



Sobre a expansividade do atrator geométrico de Lorenz

por

Wellington da Silva Cordeiro

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

2010

Sobre a expansividade do atrator geométrico de Lorenz

Wellington da Silva Cordeiro

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Vitor Domingos Martins de Araújo

PhD - IM - UFRJ - Orientador.

Prof. Alexander Arbieto

PhD - IM - UFRJ

Prof. Isabel Lugão Rios

PhD - IM - UFF

Prof. José Koiller

PhD - IM - UFF

FICHA CATALOGRÁFICA

Cordeiro, Welington da Silva.

Sobre a expansividade do atrator geométrico de Lorenz/

Welington da Silva Cordeiro.

Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2010.

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IME.

1. Introdução.
2. Expansividade para fluxos
3. O atrator de Lorenz e seu modelo Geométrico.
4. Expansividade do Modelo Geométrico

(Mestrado-UFRJ/IM) Araújo, Vítor

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro III. Título.

Agradecimentos

A minha família, por tudo. Ao meu orientador, Vítor Araújo, pela dedicação como orientador e por todos os seus bons conselhos. Aos professores do IM/UFRJ, em especial ao prof. Alexander Arbieto pelo compartilhamento do conhecimento e experiências científicas. Aos meus colegas da pós-graduação, alguns dos quais posso chamar de amigos.

Resumo

Apresentamos a noção de expansividade para homeomorfismos e várias noções de expansividade para fluxos. Provamos que todas estas noções de expansividade para fluxos são equivalentes na ausência de pontos de equilíbrio, enquanto uma delas é satisfeita para um conjunto invariante por um fluxo com uma singularidade não-isolada: o atrator geométrico de Lorenz.

Palavras Chaves: expansividade, fluxo singular, atrator geométrico de Lorenz, Sensibilidade às condições iniciais.

Abstract

We present the notion of expansiveness for homeomorphisms and several notions of expansiveness for flows. We prove that all of expansiveness definitions are equivalent if there are no equilibria, but one of them is satisfied by an invariant set of a flow with a non-isolated singularity: the geometric Lorenz attractor.

Key Words: expansivity, singular flow, geometric Lorenz attractor, sensitivity to initial conditions.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Breve nota histórica sobre os resultados apresentados nesta dissertação	3
1.2	Notação e definições	4
1.3	Teoremas de Poincaré-Bendixon e Hartman-Grobman	8
1.4	Hiperbolicidade	9
2	Expansividade para fluxos	11
2.1	Expansividade para homeomorfismos	11
2.2	Expansividade para fluxos	12
2.3	Relação entre as várias noções de expansividade para fluxos	16
2.3.1	K-expansividade é equivalente à C-expansividade	20
2.4	Expansividade na ausência de singularidades	25
3	O Atrator de Lorenz e seu modelo geométrico	40
3.1	O atrator de Lorenz	41
3.1.1	O elipsóide sumidouro	44
3.2	Construção do Modelo Geométrico	46
3.2.1	A origem é uma singularidade não isolada de Λ	51

	1
3.3 As equações de Lorenz e seu modelo geométrico	55
4 Expansividade do Modelo Geométrico	57
4.1 Robustez da expansividade	69
4.2 Sensibilidade às condições iniciais	70
4.2.1 Sensibilidade para órbitas futuras numa vizinhança do atrator	71

Capítulo 1

Introdução

A noção de expansividade é uma definição técnica que implica a ‘sensibilidade às condições iniciais’, ou ‘caos’, além de outras consequências mais ricas. Trataremos neste texto de diversas noções de expansividade para dinâmicas em tempo contínuo (fluxos) e sua relação com a presença (ou ausência) de pontos de equilíbrio. Para dinâmicas contínuas em tempo discreto (iteração de homeomorfismos de um espaço métrico compacto) a expansividade significa que se para dois pontos dados seus iterados sempre estão próximos, então suas órbitas são iguais e, em particular, os pontos iniciais são os mesmos.

Note que se um sistema é expansivo, então dados dois pontos distintos, suas órbitas têm que se afastar no futuro, ou no passado. Esta consequência simples da expansividade é o que se chama de ‘sensibilidade às condições iniciais’ e pode ser usada como um dos critérios de ‘caoticidade’ em sistemas dinâmicos.

A extensão da noção de expansividade para fluxos exige cuidados porque a presença de pontos de equilíbrio e o tempo contínuo de iteração demandam certa

precisão técnica na definição que tem consequências não triviais.

Apresentaremos noções de expansividade para fluxos originalmente propostas por Bowen e Walters (em [4]) e depois por Komuro (em [8]) e relacionaremos (na seção 2) todas elas com a presença de singularidades no fluxo. Provaremos que todas estas noções são equivalentes na ausência de pontos de equilíbrio (também na seção 2) e demonstraremos que uma das definições é satisfeita por um conjunto invariante por um fluxo C^1 com singularidades não isoladas. Esse exemplo é o atrator geométrico de Lorenz, que também apresentamos brevemente antes de provar sua expansividade (na seção 3). Concluimos assim que o atrator geométrico de Lorenz é sensível às condições iniciais.

1.1 Breve nota histórica sobre os resultados apresentados nesta dissertação

- 1963, Lorenz

Divulgou o sistema de equações que ficou conhecido pelo seu nome observando que este sistema tem sensibilidade às condições iniciais, apesar da sua aparente simplicidade analítica (é dado por funções polinomiais de grau 2).

- 1972, Bowen e Walters:

Definiram C-expansividade e K-expansividade, e mostraram que, e mostraram que na ausência de singularidades a C-expansividade é equivalente a K-expansividade;

- 1977, Afraimovich, Bykov, Shilnikov

- 1979, Guckenheimer, Williams

Apresentaram construções de modelos geométricos para o atrator de Lorenz, que ficaram conhecidos por modelos geométricos de Lorenz, ou “Lorenz geométrico”.

- 1984, Komuro:

Definiu expansividade e mostrou que o atrator geométrico de Lorenz é expansivo, conjecturou a relação entre C-expansividade e K-expansividade na presença de singularidades não isoladas;

- 1990, Oka:

Demonstrou que C-expansividade é sempre equivalente a K-expansividade e que na ausência de singularidades a expansividade é equivalente a C-expansividade;

1.2 Notação e definições

Aqui estabeleceremos a notação e a linguagem básica utilizada durante a Dissertação. Mais pormenores sobre estas definições podem ser encontrados nos livros-texto [10] e [11].

Consideraremos M um espaço métrico compacto. Um *fluxo* é uma família de homeomorfismos $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ tal que:

1. X^t é um homeomorfismo C^r de M em M , para todo t ;
2. X^0 é a identidade em M ;
3. $X^{t+s} = X^t \circ X^s$ para quaisquer números reais t e s .

Caso M seja uma variedade riemanniana compacta de dimensão finita, e o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ seja dado por uma família de difeomorfismos de classe C^r , dizemos que o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ é *gerado* pelo campo de vetores X em M se:

$$\frac{d}{dt}X^t(q)|_{t=t_0} = X(X^{t_0})(q)$$

para todo $q \in M$ e $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definições: A *órbita positiva* de $p \in M$ é o conjunto $O^+(p) = \{X^t(p); t \geq 0\}$. A *órbita negativa* de $p \in M$ é o conjunto $O^-(p) = \{X^t(p); t \leq 0\}$. E a *órbita* de $p \in M$ é o conjunto $O(p) = O^+(p) \cup O^-(p) = \{X^t(p); t \in \mathbb{R}\}$. Uma *órbita periódica* é uma órbita $O(p)$ tal que $X^T(p) = p$ para algum $T > 0$ mínimo.

Um ponto $x_0 \in M$ é uma *singularidade* para o fluxo X^t se $X^t(x_0) = x_0$ para todo número real t .

Um ponto $q \in M$ é um *ponto ω -limite* de $x \in M$ se existe uma sequência de números reais positivos t_n tais que $t_n \rightarrow \infty$ e $X^{t_n}(x) \rightarrow q$, quando $n \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos ω -limite de $x \in M$, $\omega(x)$, é chamado de *conjunto ω -limite* de x . Um ponto $q \in M$ é um *ponto α -limite* de $x \in M$ se existe uma sequência de números reais negativos t_n tais que $t_n \rightarrow -\infty$ e $X^{t_n}(x) \rightarrow q$, quando $n \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos α -limite de $x \in M$, $\alpha(x)$, é chamado de *conjunto α -limite* de x ;

Observação: Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(X^t(x), x_0) = 0$ então $\omega(x) = \{x_0\}$.

Os *autovalores* de uma singularidade x_0 de um fluxo gerado por um campo de vetores X em M são os autovalores da aplicação linear $DX(x_0) : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$. Uma singularidade x_0 é *hiperbólica* se todos os seus autovalores têm parte real não nula.

A *variedade estável* de uma singularidade x_0 é o conjunto:

$$W^s(x_0) = \{p \in M; \lim_{t \rightarrow \infty} X^t(p) = x_0\} = \{p \in M; \omega(p) = \{x_0\}\}$$

A *variedade instável* de uma singularidade $x \in M$ é o conjunto:

$$W^u(x_0) = \{p \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} X^t(p) = x_0\} = \{p \in M; \alpha(p) = \{x_0\}\}$$

Para $r > 0$ a *variedade local estável de tamanho r* de uma singularidade x_0 é o conjunto:

$$W_r^s(x_0) = \{p \in W^s(x_0); \text{dist}(X^t(p), x_0) < r, \forall t \geq 0\}$$

O *subespaço estável* de uma singularidade x_0 é o subespaço vetorial $\mathbb{E}^s \subset T_{x_0}M$ gerado pelos autovetores de x_0 associados a autovalores com parte real negativa.

O *subespaço instável* de uma singularidade x_0 é o subespaço vetorial $\mathbb{E}^u \subset T_{x_0}M$ gerado pelos autovetores de x_0 associados a autovalores com parte real positiva.

Um subconjunto Λ de M é *positivamente invariante* se $X^t(x) \subset \Lambda$ para todo $t \geq 0$ e $x \in \Lambda$. Um subconjunto Λ de M é *negativamente invariante* se $X^t(x) \subset \Lambda$, para todo $t \leq 0$ e $x \in \Lambda$. Um subconjunto Λ de M é *invariante* se é positivamente invariante e negativamente invariante. Exemplos de conjuntos invariantes são os conjuntos ω -limite e α -limite de um dado ponto $x \in M$.

Se existe x_0 em $A \subset M$ tal que $\omega(x_0) = A$, então A é invariante e é dito *topologicamente transitivo*. Um subconjunto A de M é um *sumidouro* para o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ se existe uma vizinhança U de A tal que

$$A = \bigcap_{t \geq 0} X^t(U) \quad \text{e} \quad \overline{X^t(U)} \subset U, \quad \forall t > 0.$$

Um *atrator* para $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ é um sumidouro transitivo. Um *repulsor* é um atrator para o fluxo com tempo invertido $(X^{-t})_{t \in \mathbb{R}}$.

Um ponto $p \in M$ é *não-errante* se para todo $T > 0$ e qualquer vizinhança U de p , existe $t > T$ tal que $X^t(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos não-errantes de X é denotado por $\Omega(X)$.

Uma singularidade x_0 é chamada *Lyapunov estável* ou *L-estável* se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\text{dist}(x, x_0) < \delta$, então $\text{dist}(X^t(x), x_0) < \epsilon$ para todo $t > 0$. Uma singularidade é chamada *instável* se não é L-estável, ou seja, se existem $\epsilon > 0$ (fixo), uma sequência de pontos x_n em M , e uma sequência de números reais $t_n > 0$ tais que $\text{dist}(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$, mas $\text{dist}(X^{t_n}(x_n), x_0) > \epsilon$.

Uma singularidade x_0 é *fracamente assintoticamente estável* se existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(x_0, x) < \delta$ então $\omega(x) = \{x_0\}$. Ou seja, uma singularidade é fracamente assintoticamente estável se sua variedade estável contém todos os pontos de alguma vizinhança da singularidade.

Um *poço* é uma singularidade que é L-estável e fracamente assintoticamente estável. Uma *fonte* é um poço para o fluxo com tempo invertido $(X^{-t})_{t \in \mathbb{R}}$.

Sejam X e Y campos de vetores C^1 em M . Dizemos que X e Y são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que:

1. $h(O_X(p)) = O_Y(h(p))$ para todo $p \in M$;
2. para todo $p \in M$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (0, \delta)$ existe $s \in (0, \epsilon)$ com $h(X^t(p)) = Y^s(h(p))$.

Neste caso diremos que h é uma equivalência topológica entre X e Y .

Na definição acima, o primeiro item pode ser traduzido como h leva órbitas em órbitas, e o segundo item como h preserva o sentido ao longo das órbitas.

Dois campos de vetores X e Y em M são conjugados se existe uma equivalência topológica entre eles que preserva o tempo, ou seja, para todo número real t e todo ponto p em M temos $X^t(h(p)) = h(Y^t(p))$. Fluxos conjugados têm as mesmas propriedades dinâmicas para seus pontos periódicos, singularidades, conjuntos limites etc.

1.3 Teoremas de Poincaré-Bendixon e Hartman-Grobman

Aqui enunciaremos dois teoremas clássicos que serão utilizados ao longo do texto.

Teorema 1.1. *[Poincaré-Bendixon] Considere $M = \mathbb{S}^2$ (a esfera) ou M um conjunto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 . Seja $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo C^1 em M . Seja $p \in M$:*

1. *se $O^+(p)$ é limitada e $\omega(p)$ não contém singularidades, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica;*
2. *se $O^-(p)$ é limitada e $\alpha(p)$ não contém singularidades, então $\alpha(p)$ é uma órbita periódica.*

Temos também a seguinte generalização para o teorema de Poincaré-Bendixon.

Teorema 1.2. *Considere $M = \mathbb{S}^2$ (a esfera) ou M um conjunto simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 . Seja X campo de vetores C^1 em M . Se $p \in M$ é tal que $O^+(p)$*

está contida em um subconjunto limitado e fechado K de M , e K tem somente um número finito de singularidades. Então ocorre uma das opções:

- $\omega(p)$ é uma órbita periódica;
- $\omega(p)$ é uma singularidade;
- $\omega(p)$ consiste de um número finito de singularidades, q_1, \dots, q_n e órbitas regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tal que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, temos $\alpha(\gamma_j) = q_{i(\alpha, j)}$ e $\omega(\gamma_j) = q_{i(\omega, j)}$, ou seja, $\omega(p) = \{q_1, \dots, q_n\} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m$ com $\alpha(\gamma_j) = q_{i(\alpha, j)}$ e $\omega(\gamma_j) = q_{i(\omega, j)}$.

O seguinte resultado garante que um fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de classe C^1 numa vizinhança de uma singularidade hiperbólica é conjugado ao fluxo linear dado pela diferencial do campo na singularidade.

Teorema 1.3. [Hartman-Grobman] *Seja p uma singularidade hiperbólica para o fluxo $C^1 (X^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Então, existem vizinhanças U de p em M e V de 0 em $T_p M$ tais que o fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ em U é conjugado ao fluxo linear gerado por $DX(p)$ em V . Ou seja, existe um homeomorfismo $h : V \rightarrow U$ tal que $X^t(h(x)) = h(\exp(tDX(p))x)$ sempre que $(\exp(tDX(p))x) \in V$.*

1.4 Hiperbolicidade

Um compacto X -invariante Λ tem *estrutura hiperbólica* se:

1. Existe uma decomposição invariante do espaço tangente, ou seja, para cada $p \in \Lambda$ temos $T_p M = \mathbb{E}_p^s \oplus \mathbb{E}_p^X \oplus \mathbb{E}_p^u$, onde \mathbb{E}_p^X é o subespaço gerado por $X(p)$,

que satisfazem: $DX_p^t \mathbb{E}_p^u = \mathbb{E}_{X^t(p)}^u$, $DX_p^t \mathbb{E}_p^s = \mathbb{E}_{X^t(p)}^s$ e $DX_p^t X(p) = X^t(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $p \in \Lambda$;

2. O fluxo expande/contrai ao longo e $\mathbb{E}^u/\mathbb{E}^s$, ou seja, existem constantes $\lambda > 0$ e $K \geq 1$ tais que

- para todo $v^s \in \mathbb{E}_p^s$ e todo $t \geq 0$ temos:

$$\|DX_p^t v^s|_{\mathbb{E}_p^s}\| \leq \frac{K\|v^s\|}{e^{\lambda t}},$$

- para todo $v^u \in \mathbb{E}_p^u$ e todo $t \geq 0$ temos:

$$\|DX_p^{-t} v^u|_{\mathbb{E}_p^u}\| \leq \frac{K\|v^u\|}{e^{\lambda t}},$$

e como consequência dos itens anteriores:

- \mathbb{E}_p^s e \mathbb{E}_p^u variam continuamente com p .

Para cada $p \in M$ definimos os conjuntos:

$$W^{ss}(p) = \{q \in M; \lim_{t \rightarrow \infty} d(X^t(q), X^t(p)) = 0\}$$

e

$$W^{uu}(p) = \{q \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} d(X^t(q), X^t(p)) = 0\}$$

chamadas de variedade estável e instável do ponto p , respectivamente.

Neste contexto (Λ hiperbólico), para cada $p \in \Lambda$, os conjuntos $W^{ss}(p)$ e $W^{uu}(p)$ são variedades imersas em M e seus espaços tangentes em p são dados pelos subespaços estável/instável correspondentes:

$$T_p W^{ss}(p) = \mathbb{E}_p^s \quad e \quad T_p W^{uu}(p) = \mathbb{E}_p^u.$$

Capítulo 2

Expansividade para fluxos

A noção de expansividade é uma noção técnica que implica, em particular, a sensibilidade às condições iniciais, também conhecida por ‘caos’. Apresentamos nesta seção a definição de expansividade para homeomorfismo e a definição de expansividade para fluxos, em diferentes graus de generalidade.

A expansividade para fluxos é uma noção mais delicada do que para homeomorfismos devido à possibilidade de um fluxo ter singularidades. Consoante a definição escolhida, as singularidades têm que ser isoladas, o que impede a aplicação da definição aos fluxos com singularidades acumuladas por órbitas regulares. Veremos que todas as definições apresentadas são equivalentes na ausência de singularidades.

2.1 Expansividade para homeomorfismos

Considere um homeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$. É usual considerar a seguinte definição de expansividade:

Definição: [Expansividade para homeomorfismos] um compacto φ -invariante

é *expansivo* se existe $\delta > 0$, tal que se $\text{dist}(\varphi^n x, \varphi^n y) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $y = x$. O valor δ diz-se a constante de expansividade de φ .

Observamos que decorre desta propriedade que, para todo $x \in M$ existe y numa vizinhança arbitrária de x , existe $n \in \mathbb{Z}$ para o qual $d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \geq \delta$. Esta propriedade é o que se designa por 'sensibilidade às condições iniciais' ou 'caoticidade' do homeomorfismo φ .



2.2 Expansividade para fluxos

Tentando encontrar uma noção de expansividade para fluxos, poderíamos começar tentando imitar a definição para difeomorfismos:

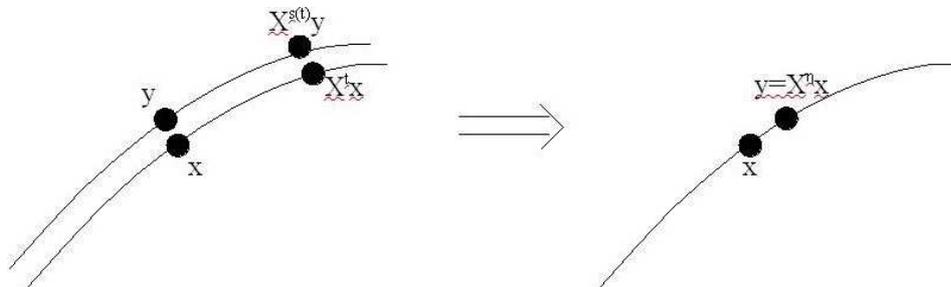
Tentativa de definição de Expansividade para fluxos: um compacto X^t -invariante é expansivo se existe $\delta > 0$, tal que se $\text{dist}(X^t x, X^t y) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $y = x$.

Mas nenhum fluxo satisfaz tal definição. De fato, fixado um $\delta > 0$, tome $\delta' = \frac{\delta}{c}$, onde $c = \|X\|_\infty$. Tomando $y = X^\eta x$ com $|\eta| < \delta'$ então $\text{dist}(X^t x, X^t y) = \text{dist}(X^t x, X^{t+\eta} x) \leq \int_t^{t+\eta} \|\alpha'(s)\| ds \leq c|\eta| < \delta$, onde $\alpha(t) = X^t x$.

