PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EM ESPAÇOS PRODUTO DE ESFERA COM FORMAS ESPACIAIS DE CURVATURA CONSTANTE

Thiago Lourenço Pires

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Walcy Santos

Rio de Janeiro

Maio de 2010

PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EM ESPAÇOS PRODUTO DE ESFERA COM FORMAS ESPACIAIS DE CURVATURA CONSTANTE

Thiago Lourenço Pires

Orientadora: Walcy Santos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

_____

Presidente, Profa. Walcy Santos - IM/UFRJ

_____

Prof. Abdênago Alves de Barros - MAT/UFC

_____

Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza - IM/UFRJ

_____

Prof. Maria Fernanda Elbert - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

Maio de 2010

À Renata.

Agradecimentos

A Deus por todas as bençãos conquistadas até hoje.

À Professora Walcy Santos por todas as oportunidades que me deu ao longo da minha vida acadêmica, e por acreditar na minha capacidade até nos momentos em que eu mesmo duvidei.

À minha companheira Renata que esteve ao meu lado em todos os momentos, tanto apoiando quanto cobrando.

Aos meus parentes que sempre incentivaram a minha formação matemática.

Aos amigos e colegas de mestrado que compartilharam seus conhecimentos comigo ao longo dos últimos anos.

Aos meus amigos de arquibancada que no final de 2009 me mostraram, junto com todo time do Fluminense, que nada é impossível quando nos dedicamos ao máximo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho foi estudar as regiões isoperimétricas para espaços da forma $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$ onde $\mathbb{Q}_c^2$ denota as formas espaciais de curvatura $c = 0$, 1 ou -1 e dimensão dois, com $r > 0$.

Seguindo a abordagem de [PR] e [H] usamos argumentos de simetria para estabelecer um sistema de equações diferenciais ordinárias que deve ser satisfeito pelas fronteiras das candidatas a solução do problema isoperimétrico.

Após isso, usando argumentos sobre estabilidade e conexidade, obtemos as regiões isoperimétricas em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$, e ao final do texto calculamos a função Perfil Isoperimétrico explicitamente para os espaços em questão.

Abstract

The main purpose of this job is to study the isoperimetric regions in the Riemannian products $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}^2_C$ where $\mathbb{Q}^2_c$ is the 2-dimensional simply, connected space form of constante sectional curvature $c = 0$, 1, -1 and $r > 0$.

Following the same approach as in [PR] e [H], we use symmetry arguments to establish a system of ordinary differential equations that must be satisfied by the candidates solutions of the isoperimetric problem.

Then, using stability and connectedness arguments, we obtain the isoperimetric regions in $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}^2_C$, and at the end of the text we calculate the isoperimetric profile for these espaces.

Sumário

1 Preliminares **5**

2 Variedades Invariantes por transformações ortogonais **16**

3 Estabilidade das Hipersuperfícies de curvatura média constante **36**

4 Fronteiras de Domínios Isoperimétricos **47**

5 Domínios isoperimétricos: Caso Euclidiano em dimensão dois **49**

6 Domínios isoperimétricos: Casos Esférico e Hiperbólico de duas dimensões **59**

Introdução

Esse trabalho tem como objetivo principal o estudo dos domínios isoperimétricos em produtos Riemannianos de círculos com os espaços de curvatura seccional constante $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{S}^2(r)$.

Dado uma variedade Riemanniana (M^n, g), o problema de, fixado um n-volume V, descobrir qual a região $\Omega \in M^n$ de volume V cuja fronteira $\partial\Omega$ tem o menor $(n-1)$-volume é chamado problema isoperimétrico. Uma região isoperimétrica é uma região que é solução do problema isoperimétrico.

O problema original, no plano, tem o seguinte enunciado: Fixado um número $R > 0$, entre todas as regiões do plano limitadas por uma curva fechada de comprimento R, quais são aquelas que abrangem a maior área.

A solução desse problema (o círculo) já era conhecida pelas civilizações clássicas da antiguidade. De fato, um dos seus relatos mais antigos conhecidos é o do poeta Virgílio (70-19 a.C) em Eneida, sobre as aventuras da Rainha Dido de Cartago. Segundo a lenda, a então princesa Dido da cidade fenícia de Tiro se refugiou na costa do mediterrâneo, no norte da África, após a morte de seu marido Siqueu.

Lá chegando ela negociou com Jarbas, rei da Numídia para conseguir um lugar onde morar. O arranjo que conseguiu com o rei foi que só teria em terras o que pudesse abranger com a pele de um boi. Dido e seu grupo decidiram então cortar a pele em tiras tão finas quanto possível, emendar todas e englobar num semicírculo um terreno beirando o mar. Ao estender o couro dessa forma ela obteve a máxima área possível e estabeleceu o que veio a se tornar o Estado de Cartago (atual Tunísia) em 850 a.C, futuro grande rival de Roma.

Seguindo a história da humanidade pode se notar que o formato circular

(ou semicircular às margens dos rios) era muito comum nas cidades medievais, como Paris, por exemplo, onde era necessário a construção de muros de proteção perfazendo o perímetro das cidades e abrangendo a maior área possível e com o menor custo de produção.

Apesar da solução do problema ser conhecida há muito tempo, uma prova satisfatória para esse resultado demorou a aparecer. Apenas no final do séc. XIX Weierstrass forneceu uma demonstração da existência de solução para o problema isoperimétrico. Essa prova surgiu como corolário de uma teoria desenvolvida por ele, para lidar com problemas de maximização e minimização de certas integrais. Esta teoria é chamada Cáculo das Variações, e o problema isoperimétrico é um exemplo clássico dos problemas tratados por ela. Uma solução mais direta para esse problema surgiu poucos anos depois, podendo tal mérito ser dividido pelos matemáticos J. Steiner, responsável pela idéia geométrica de tal resolução, e H.A. Schwartz [Sw] pelo rigor da prova.

A solução do problema em $\mathbb{R}^2$ é claramente expressa pela desigualdade isoperimétrica:

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, a região em questão é um círculo.

A desigualdade para o caso esférico $\mathbb{S}^2(r)$ foi obtida por Bernstein [Ber] em 1905, com o seguinte resultado:

$$L^2 \geq 4\pi A - KA^2,$$

onde $K = 1/r^2$ é a curvatura Gaussiana de $\mathbb{S}^2(r)$, e a igualdade ocorre se, e somente se, a região é circular. E.Schmidt [Sm1] provou que a mesma desigualdade isoperimétrica vale para o plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(K)$ de curvatura Gaussiana K.

No caso dos espaços de curvatura seccional constante $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{S}^2(r)$, segue do teorema de existência e unicidade provado por Dinghas e E.Schmidt [D],[DSm],[Sm2],[Sm3]:

Para cada valor de n-volume fixo existe uma única classe de regiões isoperimétricas congruentes em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n(r)$. Essas soluções são as bolas $O(n)$-simétricas com o dado volume.

Para variedades mais gerais a regularidade das soluções (de suas fronteiras) também é um problema relevante. Temos devido a Morgan [M1], [M2] a existência de regiões isoperimétricas para espaços Riemannianos M tais que M/G é um espaço compacto (topológico), onde G é o grupo de isometria de M.

W.-T Hsiang e W.-Y Hsiang [HsH], usando argumentos de simetria e análise de equações diferenciais ordinárias, estudaram o problema isoperimétrico em produtos de formas espaciais simplesmente conexas de curvatura não positiva. As mesmas técnicas foram empregadas por Pedrosa [P] ao estudar regiões isoperimétricas no produto Riemanniano $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$.

Nesse trabalho usaremos técnicas similares para estudar o problema isoperimétrico em produtos da forma $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$, onde $\mathbb{Q}_c^2$ é a forma espacial simplesmente conexa de curvatura constante $c = 0, 1, -1$. Em seguida definiremos a função chamada de perfil isoperimétrico e a calcularemos nos espaços citados. Nos basearemos no artigo de Pedrosa e Ritoré: *"Isoperimetric Domain in the Riemannian Product of a Circle with a Simply Connected Space Form and Applications to Free Boundary Problems"* [PR].

No primeiro capítulo enunciaremos alguns resultados gerais da geometria Riemanniana e do cálculo das variações que usaremos no futuro. Além disso, faremos considerações básicas sobre as soluções do problema isoperimétrico como, por exemplo, o fato de elas terem obrigatoriamente curvatura média

constante e serem estáveis segundo conceito a ser definido em breve.

No segundo capítulo estudaremos as propriedades de simetria das soluções. Veremos que graças à invariância por transformações ortogonais das variedades produtos onde trabalhamos, podemos reduzir o espaço do nosso problema para um espaço quociente mais simples. De fato, apresentaremos o seguinte resultado : Se Ω é uma região isoperimétrica, então Ω é invariante por ação do grupo ortogonal $O(n-1)$ no segundo fator do produto $\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{Q}_c^n$. Após isso, finalizamos usando a análise dos resultados de um sistema de equações diferenciais ordinárias para obter um resultado fundamental que caracteriza os principais candidatos a solução do problema isoperimétrico para o caso onde $n = 2$.

No terceiro capítulo trataremos da estabilidade das soluções. Apresentaremos a definição de estabilidade e as propriedades básicas a ela ligadas. Usaremos isso para mostrar que os domínios isoperimétricos são conexos e assim excluiremos do conjunto das possíveis soluções alguns dos candidatos apresentados no capítulo anterior.

O quarto capítulo é apenas um resumo dos resultados apresentados nos capítulos anteriores, onde consta a caracterização definitiva dos possíveis domínios isoperimétricos em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$.

No quinto capítulo iremos definir a função perfil isoperimétrico $A(V) = inf\{vol_{n-1}(\partial\Omega) : \Omega \subset M,\, vol_n(\Omega) = V\}$, e calcularemos explicitamente essa função para o espaço $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}^2$.

Finalmente no nosso último capítulo tratemos, de forma similar ao anterior, os casos $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{H}^2$. Explicitaremos os tipos de soluções do problema isoperimétrico, e as situações onde cada uma dessas regiões são de fato soluções. Terminaremos esse trabalho calculando o perfil isoperimétrico para esses dois espaços.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos estabelecer definições e notações, bem como apresentaremos alguns resultados que serão necessários para o entendimento do trabalho. Seja (M, ds^2) uma variedade Riemanniana. Denotaremos por dA o elemento de volume associado a métrica Riemanniana ds^2. Agora consideremos uma imersão isométrica $\phi : M \to N$, onde N é uma outra variedade Riemanniana. Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões associadas as métricas de M e N respectivamente. Se ν é um campo vetorial unitário e normal a imersão, então para todo par X e Y de campos tangentes a M se verifica a seguinte equação:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)\nu,$$

onde B é a segunda forma fundamental de ϕ. O endomorfismo de Weingarten A de T_pM é dado por $A(x) = -\overline{\nabla}_x \nu$ para todo $x \in T_pM$. Os valores próprios k_i, $i = 1, 2, ..., n$ do endomorfismo de Weingarten são chamados curvaturas principais da imersão. O quadrado da norma da segunda forma fundamental B é dado por

$$|B|^2 = \sum_{i=1}^{n} {k_i}^2.$$

Definimos então a curvatura média H da imersão como

$$\sum_{i=1}^{n} k_i.$$

De acordo com essa definição, diremos que uma imersão ϕ tem curvatura média constante se a curvatura média é uma função constante em M, e que uma imersão ϕ é mínima se tem curvatura média identicamente nula em M.

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano de dimensão n; $\mathbb{S}^n(r)$ a esfera de raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, e $\mathbb{H}^n$ o espaço hiperbólico de dimensão n e curvatura constante -1.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Dado um número positivo $t < V(M)$, onde $V(M)$ denota o n-volume de M, o **problema isoperimétrico** consiste em estudar, ao longo de hipersuperfícies $\Sigma \subset M$, fronteira de uma região Ω de volume $V(\Omega) = t$, aquela que minimiza o $(n-1)$-volume $A(\Sigma)$.

Vamos então a seguinte definição:

Definição 1.0.1. *Uma região isoperimétrica Ω é uma região que é solução do problema isoperimétrico.*

Dada uma variedade M, Ric denotará a sua curvatura de Ricci. Dizemos que uma imersão $\phi : M \to N$ é um mergulho quando ϕ é um homeomorfismo entre M e $\phi(M)$. Nesse caso, diremos que a superfície M está mergulhada em N.

Seja $D \subset M$ um domínio compacto com bordo suave e $\phi : D \subset M^n \to N^{n+1}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana conexa, compacta e diferenciável. Uma variação de ϕ é uma aplicação diferenciável $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times D \to N$ tal que $\Phi_t : D \to N$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, é definida por $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$, $p \in D$, a imersão $\Phi_0 = \phi$ e $\Phi_t|_{\partial D} = \phi|_{\partial D}$, para todo t. O campo variacional associado a Φ é o campo vetorial ao longo de ϕ dado por $X(p) = d\Phi_{(0,p)}(\frac{\partial}{\partial t})$.

Diremos que uma variação é normal se o campo variacional X é normal a imersão em cada ponto. Se X tem suporte compacto diremos que a variação Φ tem suporte compacto. Para uma variação desse tipo e valores pequenos de t, temos que Φ_t é uma imersão de D em N. Nesse caso, definimos:

$$A(t) = \int_D dA_t, \tag{1.1}$$

$$V(t) = \int_D \Phi_t^*(dN), \tag{1.2}$$

onde dA_t é o elemento de área em M associado a métrica induzida pela imersão Φ_t, e dN é o elemento de volume em N. Chamaremos de $A(t)$ o funcional área, que mede em cada instante t a área de M com a métrica induzida pela imersão Φ_t. A função $V(t)$ é o volume orientado, que mede o volume entre as imersões Φ_0 e Φ_t.

Definição 1.0.2. *Diremos que uma variação Φ preserva o volume se $V(t)$ é constante para t suficientemente pequeno.*

Para os resultados básicos a seguir podemos consultar [BdC], [BdCE] e [X]. Vamos primeiramente demonstrar a fórmula da primeira variação da área. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.0.1. *Seja $A(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ uma família diferenciável de matrizes com $A(0) = Id$. Então*

$$\frac{d}{dt} det(A(t))|_{t=0} = trA'(0).$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Temos

$$det(A(t))(e_1 \wedge ... \wedge e_n) = (A(t)e_1) \wedge ... \wedge (A(t)e_n).$$

Derivando os dois lados da equação e calculando em $t = 0$ obtemos

$$(det(A(t))'e_1 \wedge ... \wedge e_n|_{t=0} = \frac{d}{dt}(A(t)e_1 \wedge ... \wedge A(t)e_n|_{t=0})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A(t)e_1 \wedge ... \wedge A'(t)e_i \wedge ... \wedge A(t)e_n|_{t=0},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge ... \wedge A'(0)e_i \wedge ... \wedge e_n|_{t=0},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge ... \wedge \langle A'(0)e_i, e_i\rangle\, e_i \wedge ... \wedge e_n|_{t=0},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle A'(0)e_i, e_i\rangle\, e_1 \wedge ... \wedge e_n,$$

$$= trA'(0)e_1 \wedge ... \wedge e_n,$$

ou seja, $\frac{d}{dt}det(A(t))|_{t=0} = trA'(0)$. □

Proposição 1.0.1. *(Fórmula da primeira variação da área). Seja Φ uma variação de ϕ com campo variacional X com suporte compacto em M e ν um campo vetorial unitário e normal a imersão. Então A é uma função diferenciável em 0 e:*

$$A'(0) = -\int_M HudA,$$

onde $u = \langle X, \nu\rangle$ e H é a curvatura média de ϕ.

Demonstração. Sejam g_t a métrica induzida em M pela imersão Φ_t, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ referencial ortonormal de M com relação a métrica g_0 e $\{w^1, w^2, ..., w^n\}$ o referencial dual de $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Se a métrica g_t é dada pelos coeficientes $g_{ij}(t)$ em relação a esse referencial, então

$$g_{ij}(t) = \langle (f_t)_* e_i, (f_t)_* e_j\rangle = g_t(e_i, e_j),$$

onde $g_t = g_{ij}(t)w^i \otimes w^j$, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Seja $g(t) = detg_{ij}(t)$. Então, $dA_t = \sqrt{g(t)}dA$ e

$$A(t) = \int_M \sqrt{g(t)}dA.$$

Assim temos

$$A'(0) = \frac{d}{dt}\int_M \sqrt{g(t)}dA = \int_M \frac{d}{dt}\sqrt{g(t)}dA = \frac{1}{2}\int_M \frac{g'(0)}{\sqrt{g(0)}}dA = \frac{1}{2}\int_M g'(0)dA.$$

Pelo lema anterior temos que

$$A'(0) = \frac{1}{2}\int_M \sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0)dA. \tag{1.3}$$

Vamos calcular $g'_{kk}(0)$. Seja $p \in M$, U vizinhança de p em M. Seja $\left\{\frac{\partial}{\partial t}, e_1, ..., e_n\right\}$ um referencial ortonormal em $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ tal que $\nabla_{e_j} e_i(p) = 0$.

