Uma Formulação Abstrata Para o Estudo de Soluções Estatísticas das Equações de Navier-Stokes

Cecília Freire Mondaini

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Ricardo Martins da Silva Rosa

Rio de Janeiro

Março de 2010

Agradecimentos

Devoto os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que me apoiaram enquanto estive envolvida na elaboração desta dissertação. A todos que me ofereceram palavras de incentivo e, principalmente, aos que, através de sua experiência, me orientaram na tentativa de que eu seguisse os caminhos certos.

Agradeço a todos de minha família, pela atenção e carinho que sempre me dedicaram: ao meu pai, Rubem; aos meus irmãos, Leonardo, Débora, Felipe e Rubem; à Perpétua, à Carmem e à minha cunhada, Ana Isabel. À minha mãe, em memória, que sempre serviu de modelo e inspiração para mim.

Ao meu orientador, Ricardo Rosa, pela proposição de um tema pouco usual para esta dissertação e por tudo que eu aprendi durante nossas discussões semanais. Agradeço-lhe sobretudo pela confiança depositada em mim, apesar do pouco tempo que ainda se dispunha para o cumprimento dos prazos.

A todos os professores que contribuíram para minha formação matemática. Em especial, a Ademir Pazoto, meu orientador de iniciação científica.

A todos os meus amigos, não só aos que conheci na universidade mas a todos que fizeram parte de minha vida, com os quais dividi momentos de alegria e também de estudo.

Ao CNPq e à FAPERJ, pelo apoio financeiro durante o primeiro e o segundo anos de mestrado, respectivamente.

Um agradecimento especial à Bibi, minha estimada e fiel companheira de horas e horas de trabalho em frente ao computador, que, sempre deitada em cima de livros ou papéis de rascunho, provou-me que felinos também sabem ser uma excelente companhia.

Resumo

Uma Formulação Abstrata para o Estudo de Soluções Estatísticas das Equações de Navier-Stokes

Cecília Freire Mondaini

Orientador: Ricardo Martins da Silva Rosa

Com base nos resultados obtidos em artigos recentes sobre soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes, o objetivo desta dissertação foi construir um conjunto abstrato de funções que ainda satisfizesse alguns dos resultados mostrados nestes artigos para o conjunto de soluções fracas das equações de Navier-Stokes e outros relacionados a medidas de probabilidade de Borel definidas sobre um espaço de Hilbert. A ideia foi analisar a demonstração destes resultados e verificar quais as hipóteses mínimas necessárias para demonstrá-los. Começamos com a demonstração de alguns resultados de compacidade, os quais nos servem de motivação para a definição de uma certa hipótese sobre o conjunto abstrato. Assumimos posteriormente três hipóteses adicionais, que nos permitem provar a mensurabilidade dos seguintes conjuntos: a evolução de conjuntos de Borel, as órbitas de funções que partem de conjuntos de Borel e a evolução destas. Além disso, usando novamente estas três hipóteses, prova-se um resultado de recorrência para as funções pertencentes ao conjunto abstrato.

Palavras-chave: equações de Navier-Stokes, soluções estatísticas, turbulência.

Abstract

An Abstract Formulation for the Study of Statistical Solutions of the Navier-Stokes Equations

Cecilia Freire Mondaini

Supervisor: Ricardo Martins da Silva Rosa

Based on the results obtained in recent articles about statistical solutions of the Navier-Stokes equations, the aim of this dissertation was to construct an abstract set of functions which would still satisfy some of the results proved in these articles for the set of weak solutions of the Navier-Stokes equations and others related to Borel probability measures defined over a Hilbert space. The idea was to analyze the proof os these results in order to verify which were the minimal hypotheses necessary to prove them. We begin by proving some compactness results, which motivate us to define a certain hypothesis on the abstract set. Lately, we assume three additional hypotheses, which allow us to prove the measurability of the following sets: the evolution of Borel sets, the orbits of functions defined initially over a Borel set, and their evolution. Furthermore, using again these three hypotheses, we prove a recurrence result for the functions belonging to the abstract set.

Keywords: Navier-Stokes equations, statistical solutions, turbulence.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, é amplamente aceito que o escoamento de um fluido tridimensional, homogêneo e incompressível pode ser descrito pelas equações

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo vetorial de velocidades e p é o campo escalar de pressão associado ao escoamento, que são as incógnitas do problema. As equações acima constituem um sistema de quatro equações escalares, chamadas *equações de Navier-Stokes*. Os termos ρ, ν e $\mathbf{f}$ representam, respectivamente, a densidade do fluido (que é constante para um fluido homogêneo), a viscosidade cinemática e a densidade de massa associada ao campo de forças externas ao domínio do fluido.

Apesar de já ser bastante difundida e utilizada em inúmeras aplicações práticas, ainda não se sabe se as equações de Navier-Stokes são "bem comportadas" de um ponto de vista matemático. A questão de saber se existe uma única solução definida para todo tempo positivo ainda permanece em aberto, sendo oferecido inclusive um prêmio de um milhão de dólares por uma instituição americana (Clay Mathematics Institute) para quem achar uma solução ou um contra-exemplo.

Os resultados obtidos até hoje dizem respeito apenas à existência local de uma única solução regular (em torno de uma dada condição inicial) ou então à existência global de uma solução fraca (que não é regular, podendo conter descontinuidades) mas não necessariamente única.

A grande dificuldade de se trabalhar com as equações de Navier-Stokes deve-se sobretudo à presença do termo não-linear $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, chamado de termo *inercial*. A situação fica complicada principalmente no caso de fluidos turbulentos, que são fluidos que apresentam uma grande irregularidade tanto no espaço quanto no tempo e, consequentemente, muitos graus de liberdade. Devido a isto, é comum utilizar-se a teoria estatística neste caso, analisando-se as médias das quantidades características associadas ao fluido, que tendem a ser mais regulares.

No caso de uma equação de evolução

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{x}$ é uma variável espacial, t é uma variável temporal e a função $\mathbf{F}$ é suficientemente regular de modo que podemos garantir a existência e a unicidade de soluções de (1.1), podemos definir, para cada $t \geq 0$, a aplicação $S(t)$ que a cada condição inicial $\mathbf{x}_0$ associa $S(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t)$, onde $\mathbf{x}$ é a única solução de (1.1) que satisfaz $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Com isto, obtemos um semigrupo dado por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Se, além disso, pudermos garantir que as soluções de (1.1) dependem continuamente das condições iniciais, ou seja, que (1.1) é de fato um problema bem posto, então temos que, para cada $t \geq 0$, $S(t)$ é uma aplicação contínua.

Para uma equação de evolução bem posta, dada uma medida de probabilidade de Borel μ_0 em um espaço de Hilbert H representando uma distribuição de probabilidades para as condições iniciais, podemos considerar a sua evolução ao longo do tempo definindo, para cada $t \geq 0$,

$$\mu_t(E) = \mu_0(S(t)^{-1}(E)),$$

para todo subconjunto de Borel $E \subset H$. Note que a definição acima faz sentido, uma vez que $S(t)$ é uma aplicação contínua e, portanto, $S(t)^{-1}(E)$ também é um conjunto de Borel, ou seja, um conjunto mensurável em relação à σ-álgebra de Borel do espaço de condições iniciais (cf. Proposição 2.3.2).

No caso das equações de Navier-Stokes, devido à falta de um resultado sobre unicidade de soluções, não temos um semigrupo bem definido associado. Este fato, em parte, motivou a criação do conceito de *solução estatística*, cuja definição não depende da existência de um semigrupo bem definido.

A grosso modo, uma *solução estatística no sentido de Foias-Prodi* é uma família $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ de medidas de probabilidade de Borel que satisfazem uma equação do tipo Liouville da Mecânica Estatística. Já uma *solução estatística no sentido de Vishik-Fursikov* é uma família de medidas de probabilidade de Borel $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ obtidas pela projeção, em cada instante de tempo $t \geq 0$, de uma medida de probabilidade ρ com suporte em um conjunto de trajetórias $\mathcal{U}$ (i.e., tal que $\rho(\mathcal{U}) = 1$).

Por outro lado, como no caso de soluções estatísticas as medidas de probabilidade de Borel não são definidas através de um semigrupo, surgem algumas complicações ligadas à questão de mensurabilidade. Não é claro, por exemplo, que a evolução a um instante de tempo t de um dado conjunto de Borel no espaço de condições iniciais ainda seja um conjunto de Borel. De fato, isto em geral não é verdade, mas podemos mostrar que este novo conjunto obtido pela evolução é mensurável em relação a uma σ-álgebra obtida por uma extensão da medida, como veremos mais adiante na seção 3.5. Para esta prova e para a prova da mensurabilidade de alguns outros conjuntos dinâmicos, é necessária a utilização dos conceitos de conjuntos analíticos e conjuntos universalmente mensuráveis, que são definidos na seção 2.5 e explorados com mais detalhes no Apêndice B.

Ao lidarmos com as equações de Navier-Stokes, é comum considerarmos um espaço de Hilbert H no qual o campo de velocidades associado ao escoamento assume valores em cada instante de tempo t. Ou seja, se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é o domínio do escoamento, então a função que a cada $\mathbf{x} \in \Omega$ associa $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, para t fixo, é uma função que pertence ao espaço H.

A variável temporal t, por sua vez, varia em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, frequentemente tomado como sendo simplesmente o intervalo $[0, \infty)$. Este espaço de Hilbert H surge como sendo o completamento em relação à norma de $L^2(\Omega)^3$ de um espaço de funções teste $\mathcal{V}$, cuja definição depende das condições de fronteira impostas no problema. Considera-se também um espaço de Hilbert V que é o completamento de $\mathcal{V}$ em relação à norma de $H^1(\Omega)^3$. Além disso, identifica-se H com H', de modo a obter que $V \subseteq H \subseteq V'$.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação foi baseado nos artigos ainda não publicados [1] e [2], nos quais são obtidos vários resultados relacionados a soluções estatísticas das equações de Navier-Stokes. O nosso objetivo foi formular um conjunto abstrato de funções que ainda satisfizesse algumas das propriedades mostradas nos artigos para o conjunto de soluções fracas das equações de Navier-Stokes. Para a construção deste conjunto, buscamos verificar quais eram as hipóteses mínimas necessárias presentes nestes resultados para que conseguíssemos obter as mesmas propriedades.

Como a nossa intenção é fazer uma formulação abstrata, não nos referiremos à função $\mathbf{u}$ como uma solução fraca da equação de Navier-Stokes, mas simplesmente como um elemento pertencente ao conjunto abstrato que construiremos. Cada função pertencente a este conjunto parte de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tomado geralmente como sendo $[0, \infty)$, e assume valores em um espaço de Hilbert genérico H.

Iremos também considerar o espaço H munido da topologia fraca e o passaremos a denotar por H_w. O nosso conjunto abstrato de funções será denotado por $\mathcal{U}_I$ e será um subconjunto do espaço $\mathcal{C}(I, H_w)$, que é o espaço formado pelas funções definidas em I e assumindo valores em H_w, e que são (fracamente) contínuas.

Além disso, sempre motivados pela construção feita no caso da equação de Navier-Stokes, consideraremos também um espaço de Hilbert V denso em H que, após identificação de H com H', satisfaz: $V \subseteq H \subseteq V'$.

Algumas ideias apresentadas aqui ajudaram a compreender alguns conceitos utilizados nestes artigos que não haviam sido completamente esclarecidos, tais como os de conjuntos analíticos e universalmente mensuráveis.

Nas primeiras seções do capítulo 2, apresentamos uma breve introdução aos conceitos de espaços vetoriais topológicos (EVT's), redes, σ-álgebras e medidas, restringindo-nos apenas ao necessário para a compreensão do texto. Na seção 2.1, definimos os espaços Poloneses, cujas propriedades são essenciais aos resultados do capítulo 3. Na seção 2.4, apresentamos também uma maneira de obter a extensão de uma medida de Borel a uma medida completa. Isto será particularmente importante nos resultados das seções 3.6 e 3.7. Definimos conjuntos analíticos e universalmente mensuráveis na seção 2.5, onde também enunciamos os resultados principais sobre estes conjuntos, que estão demonstrados no Apêndice B. A seção 2.6 trata da construção entre os espaços de Hilbert V e H na qual nos basearemos, como mencionado anteriormente. Nas seções 2.7 - 2.9, apresentamos as noções de integração e derivação que serão utilizadas nos resultados que motivam em parte a definição do conjunto abstrato. Definimos também os espaços de funções que serão utilizados ao longo de todo o capítulo 3 e mostramos que alguns destes são espaços Poloneses.

O capítulo 3 é reservado ao estudo da formulação abstrata. Na seção 3.1, apresentamos alguns operadores definidos no espaço de funções fracamente contínuas e utilizamos a topologia deste espaço para provar a continuidade desses operadores. Na seção 3.2, mostramos vários resultados de compacidade utilizando os conceitos desenvolvidos no capítulo anterior. Estes resultados nos motivam a considerar uma hipótese sobre $\mathcal{U}_I$ que também nos permite obter propriedades de compacidade para este conjunto abstrato, o qual é definido na seção 3.3. A partir da seção 3.5, utilizamos as outras propriedades satisfeitas pelo conjunto abstrato que foi construído para mostrar alguns resultados de mensurabilidade e de recorrência. Veremos que, com apenas 3 hipóteses sobre o conjunto abstrato $\mathcal{U}_I$, é possível mostrar que a evolução de um conjunto de Borel, a órbita das funções em $\mathcal{U}_I$ que partem de um conjunto de Borel e sua evolução são conjuntos mensuráveis, em um certo sentido que definiremos. Com estas mesmas hipóteses, pode-se mostrar também que para quase todo ponto u_0 de um conjunto de Borel E, entre as funções em $\mathcal{U}_I$ que começam em u_0, existe uma sequência $\{u_n\}$ tal que, para cada n, u_n "volta" ao conjunto de Borel E em um certo $t_n \in I$, e a sequência $\{t_n\}$ é tal que $t_n \to \infty$.

No Apêndice A pode ser encontrada uma lista da maior parte dos resultados clássicos que são utilizados ao longo do texto.

Capítulo 2

Ferramentas Matemáticas

2.1 Espaços Vetoriais Topológicos

Dizemos que uma família τ de subconjuntos de um conjunto X é uma *topologia* sobre X e denominamos seus membros de conjuntos *abertos* se:

(i) $\emptyset$ e X são conjuntos abertos;

(ii) Toda interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto;

(iii) Toda união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Ao par (X, τ) damos o nome de *espaço topológico*.

Note que da definição acima segue que toda interseção de uma família de topologias sobre um mesmo conjunto X ainda é uma topologia sobre X.

Antes de prosseguirmos, daremos algumas definições básicas:

Definição Seja (X, τ) um espaço topológico.

1. $F \subset X$ é um conjunto *fechado* se $F^c = X \setminus F \in \tau$;

2. Dado $x \in X$, uma *vizinhança* de x é um subconjunto de X que contém um aberto V tal que $x \in V$;

3. Dado um subconjunto $S \subset X$, definimos o *fecho* $\overline{S}$ de S como o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que, para toda vizinhança V de x, tem-se $V \cap S \neq \emptyset$;

4. Um subconjunto $K \subset S$ é *compacto* se toda cobertura $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de K por abertos (i.e., $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ e $A_\gamma \in \tau$, para todo γ) admite uma subcobertura finita $\{A_{\gamma_i}\}_{i=1}^{n}$;

5. Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma *base* para a topologia τ se todo V em τ se escreve como uma união de elementos de $\mathcal{B}$. Ou, equivalentemente, $\mathcal{B}$ é uma base de τ se para todo $x \in X$ e para toda vizinhança V de x, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ e $U \subset V$;

6. Dado $x \in X$, dizemos que uma família $\mathcal{B}_x$ de vizinhanças de x é uma *base local* em x se para toda vizinhança V de x, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset V$;

7. Dada uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, a *topologia gerada* por $\mathcal{A}$ é a interseção de todas as topologias em X que contêm $\mathcal{A}$. Ela consiste de $\emptyset, X$ e de todos os conjuntos da forma $\bigcup_\alpha V_\alpha$, onde cada V_α é uma interseção finita de elementos de $\mathcal{A}$.

Se X é um conjunto no qual temos uma *métrica* d definida, então dizemos que (X, d) é um *espaço métrico*. Em (X, d), um subconjunto $A \subset X$ é *aberto* se, para cada $a \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\} \subset A.$$

É importante notar que se considerarmos a coleção de todos os subconjuntos abertos em (X, d), dada por

$$\tau_d = \{A \subset X \mid A \text{ é aberto em } (X, d)\},$$

então obtemos que τ_d é uma topologia em X, denominada a *topologia gerada* ou *induzida* por d. Ou seja, todo espaço métrico é um espaço topológico.

Por outro lado, um espaço topológico (X, τ) é dito *metrizável* se a topologia τ é gerada por alguma métrica d. Ou seja, se todo aberto $A \in \tau$ é aberto em relação a d e vice-versa. Neste caso, dizemos que a métrica d é *compatível* com a topologia τ.

Dizemos que um espaço topológico X é separável se existe um subconjunto $S \subset X$ enumerável e denso, i.e., tal que $\overline{S} = X$.

Um exemplo de espaço topológico que será bastante usado nesta dissertação é o espaço *Polonês*. Este é definido como um espaço separável X que admite uma métrica d, compatível com a topologia de X, tal que (X, d) é completo. Uma topologia deste tipo é denominada uma *topologia Polonesa*. Os espaços Poloneses possuem inúmeras propriedades que são essenciais para as demonstrações dos resultados nesta dissertação.

Agora considere X um espaço vetorial sobre um corpo de escalares $\mathcal{K}$ (que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), no qual existe uma topologia τ definida. Dizemos que (X, τ) é um *espaço vetorial topológico* (EVT) quando as operações vetoriais

$$(x, y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$$

e

$$(\lambda, x) \in \mathcal{K} \times X \mapsto \lambda x \in X$$

de soma e multiplicação por escalar, respectivamente, são contínuas. Neste caso, dizemos que τ é uma *topologia vetorial*.

Para simplificar a notação, denotaremos um espaço deste tipo simplesmente por X.

Uma propriedade interessante que segue desta característica adicional dos espaços vetoriais topológicos é que toda topologia vetorial τ é invariante por translações. Ou seja, dados um conjunto aberto A e um elemento $x \in X$, o conjunto

$$x + A = \{x + a; a \in A\}$$

é aberto. Isto segue do fato de que, para cada $x \in X$, o operador translação

$$\begin{aligned} T_x \ : \ & X \to X \\ & y \mapsto x + y \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

A partir disto, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.1 *Sejam X um EVT e $\mathcal{B}$ uma base local em $0 \in X$. Então, todo aberto $A \in \tau$ é uma união de translações de elementos de $\mathcal{B}$.*

Prova: É claro que se A é uma união de translações de vizinhanças da origem, então A é aberto. Reciprocamente, seja A um conjunto aberto. Então, para cada $a \in A$, $A - a$ é uma vizinhança da origem e, portanto, existe $B_a \in \mathcal{B}$ tal que $B_a \subset A - a$. Logo, $B_a + a \subset A$. Assim, podemos escrever A como

$$A = \bigcup_{a \in A} (B_a + a). \qquad \blacksquare$$

Isto nos diz que, em um espaço vetorial topológico, ao invés de nos preocuparmos em considerar todos os abertos da topologia, podemos trabalhar apenas com uma base de vizinhanças da origem, o que simplifica bastante a demonstração de alguns fatos.

Dois casos particulares importantes de espaços vetoriais topológicos são os espaços de Banach e os espaços de Hilbert. O primeiro é um espaço vetorial normado e completo, enquanto o segundo é um espaço vetorial com produto interno e completo em relação à norma gerada por seu produto interno.

2.2 Redes

Definição Dizemos que $\succeq$ é uma *direção* em um conjunto D se satisfaz as seguintes condições:

(i) $x \succeq x, \forall x \in D$;

(ii) $x \succeq y$ e $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z, \forall x, y, z \in D$;

(iii) Para todos $x, y \in D$, existe $z \in X$ tal que $z \succeq x$ e $z \succeq y$.

Note que a condição (iii) acima estende-se a todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D$.

Um conjunto D munido de uma direção é denominado um conjunto *dirigido*.

Um exemplo muito comum de conjunto direcionado é a família de vizinhanças $\mathcal{V}_x$ de um ponto x em um espaço topológico X. Em $\mathcal{V}_x$, definimos uma direção $\succeq$ por

$$V \succeq W \Leftrightarrow V \subset W\ ,\ \forall V, W \in \mathcal{V}_x.$$

Definição Uma *rede* em um conjunto X é uma função $x : D \to X$, onde D é um conjunto dirigido. Dizemos que D é o conjunto de índices da rede.

Note que o conceito de rede é uma generalização do conceito de sequência. A diferença é que, ao invés de $\mathbb{N}$, utilizamos um conjunto mais geral de índices, mas que ainda seja dotado de uma direção. Em analogia às sequências, representamos uma rede simplesmente por $\{x_\alpha\}_\alpha$, onde o índice α varia em um conjunto dirigido D.