Sabendo disto, Walters e Bowen sugeriram em [4] a seguinte definição de expansividade para fluxos:

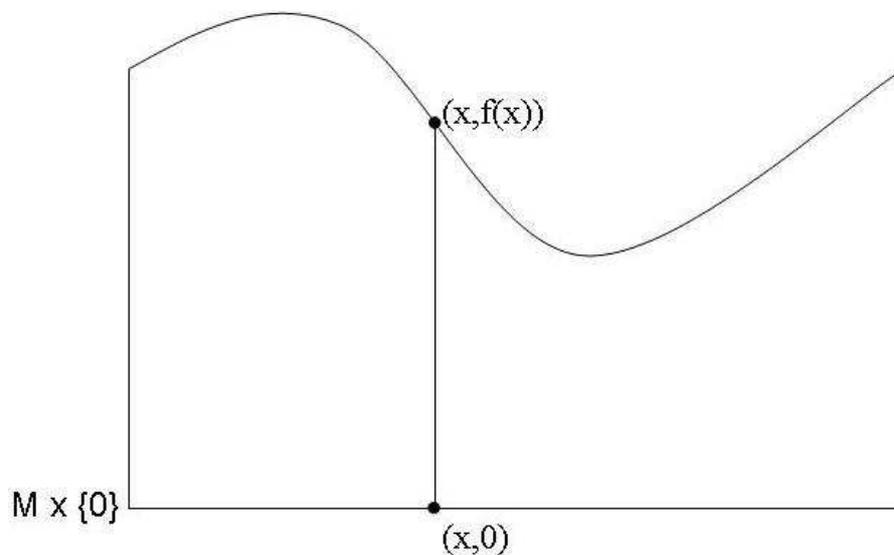
Definição: [Expansividade segundo Walters e Bowen] Um compacto X -invariante $\Lambda \subset M$ é C -*expansivo* se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se existem x, y em Λ e

$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, com $s(0) = 0$, tais que $d(X^t x, X^{s(t)} y) < \delta$ para todo número real t , então $y = X^\eta x$ para algum $|\eta| < \epsilon$.



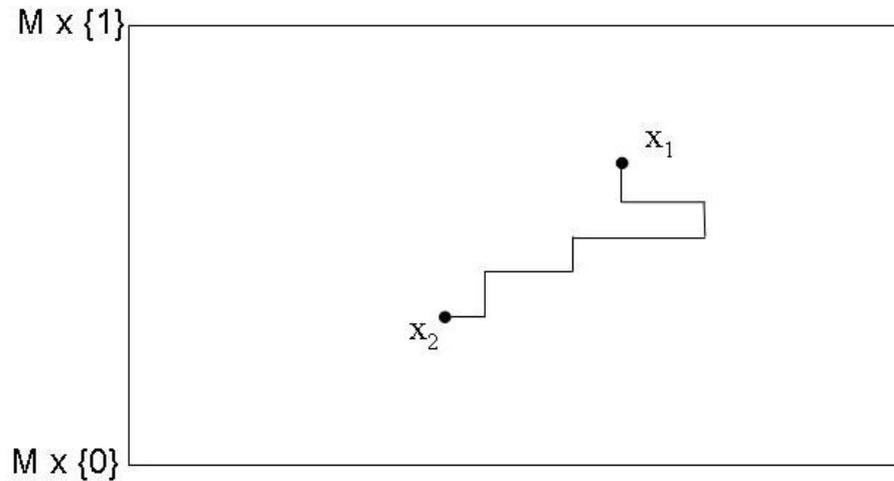
A construção de fluxo suspensão sobre uma transformação fornece uma relação entre as noções de expansividade para homeomorfismos e C -expansividade para fluxos. Note que o fluxo suspensão não tem singularidades.

Exemplo: Sejam $\phi : M \rightarrow M$ um homeomorfismo e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Se $y \in M$ faça $y_f = \cup_{0 \leq t \leq f(y)} (y, t)$, e considere a seguinte relação de equivalência no conjunto $\bigcup_{y \in M} y_f$: $(y, t) \approx (y, t)$ e $(y, f(y)) \approx (\phi(y), 0)$, para todo $y \in M$. Definimos como M_f o espaço quociente de $\bigcup_{y \in M} y_f$ pela relação \approx . A suspensão de ϕ por f é o fluxo definido em M_f por: $\phi^t(y, s) = (y, t + s)$, $0 \leq t + s < f(y)$.



Seja ρ a métrica considerada em M e definimos uma métrica ρ_t em $M \times \{t\}$ por $\rho_t((y, t), (z, t)) = (1 - t)\rho(y, z) + t\rho(\phi(y), \phi(z))$, $y, z \in M$. Note que $\rho_0((y, 0), (z, 0)) = \rho(y, z)$ e $\rho_1((y, 1), (z, 1)) = \rho(\phi(y), \phi(z))$. Se dois pontos estão em uma mesma órbita definimos a distância entre eles simplesmente como a distância entre seus tempos.

Sejam x_1 e x_2 em M_1 . Uma cadeia finita entre x_1 e x_2 é um conjunto de pontos $w_1 = x_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n = x_2$ de elementos de M_1 tais que para qualquer i entre 1 e $n - 1$ temos que para o par w_i, w_{i+1} , ou ambos estão em algum y_f , ou ambos estão em uma mesma órbita de ϕ . O comprimento de uma cadeia é dado pela soma das distâncias entre os pontos da cadeia. Definimos então a distância d entre dois pontos em M_1 como o infimo do comprimento entre todas as cadeias entre eles.



Lema 2.1. *Se o homeomorfismo ϕ é expansivo em um subconjunto compacto ϕ -invariante $J \subset M$, então o fluxo ϕ^t é C -expansivo em $\Lambda = J_1 \subset M_1$.*

Demonstração: Considere a métrica em M dada por

$$\rho'(y_1, y_2) = \min(\rho(y_1, y_2), \rho(\phi(y_1), \phi(y_2))).$$

Seja $\epsilon > 0$ dado e seja δ' a constante de expansividade de ϕ em relação a ρ' , e tome $\delta = \min\{\delta', \epsilon, 1/4\}$. Suponha que existam pontos x_1 e x_2 em Λ e uma função contínua $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $s(0) = 0$, tais que $d(\phi^t(x_1), \phi^{s(t)}(x_2)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Se x_1 é representado em $J \times [0, 1]$ por $(y_1, 1/2)$, e x_2 é representado por (y_2, t_2) , então $d(x_1, x_2) < \delta < 1/4$ e $\rho'(y_1, y_2) \leq d(x_1, x_2) < \delta$. Note que pela representação de x_1 temos que $\phi_1(x_1) = (\phi(y_1), 1/2)$ e daí $d(\phi^1(x_1), \phi^{s(1)}(x_2)) < \delta < 1/4$. Logo $\phi^{s(1)}(x_2)$ tem uma representação como $(\phi(y_2), s)$ para algum s . Portanto, $\rho'(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq d(\phi^1(x_1), \phi^{s(1)}(x_2)) < \delta$. Procedendo de maneira análoga obtemos $\rho'(\phi^n(y_1), \phi^n(y_2)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela expansividade de ϕ temos $y_1 = y_2$, ou seja temos $x_2 = \phi^{t_0}(x_1)$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ e $|t_0| \leq d(x_1, x_2) < \delta \leq \epsilon$.
- Se x_1 não está representado por $(y_1, 1/2)$, então $\phi^r(x_1)$ está representado por $(y_1, 1/2)$ para algum r com $|r| \leq 1/2$. Fazendo $x'_1 = \phi^r(x_1)$ e $x'_2 = \phi_{s(r)}(x_2)$, e $h(t) = s(t+r) - s(r)$, então $d(\phi^t(x'_1), \phi^{h(t)}(x'_2)) = d(\phi^t(x'_1), \phi^{s(t+r)-s(r)}(x'_2)) = d(\phi^{t+r}(x_1), \phi^{s(t+r)}(x_2)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo argumento do caso anterior temos que $x'_2 = \phi^{t_0}(x'_1)$ com $t_0 < \delta$, ou seja, $x_2 = \phi^{t+r-s(r)}(x_1)$. Mas $|t+r-s(r)| = d(x_1, x_2) < \delta < \epsilon$.

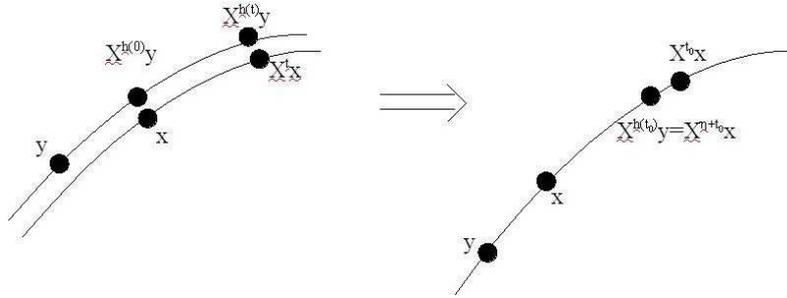
Portanto, em todo caso temos que $x_2 = \phi^{t_0}(x_1)$, com $|t_0| < \epsilon$, portanto Λ é expansivo.

□

A presença de singularidades exige a adaptação da definição de C-expansividade se as singularidades não forem isoladas no espaço ambiente de um fluxo expansivo - como acontece nos fluxos singulares hiperbólicos e, em particular, no fluxo do

atrator de Lorenz. Veremos no que segue várias extensões da definição de C -expansividade e a relação entre elas. A definição seguinte, de Komuro (em [8]), admite singularidades não isoladas como veremos.

Definição: [Expansividade segundo Komuro] Um compacto X -invariante $\Lambda \subset M$ é *expansivo* se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se existem x, y em Λ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homeomorfismo crescente, tais que $d(X^t x, X^{h(t)} y) < \delta$ para todo número real t , então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ com $X^{h(t_0)} y = X^{t_0 + \eta} x$ para algum $|\eta| < \epsilon$.



A seguir temos uma definição intermediária entre a C -expansividade e a expansividade. Veremos que esta noção é equivalente à C -expansividade.

Definição: Um compacto X -invariante $\Lambda \subset M$ é *K -expansivo* se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se existem x, y em Λ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homeomorfismo crescente, com $h(0) = 0$, tais que $d(X^t x, X^{h(t)} y) < \delta$ para todo número real t , então $y = X^\eta x$ para algum $|\eta| < \epsilon$.

2.3 Relação entre as várias noções de expansividade para fluxos

Agora vemos que K -expansividade (ou C -expansividade) é mais forte que expansividade.

Teorema 2.1. *Suponha que Λ é um compacto X -invariante. Se Λ é K -expansivo então Λ é expansivo.*

Demonstração: Suponha que Λ é K -expansivo. Seja $\epsilon > 0$ dado, e tome $\delta > 0$ dado pela definição de K -expansividade. Sejam x e y em Λ tais que $d(X^{h(t)}y, X^tx) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, com $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um homeomorfismo crescente. Definimos então $s(t) := h(t) - h(0)$. Então $s(0) = 0$ e

$$d(X^{s(t)}y_0, X^tx) = d(X^{h(t)}(X^{-h(0)}y_0), X^tx) = d(X^{h(t)}y, X^tx) < \delta, \forall t \in \mathbb{R}$$

se $y_0 = X^{h(0)}y$. Para o par x e y_0 pela definição de K -expansividade existe $\eta_0 < \epsilon$ tal que $X^{h(0)}y = y_0 = X^{\eta_0}x$, e temos a expansividade com $t_0 = 0$. Note que não usamos que Λ não tem singularidades, logo K -expansividade \Rightarrow expansividade em todo caso.

□

O seguinte lema garante que em fluxos C -expansivos toda singularidade é ponto isolado do espaço ambiente, ou seja, a C -expansividade não admite singularidades acumuladas por outros pontos (no conjunto onde o fluxo C -expansivo esteja definido).

Lema 2.2. *Se Λ é C -expansivo com respeito ao fluxo X e $x \in \Lambda$ é uma singularidade para X , então x é um ponto isolado de Λ .*

Demonstração: Como x é singularidade para o fluxo X , temos $X^tx = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Tome $\epsilon = 1$ e seu $\delta > 0$ correspondente da definição da C -expansividade. Defina $s(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e suponha que exista $y \in \Lambda$ tal que $d(x, y) < \delta$. Então $d(X^tx, X^{s(t)}y) = d(x, y) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $y = X^{\eta}x = x$. Portanto não existe outro ponto de Λ em $B(x, \delta)$.

□

O próximo lema é uma propriedade local de toda singularidade não isolada.

Lema 2.3. *Se $x_0 \in \Lambda$ é singularidade para o fluxo X que é acumulada por pontos de Λ , então para todo $R > 0$ e $T > 0$ existe $x \in \Lambda - x_0$ tal que $d(X^t x, x_0) < R$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < T$.*

Demonstração: Defina $F : [0, T] \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ por $F(t, x) = X^t x$. Então F é contínua num compacto e portanto é uniformemente contínua, isto é, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $d((x_1, t_1), (x_2, t_2)) < \delta$ (estamos considerando aqui a distância em $\Lambda \times \mathbb{R}$ como $|s - t| + d(x_1, x_2)$), então $d(F(t_1, x_1), F(t_2, x_2)) < \epsilon$. Logo, para todo $t \in [0, T]$ temos que se $x \in \Lambda$ é tal que $d(x, x_0) < \delta$ temos $d((x_0, t), (x, t)) = |t - t| + d(x_0, x) < \delta$, logo $d(x_0, X^t x) = d(F(t, x_0), F(t, x)) < \epsilon$. Este x existe pois x_0 é acumulado por pontos de Λ . Para finalizar a prova basta fazer $\epsilon = R$.

□

Veremos agora que uma versão para o lema 2.2 vale no caso K-expansivo.

Lema 2.4. *Se Λ é K-expansivo com respeito ao fluxo X e $x \in \Lambda$ é uma singularidade para X , então x é um ponto isolado de Λ .*

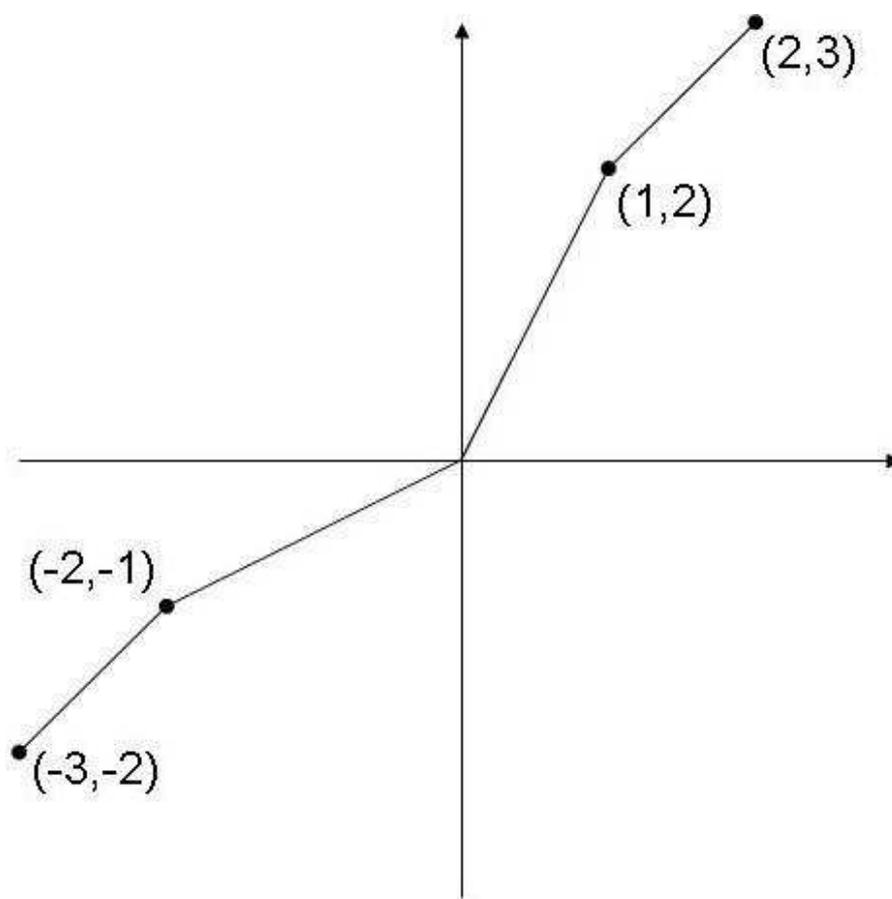
Demonstração: Considere Λ um compacto X-invariante e $x_0 \in \Lambda$ uma singularidade de X que é acumulada por pontos de Λ . Mostremos que Λ não é K-expansivo.

Suponha que Λ seja K-expansivo. Faça $\epsilon = 1$ e tome δ da definição de K-expansividade. Faça também $R = \frac{\delta}{2}$ e $T = 3$ e fixe x no lema 2.3 e $y = X^1 x$. Agora

defina,

$$h(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{se } t \notin (-2, 1) \\ t/2, & \text{se } t \in (-2, 0) \\ 2t, & \text{se } t \in [0, 1) \end{cases}$$

e note que h é um homeomorfismo crescente da reta e que $h(0) = 0$.



Mostremos que $d(X^t y, X^{h(t)} x) < \delta/2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Se $t \notin (-2, 1)$ então $X^{h(t)} x = X^{t+1} x = X^t y$ e $d(X^t y, X^{h(t)} x) = 0$.
- Se $t \in (-2, 0)$, então $|h(t)| = t/2 < 3 = T$ e, além disso $d(X^{h(t)} x, x_0) < R = \delta/2$ e $t + 1 \in (-1, 1)$, então $|t + 1| < 2 < T$, logo $d(X^t y, x_0) = d(X^{t+1} x, x_0) <$

$R = \delta/2$. Portanto $d(X^t y, X^{h(t)} x) < d(X^t y, x_0) + d(X^{h(t)} x, x_0) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$.

- Se $t \in (0, 1)$ então $h(t) = 2t < 3 = T$ e, além disso $d(X^{h(t)} x, x_0) < R = \delta/2$ logo $d(X^t y, X^{h(t)} x) < d(X^t y, x_0) + d(X^{h(t)} x, x_0) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$, pois $X^t y = X^{t+1} x$ e $|t+1| < 3 = T$.

Como Λ é K -expansivo, existe $s \in (-1, 1)$ com $X^s x = y$, pois tomamos $\epsilon = 1$, logo a órbita de x tem período menor que 2 (pois $y = X^1 x$). Pela propriedade que citamos no início da demonstração vem que $d(X^t x, X^{h(t)} x_0) = d(X^t x, x_0) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mas x não está na órbita de x_0 (que é $\{x_0\}$), em contradição com o fato de Λ ser K -expansivo.

□

2.3.1 K -expansividade é equivalente à C -expansividade

Vamos provar agora a equivalência entre K -expansividade e C -expansividade. Para isso precisamos provar primeiro vários resultados auxiliares sobre fluxos sem singularidades.

Lema 2.5. *Seja $\Lambda \subset M$ compacto X -invariante e que não possui singularidades.*

Se Λ possui pelo menos uma órbita periódica, então existe $T_0 > 0$, o menor período entre todos os pontos de Λ .

Demonstração: Se tal período não existisse, teríamos uma sequência $\{x_n\}$ de pontos em Λ e uma sequência $\{t_n\}$ de números reais tais que $X^{t_n} x_n = x_n$ e $t_n \in (0, 1/n)$, para todo $n \in \mathbb{R}$. A menos de uma subsequência podemos supor $x_n \rightarrow x$ com $x \in \Lambda$, pois Λ é compacto.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado temos que, para cada número natural n , existem $S_n \in \mathbb{Z}$ e $r_n \in [0, t_n)$ com $t = S_n t_n + r_n$. Pela continuidade de X temos:

$$X^t x_n \rightarrow X^t x,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Mas por outro lado temos:

$$X^t x_n = X^{t_n S_n + r_n} x_n = X^{r_n} (X^{t_n S_n} x_n) = X^{r_n} x_n.$$

Mas como $t_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $r_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo

$$X^t(x_n) = X^{r_n}(x_n) \rightarrow X^0(x) = x.$$

Daí, como $t \in \mathbb{R}$ é arbitrário, segue que

$$X^t(x) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

o que mostra que x é uma singularidade de Λ , em contradição com a hipótese.

□

A seguir mostramos que um fluxo sem singularidades num compacto move os pontos uma distância mínima num tempo t inferior ao menor período.

Lema 2.6. *Se um compacto Λ é X -invariante e não possui singularidades, então existe $T_0 > 0$ tal que para todo $t \in (0, T_0)$ existe $r_t > 0$ com $d(X^t x, x) > r_t$ para todo $x \in \Lambda$. Além disso, $r_t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$.*

Demonstração: Se X não tem órbitas periódicas basta tomar $T_0 = 1$. Caso contrário tome T_0 dado pelo lema anterior.