Sejam $\{X(t), e_1(t), ..., e_n(t)\}$ a imagem deste referencial pela aplicação $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \overline{M}$ definida por $\Phi(x,t) = \Phi_t(x)$. Claramente $e_i(0) = e_i$, $X(0) = X$ e $g_{kk}(t) = \langle e_k(t), e_k(t)\rangle$. Assim temos

$$\frac{d}{dt}g_{kk}(t) = X(t)\langle e_k(t), e_k(t)\rangle = 2\left\langle \overline{\nabla}_X e_k(t), e_k(t)\right\rangle = 2\left\langle \overline{\nabla}_{e_k} X(t), e_k(t)\right\rangle$$

$$= 2[e_k\langle X, e_k\rangle - \langle X, \nabla_{e_k} e_k\rangle].$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0) = \sum_{k=1}^{n} e_k\langle X, e_k\rangle - \langle X, \nabla_{e_k} e_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e_k\left\langle X^T, e_k\right\rangle - \left\langle X, (\overline{\nabla}_{e_k} e_k)^T\right\rangle - \left\langle X, (\overline{\nabla}_{e_k} e_k)^\perp\right\rangle = div(X^T) - \langle X, H\rangle.$$

Então, (1.3) se escreve como

$$A'(0) = \int_M [div(X^T) - \langle X, H\rangle]dA.$$

Pelo Teorema de Stokes, usando que $X \equiv 0$ ao longo de ∂D, onde D é o suporte de X, temos que

$$\int_M div(X^T)dA = 0.$$

Assim,

$$A'(0) = -\int_M \langle X, H\rangle dA = -\int_M HudA,$$

onde $u = \langle X, \nu\rangle$, com ν campo vetorial unitário normal a imersão.

□

Agora, a primeira fórmula de variação do volume:

Proposição 1.0.2. *(Primeira fórmula de variação do volume). Se Φ é uma variação de ϕ com campo variacional X, suporte compacto em M, então V é uma função diferenciável em 0 e:*

$$V'(0) = \int_M udA,$$

onde $u = \langle X, \nu\rangle$.

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $e_1, ...e_n, e_{n+1} = \nu$ referencial ortonormal em torno de $\phi(p)$. Então

$$\Phi^*(dN) = a(t,p)dt \wedge dA,$$

onde

$$a(t,p) = \Phi^*(dN)\left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, ..., e_n\right) = dN\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, d\Phi_t(e_1), ..., d\Phi_t(e_n)\right)$$

$$= vol\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, d\Phi_t(e_1), ..., d\Phi_t(e_n)\right) = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \nu_t \right\rangle,$$

e ν_t é o vetor unitário normal da imersão Φ_t. Daí segue que

$$\frac{dV}{dt}(0) = \frac{d}{dt}\left(\int_{[0,t]\times M} a(t,p) \wedge dA\right)_{t=0} = \int_M a(0,p)dA$$

$$= \int_M \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0), \nu \right\rangle dA = \int_M u dA,$$

como queríamos demonstrar. □

Vamos mostrar uma importante propriedade sobre a curvatura média de variações que preservam volume. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.0.2. *Seja D um domínio relativamente compacto de bordo suave ∂D, ν campo vetorial unitário normal ao longo da imersão Φ e $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ uma função suave por partes tal que $f \equiv 0$ em ∂D e $\int_D f dA = 0$. Então existe uma variação normal que preserva volume cujo vetor variação é $f\nu$.*

Demonstração. Seja $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciávl e seja $X : (-\epsilon, \epsilon) \times D \to N$ definida por

$$X(t, p) = \exp_{\phi(p)} \varphi(t, p)\nu, \qquad t \in (-\epsilon, \epsilon), \ \ p \in D.$$

Definida dessa forma temos que X é uma variação normal tal que $\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 \nu$.

Vamos mostrar que φ pode ser escolhida de forma que X satisfaça as condições do lema. Comecemos calculando a função volume $V(t)$ de X. Primeiramente observemos que $X = e \circ \psi$, onde $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times D \to \mathbb{R} \times D$ é a função $\psi(t, p) = (\varphi(t, p), p)$ e $e(u, p) = \exp_{\phi(p)} u\nu$, $u \in \mathbb{R}$. Seja $E(u, p) = det(de_{(p,u)})$. Usando (1.2) temos

$$V(t) = \int_{[0,t]\times D} X^*(dN) = \int_{[0,t]\times D} \psi^* e^*(dN)$$

$$= \int_{[0,t]\times D} E(\varphi(t, p), p) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(dA \wedge dt) = \int_D \left(\int_0^t E(\varphi(t, p), p) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right) dA.$$

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função nas condições do lema e seja φ solução do problema de valor inicial abaixo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{f(p)}{E(\varphi(t), p)}, \quad \varphi(0, p) = 0.$$

Da expressão anterior de $V(t)$ e do fato de $\int_D f dA = 0$ temos que

$$V(t) = t\int_D f dA = 0 \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

ou seja, $V(t) \equiv 0$ para a variação X. Como $E(\varphi(0), p) = 1$ temos que X é uma variação normal, que preserva o volume, e cujo vetor variação é $f\nu$.

□

Usando esse lema segue o seguinte resultado:

Proposição 1.0.3. *Seja $\phi : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão de uma uma variedade diferenciável, orientável de dimensão n em uma variedade N^{n+1}. Se, para cada domínio relativamente compacto $D \subset M$ com bordo suave, e para cada variação $\phi_t : \overline{D} \to N^{n+1}$ que preserva volume e fixa a fronteira ∂D temos $A'_D(0) = 0$ então, ϕ tem curvatura média constante $H_0 \neq 0$, onde $H_0 = A^{-1}\int_D H dA$ e $A = A_D(0)$.*

Demonstração. Sejam

$$D^+ = \{q \in D; (H - H_0)(q) > 0\}, \ e \ D^- = \{q \in D; (H - H_0)(q) < 0\}.$$

Suponhamos que exista um ponto $p \in D$ tal que $(H - H_0)(p) \neq 0$. Como tal ponto existe, temos que os conjuntos D^+ e D^- são ambos não vazios. Sejam φ e ψ funções reais, suaves e não negativas em $\overline{D}$ tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$p \in supp\varphi \subset D^+, supp\psi \subset D^-, \int_D (\varphi + \psi)(H - H_0) dA = 0,$$

onde $supp\varphi$ denota o suporte de φ. Como $\int_D (H - H_0) dA = 0$, tal escolha é possível. Seja $f = (\varphi + \psi)(H - H_0)$. Então $f = 0$ em ∂D e $\int_D f dA = 0$.

Pelo lema anterior, nós obtemos uma variação normal, que preserva volume, e cujo vetor variação é $f\nu$. Pela hipótese e pela fórmula da 1ª variação temos

$$A'_D(0) = -\int_D fHdA = 0.$$

Isto implica

$$\int_D fHdA = 0,$$
$$\int_D fHdA - H_0 \int_D fdA = 0,$$
$$\int_D f(H - H_0)dA = 0.$$

Logo,

$$0 = \int_D f(H - H_0)dA = \int_D (\varphi + \psi)(H - H_0)^2 dA > 0,$$

pois $(\varphi + \psi) \geq 0$, $(H - H_0)^2 > 0$ e $H - H_0$ é contínua. Dessa forma obtemos uma contradição. Segue então que $H = H_0$ em D. Como isso vale para todo $D \subset\in M$, $H = H_0$, isto é, x tem curvatura média constante H_0. □

Diretamente do resultado acima e da fórmula da primeira variação da área, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.0.1. *Se uma variedade M é solução do problema isoperimétrico, então sua curvatura média é constante.*

Demonstração. Se M é solução do problema isoperimétrico temos que existe um valor V_0 tal que $V(M) = V_0$. Dessa forma, para qualquer variação Φ de M que preserva volume a função área atinge um mínimo no ponto zero, ou seja, $A'(0) = 0$. Dessa forma temos que vale a proposição 1.0.3, e portanto M tem curvatura média constante. □

Segue uma importante propriedade das variedades de curvatura média constante.

Lema 1.0.3. *Se M é uma variedade de curvatura média constante, então M é analítica.*

Demonstração. O resultado em dimensão dois pode ser encontrado em [Ho], página 139. □

Como toda solução do problema isoperimétrico tem curvatura média constante temos o seguinte corolário:

Corolário 1.0.2. *Se M é uma variedade solução do problema isoperimétrico, então M é analítica.*

Outro conceito importante para o estudo do problema isoperimétrico é o conceito de estabilidade. Para defini-lo e estudar suas propriedades precisaremos também calcular a derivada segunda da área nas possíveis variações da imersão. Como variações normais não alteram a função área os próximos resultados vão se restringir a variações normais. Para mais detalhes sobre os próximos resultados ver [BdCE] e [Si].

Proposição 1.0.4. *(Segunda fórmula de variação da Área)Seja ϕ uma imersão com curvatura média constante e Φ uma variação normal com campo variacional X com suporte compacto em M. Então:*

$$A''(0) - HV''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (Ric(\nu) + |B|^2)u^2\}dA, \qquad (1.4)$$

onde $u = \langle X, \nu \rangle$, $Ric(\nu)$ é a curvatura de Ricci do vetor unitário normal ν a imersão, e $|B|^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental B da imersão.

Demonstração. Ver [BdCE] ou [Si]. □

A partir da segunda fórmula de variação da área obtemos:

Teorema 1.0.1. *Se $\phi : M \to N$ é uma imersão mínima e Φ uma variação normal qualquer de ϕ com campo variacional X de suporte compacto, então:*

$$A''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (Ric(\nu) + |B|^2)u^2\} dA,$$

com $u = \langle X, \nu \rangle$.

Demonstração. Basta notar que se a imersão é mínima temos necessariamente $H = 0$ em (1.4). □

Teorema 1.0.2. *Se $\phi : M \to N$ é uma imersão com curvatura média constante e Φ uma variação normal qualquer de ϕ que preserva volume, com campo variacional X de suporte compacto, então:*

$$A''(0) = \int_M \{|\nabla u|^2 - (Ric(\nu) + |B|^2)u^2\} dA,$$

com $u = \langle X, \nu \rangle$.

Demonstração. Basta notar que se Φ é uma variação que preserva volume temos $V'(t) = 0$ $\forall t$, e consequentemente, $V''(t) = 0$ $\forall t$. Dessa forma basta fazer $V''(0) = 0$ em (1.4) e o resultado segue diretamente. □

Definição 1.0.3. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão. Dizemos que x é estável se $A''(0) \geq 0$ para toda variação de x que preserva o volume, e A é a função área definida por (1.1).*

Definição 1.0.4. *Seja $\Omega \subset M$ um domínio de M. Dizemos que Ω é estável se $A''(0) \geq 0$ para todas as variações de Ω que fixam $\partial\Omega$.*

Definição 1.0.5. *Dizemos que uma variedade M é estável se todos os domínios $\Omega \subset M$ forem estáveis.*

Da definição anterior obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.0.3. *Se uma hipersuperfície é solução do problema isoperimétrico, então ela é estável.*

Capítulo 2

Variedades Invariantes por transformações ortogonais

Nesta seção iremos demonstar propriedades de simetria das soluções do problema isoperimétrico.

Sejam $r > 0$ e uma região isoperimétrica $\Omega \subset M_c^{n+1} = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^n$, onde $\mathbb{Q}_c^n$ é a forma espacial n-dimensional simplesmente conexa de curvatura constante $c = 0{,}1$ ou -1, ou seja, os espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ respectivamente. Seja Σ a fronteira de Ω.

Usaremos argumentos de simetria para reduzir o espaço do nosso problema a um espaço quociente mais simples e depois disso faremos um estudos das possíveis soluções para o problema isoperimétrico em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$. O próximo resultado é uma adaptação do método *moving plane* de simetrização, que foi introduzido originalmente por Alexandrov em [A].

Lema 2.0.4. *Seja Ω uma região isoperimétrica em M_c^{n+1} e seja l uma linha geodésica de M_c^{n+1}, com $c = 0$ ou -1. Então existe uma única hipersuperfície totalmente geodésica perpendicular à l tal que Ω é simétrica com respeito a essa hipersuperfície.*

Demonstração. Seja P_x a única hipersuperfície totalmente geodésica perpendicular à l passando por $x \in l$ e $H_x^{\pm}$ as duas componentes conexas de $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^n - P_x$. Temos que $\{P_x, x \in l\}$ formam uma família contínua de hipersuperfícies totalmente geodésicas, e existem x_1, $x_2 \in l$ tais que

$$H_{x_1}^- \cap \Omega = \varnothing \qquad\qquad H_{x_1}^+ \cap \Omega = \Omega,$$

$$H_{x_2}^- \cap \Omega = \Omega \qquad\qquad H_{x_2}^+ \cap \Omega = \varnothing.$$

Da continuidade de $\{vol_n(H_x^- \cap \Omega), x \in l\}$ e de $\{vol_n(H_x^+ \cap \Omega), x \in l\}$ com respeito a posição de x em l segue que existe um único $x_0 \in l$ tal que

$$vol_n(H_{x_0}^- \cap \Omega) = vol_n(H_{x_0}^+ \cap \Omega),$$

onde $vol_n(M)$ denota o volume n-dimensional da variedade M. Como Ω é solução do problema isoperimétrico em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^n$, o $(n-1)$-volume de $H_{x_0}^- \cap \partial\Omega$ e $H_{x_0}^+ \cap \partial\Omega$ devem ser iguais, isto é,

$$vol_{n-1}(H_{x_0}^- \cap \partial\Omega) = vol_{n-1}(H_{x_0}^+ \cap \partial\Omega).$$

De fato, se não fossem iguais teríamos, por exemplo, $vol_n(H_{x_0}^- \cap \partial\Omega) < vol_n(H_{x_0}^+ \cap \partial\Omega)$ e assim $\Omega' = (H_{x_0}^- \cap \Omega) \cup (P_{x_0} \cap \Omega) \cup (H_{x_0}^- \cap \Omega)^*$, onde $(H_{x_0}^- \cap \Omega)^*$ é a imagem simétrica de $H_{x_0}^- \cap \Omega$ com respeito a P_{x_0}, seria tal que $vol_n(\Omega') = vol_n(\Omega)$ e $vol_n(\partial\Omega') < vol_n(\partial\Omega)$, o que contradiz o fato de que Ω é solução do problema isoperimétrico.

Vamos mostrar agora que Ω é simétrica com respeito a P_{x_0} e portanto, $\Omega = \Omega'$. Seja $R(\partial\Omega)$ (respectivamente $S(\partial\Omega)$) o conjunto dos pontos regulares (singulares) de $\partial\Omega$. Segue de resultados da teoria da medida geométrica (ver [F] página 613 ou [Si] página 256) que a codimensão de $S(\partial\Omega)$ em $\partial\Omega$ é maior do que 1 e portanto

$$P_{x_0} \cap R(\partial\Omega) \neq \varnothing.$$

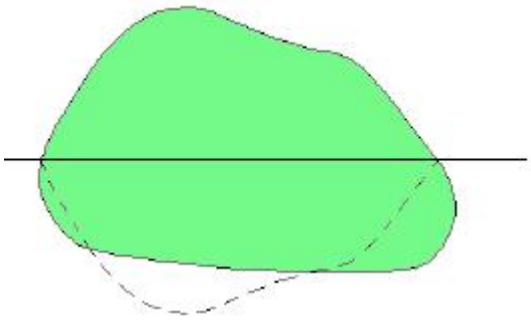

Figura 2.1: Uma região isoperimétrica é simétrica com respeito a hipersuperfície que bissecta o seu volume.