Dizemos que uma rede $\{x_\alpha\}_\alpha$ em um espaço topológico X *converge* a $x \in X$ (e denotamos $x_\alpha \to x$) se, para cada vizinhança V de x, existe um índice α_0, dependendo de V e de x, tal que $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \succeq \alpha_0$. Neste caso, dizemos que x é um *limite* de $\{x_\alpha\}_\alpha$.

Abaixo enunciamos alguns resultados conhecidos relacionados a redes. As suas demonstrações podem ser encontradas em [9], nas seções 2.4 e 2.6.

Para este primeiro teorema, lembramos que um espaço topológico é denominado um *espaço de Hausdorff* se para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem vizinhanças U e V de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.2.1 *Se X é um espaço topológico de Hausdorff, então, para toda rede $\{x_\alpha\}_\alpha$ em X, existe no máximo um $x \in X$ tal que $x_\alpha \to x$.*

Teorema 2.2.2 *Se X e Y são espaços topológicos, então as seguintes afirmações sobre uma função $f : X \to Y$ são equivalentes:*

(i) f é contínua em $x \in X$;

(ii) Para toda rede $\{x_\alpha\}_\alpha$ em X tal que $x_\alpha \to x$ em X, temos que $f(x_\alpha) \to f(x)$ em Y.

Corolário 2.2.3 *Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias em um conjunto X. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\tau_1 \subset \tau_2$;

(ii) Toda rede convergente em relação a τ_2 converge em relação a τ_1 para o mesmo limite.

Teorema 2.2.4 *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Então, $x \in \overline{A}$ se e somente se existe uma rede $\{x_\alpha\}_\alpha$ em A tal que $x_\alpha \to x$.*

Como todo subconjunto $F \subset X$ é fechado se e somente se $F = \overline{F}$, o teorema acima implica o seguinte corolário.

Corolário 2.2.5 *Um subconjunto $F \subset X$ é fechado se e somente se contém o limite de toda rede $\{x_\alpha\}_\alpha$ em F convergente.*

2.3 σ-álgebras

Definição Dizemos que uma família não-vazia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma *σ-álgebra* se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Da definição acima segue que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra então, para quaisquer $A, B \in \mathcal{A}$, temos que

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \in \mathcal{A},$$

donde $A \cap B \in \mathcal{A}$. E, mais geralmente, toda interseção finita de elementos de $\mathcal{A}$ pertence a $\mathcal{A}$.

Se $\mathcal{P}(X)$ denota a família de todos os subconjuntos de X, ou seja, o conjunto das partes de X, então é claro que $\mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra. Esta é, de fato, a maior σ-álgebra em X. Em contrapartida, temos também uma menor σ-álgebra em X, dada pelo conjunto $\{\emptyset, X\}$.

Além disso, também segue imediatamente da definição que se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_\lambda$ é uma coleção de σ-álgebras em X (não necessariamente enumerável), então a família formada pela interseção de todas elas, dada por

$$\mathcal{A} = \bigcap_\lambda \mathcal{A}_\lambda = \{B \subset X | B \in \mathcal{A}_\lambda, \forall \lambda\}$$

também é uma σ-álgebra em X. Assim, dada uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, se consideramos a interseção de todas as σ-álgebras em X que contêm $\mathcal{F}$, obtemos uma nova σ-álgebra, que denotamos por $\sigma(\mathcal{F})$, também chamada a *σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$*.

Em particular, se X é um espaço topológico, denotamos por $\mathcal{B}(X)$ a σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos de X e a denominamos *σ-álgebra de Borel*.

Lema 2.3.1 *Seja $f : X \to Y$ uma função entre dois conjuntos X e Y e seja $\mathcal{F}$ uma família não-vazia de subconjuntos de Y. Então,*

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})).$$

Prova: Primeiramente, vamos mostrar que

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \sigma(\mathcal{F})\}$$

é uma σ-álgebra em X.

Seja uma sequência de conjuntos $\{f^{-1}(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$, com $A_n \in \sigma(\mathcal{F})$, para todo n. Como $\sigma(\mathcal{F})$ é uma σ-álgebra, então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{F}).$$

Por outro lado, como

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

concluímos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})).$$

Resta mostrar que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$ é fechado por complementaridade.

Seja $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$. Então $A \in \sigma(\mathcal{F})$ e, consequentemente, $Y \setminus A \in \sigma(\mathcal{F})$. Mas como $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, então $X \setminus f^{-1}(A) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Assim, como $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$, então $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Para mostrar a recíproca, considere

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) | f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))\}.$$

Analogamente, mostra-se que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em Y. E, como $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, então $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Logo,

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subset f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{F})). \quad \blacksquare$$

Proposição 2.3.2 *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre dois espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) e seja E um conjunto de Borel em Y. Então $f^{-1}(E)$ é um conjunto de Borel em X.*

Prova: Como $E \in \sigma(\tau_Y)$, pelo item (i) do lema anterior temos que $f^{-1}(E) \in \sigma(f^{-1}(\tau_Y))$. Mas sendo f contínua, então $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$, o que implica $\sigma(f^{-1}(\tau_Y)) \subset \sigma(\tau_X)$. Logo, $f^{-1}(E) \in \sigma(\tau_X)$. $\blacksquare$

2.4 Medidas

Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Definição Uma *medida* em $\mathcal{A}$ é uma função real estendida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{A_n\}_n$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$ (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$), então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A segunda condição na definição acima é chamada de *σ-aditividade*.

Algumas medidas recebem denominações especiais por possuírem características adicionais, como as que descrevemos abaixo.

Definição Uma medida μ definida em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de X é denominada *completa* se dado um conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$, tem-se que $B \in \mathcal{A}$, para qualquer subconjunto $B \subset A$.

Definição Se $\mu(X) < \infty$ então dizemos que μ é uma medida *finita*. Em particular, se $\mu(X) = 1$ então dizemos que μ é uma *medida de probabilidade*.

A seguir apresentamos algumas propriedades básicas de medidas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3] ou [4].

Proposição 2.4.1 *Seja μ uma medida definida em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \subseteq B$. Então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Além disso, se $\mu(A) < \infty$ então*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Antes de enunciar a próxima Proposição, vamos explicar um pouco da notação utilizada. Se $\{A_n\}_n$ é uma sequência de subconjuntos de X, então utilizamos a notação $A_n \uparrow A$ para indicar que $A_n \subseteq A_{n+1}$, para todo n, e

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

e a notação $A_n \downarrow A$ no caso em que $A_n \supseteq A_{n+1}$, para todo n, e

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Em $\mathbb{R}$, denotamos $x_n \uparrow x$ ou $x_n \downarrow x$ para representar a convergência de uma sequência $\{x_n\}$ crescente ou decrescente, respectivamente, a x.

Proposição 2.4.2 *Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ uma medida definida em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ e seja $\{A_n\}_n$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$. Então μ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Se $A_n \uparrow A$ e $A \in \mathcal{A}$ então $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$;

(ii) Se $A_n \downarrow A$, $A \in \mathcal{A}$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_k) < \infty$, então $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.

Agora consideremos X um espaço topológico e denotemos por $\mathcal{B}(X)$ a σ-álgebra gerada pela família de conjuntos abertos em X. Se $B \in \mathcal{B}(X)$ então dizemos que B é um *conjunto de Borel* em X. Uma medida $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ definida em $\mathcal{B}(X)$ é denominada uma *medida de Borel*.

Neste contexto de espaços topológicos, podemos definir a propriedade de *regularidade* de uma medida. Antes de enunciá-la, fixemos as seguintes notações:

Se A é um subconjunto de X, então

$$\mathcal{V}(A) = \{V \subset X \,|\, V \text{ é aberto e } A \subset V\}$$

e

$$\mathcal{K}(A) = \{K \subset X \,|\, K \text{ é compacto e } K \subset A\}.$$

Definição Dizemos que uma medida μ definida em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de um espaço topológico X é *regular* se

(i) $\mu(K) < \infty$, para todo compacto $K \in \mathcal{A}$;

(ii) Para todo $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) = \inf_{V \in \mathcal{V}(A)} \mu(V)$$
e
$$\mu(A) = \sup_{K \in \mathcal{K}(A)} \mu(K). \tag{2.1}$$

A partir de uma medida de Borel, vamos construir uma medida que esteja definida em uma família maior de subconjuntos de X e que satisfaça uma boa propriedade, a de ser completa.

Considere, portanto, uma medida de Borel μ e seja $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ a aplicação definida por
$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \,|\, B \in \mathcal{B}(X) \text{ e } A \subset B\}\,,\ \forall A \subset X. \tag{2.2}$$

As seguintes propriedades de μ^* seguem imediatamente da sua definição.

Proposição 2.4.3 *(i)* $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*

(ii) Se $A \subset B$ *então* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*;*

(iii) Se $B' \in \mathcal{B}(X)$*, então* $\mu^*(B') = \mu(B')$*.*

Para conseguirmos obter uma medida que estenda μ, vamos encontrar uma σ-álgebra de conjuntos em X tal que a restrição de μ^* a esta σ-álgebra seja uma medida. Considere então as famílias de conjuntos
$$\mathcal{N}_\mu = \{N \subset X \,|\, \exists B_0 \in \mathcal{B}(X) \text{ tal que } \mu(B_0) = 0 \text{ e } N \subset B_0\}$$
e
$$\mathcal{B}_\mu = \{E \subset X \,|\, \exists B \in \mathcal{B}(X) \text{ e } \exists N \in \mathcal{N}_\mu \text{ tais que } E = B \cup N\}.$$

Lema 2.4.4 *$\mathcal{B}_\mu$ é uma σ-álgebra.*

Prova: É fácil ver que $\emptyset \in \mathcal{B}_\mu$ e que $\mathcal{B}_\mu$ é fechado por uniões enumeráveis. Resta mostrar que também é fechado por complementares.

Seja $E = B \cup N$ um conjunto em $\mathcal{B}_\mu$, com $B \in \mathcal{B}(X)$ e $N \in \mathcal{N}_\mu$, e seja $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(B_0) = 0$ e $N \subset B_0$. Então, note que podemos escrever o complementar de E em X como

$$X \setminus (B \cup N) = (X \setminus (B \cup B_0)) \cup (B_0 \setminus (B \cup N)).$$

Logo, como $X \setminus (B \cup B_0) \in \mathcal{B}(X)$ e $B_0 \setminus (B \cup N) \subset B_0$, concluímos que $X \setminus (B \cup N) \in \mathcal{B}_\mu$. $\blacksquare$

Obs.: Em um contexto mais geral, considera-se uma medida μ definida em uma *álgebra* $\mathcal{A}$, que é uma família de conjuntos satisfazendo as mesmas condições (i) e (ii) da definição de uma σ-álgebra mas para a qual apenas impõe-se que seja fechada por uniões finitas. Define-se então, para todo subconjunto $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; \{A_n\}_n \subset \mathcal{A},\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\},$$

a qual é chamada de *extensão de Carathéodory* de μ. No nosso caso, em que $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$, μ^* toma a forma simplificada dada em (2.2).

Além disso, pode-se mostrar que a σ-álgebra $\mathcal{B}_\mu$ é caracterizada pela família de conjuntos $A \subset X$ que satisfazem

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c),$$

para todo subconjunto $S \subset X$. $\square$

Agora seja $\overline{\mu} : \mathcal{B}_\mu \to [0, \infty]$ a aplicação definida pela restrição de μ^* a $\mathcal{B}_\mu$.

Proposição 2.4.5 *A aplicação $\overline{\mu}$ é uma medida completa que estende μ. Além disso, se $E = B \cup N$ é um elemento de $\mathcal{B}_\mu$, com $B \in \mathcal{B}(X)$ e $N \in \mathcal{N}_\mu$, então*

$$\overline{\mu}(B \cup N) = \mu(B).$$

Prova: Pelo item (iii) da Proposição 2.4.3, temos que $\overline{\mu}$ coincide com μ em $\mathcal{B}(X)$ e, portanto, é de fato uma extensão de μ.

Agora sejam $B \in \mathcal{B}$ e $N \in \mathcal{N}_\mu$. Queremos mostrar que $\overline{\mu}(B \cup N) = \mu(B)$, onde

$$\overline{\mu}(B \cup N) = \inf\{\mu(B') \mid B' \in \mathcal{B}(X) \text{ e } B \cup N \subset B'\}.$$

Seja $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que $N \subset B_0$ e $\mu(B_0) = 0$. Então $B \cup B_0 \in \mathcal{B}(X)$ e $B \cup N \subset B \cup B_0$. Assim, temos que

$$\overline{\mu}(B \cup N) \leq \mu(B \cup B_0) = \mu(B) = \overline{\mu}(B) \leq \overline{\mu}(B \cup N).$$

Logo, $\overline{\mu}(B \cup N) = \mu(B)$.

Usando isto e o fato de que μ é uma medida, torna-se imediata a prova de que $\overline{\mu}$ também é uma medida. Resta mostrar que $\overline{\mu}$ é completa.

Seja $E \in \mathcal{B}_\mu$ tal que $\overline{\mu}(E) = 0$. Pela definição, existem $B \in \mathcal{B}(X)$ e $N \in \mathcal{N}_\mu$ tais que $E = B \cup N$. Assim,

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(B \cup N) = \mu(B) = 0.$$

Considere um subconjunto $A \subset B \cup N$. Seja $B_0 \in \mathcal{B}(X)$ tal que $N \subset B_0$ e $\mu(B_0) = 0$. Então, $A \subset B \cup B_0$ e $\mu(B \cup B_0) = 0$. Logo, $A \in \mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{B}_\mu$. Isto mostra que $\overline{\mu}$ é completa. ■

Dizemos que $\overline{\mu}$ é o *completamento* de μ. E, se $E \in \mathcal{B}_\mu$, então dizemos que E é um conjunto *$\overline{\mu}$-mensurável*.

Se μ é uma medida regular, então a proposição seguinte mostra que não perdemos a regularidade ao estendermos μ a $\overline{\mu}$.

Proposição 2.4.6 *Se μ é uma medida regular então $\overline{\mu}$, o completamento de μ, é regular.*

Prova: Seja $E \in \mathcal{B}_\mu$. Então, existem $B, B_0 \in \mathcal{B}(X)$ e $N \in \mathcal{N}_\mu$ tais que $E = B \cup N$, $N \subset B_0$ e $\mu(B_0) = 0$.

Como μ é uma medida regular e $\mathcal{V}(B \cup B_0) \subset \mathcal{V}(B \cup N)$, temos que

$$\overline{\mu}(B \cup N) = \mu(B) = \mu(B \cup B_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}(B \cup B_0)} \mu(V) \geq \inf_{V \in \mathcal{V}(B \cup N)} \mu(V).$$

Por outro lado, como para todo $V \in \mathcal{V}(B \cup N)$ temos $\mu(V) = \overline{\mu}(V) \geq \overline{\mu}(B \cup N)$, então,

$$\inf_{V \in \mathcal{V}(B \cup N)} \mu(V) \geq \overline{\mu}(B \cup N).$$

Portanto,

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(B \cup N) = \inf_{V \in \mathcal{V}(B \cup N)} \mu(V). \tag{2.3}$$

E, como $\mathcal{K}(B) \subset \mathcal{K}(B \cup N)$, temos que

$$\overline{\mu}(B \cup N) = \mu(B) = \sup_{K \in \mathcal{K}(B)} \mu(K) \leq \sup_{K \in \mathcal{K}(B \cup N)} \mu(K).$$

Além disso, para todo $K \in \mathcal{K}(B \cup N)$ temos que $\mu(K) = \overline{\mu}(K) \leq \overline{\mu}(B \cup N)$. Portanto,

$$\sup_{K \in \mathcal{K}(B \cup N)} \mu(K) \leq \overline{\mu}(B \cup N).$$

Logo,

$$\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(B \cup N) = \sup_{K \in \mathcal{K}(B \cup N)} \mu(K). \tag{2.4}$$

Como $E \in \mathcal{B}_\mu$ foi tomado arbitrariamente, de (2.3) e (2.4), concluímos que $\overline{\mu}$ é regular. ■

Um resultado muito importante que usaremos adiante e que ilustra uma das vantagens de se trabalhar com espaços Poloneses é o seguinte:

Teorema 2.4.7 *Toda medida de Borel finita em um espaço Polonês é regular.*

2.5 Conjuntos Analíticos e Universalmente Mensuráveis

Iremos denotar por $\mathcal{N}$ o espaço de Baire, que é definido como o conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, formado pelas funções definidas em $\mathbb{N}$ e assumindo valores em $\mathbb{N}$. Ou, em outras palavras, $\mathcal{N}$ é o espaço de sequências de números naturais.

Considerando $\mathbb{N}$ munido da topologia discreta, temos que $\mathcal{N}$ é um espaço topológico munido da topologia produto, na qual a convergência de uma sequência significa convergência em cada índice (embora não uniforme). Para mais detalhes, veja o Apêndice B.

Definição Dizemos que um subconjunto A de um espaço Polonês X é um conjunto *analítico* se satisfizer uma das duas condições abaixo:

(i) $A = \emptyset$;

(ii) A é a imagem por uma aplicação contínua do espaço de Baire $\mathcal{N}$.

Abaixo seguem alguns resultados sobre conjuntos analíticos:

Teorema 2.5.1 *(i) Se X e Y são espaços Poloneses e $f : X \to Y$ é uma função contínua, então, para todo conjunto analítico $A \subset X$, $f(A)$ é analítico em Y;*

(ii) Todo subconjunto de Borel de um espaço Polonês é analítico;

(iii) A família de conjuntos analíticos de um espaço Polonês é fechada sob uniões enumeráveis e interseções enumeráveis.

Dos resultados acima, apenas o primeiro segue imediatamente da definição, usando o fato de que a composição de funções contínuas é uma função contínua. A prova dos demais requer mais trabalho e pode ser vista no Apêndice B.

A seguir definimos o conceito de um conjunto universalmente mensurável.

Definição Um conjunto *universalmente mensurável* é um conjunto que é mensurável em relação a toda medida de probabilidade μ definida em uma σ-álgebra completa $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Denotando por $\mathcal{M}$ a família de conjuntos universalmente mensuráveis e por $\mathcal{B}_\mu$ a família de conjuntos μ-mensuráveis em relação a uma medida de probabilidade de Borel μ (como definida anteriormente), temos a seguinte proposição.

Proposição 2.5.2 *Se Π é o conjunto formado por todas as medidas de probabilidade de Borel em X, então*

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\mu \in \Pi} \mathcal{B}_\mu.$$

Prova: Como, para cada $\mu \in \Pi$, $\mathcal{B}_\mu$ é uma σ-álgebra completa tal que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}_\mu$, então $\mathcal{M} \subset \bigcap_{\mu \in \Pi} \mathcal{B}_\mu$.

Para mostrar a inclusão recíproca, considere uma medida de probabilidade μ definida em uma σ-álgebra completa $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Então é claro que $\nu = \mu_{|\mathcal{B}(X)}$, a restrição de μ a $\mathcal{B}(X)$, pertence a Π. Assim, dado $A \in \bigcap_{\mu \in \Pi} \mathcal{B}_\mu$, temos em particular que $A \in \mathcal{B}_\nu$. Por outro lado, como $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra completa, obtemos que $\mathcal{B}_\nu \subset \mathcal{A}$. Logo, $A \in \mathcal{A}$. ■

Como, para toda medida de probabilidade de Borel μ, $\mathcal{B}_\mu$ é uma σ-álgebra, esta Proposição nos diz então que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra.

O resultado abaixo relaciona os dois conceitos que acabamos de apresentar. Sua prova também pode ser encontrada no Apêndice B.

Teorema 2.5.3 *Todo subconjunto analítico de um espaço Polonês é universalmente mensurável.*

2.6 Injeções e Imersões

Sejam X e Y dois espaços vetoriais topológicos.

Definição Seja $j : Y \to X$ uma aplicação linear.

1. Dizemos que j é uma *injeção contínua* se for uma aplicação injetiva e contínua;
2. j é uma *injeção compacta* se for uma injeção contínua tal que, para todo conjunto $B \subset Y$ limitado, $j(B)$ é relativamente compacto em X, i.e., $\overline{j(B)}$ é compacto em X.

Durante este texto, usaremos frequentemente a seguinte construção:

Sejam V e H dois espaços de Hilbert tais que $V \subseteq H$ e V é denso em H. Além disso, vamos supor que H é um espaço separável, ou seja, possui um subconjunto enumerável e denso. Consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} i \ : \ & V \to H \\ & v \in V \mapsto v \in H, \end{aligned}$$

que a cada v em V associa o próprio v como um elemento de H. A aplicação i é denominada a *injeção canônica* de V em H, também chamada uma *imersão*.

Vamos supor também que V e H são tais que a injeção i é compacta. Em particular, i é uma injeção contínua e, como todo operador linear é contínuo se e somente se for limitado, existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$\|v\|_H = \|i(v)\|_H \leq \lambda \|v\|_V, \ \forall v \in V, \tag{2.5}$$

onde $\| \cdot \|_V$ e $\| \cdot \|_H$ são as normas em V e H, respectivamente. Além disso, para todo conjunto limitado B em V temos que $i(B) = B$ é relativamente compacto em H. Sendo H um espaço de Hilbert e, portanto, um espaço métrico, isto é equivalente a dizer que toda sequência limitada em V possui uma subsequência convergente em H.