Se o resultado fosse falso existiria $t \in (0, T_0)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existiria um ponto x_n em Λ tal que $d(X^t(x_n), x_n) < 1/n$. A menos de uma subsequência

podemos supor que $x_n \rightarrow x$ com x em Λ . Pela continuidade da função distância temos quando $n \rightarrow \infty$ os seguintes limites:

$$d(X^t(x_n), x_n) \rightarrow 0$$

$$d(X^t(x_n), x_n) \rightarrow d(X^t(x), x).$$

Logo, $d(X^t(x), x) = 0$, o que leva a $x = X^t(x)$ para algum $0 < t < T_0$, uma contradição pois T_0 é o menor período em Λ .

Para a última afirmação, seja $\delta_t = \sup\{d(X^t x, x); x \in \Lambda\}$ com o supremo sendo tomado em $x \in \Lambda$. Note que para cada x fixado vale $d(X^t x, x) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0$ e que $0 \leq \tau_t \leq \delta_t$. Como a função $f(t, x) = d(X^t x, x)$ é contínua em x e em t , tomando $t \in [-1, 1]$ e $x \in \Lambda$ temos que $f : [-1, 1] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua definida num compacto, logo f é uniformemente contínua. Segue que $f_t \rightarrow 0$ uniformemente em Λ , ou seja, $\delta_t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Portanto $r_t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$.

□

Mostraremos agora que se duas órbitas estão suficientemente próximas em todo tempo, então a função ‘deslocamento no tempo’ na definição de K-expansividade tem um ‘deslocamento mínimo’ em todo período inferior ao período mínimo. Mais precisamente,

Lema 2.7. *Seja Λ um compacto X -invariante sem singularidades e $T_0 > 0$ o número encontrado no lema anterior. Para todo $T \in (0, T_0/3)$, existem $D_T > 0$ e $\beta_T > 0$ tais que se $d(X^t(x), X^{h(t)}(y)) < D_T$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com x e y em Λ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, função contínua com $h(0) = 0$, então $h(t + T) - h(t) > \beta_T$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, $D_T \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$.*

Demonstração: Seja r_T dado pelo lema anterior. Escolha $D_T > 0$ tal que $2D_T < r_T$. Então:

$$\begin{aligned} d(X^{h(t)}(y), X^{h(t+T)}(y)) + d(X^{h(t)}(y), X^t(x)) &\geq d(X^{h(t+T)}(y), X^t(x)) \\ d(X^{h(t+T)}(y), X^t(x)) + d(X^{h(t+T)}(y), X^{t+T}(x)) &\geq d(X^t(x), X^{t+T}(x)) \end{aligned}$$

Daí, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} d(X^{h(t)}(y), X^{h(t+T)}(y)) &\geq d(X^t(x), X^{t+T}(x)) - d(X^{h(t+T)}(y), X^{t+T}(x)) - \\ &d(X^{h(t)}(y), X^t(x)) \geq r_T - 2D_T > 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Suponha que não existe $\beta_T > 0$ tal que $|h(t+T) - h(t)| \geq \beta_T$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{N} tal que $|h(t_n + T) - h(t_n)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e portanto, $d(X^{h(t_n)}y, X^{h(t_n+T)}y) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ pois $d(X^{h(t_n)}y, X^{h(t_n+T)}y) = f(l_n, X^{h(t_n)}y)$, com $l_n = h(t_n + T) - h(t_n) \in [-1, 1]$ para n suficientemente grande e $X^{h(t_n)}y \in \Lambda$, onde $f(t, x) = d(X^t x, x)$ foi usada na prova do lema anterior. (Sabemos que a família $f_s(x) = f(s, x)$, $(s, x) \in [-1, 1] \times \Lambda$ é uma família uniformemente contínua de funções com $f_s(x) \rightarrow 0$ uniformemente em $x \in \Lambda$ quando $s \rightarrow 0$.)

Defina $a(t) = h(t + T) - h(t)$. Como $a(t)$ é contínua e $h(0) = 0$, para mostrar que $a(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ basta mostrar que $h(T) > 0$.

Se este não fosse o caso, existiria $0 < T < T_0/3$ tal que para todo $n > 0$ existiriam sequências x_n e y_n de pontos de Λ , e uma sequência de funções contínuas $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $h_n(0) = 0$ tais que $d(X^t x_n, X^{h_n(t)} y_n) < 1/n$, mas $h_n(T) < 0$. A menos de uma subsequência podemos supor que $x_n \rightarrow x$, e daí $y_n \rightarrow x$.

Caso 1: Para infinitos $n \in \mathbb{N}$ temos $h_n(T) < -T$. Então para alguma subsequência $t_n \in [0, T]$ com $h_n(t_n) \rightarrow -T$, seja t_0 um ponto limite desta sequência

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, T]$. Daí,

$$d(X^{t_0}x, X^{-T}x) = \lim d(X^{t_n}x_n, X^{h_n(t_n)}y_n) = 0,$$

logo, $x = X^{T+t_0}x$ e $T + t_0 < T_0$, contradição pois T_0 é o menor período em Λ .

Caso 2: Para infinitos $n \in \mathbb{N}$ temos $h_n(T) \geq -T$. Então existe uma sequência t_n em $[0, T]$ com $h_n(t_n) \rightarrow L$, para algum L em $[-T, 0]$. Para alguma subsequência temos $t_n \rightarrow t_0$ com $t_0 \in [0, T]$,

$$d(X^{t_0}x, X^{-L}x) = \lim d(X^{t_n}x_n, X^{h_n(t_n)}y_n) = 0,$$

logo, $x = X^{T+L}x$ e $T + L < T_0$, contradição pois T_0 é o menor período. Portanto podemos tomar $\beta_T = \inf a(t) > 0$, onde o infimo é tomado em $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, notamos que $0 < D_T < \tau_{t/2}$ converge para zero quando $T \rightarrow 0$ pelo lema 2.6.

□

Estamos agora prontos para provar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.2. *C-expansividade* \Leftrightarrow *K-expansividade*.

Demonstração: Pelos lemas 2.2 e 2.4, podemos supor Λ sem singularidades. Temos que C-expansividade \Rightarrow K-expansividade pela definição, pois a hipótese na C-expansividade é mais fraca que a hipótese de K-expansividade. Suponha agora que Λ é K-expansivo. Seja $\epsilon > 0$ dado e tome δ_1 dado pela definição de K-expansividade. Escolha $T \in (0, T_0/3)$ (T_0 dado pelo lema 2.6) tal que (veja argumento no lema 2.6):

$$\delta_T = \sup\{d(x, X^u(x)) : x \in \Lambda, u \in [0, T]\} < \frac{\delta}{2}.$$

Sejam D_T e τ_T dados pelo lema 2.7. Suponhamos que $d(X^t x, X^{s(t)} y) < D_T$ para x e y em Λ , e todo $t \in \mathbb{R}$ com $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $s(0) = 0$. Podemos supor

que $D_T < \delta_1/2$ também, tomando $T \in (0, T_0/3)$ suficientemente pequeno (pela última afirmação do lema 2.7). Defina $h_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $h_T(nT) = s(nT)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e linearmente em cada intervalo $(nT, (n+1)T)$. Pelo lema anterior h_T é um homeomorfismo crescente de \mathbb{R} . Além disso, pela continuidade de s e de h (usando o teorema do valor intermediário) para todo $t \in [nT, (n+1)T]$ existe $t_1 \in [nT, (n+1)T]$ tal que $h_T(t) = s(t_1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(X^t x, X^{h_T(t)} y) &= d(X^t x, X^{s(t_1)} y) \leq d(X^t x, X^{t_1} x) + d(X^{t_1} x, X^{s(t_1)} y) \\ &\leq \delta_T + d(X^{t_1} x, X^{s(t_1)} y) < \delta_1/2 + D_T \leq \delta_1. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $t \in \mathbb{R}$, a K-expansividade implica que existe $|\eta| < \epsilon$ tal que $y = X^\eta x$. Assim Λ é C-expansivo.

□

2.4 Expansividade na ausência de singularidades

Mostraremos agora que, na ausência de singularidades, as definições de C-expansividade, K-expansividade e expansividade são todas equivalentes.

Teorema 2.3. *Se X^t é um fluxo sem singularidades em Λ X^t -invariante, então C-expansividade é equivalente a expansividade.*

Pelos teoremas 2.1 e 2.2, basta apenas mostrar que na ausência de singularidades expansividade implica K-expansividade.

Considere $T_0 > 0$ o menor período do fluxo X^t . Caso o fluxo não possua órbitas periódicas, considere $T_0 = +\infty$. Pelo lema 2.5 este menor período existe.

O seguinte lema apresenta uma propriedade equivalente à expansividade mas expressa em tempo discreto, usando sequências e pontos num par de órbitas.

Lema 2.8. *A seguinte propriedade é equivalente a Λ ser expansivo: Para todo $\epsilon > 0$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que para todo α com $0 < \alpha \leq \alpha_0$ e quaisquer sequências $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfazendo:*

$$t_0 = u_0 = 0, \quad 0 < t_{i+1} - t_i \leq \alpha, \quad 0 < u_{i+1} - u_i \leq \alpha$$

e

$$t_i, u_i \rightarrow +\infty, \quad t_{-i}, u_{-i} \rightarrow -\infty$$

quando $i \rightarrow +\infty$, se $d(X^{t_i}x, X^{u_i}y) < \alpha$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \Lambda$ então existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$X^{u_i}y \in X^{(-\epsilon - \alpha + t_i, t_i + \alpha + \epsilon)}(\{x\}).$$

Demonstração: Suponha que Λ seja expansivo. Seja $\epsilon > 0$ dado. Tome $\alpha_0 > 0$ tal que $\alpha_0 + 2\lambda < \delta$, onde este $\delta > 0$ correspondente ao ϵ na definição de expansividade, e $\lambda = \sup\{d(x, X^t x); x \in \Lambda, |t| \leq \alpha_0\}$. Suponha que $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfazem as propriedades no enunciado do lema. Defina $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(t_i) = u_i$, e linearmente entre (t_i, t_{i+1}) . Desta forma, pelas propriedades das sequências $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ temos que h é um homeomorfismo crescente e,

$$d(X^t, X^h(t)y) \leq d(x^t x, X^{t_i}x) + d(X^{t_i}x, X^{u_i}y) + d(X^{u_i}y, X^{h(t)}y) \leq \lambda + \alpha + \lambda < \delta,$$

onde tomamos i tal que $t \in (t_i, t_{i+1})$. Pela definição de expansividade, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X^{h(t_0)}(y) = X^{(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)}(\{x\})$. Pelo modo como h foi definido existe

um número inteiro i tal que $t_i \leq t_0 \leq t_{i+1}$ e $u_i \leq h(t_0) \leq u_{i+1}$. Portanto, existe $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ tal que $X^{u_i}y = X^{u_i-h(t_0)} \circ X^{h(t_0)}y = X^{u_i-h(t_0)+t}x$. Colocando $s = u_i - h(t_0) + t$. Então,

$$s > u_i - h(t_0) + t_0 - \epsilon \geq u_i - h(t_0) + t_i - \epsilon \geq t_i - \alpha - \epsilon,$$

$$s < u_i - h(t_0) + t_0 + \epsilon \leq u_i - h(t_0) + t_{i+1} + \epsilon \leq u_i - h(t_0) + t_i + \alpha + \epsilon \leq t_i + \alpha + \epsilon.$$

Logo, existe i em \mathbb{Z} tal que:

$$X^{u_i}(y) \in X^{(t_i-\alpha-\epsilon, t_i+\alpha+\epsilon)}(\{x\}).$$

Agora, suponha que vale a propriedade descrita no enunciado do lema e seja $\epsilon > 0$ dado. Faça então $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}$ e tome $\alpha_0 > 0$ correspondente a ϵ_0 . Seja $\delta = \frac{\min\{\alpha_0, \frac{\epsilon}{2}\}}{2}$.

Suponha que x e y estão em Λ e que $h : (R) \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente tal que $d(X^t x, X^{h(t)} y) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por continuidade de h , podemos encontrar uma sequência $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $t_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leq \delta$ e $0 < h(t_{i+1}) - h(t_i) \leq \delta$ e que quando $i \rightarrow +\infty$ então,

$$t_i \rightarrow +\infty, \quad h(t_i) \rightarrow +\infty \quad t_{-i} \rightarrow -\infty, \quad h(t_{-i}) \rightarrow -\infty.$$

Deste modo, fazendo $u_i = h(t_i)$ temos que $d(X^{t_i} x, X^{u_i} y) < \delta < \alpha_0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Por hipótese existe um número inteiro i_0 tal que:

$$X^{h(t_i)} y = X^{u_i} y \in X^{(t_i-\frac{\epsilon}{2}-\alpha, t_i+\frac{\epsilon}{2}+\alpha)}(\{x\}) \subset X^{(t_i-\epsilon, t_i+\epsilon)}(\{x\}).$$

Daí, Λ é expansivo em relação a X^t .

□

A prova que vamos apresentar, reduz o problema a sequências de pontos em diversas órbitas via seções transversais ao fluxo convenientemente escolhidas, que permitem ‘seguir’ a órbita pela sua interseção consecutiva com estas seções.

Considere $0 < r < \frac{T_0}{2}$. Um subconjunto $S \subset \Lambda$ é uma *seção transversal local* de tempo r para um fluxo X^t se S é fechado, e $S \cap X^{[-r,r]}(\{x\}) = \{x\}$, para todo $x \in S$.

Lema 2.9. (*Existência de seções transversais*) Dado um fluxo $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ num espaço métrico compacto M e dado x_0 que não é uma singularidade, então existe uma seção Σ transversal ao fluxo com $x_0 \in \Sigma$.

Demonstração: Para $x_0 \in M$ defina a função $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$, por $\theta(x) := \int_0^1 d(X^s(x), x_0) ds$. Podemos calcular facilmente

$$\begin{aligned} \theta(X^t(x)) - \theta(x) &= \int_0^1 [d(X^{t+s}(x), x_0) - d(X^s(x), x_0)] ds \\ &= \int_1^{1+t} d(X^s(x), x_0) ds - \int_0^s d(X^s(x), x_0) ds \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt} \theta(X^t(x))|_{t=0} = d(X^1(x), x_0) - d(x, x_0) =: \theta'(x).$$

Assim, $\theta(X^t(x))$ é uma função de classe C^1 e temos $\theta'(x_0) = d(X^1(x_0), x_0) > 0$ sempre que x_0 não é uma singularidade. Podemos dizer que

$$\psi : [-\epsilon, \epsilon] \times \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow \mathbb{R},$$

com $\psi(t, x) = \theta(X^t(x))$ para é função com $\partial_t \psi(t, x) > 0$ para

$$(t, x) \in [-\epsilon, \epsilon] \times \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$$

se $\epsilon, \delta > 0$ são suficientemente pequenos (por continuidade da derivada).

Assim ψ , além de ser uniformemente contínua, é tal que para cada $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ a função $t \in [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \psi(t, x)$ é estritamente crescente. Tomamos $m_0 = \psi(-\epsilon, x_0) =$

$\min_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} \psi(s, x_0)$ e $m_1 = \psi(\epsilon, x_0) = \max_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} \psi(s, x_0)$ e seja $\eta_0 = \min\{m_1 - \psi(0, x_0), \psi(0, x_0) - m_0\}/10$. Então pela continuidade uniforme, tomemos $\eta \in (0, \eta_0)$ e achemos $\omega > 0$ tal que $|s_1 - s_2| < \omega$ e $d(x_1, x_2) < \omega$ implicam $|\psi(s_1, x_1) - \psi(s_2, x_2)| < \eta$. Então para cada $x \in \overline{B_\omega(x_0)}$ temos $|\psi(s, x) - \psi(s, x_0)| \leq \eta$ para todo $s \in [-\epsilon, \epsilon]$ e assim,

$$\begin{aligned}\psi(\epsilon, x) &= \max_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} \psi(s, x) \geq \psi(\epsilon, x_0) - \eta > \psi(0, x_0) \\ \psi(-\epsilon, x) &= \min_{s \in [-\epsilon, \epsilon]} \psi(s, x) \leq \psi(\epsilon, x_0) + \eta < \psi(0, x_0).\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema do valor intermediário, existe $s = s(x) \in (-\epsilon, \epsilon)$, único pela monotonia de ψ , tal que $\psi(s(x), x) = \psi(0, x_0)$. Então o conjunto $\Sigma = \{X^{s(x)}(x); x \in \overline{B_\omega(x_0)}\}$ é fechado e é claramente uma seção transversal para o fluxo de tempo $\epsilon_0 = \sup_{x \in \overline{B_\omega(x_0)}}(\epsilon - s(x))$ pois $y \in \Sigma \cap X^{[-\epsilon_0, \epsilon_0]}(x)$ implica

$$\theta(y) = \theta(X^s(x)) = \psi(s, x) = \psi(s(x), x)$$

senão, $\psi(s, x) \neq \psi(s(x), x)$ leva a $y \notin \Sigma$, pois $(s, x) \rightarrow \psi(s, x)$ é estritamente monótona.

□

Se Σ é uma seção transversal local de tempo r , o fluxo X^t mapeia $\Sigma \times [-r, r]$ homeomorficamente sobre $X^{[-r, r]}(\Sigma)$. O interior de Σ é $\Sigma^* = \Sigma \cap \text{int } X^{[-r, r]}(\Sigma)$. Observe que $X^{(-\epsilon, \epsilon)}(\Sigma^*)$ é aberto em X para todo $\epsilon > 0$.

Lema 2.10. *Para toda cobertura aberta finita U_0, U_1, \dots, U_n de um compacto K existe uma cobertura V_0, V_1, \dots, V_n aberta do mesmo compacto, com o mesmo número de elementos, que satisfaz $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ para todo $i = 0, \dots, n$.*

Este lema simples, mas técnico, é essencial na demonstração do próximo lema.

Demonstração: Seja U_0, \dots, U_n a cobertura finita. Então U_0 pode ter fronteira vazia. Neste caso U_0 é aberto e fechado na seção, logo temos que seu fecho está contido no seu interior. Não temos nada que fazer. Se U_0 tiver fronteira não vazia, então essa fronteira é um fechado e esse fechado é coberto pelos outros abertos da subcobertura (pois não pertence ao próprio aberto). Assim, teremos que U_0 intersecta alguns outros abertos da cobertura e que o conjunto

$$F_0 = U_0 - (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$$

é um fechado dentro de U_0 . Então tomemos uma vizinhança V_0 de F_0 cujo fecho esteja contido em U_0 (sempre podemos fazer isto num espaço métrico). Temos que mostrar que podemos substituir U_0 por V_0 e ainda ficarmos com uma cobertura aberta do mesmo compacto. É claro que esta é uma família de abertos. Como V_0 contém F_0 , então V_0 reunido com U_1, U_2, \dots, U_n contém a união dos conjuntos originais $U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$, que cobre o compacto original. Então $V_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ é uma cobertura aberta do mesmo compacto. Mas agora temos $V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0$. Note que se U_0 tivesse fronteira vazia, já teríamos isto grátis sem necessidade de mais nada. Agora recomeçamos com $V_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ e aplicamos a mesma ideia a U_1 para o substituir por um V_1 como acima. Repetindo para cada elemento da cobertura, obteremos uma cobertura aberta V_0, V_1, \dots, V_n tal que para cada $i = 0, \dots, n$, $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$.

□

Lema 2.11. *Existe $0 < r < \frac{T_0}{2}$ tal que para todo $\alpha > 0$ existe uma família finita $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ de seções transversais locais de tempo r e diâmetro no máximo α , duas a duas disjuntas, e uma outra família finita $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ de seções*

transversais locais tais que $\Omega_i \subset \Sigma_i^*$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, e ainda:

$$\Lambda = X^{[0,\alpha]}(\Omega^+) = X^{[-\alpha,0]}(\Omega^+) = X^{[0,\alpha]}(\Sigma^+) = X^{[-\alpha,0]}(\Sigma^+),$$

onde $\Omega^+ = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k$ e $\Sigma^+ = \bigcup_{k=1}^n \Sigma_k$.

Demonstração: Pelo lema 2.9, para cada $x \in \Lambda$ existe seção transversal local Σ_x de tempo $2\nu_x > 0$ com $x \in \Sigma_x^*$. Por compacidade de Λ existe subcobertura finita

$$\Lambda \subset \bigcup_{j=1}^m X^{(-\nu_{x_j}, \nu_{x_j})}(\Sigma_{x_j}^*).$$

Tomemos $2\xi = \min\{\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_m}\}$. Para cada x em Λ existe x_j e $\tau_x \in (-\nu_{x_j}, \nu_{x_j})$ tais que $x \in X^{\tau_{x_j}}(\Sigma_{x_j}^*)$.