Além disso, $R(\partial\Omega)$ é um subconjunto aberto, conexo e denso em $\partial\Omega$, que é uma hipersuperfície de curvatura média constante. Portanto, como a equação da curvatura média é fortemente elíptica e a variedade M_c^{n+1} é analítica, temos que $R(\partial\Omega)$ é analítica em todo ponto. Como Ω é uma região isoperimétrica e

$$vol_n(H_{x_0}^- \cap \Omega) = vol_n(H_{x_0}^+ \cap \Omega)$$

$$vol_{n-1}(H_{x_0}^- \cap \partial\Omega) = vol_{n-1}(H_{x_0}^+ \cap \partial\Omega),$$

é facil ver que Ω' também é solução do problema isoperimétrico em $\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{Q}_c^n$. ($vol_n(\Omega) = vol_n(\Omega')$ e $vol_{n-1}(\partial\Omega) = vol_{n-1}(\partial\Omega')$). Então R($\partial\Omega$) e P_{x_0} devem ser perpendiculares em todo ponto de interseção. Agora, aplicando a unicidade dada pelo Teorema de Cauchy-Kovalevskaya a equação da curvatura média constante com solução inicial ao longo de $R(\partial\Omega) \cap P_{x_0}$ perpendicular a P_{x_0}, temos que Ω é simétrica com respeito a P_{x_0}. □

Definição 2.0.6. *Seja G um grupo agindo sobre um espaço X. Os elementos de G que fixam um ponto x formam um subgrupo de G chamado subgrupo*

isotrópico de G definido por

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Definição 2.0.7. *Um subgrupo principal de isotropia (que é o menor em termos de dimensão) é um subgrupo de isotropia H de G tal que, para cada subgrupo de isotropia K de G, $K \supseteq gHg^{-1}$, para algum $g \in G$.*

Para $c = 1$ temos o seguinte resultado, um pouco mais geral:

Teorema 2.0.3. *Seja M uma variedade riemanniana conexa, completa, oritentável, analítica cujo grupo de isometrias é $O(n)$. Se o subgrupo principal de isotropia de M é $O(n-1)$, então toda região isoperimétrica em M é simétrica pela ação de $O(n-1)$.*

Demonstração. A demonstração completa pode ser encontrada em [H3]. Uma versão resumida pode ser encontrada em [H2]. □

A próxima definição será fundamental para provarmos a invariância das soluções do problema isoperimétrico pela ação do grupo ortogonal para os casos Euclidiano e hiperbólico.

Teorema 2.0.4. *Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura não positiva. Seja K grupo cujos elementos são isometrias de M. Então os elementos de K fixam um ponto em comum. Esse ponto chamaremos de* ***centro de gravidade*** *de M.*

Demonstração. Ver [He] página 75. □

Vamos agora ao resultado sobre invariância que buscávamos.

Lema 2.0.5. *Ω é invariante por ação do grupo ortogonal $O(n-1)$ no segundo fator do produto $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^n$, para $c = 0, -1$.*

Demonstração. Sejam $K^+ = ISO(\mathbb{Q}_c^n, x_0)$ o grupo das isometrias locais de $\mathbb{Q}_c^n$ que fixam um ponto $x_0 \in \mathbb{Q}_c^n$ e $K = O(n-1)$ grupo ortogonal. Se $c = 0$ ou $c = -1$, seja x_0 o centro de gravidade de Ω e seja l linha geodésica passando por x_0. Segue do 2.0.3 e da definição de centro de gravidade que $\mathbb{Q}_c^n$ é simétrica em relação ao hiperplano P_{x_0}, e portanto $\mathbb{Q}_c^n$ é invariante por reflexões. Como o conjunto das reflexões gera o subgrupo K temos que Q_c^n é K-invariante e isso conclui a demonstração. Se $c = 1$ o resultado segue direto do Teorema 2.0.3. □

Vamos agora a uma descrição do espaço de órbitas no qual trabalharemos. Sejam $\mathbb{Q}_c^n$ como já descrito anteriormente e $O(n-1)$ o subgrupo de isometrias que deixa fixo um subespaço de dimensão 1 que chamaremos de $F(O(n-1), \mathbb{Q}_c^n) = M^1$. Observe que M^1 é uma geodésica completa em $\mathbb{Q}_c^n$. Seja $O(n-2)$ um subgrupo isotrópico da ação de $O(n-1)$ em $\mathbb{Q}_c^n$ escolhido arbitrariamente. Nesse caso $M^2 = F(O(n-2), \mathbb{Q}_c^n)$ é uma subvariedade totalmente geodésica de dimensão dois com ação induzida por $\mathbb{Z}_2 = Ker(O(n-2))/O(n-2)$. Além disso, $\mathbb{Z}_2$ é a reflexão de M^2 com respeito a M^1. Portanto, um semi-espaço fechado, digamos M_+^2, é um domínio tanto para a ação de $\mathbb{Z}_2$ em M^2 como para a ação de $O(n-1)$ em $\mathbb{Q}_c^n$, isto é,

$$M_+^2 \cong M^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Q}_c^n/O(n-1).$$

Vamos parametrizar M_+^2 de acordo com o seguinte sistema de coordenadas: Fixamos um ponto $0 \in M^1$ como origem e seja x o comprimento de arco em M^1 percorrida de acordo com a orientação positiva de $M^1 = \partial M_+^2$. Para cada ponto $p \in M_+^2$, seja $\overline{pq}$ um segmento de geodésica cujo comprimento é igual a $d(p, M^1)$, onde $q \in M^1$ ($\overline{pq}$ é único exceto no caso em que p é o centro de $\mathbb{S}_+^2$). Podemos atribuir ao ponto p as coordenadas (x, y), onde x é a coordenada de q em M^1 e y é o comprimento de $\overline{pq}$, isto é, $y = d(p, M^1)$.

Segue dessa definição que

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y < +\infty \quad \text{nos casos hiperbólico e Euclidiano,} \\ -\pi < x \leq \pi, \qquad 0 \leq y \leq \pi/2 \quad \text{no caso esférico, e cuja} \\ \text{coordenada do centro de } \mathbb{S}^2_+ \text{ é } (x, \pi/2),\ x \text{ arbitrário.} \end{cases}$$

Como M^2_+ é totalmente geodésico e perpendicular a todas as órbitas $O(n-1)$, a métrica em $\mathbb{Q}^n_c/O(n-1)$ é idêntica a métrica de curvatura constante em M^2_+. Dessa forma, a métrica pode ser escrita em função das coordenadas do sistema da seguinte forma:

$$ds^2 = \begin{cases} dx^2 + dy^2 \text{ no caso Euclidiano,} \\ \cosh^2 y dx^2 + dy^2 \text{ no caso hiperbólico} \\ \cos^2 y dx^2 + dy^2 \text{ no caso esférico.} \end{cases}$$

Seja Σ fronteira de Ω. Usando essa simetria consideremos o espaço de orbitas $M^{n+1}_c/O(n-1) = \mathbb{S}^1(r) \times I_c$, onde $I_c = [0, \infty]$ para $c = 0, -1$ e $I_1 = [0, \pi]$ com a métrica do quociente. Como $\mathbb{S}^1$ pode ser parametrizada pela função exponencial vamos estudar as equações reduzidas de Σ no recobrimento universal de $B_c = M^{n+1}_c/O(n-1)$, isto é,

$$B_c = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \geq 0\},$$

para $c = 0$, $c = -1$ e

$$B_c = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in [0, \pi]\},$$

para $c = 1$, e identificamos os pontos cujas coordernadas na direção Ox diferem por um múltiplo de $2\pi r$.

Chamaremos a projeção γ de Σ em B_c de curva geratriz de Σ. Parametrizemos $\gamma = (x(s), y(s))$ pelo comprimento de arco s. Seja $\sigma(s)$ definido por

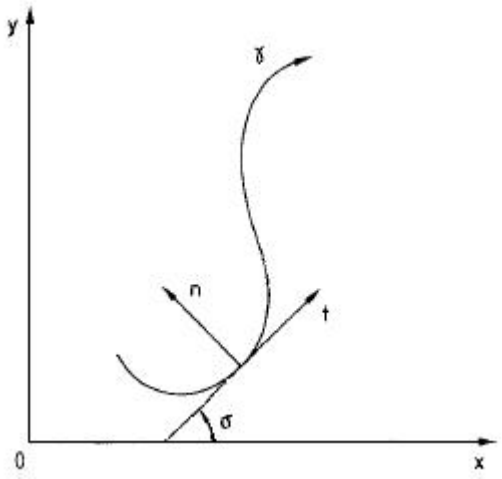

Figura 2.2: Curva gama.

$$(x'(s), y'(s)) = (\cos\sigma(s), \text{sen}\sigma(s)),$$

onde σ é o ângulo entre a reta tangente a $\sigma(s)$ e a direção Ox.

Sejam

$$f_c(r) = \begin{cases} t^{-1} & se\ \ c = 0 \\ \text{cotg}(t) & se\ \ c = 1 \\ \text{cotgh}(t) & se\ \ c = -1 \end{cases}$$

e

$$g_c(r) = \begin{cases} t & se\ \ c = 0 \\ \text{sen}(t) & se\ \ c = 1 \\ \text{senh}(t) & se\ \ c = -1. \end{cases}$$

As funções acima satisfazem as seguintes igualdades:

$$c + f_c^2 = g_c^{-2}, \tag{2.1}$$

$$f_c' = -g_c^{-2}, \tag{2.2}$$

$$f_c = g_c^{-1} g_c'. \tag{2.3}$$

O próximo resultado é a base para estabelecer um sistema de equações diferenciais que determina as candidatas a soluções do problema isoperimétrico. Antes dele vamos a algumas definições sobre ação de grupos.

Definição 2.0.8. *Seja G um grupo agindo sobre uma variedade M e $x \in M$. A órbita de x por G é definida como*

$$G(x) = \{g(x) \in M : g \in G\}.$$

Definição 2.0.9. *Seja G um grupo agindo sobre uma variedade M e seja N uma subvariedade de M. Dizemos que N é G-invariante se $g(N) = N$ $\forall g \in G$.*

Proposição 2.0.5. *Sejam G um grupo, ν o $(n-1)$-volume da G-órbita de M e N uma subvariedade G-invariante de M com o mesmo tipo de órbita principal de M. Consideremos p um ponto da órbita principal $\overline{p} \in N/G$, ν_p um vetor arbitrário de N normal a p e $\nu_{\overline{p}}$ a imagem do vetor em $\overline{p}$. Então*

$$H(\nu_p) = \overline{H}(\nu_{\overline{p}}) - \frac{d}{d\nu_{\overline{p}}} \ln \nu,$$

onde $H(\nu_p)$ e $\overline{H}(\nu_{\overline{p}})$ são a curvatura média de N e N/G respectivamente e $\dfrac{d}{d\nu_{\overline{p}}}$ e a derivada na direção $\nu_{\overline{p}}$.

Demonstração. Ver [BadCH]. □

Diretamente da proposição anterior temos que se γ é a curva descrita anteriormente, então ela satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$h = \frac{d\sigma}{ds} - \frac{d}{dn} \ln \nu, \tag{2.4}$$

onde $\frac{d\sigma}{ds}$ é a curvatura de γ, $\frac{d}{dn}$ é a derivada com respeito ao vetor normal $\mathbf{n} = (-\operatorname{sen}\sigma(s), \cos\sigma(s))$, h é a curvatura média constante de Σ e ν é o (n-1)-volume da $O(n-1)$-órbita passando por um ponto (x, y). Essa função, para $c = 0, 1$ e -1 é dada por:

$$\nu(x, y) = \omega_{n-1} g_c^{n-1}(y), \tag{2.5}$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária $(n-1)$-dimensional. Diretamente de (2.5) temos que

$$\ln \nu(x, y) = \ln \omega_{n-1} + (n-1) \ln g_c(y),$$

Como o vetor normal $\mathbf{n} = (-\operatorname{sen}\sigma(s), \cos\sigma(s))$ então $\frac{d}{dn}$ é dado por

$$\frac{d}{dn} = -\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial}{\partial x} + \cos\sigma \frac{\partial}{\partial y},$$

temos que

$$\frac{d}{dn} \ln \nu = \cos\sigma \frac{\partial}{\partial y} (\ln \omega_{n-1} + (n-1) \ln g_c(y)) = (n-1) \frac{g_c'(y)}{g_c(y)} \cos\sigma = (n-1) f_c(y) \cos\sigma.$$

Usando (2.4) temos então que

$$h = \frac{d\sigma}{ds} - (n-1) f_c(y) \cos\sigma. \tag{2.6}$$

Decorre dessa equação o seguinte lema:

Lema 2.0.6. *A curva geratriz γ de uma hipersuperfície Σ invariante por ação do grupo $O(n-1)$ e de curvatura média constante h satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais:*

$$\begin{cases} x' = \cos\sigma \\ y' = \operatorname{sen}\sigma \\ \sigma' = h + (n-1) f_c(y) \cos\sigma \end{cases} \tag{2.7}$$

Além disso, ao longo da solução γ do sistema acima a função

$$J_c(s) = \cos\sigma(s) g_c^{n-1}(y) + h\int_0^y g_c^{n-1}(t)dt \tag{2.8}$$

é constante, isto é, o sistema de equações diferenciais ordinárias acima tem uma integral primeira.

Demonstração. O sistema (2.7) decorre de (2.6) e da escolha da curva γ. Seja $J_c(s) = \cos\sigma g_c^{n-1}(y) + h\int_0^y g_c^{n-1}(t)dt$. Derivando a equação temos:

$$\frac{dJ_c}{ds} = -\sigma' \operatorname{sen}\sigma g_c^{n-1}(y) + (n-1)g_c^{n-2}(y)g_c'(y)y'\cos\sigma + hg_c^{n-1}(y)y'.$$

Substituindo o valor de h no sistema:

$$\frac{dJ_c}{ds} = -\sigma' \operatorname{sen}\sigma g_c^{n-1}(y) + (n-1)g_c^{n-2}(y)g_c'(y)y'\cos\sigma +$$

$$(\sigma' - (n-1)f_c(y)\cos\sigma)g_c^{n-1}(y)y'$$

$$= -\sigma' \operatorname{sen}\sigma g_c^{n-1}(y) + (n-1)g_c^{n-2}(y)g_c'(y)\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma + \sigma' \operatorname{sen}\sigma g_c^{n-1}(y)$$

$$-(n-1)f_c(y)g_c^{n-1}(y)\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$= (n-1)g_c^{n-2}(y)\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma(g_c'(y) - f_c(y)g_c(y)) = 0,$$

onde a última igualdade se verifica diretamente da relação (2.3)

□

Vamos agora estudar esse problema no caso em que $n = 2$

Lema 2.0.7. *A solução para o sistema anterior nos espaços da forma $\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{Q}_c^2$ pode ser dos seguintes tipos:*

(A) Curvas do tipo catenária, com $h = 0$ (Casos Euclidiano e hiperbólico).

(B) Curvas onde $y = 0$ para um conjunto de pontos igualmente espaçados no eixo x, com a curva tocando o eixo perpendicularmente. Essas curvas

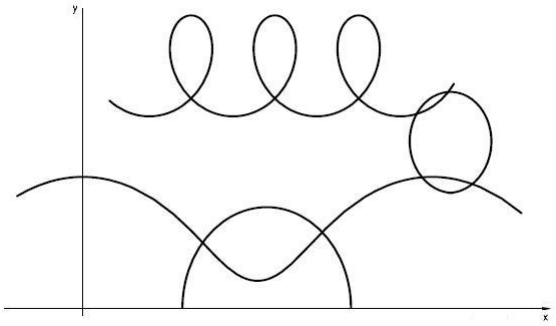

Figura 2.3: Soluções para o sistema (2.7) no caso esférico.

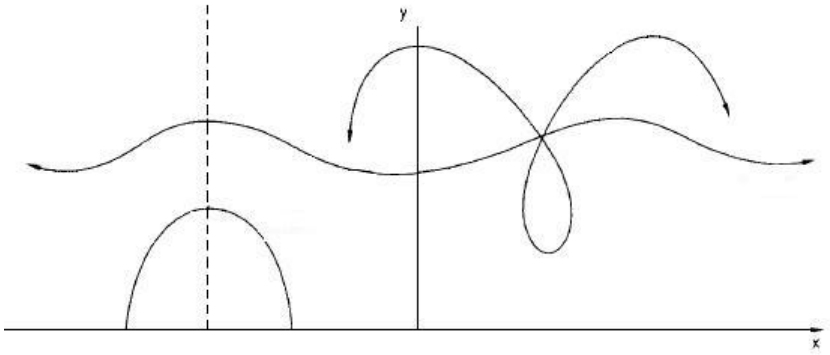

Figura 2.4: Soluções para o sistema (2.7) nos casos Euclidiano e hiperbólico com $h \neq 0$.

geram famílias de esferas que se tocam, cada uma sendo uma hipersuperfície mergulhada de curvatura média constante. São caracterizadas por $J_c \equiv 0$.

(C) Semi-retas verticais $x = cte$*, que geram hipersuperfícies totalmente geodésicas* $\{p\} \times \mathbb{Q}_c^2$.