Com estas hipóteses, dizemos que i é uma *imersão compacta* e que V está *compactamente imerso* em H.

Denotando por V' e H' os seus respectivos espaços duais, temos que $H' \subseteq V'$. Pois, pela definição de operador limitado, para cada f em H' existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|f(v)| \leq C_1 \|v\|_H \ , \ \ \forall v \in H$$

e, em particular, para todo $v \in V$. Logo, usando (2.5), temos

$$|f(v)| \leq C_1 \lambda \|v\|_V \ , \ \ \forall v \in V.$$

o que mostra que f pertence a V'. Além disso, vamos mostrar que a injeção (canônica) de H' em V' é contínua.

Seja $f \in H'$. Por (2.5), para todo $v \in V$ tal que $\|v\|_V \leq 1$, temos que

$$\|v\|_H \leq \lambda \|v\|_V \leq \lambda.$$

Portanto,

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V \leq 1}} |f(v)| \leq \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H \leq \lambda}} |f(v)|. \tag{2.6}$$

E, para todo $v \in H$ tal que $\|v\|_H \leq \lambda$, temos que

$$|f(v)| = \|v\|_H \left| f\left(\frac{v}{\|v\|_H}\right) \right| \leq \lambda \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H \leq 1}} |f(v)| = \lambda \|f\|_{H'}.$$

Logo,

$$\sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H \leq \lambda}} |f(v)| \leq \lambda \|f\|_{H'}.$$

Por (2.6), obtemos então que

$$\|f\|_{V'} \leq \lambda \|f\|_{H'}\,,\ \forall f \in H'.$$

Ou seja, a injeção de H' em V' é um operador linear limitado e, consequentemente, contínuo. Neste caso, dizemos que H' está *continuamente imerso* em V'.

Como H é um espaço de Hilbert, pelo Teorema de Representação de Riesz, podemos identificar H com H'. Assim, obtemos a seguinte configuração:

$$V \subseteq H \equiv H' \subseteq V'.$$

2.7 Integração de Funções com Valores em um Espaço de Banach

Nesta seção, consideraremos I um intervalo limitado contido em $\mathbb{R}$ e X um espaço de Banach. Denotaremos por X' o dual topológico de X e usaremos a notação usual $\langle \varphi, y \rangle$ para a aplicação de um funcional linear contínuo $\varphi \in X'$ a um elemento $y \in X$.

Definição Dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to X$ é integrável se, para todo $\varphi \in X'$, a função

$$\begin{aligned} \langle \varphi, f(\cdot) \rangle \quad : \quad & I \to \mathbb{R} \\ & t \mapsto \langle \varphi, f(t) \rangle \end{aligned}$$

é integrável (à Lebesgue) e existe $y \in X$ tal que

$$\langle \varphi, y \rangle = \int_I \langle \varphi, f(t) \rangle dt \,, \ \forall \varphi \in X'. \tag{2.7}$$

Neste caso, definimos

$$\int_I f(t) dt := y.$$

Uma questão natural a se perguntar após esta definição é sob que condições pode-se garantir que um tal y de fato existe e, caso exista, se é único. A proposição seguinte nos fornece condições para que isto seja verdade.

Proposição 2.7.1 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $f : I \subset \mathbb{R} \to X$ tal que, para todo $\varphi \in X'$, a função $\langle \varphi, f(\cdot) \rangle : I \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_I \|f(t)\|_X dt < \infty.$$

Então existe um único $y \in Y$ tal que

$$\langle \varphi, y \rangle = \int_I \langle \varphi, f(t) \rangle dt \,, \ \forall \varphi \in X'. \tag{2.8}$$

Prova: Seja L a aplicação definida em X' por

$$\langle L, \varphi \rangle = \int_I \langle \varphi, f(t) \rangle dt \,, \ \forall \varphi \in X'.$$

Note que L é linear e que

$$|\langle L, \varphi \rangle| \leq \int_I |\langle \varphi, f(t) \rangle| dt \leq \left(\int_I \|f(t)\|_X dt \right) \|\varphi\|_{X'} \,, \ \forall \varphi \in X'.$$

Portanto, $L \in X'' = (X')'$ e

$$\|L\|_{X''} \leq \int_I \|f(t)\|_X dt < \infty.$$

Mas como X é reflexivo, então existe $y \in X$ tal que

$$\langle L, \varphi \rangle = \langle \varphi, y \rangle\,,\ \forall \varphi \in X'.$$

Agora suponha que existam y_1 e y_2 satisfazendo (2.8). Então,

$$\langle \varphi, y_1 \rangle = \langle \varphi, y_2 \rangle\,,\ \forall \varphi \in X'.$$

Mas isto implica que $y_1 = y_2$ (cf. Teorema A.0.1). ■

Uma outra propriedade desse tipo de integração, que é bastante usada para integrais de funções reais e que também é bastante útil de se obter neste caso, é a seguinte:

Proposição 2.7.2 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to X$ uma função integrável. Então*

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt.$$

Prova: Como f é integrável, então existe $y \in X$ satisfazendo (2.7). Seja $\varphi \in X'$ tal que $\langle \varphi, y \rangle = \|y\|_X$ e $\|\varphi\|_{X'} = 1$ (cf. Teorema A.0.2). Então,

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\| = \|y\|_X = \langle \varphi, y \rangle = \int_I \langle \varphi, f(t) \rangle dt \leq \|\varphi\|_{X'} \int_I \|f(t)\|_X dt = \int_I \|f(t)\|_X dt. \quad ■$$

2.8 Espaços de Funções com Valores em um Espaço Topológico

Nesta seção, apresentaremos conjuntos de funções que partem de um intervalo I contido em $\mathbb{R}$ e assumem valores em um espaço topológico X.

Denotamos o espaço de funções contínuas de I em X por

$$\mathcal{C}(I, X) = \{u : I \to X \mid u \text{ é contínua}\}.$$

Se I é um intervalo compacto e X é um espaço métrico, então tomando uma métrica ρ compatível em X, podemos definir uma métrica em $\mathcal{C}(I, X)$ por

$$d_\rho(u, v) = \sup_{t \in I} \rho(u(t), v(t)).$$

A topologia gerada por esta métrica é denominada a *topologia da convergência uniforme* em $\mathcal{C}(I, X)$.

Agora suponha que X é um espaço de Banach, com norma dada por $\| \cdot \|_X$. Se $p \in [1, \infty)$, então definimos o espaço de funções p-integráveis de I em X por

$$L^p(I, X) = \left\{ u : I \to X \;\middle|\; u \text{ é mensurável à Lebesgue e } \int_I \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{L^p(I,X)} = \left(\int_I \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

A condição de ser mensurável à Lebesgue significa que, para todo subconjunto aberto $V \subset X$, temos que $u^{-1}(V) \subset I$ é mensurável à Lebesgue, i.e., pertence à σ-álgebra obtida pela extensão (de Carathéodory) da medida de comprimento dos intervalos limitados em $\mathbb{R}$, a qual chamamos de σ-álgebra de Lebesgue.

Se apenas podemos garantir que u é p-integrável em cada compacto contido em I, então dizemos que u é localmente integrável em I. Em outras palavras, u pertence ao espaço

$$L^p_{loc}(I, X) = \{u : I \to X \,|\, u_{|_K} \in L^p(K, X), \forall K \subset I \text{ compacto}\}$$

de funções localmente integráveis em I.

Ao contrário do espaço $L^p(I, X)$, $L^p_{loc}(I, X)$ não é um espaço normado. No entanto, é metrizável, com uma métrica que pode ser dada da seguinte forma:

Tomamos uma sequência J_n de intervalos compactos contidos em I tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = I$$

e $J_n \subseteq J_{n+1}$, para todo n. Por exemplo, se I é da forma (a, b) com a e b finitos, podemos tomar

$$J_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

E se $I = \mathbb{R}$, podemos considerar

$$J_n = [-n, n].$$

Os outros casos são análogos.

Assim, definimos

$$d_p(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|u - v\|_{L^p(J_n,X)}}{1 + \|u - v\|_{L^p(J_n,X)}}, \forall u, v \in L^p_{loc}(I, X).$$

A multiplicação do termo $1/2^n$ garante a convergência da série acima e nos diz, portanto, que d_p está bem definida. Além disso, pode-se mostrar que d_p é de fato uma métrica em $L^p_{loc}(I, X)$.

Agora consideremos que X é um espaço de Hilbert separável H munido com a topologia fraca. Denotemos um X desta forma por H_w, onde o sub-índice w representa a topologia fraca (do inglês, "weak"). Esta topologia é caracterizada por uma base de vizinhanças da origem (cf. Proposição 2.1.1) dadas por

$$O_w = \{v \in H \,|\, |(v, w_i)_H| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n\},$$

onde $\varepsilon > 0$, $\{w_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto finito de elementos em H e $(\cdot, \cdot)_H$ é o produto interno em H.

O conjunto $\mathcal{C}(I, H_w)$ é o espaço formado pelas funções contínuas de I em H_w, ou seja,

$$\mathcal{C}(I, H_w) = \{u : I \to H |\, t \in I \mapsto (u(t), v)_H \in \mathbb{R} \text{ é contínua}, \forall v \in H\},$$

e é denominado o espaço das funções fracamente contínuas em H.

Uma base de vizinhanças da origem para a topologia de $\mathcal{C}(I, H_w)$ é dada pela família de conjuntos da forma

$$\mathcal{O}(K, O_w) = \{v \in \mathcal{C}(I, H_w) |\, v(t) \in O_w, \forall t \in K\},$$

onde K é um subintervalo compacto em I e O_w é uma vizinhança (fraca) da origem em H_w. Esta topologia é denominada a *topologia da convergência fraca uniforme nos subintervalos compactos de* I.

Usando-se que H é um espaço de Hilbert separável, é possível mostrar que $\mathcal{C}(I, H_w)$ também é um espaço separável, como veremos a seguir.

Proposição 2.8.1 *$\mathcal{C}(I, H_w)$ é um espaço separável.*

Prova: Sejam $\{u_n\}_n$ e $\{t_n\}_n$ subconjuntos enumeráveis e densos em H e I, respectivamente. Seja $\mathcal{D}$ o conjunto formado pelas funções $v : I \to H$ para as quais existem um conjunto finito $\{u_{n_1}, \dots, u_{n_k}\}$ em $\{u_n\}_n$ e um conjunto finito e crescente $\{t_{n_1}, \dots, t_{n_k}\}$ (i.e., $t_{n_j} < t_{n_{j+1}}$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$) em $\{t_n\}_n$ tais que

$$v(t) = \frac{t - t_{n_j}}{t_{n_{j+1}} - t_{n_j}} u_{n_{j+1}} + \frac{t - t_{n_{j+1}}}{t_{n_j} - t_{n_{j+1}}} u_{n_j}\,, \;\; \forall t \in [t_{n_j}, t_{n_{j+1}}],\, \forall j = 1, \dots, k-1,$$

e

$$v(t) = \begin{cases} u_{n_1} & \text{, se } t \leq t_{n_1} \\ u_{n_k} & \text{, se } t \geq t_{n_k} \end{cases}.$$

Não é difícil mostrar que $\mathcal{D}$ é um conjunto enumerável e que está contido em $\mathcal{C}(I, H_w)$. Vamos mostrar que ele também é denso em $\mathcal{C}(I, H_w)$.

Seja $u \in \mathcal{C}(I, H_w)$ e seja V uma vizinhança de u neste espaço. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$V = u + \mathcal{O}(K, O_w),$$

onde $K \subset I$ é um compacto e O_w é uma vizinhança da origem em H_w, dada por

$$O_w = \{v \in H \,|\, |(v, w_i)_H < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, m\},$$

onde ε é um número real positivo e $\{w_i\}_{i=1}^m \subset H$. Note que

$$u + \mathcal{O}(K, O_w) = \{v \in \mathcal{C}(I, H_w) \,|\, v(t) - u(t) \in O_w, \forall t \in K\}.$$

Como $u \in \mathcal{C}(I, H_w)$ e K é compacto, então, para cada i, a função $t \mapsto (u(t), w_i)_H$ é uniformemente contínua em K. Assim, para cada i existe $\delta_i > 0$ tal que para quaisquer s e t em K com $|s - t| < \delta_i$ tem-se $|(u(s) - u(t), w_i)_H| < \varepsilon/4$. Portanto, tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, obtemos que se s e t pertencem a K e $|s - t| < \delta$ então

$$|(u(s) - u(t), w_i)_H| < \frac{\varepsilon}{4}, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Usando que $\{t_n\}_n$ é denso em I, é possível obter um conjunto finito $\{t_{n_1}, \ldots, t_{n_k}\}$ tal que $K \subseteq [t_{n_1}, t_{n_k}]$, $t_{n_j} < t_{n_{j+1}}$ e $|t_{n_{j+1}} - t_{n_j}| < \delta$, para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Como $\{u_n\}_n$ é denso em H, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ existe u_{n_j} tal que

$$u_{n_j} \in u(t_{n_j}) + \widetilde{O}_w,$$

onde

$$\widetilde{O}_w = \left\{ v \in H \,\middle|\, |(v, w_i)_H| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Considere a função v em $\mathcal{D}$ definida como acima a partir dos conjuntos finitos $\{t_{n_1}, \ldots, t_{n_k}\}$ e $\{u_{n_1}, \ldots, u_{n_k}\}$ que acabamos de construir. Vamos mostrar que $v \in u + \mathcal{O}(K, O_w)$.

Observe que se $t \in [t_{n_j}, t_{n_{j+1}}]$ então, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, temos que

$$\begin{aligned}
|(v(t) - u(t), w_i)_H| &= \left| \left(\frac{t - t_{n_j}}{t_{n_{j+1}} - t_{n_j}} u_{n_{j+1}} + \frac{t - t_{n_{j+1}}}{t_{n_j} - t_{n_{j+1}}} u_{n_j} - u(t), w_i \right) \right| = \\
= & \left| \left(\frac{t - t_{n_j}}{t_{n_{j+1}} - t_{n_j}} (u_{n_{j+1}} - u(t_{n_{j+1}}) + u(t_{n_{j+1}}) - u(t)) + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{t - t_{n_{j+1}}}{t_{n_j} - t_{n_{j+1}}} (u_{n_j} - u(t_{n_j}) + u(t_{n_j}) - u(t)), w_i \right) \right| \\
\leq & \ |(u_{n_{j+1}} - u(t_{n_{j+1}}), w_i)| + |(u(t_{n_{j+1}}) - u(t), w_i)_H| + \\
& + |(u_{n_j} - u(t_{n_j}), w_i)_H| + |(u(t_{n_j}) - u(t), w_i)_H|.
\end{aligned}$$

Logo, pela construção dos conjuntos $\{u_{n_1}, \ldots, u_{n_k}\}$ e $\{t_{n_1}, \ldots, t_{n_k}\}$, obtemos que

$$|(v(t) - u(t), w_i)_H| < \varepsilon, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \ \forall t \in [t_{n_j}, t_{n_{j+1}}].$$

Como isto vale para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ e como $K \subseteq [t_{n_1}, t_{n_k}]$, concluímos que

$$v(t) - u(t) \in O_w\,,\ \forall t \in K,$$

ou seja, $v \in u + \mathcal{O}(K, O_w)$. ■

Seja $B_H(R)$ a bola fechada de raio R em H, i.e.,

$$B_H(R) = \{u \in H \mid \|u\|_H \leq R\}.$$

Como antes, denotemos por $B_H(R)_w$ a bola fechada $B_H(R)$ munida com a topologia fraca, i.e., com a topologia de H_w restrita a $B_H(R)$, de modo que os abertos em $B_H(R)_w$ são os conjuntos da forma $U \cap B_H(R)$, onde U é um aberto em H_w. Note que, como a topologia fraca em H é metrizável em subconjuntos limitados (cf. Teorema A.0.6), então $B_H(R)_w$ é um espaço metrizável.

Para obter uma métrica em $B_H(R)$ explicitamente, considere um subconjunto enumerável e denso em H, dado por $\{u_n\}_n$, então definimos

$$d_{B_H(R)}(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(u-v,u_n)_H|}{1+|(u-v,u_n)_H|}\,,\ \forall u,v \in B_H(R), \tag{2.9}$$

a qual pode-se mostrar que é de fato uma métrica em $B_H(R)$. Abaixo mostramos que ela também é compatível com a topologia em $B_H(R)_w$.

Lema 2.8.2 *A métrica $d_{B_H(R)}$ é compatível com a topologia fraca em $B_H(R)$.*

Prova: Pelo Teorema 2.2.3, basta mostrar que se $\{u_\alpha\}_\alpha$ é uma rede em $B_H(R)$ então $d_{B_H(R)}(u_\alpha, u) \to 0$ em $B_H(R)$ se e somente se $u_\alpha \to u$ em $B_H(R)_w$.

Seja $\{u_\alpha\}_\alpha$ uma rede em $B_H(R)$.

Primeiramente, suponha que exista $u \in B_H(R)$ tal que $d_{B_H(R)}(u_\alpha, u) \to 0$. Seja V uma vizinhança de u em $B_H(R)_w$. Então, existem $\varepsilon > 0$ e $\{w_i\}_{i=1}^m \subset H$ tais que a vizinhança da origem em H_w dada por

$$O_w = \{v \in H \mid |(v,w_i)_H| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, m\},$$

satisfaz

$$(u + O_w) \cap B_H(R)_w \subset V.$$

Como $\{u_n\}_n$ é denso em H, para cada i existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_i - u_{n_i}\|_H < \frac{\varepsilon}{4R}.$$

E como $d_{B_H(R)}(u_\alpha, u) \to 0$, então para cada i existe um índice α_i tal que

$$d_{B_H(R)}(u_\alpha, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(u_\alpha - u, u_n)_H|}{1 + |(u_\alpha - u, u_n)_H|} < \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}(1+\varepsilon)}\ ,\ \forall \alpha \succeq \alpha_i.$$

Sendo todos os termos da série acima positivos, então

$$\frac{1}{2^{n_i}} \frac{|(u_\alpha - u, u_{n_i})_H|}{1 + |(u_\alpha - u, u_{n_i})_H|} < \frac{\varepsilon}{2^{n_i+1}(1+\varepsilon)},$$

o que implica

$$|(u_\alpha - u, u_{n_i})_H| < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \forall \alpha \succeq \alpha_i.$$

Seja β um índice tal que $\beta \succeq \alpha_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ (cf. item (iii) da definição de rede). Assim, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ temos que se $\alpha \succeq \beta$ então

$$\begin{aligned}
|(u_\alpha - u, w_i)_H| &\leq |(u_\alpha - u, w_i - u_{n_i})_H| + |(u_\alpha - u, u_{n_i})_H| \\
&\leq \|u_\alpha - u\|_H \|w_i - u_{n_i}\|_H + |(u_\alpha - u, u_{n_i})_H| \\
&< 2R\frac{\varepsilon}{4R} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $u_\alpha \in ((u + O_w) \cap B_H(R)) \subset V$, para todo $\alpha \succeq \beta$. Como V é uma vizinhança arbitrária de u, concluímos que $u_\alpha \to u$ em $B_H(R)_w$.

Reciprocamente, suponha que $u_\alpha \to u$ em $B_H(R)_w$ e considere $\varepsilon > 0$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $\widetilde{O}_w$ a vizinhança da origem em H_w definida por

$$\widetilde{O}_w = \left\{ v \in H \,\middle|\, |(v, u_n)_H| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n = 1, \ldots, N-1 \right\}.$$

Como $u_\alpha \to u$ em $B_H(R)_w$, então existe um índice α_0 tal que

$$u_\alpha \in u + \widetilde{O}_w\,,\ \forall \alpha \succeq \alpha_0.$$

Assim, note que se $\alpha \succeq \alpha_0$ então

$$\begin{aligned} d_{B_H(R)}(u_\alpha, u) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} \frac{|(u_\alpha - u, u_n)_H|}{1 + |(u_\alpha - u, u_n)_H|} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(u_\alpha - u, u_n)_H|}{1 + |(u_\alpha - u, u_n)_H|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} |(u_\alpha - u, u_n)_H| + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $d_{B_H(R)}(u_\alpha, u) \to 0$ em $B_H(R)$. ■

Com esta métrica, podemos mostrar que $B_H(R)_w$ é um espaço Polonês.

Proposição 2.8.3 *$B_H(R)_w$ é um espaço Polonês.*

Prova: Já sabemos que $d_{B_H(R)}$ é uma métrica compatível em $B_H(R)_w$. Assim, basta mostrar que $(B_H(R), d_{B_H(R)})$ é um espaço métrico separável e completo.

Como $B_H(R)$ é um conjunto limitado e está contido em H, que é, em particular, um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência em $B_H(R)$ possui uma subsequência convergente em H_w (cf. Teorema A.0.8). Assim, se $\{v_m\}_m$ é uma sequência em $B_H(R)$, existem uma subsequência $\{v_{m_k}\}_k$ e $v \in H_w$ tais que

$$|(v_{m_k} - v, u)_H| \to 0\,,\ \forall u \in H,$$

onde identificamos H com H'. Em particular,

$$|(v_{m_k} - v, u_n)_H| \to 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Além disso, como $B_H(R)$ é fechado em H_w (cf. Teorema A.0.5), então $v \in B_H(R)$.