Assim $\Omega_x = X^{\tau_x}(\Sigma_{x_j})$ é seção transversal local de tempo $\nu_{x_j} \geq 2\xi$ e $x \in \Omega_x^*$. Dado $\alpha > 0$ seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \leq \min\{\frac{\alpha}{4}, \xi\}$ e $\text{diam } X^r(A) < \alpha$ se $|r| < \epsilon$ e $A \subset \Lambda$ tiver $\text{diam } A < \epsilon$ (consequência da continuidade uniforme da aplicação $\varphi : [-\epsilon, \epsilon] \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ definida por $\varphi(t, x) = X^t(x)$). Para cada $x \in \Lambda$ tome $V_x \subset \Omega_x^*$ uma vizinhança fechada de x em T_x com $\text{diam } V_x < \epsilon$. Então $x \in V_x^*$ e V_x é seção local de tempo 2ξ .

Como Λ é compacto, vale $\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^n X^{[-\epsilon, \epsilon]}V_{x_i}$ para alguma coleção de vizinhanças em torno e pontos x_i (pois $\{X^{[-\epsilon, \epsilon]}V_x^*\}_{x \in \Lambda}$ é cobertura de Λ).

Vamos agora construir por indução uma família B_k de seções transversais locais duas a duas disjuntas. Tomemos $B_1 = \{V_{x_1}\}$. Pelo lema 2.10 podemos tomar uma cobertura de Λ formada por abertos $(X^{[-\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}]}(\tilde{V}_{x_i}))_{i=1}^n$ com $\tilde{V}_{x_i} \subset V_{x_i}$, $\tilde{\epsilon} \leq \epsilon$ e $\epsilon - \tilde{\epsilon}$ arbitrariamente pequeno. Definimos $\tilde{B}_1 = \tilde{V}_{x_1}$. Suponha agora que B_k foi construída de tal forma que B_1, B_2, \dots, B_k são duas a duas disjuntas e cada B_i é

seção transversal de tempo ϵ e

$$\bigcup_{i=1}^k X^{[-2\epsilon, 2\epsilon]}(V_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^k X^{[-2\epsilon, 2\epsilon]}(B_i).$$

Temos que para cada $y \in V_{x_{k+1}}$ o conjunto $X^{[-\epsilon, \epsilon]}(y) \cap (\bigcup_{i=1}^k B_i)$ é finito (já que B_1, \dots, B_k são seções transversais locais). Por continuidade da aplicação φ já definida, existe intervalo aberto $I_y \subset (-\epsilon, \epsilon)$ e vizinhança fechada W_y de y em $V_{x_{k+1}}$ tais que

$$X^{I_y}(W_y) \cap \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) = \emptyset$$

Podemos agora cobrir $V_{x_{k+1}}$ com as vizinhanças $\text{int}(W_y)$ para $y \in V_{x_{k+1}}$. Como $V_{x_{k+1}}$ é fechada no compacto Λ , podemos obter subcobertura finita $W_{y_1}, W_{y_2}, \dots, W_{y_s}$ de $V_{x_{k+1}}$. Escolhemos agora $r_1 \in I_{y_1}, r_2 \in I_{y_2}, \dots, r_s \in I_{y_s}$ distintos e definimos as seções $B_{k+1} = X^{r_1}(W_{y_1}), \dots, B_{k+s} = X^{r_s}(W_{y_s})$ que são disjuntas de B_1, \dots, B_k e

$$X^{[-\epsilon, \epsilon]}(V_{x_{k+1}}) \subset \bigcup_{j=k}^{k+s} (B_j).$$

Observamos que podemos escolher, pelo lema 2.10, subcobertura $\widetilde{W}_{y_1}, \dots, \widetilde{W}_{y_s}$ de $V_{x_{k+1}}$ tal que $\widetilde{W}_{y_i} \subset \overline{\widetilde{W}_{y_i}} \subset W_{y_i}$, para $i = 1, \dots, s$. O mesmo argumento ainda fornece as seções $\widetilde{B}_{k+1} = X^{r_1}(\widetilde{W}_{y_1}), \dots, \widetilde{B}_{k+s} = X^{r_s}(\widetilde{W}_{y_s})$ disjuntas duas a duas.

Continuamos desta maneira até $k = n$. Obtemos

$$\Lambda \subset \bigcup_{l=1}^m X^{[-\epsilon, \epsilon]}(B_l)$$

e daí $X^{2\epsilon}(z)$ está nessa união, para cada $z \in \Lambda$, logo vale também

$$x \in \bigcup_{l=1}^m X^{[-4\epsilon, 0]}(B_l)$$

ou seja,

$$\Lambda \subset \bigcup_{l=1}^m X^{[-4\epsilon, 0]}(B_l) \subset \bigcup_{l=1}^m X^{[-\alpha, 0]}(B_l).$$

Analogamente, por construção, obtemos outra cobertura com \tilde{B}_l no lugar de B_l nos argumentos acima. Fazendo $\Sigma_i = B_i$ e $\Omega_i = \tilde{B}_i$ obtemos as propriedades do enunciado.

□

Seja $0 < 3\alpha < r$ e $\beta = \sup\{\delta > 0; X^{(0,\delta)}(\{x\}) \cap \Sigma^+ = \emptyset, x \in \Sigma^+\}$.

Para cada $x \in \Omega^+$ seja t_x o menor tempo positivo tal que $X^{t_x}(x) \in \Omega^+$. Então definimos o *mapa de primeiro retorno* $\varphi : \Omega^+ \rightarrow \Omega^+$ por $\varphi(x) = X^{t_x}(x)$, que é claramente uma bijeção, mas não necessariamente contínua. É óbvio que, para todo $x \in \Omega^+$, $\beta \leq t_x \leq \alpha$.

Para $\Sigma_i \in \Sigma$, defina $D_\rho^i := X^{[-\rho,\rho]}(\Sigma_i)$ e a *projeção* $P_\rho^i : D_\rho^i \rightarrow \Sigma_i$ por $P_\rho^i = X^t(x)$, onde t é o único tempo em $(-\rho, \rho)$ com a propriedade de $X^t x \in \Sigma_i$. Como tomamos $2\rho < r$, P_ρ^i está bem definida e é sobrejetiva contínua.

Lema 2.12. *Existe $0 < a < \frac{\beta}{2}$ tal que para x e y em Σ_i se $d(x, y) \leq a$ e $X^t x \in \Omega_j$, com $|t| \leq 3\alpha$, para algum Ω_j , então $X^t y \in D_\rho^j$.*

Demonstração: Defina $G : \Sigma^+ \times [-3\alpha, 3\alpha] \rightarrow \Lambda$ por $G(t, x) = X^t x$. Então G é uniformemente contínua. Fixado $\rho > 0$ consideramos $d(\Omega_j, (D_\rho^j)^c) = d_j$. Lembremos que Ω_j está no interior de Σ_j , logo $d_j > 0$. Tomemos $d = \min\{d_1, \dots, d_n\}$. Fazendo então $\epsilon = \frac{d}{2}$, pela continuidade uniforme de G encontramos $\delta > 0$ tal que se x e y são pontos em Σ com $d(x, y) < \delta$ então $d(G(t, x), G(t, y)) = d(X^t x, X^t y) < \epsilon < d$ logo, $X^t y \in B_\epsilon(\Omega_j) \subset D_\rho^j$.

□

Suponha que $x \in \Omega^+$. Então o Lema 2.12 garante que, se y está suficientemente perto de x , a órbita de y cruza Σ_i em um tempo próximo ao tempo que a órbita

de x cruza Ω_i . Para $x \in \Omega_i$ e $y \in \Sigma_i$ com $d(x, y) \leq a$, nós podemos definir um conjunto de pontos $(y_i)_{i=0, \dots, k}$, para algum inteiro positivo k , onde t é o menor tempo positivo tal que $\varphi^i(x) = X^t(\varphi^{i-1}(x))$, e podemos continuar esta construção pelo Lema 2.12 sempre que $d(\varphi^i(x), y_i) < a$. O mesmo vale invertendo o tempo, sempre que a órbita de y esteja suficientemente próxima da órbita de x .

Definição: Seja $x \in \Omega$ e $\eta < \epsilon$. O conjunto η -estável de x é

$$W_\eta^s(x) = \{y \in \Sigma; d(\varphi^i(x), y_i) < \eta, \forall i \geq 0\}$$

e o conjunto η -instável de x é

$$W_\eta^u(x) = \{y \in \Sigma; d(\varphi^i(x), y_i) < \eta, \forall i \leq 0\}.$$

Lema 2.13. Λ é X^t é C -expansivo se, e somente se, dadas coleções de seções transversais Σ e Ω e $\rho > 0$ ($2\rho < \beta$), como no lema 2.11, existe $\eta > 0$ tal que $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x) = \{x\}$, para todo $x \in \Omega^+$.

Demonstração: Suponha que Λ é C -expansivo. Tome $\epsilon_0 = \frac{r}{2}$ e seu $\delta_0 > 0$ correspondente a definição de C -expansividade. Seja η satisfazendo $\delta_0 > \eta > 0$, tal que se $x \in \Omega$ e $y \in \Sigma$ com $d(x, y) < \eta$ então $d(X^t x, X^t y) < \delta_0$ onde, se $\varphi(x) = X^{t_1} x$ e $y_1 = X^{s_1} y$, então $0 \leq t \leq t_1, 0 \leq s \leq s_1$ e $|s - t| \leq |s_1 - t_1|$. Suponha agora que exista $y \neq x$ tal que $y \in W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x)$ e sejam $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sequências crescentes tais que $X^{t_i} x = \varphi^i(x)$ e $X^{s_i} y = y_i$. Defina um homeomorfismo de \mathbb{R} em \mathbb{R} , por $h(t_i) = s_i$ e linearmente entre estes números. Tomando t um número real qualquer, podemos escrever $t = t_i + \sigma_1$ e $h(t) = s_i + \sigma_2$, para algum inteiro i , e $\sigma_1 \in [0, t_{i+1} - t_i]$ e $\sigma_2 \in [0, s_{i+1} - s_i]$, e também,

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq |(t_{i+1} - t_i) - (s_{i+1} - s_i)|$$

de modo que,

$$d(X^t x, X^{h(t)} y) = d(X^{\sigma_1}(\varphi^i x), X^{\sigma_2}(y_i)) < \delta_0$$

pela escolha de η . No entanto, y não está em $X^{(-\epsilon_0, \epsilon_0)}(\{x\})$, porque $\epsilon_0 < r$, o que contraria a C -expansividade. Portanto, se Λ é C -expansivo, então existe $\eta > 0$ tal que $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x) = \{x\}$.

Agora, suponha que são dadas coleções de seções transversais locais Σ , Ω e $\rho > 0$, como no lema 2.11. Além disso, suponha a existência de $\eta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega^+$, temos $W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x) = \{x\}$. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $h(0) = 0$. Seja $x \in T$, $y \in S$ e t_n e s_n seqüências de números reais tais que $X^{t_n} x = \varphi^n x$ e $X^{s_n} x = \varphi^n y = y_n$.

Escolha $0 < \delta < r - \alpha - \rho$ e números positivos $\epsilon_1 < \eta$, $\epsilon_2 < \epsilon_1$, ϵ_3 e ϵ_4 tal que, se $u \in \Omega$ e $v \in \Sigma$, então

1. $d(u, v) < \epsilon_1$ implica que $d(u, X^t v) > \epsilon_1$ para todo $|t| \in [\delta, r]$;
 2. $d(u, v) < \epsilon_2$ implica que $d(\varphi u, v_1) < \epsilon_1$;
 3. $d(u, v) \geq \epsilon_2$ implica que $d(u, X^t v) > \epsilon_3$ para $|t| < \delta$;
 4. se $a, b \in M$ e $d(a, b) < \epsilon_4$ então $d(X^t a, X^t b) < \epsilon_1$ para $|t| \leq \alpha$.
- (a) Suponha que para todo i em que t_i e s_i estão definidos nós temos $|h(t_i) - s_i| < \delta$. Escolha j tal que $d(\varphi^i x, y_j) > \eta$. Como $d(X^{t_j} x, X^{s_j} y) > \eta > \epsilon_1 > \epsilon_2$ temos $d(X^{t_j} x, X^{h(t_j)} y) > \epsilon_3$ (por 3);
 - (b) Seja j o primeiro inteiro positivo tal que $|h(t_j) - s_j| \geq \delta$. Podemos assumir, por 2, que se $d(\varphi^i x, y_i) < \epsilon_1$ então $d(\varphi^i x, y_i) < \epsilon_2$ para todo $0 \leq i < j$;

- (b1) Seja $t = s_j - h(t_j) \geq \delta$. Se $h(t_j) \geq s_{j-1} - \delta$, então

$$\delta \geq t \geq s_j - s_{j-1} + \delta < \alpha + \rho + \delta < r$$

e por 1,

$$d(X^{t_j}x, X^{h(t_j)}y) = d(X^{t_j}x, X^{s_j-t}y) > \epsilon_1.$$

Mas como $h(t_{j-1}) < s_{j-1} - \delta$, se $h(t_j) < s_{j-1} - \delta$, podemos encontrar $t' \in (t_{j-1}, t_j)$ tal que $h(t') = s_{j-1} - \delta$. Defina $\xi = t' - t_{j-1} > 0$. Então

$$d(X^{t_{j-1}}x, X^{s_{j-1}}y) < \epsilon_2 < \epsilon_1$$

assim, como $\delta \leq \delta + \xi < r$, por 1 temos:

$$d(X^{t_{j-1}}x, X^{s_{j-1}-\delta-\xi}y) > \epsilon_1.$$

Portanto, usando 4 encontramos:

$$d(X^{t'}x, X^{h(t')}y) = d(X^{t_{j-1}+\xi}x, X^{s_{j-1}-\delta}y) > \epsilon_4.$$

- (b2) Suponha que $t = h(t_j) - s_j \geq \delta$. Neste caso $h(t_j) \geq s_j + \delta$ e $h(t_{j-1}) \leq s_{j-1} + \delta < s_j + \delta$ portanto existe $t' \in (t_{j-1}, t_j]$ e $h(t') = s_j + \delta$. Seja $\xi = t_j - t' \geq 0$. Agora, por 1 temos que se $d(X^{t_j}x, X^{s_j}y) < \epsilon_1$ então $d(X^{t_j}x, X^{s_j(\delta+\xi)}) > \epsilon_1$ portanto,

$$d(X^{t'}x, X^{h(t')}y) = d(X^{t_j-\xi}x, X^{s_j+\delta}y) > \epsilon_4$$

por 4.

Em resumo, provamos que se $\epsilon' = \min(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ então, para algum t , $d(X^t x, X^{h(t)} y) > \epsilon'$.

Agora suponha que x e y são pontos arbitrários de Λ . Escolha $\delta_1 > 0$ e $\epsilon_5 > 0$ tal que se $d(x, y) < \epsilon_5$ então,

1. $d(X^t x, X^s y) < \epsilon'$ (onde $t > 0$ é o menor real positivo tal que $X^t x \in \Omega^+$ e $X^s y = P_\rho(X^t y)$), e $|t - s| < \frac{1}{16}\delta_1$;
2. $d(X^w x, X^v y) < \epsilon'$ para todo w e v com $|w| \leq \delta_1 + \alpha, |v| \leq \alpha + \delta_1$ e $|v - w| < \delta_1$.

Agora, seja $\epsilon_6 > 0$ tal que se $d(x, y) < \epsilon_6$ então $d(X^{t'} x, X^{t'+t} y) > \epsilon_6$ para todo $\frac{1}{16}\delta_1 \leq |t| \leq r$ e $|t'| < \alpha$. E, seja $\epsilon_7 > 0$ tal que $\epsilon_5 > \epsilon_7$ e também que o subconjunto de $B_{\epsilon_7}(x)$ com projeção $P_\rho(X^t x)$ contida em $X^{(-\epsilon_5, \epsilon_5)}x$.

Agora suponha que $d(x, y) < \epsilon_7$ e $y \notin X^{(-\epsilon_5, \epsilon_5)}x$.

- (a) Se $|h(t) - s| < \frac{1}{8}\delta_1$. Escolha $\delta' < \frac{1}{4}\delta_1$ tal que $|h(t + t') - s| < \frac{1}{4}\delta_1$ para todo $|t'| \leq \delta'$. Defina $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(t') = h(t + t') - s$ para todo $|t'| \geq \delta'$ e por linearidade nos outros pontos, tal que $g(0) = 0$ e g é contínua. Portanto,

$$|g(t') - t'| \leq \frac{1}{4}\delta_1 + \delta' < \frac{1}{2}\delta_1$$

para $|t'| < \delta'$. E usando 1 e 2 temos:

$$d(X^{t+t'} x, X^{s+g(t')} y) < \epsilon'$$

para $|t'| < \delta'$. Agora pela primeira parte da demonstração, podemos encontrar t_0 tal que $d(X^{t_0}(X^t x), X^{g(t_0)}(X^s y)) > \epsilon'$ e por construção $|t_0|$ deve ser maior que δ' , ou seja,

$$d(X^{t+t_0} x, X^{h(t+t_0)} y) > \epsilon'.$$

Observação: Pela escolha de ϵ_7 temos $X^t x \neq X^s y$.

- (b) Se $|h(t) - s| \geq \frac{1}{8}\delta_1$ então $|h(t) - t| \geq \frac{1}{16}\delta_1$ e se escolhermos $t' \leq t$ tal que $|h(t') - t'| \geq \frac{1}{16}\delta_1$, então $d(X^{t'}x, X^{h(t')}y) = d(X^{t'}x, X^{t' \pm \frac{\delta_1}{16}}y) > \epsilon_6$ salvo se $d(x, y) > \epsilon_6$.

Por todos estes casos segue que $\delta = \min(\epsilon', \epsilon_6, \epsilon_7)$ é a constante de expansividade para o fluxo X^t .

□

Vamos agora usar os lemas para provar o Teorema 2.3.

Como X^t não tem singularidades, tome $r > 0$ como no lema 2.11, faça $\epsilon = \frac{r}{3}$ e α_0 como no lema 2.8. Tome também α tal que $0 < 2\alpha < \min\{\frac{r}{3}, \alpha_0\}$. Para este $\alpha > 0$ seja as famílias de seções transversais locais Σ e Ω dadas pelo lema 2.11.

Seja $0 < \eta < \min\{a, \alpha\}$ e fixe $x \in \Omega^+$. Seja $y \in W_\eta^s(x) \cap W_\eta^u(x)$ para $x \in \Omega^+$. Então temos $d(\varphi^i(x), y_i) > \eta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Seja τ_i o menor número positivo tal que $\varphi^i(x) = X^{\tau_i}(\varphi^{i-1}(x))$ para $i \in \mathbb{Z}$. Como $\varphi^i(x) = \varphi(\varphi^{i-1}(x)) = X^{\tau_i}(\varphi^{i-1}(x))$, temos $\beta \leq \tau_i \leq \alpha$. Como $d(\varphi^i(x), y_i) < \eta$ para $i \in \mathbb{Z}$, a diferença de tempo λ_i entre y_{i+1} e y_i satisfaz $|\lambda_i - \tau_i| \leq \rho$. Daí,

$$\frac{\beta}{2} = \beta - \frac{\beta}{2} < \tau_i - \rho \leq \lambda_i \leq \tau_i + \rho < \tau_i + \alpha \leq 2\alpha. \quad (2.2)$$

Defina então,

$$t_i = \begin{cases} \sum_{k=0}^i \tau_k, & \text{se } i \geq 0 \\ 0, & \text{se } i = 0 \\ -\sum_{k=0}^i \tau_k, & \text{se } i \leq 0 \end{cases}$$

e também,

$$u_i = \begin{cases} \sum_{k=0}^i \lambda_k, & \text{se } i \geq 0 \\ 0, & \text{se } i = 0 \\ -\sum_{k=0}^i \lambda_k, & \text{se } i \leq 0 \end{cases}$$

Então nós temos $\beta \leq t_{i+1} - t_i \leq \alpha \leq 2\alpha$ para $i \in \mathbb{Z}$ e $\frac{\beta}{2} \leq u_{i+1} - u_i \leq 2\alpha$ por (2.2).

Portanto, temos $t_i, u_i \rightarrow +\infty$ e $t_{-i}, u_{-i} \rightarrow -\infty$ com $i \rightarrow +\infty$. Como

$$d(X^{t_i}(x), X^{u_i}(y)) = d(\varphi^i(x), y_i) < \eta < 2\alpha$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, utilizando o lema 2.8 encontramos $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^{u_{i_0}}(y) \in X^{(t_{i_0}-\epsilon-2\alpha, t_{i_0}+\epsilon+2\alpha)}(\{x\})$ e uma seção transversal local $\Omega_l \in \Omega$ tal que $X^{t_{i_0}}(x) \in \Omega_l$.

Como $\epsilon + 2\alpha = \frac{r}{3} + 2\alpha < \frac{2r}{3} < 3 < r$ e como Σ_l é uma seção transversal local de tempo r , nós temos $X^{u_{i_0}}y = X^{t_{i_0}}x$. Daí temos $x = y$, o que termina a prova do teorema principal.

