frac{dE}{dt}(t) := Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \ .$$

Quando $B \succeq 0$ a dissipação dos sistemas (2.1)-(2.4) e (3.1)-(3.4) são dados, respectivamente, por:

- **Mistura de sólidos elástica-friccional**

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{tt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{xx} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{t} \tag{4.1}$$

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l \mathcal{Q}_B(u_t, w_t)dx \leq 0.$$

- **Mistura de sólidos Viscoelástica**

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{tt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{xx} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{xxt} \tag{4.2}$$

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l \mathcal{Q}_B(u_{xt}, w_{xt})dx \leq 0.$$

Casos Particulares:

- **Mistura de sólidos elástica-semifriccional**

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{tt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{xx} - \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{t} \tag{4.3}$$

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l b_{11}|u_t|^2 dx \leq 0.$$

- **Mistura de sólidos elástica-semiviscosa**

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{tt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{xx} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{xxt} \tag{4.4}$$

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^l b_{11}|u_{xt}|^2 dx \leq 0.$$

Os resultados obtidos nos capítulos anteriores podem ser estabelecidos da seguinte forma:

Existência e Unicidade

A. Sejam $A \succ 0$ e B uma matriz qualquer. Então, para todo $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1) \in \mathcal{H}$ existe uma única solução $U(t) = (u, w, u_t, w_t)$ de (4.1) satisfazendo:

$$u, w \in C([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty); L^2(0,l)).$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, isto é

$$\begin{aligned} (u_0, w_0) &\in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l) \times H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l) \\ (u_1, w_1) &\in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \end{aligned}$$

então

$$u, w \in C([0,\infty); H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty); L^2(0,l)).$$

B. Sejam $A \succ 0$ e $B \succeq 0$. Então, para todo $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1) \in \mathcal{H}$ existe uma única solução $U(t) = (u, w, u_t, w_t)$ de (4.2) satisfazendo

$$u, w \in C([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty); L^2(0,l)).$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, isto é

$$(u_0, w_0, u_1, w_1) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$$

$$\begin{aligned} a_{11}u_0 + a_{12}w_0 + b_{11}u_1 + b_{12}w_1 &\in H^2(0,l) \\ a_{12}u_0 + a_{22}w_0 + b_{12}u_1 + b_{22}w_1 &\in H^2(0,l) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} u, w &\in C^1([0,\infty); H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty); L^2(0,l)) \\ a_{11}u + a_{12}w + b_{11}u_t + b_{12}w_t &\in C([0,\infty); H^2(0,l)) \\ a_{12}u + a_{22}w + b_{12}u_t + b_{22}w_t &\in C([0,\infty); H^2(0,l)). \end{aligned}$$

Comportamento Assintótico

C. Se $B \equiv 0$, então a solução $U = (u, w, u_t, w_t)$ satisfaz:

$$||(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t))||_{\mathcal{H}} = ||(u_0, w_0, u_1, w_1)||_{\mathcal{H}}, \ \forall\, t > 0.$$

Portanto, $E(t) \equiv E(0)$ e no contexto mecânico o sistema é chamado de conservativo.

D. Se $B \succ 0$, então a solução do sistema (4.1) decai exponencialmente.

E. Se B é uma matriz singular com $\max\{b_{11}, b_{22}\} > 0$, então a solução do sistema (4.1) decai exponencialmente se, e somente se, $2\gamma r - \alpha\widetilde{b}^2 > 0$, onde as constantes $\gamma, \alpha, \widetilde{b}$ e r foram definidas nos lemas (2.5.1)-(2.5.3). No caso particular, temos que a solução do sistema (4.3) decai exponencialmente se, e somente se, $a_{12} \neq 0$.

O comportamento assintótico das soluções, apresentadas nas conclusões D e E, são caracterizadas por uma taxa ótima, $\gamma_0 > 0$, que é determinada pelas densidades ρ_1 e ρ_2 e as matrizes A e B. Isto é, para todo $(u_0, w_0, u_1, w_1) \in \mathcal{H}$, tem-se

$$||(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t))||_{\mathcal{H}} \leq M||(u_0, w_0, u_1, w_1)||_{\mathcal{H}} e^{-\gamma_0 t}.$$

Onde:

$$-\gamma_0 = \sup \{ \ Re(\lambda); \ q_n(\lambda) = 0, \ n \in \mathbb{N} \ \},$$

$$q_n(\lambda) = \rho_1\rho_2\lambda^4 + (\rho_1 b_{22} + \rho_2 b_{11})\lambda^3 + (\rho_1 a_{22} + \rho_2 a_{11})(\frac{n\pi}{l})^2\lambda^2 + \lambda^2 \det B$$
$$+(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})(\frac{n\pi}{l})^2\lambda + (\frac{n\pi}{l})^4 \det A.$$

F. Se $B \succ 0$, então o semigrupo associado ao sistema (4.2) é analítico. Além disso, se $\det B = 0$, então o semigrupo associado ao sistema (4.2) não possui extensão analítica.