Seja $\varepsilon > 0$ e considere um $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por (2.10), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(v_{m_k} - v, u_n)_H| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \geq k_0, \forall n = 1, \ldots, N-1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
d_{B_H(R)}(v_{m_k}, v) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} \frac{|(v_{m_k} - v, u_n)_H|}{1 + |(v_{m_k} - v, u_n)_H} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(v_{m_k} - v, u_n)_H|}{1 + |(v_{m_k} - v, u_n)_H} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} |(v_{m_k} - v, u_n)_H| + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,\ \forall k \geq k_0. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Logo, $d_{B_H(R)}(v_{m_k}, v)_H \to 0$. Isto mostra que $(B_H(R), d_{B_H(R)})$ é um espaço métrico compacto e, consequentemente, separável e completo (cf. Teoremas A.0.14 e A.0.15). ∎

Seja $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$ o subespaço de $\mathcal{C}(I, H_w)$ definido por

$$\mathcal{C}(I, B_H(R)_w) = \{u : I \to B_H(R)_w \,|\, t \in I \mapsto (u(t), v)_H \in \mathbb{R} \text{ é contínua}, \forall v \in H\}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{C}(I, B_H(R)_w) = \{u \in \mathcal{C}(I, H_w) \,|\, u(t) \in B_H(R)_w, \forall t \in I\}$$

Sendo $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$ um subespaço de $\mathcal{C}(I, H_w)$, podemos muni-lo da topologia induzida pela de $\mathcal{C}(I, H_w)$, cujos abertos são da forma $U \cap \mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$, onde U é um aberto em $\mathcal{C}(I, H_w)$.

Tomando, como antes, uma sequência $\{J_k\}_k$ de intervalos compactos contidos em I tal que $J_k \subseteq J_{k+1}$, para todo k, e

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = I,$$

definimos, para cada k, a aplicação

$$d_{J_k}(u,v) = \sup_{t\in J_k} d_{B_H(R)}(u(t),v(t))\ ,\ \forall u,v \in \mathcal{C}(I,B_H(R)_w),$$

e assim obtemos uma métrica em $\mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$ dada por

$$d_R(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_{J_k}(u,v)}{1+d_{J_k}(u,v)}\ ,\ \forall u,v \in \mathcal{C}(I,B_H(R)_w).$$

Lema 2.8.4 *A métrica d_R é compatível com a topologia de $\mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$.*

Prova: Novamente, basta mostrar que se $\{u_\alpha\}_\alpha$ é uma rede em $\mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$, então $d_R(u_\alpha,u) \to 0$ em $B_H(R)$ se e somente se $u_\alpha \to u$ em relação à topologia de $\mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$.

Seja $\{u_\alpha\}_\alpha$ uma rede em $\mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$ e suponha que existe $u \in \mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$ tal que $d_R(u_\alpha,u) \to 0$.

Seja V uma vizinhança de u em $\mathcal{C}(I,B_H(R)_w)$. Então, existem um compacto $K \subset I$ e uma vizinhança da origem O_w em H_w tais que

$$(u + \mathcal{O}(K,O_w)) \cap \mathcal{C}(I,B_H(R)_w) \subset V.$$

Como K é compacto e $K \subset I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, então existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset J_k$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\{w_i\}_{i=1}^m \subset H$ tais que

$$O_w = \{v \in H \mid |(v,w_i)_H| < \varepsilon, \forall i = 1,\ldots,m\}.$$

Como antes, considere um subconjunto enumerável e denso $\{u_n\}_n$ em H. Assim, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_i - u_{n_i}\|_H < \frac{\varepsilon}{4R}. \tag{2.12}$$

Como $d_R(u_\alpha,u) \to 0$, do mesmo modo feito anteriormente podemos mostrar que isto implica em $d_{J_k}(u_\alpha,u) \to 0$. Assim, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ existe um índice α_i tal que

$$d_{J_k}(u_\alpha,u) < \frac{\varepsilon}{2^{n_i}(2+\varepsilon)}\ ,\ \forall \alpha \succeq \alpha_i.$$

Seja β um índice tal que

$$\beta \succeq \alpha_i\,,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Então, para todo $\alpha \succeq \beta$ temos que

$$d_{J_k}(u_\alpha, u) = \sup_{t \in J_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(u_\alpha(t) - u(t), u_n)_H|}{1 + |(u_\alpha(t) - u(t), u_n)_H|} < \frac{\varepsilon}{2^{n_i}(2+\varepsilon)},$$

para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sendo todos os termos na série acima positivos obtemos então que

$$\sup_{t \in J_k} \frac{1}{2^{n_i}} \frac{|(u_\alpha(t) - u(t), u_{n_i})_H|}{1 + |(u_\alpha(t) - u(t), u_{n_i})_H|} < \frac{\varepsilon}{2^{n_i}(2+\varepsilon)},$$

o que implica

$$|(u_\alpha(t) - u(t), u_{n_i})_H| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall t \in J_k,\, \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Logo, como $K \subset J_k$, então

$$|(u_\alpha(t) - u(t), u_{n_i})_H| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.13}$$

Portanto, por (2.12) e (2.13) temos que se $\alpha \succeq \beta$ então

$$\begin{aligned} |(u_\alpha(t) - u(t), w_i)_H| &\leq |(u_\alpha(t) - u(t), w_i - u_{n_i})_H| + |(u_\alpha(t) - u(t), u_{n_i})_H| \\ &< 2R\frac{\varepsilon}{4R} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,\ \forall t \in K,\, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \end{aligned}$$

o que mostra que $u_\alpha \in u + \mathcal{O}(K, O_w) \subset V$. Assim, como V é uma vizinhança arbitrária de u, concluímos que $u_\alpha \to u$ em $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$.

Agora suponha que $u_\alpha \to u$ em $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$.

Seja $\varepsilon > 0$ e considere um $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seja O_w a vizinhança da origem em H_w dada por

$$O_w = \left\{ v \in H \;\middle|\; |(v, u_n)_H| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n = 1, \ldots, N-1 \right\}.$$

Como $u_\alpha \to u$ em $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$ então existe um índice α_0 tal que

$$u_\alpha \in (u + \mathcal{O}(J_{N-1}, O_w)) \cap \mathcal{C}(I, B_H(R)_w)\,,\ \forall \alpha \succeq \alpha_0.$$

Com isto, do mesmo modo feito anteriormente, é fácil mostrar que

$$d_{J_k}(u_\alpha, u) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall \alpha \succeq \alpha_0,\ \forall k \in \{1, \ldots, N-1\},$$

e que, consequentemente,

$$d_R(u_\alpha, u) < \varepsilon\,,\ \forall \alpha \succeq \alpha_0.$$

Logo, $d_R(u_\alpha, u) \to 0$ em $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$. ■

Com isto, temos o seguinte resultado

Proposição 2.8.5 $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$ *é um espaço Polonês.*

Prova: Uma prova análoga à feita na Proposição 2.8.1 mostra que $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$ é um espaço separável. Assim, como já sabemos que d_R é uma métrica compatível em $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$, basta mostrar que $(\mathcal{C}(I, B_H(R)_w), d_R)$ é um espaço métrico completo.

Seja $\{v_n\}_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$. Então,

$$d_R(v_n, v_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_{J_k}(v_n, v_m)}{1 + d_{J_k}(v_n, v_m)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n, m \to \infty.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, para cada i existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^i} \frac{d_{J_i}(v_n, v_m)}{1 + d_{J_i}(v_n, v_m)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_{J_k}(v_n, v_m)}{1 + d_{J_k}(v_n, v_m)} < \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,,\ \forall n, m \geq n_i.$$

Logo,

$$d_{J_i}(v_n, v_m) = \sup_{t \in J_i} d_{B_H(R)_w}(v_n(t), v_m(t)) < \varepsilon\,,\ \forall n, m \geq n_i. \tag{2.14}$$

Assim, para cada $t \in J_i$, $\{v_n(t)\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $B_H(R)_w$. Mas como $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ e o que foi feito acima vale para todo $i \in \mathbb{N}$, então, para todo $t \in I$, $\{v_n(t)\}_n$

é uma sequência de Cauchy em $B_H(R)_w$. Portanto, para cada $t \in I$ existe $v_t \in B_H(R)$ tal que

$$d_{B_H(R)}(v_n(t), v_t) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Seja $v : I \to B_H(R)$ a função definida por

$$v(t) = v_t\,,\ \forall t \in I.$$

É claro que v está bem definida. Além disso, temos o seguinte resultado para v, cuja prova deixaremos para o final:

Afirmação: $v \in \mathcal{C}(I, H_w)$.

Como também $v(t) = v_t \in B_H(R)$, para todo $t \in I$, então, juntamente com a Afirmação acima, obtemos que $v \in \mathcal{C}(I, B_H(R)_w)$. Resta mostrar que

$$d_R(v_n, v) \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Por (2.14), sabemos que

$$d_{J_k}(v_n, v_m) = \sup_{t \in J_k} d_{B_H(R)}(v_n(t), v_m(t)) \to 0, \text{ quando } n, m \to \infty\,,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para cada k existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t \in J_k} d_{B_H(R)}(v_n(t), v_m(t)) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n, m \geq n_k.$$

Como também

$$d_{B_H(R)}(v_n(t), v(t)) \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

então, para cada $t \in J_k$ existe $n_t \in \mathbb{N}$, com $n_t \geq n_k$, tal que

$$d_{B_H(R)}(v_n(t), v(t)) < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall n \geq n_t.$$

Assim,

$$d_{B_H(R)}(v_n(t), v(t)) \leq d_{B_H(R)}(v_n(t), v_{n_t}(t)) + d_{B_H(R)}(v_{n_t}(t), v(t)) < \varepsilon,\ \forall n \geq n_k,\ \forall t \in J_k.$$

Logo,

$$\sup_{t\in J_k} d_{B_H(R)}(v_n(t), v(t)) \leq \varepsilon\,,\ \forall n \geq n_k.$$

Ou seja,

$$d_{J_k}(v_n, v) = \sup_{t\in J_k} d_{B_H(R)_w}(v_n(t), v(t)) \to 0, \text{ quando } n \to \infty\,,\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.15}$$

Disto obtemos que $d_R(v_n, v) \to 0$. ∎

Prova da Afirmação: Mostremos no caso em que I é um intervalo aberto, a prova dos outros casos é análoga.

Queremos mostrar que, para cada $w \in H$, a função

$$\begin{array}{rcl} f_w : I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (v(t), w)_H \end{array}$$

é contínua em I.

Sejam $w \in H$ e $t_0 \in I$. Se $\{u_j\}_j$ é um subconjunto enumerável e denso em H, então existe u_j tal que

$$\|w - u_j\|_H < \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Usando isto e o fato de que $v(t) = v_t \in B_H(R)_w$, para todo $t \in I$, temos que

$$\begin{aligned} |f_w(t) - f_w(t_0)| &= |(v(t) - v(t_0), w)_H| \\ &\leq |(v_t - v_{t_0}, w - u_j)_H| + |(v(t) - v(t_0), u_j)_H| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |(v(t) - v(t_0), u_j)_H|. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Considere um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$. Então, existe um subintervalo compacto $J_k \subset I$ tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset J_k$.

Usando a definição de $d_{B_H(R)}$ em (2.9), o fato (2.15) implica que existe um $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t\in J_k} |(v_n(t) - v(t), u_j)| < \frac{\varepsilon}{6}\,,\ \forall n \geq n_j.$$

Além disso, como $\{v_n\}_n$ é uma sequência de funções em $\mathcal{C}(I, H_w)$, então, em particular, $v_{n_j} \in \mathcal{C}(I, H_w)$. Assim, existe um $\tilde{\delta} > 0$, com $\tilde{\delta} < \delta$, tal que

$$|(v_{n_j}(t) - v_{n_j}(t_0), u_j)| < \frac{\varepsilon}{6}, \ \forall t \in (t_0 - \tilde{\delta}, t_0 + \tilde{\delta}) \subset J_k.$$

Então, para todo t tal que $|t - t_0| < \tilde{\delta}$, temos que

$$\begin{aligned} & |(v(t) - v(t_0), u_j)| \leq \\ \leq \ & |(v(t) - v_{n_j}(t), u_j)| + |(v_{n_j}(t) - v_{n_j}(t_0), u_j)| + |(v_{n_j}(t_0) - v(t_0), u_j)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, de (2.16) obtemos que

$$|f_w(t) - f_w(t_0)| < \varepsilon,$$

para todo $t \in I$ tal que $|t - t_0| < \tilde{\delta}$, o que mostra que f_w é contínua em I. Como $w \in H$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que $v \in \mathcal{C}(I, H_w)$. ■

2.9 Derivadas Generalizadas

O conceito de integração desenvolvido na Seção 2.7 para uma função u que toma valores em um espaço de Banach X nos permite introduzir uma forma "fraca" de derivação de uma função desse tipo.

Definição Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, X um espaço de Banach reflexivo e uma função $u : I \to X$ tal que $u \in L^1_{loc}(I, X)$. Se $v : I \to X$ é uma função em $L^1_{loc}(I, X)$ que satisfaz

$$\int_I v(t)\phi(t)dt = -\int_I u(t)\frac{d\phi}{dt}(t)dt,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(I)$, o espaço de funções reais contínuas e de suporte compacto em I, então dizemos que v é uma *derivada fraca* ou *generalizada* de u e denotamos $v = du/dt$.

Note que as integrais acima devem ser entendidas no sentido definido na Seção 2.7. As condições de X ser um espaço de Banach reflexivo e $u, v \in L^1_{loc}(I, X)$ foram incluídas justamente para que as hipóteses da Proposição 2.7.1 fossem satisfeitas e as integrais acima estivessem bem definidas.

Uma propriedade de simples demonstração que será necessária mais adiante é a seguinte:

Proposição 2.9.1 *Seja* $\psi : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $\psi \in C_c^\infty(I)$. *Então,*

$$\frac{d(\psi u)}{dt} = u\frac{d\psi}{dt} + \psi\frac{du}{dt}.$$

Prova: Pela definição, basta mostrar que

$$\int_I \left(u(t)\frac{d\psi}{dt}(t) + \psi(t)\frac{du}{dt}(t) \right) \phi(t)dt = -\int_I \psi(t)u(t)\frac{d\phi}{dt}(t)dt\,,\ \forall \phi \in C_c^\infty(I).$$

Como, para toda $\phi \in C_c^\infty(I)$, temos que $\phi\psi \in C_c^\infty(I)$, então

$$\begin{aligned}
& \int_I \left(u(t)\frac{d\psi}{dt}(t) + \psi(t)\frac{du}{dt}(t) \right) \phi(t)dt = \\
= \ & \int_I u(t)\frac{d\psi}{dt}(t)\phi(t)dt + \int_I \frac{du}{dt}(t)\psi(t)\phi(t)dt \\
= \ & \int_I u(t)\frac{d\psi}{dt}(t)\phi(t)dt - \int_I u(t)\frac{d\psi}{dt}(t)\phi(t)dt - \int_I u(t)\psi(t)\frac{d\phi}{dt}(t)dt \\
= \ & -\int_I u(t)\psi(t)\frac{d\phi}{dt}(t)dt\,,\ \forall \phi \in C_c^\infty(I). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para este tipo de derivada, é possível mostrar também um resultado análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo para funções reais, dado a seguir.

Proposição 2.9.2 *Seja* $p \in [1, \infty]$ *e suponha que* $u, du/dt \in L^p(I, X)$. *Então,*

$$u(t) = u(s) + \int_s^t \frac{du}{dt}(\tau)d\tau\,,\ \forall s, t \in I\,,\ s \leq t.$$

Capítulo 3

Estudo Abstrato

Ao longo de todo este capítulo, utilizaremos a mesma construção mencionada na seção 2.6, considerando dois espaços de Hilbert V e H tais que H é separável, V é denso em H e

$$V \subseteq H \equiv H' \subseteq V',$$

onde a injeção de V em H é compacta e a injeção de H em V' é contínua.

3.1 Operadores de Restrição e Deslocamento

Dado um intervalo $J \subset I$, definimos um operador que toma uma função u em $\mathcal{C}(I, H_w)$ e restringe o seu domínio ao subintervalo J, dado por

$$\begin{array}{rcl} \Pi_J : \mathcal{C}(I, H_w) & \to & \mathcal{C}(J, H_w) \\ u & \mapsto & \Pi_J u\,, \end{array}$$

onde

$$(\Pi_J u)(t) = u(t), \forall t \in J.$$

A Π_J damos o nome de *operador restrição*.

Proposição 3.1.1 Π_J *é um operador contínuo.*

Prova: Seja $u \in \mathcal{C}(I, H_w)$ e seja $\mathcal{O}$ uma vizinhança de $\Pi_J u$ em $\mathcal{C}(J, H_w)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{O}$ é da forma $\Pi_J u + \mathcal{O}_J(K, O_w)$, onde $K \subset J$ é um compacto, O_w é uma vizinhança da origem em H_w e

$$\mathcal{O}_J(K, O_w) = \{v \in \mathcal{C}(J, H_w) \,|\, v(t) \in O_w, \forall t \in K\}.$$

Como também $J \subset I$, então $K \subset I$ e, portanto,

$$\mathcal{O}_I(K, O_w) = \{v \in \mathcal{C}(I, H_w)|v(t) \in \mathcal{O}_w, \forall t \in K\} \tag{3.1}$$

é uma vizinhança da origem em $\mathcal{C}(I, H_w)$. Logo, $u + \mathcal{O}_I(K, O_w)$ é vizinhança de u em $\mathcal{C}(I, H_w)$. E se $v \in \mathcal{O}_I(K, O_w)$ então, como $K \subset J$,

$$\Pi_J v(t) = v(t) \ \in O_w \, \forall t \in K.$$

Logo,

$$\Pi_J(u + v) = \Pi_J u + \Pi_J v \in (\Pi_J u + \mathcal{O}_J(K, O_w)), \forall v \in \mathcal{O}_I(K, O_w).$$

Ou seja,

$$\Pi_J(u + \mathcal{O}_I(K, O_w)) \subset \Pi_J u + \mathcal{O}_J(K, O_w),$$

o que acaba de mostrar que Π_J é contínuo. ∎

Como caso particular do operador restrição, dado um ponto t_0 em I definimos

$$\begin{aligned} \Pi_{t_0} : \mathcal{C}(I, H_w) &\rightarrow H_w \\ u &\mapsto \Pi_{t_0} u = u(t_0), \end{aligned}$$

e denominamos Π_{t_0} o *operador projeção*.

Analogamente ao que foi feito anteriormente, mostra-se que Π_{t_0} é um operador contínuo.

Se I é da forma $I = \mathbb{R}$, $I = [t_0, \infty)$ ou $I = (t_0, \infty)$ então, para cada $\tau > 0$ definimos o *operador deslocamento*:

$$\begin{aligned} \sigma_\tau : \mathcal{C}(I, H_w) &\rightarrow \mathcal{C}(I, H_w) \\ u &\mapsto \sigma_\tau u, \end{aligned}$$

onde

$$(\sigma_\tau u)(t) = u(t + \tau), \forall t \in I.$$

Note que, para cada τ, σ_τ é um operador linear. Vamos mostrar que também é contínuo.

Proposição 3.1.2 *Para todo $\tau > 0$, σ_τ é um operador contínuo.*

Prova: Seja $u \in \mathcal{C}(I, H_w)$ e $\mathcal{O}$ uma vizinhança de $\sigma_\tau u$ em $\mathcal{C}(I, H_w)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{O}$ é da forma $\sigma_\tau u + \mathcal{O}_I(K, O_w)$, onde $K \subset I$ é um compacto, O_w é uma vizinhança da origem em H_w e $\mathcal{O}_I(K, O_w)$ é como em (3.1).

Seja $J \subset I$ um compacto tal que

$$K + \tau = \{t + \tau \,|\, t \in K\} \subset J. \tag{3.2}$$

Então,

$$\sigma_\tau(u + \mathcal{O}_I(J, O_w)) \subset (\sigma_\tau u + \mathcal{O}_I(K, O_w)).$$

De fato, se $v \in u + \mathcal{O}_I(J, O_w)$, então $v = u + w$, para alguma função $w \in \mathcal{O}_I(J, O_w)$. Portanto,

$$\sigma_\tau v = \sigma_\tau u + \sigma_\tau w$$

e, por (3.2),

$$(\sigma_\tau w)(t) = w(t + \tau) \in O_w\,, \ \forall t \in K.$$

Logo, $\sigma_\tau v \in (\sigma_\tau u + \mathcal{O}_I(K, O_w))$. ∎

Outra propriedade útil que pode ser mostrada é que a composição de operadores de deslocamento ainda é um operador de deslocamento.