□

Capítulo 3

O Atrator de Lorenz e seu modelo geométrico

Apresentamos aqui as propriedades mais simples do fluxo gerado pelas equações de Lorenz nos chamados ‘parâmetros clássicos’ identificados numericamente por Edward Lorenz em 1963 [3].

Em seguida apresentaremos a construção geométrica de um fluxo C^r , $r \geq 1$, que exhibe todas as propriedades dinâmicas do atrator de Lorenz, primeiramente obtida por Guckenheimer e Williams [6] e por Afraimovich-Bykov-Shil’nikov [5].

A construção foi motivada pela dificuldade de uma análise rigorosa das equações de Lorenz, quer do ponto vista teórico, quer numericamente, veja por exemplo [2] e [12].

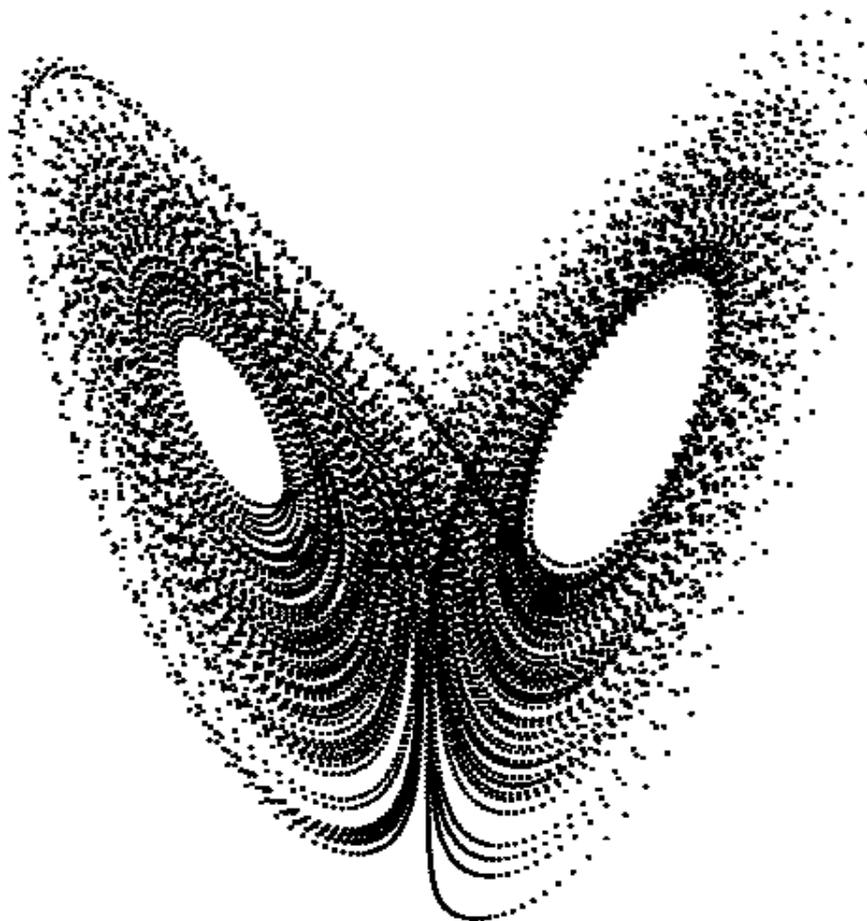


Figura 3.1: um pedaço longo de uma órbita do fluxo de Lorenz

3.1 O atrator de Lorenz

Em 1963, o matemático meteorologista Edward Lorenz publicou em [3] um exemplo de um sistema de equações diferenciais ordinárias polinomial parametrizado

$$\begin{aligned}x' &= -\sigma x + \sigma y, \\y' &= rx - y - xz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\z' &= -bz + xy,\end{aligned}$$

onde $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$, como um modelo muito simplificado de convecção térmica num fluido, numa tentativa de entender os fundamentos da previsão do tempo por simulação numérica.

As singularidades são a origem e

$$P^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$P^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

A matriz $DF(x, y, z)$ das derivadas parciais é

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Na origem temos como

$$DF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

que tem polinômio característico

$$P(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)).$$

Logo, os autovalores na origem são

$$\begin{aligned} \lambda_s &= -b, \\ \lambda_{ss} &= \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}, \quad \text{e} \\ \lambda_u &= \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}, \end{aligned}$$

Neste caso sempre temos λ_s e λ_{ss} negativos e λ_u positivo. Com os parâmetros originais,

$$\begin{aligned}\lambda_u &= -\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{1201}}{2} \approx 11,83 \\ \lambda_{ss} &= -\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{1201}}{2} \approx -22,83 \\ \lambda_s &= -\frac{8}{3} \approx -2,67.\end{aligned}$$

satisfazendo $\lambda_{ss} < \lambda_s < 0 < \lambda_u$ e $\lambda_u + \lambda_s > 0$.

Os autovalores em P^+ e P^- são os mesmos, consideraremos somente P^+ . Em P^+ temos $r - z = 1$, logo a matriz e derivadas parciais é dada por

$$DF(P^+) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

que tem como polinômio característico:

$$\begin{aligned}P_2(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + b + 1) + \lambda(\sigma b + b + x^2) + 2\sigma x^2 \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + b + 1) + \lambda b(r + \sigma) + 2\sigma b(r - 1).\end{aligned}$$

Como todos os coeficientes são positivos existe pelo menos um autovalor λ_1 negativo, pois $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_2(\lambda) = -\infty$ e $P_2(0) = 2\sigma b(r - 1) > 0$. Se considerarmos os parâmetros originais das equações de Lorenz, obteremos:

$$P^- = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$$

$$P^+ = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$$

e também os autovalores:

$$\lambda_1 \approx -13,85457791,$$

$$\lambda_2 \approx 0,093955622 + 10,19450522i,$$

$$\lambda_3 \approx 0,093955622 - 10,19450522i = \overline{\lambda_2}.$$

3.1.1 O elipsóide sumidouro

Aqui consideraremos os parâmetros originais das equações de Lorenz. Considere a função teste dada por

$$L(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2}{2}.$$

Sua derivada em relação ao tempo sobre uma curva solução das equações de Lorenz é dada por

$$\begin{aligned} L' &= xx' + yy' + (z - r - \sigma)z' \\ &= x(-\sigma x + \sigma y) + y(rx - y - xz) + (z - r - \sigma)(-bz + xy) \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - b\left(z - \frac{r + \sigma}{2}\right)^2 + \frac{b(r + \sigma)^2}{4}. \end{aligned}$$

Como σ e b são positivos temos que L' é negativa se

$$\sigma x^2 + y^2 + b\left(z - \frac{r + \sigma}{2}\right)^2 > \frac{b(r + \sigma)^2}{4}.$$

O conjunto de pontos (x, y, z) onde vale a igualdade no lugar da desigualdade é um elipsóide E . No interior de E temos $L' > 0$ e no exterior de E vale $L' < 0$. Seja m o máximo de L na região delimitada por E .

Considere então C um número real tal que $C > m$ e seja

$$U_0 = L^{-1}((-\infty, C]) = \{(x, y, z); L(x, y, z) \leq C\}.$$

Então, denotando por Z^t o fluxo induzido pelo sistema de equações de Lorenz, se p é um ponto em ∂U_0 , temos que $L'(p) < 0$ e portanto $Z^t(p)$ está no interior de U_0 para todo $t > 0$, ou seja, $\overline{Z^t(U_0)} \subset U_0$ para $t > 0$. Definimos então o atrator de Lorenz como o conjunto

$$\Lambda_0 = \overline{\bigcap_{t>0} Z^t(U_0)}.$$

que é maximal invariante positivo em U_0 .

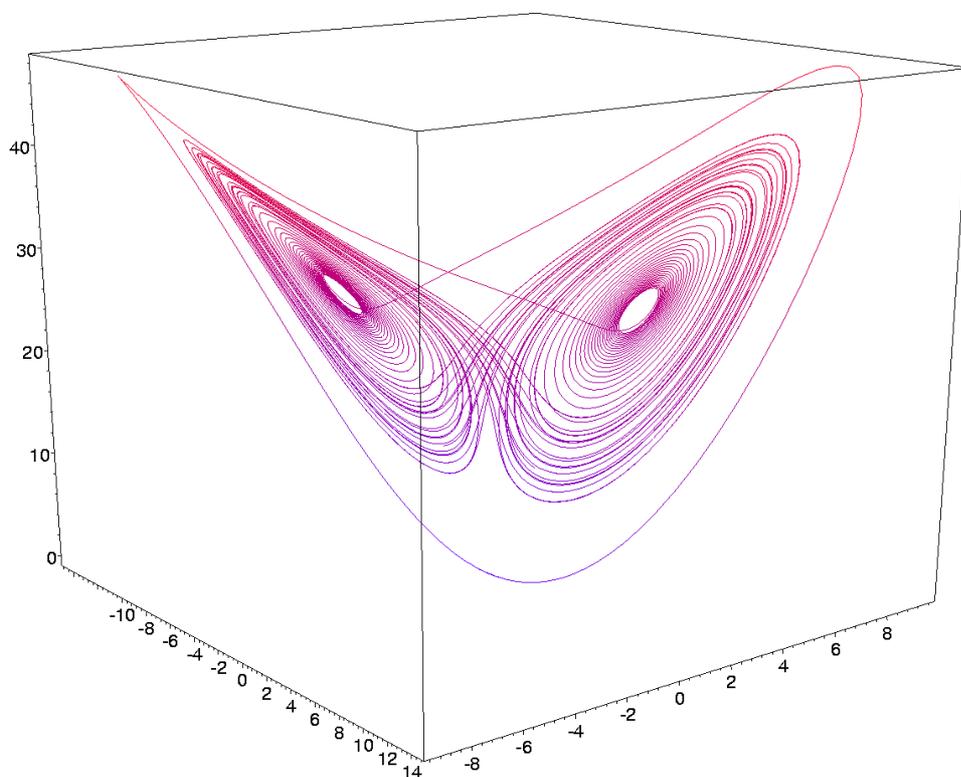


Figura 3.2: aspecto do atrator de Lorenz obtido por aproximação numérica.

3.2 Construção do Modelo Geométrico

Simulações numéricas para uma vizinhança dos parâmetros selecionados por Lorenz sugeriam que todos os pontos do espaço têm órbitas/solução do sistema que convergem para um “atrator estranho”. Mas estas equações resistiram a um entendimento teórico rigoroso e também são muito difíceis de estudar numericamente. De fato, a singularidade na origem é acumulada por órbitas regulares dentro do atrator e isto cria a principal dificuldade para seu estudo numérico e teórico.

Por um lado, a teoria de hiperbolicidade de Smale, de maneira semelhante às noções de C-expansividade e K-expansividade, aplica-se a conjuntos invariantes com singularidades isoladas. Logo, o atrator que se observa no sistema de Lorenz não pode ser hiperbólico no sentido mais bem compreendido teoricamente.

Por outro lado, toda solução do sistema tem velocidade muito pequena quando se aproxima da origem, o que implica tempos de passagem sem limite superior e, portanto, erros de integração numérica do sistema de Lorenz sem qualquer controle perto da origem, impedindo conclusões rigorosas via métodos numéricos.

Outra abordagem muito bem sucedida foi encetada por Afraimovich, Bykov, Shil’nikov [5] e Guckenheimer, Williams [6], independentemente: eles construíram os “modelos geométricos de Lorenz” para o comportamento observado por Lorenz no sistema de equações apresentado anteriormente. Estes modelos são fluxos tridimensionais para os quais se pode provar rigorosamente a existência de um atrator que contém uma singularidade acumulada por órbitas regulares do fluxo dentro do atrator. Esta acumulação impede este conjunto invariante de ser hiperbólico. Além disso, provaremos aqui que todo par de trajetórias dentro do atrator se afasta para

o passado, ou para o futuro, ou seja, que o atrator é sensível às condições iniciais, tal como Lorenz observou nas soluções do sistema polinomial original. Mais ainda, e extremamente importante, este comportamento é *robusto*: ele não é destruído por nenhuma pequena perturbação do fluxo do modelo geométrico.

Apresentamos agora uma construção desse modelo geométrico.

Pelo teorema de Hartman-Grobman, numa vizinhança da origem o fluxo gerado pelo sistema de equações de Lorenz é conjugado ao fluxo linear

$$X^t(x, y, z) = (xe^{\lambda_u t}, ye^{\lambda_{ss} t}, ze^{\lambda_s t}).$$

Considere os seguintes conjuntos (veja a figura 3.3)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, 1); |x|, |y| \leq \frac{1}{2}\} \\ S^+ &= \{(x, y, 1) \in S; x > 0\} \\ S^- &= \{(x, y, 1) \in S; x < 0\} \\ \Gamma &= \{(x, y, 1) \in S; x = 0\} \\ S^* &= S - \Gamma = S^+ \cup S^- \end{aligned}$$

Suponha que as órbitas eventualmente cruzam S na direção do eixo negativo z .

Considere também os conjuntos (veja a figura 3.3)

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{(x, y, z); x = 1\} \\ \Sigma^- &= \{(x, y, z); x = -1\}; \\ \Sigma &= \Sigma^+ \cup \Sigma^-; \end{aligned}$$

Para cada ponto $(x_0, y_0, 1)$ em S^* queremos encontrar o tempo τ em que $X^\tau(x_0, y_0, 1)$ está em Σ . Logo τ tem de ser um número real maior que 0 tal que $|x_0 e^{\lambda_u \tau}| = 1$, ou

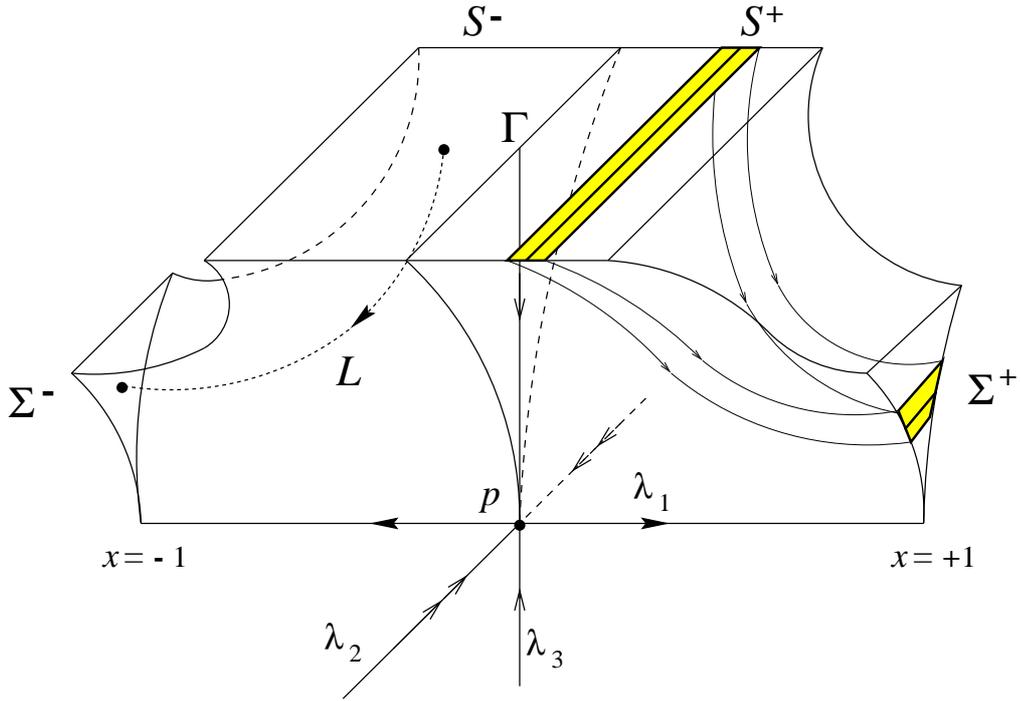


Figura 3.3: a linearização perto da origem

seja, $\tau = -\frac{\log|x_0|}{\lambda_u}$. Note que para cada ponto $(x_0, y_0, 1) \in S^*$ o tempo τ correspondente depende somente de x_0 . Além disso, $\tau \rightarrow +\infty$ quando $x_0 \rightarrow 0$. Portanto temos,

$$X^\tau(x_0, y_0, 1) = \left(\frac{x_0}{|x_0|}, y_0 e^{\lambda_{ss}\tau}, e^{\lambda_s\tau} \right) = \left(\frac{x_0}{|x_0|}, y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_u}}, |x_0|^{-\frac{\lambda_s}{\lambda_u}} \right).$$

Temos também que,

$$0 < \alpha = -\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_u} < 1 < \beta = -\frac{\lambda_s}{\lambda_u}.$$

Seja $L : S^* \rightarrow \Sigma$ definido por $L(x, y) = \left(\frac{x}{|x|}, y|x|^\beta, |x|^\alpha \right)$. A imagem de $L(S^+)$ é um ‘triângulo’ em Σ^+ com vértice em $(1, 0, 0)$, da mesma forma a imagem de $L(S^-)$ é um ‘triângulo’ em Σ^- com vértice em $(-1, 0, 0)$. De agora em diante quando nos referirmos aos conjuntos Σ^+ e Σ^- estaremos nos referindo às imagens $L(S^+)$ e $L(S^-)$.

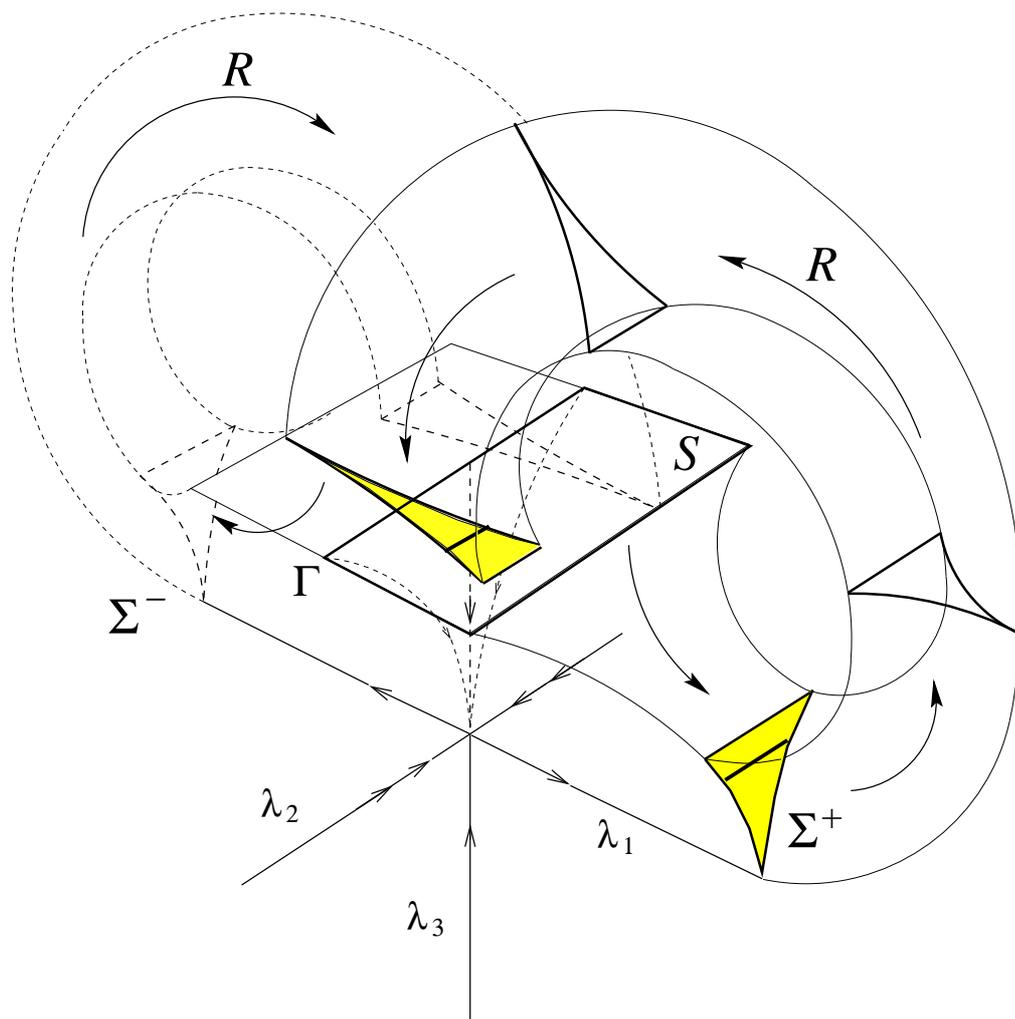


Figura 3.4: O atrator geométrico de Lorenz

As órbitas vão de S^\pm até Σ^\pm e após uma rotação R em torno da variedade estável da singularidade P^\pm retornam a S^\pm (veja a figura 3.4). Vamos considerar uma rotação tal que segmentos da forma $\Sigma^\pm \cap \{z = z_0\}$ sejam levados em segmentos da forma $S^\pm \cap \{x = x_0\}$, e além disso, que nos triângulos Σ^\pm haja uma contração na direção y e uma expansão na direção x . Esta rotação é tal que para cada $(\pm 1, y, z)$ em Σ^\pm temos $\sigma \in (0, 1)$ e $M > 1$ com:

$$DR(\pm 1, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & M \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto a aplicação de primeiro retorno de Poincaré em S toma a forma $P : S^* \rightarrow S$, com $P = R \circ L$. Uma característica importante de P é que a imagem de segmentos $S \cap \{x = x_0\}$ está contida em segmentos de mesmo tipo. Assim, considerando $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ existem funções $f : I - \{0\} \rightarrow I$ e $g : I - \{0\} \times I \rightarrow I$ tais que $P(x, y) = (f(x), g(x, y))$.