(D) No caso esférico existem soluções fechadas, mergulhadas no interior de B_c*, que geram hipersuperfícies mergulhadas difeomorfas a* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(E) Nodóides, que também podem ser escritas como gráfico em função de x*, tem* y *periódico mas* σ *é uma função monótona.*

(F) Ondulóides, ou seja, curvas periódicas em y *e* σ*, que podem ser escri-*

tas como gráfico em função de x, gerando hipersuperfícies mergulhadas. Nos casos euclidiano e hiperbólico elas têm curvatura média diferente de zero. No caso esférico existem ondulóides que geram hipersuperfícies mínimas.

Demonstração. Primeiramente analizaremos o caso em que x é constante. Dessa forma, obteremos soluções do tipo C. Para o caso de x não constante, dividiremos os casos entre as soluções compactas e as não compactas. Para soluções compactas mostraremos que elas serão do tipo D. Para as não compactas analizaremos os casos aonde $h = 0$ (e obteremos soluções do tipo A) e o caso $h \neq 0$. Para o caso $h \neq 0$ analizaremos os possíveis sinais da integral primeira. Para $J_c \equiv 0$ teremos soluções do tipo B, para $J_c > 0$ soluções do tipo E, e finalmente, para $J_c < 0$ soluções do tipo F.

Suponhamos, inicialmente, que $x = x_0$. Nesse caso temos que $x' = 0$ e portanto $\cos\sigma(s) = 0$. Dessa forma $\sigma(s) = \pi/2$ e $y' = \text{sen}(\pi/2) = 1$. Integrando, obtemos $y = s$, onde $s \geq 0$. Logo $\gamma = (x_0, s)$, para $s \geq 0$, e assim obtemos as soluções do tipo C.

Para x não constante, suponhamos que tenhamos uma solução compacta. No caso em que $c = 1$ e as condições iniciais dadas por $x(0) = 0$, $y(0) = \pi/2$, $\sigma(0) = \pi/2$ e $h > 0$ temos que em um determinado ponto a solução atinge um valor máximo na coordenada y. Seja y_M esse ponto e y_m o ponto onde a solução atinge um valor mínimo na coordenada y. Em y_M temos que $\sigma = \pi$. A curva segue como uma reflexão pela reta vertical que passa por y_M e intersecta novamente a reta $y = \pi/2$, mas com $\sigma = 3\pi/2$.

Usando a integral primeira nas condições iniciais temos que

$$J_1(s) = J_1(0) = h\int_0^{\pi/2} \text{sen}(t)dt = k.$$

Se a curva corta $y = \pi/2$ em um ponto s_0 temos que

$$k = J_1(s_0) = \cos(\sigma(s_0)) + h\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)dt = h\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)dt,$$

logo $\cos(\sigma(s_0)) = 0$, e portanto $\sigma(s_0) = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, quando $\sigma = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{R}$ temos que

$$J_1(s) = h\int_0^{y} \operatorname{sen}(t)dt = h\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)dt,$$

o que implica que $y = \pi/2$.

Os valores y_M e y_m são caracterizados por

$$-\operatorname{sen}(y_M) + h\int_0^{y_M} \operatorname{sen}(t)dt = \operatorname{sen}(y_m) + h\int_0^{y_m} \operatorname{sen}(t)dt.$$

Observemos que nos espaços hiperbólico e Euclidiano não podemos ter soluções geradas por curvas fechadas desse tipo. Com efeito, considere a função $T(s) = \operatorname{sen}\sigma - hx = y'(s) - hx(s)$ definida ao longo de γ. Primeiramente vejamos que $T(s)$ não pode ser constante. Com efeito, suponhamos por absurdo que $T(s) = c$ seja constante. Nesse caso

$$\operatorname{sen}\sigma = hx(s) + c.$$

Derivando temos

$$\sigma' \cos\sigma = hx'(s) = h\cos\sigma.$$

Usando (2.7) temos que

$$h + f_c(y)\cos\sigma = h,$$

e portanto vale que

$$f_c(y)\cos\sigma = 0,$$

e assim teríamos $\cos\sigma = 0$ ou $f_c(y) = 0$, o que é impossível, pois nesses casos teríamos σ constante ou y constante, logo $T(s)$ não pode ser constante. Além disso, derivando $T(s)$ obtemos

$$T'(s) = \sigma' \cos\sigma - h\cos\sigma = \cos\sigma(\sigma' - h) = (n-1)f_c(y)\cos^2\sigma,$$

ao longo de γ. Se $c = 0$ ou $c = -1$, $T'(s) \geq 0$, ou seja, T é não decrescente e assume valores positivos ao longo de qualquer solução não vertical. Como $T(0) = 1$ temos que $T(s) \geq 1$ ao longo de γ. Se tivéssemos uma solução fechada, existiria s_1 tal que $(x(s_0), y(s_0)) = (x(s_1), y(s_1))$. Dessa forma teríamos $T(s_0) = y'(s_0) - hx(s_0) = y'(s_1) - hx(s_1) = T(s_1)$, o que é impossível pois $T(s)$ não é constante e é não decrescente, logo, não podemos ter soluções geradas por curvas fechadas nos espaços hiperbólico e Euclidiano. Dando prosseguimento, suponhamos agora que x não é constante e que a solução é não compacta.

1. Caso $h = 0$:

   Vamos ver que se $c = 0$ ou $c = -1$ a solução será do tipo catenária, ou seja, terá no máximo um ponto de mínimo em $y(s)$. Com efeito, se a solução tiver mais de um ponto de mínimo, entre dois deles teremos necessariamente um ponto de máximo, ou seja, um ponto s_0 onde $y'(s_0) = \text{sen}\sigma(s_0) = 0$ e $y''(s_0) = \sigma'(s_0)\cos\sigma(s_0) < 0$.

   Mas para $c = 0$ temos

   $$y''(s_0) = \sigma'(s_0)\cos\sigma(s_0) = \frac{\cos^2\sigma(s_0)}{y(s_0)} > 0,$$

   pois $y > 0$. Portanto y não tem ponto de máximo, e assim não pode ter mais do que um ponto de mínimo.

   Da mesma forma, para $c = -1$ temos

   $$y''(s_0) = \sigma'(s_0)\cos\sigma(s_0) = \frac{\cosh y(s_0)\cos^2\sigma(s_0)}{\text{senh}y(s_0)} > 0,$$

pois $\cosh y > 0$ e $\text{senh} y > 0$ para todo $y > 0$. Portanto y não tem ponto de máximo, e assim não pode ter mais do que um ponto de mínimo.

2. Caso $h \neq 0$:

Suponhamos inicialmente $J_c(s) \equiv 0$.

- Para $c = 0$ temos,

$$0 = J_c(s) = \cos\sigma(s)y + h\int_0^y tdt =$$

$$\cos\sigma(s)y + \frac{hy}{2} = y(\cos\sigma(s) + \frac{hy}{2}).$$

Logo $y = 0$ ou $\cos\sigma(s) + \frac{hy}{2} = 0$.

Derivando obtemos:

$$y' = \frac{2\sigma' \,\text{sen}\sigma}{h}.$$

Como $y'(s) = \,\text{sen}\sigma(s)$ temos que $\frac{2\sigma'}{h} = 1$, e portanto $x'(s) = \frac{2\sigma'\cos\sigma}{h}$. Integrando obtemos:

$$\int x'(s)ds = \frac{2}{h}\int \cos\sigma(s)\sigma'(s)ds,$$

o que implica que

$$x(s) = \frac{2}{h}\int \cos\sigma d\sigma = \frac{2}{h}\,\text{sen}\sigma.$$

Logo γ é um círculo e portanto gera esferas, isto é, soluções do tipo B.

- Para $c = \pm 1$ consideremos, sem perda de generalidade, $h > 0$. Considere a variável $u = u(y) = -\cos\sigma(y)$. Nesse caso,

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{dx}{ds}(y)\frac{ds}{dy}(y) = \frac{dx}{ds}\frac{1}{\frac{dx}{dy}(y)} = \frac{\cos\sigma(y)}{\text{sen}\sigma(y)} = \frac{-u(y)}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{2.9}$$

$$\frac{du}{dy}(y) = \frac{du}{ds}(y)\frac{ds}{dy}(y) = \frac{du}{ds}\frac{1}{\frac{dy}{ds}} = \text{sen}\sigma(y)\sigma'(y)\frac{1}{\text{sen}(y)} =$$

$$h - f_c(y)u(y),$$

com condições iniciais $x(0) = 0$ e $u(0) = -\cos\sigma(0) = 0$.

O sistema é válido para $y \in [0, \eta)$, onde η é o limite de y quando σ tende a π. Observe que η está bem definido pela curvatura média constante h através da fórmula $h = h_c(\eta)$, onde

$$h_c(y) = \frac{g_c(y)}{\int_0^y g_c(t)dt}, \tag{2.10}$$

pois

$$J_c(s) = 0 \Rightarrow h(y) = -\cos(y)\frac{g_c(y)}{\int_0^y g_c(t)dt}. \tag{2.11}$$

Além disso, dado h (e consequentemente η), $u(y)$ é dado por

$$u(y) = u_c(\eta, y) = -\cos\sigma(y) =$$

$$-cos(y)\frac{g_c(y)}{\int_0^y g_c(t)dt}\frac{\int_0^y g_c(t)dt}{g_c(y)} = \frac{h}{h_c(y)},$$

e por isso $u(y)$ é crescente para $y \in (0, \eta)$ de 0 a 1. A curva γ intersecta a reta $y = 0$ perpendicularmente, é convexa e simétrica com respeito a reta $x = cte$. No caso esférico, pode se refletir a solução pela reta $y = \pi/2$, obtendo uma outra solução que gera hipersuperfícies isométricas do tipo B.

Suponhamos agora $J_c(s) = k \neq 0$. Seja s_0 um ponto de mínimo da função $y(s)$. Nesse caso $y'(s_0) = \text{sen}(s_0) = 0$ e portanto $x'(s_0) = \cos(s_0) = \pm 1$. Observemos que se o vetor $(\cos(s_0), \text{sen}(s_0)) = (0, -1)$ temos o vetor tangente a curva γ na direção oposta ao crescimento de x.

Dessa forma, conforme os valores de x aumentam, a curva γ terá uma auto-interseção. Analogamente, se o vetor $(\cos(s_0), \text{sen}(s_0)) = (0, 1)$ o vetor apontará na direção de crescimento de x, e portanto a curva não se auto-intersectará.

Assim, suponhamos inicialmente que $c = 0$. Nesse caso teremos as seguintes equações:

$$\sigma'(s_0) = h + \frac{\cos\sigma(s_0)}{y},$$

$$J(s_0) = \cos\sigma(s_0)y + h\frac{y^2}{2} = k.$$

Dai segue,

$$\frac{y^2}{2}\left(h + \frac{2\cos\sigma}{y}\right) = k,$$

$$h + \frac{\cos\sigma}{y} + \frac{\cos\sigma}{y} = \frac{2k}{y^2},$$

o que implica

$$\sigma'(s_0) = \frac{2k}{y^2} - \frac{\cos\sigma(s_0)}{y}.$$

Por outro lado, como s_0 é ponto de mínimo de $y(s)$ teremos $y''(s_0) = \cos(\sigma(s_0))\sigma'(s_0) > 0$. Logo, substituindo o valor de $\sigma'(s_0)$ encontrado acima temos

$$\cos(\sigma(s_0))\left(\frac{2k}{y^2} - \frac{\cos\sigma(s_0)}{y}\right) > 0.$$

Se $k < 0$ e $\cos(s_0) = 1$ a equação anterior se reduz a

$$\frac{2k}{y^2} > \frac{1}{y}.$$

Mas, como $k < 0$ temos $0 > \dfrac{2k}{y^2} > \dfrac{1}{y} > 0$, o que é uma contradição. Assim, para $k < 0$ teremos $\cos(s_0) = -1$, ou seja, a curva γ terá uma auto-interseção e teremos soluções do tipo E.

Analogamente, se $k > 0$ e $\cos(s_0) = -1$ temos

$$\frac{2k}{y^2} + \frac{1}{y} < 0.$$

Como $k > 0$ temos $0 > \dfrac{-2k}{y^2} > \dfrac{1}{y} > 0$, o que é uma contradição. Portanto, para $k > 0$ teremos $\cos(s_0) = 1$, ou seja, a curva γ não terá uma auto-interserção e teremos soluções do tipo F.

Para $c = -1$ teremos as seguintes equações:

$$\sigma'(s_0) = h + \frac{\cosh(y(s_0))\cos\sigma(s_0)}{\operatorname{senh}(y(s_0))},$$

$$J(s_0) = \cos\sigma(s_0)\operatorname{senh}(y(s_0)) + h\int_0^y (s_0)\operatorname{senh}(t)dt = k.$$

Dai segue,

$$h = \frac{k - \operatorname{senh}(y)\cos\sigma}{\cosh(y) - 1},$$

o que implica

$$\sigma'(s_0) = \frac{k - \operatorname{senh}(y)\cos\sigma(s_0)}{\cosh(y) - 1} + \frac{\cosh(y)\cos\sigma(s_0)}{\operatorname{senh}(y)}.$$

Novamente pelo fato de s_0 ser ponto de mínimo de $y(s)$ teremos $y''(s_0) = \cos(\sigma(s_0))\sigma'(s_0) > 0$. Análogo ao caso anterior segue

$$\cos(\sigma(s_0))\left(\frac{k - \operatorname{senh}(y)\cos\sigma(s_0)}{\cosh(y) - 1} + \frac{\cosh(y)\cos\sigma(s_0)}{\operatorname{senh}(y)}\right) > 0.$$

Como $(\cosh(y) - 1) > 0$ e $\operatorname{senh}(y) > 0$ temos que a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma

$$k\operatorname{senh}(y)\cos\sigma(s_0) - \operatorname{senh}^2(y)\cos^2\sigma(s_0) + \cosh^2(y)\cos^2\sigma(s_0) - \cosh(y)\cos^2\sigma(s_0) > 0,$$

e portanto

$$k\,\mathrm{senh}(y)\cos\sigma(s_0) + \cos^2\sigma(s_0) - \cosh(y)\cos^2\sigma(s_0) > 0,$$

$$k\,\mathrm{senh}(y)\cos\sigma(s_0) + (1-\cosh(y))\cos^2\sigma(s_0) > 0.$$

Se $k < 0$ e $\cos(s_0) = 1$ a equação anterior se reduz a

$$k\,\mathrm{senh}(y) + (1-\cosh(y)) > 0.$$

Mas, como $k < 0$ temos $0 > k\,\mathrm{senh}(y) + (1-\cosh(y)) > 0$, o que é uma contradição. Assim, para $k < 0$ teremos $\cos(s_0) = -1$, ou seja, a curva γ terá uma auto-interseção e teremos soluções do tipo E.

Analogamente, se $k > 0$ e $\cos(s_0) = -1$ temos

$$-k\,\mathrm{senh}(y) + (1-\cosh(y)) > 0.$$

Como $k > 0$ temos $0 > -k\,\mathrm{senh}(y) + (1-\cosh(y)) > 0$, o que é uma contradição. Portanto, para $k > 0$ teremos $\cos(s_0) = 1$, ou seja, a curva γ não terá uma auto-interserção e teremos soluções do tipo F.

Para $c = 1$ teremos as seguintes equações:

$$\sigma'(s_0) = h + \frac{\cos(y(s_0))\cos\sigma(s_0)}{\mathrm{sen}(y(s_0))},$$

$$J(s_0) = \cos\sigma(s_0)\,\mathrm{sen}(y(s_0)) + h\int_0^y (s_0)\,\mathrm{sen}(t)dt = k.$$

Dai segue,

$$h = \frac{k - \mathrm{sen}(y)\cos\sigma}{1-\cos(y)},$$

o que implica

$$\sigma'(s_0) = \frac{k - \mathrm{sen}(y)\cos\sigma(s)}{\cos(y)-1} + \frac{\cos(y)\cos\sigma(s_0)}{\mathrm{sen}(y)}.$$

Novamente pelo fato de s_0 ser ponto de mínimo de $y(s)$ teremos $y''(s_0) = \cos(\sigma(s_0))\sigma'(s_0) > 0$. Análogo ao caso anterior segue

$$\cos(\sigma(s_0)) \left(\frac{k - \operatorname{sen}(y)\cos\sigma(s)}{1-\cos(y)} + \frac{\cos(y)\cos\sigma(s_0)}{\operatorname{sen}(y)} \right) > 0.$$

Como $(1-\cos(y)) > 0$ e $\operatorname{sen}(y) > 0$ temos que a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma

$$k\operatorname{sen}(y)\cos\sigma - \operatorname{sen}^2(y)\cos^2\sigma - \cos^2(y)\cos^2\sigma + \cos(y)\cos^2\sigma > 0,$$

e portanto

$$k\operatorname{sen}(y)\cos\sigma - \cos^2\sigma + \cos(y)\cos^2\sigma > 0,$$

$$k\operatorname{sen}(y)\cos\sigma + (\cos(y)-1)\cos^2\sigma > 0.$$

Se $k < 0$ e $\cos(s_0) = 1$ a equação anterior se reduz a

$$k\operatorname{sen}(y) + (\cos(y)-1) > 0.$$

Mas, como $k < 0$ temos $0 > k\operatorname{sen}(y) + (\cos(y)-1) > 0$, o que é uma contradição. Assim, para $k < 0$ teremos $\cos(s_0) = -1$, ou seja, a curva γ terá uma auto-interseção e teremos soluções do tipo E.