Proposição 3.1.3 *Para todos $\tau, \nu \geq 0$, temos que*

$$\sigma_{\tau+\nu} \equiv \sigma_\tau \circ \sigma_\nu.$$

Prova: Seja $u \in \mathcal{C}(I, H_w)$. Então, para todo $t \in I$,

$$\sigma_\tau(\sigma_\nu u)(t) = \sigma_\nu u(t+\tau) = u(t+\tau+\nu) = (\sigma_{\tau+\nu}u)(t). \qquad \blacksquare$$

A partir do operador de deslocamento e considerando ainda I um intervalo como acima, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : [0,\infty) \times \mathcal{C}(I, H_w) &\rightarrow \mathcal{C}(I, H_w) \\ (\tau, u) &\mapsto \sigma(\tau, u) = \sigma_\tau u. \end{aligned}$$

Proposição 3.1.4 *σ é um operador contínuo.*

Prova: Seja $(\tau, u) \in [0,\infty) \times \mathcal{C}(I, H_w)$. Como antes, consideremos uma vizinhança de $\sigma_\tau u$ em $\mathcal{C}(I, H_w)$ da forma $\sigma_\tau u + \mathcal{O}_I(K, O_w)$, onde $K \subset I$ é um compacto e O_w é uma vizinhança da origem em H_w, dada por

$$O_w = \{v \in H \,|\, |(v, w_i)_H| < \varepsilon\,,\ \forall i = 1, \ldots, m\},$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\{w_i\}_{i=1}^m \subset H$.

Considere $r > 0$ tal que $\tau \in [0, r)$. Seja $J \subset I$ um compacto tal que $K + [0, r) \subset J$ e seja $\widetilde{O}_w$ a vizinhança da origem em H_w definida por

$$\widetilde{O}_w = \left\{v \in H \,\middle|\, |(v, w_i)_H| < \frac{\varepsilon}{3}\,,\ \forall i = 1, \ldots, m\right\}.$$

Vamos mostrar que

$$\sigma((\tau, u) + ([0, r) \times \mathcal{O}_I(J, \widetilde{O}_w))) \subset (\sigma(\tau, u) + \mathcal{O}_I(K, O_w)).$$

Seja $(s,v) \in [0,r) \times \mathcal{O}_I(J, \widetilde{O}_w)$. Note que

$$\sigma((\tau,u)+(s,v)) = \sigma((\tau+s,u+v)) = \sigma_{\tau+s}(u+v) = \sigma(\tau,u) + \sigma_s u + \sigma_\tau v + \sigma_s v$$

e, pela construção de J e de $\widetilde{O}_w$, obtemos imediatamente que

$$(\sigma_s u + \sigma_\tau v + \sigma_s v)(t) = u(t+s) + v(t+\tau) + v(t+s) \in O_w\,,\ \forall t \in K.$$

Logo, $\sigma((\tau,u)+(s,v)) \in (\sigma(\tau,u) + \mathcal{O}_I(K, O_w))$. ∎

3.2 Primeiros Resultados

O objetivo desta seção é provar alguns resultados que servirão de motivação para a definição de um conjunto abstrato na próxima seção.

A partir de agora, consideraremos sempre $I = [0,\infty)$.

Seja $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$ o espaço vetorial definido por

$$\mathcal{L}_{[0,\infty)} = \{u \in L^2_{loc}([0,\infty), V) | u' \in L^{4/3}_{loc}([0,\infty), V')\}.$$

Proposição 3.2.1 *O espaço $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$ está contido em $\mathcal{C}([0,\infty), V')$.*

Prova: Seja $u \in \mathcal{L}_{[0,\infty)}$ e considere $t_0 \in [0,\infty)$ e $\varepsilon > 0$. Como $u' \in L^{4/3}_{loc}([0,\infty), V')$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{t_0}^{t_0+1} \|u'(s)\|_{V'}^{4/3} ds\right)^{3/4} < C.$$

Seja

$$\delta = \min\left\{1, \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^4\right\}.$$

Então, para todo $t \in I$ tal que $|t - t_0| < \delta$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(t_0)\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V \leq 1} (u(t) - u(t_0), v)_{V',V} \\
&= \sup_{\|v\|_V \leq 1} \left(\int_{t_0}^{t} u'(s) ds, v \right)_{V',V} \\
&\leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|v\|_V \left(\int_{t_0}^{t} \|u'(s)\|_{V'} ds \right) \\
&\leq \left(\int_{t_0}^{t} \|u'(s)\|_{V'}^{4/3} ds \right)^{3/4} |t - t_0|^{1/4} < \varepsilon \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

onde da penúltima linha para a última usamos a Desigualdade de Hölder. Como $t_0 \in [0, \infty)$ é arbitrário, concluímos que $u : [0, \infty) \to V \subseteq V'$ é uma função contínua. ∎

A seguir apresentamos um lema de compacidade, conhecido como *Lema de Compacidade de Lions-Aubin*. A demonstração que será apresentada aqui foi adaptada a partir da versão encontrada em [5].

Lema 3.2.2 *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \subset B \subset B_1$. Suponha que B_0 e B_1 sejam reflexivos e que a injeção $B \to B_1$ é contínua e a injeção $B_0 \to B$ é compacta. Dados T, p_0 e p_1 tais que $0 < T < \infty$ e $1 < p_0, p_1 < \infty$, seja $W(0,T)$ o espaço definido por*

$$W(0,T) = \left\{ v \in L^{p_0}(0,T;B_0) \middle| v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}$$

e munido da norma

$$\|v\|_{W(0,T)} = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}, \ \forall v \in W(0,T).$$

Então, a injeção $W(0,T) \to L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Prova: Como a injeção $B_0 \to B$ é contínua, existe $C > 0$ tal que

$$\|b\|_B \leq C \|b\|_{B_0}, \ \forall b \in B_0.$$

Então, para cada $v \in W(0,T)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B)} &= \left(\int_0^T \|v(t)\|_B^{p_0} dt\right)^{1/p_0} \\
&\leq C\left(\int_0^T \|v(t)\|_{B_0}^{p_0} dt\right)^{1/p_0} \\
&= C\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \\
&= C(\|v\|_{W(0,T)} - \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}) \\
&\leq C\|v\|_{W(0,T)}.
\end{aligned}$$

Isto mostra que a injeção $W(0,T) \to L^{p_0}(0,T;B)$ é contínua. Resta mostrar que toda sequência limitada em $W(0,T)$ possui uma subsequência (fortemente) convergente em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Seja $\{v_n\}_n$ uma sequência limitada em $W(0,T)$. Então existe uma constante $\widetilde{C} > 0$ tal que $\|v_n\|_{W(0,T)} \leq \widetilde{C}$, para todo n. Consequentemente,

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq \|v_n\|_{W(0,T)} \leq \widetilde{C}\,,\ \forall n$$

e

$$\|v_n'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} \leq \|v_n\|_{W(0,T)} \leq \widetilde{C}\,,\ \forall n.$$

Ou seja, $\{v_n\}_n$ e $\{v_n'\}_n$ são sequências limitadas em $L^{p_0}(0,T;B_0)$ e $L^{p_1}(0,T;B_1)$, respectivamente. Como estes dois espaços são reflexivos (cf. Teorema A.0.11), existem subsequências $\{v_{n_k}\}_k$ e $\{v_{n_k}'\}_k$ fracamente convergentes (que, sem perda de generalidade, podemos considerar com o mesmo índice k), digamos

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \text{ em } L^{p_0}(0,T;B_0) \text{ e } v_{n_k}' \rightharpoonup w \text{ em } L^{p_1}(0,T;B_1).$$

Enunciaremos agora uma Afirmação cuja prova será dada após a demonstração do lema.

Afirmação 1: $v' = w \in L^{p_1}(0,T;B_1)$.

Defina $w_k = v_{n_k} - v$. Então, temos que $w_k \rightharpoonup 0$ em $L^{p_0}(0,T;B_0)$ e, pela Afirmação 1, $w_k' \rightharpoonup 0$ em $L^{p_1}(0,T;B_1)$. Vamos mostrar que $w_k \to 0$ em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $w_k \rightharpoonup 0$ em $L^{p_0}(0,T;B_0)$, existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq C_0\,,\ \forall k \tag{3.4}$$

(cf. Proposição A.0.7).

A seguir enunciamos outra Afirmação cuja prova também será adiada.

Afirmação 2: Para todo $\delta > 0$, existe uma constante $c_\delta > 0$ tal que

$$\|v\|_B \leq \delta\|v\|_{B_0} + c_\delta\|v\|_{B_1}\ ,\forall v \in B_0.$$

Seja $\delta > 0$ tal que $\delta C_0 \leq \varepsilon/2$. Pela Afirmação 2, existe $c_\delta > 0$ tal que

$$\|w_k(t)\|_B \leq \delta\|w_k(t)\|_{B_0} + c_\delta\|w_k(t)\|_{B_1}\,,\ \forall k.$$

Tomando potências, integrando e usando a Desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T \|w_k(t)\|_B^{p_0} dt\right)^{1/p_0} &\leq \left(\int_0^T (\delta\|w_k(t)\|_{B_0} + c_\delta\|w_k(t)\|_{B_1})^{p_0} dt\right)^{1/p_0}\\ &= \|\delta\|w_k(\cdot)\|_{B_0} + c_\delta\|w_k(\cdot)\|_{B_1}\|_{L^{p_0}(0,T)}\\ &\leq \|\delta\|w_k(\cdot)\|_{B_0}\|_{L^{p_0}(0,T)} + \|c_\delta\|w_k(\cdot)\|_{B_1}\|_{L^{p_0}(0,T)}\\ &= \delta\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + c_\delta\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B)} &\leq \delta\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + c_\delta\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + c_\delta\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)}\,,\ \forall k.\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde usamos (3.4) e a definição de δ.

Portanto, para obter que $w_k \to 0$ em $L^{p_0}(0,T;B)$, basta mostrar que $w_k \to 0$ em $L^{p_0}(0,T;B_1)$.

Primeiramente, vamos mostrar que

$$\|w_k(t)\|_{B_1} \to 0\ \ q.t.p.\ em\ [0,T]. \tag{3.6}$$

Sem perda de generalidade, basta provar que $\|w_k(0)\|_{B_1} \to 0$.

Seja $\tilde{\varepsilon} > 0$. Como $w'_k \rightharpoonup 0$ em $L^{p_1}(0,T;B_1)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|w'_k\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} \leq C_1\,,\ \forall k.$$

Seja p'_1 tal que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = 1$$

e considere $t > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t^{1/p'_1} C_1 \leq \tilde{\varepsilon}/2$.

Observe que $w_k(0) = a_k + b_k$, onde

$$a_k = \frac{1}{t}\int_0^t w_k(s)ds \ \ e \ \ b_k = -\frac{1}{t}\int_0^t (t-s)w'_k(s)ds.$$

De fato, usando os resultados sobre derivadas generalizadas da seção 2.9, temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t}\int_0^t w_k(s)ds - \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)w'_k(s)ds = \\
= \ & \frac{1}{t}\int_0^t w_k(s)ds - \int_0^t w'_k(s)ds + \frac{1}{t}\int_0^t (sw_k(s))'ds - \frac{1}{t}\int_0^t w_k(s)ds \\
= \ & w_k(0) - w_k(t) + \frac{1}{t}tw_k(t) = w_k(0).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|b_k\|_{B_1} & \leq \frac{1}{t}\int_0^t |t-s|\|w'_k(s)\|_{B_1}ds \\
& \leq \int_0^t \|w'_k(s)\|_{B_1}ds \\
& \leq t^{1/p'_1}C_1 \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $\varphi \in B'_0$, temos que

$$\langle \varphi, a_k\rangle_{B'_0,B_0} = \frac{1}{t}\int_0^t \langle \varphi, w_k(s)\rangle ds \to 0,$$

já que $f_\varphi : L^{p_0}(0,T;B_0) \to \mathbb{R}$, definido por

$$f_\varphi(v) = \frac{1}{t}\int_0^t \langle \varphi, v(s)\rangle ds,$$

é um funcional linear contínuo em $L^{p_0}(0,T;B_0)$ e $w_k \rightharpoonup 0$ em $L^{p_0}(0,T;B_0)$.

Portanto, $a_k \rightharpoonup 0$ em B_0 e, como a injeção $B_0 \to B_1$ é compacta, então $\|a_k\|_{B_1} \to 0$ (cf. Teorema A.0.10). Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\|a_k\|_{B_1} \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\,,\ \forall k \geq k_0. \tag{3.8}$$

Logo, de (3.7) e (3.8) obtemos que

$$\|w_k(0)\|_{B_1} \leq \|a_k\|_{B_1} + \|b_k\|_{B_1} < \tilde{\varepsilon}\,,\ \forall k \geq k_0.$$

Como o valor $t = 0$ de fato não desempenhou nenhum papel nos passos anteriores, então acabamos de mostrar (3.6).

Agora, usando que a injeção $B_0 \to B_1$ é contínua (já que as injeções $B_0 \to B$ e $B \to B_1$ são contínuas), tome $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\|b\|_{B_1} \leq \widetilde{C}\|b\|_{B_0}\,,\ \forall b \in B_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} &= \left(\int_0^T \|w_k(t)\|_{B_1}^{p_0} dt\right)^{1/p_0} \\ &\leq \widetilde{C}\left(\int_0^T \|w_k(t)\|_{B_0}^{p_0} dt\right)^{1/p_0} \\ &= \widetilde{C}\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \\ &\leq \widetilde{C}C_0 =: \widetilde{C}_0\,,\ \forall k. \end{aligned}$$

Isto implica que, para cada k, existe $t_k \in [0,T]$ tal que

$$\|w_k(t_k)\|_{B_1} \leq \frac{\widetilde{C}_0}{T^{1/p_0}}.$$

Portanto, usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\|w_k(t)\|_{B_1} = \left\|w_k(t_k) + \int_{t_k}^t w_k'(s)ds\right\|_{B_1} \leq \frac{\widetilde{C}_0}{T^{1/p_0}} + T^{1/p_1'}C_1\ ,\forall t \geq t_k\ e\ \forall k.$$

Na verdade, é fácil mostrar que a estimativa acima também vale para todo $t < t_k$. Logo, para todo k, as funções $\|w_k(\cdot)\|_{B_1}$ são limitadas em $[0,T]$ por uma mesma função constante, a qual é, evidentemente, integrável neste intervalo. Isto e o fato já provado (3.6) nos permitem aplicar o Teorema da Convergência Dominada à sequência $\{w_k\}_k$ e obter que

$$\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} = \left(\int_0^T \|w_k(t)\|_{B_1}^{p_0} dt\right)^{1/p_0} \to 0.$$

Logo, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B_1)} < \frac{\varepsilon}{2c_\delta}\,,\ \forall k \geq k_1.$$

Assim, de (3.5) obtemos que

$$\|w_k\|_{L^{p_0}(0,T;B)} < \varepsilon\,,\ \forall k \geq k_1.$$

Ou seja, $w_k \to 0$ em $L^{p_0}(0,T;B)$. ∎

Procederemos agora à prova das afirmações citadas acima.

Prova da Afirmação 1: Queremos mostrar que

$$\int_0^T w(t)\phi(t)dt = -\int_0^T v(t)\phi'(t)dt\ ,\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,T), \tag{3.9}$$

para $v \in L^{p_0}(0,T;B_0) \subset L^1(0,T;B_1)$ e $w \in L^{p_1}(0,T;B_1) \subset L^1(0,T;B_1)$.

Dado $L \in B_1'$ e $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,T)$, defina $f_{L,\phi} : L^{p_1}(0,T;B_1) \to \mathbb{R}$ por

$$\langle f_{L,\phi}, u\rangle = \int_0^T \langle \phi(t)L, u(t)\rangle dt$$

Vamos mostrar que $f_{L,\phi} \in (L^{p_1}(0,T;B_1))'$.

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle f_{L,\phi}, u\rangle| &\leq \int_0^T |\langle \phi(t)L, u(t)\rangle| dt \\ &\leq \|L\|_{B_1'} \int_0^T |\phi(t)| \|u(t)\|_{B_1} dt \\ &\leq \|L\|_{B_1'} \|\phi\|_{L^{p_1'}(0,T)} \|u\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}, \end{aligned}$$

o que mostra que $f_{L,\phi}$ é um operador limitado. A linearidade é imediata.

Assim, como $v_k' \rightharpoonup w$, temos

$$\left\langle L, \int_0^T \phi(t)v_k'(t)dt \right\rangle = \langle f_{L,\phi}, v_k' \rangle \to \langle f_{L,\phi}, w \rangle = \left\langle L, \int_0^T \phi(t)w(t)dt \right\rangle \ , \forall L \in B_1'.$$

Portanto,

$$\int_0^T \phi(t)v_k'(t)dt \rightharpoonup \int_0^T \phi(t)w(t)dt \ em \ B_1. \tag{3.10}$$

Analogamente, dados $L \in B_0'$ e $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,T)$, mostra-se que $\widetilde{f}_{L,\phi} : L^{p_0}(0,T;B_0) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \widetilde{f}_{L,\phi'}, u \rangle = \int_0^T \langle \phi'(t)L, u(t) \rangle dt,$$

pertence a $(L^{p_0}(0,T;B_0))'$. Então, como $v_k \rightharpoonup v$, temos

$$\left\langle L, \int_0^T \phi'(t)v_k(t)dt \right\rangle \to \left\langle L, \int_0^T \phi'(t)v(t)dt \right\rangle \ , \forall L \in B_0'. \tag{3.11}$$

Mas como $B_1' \subset B_0'$, a eq. (3.11) vale, em particular, para todo $L \in B_1'$. Logo,

$$\int_0^T \phi(t)v_k'(t)dt = -\int_0^T \phi'(t)v_k(t) \rightharpoonup -\int_0^T \phi'(t)v(t)dt. \tag{3.12}$$

De (3.10), (3.12) e da unicidade do limite fraco, concluímos (3.9). ■

Prova da Afirmação 2: Seja $\delta > 0$. Suponhamos que o resultado não seja válido. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $v_n \in B_0$ tal que

$$\|v_n\|_B > \delta\|v_n\|_{B_0} + n\|v_n\|_{B_1}.$$

Defina $u_n := v_n/\|v_n\|_{B_0}$. Então,

$$\|u_n\|_B > \delta + n\|u_n\|_{B_1}. \tag{3.13}$$

Como a injeção $B_0 \to B$ é contínua, existe uma constante M_0 tal que

$$\|u_n\|_B \leq M_0\|u_n\|_{B_0} = M_0 \ , \forall n.$$

Portanto, segue de (3.13) que

$$\|u_n\|_{B_1} < \frac{M_0 - \delta}{n}\ , \forall n.$$

e, consequentemente,

$$\|u_n\|_{B_1} \to 0 \ \ quando \ \ n \to \infty. \tag{3.14}$$

Por outro lado, como $\|u_n\|_{B_0} = 1$, para todo n, $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em B_0. E, pela compacidade da injeção $B_0 \to B$, existe uma subsequência $\{u_k\}$ fortemente convergente em B, digamos

$$u_k \to u \ \ em \ \ B.$$

Agora, como a injeção $B_1 \to B$ é contínua, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|u_k - u\|_{B_1} \leq M_1 \|u_k - u\|_B\ ,\ \forall k.$$

Como o lado direito da desigualdade acima tende a zero, obtemos que $u_k \to u$ em B_1. Logo, de (3.14), concluímos que $u = 0$.

Além disso, por (3.13) temos que

$$\|u_k\|_B > \delta + k\|u_k\|_{B_1} \geq \delta + \|u_k\|_{B_1}$$

Portanto, fazendo $k \to \infty$ acima, obtemos $\delta \leq 0$, o que é um absurdo. ∎

Analisando a demonstração do lema acima, vemos que a única hipótese usada sobre o intervalo $[0, T]$ foi o fato de ele ser um intervalo limitado em $\mathbb{R}$. Assim, tudo o que foi feito continuaria válido caso o tivéssemos substituído por um intervalo compacto arbitrário contido em $\mathbb{R}$. Disto temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.3 *Sejam B_0,B e B_1 como no Lema 3.2.2. Então, a injeção de*

$$W_{loc}([0,\infty)) = \left\{ v \in L^{p_0}_{loc}([0,\infty); B_0) \,\middle|\, v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}_{loc}([0,\infty); B_1) \right\}$$

em $L^{p_0}_{loc}([0,\infty); B)$ é compacta.

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $J_m = [0, m]$. Note que cada J_m é um intervalo compacto contido em I e $I = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$.

Seja $\{v_n\}$ uma sequência limitada em $W_{loc}([0, \infty))$. Então $\{v_{n|J_m}\}$ é limitada em $W(J_m)$, para todo m, e

$$v_{n|J_m} \in L^{p_0}(J_m; B_0) \ , \ \ v'_{n|J_m} \in L^{p_1}(J_m; B_1) \, , \ \forall n \, , \ \forall m.$$

Assim, aplicando-se repetidamente o Lema 3.2.2 a cada J_m e usando-se o método da diagonal de Cantor, obtém-se uma subsequência $\{v_k\}$ tal que $\{v_{k_{|K}}\}$ converge fortemente em $L^{p_0}(K; B)$, para todo compacto $K \subset [0, \infty)$. Logo, $\{v_k\}$ converge fortemente em $L^{p_0}_{loc}([0, \infty); B)$. ∎

Usando este corolário, obtemos o seguinte resultado relacionado ao espaço $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$:

Proposição 3.2.4 *Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}_{[0,\infty)}$ um subconjunto limitado. Então $\mathcal{U}$ é relativamente compacto em $L^2_{loc}([0, \infty), H)$.*

Prova: Tomando $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'$, $p_0 = 2$ e $p_1 = 4/3$ no corolário anterior, obtemos imediatamente que a injeção de $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$ em $L^2_{loc}([0, \infty), H)$ é compacta. Como, por hipótese, $\mathcal{U}$ é limitado em $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$, então $\mathcal{U}$ é relativamente compacto em $L^2_{loc}([0, \infty), H)$. ∎

Adiante provaremos uma outra propriedade relacionada ao espaço $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$ e, para isso, usaremos o lema abaixo:

Lema 3.2.5 *Sejam $R > 0$ e $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}([0, \infty), B_H(R)_w)$ um subconjunto limitado em $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$. Então $\mathcal{U}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0, \infty), V')$.*

Prova: Buscando utilizar o mesmo argumento anterior de subdividir o intervalo $[0, \infty)$ em uma sequência de intervalos compactos cuja união é igual a $[0, \infty)$, vamos mostrar primeiro que, dado um intervalo compacto J contido em $[0, \infty)$, $\Pi_J \mathcal{U}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}(J, V')$.