Seja U o conjunto dado pela união do cubo $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \times [0, 1]$, que contém vizinhança da origem onde o fluxo é linearizado, com a porção da órbita positiva dos pontos de S até seu primeiro retorno a S , tal como se pode ver na figura 3.4. Então este conjunto satisfaz, pela construção apresentada, $\overline{X^t(U)} \subset U$ para todo $t > 0$. Definimos então o atrator geométrico de Lorenz como o seguinte conjunto compacto e invariante por este fluxo:

$$\Lambda = \overline{\bigcap_{t>0} X^t(U)}.$$

Podemos construir este exemplo de maneira que f e g possuem as seguintes propriedades (veja figura 3.5):

- $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in I - \{0\}$;
- f não está definida em $x = 0$;
- $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$ e $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$;
- f é diferenciável em $I - \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$ para todo $x \in I - \{0\}$;
- $f'(0^-) = f'(0^+) = +\infty$;
- Existe $0 < \mu < 1$ tal que $g'_y(x, y) \leq \mu$ para todo $(x, y) \in S^*$;

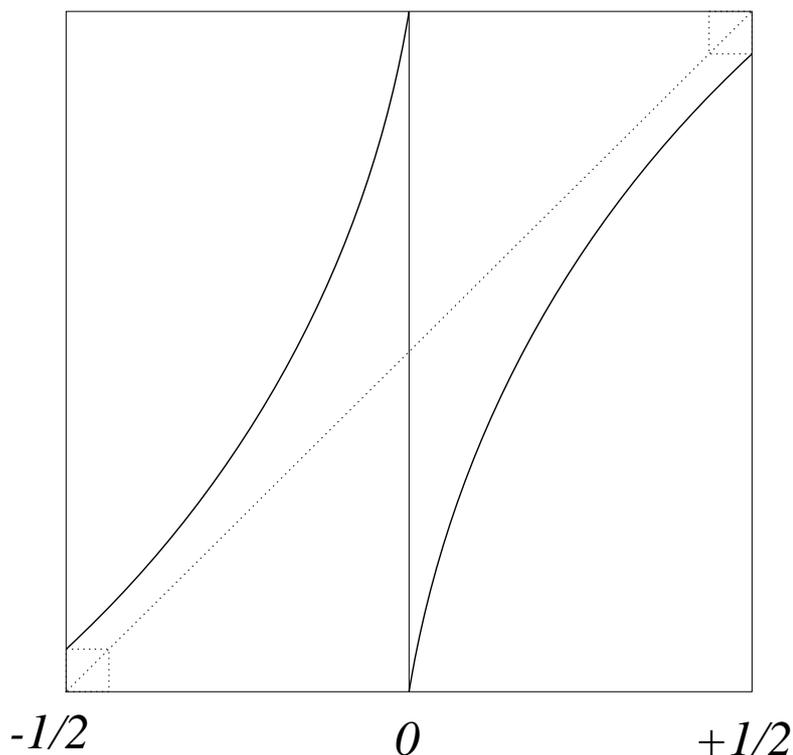


Figura 3.5: a transformação unidimensional de Lorenz $f : I - \{0\} \rightarrow I$

- A razão de contração de g na segunda coordenada é muito maior que a razão de expansão de f (veja a figura 4.13);

Além disso, se considerarmos a folheação de S dada por $\{x = x_0\}$, então a folheação é preservada pelo mapa de Poincaré, e se p e g estão em uma mesma folha γ então $\text{dist}(P^n(p), P^n(g)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Esta propriedade é crucial no que se segue e é ilustrada na figura 3.7.

3.2.1 A origem é uma singularidade não isolada de Λ

Vamos agora ver que a origem é uma singularidade não isolada para o atrator geométrico de Lorenz.

Começamos por provar que f é uma aplicação fortemente misturadora, no

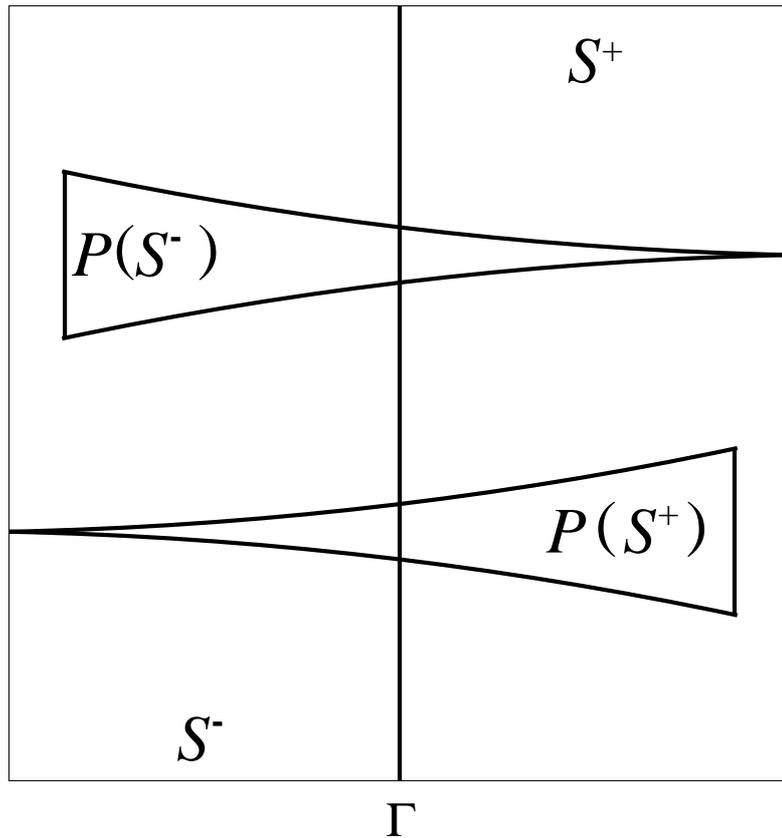


Figura 3.6: As imagens da aplicação de retorno de Poincaré em S .

seguinte sentido.

Lema 3.1. *Para todo intervalo $J \subset I - 0$ existe um subintervalo $J' \subset J$ e um inteiro positivo $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^k(J') = [0, \frac{1}{2}]$ ou $f^k(J') = [-\frac{1}{2}, 0]$.*

Demonstração: Primeiro faça $\lambda = \inf_{x \in I - \{0\}} \{f'(x)\}$. De fato, como $f'(0^+) = f'(0^-) = \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in (-\epsilon, \epsilon) - \{0\}$ então $f'(x) > 2$. Além disso, temos que $[-\frac{1}{2}, -\epsilon] \cup [\epsilon, \frac{1}{2}]$ é compacto, logo existe $c > \sqrt{2}$ tal que $f'(x) \geq c$ para todo $x \in [-\frac{1}{2}, -\epsilon] \cup [\epsilon, \frac{1}{2}]$. Isto mostra que $\lambda > \sqrt{2}$.

Seja $J \subset I$, defina,

$$J_0 = \begin{cases} J, & \text{se } 0 \notin J \\ \text{o maior intervalo de } J - \{0\}, & \text{se } 0 \in J \end{cases}$$

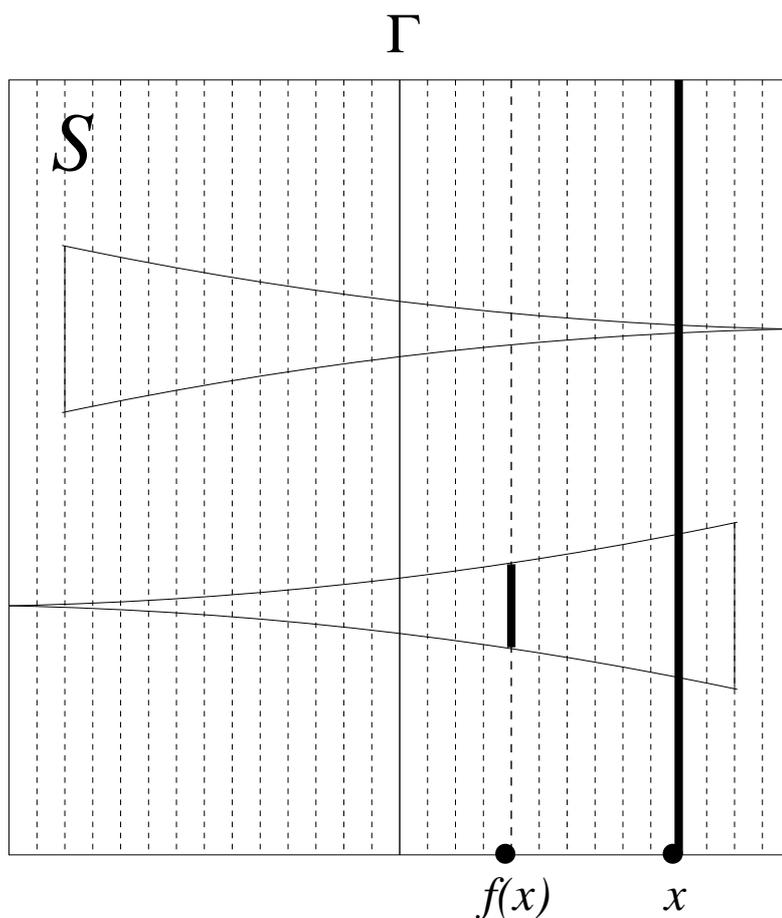


Figura 3.7: a aplicação de primeiro retorno de Poincaré a S preserva a folheação vertical em S e contrai estas folhas.

e por indução:

$$J_{i+1} = \begin{cases} f(J_i), & \text{se } 0 \notin f(J_i) \\ \text{o maior intervalo de } f(J_i) - \{0\}, & \text{se } 0 \in f(J_i) \end{cases}$$

Por construção $0 \notin \text{int } J_i$ e $f(J_i) \supset J_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema do valor médio temos que $l(f(J_i)) > \lambda l(J_i)$ (onde $l(K)$ é o comprimento do intervalo K).

Pela escolha de J_{i+1} ,

$$l(J_{i+1}) \geq \begin{cases} \lambda l(f(J_i)), & \text{se } 0 \notin f(J_i) \\ \frac{\lambda}{2} l(f(J_i)), & \text{se } 0 \in f(J_i) \end{cases}$$

logo,

$$l(J_{i+2}) \geq \begin{cases} \lambda l(f(J_{i+1})), & \text{se } 0 \notin f(J_{i+1}) \\ \frac{\lambda}{2} l(f(J_{i+1})), & \text{se } 0 \in f(J_{i+1}) \end{cases}$$

Portanto, se $0 \notin f(J_i)$ ou $0 \notin f(J_{i+1})$, então

$$l(J_{i+2}) \geq \frac{\lambda^2}{2} l(J_i)$$

e temos que $\frac{\lambda^2}{2} > \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1$. Portanto, se $0 \notin f(J_i) \cap f(J_{i+2})$ para todo $i \in \mathbb{N}$ encontramos,

$$l(J_{2n}) \geq \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^n l(J_0).$$

Mas como J_i sempre está definido em I com comprimento limitado temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in f(J_n) \cap f(J_{n+1})$. Tome $b \in J_{n+1}$ tal que $f(b) = 0$. Seja $I_{0b} = (0, b]$ ou $I_{0b} = [b, 0)$ (somente um dos dois casos faz sentido). Então $I_{0b} \subset J_{n+1}$ (pois J_{n+1} é intervalo, contém b e $0 \in \partial J_{n+1}$). Como $\lim f(0^\pm) = \pm \frac{1}{2}$ e $f(b) = 0$, pelo teorema do valor intermediário, temos $f(I_{0b}) = (-\frac{1}{2}, 0]$ ou $f(I_{0b}) = [0, \frac{1}{2})$.

□

Em particular este lema mostra que, dado $\epsilon \in (0, f(\frac{1}{2}))$ e um intervalo $J \subset (0, \epsilon)$, existe subintervalo $J_0 \subset J$ e um inteiro $k \geq 1$ tais que $f^k(J_0) = (0, \frac{1}{2})$ ou $f^k(J_0) = (-\frac{1}{2}, 0)$.

No primeiro caso, temos $J_0 \subset f^k(J_0)$ e assim f^k tem um ponto fixo em J_0 , ou seja, f tem um ponto periódico de período no máximo k em J_0 .

No segundo caso, iterando mais uma vez temos $f^{k+1}(J_0) = (-\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) \supset J_0$ e chegamos à mesma conclusão.

Temos assim um ponto periódico $x_0 \in I$ para f com período $n \leq k + 1$, tal que $0 < x_0 < \epsilon$.

Considere F a folha em S que corresponde a x_0 . Pela construção de f , temos que $P^N(F) = F$, e $0 < d(F, \Gamma) < \epsilon$. Como P contrai F , temos que existe $y_0 \in F$ tal que y_0 é ponto fixo de P^N , ou seja, y_0 é ponto periódico de P de período N . Finalmente, pela definição de P como aplicação de Poincaré sobre S do fluxo X^t , isto significa que y_0 tem órbita periódica pelo fluxo X^t e $0 < y_0 = d(F, \Gamma) < \epsilon$.

Tomando W uma vizinhança qualquer da origem, pela construção do atrator geométrico de Lorenz, existe $\epsilon > 0$ tal que se $w \in S$ e $d(w, \Gamma) < \epsilon$, então existe $t > 0$ tal que $X^t w \in W$, isto vale em particular se $w = y_0$. A órbita de y_0 está totalmente contida em Λ , pois y_0 é periódico. Isto mostra que a origem não é um ponto isolado de Λ .

3.3 As equações de Lorenz e seu modelo geométrico

A relação entre os dois atratores exibidos neste capítulo foi esclarecida no trabalho de Warwick Tucker (em [17] e [18]) por volta do ano 2000. Ele provou, usando uma combinação de análise numérica com teoria das formas normais, que o atrator que se observa nas equações originais de Lorenz, nos parâmetros propostos por Lorenz, é realmente um fluxo com as características do modelo geométrico: tem uma folheação estável invariante na seção transversal pela transformação de retorno de Poincaré que induz uma transformação quociente unidimensional que é transitiva, e estas propriedades são robustas. Este resultado, juntamente com o resultado teórico fundamental obtido por Morales, Pacifico e Pujals em [16], pouco antes do

trabalho de Tucker ser publicado, mostra que o atrator de Lorenz realmente tem todas as propriedades que se pode provar rigorosamente no modelo geométrico, embora não haja uma relação de ‘conjugação’ entre ambos os sistemas, isto é, não é verdade que os atratores sejam ‘os mesmos por mudança de coordenadas’.

Os resultados sobre expansividade e o resultado de Morales, Pacifico, Pujals têm uma dívida profunda com os trabalhos de Massera [15], Lewowicz [13] e principalmente Mañé [14], onde as noções de expansividade e robustez foram aprofundadas de forma muito original.

Os pormenores destes desenvolvimentos são demasiado extensos para apresentarmos aqui.

Capítulo 4

Expansividade do Modelo

Geométrico

Mostraremos neste capítulo que o atrator geométrico de Lorenz satisfaz a condição de expansividade. A noção de expansividade, ao contrário da C-expansividade e K-expansividade, é compatível com a existência de singularidades não isoladas no conjunto invariante.

No que segue tomamos Λ o atrator geométrico de Lorenz tal como definido no capítulo anterior.

Teorema 4.1. *Se existem x, y em Λ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homeomorfismo crescente, tais que $d(X^t x, X^{h(t)} y) < \frac{1}{20}$ para todo número real t , então x e y estão em uma mesma órbita.*

Demonstração: Começamos por observar que se x (ou y) é a singularidade $\sigma = (0, 0, 0)$ então o outro ponto só pode ser igual a σ devido ao comportamento do fluxo próximo a uma singularidade hiperbólica tipo sela. Suponhamos que x e

y são pontos de Λ como no enunciado com x, y distintos de σ .

Primeiro faremos algumas definições. Daqui por diante escreveremos $x(t) = X^t x$ e $y(t) = X^{h(t)} y$, para $t \in \mathbb{R}$.

Particionando Λ : Definiremos em Λ regiões como na figura 4.1. Estas regiões são tais que A está $\frac{1}{4}$ -distante de C , e B está $\frac{1}{4}$ -distante de D . Estas regiões são definidas de ambos os “lados” de Λ , de forma que chamaremos de A , a união do que chamamos de A de ambos os lados, e da mesma forma para B, C e D .

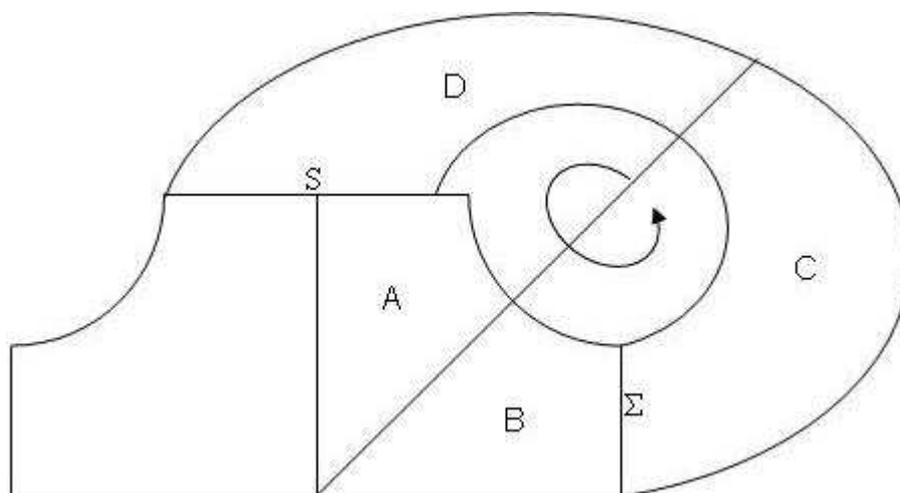


Figura 4.1: Particionando o Modelo Geométrico do Atrator de Lorenz

Definição: τ_0 e C_0 serão definidos conforme a posição de x e $y(0)$ (Lembre que, por hipótese, $d(x, y(0)) < \frac{1}{20}$):

1. Se x e $y(0)$ estiverem em $A \cup B$: τ_0 será o primeiro tempo negativo em que a órbita de $x(t)$ toca S ; e C_0 será o primeiro tempo negativo em que $y(t)$ toca S .
2. Se x e $y(0)$ estiverem em $C \cup D$: τ_0 será o primeiro tempo positivo em que a órbita de x toca S ; e C_0 será o primeiro tempo positivo em que $y(t)$ toca S .