Analogamente, se $k > 0$ e $\cos(s_0) = -1$ temos

$$-k\operatorname{sen}(y) + (\cos(y)-1) > 0.$$

Como $k > 0$ temos $0 > -k\operatorname{sen}(y) + (\cos(y)-1) > 0$, o que é uma contradição. Portanto, para $k > 0$ teremos $\cos(s_0) = 1$, ou seja, a curva γ não terá uma auto-interserção e teremos soluções do tipo F.

□

Observação 2.0.1. *Os resultados acima permanecem válidos para espaços da forma $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para mais informações consultar [P].*

Capítulo 3

Estabilidade das Hipersuperfícies de curvatura média constante

A simetria das soluções por ação do grupo $O(n-1)$ não é suficiente para classificarmos os domínios isoperimétricos. Com efeito, vimos que hipersuperfícies Σ cuja curva geratriz são nodóides que são invariantes por $O(n-1)$, satisfazem o sistema (2.7) mas claramente não são solução do problema isoperimétrico. Para refinarmos de maneira mais adequada essa classificação, estudaremos o que chamamos de estabilidade da região. Para isso relembremos a definições 1.0.4, 1.0.5 e o corolário 1.0.2 onde defininos o conceito de subvariedade estável e onde vimos que se uma hipersuperfície é solução do problema isoperimétrico, então ela é estável. Para mais detalhes ver [BdCE].

Utilizando a fórmula (1.4) obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.0.6. *Uma variedade Σ é estável se e somente se vale a seguinte desigualdade:*

$$I(u) = \int_{\Sigma} \{|\nabla u|^2 - (Ric(N) + |B|^2)u^2\} d\Sigma \geq 0$$

para toda função u lipschitziana de média zero em Σ, onde N é o vetor

normal a Σ *e* $|B|$ *é a norma da segunda forma fundamental de* Σ.

A forma $I(u)$ é uma forma bilinear chamada forma do índice, associada ao operador de Jacobi $\Delta + Ric(N) + |B|^2$. Se Σ é a hipersuperfície gerada pela curva γ, podemos calcular os termos de $I(u)$ da seguinte forma:

$|B|^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental, ou seja, é o quadrado da soma das curvaturas principais. Usando as curvaturas principais temos que $|B|^2 = (\sigma')^2 + {f_c}^2(y)\cos^2\sigma$. Além disso,

$$Ric(N) = Ric(\operatorname{sen}\sigma N^{\mathbb{S}^1}) + Ric(\cos\sigma N^{\mathbb{Q}_c^2}) = 0 + c\cos^2\sigma = c\cos^2\sigma.$$

Usando o volume dado pela equação (2.5) temos

$$d\Sigma = g_c(y)d\mathbb{S}(y)ds. \tag{3.1}$$

Dessas equações resulta diretamente que $Ric(N)+|B|^2 = (\sigma')^2+(f_c^2(y)+c)\cos^2\sigma = (\sigma')^2+g_c^{-2}(y)\cos^2\sigma$. Usando as informações acima obtemos que a forma da segunda variação para funções $u(s)$ definidas sobre a curva geratriz γ e extendida por simetria a Σ é dada por

$$I(u) = \omega_1 \int_0^{s_0} \{(u')^2 - [(\sigma')^2 + (n-1)g_c^{-2}(y)\cos^2\sigma]u^2\} g_c(y(s))ds.$$

Somando e subtraindo $u''u$ na integral obtemos:

$$\int_0^{s_0} (u')^2 g_c(y)ds = \int_0^{s_0} [(u')^2 + u''u]g_c(y)ds - \int_0^{s_0} u''u g_c(y)ds =$$

$$\int_0^{s_0} [u'u]' g_c(y)ds - \int_0^{s_0} u''u g_c(y)ds.$$

Integrando por partes a primeira parcela temos que

$$\int_0^{s_0} [u'u]' g_c^{n-1}(y)ds = u'(s)u(s)g_c(y(s))|_0^{s_0} - \int_0^{s_0} g_c'(y)y'uu'ds =$$

$$-\int_0^{s_0} g_c(y)g_c^{-1}(y)g_c'(y)\operatorname{sen}\sigma uu'ds = -\int_0^{s_0} g_c(y)f_c(y)\operatorname{sen}\sigma uu'ds.$$

Sendo assim, obtemos que

$$I(u) = -\omega_1 \int_0^{s_0} uLug_c(y(s))ds = \int_\Sigma -uLud\Sigma,$$

onde

$$Lu = u'' + [f_c(y)\,\mathrm{sen}\sigma]u' + [(\sigma')^2 + g_c^2\cos^2\sigma]u, \tag{3.2}$$

isto é, Lu é o operador de Jacobi aplicado na função u. Uma solução da equação $Lu = 0$ será chamada de campo de Jacobi.

Usando a forma do índice, vamos demonstrar uma importante propriedade dos domínios isoperimétricos em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$.

Lema 3.0.8. *Um domínio isoperimétrico $\Omega \subset \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$ é conexo. A fronteira $\partial\Omega$ também é conexa, ou é a união de duas curvas totalmente geodésicas da forma $\{p\} \times \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Em cada componente conexa de $\partial\Omega$ o operador segunda variação é dado por $\Delta + q$, onde Δ é o Laplaciano e $q = Ric(N) + |B|^2 = (\sigma')^2 + g_c^{-2}(y)\cos^2(\sigma) \geq 0$. Se $\partial\Omega$ é conexo, então Ω é conexo. Suponhamos por absurdo que $\partial\Omega$ é desconexo. Nesse caso podemos achar uma função localmente constante de média zero em $\partial\Omega$. A forma do índice aplicada a essa função nos dá:

$$0 \leq I(u) = \int_{\partial\Omega} \{|\nabla u|^2 - qu^2\}d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} -qu^2 d(\partial\Omega) \leq 0,$$

Afirmação: $q \equiv 0$.

Com efeito, seja u uma função de média zero $\partial\Omega$ e $c_i = u|\partial\Omega_i$ e $\partial\Omega_i$ é a i-ésima componente conexa de $\partial\Omega$, para $i = 1, 2, ..., n$. Como u tem média zero em $\partial\Omega$, temos que em

$$\sum_{i=1}^{n} c_i V_i = 0,$$

onde $V_i = vol(\partial\Omega_i)$. Tomemos u como sendo uma variação onde $c_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, ...n$. Temos então que

$$0 = \int_{\partial\Omega} -qu^2 d(\partial\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} -q{c_i}^2 d(\partial\Omega_i).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} -q{c_i}^2 d(\partial\Omega_i) = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2 \int_{\partial\Omega_i} -qd(\partial\Omega_i),$$

e portanto $\int_{\partial\Omega_i} qd(\partial\Omega_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, logo $q \equiv 0$. Sendo assim, temos $\cos\sigma \equiv 0$ e $\partial\Omega$ é a união de várias curvas totalmente geodésicas $\{\mathrm{p}\}\times\mathbb{Q}_c^2$, que é compacto apenas se $\mathbb{Q}_c^2 = \mathbb{S}^2$.

Assim, Ω é a união de fatias da forma $[a, b] \times \mathbb{S}^2$. Mas uma fatia da forma $[c, d] \times \mathbb{S}^2$ cujo volume seja o mesmo de Ω seria uma solução para o problema isoperimétrico melhor do que Ω, o que é um absurdo, logo $\partial\Omega$ é conexo. □

Agora, vamos analizar o caso das soluções cujas fronteiras são tipo ondulóide onde $y = y_0$, ou seja, a solução é um tubo. Primeiramente vamos enunciar um importante resultado sobre estabilidade:

Proposição 3.0.7. *Seja $\phi : M \to \overline{M}$ uma imersão, e M uma hipersuperfífice fronteira de uma variedade em N com curvatura média constante e tal que $Ric + |B|^2 = q = cte$. Então, M é estável se, e somente se, $q = \lambda$, o primeiro autovalor do Laplaciano de M.*

Demonstração. Ver [BdCE] página 128. □

Nesse caso vale o seguinte lema.

Lema 3.0.9. *A fronteira do tubo $\mathbb{S}^1(r) \times B(y) \subset \mathbb{Q}_c^2$, onde $B(y)$ é uma bola geodésica de raio y em $\mathbb{Q}_c^2$, é uma hipersuperfície de curvatura média constante estável se e somente se*

$$g_c(y) \geq r.$$

Demonstração. O operador de Jacobi do tubo é da forma $\Delta + q$, onde $q = Ric(N) + |B|^2 = (\sigma')^2 + g_c^{-2}(y)\cos^2(\sigma)$. Observe que, como a solução é do tipo ondulóide com y constante e $\sigma = 0$ temos que $q = g_c^{-2}(y)$ é constante e, portanto, o operador de Jacobi é a soma do Laplaciano com uma constante.

Segundo [BeGM] página 145, os autovalores do Laplaciano do produto de duas variedades são as somas dos autovalores de cada uma das variedades. Dessa forma, os autovalores do Laplaciano para o produto $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(g_c(y))$, fronteira de $\mathbb{S}^1(r) \times B(y)$ são $\{0, r^{-2}, g_c^{-2}(y), r^{-2} + g_c^{-2}(y)\}$. Assim, o primeiro autovalor diferente de zero é o mínimo entre

$$\{r^{-2}, g_c^{-2}(y)\}.$$

Pelo critério de estabilidade anterior, esse valor mínimo tem que ser atingido em $q = g_c^{-2}(y)$, ou seja

$$r^{-2} \geq g_c^{-2}(y)$$

$$g_c^2(y) \geq r^2$$

$$g_c(y) \geq r.$$

□

Consideremos agora uma solução x, y e σ do sistema (2.7) do tipo ondulóide cuja coordenada y não seja constante. Seja Σ a hipersuperfície gerada por essa solução. Seja $s_0 \in \mathbb{R}$ o ponto aonde y atinge um máximo local. Como a curva é periódica e simétrica com relação aos pontos extremos, sabemos que existe um $s_1 > s_0$ tal que s_1 é um mínimo de y, ou seja, γ alterna máximos e mínimos de y igualmente espaçados pois, pelo lema 2.0.7 a solução é periódica em y. Portanto, se consideramos a distância entre dois máximos (ou mínimos) sucessivos como sendo $2\pi r$, escolhendo pedaços de γ com comprimento $2\pi nr$, $n \in \mathbb{N}$, na direção x, obteremos uma hipersuperfície fechada mergulhada em $\mathbb{S}^1(nr) \times \mathbb{Q}_c^2$.

Chamaremos de *período* de um ondulóide a distância entre dois máximos (ou mínimos) sucessivos. Sendo assim, fixada a curvatura média da hipersuperfície, o período dependerá apenas de y_M, valor máximo de y, e portanto o denotaremos como $P(y_M)$.

A solução do sistema (2.7) com condições iniciais $(x, y, \sigma) = (x(s_i), y(s_i), 0)$, $i = 0, 1$ será denotada por $x_i(s, y)$, $y_i(s, y)$, $\sigma_i(s, y)$. Fixado um ponto s_0 onde a coordenada $y(s_0)$ assume seu valor máximo, para y_M próximo a $y(s_0)$ a solução com condições iniciais $(x(s_0), y_M, 0)$ é, por continuidade, do tipo ondulóide. Analogamente para $(x(s_1), y_m, 0)$, com y_m próximo a $y(s_1)$.

Quando consideramos soluções com condições iniciais $(x(s_0), y_M, 0)$, e y_M próximo a $y(s_0)$, obtemos uma família de curvas que geram hipersuperfícies de mesma curvatura média h. O campo variacional dessa família é igual a

$$u_M = -\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial x}{\partial y_M} + \cos\sigma \frac{\partial y}{\partial y_M},$$

e satisfaz $Lu_M = 0$ ou seja, pode ser estendido por simetria a um campo de Jacobi em Σ.

Analogamente, o campo variacional associado a soluções com condição inicial $(x(s_1), y_m, 0)$ é dado por

$$u_m = -\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial x}{\partial y_m} + \cos\sigma \frac{\partial y}{\partial y_m},$$

e satisfaz $Lu_m = 0$. Observe que $u_M(s_0) = u_m(s_1) = 1$.

Vamos mostrar que o domínio nodal de u_M em torno de s_0 e o de u_m em torno de s_1 não podem se sobrepor. Dessa forma, o primeiro zero de u_M no intervalo (s_0, s_1) será estritamente menor do que o primeiro zero de u_m no mesmo intervalo. Antes disso provaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.0.8. *Para todo $t \in (s_0, s_1)$, a derivada do período com respeito a y_M, máximo de y em uma solução (x, y, σ) do tipo ondulóide é dado por*

$$\frac{dP}{dy_M} = \frac{-2}{\operatorname{sen}\sigma(t)} \left\{ u_M(t) - \frac{dy_m}{dy_M} u_m(t) \right\},$$

onde $y_m = y_m(y_M)$ é o valor mínimo de y ao longo da solução cujo máximo é y_M.

Demonstração. Fixemos $t \in (s_0, s_1)$. Como não existem pontos críticos de y nesse intervalo temos que $y'(t) = \text{sen}\sigma(t) \neq 0$ e portanto, pelo teorema da função implícita, existem funções $s_M(y_M), s_m(y_m)$, com y_M próximo a $y(s_0)$ e y_m próximo de $y(s_1)$, tal que

$$y_0(s_M(y_M), y_M) = y(t), \qquad y_1(s_m(y_m), y_m) = y(t),$$

e $s_M(y(s_0)) = t$, $s_m(y(s_1)) = t$. As derivadas dessas funções nos pontos $y(s_0)$ e $y(s_1)$, respectivamente são dadas por

$$\frac{ds_M}{dy_M} = \frac{-1}{\text{sen}\sigma(t)}\frac{\partial y}{\partial y_M}(t), \qquad \frac{ds_m}{dy_m} = \frac{-1}{\text{sen}\sigma(t)}\frac{\partial y}{\partial y_m}(t).$$

O período da curva com condições iniciais $(x(s_0), y_M, 0)$ no ponto s_0, para y_M próximo de $y(s_0)$ é dado por

$$\frac{1}{2}P(y(s_0)) = \frac{1}{2}P(y_M) + x_1(s_m(y_m(y_M)), y_m(y_M)) - x_0(s_M(y_M), y_M).$$

Derivando a equação acima obtemos:

$$\frac{dP(y(s_0))}{dy_M} = \frac{dP(y_M)}{y_M} + 2\left\{\frac{\partial x_1}{\partial s_m}\frac{\partial s_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_M} + \frac{\partial x_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_M} - \frac{\partial x_0}{\partial s_M}\frac{\partial s_M}{\partial y_M} - \frac{\partial x_0}{\partial y_M}\right\},$$

$$\frac{dP(y(s_0))}{dy_M} = \frac{dP(y_M)}{y_M} +$$
$$2\left\{\cos\sigma\left(\frac{-1}{\text{sen}\sigma}\right)\frac{\partial y}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_M} + \frac{\partial x_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_M} - \cos\sigma\left(\frac{-1}{\text{sen}\sigma}\right)\frac{\partial y}{\partial y_M} - \frac{\partial x_0}{\partial y_M}\right\},$$

$$\frac{dP(y(s_0))}{dy_M} = \frac{dP(y_M)}{y_M} +$$
$$\frac{2}{\text{sen}\sigma}\left\{\frac{\partial y_m}{\partial y_M}\left(-\cos\sigma\frac{\partial y}{\partial y_m} + \text{sen}\sigma\frac{\partial x}{\partial y_m}\right) + \left(\cos\sigma\frac{\partial y}{\partial y_M} - \text{sen}\sigma\frac{\partial x}{\partial y_M}\right)\right\},$$

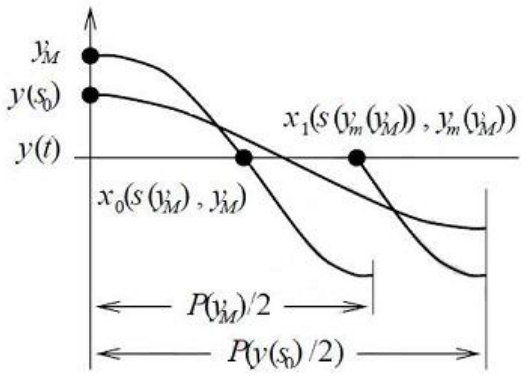

Figura 3.1: O período da curva com condições iniciais $(x(s_0); y_M; 0)$ no ponto s_0.

$$\frac{dP(y(s_0))}{dy_M} = \frac{dP(y_M)}{y_M} + \frac{2}{\text{sen}\sigma}\left\{u_M(t) - \frac{\partial y_m}{\partial y_M}u_m(t)\right\},$$

finalmente,

$$\frac{dP(y_M)}{y_M} = \frac{-2}{\text{sen}\sigma}\left\{u_M(t) - \frac{\partial y_m}{\partial y_M}u_m(t)\right\}.$$

□

Proposição 3.0.9. *Uma solução do tipo ondulóide cuja derivada do período com respeito ao máximo da coordenada y é negativo gera uma hipersuperfície de curvatura média constante instável.*

Demonstração. Sejam s_0 e s_1 como na proposição anterior, u_M, u_m os campos de Jacobi determinados anteriormente e $y_m = y(s_1)$. Seja t_0 o menor zero de u_M maior do que s_0 e t_1 o maior zero de u_m menor do que s_1 . Como

$$u_M(s_0) = \cos\sigma(s_0)\frac{\partial y}{\partial y_M}(y_M) = 1, u_m(s_0) = \cos\sigma(s_1)\frac{\partial y}{\partial y_m}(y_m) = 1$$

e

$$u_M(s_1) = -\,\text{sen}\sigma(s_1)\frac{\partial x}{\partial y_M}(y_M) < 0, u_m(s_0) = -\,\text{sen}\sigma(s_0)\frac{\partial x}{\partial y_m}(y_m) < 0,$$

temos que t_0, $t_1 \in (s_0, s_1)$.