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (cf. Teorema A.0.17), basta mostrar que

(i) $\Pi_J\mathcal{U}$ é equicontínuo em $\mathcal{C}(J, V')$;

(ii) $\Pi_J\mathcal{U}$ é pontualmente compacto, i.e., para cada $t \in J$, $\{u(t); u \in \Pi_J\mathcal{U}\}$ é relativamente compacto em V'.

Prova de (i)*:*

Sejam $t_0 \in J$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{U}$ é limitado em $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_J \|u'(s)\|_{V'}^{4/3} ds\right)^{3/4} < C\,,\ \forall u \in \Pi_J\mathcal{U}.$$

Seja $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^4,$$

Assim, por um raciocínio análogo ao feito na equação (3.3), temos que se $t \in J$ e $|t - t_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t_0)\|_{V'} &\leq |t - t_0|^{1/4} \left(\int_{t_0}^t \|u'(s)\|_{V'}^{4/3} ds\right)^{3/4} \\ &\leq |t - t_0|^{1/4} \left(\int_J \|u'(s)\|_{V'}^{4/3} ds\right)^{3/4} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $u \in \Pi_J\mathcal{U}$, mostrando que $\Pi_J\mathcal{U}$ é equicontínua em t_0. Como t_0 é arbitrário, (i) é válido.

Prova de (ii)*:*

Seja $\{w_n\}$ uma sequência em $B_H(R)$. Como H é um espaço de Hilbert (portanto, um espaço reflexivo) e $B_H(R)$ é um conjunto limitado, existem uma subsequência $\{w_{n_k}\}$ e $w \in H$ tais que $w_{n_k} \rightharpoonup w$ em H_w. Portanto,

$$(w_{n_k}, v)_H \to (w, v)_H\,,\ \forall v \in H. \tag{3.15}$$

Como a bola unitária em V,

$$B_V(1) = \{v \in V | \|v\|_V \leq 1\},$$

é compacta em H (lembre que, por hipótese, a injeção $V \to H$ é compacta), dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto finito $\{v_i\}_{i=1}^m$ de elementos em H tais que

$$B_V(1) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_H\left(v_i, \frac{\varepsilon}{4R}\right),$$

onde cada conjunto na união do lado direito representa a bola aberta em H centrada em v_i e de raio $\varepsilon/4R$.

Assim, usando (3.15), podemos tomar um $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$|(w_{n_k} - w, v_i)_H| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k \geq k_0, \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Dado $v \in B_V(1)$, seja $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$\|v - v_i\|_H \leq \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |(w_{n_k} - w, v)_H| &\leq |(w_{n_k} - w, v_i)_H| + |(w_{n_k} - w, v - v_i)_H| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|w_{n_k} - w\|_H \|v - v_i\|_H \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2R\frac{\varepsilon}{4R} = \varepsilon, \ \forall v \in B_V(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|w_{n_k} - w\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} (w_{n_k} - w, v)_H \leq \varepsilon, \ \forall k \geq k_0.$$

Ou seja, $w_{n_k} \to w$ em V'. Como a sequência $\{w_n\}$ foi tomada arbitrariamente em $B_H(R)$, concluímos que $B_H(R)$ é relativamente compacto em V'.

Por outro lado, como

$$\{u(t); u \in \Pi_J \mathcal{U}\} \subset B_H(R)_w,$$

então toda sequência neste conjunto também possui uma subsequência convergente em V', logo, é relativamente compacto em V'.

Acabamos de provar, portanto, que o conjunto $\Pi_J\mathcal{U}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}(J, V')$.

Agora tome novamente uma sequência J_m de intervalos compactos contidos em $[0,\infty)$ cuja união é igual a $[0,\infty)$ e uma sequência $\{u_n\}$ em $\mathcal{U}$. Para cada m, a sequência de restrições $\{\Pi_{J_m}u_n\}_n$ é limitada e portanto, pelo que foi provado anteriormente, possui uma subsequência convergente em $\mathcal{C}(J_m, V')$. Fazendo-se uma diagonalização (método de Cantor), obtém-se finalmente uma subsequência de $\{u_n\}$ que converge em $\mathcal{C}([0,\infty), V')$. Isto mostra que $\mathcal{U}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0,\infty), V')$. ■

Agora estamos prontos para mostrar a outra propriedade relacionada a $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$ já mencionada:

Proposição 3.2.6 *Sejam $R > 0$ e $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ um subconjunto limitado em $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$. Então $\mathcal{U}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$.*

Prova: Sendo $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ um espaço metrizável, basta mostrar que toda sequência em $\mathcal{U}$ possui uma subsequência convergente em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$.

Seja, portanto, uma sequência $\{u_n\}$ em $\mathcal{U}$. Pelo Lema anterior, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ convergente em $\mathcal{C}([0,\infty), V')$, digamos

$$u_{n_k} \to u \in \mathcal{C}([0,\infty), V'). \tag{3.16}$$

Vamos mostrar que $\{u_{n_k}\}$ também converge a u em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$.

Seja J um compacto contido em $[0,\infty)$. Lembrando a definição de vizinhanças da origem deste espaço dada na seção 2.8, precisamos mostrar que

$$u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \ em \ H_w,$$

uniformemente em J.

Sejam $v \in H$ e $\varepsilon > 0$. Como V é denso em H, existe $v_0 \in V$ tal que

$$\|v - v_0\|_H \leq \frac{\varepsilon}{4R}. \tag{3.17}$$

Além disso, por (3.16), existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$

$$\|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{V'} \leq \frac{\varepsilon}{2(\|v_0\|_V + 1)} \ , \ \ \forall t \in J. \tag{3.18}$$

Usando (3.17) e (3.18), obtemos então

$$\begin{aligned} |(u_{n_k}(t) - u(t), v)_H| &= |(u_{n_k}(t) - u(t), v)_{V',V}| \\ &\leq |(u_{n_k}(t) - u(t), v_0)_{V',V}| + |(u_{n_k}(t) - u(t), v - v_0)_H| \\ &\leq \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{V'}\|v_0\|_V + \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_H\|v - v_0\|_H \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2R\frac{\varepsilon}{4R} = \varepsilon \ , \ \ \forall k \geq k_0 \ , \ \ \forall t \in J, \end{aligned}$$

Logo,

$$(u_{n_k}(t), v)_H \to (u(t), v)_H \ , \ \ \forall v \in H,$$

uniformemente em J. Portanto, $u_{n_k} \to u$ em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$. ∎

3.3 Definição do Conjunto Abstrato

Motivados em parte pelos resultados da seção anterior e para obter outros que serão necessários mais adiante, definiremos agora o nosso conjunto abstrato de funções:

Definição Seja $\mathcal{U}_{[0,\infty)} \subset \mathcal{C}([0,\infty), H_w)$ um conjunto com as seguintes propriedades topológicas:

(i) $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ é um conjunto de Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$;

(ii) Existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0$ e todo $t \geq 0$,

$$\Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1} B_H(R)) \subset B_H(R);$$

(iii) Para todo $R > 0$, o conjunto $\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R))$ está contido e é limitado em $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$.

Além disso, definimos também

$$\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) := \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w).$$

Temos então os seguintes resultados:

Proposição 3.3.1 *1. Para todo $R > 0$, $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)$ é um conjunto de Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$;*

2. *Para todo $R > 0$, $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)$ é relativamente compacto em $L^2_{loc}([0,\infty), H)$;*

3. *Para todo $R > 0$, $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$;*

4. *Para todo $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$, existe $R > 0$ tal que $u \in \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$;*

5. *Para toda sequência $\{R_k\}_k$ de números reais positivos tal que $R_k \to \infty$, temos*

$$\mathcal{U}_{[0,\infty)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k).$$

Prova: 1. Segue imediatamente do fato que $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ e $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ são conjuntos de Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$.

2. Segue da proposição 3.2.4.

3. Segue da proposição 3.2.6.

4. Dado $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$, considere um $R > 0$ suficientemente grande tal que $R \geq R_0$ e $u(0) \in B_H(R)_w$. Então $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1} B_H(R)$. Assim, pelo item (ii) da definição de $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$, temos que $u(t) \in B_H(R)$, para todo $t \in [0,\infty)$. Logo, $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w) = \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)$.

5. Seja $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$. Pelo item anterior, existe $R > 0$ tal que $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)$. Mas como $R_k \to \infty$, existe k_0 suficientemente grande tal que $R_{k_0} \geq R$, de modo que $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \subseteq \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_{k_0})$. Portanto, $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_{k_0})$. Por outro lado, é claro que $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k) \subset \mathcal{U}_{[0,\infty)}$ para todo k. ∎

Faremos agora uma outra hipótese sobre o espaço $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ que nos permitirá falar na *concatenação* de duas funções neste espaço, da seguinte forma:

Hipótese de Concatenação: Dadas u e v em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ tais que, para algum $s \geq 0$, temos $u(s) = v(0)$, se w é a função definida no intervalo $[0, \infty)$ por

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & , 0 \leq t \leq s \\ v(t-s) & , t > s \end{cases} ,$$

então $w \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$.

Esta hipótese nos diz que se considerarmos a união dos gráficos de duas funções em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$, uma restrita apenas ao intervalo $[0, s]$ e a outra deslocada de s para a direita, de modo que os gráficos coincidam em $t = s$, então a função resultante (obtida pela *concatenação* dos dois gráficos) ainda pertence ao espaço $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$.

3.4 Operadores de Evolução

Para todo $t \geq 0$, seja Σ_t o operador definido para todo subconjunto $E \subseteq H$ por:

$$\Sigma_t E = \Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E)),$$

que denominamos o *operador de evolução*.

Colocando em palavras, para cada $E \subseteq H$, o conjunto $\Sigma_t E$ é formado por todos os pontos v em H tais que $v = u(t)$, para alguma função u em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ tal que $u(0) \in E$.

Por outro lado, pelo item 5 da Proposição 3.3.1, segue imediatamente que

$$\Sigma_t E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k) \cap \Pi_0^{-1}(E)). \tag{3.19}$$

Note também que, uma vez definido o operador de evolução Σ_t, o item (ii) da definição de $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ torna-se equivalente a

$$\Sigma_t B_H(R) \subset B_H(R)\,, \ \forall t \geq 0\,, \ \forall R \geq R_0.$$

Com a Hipótese de Concatenação, podemos obter também a seguinte propriedade para o operador de evolução:

Proposição 3.4.1 *Para todo $E \subseteq H$, temos*

$$\Sigma_t \Sigma_s E \subset \Sigma_{t+s} E\,,\ \forall s, t \geq 0.$$

Prova: A seguinte equivalência é imediatamente verificada:

$$\Pi_0 \circ \sigma_t \equiv \Pi_t.$$

O que queremos então mostrar é a seguinte inclusão

$$\Pi_0 \circ \sigma_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(\Pi_0 \circ \sigma_s(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E)))) \subset \Pi_0 \circ \sigma_{t+s}(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E)). \quad (3.20)$$

Considere uma função v em

$$\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(\Pi_0 \circ \sigma_s(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E))) = \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(\Pi_s(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E))).$$

Então v é uma função em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ para a qual existe u em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$, com $u(0) \in E$, tal que $v(0) = u(s)$.

Defina a função w em $[0, \infty)$ dada por

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & , 0 \leq t \leq s \\ v(t-s) & , t > s \end{cases}.$$

Pela Hipótese de Concatenação, $w \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$. Além disso, como $w(0) = u(0)$, então $w(0) \in E$.

E também, como

$$v(t) = w(t+s) = \sigma_s w(t)\,,\ \forall t \geq 0,$$

então $v \in \sigma_s(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E))$. Isto mostra que

$$\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(\Pi_0 \circ \sigma_s(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E))) \subset \sigma_s(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(E)).$$

Finalmente, usando-se que

$$\sigma_{t+s} \equiv \sigma_t \circ \sigma_s,$$

obtém-se (3.20). ∎

3.5 Mensurabilidade

Primeiramente definimos o conceito de uma *órbita*.

Definição Dado E um subconjunto de H, definimos a *órbita* que começa em E por

$$\gamma(E) = \bigcup_{t \geq 0} \Sigma_t E.$$

Uma outra maneira de representar a órbita, que segue imediatamente da definição acima, é

$$\gamma(E) = \Pi_0 \circ \sigma([0, \infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1} E)). \tag{3.21}$$

E, pelo item 4 da Proposição 3.3.1, podemos escrever também

$$\gamma(E) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Pi_0 \circ \sigma([0, \infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k) \cap \Pi_0^{-1} E)), \tag{3.22}$$

onde $\{R_k\}_k$ é uma sequência de números reais positivos tal que $R_k \to \infty$.

O objetivo desta seção é mostrar a mensurabilidade de alguns conjuntos dinâmicos. Para isto, usaremos os resultados sobre σ-álgebras da seção 2.3 e os resultados sobre conjuntos analíticos e universalmente mensuráveis enunciados na seção 2.5.

Começamos com a prova da mensurabilidade de órbitas.

Teorema 3.5.1 *Seja E um conjunto de Borel em H_w. Então $\gamma(E)$ é um conjunto universalmente mensurável em H_w.*

Prova: Usando o fato que a família de conjuntos universalmente mensuráveis é uma σ-álgebra e a expressão (3.22) para a órbita $\gamma(E)$, basta mostrar que o conjunto

$$\Pi_0 \circ \sigma([0, \infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1} E))$$

é universalmente mensurável em H_w, para qualquer $R > 0$.

Como E é um conjunto de Borel em H_w e o operador $\Pi_0 : \mathcal{C}([0,\infty), H_w) \to H_w$ é contínuo, então $\Pi_0^{-1}E$ também é Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$. Assim, pela definição de $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$, temos que $\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E$ também é Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$. Mas então, como os conjuntos de Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ são exatamente os conjuntos da forma $A \cap \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$, onde A é um conjunto de Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$, obtemos que $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}E$ é Borel em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ e, consequentemente, $[0,\infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}E$ é Borel em $[0,\infty) \times \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$. Além disso, como $[0,\infty) \times \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ é um espaço Polonês (cf. Teorema B.1.1, no Apêndice B), então $[0,\infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}E$ é analítico neste espaço.

Como $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ também é um espaço Polonês e

$$\sigma : [0,\infty) \times \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w) \to \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$$

é uma função contínua, então $\sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}E))$ é um conjunto analítico em $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$. E, como

$$\Pi_0 : \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w) \to B_H(R)_w$$

também é uma função contínua entre espaços Poloneses, então $P := \Pi_0(\sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}E)))$ é analítico em $B_H(R)_w$ e, portanto, universalmente mensurável em $B_H(R)_w$.

Para ver que é universalmente mensurável em H_w, considere uma medida de probabilidade μ definida em uma σ-álgebra completa $\mathcal{A}$ que contém os conjuntos de Borel em H_w. Então, é fácil ver que

$$\mathcal{A} \cap B_H(R)_w = \{A \cap B_H(R)_w | A \in \mathcal{A}\}$$

é uma σ-álgebra completa que contém os conjuntos de Borel em $B_H(R)_w$. E, como $B_H(R)_w$ também é um conjunto de Borel em H_w então $\mathcal{A} \cap B_H(R)_w \subset \mathcal{A}$. Assim, como P é universalmente mensurável em $B_H(R)_w$, temos que P é mensurável em relação à restrição da medida μ à σ-álgebra $\mathcal{A} \cap B_H(R)_w$. Ou seja, $P \in \mathcal{A} \cap B_H(R)_w \subset \mathcal{A}$. Isto mostra que P é universalmente mensurável em H_w. ∎

Agora provaremos este resultado para a imagem de um conjunto de Borel pelo operador de evolução.

Teorema 3.5.2 *Seja E um conjunto de Borel em H_w e $t \geq 0$. Então $\Sigma_t E$ é universalmente mensurável em H_w.*

Prova: Pela expressão de $\Sigma_t E$ dada em (3.19) e novamente pelo fato de a família de conjuntos universalmente mensuráveis ser uma σ-álgebra, basta mostrar que

$$\Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}(E))$$

é universalmente mensurável em H_w, para qualquer $R > 0$.

Pelo mesmo argumento da demonstração anterior, já sabemos que $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}(E)$ é um conjunto de Borel no espaço Polonês $\mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w)$ e, portanto, analítico neste espaço. Como

$$\Pi_t : \mathcal{C}([0,\infty), B_H(R)_w) \to B_H(R)_w$$

é uma aplicação contínua entre espaços Poloneses, então $\Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}(E))$ é analítico no espaço Polonês $B_H(R)_w$ e, consequentemente, universalmente mensurável em $B_H(R)_w$. Assim, do mesmo modo feito anteriormente, obtemos que $\Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R) \cap \Pi_0^{-1}(E))$ é universalmente mensurável em H_w. ∎

Para finalizar esta seção, mostraremos a mensurabilidade da evolução de uma órbita.

Teorema 3.5.3 *Seja E um conjunto de Borel em H_w e $t \geq 0$. Então $\Sigma_t \gamma(E)$ é universalmente mensurável em H_w.*

Prova: Pela definição de Σ_t e pela expressão (3.21) para $\gamma(E)$, temos que

$$\Sigma_t \gamma(E) = \Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(\Pi_0(\sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1} E))))). \tag{3.23}$$

Vamos mostrar que também podemos escrever $\Sigma_t\gamma(E)$ como

$$\Sigma_t\gamma(E) = \Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E))). \tag{3.24}$$

Note que isto não segue imediatamente de (3.23), uma vez que, como não sabemos se o operador Π_0 é injetivo, Π_0^{-1} representa apenas pré-imagem, e não função inversa. Deste modo, apenas podemos garantir que

$$\Pi_0^{-1}(\Pi_0(\sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E)))) \supset \sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E)),$$

o que implica que o conjunto do lado direito em (3.24) está contido em $\Sigma_t\gamma(E)$, dado em (3.23).

Para a inclusão recíproca, considere um elemento $w \in \Sigma_t\gamma(E)$. Então, existe $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}(\gamma(E))$ tal que $w = u(t)$. E, como $u(0) \in \gamma(E)$, existem $s \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E$ tais que $u(0) = v(s)$. Seja $w : [0,\infty) \to H_w$ a função definida por

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & , 0 \leq t \leq s \\ u(t-s) & , t > s \end{cases}.$$

Pela Hipótese de Concatenação, temos que $w \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$. E como $w(0) = v(0) \in E$, então $w \in \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E$. Além disso,

$$u(t) = w(t+s) = \sigma_s w(t) = \sigma(s,w)(t)\,,\ \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E))$$

e, consequentemente,

$$w \in \Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \sigma([0,\infty) \times (\mathcal{U}_{[0,\infty)} \cap \Pi_0^{-1}E))),$$

o que acaba de mostrar (3.24).

Agora considere novamente uma sequência $\{R_k\}_k$ de números reais positivos tal que $R_k \to \infty$. Então, pelo item 5 da Proposição 3.3.1 e pela expressão (3.24), temos que

$$\begin{aligned}
\Sigma_t\gamma(E) &= \Pi_t\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k)\right)\cap\sigma\left([0,\infty)\times\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_j)\cap\Pi_0^{-1}E\right)\right)\right)\\
&= \Pi_t\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k)\right)\cap\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\sigma([0,\infty)\times(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_j)\cap\Pi_0^{-1}E))\right)\right)\\
&= \Pi_t\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k)\cap(\sigma([0,\infty)\times(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k)\cap\Pi_0^{-1}E))))\right)\\
&= \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k)\cap(\sigma([0,\infty)\times(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_k)\cap\Pi_0^{-1}E)))),
\end{aligned}$$

onde da segunda para a terceira linha usamos o fato de que $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_i)\subset\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R_j)$, para todos $i,j\in\mathbb{N}$ tais que $j\geq i$.

Assim, basta mostrar que

$$P := \Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)\cap\sigma([0,\infty)\times(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)\cap\Pi_0^{-1}E))).$$

é universalmente mensurável em H_w, para qualquer $R>0$.