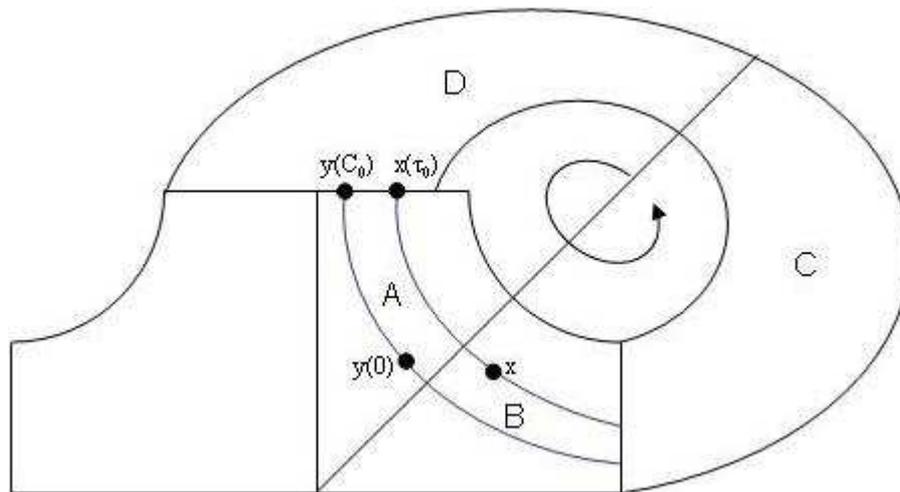


Figura 4.2: Caso 1

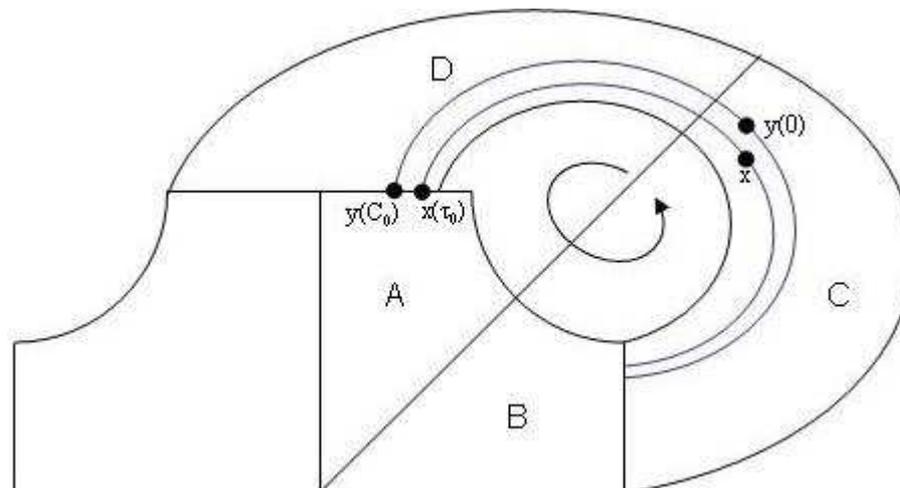


Figura 4.3: Caso 2

3. Caso x e $y(0)$ estejam um em A e outro em D : Se x está em A (em D) τ_0 será o primeiro tempo negativo (primeiro tempo positivo) em que $x(t)$ está em S . Se $y(0)$ está em D (em A) C_0 será o primeiro tempo negativo (primeiro tempo positivo) em que $y(t)$ toca S .
4. Se x e $y(0)$ estiverem, um em B e o outro em C : τ_0 será o primeiro tempo negativo em que $x(t)$ está em S e C_0 será o primeiro tempo negativo em que

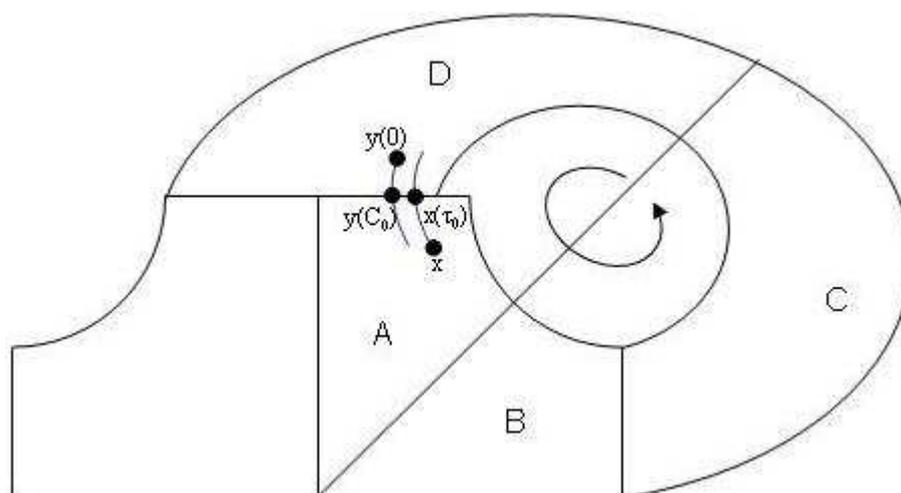


Figura 4.4: Caso 3

$y(t)$ toca S .

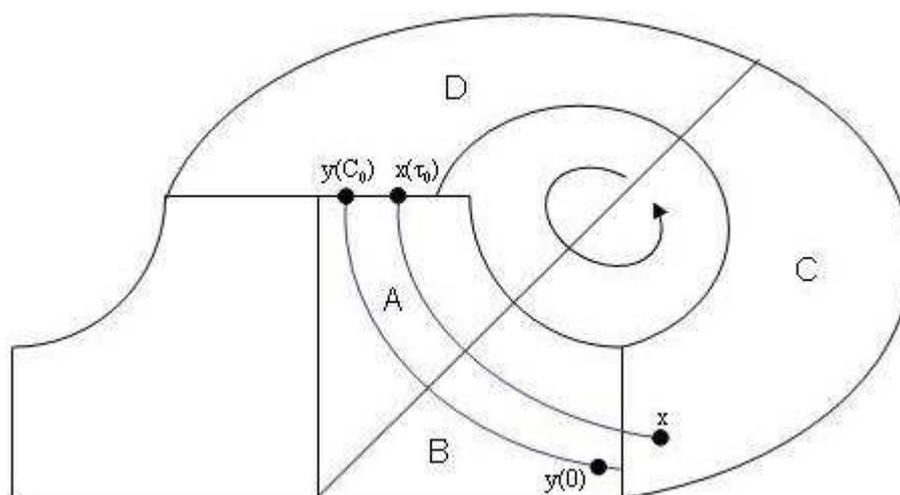


Figura 4.5: Caso 4

Fica claro na construção que, se τ_0 é menor que zero, então x está $\frac{1}{20}$ -próximo de A ou B , e se τ_0 é maior que zero, então x está em C ou D . Além disso, se C_0 é menor que zero, então $y(0)$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de A ou B , e se C_0 é maior que zero, então $y(0)$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de D , ou está em C .

Definiremos o n -ésimo tempo de retorno de x a S como:

- $\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n; X^t x \in S\}$ para $n \geq 0$;
- $\tau_{n-1} = \sup\{t < \tau_n; X^t x \in S\}$ para $n \leq 0$.

E definimos o n -ésimo tempo de retorno de x à Σ por:

- $\tau'_0 = \sup\{t < \tau_0; X^t x \in \Sigma\}$.
- $\tau'_{n+1} = \inf\{t > \tau'_n; X^t x \in \Sigma\}$ para $n \geq 0$;
- $\tau'_{n-1} = \sup\{t < \tau'_n; X^t x \in \Sigma\}$ para $n \leq 0$.

Agora definimos o n -ésimo tempo de retorno de y à S :

- $C_{n+1} = \inf\{t > C_n; X^{h(t)}y(0) \in S\}$ para $n \geq 0$;
- $C_{n-1} = \sup\{t < C_n; X^{h(t)}y(0) \in S\}$ para $n \leq 0$.

E terminamos estas definições com o n -ésimo tempo de retorno de y à Σ :

- $C'_0 = \sup\{t < C_0; X^{h(t)}y(0) \in \Sigma\}$;
- $C'_{n+1} = \inf\{t > C'_n; X^{h(t)}y(0) \in \Sigma\}$ para $n \geq 0$;
- $C'_{n-1} = \sup\{t < C'_n; X^{h(t)}y(0) \in \Sigma\}$ para $n \leq 0$.

Por construção temos $\tau_n \in (\tau'_n, \tau'_{n+1})$ e $C_n \in (C'_n, C'_{n+1})$.

Afirmação 1: $\tau_n \in (C'_n, C'_{n+1})$ e $C_n \in (\tau'_n, \tau'_{n+1})$.

Mostraremos apenas $\tau_n \in (C'_n, C'_{n+1})$, para o outro caso a demonstração é totalmente análoga.

Faremos a demonstração por indução:

Parte 1: $\tau_0 \in (C'_0, C'_1)$.

Suponha que esta afirmação seja falsa. Então temos duas possibilidades:

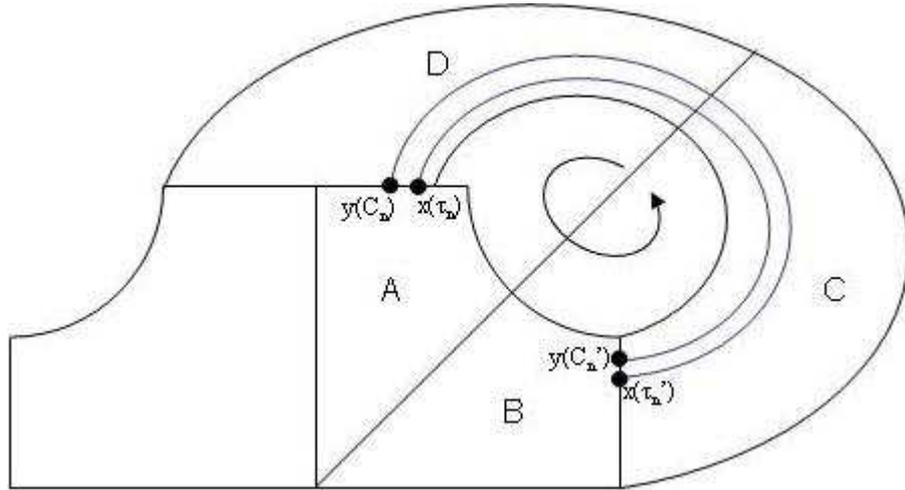


Figura 4.6: Definição de τ_n , τ'_n , C_n e C'_n .

1. Caso $\tau_0 \leq C'_0$.

Fica claro que $\tau_0 \leq C'_0 < 0$. Neste caso, x está $\frac{1}{20}$ -próximo de A ou de B . Daí a órbita de x nos tempos entre τ_0 e 0 está sempre $\frac{1}{20}$ -próxima de A ou de B . No entanto, $y(0)$ também deve estar $\frac{1}{10}$ -próximo de A ou de B (Pois x e $y(0)$ estão $\frac{1}{20}$ -próximos). Portanto, existe $C'_0 < t_0 < 0$ (quem existe é o t_0) tal que $y(t_0) \in C \cap D$, e como $\tau_0 < C'_0 < t_0 < 0$ temos que $x(t_0)$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de A ou de B , logo $d(x(t_0), y(t_0)) > \frac{1}{20}$, contradição.

2. caso $\tau_0 \geq C'_1$.

Se $\tau_0 \leq 0$, então x está $\frac{1}{20}$ -próximo de A ou de B . Logo $y(0)$ está $\frac{1}{10}$ -próximo de A ou de B . Daí, $y(t)$ sempre está $\frac{1}{20}$ -próximo de A ou de B , quando t varia entre C'_1 e 0 (Lembre que $C'_1 \leq \tau_0 < 0$). No entanto, como $C'_1 \leq \tau_0 < 0$ e $d(x(C'_1), y(C'_1)) < \frac{1}{20}$, existe t_0 entre C'_1 e 0 com $x(t_0) \in C \cap D$. Contradição, pois daí, $d(x(t_0), y(t_0)) > \frac{1}{20}$.

Se $\tau_0 > 0$, então, x está em C ou D e $y(0)$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de D e ou está

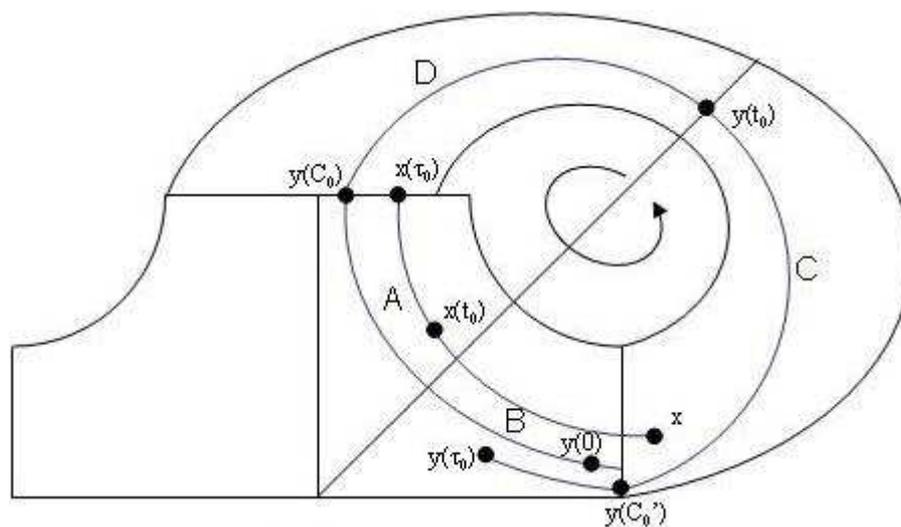


Figura 4.7: Se $\tau_0 \leq C'_0$

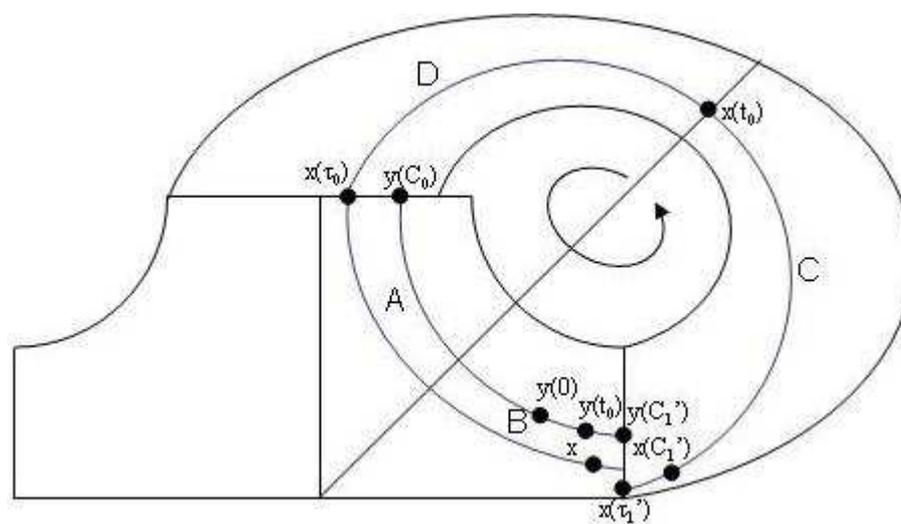


Figura 4.8: Se $\tau_0 \geq C'_1$ e $\tau_0 \leq 0$

em C , logo $C'_1 > 0$. Portanto que a órbita de x entre 0 e C'_1 está em $C \cup D$, mas existe $t_0 \in (0, C'_1)$ com $y(t_0) \in A \cap B$. Logo, $d(x(t_0), y(t_0)) > \frac{1}{20}$, uma contradição.

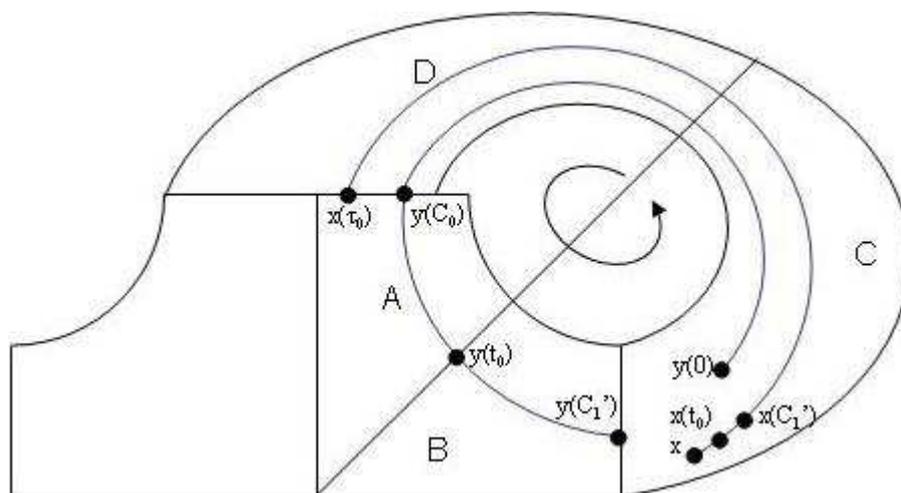


Figura 4.9: Se $\tau_0 \geq C'_1$ e $\tau_0 > 0$

Parte 2: Se $\tau_n \in (C'_n, C'_{n+1})$, então $\tau_{n+1} \in (C'_{n+1}, C'_{n+2})$.

Suponha que não vale. Então temos duas possibilidades:

1. Caso $\tau_{n+1} \leq C'_{n+1}$.

É claro que $C'_n < \tau_n < \tau_{n+1} \leq C'_{n+1}$. Sabemos que $y(t)$ só passa em S uma vez quando t varia em (C'_n, C'_{n+1}) . Portanto quando t varia em (τ_n, τ_{n+1}) , $y(t)$ deve estar $\frac{1}{20}$ -próximo de S , pois $x(\tau_n)$ e $x(\tau_{n+1})$ estão em S e $d(x(\tau_n), y(\tau_n)) < \frac{1}{20}$ e $d(x(\tau_{n+1}), y(\tau_{n+1})) < \frac{1}{20}$. Lembrando que $S = A \cap D$ e $\tau'_n \in (\tau_n, \tau_{n+1})$, temos que $y(\tau'_n)$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de $A \cap D$ e $x(\tau'_n)$ está sobre $B \cap C$. Logo $d(x(\tau'_n), y(\tau'_n)) > \frac{1}{20}$, contradição.

2. Caso $\tau_{n+1} \geq C'_{n+2}$.

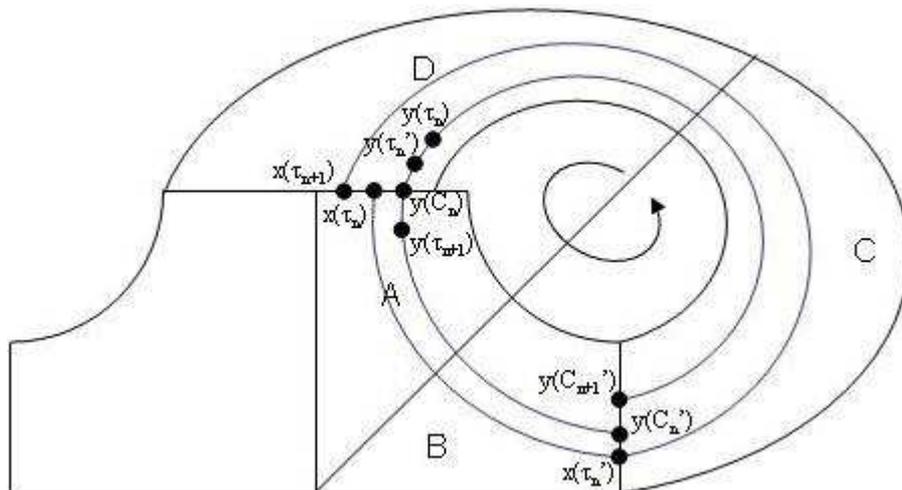


Figura 4.10: Se $\tau_{n+1} \leq C'_{n+1}$

Neste caso, temos $\tau_n < C'_{n+1} < C_{n+1} < C'_{n+2} \leq \tau_{n+1}$. Sabemos que $x(t)$ passa em uma única vez em $\Sigma = B \cap C$ quando t varia em (τ_n, τ_{n+1}) . Como $y(C'_n)$ e $y(C'_{n+1})$ estão em $\Sigma = B \cap C$, então $x(C'_n)$ e $x(C'_{n+1})$ estão $\frac{1}{20}$ -próximo de $\Sigma = B \cap C$. Logo, $x(C_{n+1})$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de $\Sigma = B \cap C$, e $y(C_{n+1})$ está em $S = A \cap D$, uma contradição, pois $d(x(C_{n+1}), y(C_{n+1})) < \frac{1}{20}$.

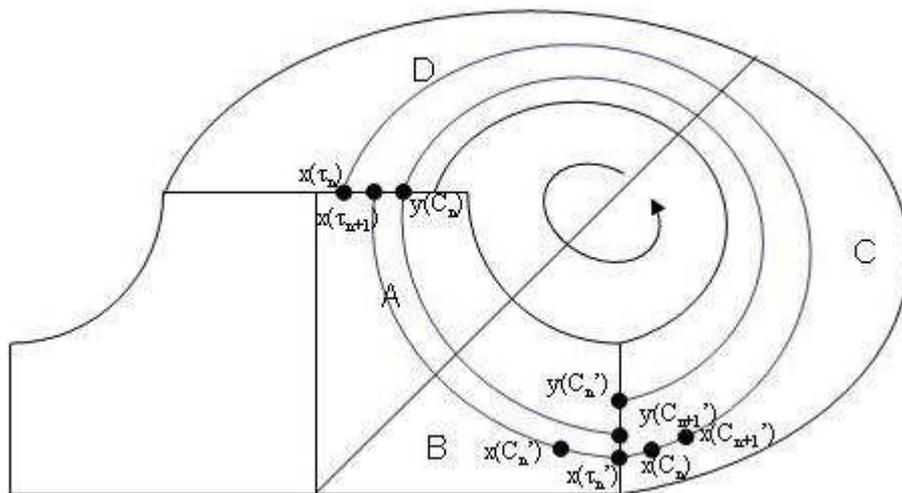


Figura 4.11: Se $\tau_{n+1} \geq C'_{n+2}$

Parte 3: Se $\tau_n \in (C'_n, C'_{n+1})$, então $\tau_{n-1} \in (C'_{n-1}, C'_n)$.