Suponhamos por contradição que $t_0 \geq t_1$. Então existe $t \in (s_0, s_1)$ tal que $u_M(t)$, $u_m(t) \geq 0$. Pela fórmula da proposição 3.0.7 temos que $\dfrac{dP}{dy_m} \geq 0$ pois $\dfrac{dy_m}{dy_M} = \dfrac{g_c(y_M)\sigma'(s_M)}{g_c(y_m)\sigma'(s_m)} < 0$, o que contradiz a proposição.

Temos então que $t_0 < t_1$. Isso implica que a região nodal de u_M em torno de s_0 e a região nodal de u_m em torno de s_1 não podem se sobrepor. Então, obtemos duas regiões de Σ, separadas em vizinhanças disjuntas cujos primeiros autovalores do operador de Jacobi é igual a 0. Aumentando um pouco as vizinhanças obtemos duas regiões disjuntas em Σ cujos primeiros autovalores do operador de Jacobi são negativos, e portanto Σ é instável. □

Agora vamos analisar as soluções dos tipos D e E dadas pelo lema 2.0.7. Comecemos com o seguinte lema:

Lema 3.0.10. *Seja γ uma curva satisfazendo o sistema (2.7). Se $u(s) = \cos\sigma(s)$ então teremos que $Lu = fu$ para alguma função f definida sobre a curva γ'.*

Demonstração. Usando as equações do sistema e a definição de Lu temos:

$$u' = -\sigma' \operatorname{sen}\sigma,$$

$$u'' = -(\sigma'') \operatorname{sen}\sigma - (\sigma')^2 \cos\sigma.$$

Do valor de σ' obtido no sistema (2.7) segue

$$u'' = -(\sigma')^2 \cos\sigma - (h + f_c(y)\cos\sigma)' \operatorname{sen}\sigma$$

$$= -(\sigma')^2 \cos\sigma - f_c'(y)\cos\sigma \operatorname{sen}\sigma + \sigma' f_c(y) \operatorname{sen}^2\sigma.$$

De (2.2) obtemos

$$u'' = -(\sigma')^2 \cos\sigma + (n-1)g_c^{-2}(y)(y)\cos\sigma \operatorname{sen}\sigma + (n-1)\sigma' f_c(y) \operatorname{sen}^2\sigma.$$

Assim, como

$$f_c(y)\,\mathrm{sen}\sigma u' = -\sigma' f_c(y)\,\mathrm{sen}^2\sigma$$

e

$$g_c^{-2}(y)\cos^2\sigma u = g_c^{-2}(y)\cos^3\sigma,$$

somando os resultados acima obtemos que $Lu = g_c^{-2}(y)u$. □

Para prosseguir vamos usar a seguinte definição:

Definição 3.0.10. *Dada uma variedade M e um campo variacional u definido sobre M diremos que $x \in M$ é um ponto nodal se $u(x) = 0$. Um domínio nodal da função u é uma componente conexa em M, do conjunto de pontos nodais.*

Segue então a seguinte proposição sobre a estabilidade da solução de (2.7) do tipo D.

Proposição 3.0.10. *No caso esférico, curvas fechadas, mergulhadas e difeomorfas a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (D) geram fronteiras de domínios isoperimétricos instáveis em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Nesse tipo de curvas a função $u(s) = \cos\sigma(s)$ tem dois domínios nodais. A restrição de u a cada um deles, estendida com valor nulo na curva e por simetria em Σ, nos dá duas funções lipschitz u_1 e u_2 com suportes disjuntos. Pelo Lema 3.0.9 temos que

$$I(u_i) = -\int_\Sigma u_i L u_i d\Sigma = -\int_\Sigma f u_i^2 d\Sigma < 0, \quad i = 1, 2.$$

Então, para qualquer combinação linear v de u_1 e u_2 com média zero teremos que $I(v) < 0$, e portanto, a hipersuperfície é instável. □

Para descartar as soluções do tipo E o argumento é análogo ao anterior, levando em conta que nodóides produzem hipersuperfícies compactas imersas em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^2$ e utilizando valores adequados para $r > 0$ (Basta considerar um trecho da curva entre dois máximos (ou mínimos) na coordenada y) temos o próximo resultado.

Proposição 3.0.11. *Hipersuperfícies geradas por soluções do tipo E (nodóides) em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{Q}_c^n$ são instáveis.*

Demonstração. Segue dos mesmo argumentos da proposição anterior, usando a mesma função da proposição 3.0.10. □

Capítulo 4

Fronteiras de Domínios Isoperimétricos

Como vimos anteriormente, nem todas as soluções do sistema (2.7) são soluções para o problema isoperimétrico. Recordemos primeiramente que como solução do problema isoperimétrico estamos buscando variedades compactas e mergulhadas. Além disso, como visto na seção anterior, uma solução do problema isoperimétrico é também uma hipersuperfície estável.

Nessas condições, podemos descartar por exemplo as soluções dos tipos A e C (Catenárias e semi-retas verticais) pois geram subvariedades não compactas. Além disso, pela proposição 3.0.9 da seção anterior, soluções do tipo F (ondulóides) com y não constante, e cuja derivada do período com respeito ao valor máximo da coordenada y é negativa geram hipersuperfícies instáveis. Podemos descartar também as soluções dos tipos D e E por conta dos argumentos sobre estabilidade já apresentados.

Usando as restrições apresentadas nas seções anteriores com relação as soluções do sistema (2.7) provamos o seguinte resultado:

Proposição 4.0.12. *Os domínios isoperimétricos em* $\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{Q}^2_c$ *são conexos*

e podem ser dos seguintes tipos:

(i) Regiões cujas fronteiras são geradas por ondulóides com um determinado período, que são difeomorfas a $\mathbb{S}^1(r)\times B^2$*, onde* B^2 *é a bola de dimensão* 2 *em* $\mathbb{Q}^2_c$*. Incluimos nesse caso os tubos em torno de geodésicas fechadas, gerados por curvas do tipo ondulóide com* y *constante.*

(ii) Regiões com fronteiras geradas por curvas do tipo B *do lema* 2.0.7*.*

(iii) No caso esférico, regiões do tipo $[a,b]\times\mathbb{S}^2$*, limitadas por duas curvas totalmente geodésicas do tipo* C*.*

Segue direto da proposição anterior o seguinte corolário a respeito das fronteiras de domínios isoperimétricos em $\mathbb{S}^1\times\mathbb{Q}^2_c$.

Corolário 4.0.4. *Um domínio isoperimétrico em* $\mathbb{S}^1\times\mathbb{Q}^2_c$ *tem fronteira suave.*

Capítulo 5

Domínios isoperimétricos: Caso Euclidiano em dimensão dois

Nesse capítulo estudaremos os domínios isoperimétricos em variedades do tipo $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}^2$. Veremos que as soluções do tipo ondulóide não são soluções do problema isoperimétrico e, ao final da seção, calcularemos o Perfil Isoperimétrico em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}^2$. Começaremos com a seguinte definição:

Definição 5.0.11. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, de dimensão n e classe C^∞. O Perfil Isoperimétrico de (M, g) é uma função $A : [0, vol_n(M, g)] \to \mathbb{R}^+$ definida por*

$$A(V) = inf\{vol_{n-1}(\partial\Omega) : \Omega \subset M,\ vol_n(\Omega) = V\},$$

onde Ω é um domínio regular compacto.

Proposição 5.0.13. *Considere ondulóides próximos a um tubo em torno de uma geodésica fechada, todos com a mesma curvatura média. A derivada do período com respeito ao valor máximo da coordenada y é estritamente negativa.*

Demonstração. A menos de uma mudança de escala podemos supor $h = -1$. Se tomarmos x como variável independente no sistema (2.7) obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial x}{\partial s}^{-1} = \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma^{-1} = \operatorname{tg}\sigma; \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{\partial \sigma}{\partial s}\dfrac{\partial x}{\partial s}^{-1} = \left(-1 + \dfrac{\cos\sigma}{y}\right)\cos\sigma^{-1} = -\dfrac{1}{\cos\sigma} + \dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

Considere a solução $y(x, A)$, $\sigma(x, A)$ do sistema de equações anterior com condições iniciais $y(0, A) = A$, $\sigma(0, A) = 0$. Para $(y, \sigma) = (1, 0)$ temos que:

$$y(x, A) = 1 + (A-1)y_1(x) + (A-1)^2 y_2(x) + (A-1)^3 y_3(x) + O((A-1)^4),$$

$$\sigma(x, A) = (A-1)\sigma_1(x) + (A-2)^2\sigma_2(x) + (A-1)^3\sigma_3(x) + O((A-1)^4),$$

e $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = y_3(0) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \sigma_3(0) = 0$.

Considere também o desenvolvimento de $\operatorname{tg}\sigma$ em série de Maclaurin:

$$\operatorname{tg}\sigma = \sigma + \frac{\sigma^3}{3} + O(\sigma^4)$$

$$= (A-1)\sigma_1(x) + (A-2)^2\sigma_2(x) + (A-1)^3\sigma_3(x) + \frac{\sigma_1^3}{3}(A-1)^3 + O((A-1)^4),$$

o desenvolvimento de $-\dfrac{1}{\cos\sigma}$ em série de Maclaurin:

$$-\frac{1}{\cos\sigma} = -1 - \frac{\sigma^2}{2} + O(\sigma^4)$$

$$= -1 - \frac{\sigma_1^2}{2}(A-1)^2 - \sigma_1\sigma_2(A-1)^3 + O((A-1)^4),$$

e o desenvolvimento de $\dfrac{1}{y}$ em séreie de Taylor em torno de $y = 1$:

$$\frac{1}{y} = -y + (y-1)^2 - (y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

$$= -y_1(A-1) - y_2(A-1)^2 - y_3(A-1)^3 + y_1^2(A-1)^2 + 2y_1y_2(A-1)^3 - y_1^3(A-1)^3 + O((A-1)^4).$$

Usando as equações do sistema anterior e as séries acima obtemos:

$$y'(x, A) = (A-1)y_1' + (A-1)^2 y_2' + (A-1)^3 y_3' + O((A-1)^4)$$

$$= (A-1)\sigma_1 + (A-1)^2\sigma_2 + (A-1)^3\left(\sigma_3 + \frac{\sigma_1^3}{3}\right) + O((A-1)^4),$$

e, portanto, $y_1' = \sigma_1$, $y_2' = \sigma_2$, e $y_3' = \sigma_3 + \sigma_1^3/3$. Além disso

$$\sigma'(x,A) = (A-1)\sigma_1' + (A-1)^2\sigma_2' + (A-1)^3\sigma_3' + O((A-1)^4)$$

$$= (A-1)(-y_1) + (A-1)^2\left(-y_2 + y_1^2 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) +$$

$$(A-1)^3(-y_3' - \sigma_1\sigma_2 + 2y_1y_2 - y_1^3) + O((A-1)^4),$$

e $\sigma_1' = -y_1$, $\sigma_2' = -y_2 + y_1^2 - \sigma_1^2/2$ e $\sigma_3' = -y_3 - \sigma_1\sigma_2 + 2y_1y_2 - y_1^3$.

Com as informações acima podemos montar os seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$\begin{cases} y_1' = \sigma_1, & y_1(0) = 1, \sigma_1(0) = 0, \\ \sigma_1' = -y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2' = \sigma_2, & y_2(0) = \sigma_2(0) = 0, \\ \sigma_2' = -y_2 + y_1^2 - \dfrac{{\sigma_1}^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3' = \sigma_3 + \dfrac{\sigma_1^3}{3}, & y_3(0) = \sigma_3(0) = 0. \\ \sigma_3' = -y_3 - \sigma_1\sigma_2 + 2y_1y_2 - y_1^3 \end{cases} \tag{5.1}$$

Dadas as condições iniciais, o primeiro sistema tem a solução $y_1(x) = \cos(x)$, e $\sigma_1(x) = -\operatorname{sen}(x)$. Usando os valores encontrados para y_1 e σ_1 no segundo sistema obtemos:

$$\begin{cases} y_2' = \sigma_2, & y_2(0) = \sigma_2(0) = 0, \\ \sigma_2' = -y_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos^2(x)}{2} \end{cases}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{cases} y_2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{4} \\ \sigma_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}. \end{cases}$$

Substituindo os valores acima em (5.1) se transforma em:

$$\begin{cases} y_3' = \sigma_3 - \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}, & y_3(0) = \sigma_3(0) = 0, \\ \sigma_3' = -y_3 + \dfrac{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x)}{2} + \dfrac{\cos(x)(1-\cos(2x))}{2} - cos^3(x) \end{cases}$$

que toma a forma final

$$\begin{cases} y_3' = \sigma_3 - \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}, & y_3(0) = \sigma_3(0) = 0. \\ \sigma_3' = -y_3 + \dfrac{\cos(3x)}{2} + \dfrac{\cos(x)}{2} - \cos^3(x) \end{cases}$$

Derivando a primeira equação do sistema obtemos a equação de segunda ordem

$$y_3''(x) + y_3 = \frac{\cos(3x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2},$$

cujas condições iniciais são $y_3(0) = 0$ e $y_3'(0) = 0$. Nessas condições, a solução da equação não homogênea acima será dada pela soma da solução da equação homogênea correspondente com soluções particulares das equações

$$y_3''(x) + y_3(x) = \frac{\cos(3x)}{2},$$

e

$$y_3''(x) + y_3(x) = -\frac{\cos(x)}{2},$$

cujas soluções são, respectivamente

$$y_3(x) = -\frac{\cos(3x)}{16},$$

e

$$y_3(x) = -\frac{x\operatorname{sen}(x)}{4}.$$

Portanto a solução da equação será:

$$y_3(x) = \cos(x) - \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{4} - \frac{\cos(3x)}{16}.$$

Logo, $y_3' = -\mathrm{sen}(x) - \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{4} - \dfrac{x\cos(x)}{4} + \dfrac{3\,\mathrm{sen}(3x)}{16}$, e assim, $y_3'(\pi) = \dfrac{\pi}{4}$. Nosso objetivo é encontrar uma função $x(A)$ tal que $\sigma(x(A), A)=0$ para A próximo de 1. Essa função nos dá metade do período da solução do tipo ondulóide cujo valor máximo da coordenada y é igual a A. Seja f definida pela igualdade $\sigma(x, A) = (A-1)f(x, A)$. Então, usando a expansão anteriormente vista para σ, temos que

$$f(x, A) = \sigma_1(x) + (A-1)\sigma_2(x) + (A-1)^2\sigma_3(x) + O((A-1)^3).$$

Observe que, para $A \neq 1$ temos $\sigma(x, A) = 0$ se, e somente se, $f(x, A) = 0$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\pi, 1) = \sigma_1'(\pi) = 1 \neq 0$, o teorema da função implícita implica que existe $x(A)$ para A próximo de 1 tal que $x(1) = \pi$ e $f(x(A), A) = 0$. Diferenciando a igualdade $f(x(A), A) = 0$ obtemos, para $x = \pi$ e $A = 1$,

$$f_x \frac{dx}{dA} + f_A = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{dx}{dA}(A) = -\frac{f_A}{f_x}(\pi, 1) = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1'}(\pi) = 0,$$

pois $\sigma'(\pi) = 1$ e $\sigma_2(\pi) = 0$.