Como $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)\cap\Pi_0^{-1}E$ é um conjunto de Borel em $\mathcal{C}([0,\infty),B_H(R)_w)$, então $[0,\infty)\times(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)\cap\Pi_0^{-1}E)$ é um conjunto de Borel no espaço Polonês $[0,\infty)\times\mathcal{C}([0,\infty),B_H(R)_w)$ e, consequentemente, analítico neste espaço. Portanto, a imagem deste conjunto pela aplicação contínua σ é um conjunto analítico em $\mathcal{C}([0,\infty),B_H(R)_w)$. Além disso, como $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)$ é um conjunto de Borel no espaço Polonês $\mathcal{C}([0,\infty),B_H(R)_w)$ então também é analítico neste espaço. Assim,

$$\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)\cap\sigma([0,\infty)\times(\mathcal{U}_{[0,\infty)}(R)\cap\Pi_0^{-1}E))$$

é analítico em $\mathcal{C}([0,\infty),B_H(R)_w)$. E como Π_t também é uma aplicação contínua entre espaços Poloneses, então P é analítico em $B_H(R)_w$ e, portanto, universalmente mensurável em H_w. ∎

3.6 Medidas Acretivas

O conceito de uma medida acretiva está intimamente ligado ao conceito de operador de evolução. Antes de defini-lo, vale a pena ressaltar que a palavra acretiva é adjetivo relativo ao substantivo *acreção*, que, em outras palavras, é o mesmo que *aglomeração*. O porquê dessa explicação ficará mais claro ao leitor após a seguinte definição.

Definição Dizemos que uma medida de probabilidade de Borel μ em H é *acretiva* em relação à família de operadores $\{\Sigma_t\}_{t\geq 0}$ se

$$\overline{\mu}(\Sigma_t E) \geq \mu(E)\,,\ \forall t \geq 0,$$

para todo subconjunto de Borel $E \subset H$.

Lembre que, pelo teorema 3.5.2, dado um conjunto de Borel E em X, $\Sigma_t(E)$ é universalmente mensurável e, em particular, $\overline{\mu}$-mensurável para uma medida de probabilidade de Borel μ, no sentido dado na seção 2.4. Portanto, a definição acima faz sentido.

Como H é um espaço Polonês, o Teorema 2.4.7 nos diz que toda medida de probabilidade de Borel em H é regular. Graças a isto, podemos mostrar que a propriedade de uma medida acretiva vale na verdade para qualquer conjunto $\overline{\mu}$-mensurável. É isto que diz o próximo lema.

Lema 3.6.1 *Seja μ uma medida de probabilidade de Borel em H que é acretiva em relação à família $\{\Sigma_t\}_{t\geq 0}$. Então, dados $t \geq 0$ e um conjunto $\overline{\mu}$-mensurável E tal que $\Sigma_t(E)$ também é $\overline{\mu}$-mensurável, temos que $\overline{\mu}(\Sigma_t E) \geq \overline{\mu}(E)$.*

Prova: Seja $K \subset E$ um compacto. Então, pela definição de Σ_t, segue que $\Sigma_t K \subset \Sigma_t E$. Usando isto e o fato de que K também é um conjunto de Borel em H, obtemos que

$$\overline{\mu}(\Sigma_t E) \geq \overline{\mu}(\Sigma_t K) \geq \mu(K).$$

Como isto vale para todo compacto $K \subset E$, então usando que μ é uma medida regular temos que

$$\overline{\mu}(\Sigma_t E) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}(E)} \mu(K) = \overline{\mu}(E). \quad \blacksquare$$

3.7 Resultados de Recorrência

Nesta seção, utilizamos os resultados sobre mensurabilidade e medidas acretivas mostrados ao longo das duas seções anteriores para obter resultados sobre recorrência. Iremos mostrar que, para quase todo ponto u_0 de um conjunto inicial E, existe uma infinidade de instantes de tempo tais que, para cada um destes, existe pelo menos uma função u em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ que começou em u_0 e que "volta" a E neste instante, daí o termo recorrência.

Antes de mostrar o teorema principal, precisaremos de um lema.

Lema 3.7.1 *Seja E um conjunto de Borel em H e seja $t > 0$. Então $\Sigma_t \gamma(E) \subset \gamma(E)$. Além disso, se μ é uma medida de probabilidade de Borel em H que é acretiva em relação à família $\{\Sigma_t\}_{t \geq 0}$, então*

$$\overline{\mu}\left(\Sigma_t \gamma(E)\right) = \overline{\mu}(\gamma(E)).$$

Prova: Pelas definições de órbita e de Σ_t, temos que

$$\begin{aligned}
\Sigma_t\gamma(E) &= \Sigma_t\left(\bigcup_{s\geq 0}\Sigma_s E\right)\\
&= \Pi_t\left(\mathcal{U}_{[0,\infty)}\cap\Pi_0^{-1}\left(\bigcup_{s\geq 0}\Sigma_s E\right)\right)\\
&= \bigcup_{s\geq 0}\Pi_t(\mathcal{U}_{[0,\infty)}\cap\Pi_0^{-1}(\Sigma_s E))\\
&= \bigcup_{s\geq 0}\Sigma_t\Sigma_s E\\
&\subset \bigcup_{s\geq 0}\Sigma_{t+s} E\\
&\subset \bigcup_{s\geq 0}\Sigma_s E = \gamma(E).
\end{aligned}$$

Agora considere μ uma medida acretiva em H para a família $\{\Sigma_t\}_{t\geq 0}$. Então, segue do Teorema 3.5.3 que $\Sigma_t\gamma(E)$ é μ-mensurável. Assim, pelo Lema 3.6.1, temos que

$$\overline{\mu}(\Sigma_t\gamma(E)) \geq \overline{\mu}(\gamma(E)).$$

Por outro lado, como $\Sigma_t\gamma(E)\subset\gamma(E)$, então

$$\overline{\mu}(\Sigma_t\gamma(E)) \leq \overline{\mu}(\gamma(E)).$$

Logo,

$$\overline{\mu}(\Sigma_t\gamma(E)) = \overline{\mu}(\gamma(E)). \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.7.2 *Seja μ uma medida de probabilidade de Borel em H que é acretiva em relação à família $\{\Sigma_t\}_{t\geq 0}$ e seja E um conjunto $\overline{\mu}$-mensurável. Então, para $\overline{\mu}$-quase todo $u_0\in E$, existe uma sequência $\{t_n\}_n$ de números reais positivos tal que $t_n\to\infty$ e*

$$(\Sigma_{t_n}u_0)\cap E\neq\emptyset\,,\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Prova: Como E é um conjunto $\overline{\mu}$-mensurável, i.e., $E\in\mathcal{B}_\mu$, então existem um conjunto de Borel B em H e $N\in\mathcal{N}_\mu$ tais que $E=B\cup N$. Primeiramente, vamos mostrar que o teorema é válido para B. Disto seguirá diretamente o resultado para E.

Consideremos o conjunto dos elementos em B para os quais o teorema é válido, isto é, o conjunto dos pontos recorrentes em B, dado por

$$B^r = \{u_0 \in B \,|\, \exists\, \{t_n\}_n \text{ tal que } t_n \geq 0,\, t_n \to \infty \text{ e } \Sigma_{t_n} u_0 \cap B \neq \emptyset,\, \forall n\}.$$

Queremos mostrar que $\overline{\mu}(B \setminus B^r) = 0$. Mas antes disso precisamos verificar se $B \setminus B^r$ é de fato um conjunto $\overline{\mu}$-mensurável.

Note que, se para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $k \in \mathbb{N}$ definirmos o conjunto

$$B_{n,k} = \{u_0 \in B \cap B_H(kR_0) \,|\, \Sigma_t u_0 \cap B = \emptyset,\, \forall t \geq n\},$$

formado por pontos não-recorrentes de B, então

$$B \setminus B^r = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n,k}.$$

Assim, se para cada n e cada k em $\mathbb{N}$ tivermos mostrado que $B_{n,k}$ é $\overline{\mu}$-mensurável e $\overline{\mu}(B_{n,k}) = 0$, teremos provado o teorema.

Inicialmente consideremos $B_H(kR_0) \setminus B_{n,k}$, o complementar de $B_{n,k}$ em $B_H(kR_0)$, e mostremos que este é um conjunto analítico. Note que

$$B_H(kR_0) \setminus B_{n,k} = (B_H(kR_0) \setminus B) \cup ((B \cap B_H(kR_0)) \setminus B_{n,k}). \tag{3.25}$$

Seja Q a aplicação de projeção no espaço $\mathcal{C}([0,\infty), H_w)$, dada por

$$\begin{aligned} Q : [0,\infty) \times \mathcal{C}([0,\infty), H_w) &\to \mathcal{C}([0,\infty), H_w) \\ (t, u) &\mapsto u \end{aligned}$$

Vamos mostrar que podemos escrever o segundo conjunto em (3.25) como

$$(B \cap B_H(kR_0)) \setminus B_{n,k} = B \cap \Pi_0(Q(([n,\infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B))). \tag{3.26}$$

Seja $u_0 \in (B \cap B_H(kR_0)) \setminus B_{n,k}$. Então existe $t_0 \geq n$ para o qual

$$\Sigma_{t_0} u_0 \cap B \neq \emptyset.$$

Portanto, existe $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$ tal que $u(0) = u_0$ e $u(t_0) \in B$. E como $u(0) = u_0 \in B_H(kR_0)$ então, pelo item 4 da definição de $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$, temos que $u(t) \in B_H(kR_0)$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $u \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)$. Assim,

$$(t_0, u) \in ([n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B).$$

Logo,

$$u \in Q(([n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B)).$$

E, consequentemente,

$$u_0 \in B \cap \Pi_0(Q(([n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B))).$$

Isto mostra uma das inclusões em (3.26). Para a prova da inclusão recíproca, basta seguir os passos anteriores ao contrário.

Sendo $[n, \infty)$ e $\mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)$ conjuntos de Borel em $[0, \infty)$ e $\mathcal{C}([0, \infty), B_H(kR_0)_w)$, respectivamente, então $[n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)$ é um conjunto de Borel em $[0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty),$ $B_H(kR_0)_w)$. E como B é Borel em H_w e Π_0 e σ são contínuas, segue que $\sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B)$ é Borel em $[0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), H_w)$. Além disso, como

$$[n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0) \subset [0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), B_H(kR_0)_w)$$

então

$$\begin{aligned} &([n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B) = \\ &= ([n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap ([0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), B_H(kR_0)_w)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B). \end{aligned}$$

Agora, como $([0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), B_H(kR_0)_w)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B)$ é Borel em $[0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty),$ $B_H(kR_0)_w)$, concluímos que $([n, \infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1} B)$ é um conjunto de Borel no espaço Polonês $[0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), B_H(kR_0)_w)$. Portanto, a imagem deste conjunto pela aplicação contínua

$$\Pi_0 \circ Q : [0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), B_H(kR_0)_w) \to B_H(kR_0)_w$$

é um conjunto analítico em $B_H(kR_0)_w$.

E também, como

$$B \cap \Pi_0(Q(([n,\infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1}B))) \subset B_H(kR_0)_w,$$

podemos fazer como anteriormente, reescrevendo este conjunto como

$$B_H(kR_0)_w \cap B \cap \Pi_0(Q(([n,\infty) \times \mathcal{U}_{[0,\infty)}(kR_0)) \cap \sigma^{-1}(\Pi_0^{-1}B)))$$

e usar que $B_H(kR_0)_w \cap B$ é um conjunto de Borel em $B_H(kR_0)_w$ (e, portanto, analítico em $B_H(kR_0)_w$) para obter, por (3.26), que $B \cap B_H(kR_0)_w \setminus B_{n,k}$ é analítico em $B_H(kR_0)_w$.

Assim, como $B_H(kR_0)_w \setminus B_{n,k} = B_H(kR_0)_w \cap B^c$ também é um conjunto de Borel em $B_H(kR_0)_w$, obtemos por (3.25) que $B_H(kR_0)_w \setminus B_{n,k}$ é um conjunto analítico no espaço Polonês $B_H(kR_0)_w$ e, portanto, universalmente mensurável em $B_H(kR_0)_w$. Mas, como a família de conjuntos universalmente mensuráveis é uma σ-álgebra, então $B_{n,k}$ também é universalmente mensurável em $B_H(kR_0)_w$ e, consequentemente, em H_w. Em particular, $B_{n,k}$ é $\overline{\mu}$-mensurável.

Resta mostrar que $\overline{\mu}(B_{n,k}) = 0$.

Observe que, para todo $t \geq n$, $\Sigma_t B_{n,k} \cap B_{n,k} = \emptyset$. Pois, caso contrário, existiria um $t \geq n$ para o qual $\Sigma_t B_{n,k} \cap B_{n,k} \neq \emptyset$. Assim, tomando um elemento $u_0 \in \Sigma_t B_{n,k} \cap B_{n,k} \neq \emptyset$, existiria uma função $v \in \mathcal{U}_{[0,\infty)}$ tal que $v(0) \in B_{n,k} \subset B \cap B_H(kR_0)$ e $v(t) = u_0 \in B_{n,k} \subset B$, logo $v(t) \in \Sigma_t v(0) \cap B$, o que contradiz a definição de $B_{n,k}$. Portanto, temos que

$$B_{n,k} \cap \left(\bigcup_{t \geq n} \Sigma_t B_{n,k} \right) = \emptyset. \tag{3.27}$$

Agora considere um compacto (forte) $K \subset H$ tal que $K \subset B_{n,k}$. Por (3.27) temos

$$K \cap \left(\bigcup_{t \geq n} \Sigma_t K \right) = \emptyset.$$

Usando então o resultado da Proposição 3.4.1, temos que

$$\bigcup_{t \geq n} \Sigma_t K = \bigcup_{t \geq 0} \Sigma_{n+t} K \supset \bigcup_{t \geq 0} \Sigma_n \Sigma_t K = \Sigma_n \left(\bigcup_{t \geq 0} \Sigma_t K \right) = \Sigma_n \gamma(K).$$

Portanto,

$$K \subset \left(\bigcup_{t \geq 0} \Sigma_t K \right) \setminus \left(\bigcup_{t \geq n} \Sigma_t K \right) \subset \gamma(K) \setminus \Sigma_n \gamma(K). \tag{3.28}$$

Sendo K, em particular, um conjunto de Borel em H, podemos aplicar o Lema 3.7.1 a K e, usando (3.28), obter que

$$\mu(K) \leq \overline{\mu}(\gamma(K) \setminus \Sigma_n \gamma(K)) \leq \overline{\mu}(\gamma(K)) - \overline{\mu}(\Sigma_n \gamma(K)) = 0.$$

Como isto vale para qualquer compacto K em H tal que $K \subset B_{n,k}$, então

$$\overline{\mu}(B_{n,k}) = \sup_{K \in \mathcal{K}(B_{n,k})} \mu(K) \leq 0.$$

Logo, $\overline{\mu}(B_{n,k}) = 0$ e, consequentemente, $\overline{\mu}(B \setminus B^r) = 0$.

Finalmente, se E_0 é o conjunto formado pelos pontos em E para os quais o teorema não é válido então, como $E = B \cup N$, devemos ter $E_0 \subset (B \setminus B^r) \cup N$. Logo,

$$\overline{\mu}(E_0) \leq \overline{\mu}(B \setminus B^r) + \overline{\mu}(N) = 0,$$

o que implica $\overline{\mu}(E_0) = 0$. ■

O seguinte corolário segue imediatamente do teorema anterior e nos fornece uma outra maneira de interpretá-lo.

Corolário 3.7.3 *Seja μ uma medida de probabilidade de Borel que é acretiva em relação à família $\{\Sigma_t\}_{t \geq 0}$ e seja E um conjunto $\overline{\mu}$-mensurável. Então, para $\overline{\mu}$-quase todo $u_0 \in E$, existe uma sequência de números reais positivos $\{t_n\}_n$ tal que $t_n \to \infty$ e uma sequência $\{u_n\}_n$ de funções em $\mathcal{U}_{[0,\infty)}$ tal que $u_n(0) = u_0$ e $u_n(t_n) \in E$, para todo n.*

Apêndice A

Resultados Clássicos

O objetivo desta primeira parte do Apêndice é enunciar os resultados clássicos de Análise Funcional, Teoria da Medida e Topologia Geral que são utilizados no decorrer dos capítulos 1 e 2, e também no Apêndice B.

Para uma apresentação mais detalhada dos resultados de Análise Funcional mencionados a seguir, pode-se consultar [6] ou [7].

Se X é um espaço de Banach sobre um corpo de escalares $\mathbb{K}$, então denotamos por X' o *dual topológico* de X, que é o espaço vetorial formado por todas as aplicações lineares contínuas de X em $\mathbb{K}$. Define-se uma norma em X' por

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)|\,,\ \forall f \in X'.$$

Com esta norma, X' é um espaço de Banach. É comum denotarmos a aplicação de um funcional linear $\varphi \in X'$ a um elemento $x \in X$ por $\langle \varphi, x \rangle$ ou, mais explicitamente, $\langle \varphi, x \rangle_{X',X}$.

Teorema A.0.1 *Seja X um espaço de Banach. Se $x, y \in X$ satisfazem*

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle \varphi, y \rangle\,,\ \forall \varphi \in X',$$

então $x = y$.

Teorema A.0.2 *Sejam X um espaço de Banach e $x \in X$. Então existe $\varphi \in X'$ tal que $\langle \varphi, x \rangle = \|x\|_X$ e $\|\varphi\|_{X'} = 1$.*

Teorema A.0.3 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Então T é contínua se e só se for limitada, i.e., se e só se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \,,\ \forall x \in X.$$

Teorema A.0.4 ***(Teorema da Representação de Riesz)*** *Se H é um espaço de Hilbert então para cada $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (v, u)_H \,,\ \forall v \in H,$$

onde $(\cdot, \cdot)_H$ representa o produto interno em H. Além disso,

$$\|u\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Do teorema acima segue que todo espaço de Hilbert pode ser identificado com seu dual.

A *topologia fraca* em um espaço de Banach X é definida como a menor topologia em X para a qual todo $\varphi \in X'$ é uma aplicação contínua. Assim, é claro que esta topologia está contida na topologia usual de X, a qual denominamos *topologia forte*.

Teorema A.0.5 *Seja C um subconjunto convexo de um espaço de Banach X. Então C é fechado em relação à topologia fraca se e somente se C é fechado em relação à topologia forte.*

Teorema A.0.6 *Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Se $B \subset X$ é um subconjunto limitado então B é metrizável em relação à topologia fraca em X.*

Seja $X'' = (X')'$ o dual de X', também chamado o *bidual* do espaço de Banach X. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} J : X &\rightarrow X'' \\ x &\mapsto J_x, \end{aligned}$$

onde $J_x \in X''$ é definido por $\langle J_x, \varphi \rangle_{X'',X'} = \langle \varphi, x \rangle_{X',X}$, para todo $\varphi \in X'$. A aplicação J é denominada a *injeção canônica* de X em X''. Se J é uma aplicação sobrejetiva então dizemos que X é um espaço *reflexivo*. Como consequência do Teorema da Representação de Riesz, obtém-se que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Dada uma sequência $\{x_n\}_n$ em X, dizemos que $\{x_n\}_n$ converge *fracamente* a $x \in X$ (e denotamos $x_n \rightharpoonup x$) se $\{x_n\}_n$ converge a x em relação à topologia fraca em X. Isto é equivalente a dizer que $\langle \varphi, x_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, x \rangle$, para todo $\varphi \in X'$.

Proposição A.0.7 *Se $\{x_n\}_n$ é uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$, então $\{\|x_n\|_X\}_n$ é uma sequência limitada.*

Teorema A.0.8 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}_n$ uma sequência limitada em X. Então $\{x_n\}_n$ possui uma subsequência que converge fracamente em X.*

Teorema A.0.9 *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo e separável se e somente se X' é reflexivo e separável.*

Um operador $A : X \rightarrow Y$ entre dois espaços de Banach X e Y é denominado *compacto* se, para todo subconjunto limitado $B \subset X$, tem-se que $A(B)$ é relativamente compacto em Y, i.e., $\overline{A(B)}$, o fecho de $A(B)$ em Y, é um conjunto compacto em Y.

Teorema A.0.10 *Dados X, Y espaços de Banach e $A : X \rightarrow Y$ um operador compacto, se $\{x_n\}_n$ é uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ então $A(x_n) \rightarrow A(x)$.*

O teorema a seguir nos diz qual é o dual do espaço de funções p-integráveis.

Teorema A.0.11 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e X um espaço de Banach. Se X é um espaço de Banach reflexivo e $p \in (1, \infty)$, então $L^p(I, X)$ é reflexivo e*

$$(L^p(I, X))' = L^q(I, X'),$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Abaixo enunciamos um dos teoremas mais clássicos da Teoria da Medida, cuja demonstração pode ser encontrada em [4]. No seu enunciado, X representará um conjunto no qual tem-se definida uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ e μ é uma medida definida em $\mathcal{A}$. E ao dizermos que uma função f é integrável estaremos nos referindo à integral de Lebesgue.

Teorema A.0.12 ***(Teorema da Convergência Dominada)*** *Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções integráveis de X em $\mathbb{R}^m$ (ou $\mathbb{C}$) tal que $f_n \to f$ q.t.p. Se existe uma função integrável $g : X \to [0, \infty]$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p., para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

A seguir apresentamos alguns resultados sobre espaços métricos, os quais podem ser encontrados em [8].

Proposição A.0.13 *Todo subconjunto de um espaço métrico separável é separável.*

Dizemos que um espaço métrico M é *sequencialmente compacto* se toda sequência em M possui uma subsequência convergente.