Suponha que não vale. Então temos duas possibilidades:

1. Caso $\tau_{n-1} \geq C'_n$.

Aqui temos $C'_n \leq \tau_{n-1} < \tau_n < C'_{n+1}$. Sabemos que $y(t)$ só passa em $S = A \cap D$ uma única vez quando t varia em (C'_n, C'_{n+1}) . Portanto quando t varia em (τ_{n-1}, τ_n) , $y(t)$ deve estar $\frac{1}{20}$ -próximo de S , pois $x(\tau_n)$ e $x(\tau_{n-1})$ estão em S e $d(x(\tau_n), y(\tau_n)) < \frac{1}{20}$ e $d(x(\tau_{n-1}), y(\tau_{n-1})) < \frac{1}{20}$. Como $S = A \cap D$ e $\tau'_{n-1} \in (\tau_{n-1}, \tau_n)$, temos que $y(\tau'_{n-1})$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de $A \cap D$ e $x(\tau'_{n-1})$ está sobre $B \cap C$. Logo $d(x(\tau_{n-1}), y(\tau_{n-1})) > \frac{1}{20}$, contradição.

2. Caso $\tau_{n-1} \leq C'_{n-1}$.

Neste caso, temos $\tau_{n-1} \leq C'_{n-1} < C_{n-1} < C'_n < \tau_n$. Sabemos que $x(t)$ passa uma única vez em $\Sigma = B \cap C$ quando t varia em (τ_{n-1}, τ_n) . Como $y(C'_n)$ e $y(C'_{n-1})$ estão em $\Sigma = B \cap C$, então $x(C'_n)$ e $x(C'_{n-1})$ estão $\frac{1}{20}$ -próximos de $\Sigma = B \cap C$. Logo, $x(C_n)$ está $\frac{1}{20}$ -próximo de $\Sigma = B \cap C$, e $y(C_n)$ está em $S = A \cap D$, uma contradição, pois $d(x(C_n), y(C_n)) < \frac{1}{20}$.

Note que a parte 2 mostra a tese para tempos de retorno positivos, e que a parte 3 mostra a tese para tempos de retorno negativos. Assim fica demonstrada a afirmação.

Afirmação 2: $x(\tau_0)$ e $y(C_0)$ estão na mesma folha em S .

Suponha que não estejam. Lembrando que a folheação em S é dada por $\{(x, y) \in S; x = x_0, x_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$. De fato, sabemos que o mapa de Poincaré definido em S é dado por $P(x, y) = (f(x), g(x, y))$, e que $f'(x) > \sqrt{2}$. Portanto, como $x(\tau_0)$ e $y(C_0)$ estão em folhas diferentes, e $P^n(x(\tau_0))$ e $P^n(y(C_0))$ sempre estão do mesmo

lado de S , i.e., ambos estão em S^+ ou ambos estão em S^- , então a distância entre $P^n(x(\tau_0))$ e $P^n(y(C_0))$ aumenta com n numa razão maior que $\sqrt{2}$ por uma aplicação do teorema do valor médio. Basta observar que se $x(\tau_0) = (x_0, y_0)$, $y(C_0) = (x'_0, y'_0)$, $P(x(\tau_0)) = (x_1, y_1)$, $P(y(C_0)) = (x'_1, y'_1)$, então como x_0, x'_0 e x_1, x'_1 têm o mesmo sinal, vale para algum $\xi \in (x_0, x'_0)$ que $|x_1 - x'_1| = |f(x_0) - f(x'_0)| = |f'(\xi)||x_0 - x'_0| > \sqrt{2}|x_0 - x'_0|$. Logo para algum n_0 suficientemente grande, teremos $P^{n_0}(x(\tau_0))$ e $P^{n_0}(y(C_0))$ em lados diferentes de S (S^+ e S^-). Note que, $P^n(x(\tau_0)) = x(\tau_n)$ e $P^n(y(C_0)) = y(C_n)$. Teremos então que $x(\tau'_n)$ e $y(C'_n)$ estarão em lados diferentes de Σ (Σ^+ e Σ^-). E como $C'_n \in (\tau_n, \tau_{n+1})$ temos que $x(C'_n)$ não poderá estar $\frac{1}{20}$ -próximo de $y(C'_n) \in \Sigma$. Esta contradição prova a afirmação 2.

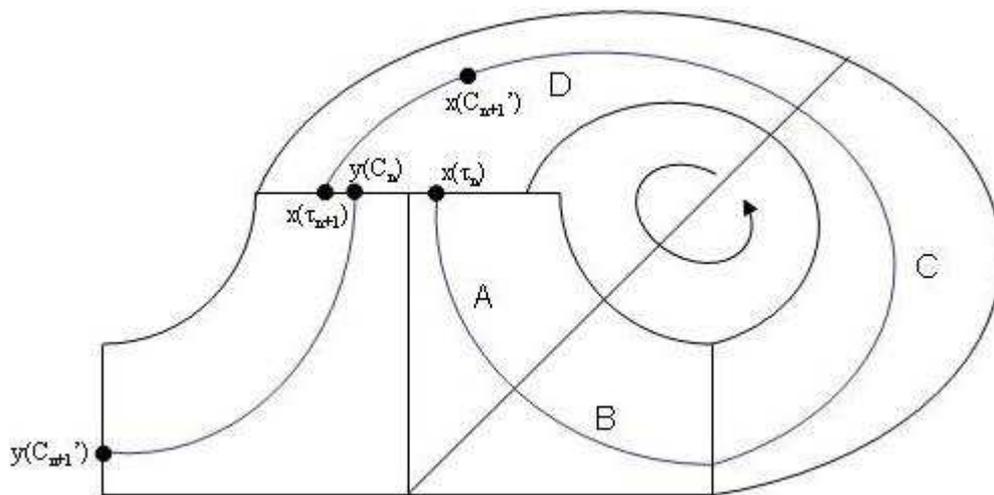


Figura 4.12: Se $x(\tau_0)$ e $y(C_0)$ não estão em uma mesma folha

Afirmação 3: $x(\tau_0) = y(C_0)$.

Suponha que $x(\tau_0) \neq y(C_0)$. Pela afirmação 2, já sabemos que $x(\tau_0)$ e $y(C_0)$ estão numa mesma folha. Como sabemos pelas propriedades do mapa de Poincaré de S (especificamente a razão de contração μ da sua função coordenada $g(x, y)$ satisfaz $\mu\sqrt{2} < 1$) que $d(x(\tau_n), y(C_n))$ diminui à medida que n cresce numa razão

μ . Donde temos que $d(x(\tau_n), y(C_n))$ cresce numa razão maior que $\frac{1}{\mu}$ quando n decresce, note que como $x, y \in \Lambda$ desde o início e Λ é invariante, podemos realmente aplicar este argumento pois $x(\tau_n), y(c_n)$ estão sempre em Λ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, em um tempo negativo n_0 suficientemente pequeno, teremos $x(\tau_n)$ e $y(C_n)$ em diferentes componentes conexas de $P(S)$.

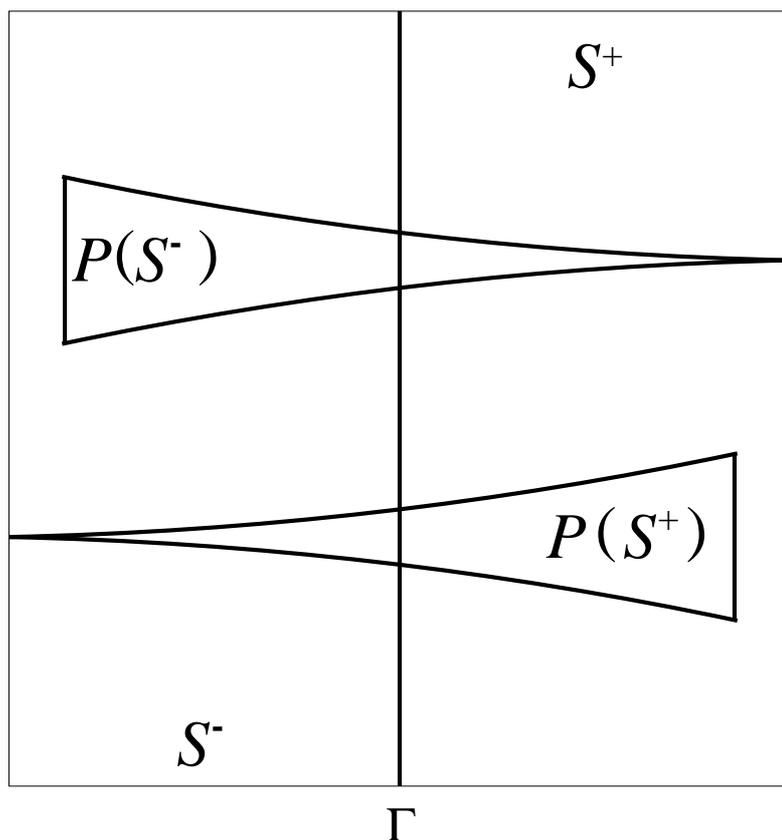


Figura 4.13: As componentes que estão sobre S

Portanto, $x(\tau_{n_0-1})$ e $y(C_{n_0-1})$ estarão em lados diferentes de S e $x(\tau'_{n_0})$ e $y(C'_{n_0})$ estarão em lados diferentes de Σ . Como $C'_{n_0-1} \in (\tau_{n_0-1}, \tau_{n_0})$ temos que $x(C'_{n_0-1})$ não pode estar $\frac{1}{20}$ -próximo de $y(C'_{n_0-1}) \in \Sigma$. Esta contadição termina a afirmação 3.

Note que a afirmação 3 prova o teorema.

□

Observação 1: A prova da afirmação 2 usou apenas as órbitas positivas de x e y , ou seja, provamos a seguinte:

Proposição 4.1. *Se $x, y \in \Lambda$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente tais que $d(X^t x, X^{h(t)} y) < \frac{1}{20}$ para todo $t > 0$, então x, y estão na mesma folha estável.*

Observação 2: O argumento da demonstração da afirmação 3, pode ser utilizada para qualquer n , logo teremos $x(\tau_n) = y(C_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.2. *O atrator geométrico de Lorenz Λ é expansivo.*

Este teorema é consequência da seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que se $a \in S$, $d(X^t a, a) < \delta'$, e a órbita de a até $X^t(a)$ não passa por Σ , então $|t| < \epsilon$.

Dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \min(\frac{1}{20}, \delta')$. Então, se existem x, y em Λ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, homeomorfismo crescente, tais que $d(X^t x, X^{h(t)} y) < \delta$ para todo número real t , pelo teorema 4.1 temos $x(\tau_n) = y(C_n)$. Como $d(x(\tau_n), y(\tau_n)) < \delta$ e $\tau_n \in (C'_n, C'_{n+1})$ temos (pela propriedade acima) $y(\tau_n) = X^\eta(x(\tau_n)) = x(\tau_n + \eta)$ para algum $|\eta| < \epsilon$. Isto é o que faltava provar para concluir a expansividade.

□

4.1 Robustez da expansividade

A folheação invariante por linhas paralelas ao eixo dos x na seção transversal S é robusta no seguinte sentido: para todos os fluxos Y^t suficientemente C^1 próximos

do fluxo do atrator geométrico de Lorenz X^t aqui apresentado, a seção transversal S continua sendo uma seção transversal admitindo uma folheação por curvas diferenciáveis, que estão C^1 próximas de linhas paralelas ao eixo dos x , e que são invariantes pela transformação de retorno de Poincaré associada ao fluxo Y^t ; o leitor pode consultar [2] para a prova desta afirmação.

Notemos que a singularidade na origem também mantém as mesmas relações entre seus autovalores, pois ela é hiperbólica e os autovalores dependem continuamente do fluxo. Decorre deste fato que a transformação obtida pela ação desta transformação de Poincaré na nova folheação também é C^1 próxima da transformação f . Portanto, suas propriedades são semelhantes: a derivada maior que $\sqrt{2}$ em módulo e a conseqüente densidade de órbitas periódicas continuam sendo verdadeiras para esta nova transformação unidimensional.

Assim, os argumentos usados na prova da expansividade para o atrator Λ do fluxo X^t podem ser reaplicados ao atrator correspondente Λ_Y do fluxo Y^t , estejam suficientemente próximos, onde $\Lambda_Y = \overline{\cap_{t>0} Y^t(U)}$.

Mostramos assim que o atrator geométrico de Lorenz é *robustamente expansivo*.

4.2 Sensibilidade às condições iniciais

Λ é *sensível às condições iniciais* se para todo $x \in \Lambda$, e $r > 0$ é suficientemente pequeno e $W \subset \Lambda$ é vizinhança de x , então existe $y \in W$ tal que $d(X^t x, X^t y) > r$ para algum $t \neq 0$.

Em outras palavras, um sistema é sensível às condições iniciais se pequenas mudanças em seu estado inicial podem gerar grandes mudanças no tempo passado

ou futuro. Um sistema sensível às condições iniciais também é conhecido como sistema ‘caótico’. Portanto sistemas sensíveis às condições iniciais são de certa forma imprevisíveis.

Segue diretamente das definições que, se Λ é expansivo, então Λ é sensível às condições iniciais. De fato, tome $x \in \Lambda$ e $W \subset \Lambda$ vizinhança de x em Λ . Tome $\epsilon = 1$, e considere $\delta > 0$ da definição de expansividade e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a identidade. Tome $y \in W - X^{[-1,1]}(x)$. Então existe $t_0 \neq 0$ tal que $d(X^{t_0}x, X^{t_0}y) > \delta$. Caso não houvesse um tal t_0 , teríamos $d(X^t(x), X^t(y)) < \delta$ para todo t real e, pela definição de expansividade, $X^{t_1}y \in X^{[t_1-1, t_1+1]}x$, logo $y \in X^{[-1,1]}x$ o que não pode ocorrer pela escolha de y .

4.2.1 Sensibilidade para órbitas futuras numa vizinhança do atrator

A seguinte definição alternativa para sensibilidade às condições iniciais é mais frequentemente usada: Λ é *sensível às condições iniciais* se para todo $x \in \Lambda$, e $r > 0$ é suficientemente pequeno e $W \subset \Lambda$ é vizinhança de x , então existe $y \in W$ tal que $d(X^t x, X^t y) > r$ para algum $t > 0$.

O atrator geométrico de Lorenz também é sensível às condições iniciais com esta definição. Mais ainda, o conjunto positivamente invariante U que forma o conjunto estável de Λ e o define como maximal invariante em U , é sensível às condições iniciais neste novo sentido. De fato, a segunda afirmação da demonstração do teorema 4.1 mostra isto.

Considere $x \in U$. Pela definição de U em algum momento a órbita de x vai se

aproximar de Λ , e portanto em algum momento sua órbita vai tocar a seção S . Seja τ o primeiro tempo positivo tal que $X^\tau x \in S$. Considere V um aberto contendo x , como a figura 4.14. Então $X^\tau(V)$ é um aberto contendo $X^\tau x$. Seja $y \in S \cap V$ em uma folha diferente de $X^\tau(V)$. Pela demonstração da afirmação 2, do teorema 4.1 existe $t > 0$ tal que $\text{dist}(X^t y, X^t(X^\tau x)) > \frac{1}{20}$. Daí $X^{-\tau} y \in V$ e

$$\text{dist}(X^{t+\tau}(X^{-\tau} y, X^{t+\tau}(x))) = \text{dist}(X^t y, X^t(X^\tau x)) > \frac{1}{20}$$

Isto mostra que U é sensível às condições iniciais.

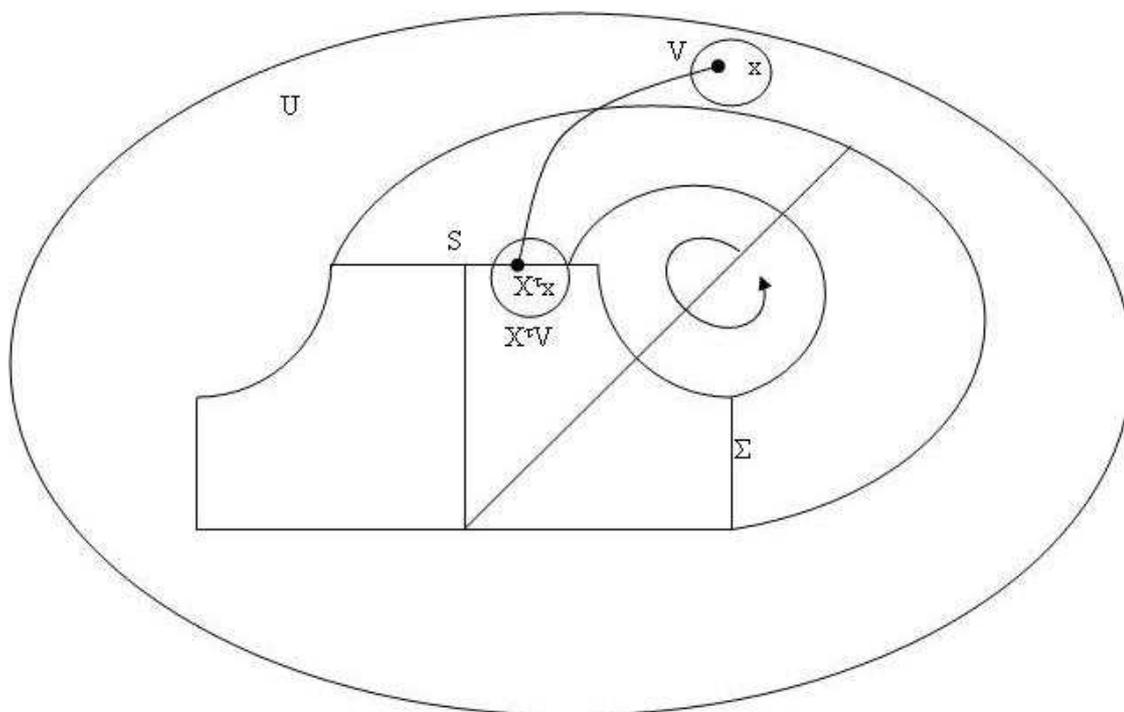


Figura 4.14: V vizinhança de x e $X^\tau V$ vizinhança de $X^\tau x$

Portanto, pelo Teorema 4.2 e pelas seções 4.1, 4.2 e 4.2.1, o atrator geométrico de Lorenz é expansivo, sensível às condições iniciais para órbitas futuras numa vizinhança do atrator, tem uma singularidade não isolada, e estas propriedades são robustas; logo a noção de expansividade é mais geral que as noções de C-expansividade e K-expansividade.

Referências Bibliográficas

- [1] Araújo, V. ; Pacífico, M. J. ; Pujals, E. R. ; Viana, M. *Singular-hyperbolic attractors are chaotic*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 361, 2431-2485, 2009.
- [2] Araújo, V. ; Pacífico, M.J. *Three Dimensional Flows, XXVI Brazillian Mathematical Colloquium*, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [3] Lorenz, E.N. *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sci., 20:130-141, 1963.
- [4] Bowen, R. ; Walters, P. *Expansive one-parameter flows*, J. Differential Equations, 12:180-193,1972.
- [5] V. S. Afraimovich, V. V. Bycov, and L. P. Shil'nikov. *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*. Dokl. Acad. Sci. USSR, 234:336-339,1977.
- [6] J. Guckenheimer and R. F. Williams *Strutural stability of Lorenz attractors*. Publ. Math. IHES, 50:59-72,1979.
- [7] Keynes, H.B. and Sears, M., *Real-expansive flows and topological dimension*, Ergod. Th. e Dynam. Sys., 1:179-195, 1981.

- [8] Komuro, M. *Expansive properties of Lorenz Attractors*, In *the theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems*, World Sci. Publishing, Kyoto, 4-26, 1984.
- [9] M. Oka *Expansiveness of real flows*, Tsukuba J. Math., 14(1):1-8, 1990.
- [10] Palis, J. ; Melo, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Projeto Euclides, IMPA, 1987.
- [11] Robinson, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and chaos*, 2nd. ed. CRC Press, 1998.
- [12] Viana, M. *What's New on Lorenz Strange Attractors?*, Math. Intell. 22: 6-19, 2000.
- [13] Lewowicz, Jorge *Expansive homeomorphisms of surfaces.*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 20 (1989), no. 1, 113-133.
- [14] Mañé, Ricardo *Contributions to the stability conjecture.* Topology 17 (1978), no. 4, 383-396.
- [15] Massera, J. L. *The meaning of stability.* Bol. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo 8 1964 405-429.
- [16] Morales, C. A.; Pacifico, M. J.; Pujals, E. R. *Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers.* Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 2, 375-432.
- [17] Tucker, Warwick *The Lorenz attractor exists.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 12, 1197-1202.

- [18] Tucker, Warwick *A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem*. Found. Comput. Math. 2 (2002), no. 1, 53-117.