Derivando (5.2) obtemos

$$f_{xx}\left(\frac{dx}{dA}\right)^2 + f_x\frac{d^2x}{dA^2} + 2f_{xA}\frac{dx}{dA} + f_{AA} = 0.$$

Como $\dfrac{dx}{dA} = 0$ para $x = \pi$ vale que

$$\frac{d^2x}{dA^2}(\pi) = -\frac{f_{AA}}{f_x}(\pi) = -2\sigma_3(\pi).$$

De (2.7) obtemos $\sigma_3(\pi) = y_3'(\pi) - {\sigma_1}^3(\pi)/3 = y_3'(\pi) = \dfrac{\pi}{4}$. Fazendo a expansão em série de Taylor da função $x(A)$ em torno de $A = 1$,

$$x(A) = x(1) + \frac{dx}{dA}(A-1) + \frac{d^2x}{dA^2}(A-1)^2 + O((A-1)^3).$$

Substituindo os valores obtidos temos:

$$x(A) = \pi - \frac{\pi}{2}(A-1)^2 + O((A-1)^3).$$

Como o segundo termo da soma acima é negativo, temos que o período é estritamente decrescente. □

Podemos provar o seguinte resultado:

Proposição 5.0.14. *A derivada do período de uma solução do tipo ondulóide com respeito ao valor máximo da coordenada y é negativa. Sendo assim, a hipersuperfície gerada por ondulóides é instável em* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}^2$.

Demonstração. A menos de uma mudança de escala podemos supor $h = -1$. Para uma solução do tipo ondulóide o valor máximo y_M da coordenada y pertence ao intervalo $(1, 2)$. A solução constante $y \equiv 1$, para a qual $J = 1/2$, corresponde a um tubo em torno de uma geodésica fechada. O valor $y_M = 2$ corresponde a uma esfera com $J \equiv 0$. Observe que $(1 - 2J) > 0$ pois $J \in (0, 1/2)$ e que

$$J_0 = \cos \sigma y - \int_0^y t dt,$$

e portanto

$$\frac{dJ_0}{dy} = \cos \sigma(s) - y,$$

e

$$\frac{dJ_0}{dy_M} = 1 - y_M < 0.$$

Como $\frac{dP}{dy_m} = \frac{dP}{dJ}\frac{dJ}{dy_m}$ e $\frac{dJ}{dy_m} < 0$, só precisamos mostrar que $\frac{dP}{dJ} > 0$. Uma vez demonstrado esse fato, a instabilidade segue diretamente da proposição 3.0.9.

Se o ondulóide é tal que pode ser escrito como gráfico de uma função $f(x) = y$ e x_M e x_m são tais que $f(x_M) = y_M$ e $f(x_m) = y_m$, então, o período do ondulóide se dá por:

$$2\int_{x_m}^{x_M} dx = 2\int_{f(x_m)}^{f(x_M)} \frac{dx}{dy}dy = 2\int_{y_m}^{y_M} \frac{dx}{dy}dy,$$

onde $\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\sigma(s)}{\sqrt{1-\cos^2\sigma(s)}}$, segundo (2.9).

Como $J_0(s) = \cos\sigma(s)y - \frac{y^2}{2}$ temos,

$$\sqrt{1-\cos^2\sigma(s)} = \sqrt{1-\frac{(J+y^2/2)^2}{y^2}} = \frac{(y^2-(J+y^2/2)^2)^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

Logo, $\frac{dx}{dy} = \frac{J+y^2/2}{(y^2-(J+y^2/2)^2)^{\frac{1}{2}}}$, e portanto,

$$P = 2\int_{y_m}^{y_M} \frac{J+y^2/2}{(y^2-(J+y^2/2)^2)^{\frac{1}{2}}}dy.$$

Considere a superfície Riemanniana Σ_J definida pela equação algébrica

$$\omega^2 = y^2 - (J - y^2/2)^2 = (y - (J + y^2/2))(y + (J + y^2/2)),$$

cujas raízes são $1 \pm \sqrt{1-2J}$ e $-1 \pm \sqrt{1-2J}$. O período do ondulóide pode ser calculado através da integral

$$\int_\alpha \left(J + \frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{\omega},$$

onde α é o bordo em Σ_J de uma curva em $\mathbb{C}$ que contém o segmento $[y_m, y_M]$ mas não contém as raizes de ω.

Observe que

$$\frac{dP}{dJ} = \int_\alpha \frac{d}{dJ}\left(\frac{J}{\omega}\right) + \frac{d}{dJ}\left(\frac{y^2}{2\omega}\right) dy \ \ e \ \ \omega' = \frac{-2J - y^2}{2\omega},$$

e assim

$$\left(\frac{J}{\omega}\right)' = \frac{4\omega^2 + 4J^2 + 2y^2 J}{4\omega^3} \ \ e \ \ \left(\frac{y^2}{2\omega}\right)' = \frac{2y^2 J + y^4}{4\omega^3}.$$

Usando as derivadas acima obtemos:

$$\frac{dP}{dJ} = \int_\alpha \frac{y^2}{\omega^3} dy = \int_\alpha \frac{y}{2\omega(y + (J + y^2/2)} dy + \int_\alpha \frac{y}{2\omega(y - (J + y^2/2)} dy.$$

Essa integral não pode ser calculada como uma integral real pois a 1-forma $y^2 dy/\omega^3$ tem pólos em Σ_J nos pontos y_m,y_M. Consideremos a função meromorfa

$$\phi(y) = \frac{1}{1-y}\left\{y - \frac{2}{1-2J}(y - (J + y^2/2))\right\}\frac{1}{\omega}.$$

A função $\omega\phi$ é polinomial em y, pois o fator entre chaves se anula em $y = 1$. Um cálculo direto mostra que

$$\frac{y^2 dy}{\omega^3} + d\phi = \frac{\psi(y, J) dy}{(1-2J)\omega(y + (J + (y^2/2)))},$$

onde

$$\psi(y, J) = (y + (J + y^2/2)) - 2J(y + 1).$$

Como o denominador da fração obtida não se anula em uma vizinhança do segmento $[y_m, y_M]$ a integral de $y^2/\omega^3 + d\phi$ pode ser reduzida ao eixo real. Além disso o denominador é positivo, pois $(1 - 2J) > 0$ e $\omega > 0$. Por outro lado temos que, para qualquer polinômio $p(y)$,

$$d\left(p(y)\frac{y^2 - (J + y^2/2)}{\omega}\right) = p'(y)\frac{y - (J + y^2/2)}{\omega} + p(y)\frac{(J - y^2/2)}{\omega(y + (J + y^2/2))}.$$

Então, concluímos que

$$\frac{y^2 dy}{\omega^3} + d\phi + d\left(p(y)\frac{y^2 - (J + y^2/2)}{(1-2J)\omega}\right) = \frac{q(y, J) dy}{(1-2J)\omega(y + (J + y^2/2))},$$

onde $q(y, J)$ é dado por

$$q(y, J) = (y + (J + y^2/2)) - 2J(y + 1) + p'(y)\omega^2 + p(y)(J - y^2/2).$$

Queremos mostrar que q é positiva dentro da região Ω no plano yJ definido pelas igualdades $0 < J < y^2 - y^2/2$, e $0 < y < 1/2$. Escolhendo um polinômio $p(y)$ com $p'(y) \geq 0$ nós obtemos que a função $q(y, J)$ é côncava em J para y fixo. Então, é suficiente ver que ela não é negativa na fronteira de Ω para concluir que $q \geq 0$ em Ω. Restringindo q a curva $J = y - y^2/2$ e ao eixo $J = 0$ respectivamente, obtemos polinômios $f(y)$ e $g(y)$ dados por

$$f(y) = (y - 1)y(y - p(y)) \ \ e \ \ g(y) = y\left\{1 + p'(y)\left(y - \frac{y^3}{2}\right) + \frac{y}{2}(1 - p(y))\right\}.$$

Tomando $p(y) = 1$ obtemos:

$$f(y) = (y - 1)^2 y \ \ e \ \ g(y) = y.$$

Temos então $f(y) > 0$ para $y \in (0, 2) - \{1\}$ e $g(y) > 0$ para $y \in (0, 2)$.

□

Do resultado acima temos diretamente que ondulóides suficientemente próximos a esferas ($J \to 0$) são instáveis, pois a derivada do período com respeito ao valor máximo da coordenada y é sempre negativa.

Vamos calcular agora o perfil isoperimétrico:

Teorema 5.0.5. *O perfil isoperimétrico $A(V)$ do produto Riemanniano $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}^2$ é dado por:*

$$\begin{cases} \sqrt[3]{9V^2\omega_2} \ se \ V \leq V_0 \\ \sqrt{4V\pi r\omega_1} \ se \ V \geq V_0, \end{cases}$$

onde $V_0 = \dfrac{(4\pi\omega_1 r)^3}{3^4\omega_2^2}$.

As soluções do problema isoperimétrico para $V \leq V_0$ são as bolas geodésicas. As soluções para $V \geq V_0$ são os tubos ao redor de geodésicas fechadas do tipo $\mathbb{S}^1(r) \times \{p\}$.

Demonstração. Segue dos resultados anteriores que os únicos candidatos a ser fronteira de um domínio isoperimétrico são as bolas geodésicas e vizinhanças tubulares de geodésicas fechadas $\mathbb{S}^1(r) \times p$. As bolas geodésicas só existem acima de um certo valor determinado pela injetividade do raio da variedade $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}^2$.

O 3-volume da bola $B^3(s)$ de raio s é dado por $V = s^3\omega_2/3$, e o 2-volume de sua fronteira $\partial B^3(s)$ é dado por $A = s^2\omega_2$. Temos então que $s = \sqrt[3]{3V/\omega_2}$. Substituindo esse resultado na segunda igualdade temos que $A = \sqrt[3]{9V^2\omega_2}$.

Da mesma forma, a vizinhança tubular de uma geodésica fechada é dada por $\mathbb{S}^1(r) \times B^2(t)$, para algum $t > 0$. Seu volume é dado por $V = 2\pi r t^2 \omega_1/2$ e o volume de sua fronteira é dado por $A = 2\pi r t \omega_1$. Nesse caso temos $t = \sqrt{V/\pi r \omega_2}$. Substituindo esse resultado na segunda igualdade obtemos $A = \sqrt{4V\pi r\omega_1}$.

O valor V_0 vem da situação onde as duas possibilidades de solução são iguais. Com efeito,

$$\sqrt[3]{9{V_0}^2\omega_2} = \sqrt{4V_0\pi r\omega_1},$$

$$3^4 V_0 4\omega_2^2 = 4^3 V_0^3 \pi^3 r^3 \omega_1^3,$$

$$V_0 = \frac{(4\pi\omega_1 r)^3}{3^4\omega_2^2}.$$

□

Capítulo 6

Domínios isoperimétricos: Casos Esférico e Hiperbólico de duas dimensões

Começaremos descartando as soluções do tipo ondulóide por causa da instabilidade. Vamos usar o argumento da função teste.

Proposição 6.0.15. *Soluções do tipo ondulóide geram superfícies instáveis nos casos esférico e hiperbólico de duas dimensões.*

Demonstração. Consideremos a função parametrizada por comprimento de arco $u = g_c(y)\sigma'$. Calculando Lu usando (3.2) temos obtemos $Lu = fu$, onde $f = ((\sigma')^2 + g_c^{-2}\operatorname{sen}^2\sigma) > 0$. Sendo assim, $-uLu = -fu^2 < 0$. Como em uma ondulóide σ' muda de sinal nos obtemos a instabilidade considerando as partes positivas e negativas de u. □

O próximo teorema resume as possibilidades para os domínios isoperimétricos no caso hiperbólico.

Teorema 6.0.6. *Os domínios isoperimétricos para o produto* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{H}^2$ *são:*

(1) Bolas;

(2) Vizinhanças tubulares de geodésicas fechadas do tipo $\mathbb{S}^1(r) \times \{p\}$.

As soluções do tipo (1) correspondem a problemas de pequenos volumes, e as soluções do tipo (2) correspondem a problemas de grandes volumes.

Demonstração. Pela proposição anterior essas são as únicas possibilidades para solução do problema isoperimétrico em $\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{H}^2$. Pelo lema 3.0.8, para pequenos volumes as soluções são as bolas, pois, as fronteiras das vizinhanças tubulares não são estáveis. Como as bolas só existem em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{H}^2$ acima de um certo valor dado pelo raio de injetividade da variedade $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{H}^2$, implicando portanto, que os tubos são as soluções para grandes volumes. □

Para o caso esférico temos o seguinte resultado:

Teorema 6.0.7. *Os domínios isoperimétricos no produto riemanniano* $\mathbb{S}^1(r)\times \mathbb{S}^2$ *são:*

(1)Bolas ou complementos de bolas;

(2) Vizinhanças tubulares de geodésicas fechadas $\mathbb{S}^1(r) \times \{p\}$*, que são difeomorfas a* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$*;*

(3) Seções limitadas por duas curvas totalmente geodésicas do tipo $\{p\}\times\mathbb{S}^2$ *que são difeomorfas a* $[a, b] \times \mathbb{S}^2$.

As bolas são soluções para pequenos volumes. Se $r > 1$ *os tubos não são soluções e, se* r *é tal que*

$$r < \frac{\omega_2}{\pi\omega_1}, \tag{6.1}$$

ou equivalentemente,

$$2\pi r\omega_1 < 2\omega_2, \tag{6.2}$$

então as seções não são soluções.

Observação 6.0.2. *Para valores de r fora da faixa descrita acima os três tipos de domínio podem ocorrer.*

Demonstração. As três possibilidades descritas acima são as que foram selecionadas pelas discussões dos capítulos anteriores e pela primeira proposição desse capítulo. Para pequenos volumes as bolas são soluções, pois, pelo lema 3.0.8 pequenos tubos são instáveis, e as seções limitadas tem fronteiras de volume constante. Se o volume do domínio for perto do volume da variedade então as soluções são os complementos de bolas.

Segundo o lema 3.0.8 a fronteira de um tubo é uma hipersuperfície CMC estável se e somente se $g_c(y) \geq r$, ou seja, se $\text{sen}(y) \geq r$. Portanto, $r > 1$ se e somente se o tubo de altura $y = \pi/2$ é instável, o que ocorre se, e somente se, todos os tubos são instáveis.

A desigualdade (6.2) ocorre se e somente se o volume de um tubo qualquer é menor do que $2\omega_2$, que é o volume da fronteira de uma seção, ou seja, nesse caso as seções não podem ser fronteiras da solução do problema isoperimétrico. □

Vamos agora explicitar o perfil isoperimétrico para os casos esférico e hiperbólico de dimensão dois. O perfil isoperimétrico será denotado por A_i, $i = 1, 2, 3$, onde i denota o tipo de solução dadas pelos teoremas 6.0.7 e 6.0.8.

Seja $h > 0$ e γ_h a curva geratriz de $\partial\Omega_h$ com (ξ, η) sendo o ponto cuja coordenada y é máxima ao longo de γ_h. Nesse caso, $h = h_c(\eta)$, onde h_c é dado por (2.10) em I_c, $c = \pm 1$, onde $I_1 = (0, \pi]$ e $I_{-1} = (0, \infty)$.