G. Se $b_{11} > 0$ e $a_{12} \neq 0$, então a solução do sistema (4.4) possui decaimento exponencial.

Como Analiticidade implica decaimento exponencial e (PCDE), também concluímos que:

H. Se $B \succ 0$, então para todo $U_0 \in \mathcal{H}$ a solução do sistema (4.2) possui decaimento exponencial. Além disso, o semigrupo associado satisfaz o princípio da estabilidade linear.

I. No caso em que $B \succ 0$ a solução, $U(t)$, do sistema (4.2) apresenta um efeito regularizante devido à analiticidade do semigrupo associado. Isto é:

$$U(t) \in D(\mathcal{A}^\infty) = \cap_{i=0}^{\infty} D(\mathcal{A}^i).$$

Referências

[1] AMARI K. , LIU Z. and TUCSNAK M. **Decay rates for a beam with pointwise force and moment feedback**. Math. Control Signals Systems 15, 229-255, 2002.

[2] ATKIN, R.J. and CRAINE, R.E. **Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development**. Quat. J. Mech. Appl. Math. 29, 209-243, 1976.

[3] BREZIS, H. **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.

[4] DUNFORT, N. and SCHWARTZ J. T. **Linear Operators**. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[5] HILLE E. and PHILLIPS R. S. **Functional Analysis and Semigroups**. Amer. Math. Sic. Colloq. Publ., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1957.

[6] HUANG, F. L. **Strong asymptotic stability theory for linear dynamical systems in Banach spaces**. JDE, Vol. 104, 307-324, 1993.

[7] IESAN, D. **On the theory of mixtures of thermoelastic solids**. J. Thermal Stresses 14, 389-408, 1991.

[8] IESAN, D. and QUINTANILLA, R. **A theory of porous thermoviscoelastic mixtures**. Jour. Therm. Stress. 30, 693-714, 2007.

[9] IESAN, D. and QUINTANILLA, R. **On a theory of thermoelasticity with microtemperatures**. Jour. Therm. Stress. 23, 199-215, 2000.

[10] KESAVAN, S. **Topics in Functional Analysis and Applications**. Jhon Wiley and Sons, New Delhi, 1989.

[11] LIU Z. and RAO B. **Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation**. Z. angew. Math. Phys. Nro. 56, pp 630-644, 2005.

[12] LIU Z. and ZHENG S. **Semigroups associated with dissipative systems**. CHAPMAN and HALL/CRC, 1999.

[13] LITTMAN W. and LIU B. **On the spectral problems and stabilization of acoustic flow**. SIAM J. Appl. Math. 59, 17-34, 1998.

[14] LOVE, A. E. H. **Mathematical Theory of Elasticity**. Dover Publications, fourth edition, New York, 1944.

[15] MILLER R. K. and MICHEL A. N. **Ordinary Differential Equations**. Academic Press, New York, 1982.

[16] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Tópicos em Termoelasticidade e Viscoelasticidade**. Rio de Janeiro, LNCC, 1997.

[17] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Teoria das distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, LNCC, 1999.

[18] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Estabilização de semigrupos e aplicações**. Série de métodos matemáticos, LNCC, 2008.

[19] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity**. Funkcialaj Ekvacioj, Nro.35, pp 19-30, 1992.

[20] MUÑOZ RIVERA, J. E. and ALVES M. S. **Analyticity of semigroups associated with thermoviscoelastic mixtures of solids**. Journal of thermal stresses Nro. 32, pp 986-1004, 2009.

[21] MUÑOZ RIVERA, J. E. and QUINTANILLA R. **Exponential decay in thermoelastic mixture of solids**. Internacional Journal of Solids and Structures Nro. 46, pp 1659-1666, 2009.

[22] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.

[23] PRÜSS, J. **On the Spectrum of C_0-Semigroups**. Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro. 2, pp 847-857, 1984.

[24] PRÜSS, J. , BATKAI A. , ENGEL K. and SCHNAUBELT R. **Polynomial stability of operator semigroups**. Match. Nachr., 279, Nro. 1, pp 1425-1440, 2006.

[25] RENARDY, M. **On the Type of Certain C_0-Semigroups**. Commun. in Partial Diferential Equations, 18(7-8), pp 1299-1307, 1993.

[26] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw Hill, 2da edição, 1974 (tradução ao espanhol, Alhabama 1979).

[27] YOSIDA K. **Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.