Teorema 6.0.8. *[HsH],[P] Seja $\eta \in I_c$. Temos então que*

$$A_1(h) = 2\omega_1 \int_0^\eta \frac{g_c(y)}{\sqrt{1 - (u_c(\eta, y))^2}} dy, \tag{6.3}$$

$$V_1(h) = 2\omega_1 \int_0^\eta \frac{g_c(y)(u_c(\eta, y))^2}{h\sqrt{1 - (u_c(\eta, y))^2}} dy, \tag{6.4}$$

onde $h = h_c(\eta)$ *e* $-\cos\sigma(y) = u_c(\eta, y) = h/h_c(y)$ *e* $A_1(h)$ *e* $V_1(h)$ *são o* 2*-volume de* $\partial\Omega_h$ *e o* (3)*-volume de* Ω_h*, respectivamente.*

Para $c = -1$ *temos:*

$$A_1(h) = 8\pi\left\{\frac{1}{h^2-1} + \frac{h^2}{(h^2-1)^{3/2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\right\},$$
$$V_1(h) = 8\pi h\left\{\frac{1}{h^2-1} + \frac{2-h^2}{(h^2-1)^{3/2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{h^2-1}}\right\},$$

e para $c = 1$*,*

$$A_1(h) = 4\pi\left\{\frac{2}{h^2+1} + \frac{h^2}{(h^2+1)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{1+h^2}+1}{\sqrt{h^2+1}-1}\right\},$$
$$V_1(h) = 4\pi h\left\{\frac{2+h^2}{(h^2+1)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{1+h^2}+1}{\sqrt{h^2+1}-1} - \frac{2}{1+h^2}\right\}.$$

Se $V_2(h)$ *e* $A_2(h)$ *são os volumes do tubo de altura* $y > 0$ *e sua fronteira, respectivamente, temos*

$$A_2(y) = 2\pi r\omega_1 g_c(y),$$
$$V_2(y) = 2\pi r\omega_1 \int_0^y g_c(t)dt.$$

Para $c = -1$ *temos:*

$$A_2(y) = 2\pi r\omega_1 \operatorname{senh}(y),$$

$$V_2(y) = 2\pi r\omega_1(\cosh(y) - 1).$$

e para $c = 1$*,*

$$A_2(y) = 2\pi r\omega_1 \operatorname{sen}(y),$$

$$V_2(y) = 2\pi r\omega_1(1 - \cos(y)).$$

No caso $c = 1$ temos ainda, segundo o Teorema 6.0.8, as seções como soluções do problema isoperimétrico. Nesse caso o perfil isoperimétrico A_3 é constante e dado por $2\omega_2$.

Demonstração. Seja $\Sigma = \partial\Omega_h$. Nesse caso temos que o 2-volume de $\partial\Omega_h$ é dado por:

$$\int_\Sigma d\Sigma,$$

onde $d\Sigma = g_c(y)d\mathbb{S}^1(y)ds$ diretamente de (3.1). Portanto,

$$A_1(h) = 2\int_0^{s_0} g_c(y)d\mathbb{S}^1(y)ds = 2\omega_1 \int_0^{s_0} g_c(y)ds,$$

onde o fator 2 aparece pelo fato da solução ser simétrica com relação ao ponto $y(s_0)$ onde a solução atinge o valor máximo na coordenada y. Como $\dfrac{dy}{ds} = \text{sen}\sigma(s)$, temos que $ds = \dfrac{ds}{dy}dy = \dfrac{dy}{\text{sen}\sigma} = \dfrac{dy}{\sqrt{1-(u_c(\eta,y))^2}}$, onde $u_c(\eta, y) = h/h_c(y) = -\cos\sigma$. Sendo assim, a função $A_1(h)$ toma a forma final

$$A_1(h) = 2\omega_1 \int_0^{\eta} \frac{g_c(y)}{\sqrt{1-(u_c(\eta,y))^2}}dy.$$

O 3-volume de Ω_h é dado por:

$$V_1 = 2\int d\Omega_h = 2\int\int_{R_h} \omega_1 g_c(y)dxdy,$$

onde $R_h = \Omega_h/O(1)$. Usaremos agora o teorema de Green para passar a uma integral na fronteira de Ω_h.

O teorema de green diz que para funções $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ de classe C^1 em uma região fechada e limitada D cuja fronteira ∂D está orientada positivamente vale a seguinte igualdade:

$$\oint_{\partial D} F_1dx + F_2dy = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy.$$

Fazendo $F_1 = -\dfrac{\cos\sigma}{h}g_c(y)$ e $F_2 = 0$ temos, usando (2.11), que

$F_1 = -\int_0^y g_c(t)dt$, e portanto, $-\frac{\partial F_1}{\partial y} = g_c(y)$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$.

Dessa forma temos que

$$V_1 = 2\omega_1 \int_{\partial R_h} F_1 dx = 2\omega_1 \int_{\partial R_h} -\frac{\cos\sigma}{h} g_c(y)dx$$

$$= 2\omega_1 \int_0^\eta \frac{u(\eta,y)g_c(y)}{h}\frac{dx}{dy}dy = 2\omega_1 \int_0^\eta \frac{g_c(y)(u_c(\eta,y))^2}{h\sqrt{1-(u_c(\eta,y))^2}}dy,$$

onde a última igualdade decorre de (2.9).

Os valores de A_i e V_i para $i = 2, 3$ são calculados diretamente do fato das soluções serem do tipo tubo ($i = 2$) e do tipo seções ($i = 3$). Vamos então aos cálculos de A_1 e V_1: Sem perda de generalidade, simplificaremos a notação da seguinte forma: $u_c(\eta, y) = u$ e $g_c(y) = g$.

Temos que (2.8) toma a seguinte forma:

$$J_c(s) = \begin{cases} -gu + h(\sqrt{g^2+1} - 1) = 0 & se\ \ c = -1 \\ -gu + h(\sqrt{1-g^2} - 1) = 0 & se\ \ c = 1 \end{cases}$$

Trataremos do caso $c = -1$. O caso $c = 1$ é inteiramente análogo com apenas algumas mudanças em determinadas fórmulas. Direto das equações acima temos então:

$$gu = h(\sqrt{g^2+1} - 1),$$

elevando ao quadrado temos

$$g^2u^2 = h^2(g^2 + 2(1 - \sqrt{g^2+1})),$$

$$g^2(u^2 - h^2) = 2h^2(1 - \sqrt{g^2+1}),$$

que é equivalente a

$$g^2(h^2 - u^2) + 2h^2(1 - \sqrt{g^2+1}) = 0.$$

Somando e diminuindo $h^2 + u^2$ obtemos

$$g^2(h^2 - u^2) + 2h^2 - 2h^2\sqrt{g^2+1}) + h^2 + u^2 - h^2 - u^2 = 0,$$

ou seja,

$$(g^2+1)(h^2-u^2) - 2h^2\sqrt{g^2+1} + (h^2+u^2) = 0.$$

Notemos agora que a equação acima pode ser vista como uma equação do 2°grau cuja variável é $\sqrt{g^2+1}$, e cujas soluções são $\sqrt{g^2+1} = 1$ e $\sqrt{g^2+1} = \dfrac{h^2+u^2}{h^2-u^2}$.

Como a primeira solução implica $g \equiv= 0$ temos que a segunda solução é a que se adequa ao nosso problema. Dessa forma chegamos a seguinte conclusão: $\sqrt{g^2+1} = \dfrac{h^2+u^2}{h^2-u^2}$ e $g = \dfrac{2hu}{h^2-u^2}$. Agora observe que

$$\frac{dg}{du} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{du}.$$

Usando que em $c = -1$, $g = \operatorname{senh} y$ e $(\operatorname{senh} y)' = \cosh y = \sqrt{(\operatorname{senh} y)^2+1} = \sqrt{g^2+1}$ temos

$$2h\frac{h^2+u^2}{(h^2-u^2)^2} = \frac{h^2+u^2}{h^2-u^2}\frac{dy}{du},$$

que toma a forma final

$$\frac{dy}{du} = \frac{2h}{h^2-u^2}.$$

Com essas informações em mãos, e já substituindo o valor de ω_1, podemos realizar uma mudança de variáveis em (6.3) e (6.4) de modo a obtermos as seguintes integrais:

$$A_1(h) = 16\pi\int_0^1 \frac{h^2u}{(h^2-u^2)^2\sqrt{1-u^2}}du \ \ e \ \ V_1(h) = 16\pi\int_0^1 \frac{hu^3}{(h^2-u^2)^2\sqrt{1-u^2}}du.$$

Agora, realizando a mudança de variáveis $v = \sqrt{1-u^2}$, obtemos:

$$A_1(h) = 16\pi h^2\int_0^1 \frac{1}{((h^2-1)+v^2)^2}dv,$$

e

$$V_1(h) = 16\pi h\int_0^1 \frac{1-v^2}{((h^2-1)+v^2)^2}dv =$$

$$16\pi h\left\{\int_0^1 \frac{1}{((h^2-1)+v^2)^2}dv - \int_0^1 \frac{v^2}{((h^2-1)+v^2)^2}dv\right\}.$$

Com uma mudança de variáveis trigonométrica $v = (h^2 - 1)\,\mathrm{tg}\theta$ as integrais acima são calculadas diretamente, e obtemos o resultado final que desejávamos.

□

A figura 6.1 mostra o perfil isoperimétrico em $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{H}^2$. Ela mostra um único ponto de cruzamento entre as soluções possíveis. O gráfico em vermelho representa as soluções do tipo 1 (Bolas), enquanto o preto respresenta as soluções do tipo 2 (tubos).

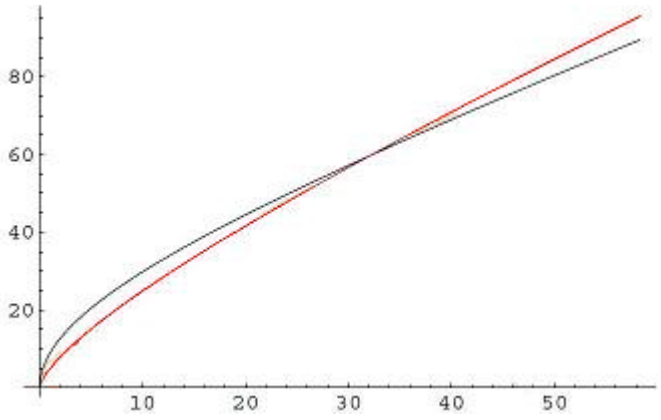

Figura 6.1: Perfil isoperimétrico no caso hiperbólico com r=1

As possibilides para o perfil isoperimétrico de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ são mostradas nas figuras 6.2 e 6.3. As figuras mostram a metade do volume total. A outra metade é obtida refletindo o perfil isoperimétrico com respeito a linha vertical em $V/2$.

Existem dois valores críticos para r. O primeiro é dado pela desigualdade (6.2), que nesse caso nos dá:

$$r < r_1 = \frac{\omega_2}{\pi\omega_1} = \frac{4\pi}{2\pi^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,64.$$

Para $r < r_1$ temos a seguinte situação:

Embora existam em todo ponto, as seções não são fronteiras do domínio isoperimétrico em nenhum momento;

As bolas são soluções para pequenos volumes;

Os tubos são soluções para volumes maiores, pois, para pequenos volumes o lema 3.0.8 diz que eles são instáveis, e portanto não podem ser solução. O gráfico tem um ponto de transição de bolas para tubos (figura 6.2).

Para $r = r_1$ temos primeiro as bolas como soluções, seguida pelos tubos e depois uma única seção com metade do volume da variedade e com a área igual a do tubo que tem $y \equiv \pi/2$.

O segundo valor crítico r_2 se encontra no intervalo $(r_1, 1]$, e é tal que, em um determinado ponto, os três tipos de solução coincidem. Esse valor crítico é aproximadamente $0,69$.

Para $r_1 < r < r_2$ a situação é similar a de $r = r_1$. Quanto maior o valor de r mais o ponto de transição das bolas para os tubos se aproxima do ponto de transição dos tubos para as seções, se encontrando justamente em $r = r_2$ como descrito acima.

Para $r_2 < r < 1$ as bolas são soluções para pequenos volumes e as seções são soluções para os volumes maiores. Os tubos, embora existam e sejam estáveis, não são fronteira do domínio isoperimétrico em nenhum momento (figura 6.3).

Finalmente, para $r > 1$ a situação é similar a anterior, mas com a diferença de que, de acordo com o lema 3.0.8 os tubos são instáveis.

Esses fatos seguem da análise das funções que determinam os volumes envolvidos e não são facilmente extendidos para $n > 2$.

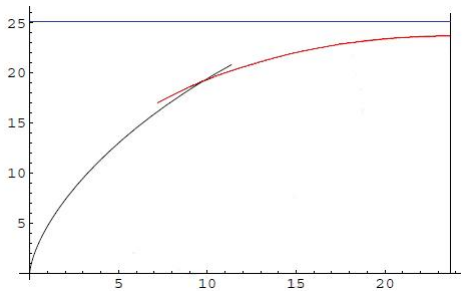

Figura 6.2: Perfil Isoperimétrico no caso esférico para $r < r_1$ e para $r_1 < r < r_2$

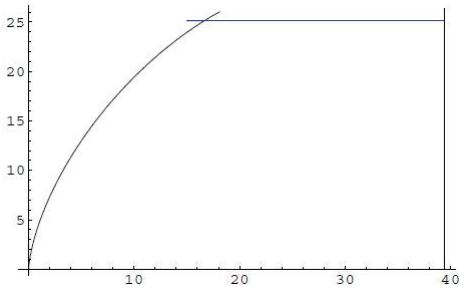

Figura 6.3: Perfil Isoperimétrico no caso esférico para $r_2 < r < 1$ e $r > 1$

Referências Bibliográficas

[A] Alexandrov, A.D., *Uniqueness theorems for surfaces in the large I-V*, Am. Math. Soc. Translat. **21** (1962), 341-416.

[BadCH] Back, A., Carmo, M. do, Hsiang, W.,-Y., *On fundamental equations of equivariant differential geometry*, Mimeo, Univ. of Calif., Berkeley.

[BdC] Barbosa, J.L., Carmo, M. do, *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Zeitschirft, **185**(1984), 339-353.

[BdCE] Barbosa, J.L., Carmo, M. do, Echenburg, J., *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*, Math. Zeitschrift, **197**(1988), 123-138.

[BeGM] Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E., *Le spectre d'une variete riemannienne*, Lectures Notes in Math. Vol. **194**, Springer, Berlin, (1971).

[Ber] Bernstein, F., *Über die isoparametrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläsche und in der Ebene*, Math. Ann. (60), (1905), 117-136.

[D] Dinghas, A., *Beweis der isoperimetrischen eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen Raum*, Sber. Akad. Wiss., Math-naturw. K1. 2A (149), (1940), 399-432.

[DSm] Dinghas, A., Schimidt,E. *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum*, Abh. Preudβ. Akad. Wiss., Math-naturw. K1. 7 (1943).

[F] Federer, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, (1969).

[He] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups, e Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, (1978).

[H] Hsiang, W.,-Y., *On Generalization of Theorems of A.D. Alexandrov e C. Delaunay on Hypersurfaces os Constant Mean Curvature*, Duke Mathematical Journal **49** N°3, (1982), 485-496.

[H2] Hsiang, W.,-Y., *Isoperimetric Regions and Soap Bubbles*, Pitman Monogrpahs Surveys Pure Appl. Math., 52, Longman Sci. Tech., Harlow, (1991), 229-240.

[H3] Hsiang, W.,-Y., *A symmetry theorem on isoperimetric regions*, PAM-409, UC Berkeley, (1988).

[HsH] Hsiang, W.,-T., Hsiang, W.,-Y., *On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubles in non-compact symmetric spaces*, Invent. Math. **85**, (1989), 39-58.

[Ho] Hopf.H, *ODifferential Geometry in the Large, Lectures Notes in Math **1000***, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1993).

[M1] Morgan,F., *Clusters minimizing area plus lenght of singular curves*, Math. Ann. **299**, (1994), 697-714.

[M2] Morgan,F., *Geometric Measure Theory (A beginner´s guide* 2nd ed., Academic Press, San Diego, (1995).

[P] Pedrosa, R.H.L., *The Isoperimetric Problem in Spherical Cylinders*, Annals of Global Analysis and Geometry **26**, (2004), 333-354.

[PR] Pedrosa, R.H.L., Ritoré, M., *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. **48**, (1999), 1357-1394.

[S] Simons, J., *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. Math **88**, (1968), 62-105.

[Si] Simon, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proc. C.M.A., **3**, Australian Natl U., (1983).

[Sm1] Schimidt,E., *Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum kontanter negativer Krümmung*, Math. Z. (46), (1940), 204-230.

[Sm2] Schimidt,E., *Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgabe im Grossen*, Math. Z. (47), (1942), 489-642.

[Sm3] Schimidt,E., *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionzahl*, Math. Z. (49), (1943-44), 1-109.

[Sw] Schwarz, H.A., *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer Verlag, Berlim, (1890).

[X] Xing, Y., *Minimal Submanifolds and Related Topics*, Nankai Tracts in Mathematics - Vol. 8 (2003).