Teorema A.0.14 *Um espaço métrico M é compacto se e somente se é sequencialmente compacto.*

Teorema A.0.15 *Todo espaço métrico compacto é separável e completo.*

Teorema A.0.16 *Todo espaço métrico separável possui uma base enumerável.*

Considere (X, d_1) um espaço métrico compacto e (Y, d_2) um espaço métrico completo. Seja $\mathcal{C}(X, Y)$ o espaço de funções contínuas de X em Y, munido com a métrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} d_2(f(x), g(x)).$$

Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de funções em $\mathcal{C}(X, Y)$ é *equicontínua* se para cada $x \in X$ e cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $d_1(x, x') < \delta$ então $d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$, para todo $f \in \mathcal{F}$. Dizemos também que $\mathcal{F}$ é uma família *pontualmente compacta* se, para cada $x \in X$, o conjunto $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em (Y, d_2). Com estas definições, enunciamos o seguinte teorema (veja [15]).

Teorema A.0.17 ***(Teorema de Arzelà-Ascoli)*** *Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto de $\mathcal{C}(X, Y)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}$ é um conjunto relativamente compacto em $\mathcal{C}(X, Y)$;

(ii) A família $\mathcal{F}$ é pontualmente compacta e equicontínua.

Abaixo seguem alguns resultados de Topologia Geral, os quais podem ser consultados em [9].

Em um espaço métrico (X, d), definimos o *diâmetro* de um subconjunto $A \subset X$ por

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Teorema A.0.18 ***(Teorema da Interseção de Cantor)*** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $\{F_n\}$ uma sequência decrescente de subconjuntos fechados e não-vazios tais que $\lim_{n\to\infty} diam F_n = 0$. Então, existe um único $x \in X$ tal que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico é um conjunto $\mathcal{G}_\delta$ se A se escreve como uma interseção enumerável de conjuntos abertos. E dizemos que A é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$ se pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos fechados.

Proposição A.0.19 *Se X é um espaço topológico metrizável, então todo subconjunto aberto $A \subset X$ é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$.*

O resultado a seguir nos chama a atenção para um fato interessante sobre espaços métricos. Sabemos que se (X, d) é um espaço métrico completo, i.e., para o qual toda sequência de Cauchy é convergente, então $(Y, d_{|Y\times Y})$ é um espaço métrico completo se e só se Y é um subconjunto fechado de X. No entanto, mesmo que Y não seja um subconjunto fechado, mas apenas um conjunto $\mathcal{G}_\delta$, ainda é possível obter uma métrica ρ definida em Y compatível com a topologia gerada por d em X para a qual (Y, d) é completo. Isto mostra que em um espaço métrico podem existir métricas equivalentes, i.e., que geram a mesma topologia, mas sendo uma completa e a outra não.

Lema A.0.20 ***(Lema de Alexandroff)*** *Se (X, d) é um espaço métrico completo e $A \subset X$ é um subconjunto $\mathcal{G}_\delta$, então A admite uma métrica completa que é compatível com a sua topologia.*

Se $\{(X_n, \tau_n)\}_n$ é uma sequência de espaços topológicos, então o produto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é um espaço topológico com uma topologia que denominamos *topologia produto*. Esta é definida como a menor topologia que faz com que cada uma das projeções

$$\begin{aligned} P_n \;:\; & X \to X_n \\ & x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto x_n \end{aligned}$$

seja contínua. Em outras palavras, é a *topologia fraca* gerada pela família $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Uma base para a topologia produto é dada pela coleção de conjuntos da forma

$$V = \prod_{n=1}^{\infty} V_n,$$

onde $V_n \in \tau_n$ e $V_n = X_n$ a menos de um número finito de n's.

Representaremos um elemento $x \in X$ por (x_n). Observe que, de acordo com a base definida acima, temos que uma rede $\{(x_n^\alpha)\}_\alpha$ em X satisfaz $(x_n^\alpha) \to (x_n)$ em X se e somente se $x_n^\alpha \to x_n$ em X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

A seguir temos um resultado sobre o produto de espaços compactos.

Teorema A.0.21 ***(Teorema do Produto de Tychonoff)*** *Se* $\{X_n\}_n$ *é uma sequência de espaços topológicos então o espaço produto* $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *é compacto se e somente se* X_n *é compacto, para todo* n*.*

Apêndice B

Resultados Sobre Conjuntos Analíticos e Universalmente Mensuráveis

Neste Apêndice mostraremos os resultados sobre conjuntos analíticos e universalmente mensuráveis que foram enunciados na seção 2.5.

No entanto, como era de se esperar, para que possamos entender as demonstrações destes resultados, precisaremos desenvolver um pouco da teoria dos espaços Poloneses e, em particular, do espaço de Baire. Isto será feito ao longo das seções B.1 e B.2.

A maioria dos resultados demonstrados aqui pode também ser encontrada em [9].

B.1 Algumas Propriedades de Espaços Poloneses

O primeiro resultado que apresentamos diz respeito ao produto de espaços Poloneses.

Teorema B.1.1 *Se $\{X_n\}_n$ é uma sequência de espaços Poloneses, então o produto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ é um espaço Polonês.*

Prova: Para ver que X é separável, considere para cada n um subconjunto $U_n \subset X_n$ enumerável e denso, e fixe $u_n \in U_n$. Note que o conjunto

$$U = \{(x_n) \in X \mid x_n \in U_n, \forall n, \text{ e } x_n = u_n \text{ a menos de um número finito de } n\text{'s}\}$$

é um subconjunto enumerável e denso em X.

Para cada n, seja d_n uma métrica compatível em X_n tal que (X_n, d_n) é completo. Seja a aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida, para cada $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em X, por

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Não é difícil verificar que d é uma métrica completa em X e que uma rede $\{(x_n^\alpha)\}_\alpha$ em X satisfaz $d((x_n^\alpha), (x_n)) \to 0$ em X se e só se $d_n(x_n^\alpha, x_n) \to 0$ em X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mas como cada d_n é uma métrica compatível em X_n, isto ocorre se e só se $x_n^\alpha \to x_n$ em (X_n, τ_n), para cada n. Por outro lado, denotando a topologia produto por τ, já sabemos que isto ocorre se e só se $(x_n^\alpha) \to (x_n)$ em (X, τ). Portanto, usando o Teorema 2.2.3, obtemos que a topologia gerada por d e a topologia produto coincidem, ou seja, d é uma métrica compatível em X. Logo, X é um espaço Polonês. ■

A seguir apresentamos um resultado de simples demonstração, mas bastante útil.

Proposição B.1.2 *Seja (X, τ) um espaço Polonês e seja $F \subset X$ um subconjunto fechado. Então F é Polonês.*

Prova: Em F, consideramos a topologia τ_F dada por

$$\tau_F = \{V \cap F \,|\, V \in \tau\}.$$

E, se d é uma métrica compatível em X tal que (X, d) é completo, então considere a métrica d_F em F dada pela restrição de d a $F \times F$. Assim, se $\{x_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em (F, d_F) então $\{x_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em (X, d). E, como X é completo, existe $x \in X$ tal que $d(x_n, x) \to 0$. Mas, sendo F fechado, temos que $x \in F$. Logo, (F, d_F) é completo. Usando que d é uma métrica compatível com τ, verifica-se facilmente que d_F é compatível com τ_F. Além disso, sendo (X, d) um espaço métrico separável, pela Proposição A.0.13 temos que (F, d_F) é separável e, como d_F é compatível com τ_F, então (F, τ_F) é separável. Logo, (F, τ_F) é Polonês. ■

Na demonstração do lema seguinte, utilizamos o conceito de uma *topologia gerada* por uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço topológico, que foi definido na seção 2.1.

Lema B.1.3 *Seja (X,τ) um espaço Polonês e seja $F \subset X$ um subconjunto fechado. Então existe uma topologia Polonesa $\tau_F \supset \tau$ em X tal que F é aberto e fechado em relação a τ_F e $\sigma(\tau_F) = \sigma(\tau)$, i.e., as σ-álgebras de Borel de (X,τ) e (X,τ_F) coincidem.*

Prova: Considere τ_F a topologia gerada por $\tau \cup \{F\}$. Note que F é aberto e fechado em relação a τ_F. Vamos mostrar que

$$\tau_F = \{V \cup (W \cap F) \,|\, V, W \in \tau\} =: \mathcal{T}. \tag{B.1}$$

Por um lado, é claro que todo conjunto da forma $V \cup (W \cap F)$, com $V, W \in \tau$, pertence a τ_F. Reciprocamente, note que se $\{V_\alpha \cup (W_\alpha \cap F)\}_\alpha$ é uma coleção arbitrária de conjuntos em $\mathcal{T}$, então

$$\bigcup_\alpha (V_\alpha \cup (W_\alpha \cap F)) = \left(\bigcup_\alpha V_\alpha\right) \cup \left(\left(\bigcup_\alpha W_\alpha\right) \cap F\right) \in \mathcal{T}.$$

E, se $\{V_n \cup (W_n \cap F)\}_{n=1}^m$ é um conjunto finito de elementos em $\mathcal{T}$, então

$$\bigcap_{n=1}^m (V_n \cup (W_n \cap F)) =$$

$$= \left(\bigcap_{n=1}^m V_n\right) \cup \left[\bigcup_{\{n_1,\ldots,n_k\}\subset\{1,\ldots,m\}} \left(\left(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{n_1,\ldots,n_k\}} V_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^k W_{n_j}\right)\right) \cap F\right],$$

onde a união no segundo conjunto do lado direito acima é feita sobre todos os subconjuntos próprios $\{n_1, \ldots, n_k\}$ de $\{1, \ldots, m\}$, com $1 \leq k \leq m$. Logo, $\mathcal{T}$ é fechado sob uniões arbitrárias e interseções finitas. Além disso, é claro que $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Portanto, $\mathcal{T}$ é uma topologia que contém $\tau \cup \{F\}$. Isto implica que $\tau_F \subset \mathcal{T}$.

Agora vamos mostrar que $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_F)$.

Como $\tau \subset \tau_F$, então $\sigma(\tau) \subset \sigma(\tau_F)$. E, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra que contém τ, então, como $F^c \in \tau$, temos que $F = (F^c)^c \in \mathcal{A}$. Logo, por (B.1), $\mathcal{A}$ contém τ_F. Sendo $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra arbitrária que contém τ, concluímos que $\sigma(\tau_F) \subset \sigma(\tau)$.

Resta mostrar que τ_F é uma topologia Polonesa.

Considere o espaço produto $X \times \{0,1\}$, onde $\{0,1\}$ está munido da topologia discreta. Pelo Teorema B.1.1, $X \times \{0,1\}$ é um espaço Polonês. Seja $G = (F \times \{0\}) \cup (F^c \times \{1\})$ e, para cada n, seja

$$N_{\frac{1}{n}}(F) = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x,F) = \inf\{d(x,y) : y \in F\} < \frac{1}{n} \right\},$$

onde d é uma métrica completa e compatível em (X,τ). Como F é um conjunto fechado, temos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}(F) = F.$$

Assim,

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} [(N_{\frac{1}{n}}(F) \times \{0\}) \cup (F^c \times \{1\})].$$

Portanto, G é um conjunto $\mathcal{G}_\delta$ em $X \times \{0,1\}$. Pelo Lema A.0.20, temos que G admite uma métrica completa compatível com a sua topologia.

Considere a função

$$\begin{aligned} f \;\; : \;\; & G \to (X,\tau_F) \\ & (x,n) \mapsto x. \end{aligned}$$

Note que f é bijetiva. Além disso, sendo F um conjunto aberto e fechado em (X,τ_F), não é difícil ver que f e sua inversa são contínuas. Portanto, f é um homeomorfismo.

Seja d_G uma métrica completa e compatível em G. Defina $d_F : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$d_F(x,y) = d_G(f^{-1}(x), f^{-1}(y)), \;\; \forall x,y \in X.$$

Sendo d_G uma métrica completa em G, segue imediatamente que d_F é uma métrica completa em X.

Seja $\{x_\alpha\}_\alpha$ uma rede em X tal que $d_F(x_\alpha, x) \to 0$ em X. Pela definição de d_F, isto ocorre se e só se $d_G(f^{-1}(x_\alpha), f^{-1}(x)) \to 0$ em G. Mas como d_G é uma métrica compatível em G então isto ocorre se e só se $f^{-1}(x_\alpha) \to f^{-1}(x)$ em relação à topologia produto em G. E, como f é um homeomorfismo, usando o Teorema 2.2.2 obtemos que isto também ocorre se e só se $x_\alpha \to x$ em (X, τ_F). Pelo Teorema 2.2.3, obtemos então que d_F é compatível em (X, τ_F). Logo, (X, τ_F) admite uma métrica completa compatível com sua topologia.

Como (X, τ) é um espaço separável, existe um subconjunto enumerável D denso em (X, τ). No entanto, pela caracterização de τ_F obtida acima, vê-se facilmente que D é também denso em (X, τ_F). Com isto, acabamos de mostrar que τ_F é uma topologia Polonesa. ■

Lema B.1.4 *Seja (X, τ) um espaço Polonês e seja $\{\tau_n\}_n$ uma sequência de topologias Polonesas em X tais que $\tau_n \supset \tau$, para todo n. Se τ_∞ é a topologia gerada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$ então τ_∞ é uma topologia Polonesa. Além disso, se $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_n)$, para todo n, então $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_\infty)$.*

Prova: Pelo Teorema B.1.1, $Y = \prod_{n=1}^{\infty}(X, \tau_n)$ é um espaço Polonês. Considere a função

$$\begin{aligned} f : (X, \tau_\infty) &\to Y \\ x &\mapsto (x, x, \ldots). \end{aligned}$$

É claro que f é injetiva. Além disso, se $\{f(x_\alpha)\}_\alpha$ é uma rede em $f(X)$ tal que $f(x_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha, \ldots) \to (y_1, y_2, \ldots)$ em relação à topologia produto em Y, então $x_\alpha \to y_n$ em (X, τ_n), donde $x_\alpha \to y_n$ em (X, τ), para todo n. Isto implica que $y_1 = y_2 = \ldots$. Ou seja, $y \in f(X)$. Logo, pelo Corolário 2.2.5, $f(X)$ é um subconjunto fechado de Y. Mas sendo Y um espaço Polonês, segue do Teorema B.1.3 que $f(X)$ é Polonês.

Agora vamos mostrar que f é um homeomorfismo.

Se $\{x_\alpha\}_\alpha$ é uma rede em X que satisfaz $x_\alpha \to x$ em (X, τ_∞), então como $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \subset \tau_\infty$, segue imediatamente que $x_\alpha \to x$ em (X, τ_n), para todo n. Logo, $f(x_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha, \ldots) \to (x, x, \ldots) = f(x)$ em relação à topologia produto em Y.

Por outro lado, seja $\{f(x_\alpha)\}_\alpha$ uma rede em $f(X)$ tal que $f(x_\alpha) \to f(x)$ em relação à topologia produto em Y. Então, $x_\alpha \to x$ em (X, τ_n), para todo n. Considere V uma vizinhança de x em (X, τ_∞). Sabemos que V se escreve como uma união arbitrária de interseções finitas de elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$. Assim, existe um conjunto finito $\{V_1, \ldots, V_m\}$ de elementos em $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$ tal que $x \in \bigcap_{i=1}^{m} V_i \subset V$. Portanto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe um índice α_i tal que $x_\alpha \in V_i$, para todo $\alpha \succeq \alpha_i$. Seja β um índice tal que $\beta \succeq \alpha_i$, para todo i (cf. item (iii) da definição de redes). Então $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^{m} V_i \subset V$, para todo $\alpha \succeq \beta$. Logo, $x_\alpha \to x$ em (X, τ_∞).

Portanto, pelo Teorema 2.2.2, temos que f é um homeomorfismo entre (X, τ_∞) e $f(X)$. Como $f(X)$ é Polonês, da mesma forma feita no final da demonstração anterior, obtemos que (X, τ_∞) é Polonês.

Agora suponha que $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_n)$, para todo n. Como, para cada n, (X, τ_n) é um espaço Polonês, então, pelo Teorema A.0.16, para cada n existe uma base enumerável $\{V_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ em (X, τ_n).

Como todo elemento de τ_n se escreve como união (enumerável) de elementos de $\{V_k^n\}_k$, então $\tau_n \subset \sigma(\{V_k^n\}_k)$. Logo, $\sigma(\tau_n) \subset \sigma(\{V_k^n\}_k)$. Mas como também $\{V_k^n\}_k \subset \tau_n \subset \sigma(\tau_n)$, então $\sigma(\{V_k^n\}_k) = \sigma(\tau_n) = \sigma(\tau)$, para todo n.

Agora considere a família de conjuntos $\{V_k^n\}_{k,n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_k^n\}_k$. Note que a topologia gerada por $\{V_k^n\}_{k,n}$ é igual à topologia gerada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$, i.e., τ_∞. Assim, cada elemento em τ_∞ se escreve como uma união (enumerável) de interseções finitas de elementos em $\{V_k^n\}_{k,n}$. Portanto, $\tau_\infty \subset \sigma(\{V_k^n\}_{k,n})$ e, consequentemente, $\sigma(\tau_\infty) \subset \sigma(\{V_k^n\}_{k,n})$. Além disso, como também $\{V_k^n\}_{k,n} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \subset \tau_\infty \subset \sigma(\tau_\infty)$, então $\sigma(\tau_\infty) = \sigma(\{V_k^n\}_{k,n})$.

Do mesmo modo, verifica-se que $\sigma(\{V_k^n\}_{k,n}) = \sigma(\tau)$. Logo, $\sigma(\tau_\infty) = \sigma(\tau)$. ■

Utilizando os dois lemas anteriores, obtemos o teorema abaixo.

Teorema B.1.5 *Seja $\{B_n\}_n$ uma sequência de subconjuntos de Borel em um espaço Polonês (X, τ). Então existe uma topologia Polonesa τ' em X tal que $\tau' \supset \tau$, $\sigma(\tau') = \sigma(\tau)$ e para a qual cada B_n é um conjunto aberto e fechado.*

Prova: Seja $\mathcal{A}$ a família formada por todos os subconjuntos $A \subset X$ para os quais existe uma topologia Polonesa τ_A sobre X tal que $\tau_A \supset \tau$, $\sigma(\tau_A) = \sigma(\tau)$ e para a qual A é aberto e fechado. Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra.

Dado $A \in \mathcal{A}$, se τ_A é a topologia correspondente satisfazendo as condições acima, então τ_A também satisfaz as mesmas condições para A^c, já que A^c também é aberto e fechado em relação a τ_A. Portanto, $A^c \in \mathcal{A}$.

Seja $\{A_k\}_k$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$. Então, para cada k, existe uma topologia Polonesa $\tau_k \supset \tau$ tal que $\sigma(\tau_k) = \sigma(\tau)$ e A_k é aberto e fechado em relação a τ_k. Pelo Lema B.1.4, a topologia τ_∞ gerada por $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau_k$ é uma topologia Polonesa tal que $\tau_\infty \supset \tau$ e $\sigma(\tau) = \sigma(\tau_\infty)$. E, como $A_k \in \tau_k \subset \tau_\infty$, para todo k, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \tau_\infty$. Portanto, $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c$ é um conjunto fechado em (X, τ_∞). Pelo Lema B.1.3, existe uma topologia Polonesa τ^* em X tal que $\tau^* \supset \tau_\infty \supset \tau$, $\sigma(\tau^*) = \sigma(\tau_\infty) = \sigma(\tau)$ e para a qual $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c$ é aberto e fechado. Logo, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Como também $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é de fato uma σ-álgebra. Pelo Lema B.1.3, $\mathcal{A}$ contém todos os subconjuntos fechados de X. Portanto, $\mathcal{A}$ contém também todos os subconjuntos de Borel em X, i.e., $\sigma(\tau) \subset \mathcal{A}$.

Seja $\{B_n\}_n$ uma sequência de conjuntos em $\sigma(\tau)$. Então, para cada n existe uma topologia Polonesa $\tau_n \supset \tau$ tal que $\sigma(\tau_n) = \sigma(\tau)$ e B_n é aberto e fechado em relação a τ_n. Assim, usando novamente o Lema B.1.4, temos que a topologia τ_∞ gerada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$ é uma topologia Polonesa que satisfaz $\tau_\infty \supset \tau$, $\sigma(\tau_\infty) = \sigma(\tau)$ e para a qual B_n é aberto e fechado, para todo n. $\blacksquare$

B.2 O Espaço de Baire

O espaço de Baire é definido como o conjunto $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, que, de acordo com a notação usual, representa o conjunto de funções que vão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Ou, em outras palavras, $\mathcal{N}$ é o conjunto de sequências de números naturais.

Assim, $\mathcal{N}$ também pode ser escrito como

$$\mathcal{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots .$$

Consideremos $\mathbb{N}$ munido da topologia discreta, i.e., a topologia na qual todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é um conjunto aberto. Assim, $\mathcal{N}$ é um espaço topológico munido da topologia produto correspondente. Além disso, usando que $\mathbb{N}$ é um espaço Polonês (basta considerar, por exemplo, a métrica discreta, que é a métrica definida por $d(n, m) = 0$ se $n = m$ e $d(n, m) = 1$ se $n \neq m$), segue diretamente do Teorema B.1.1 que $\mathcal{N}$ é um espaço Polonês.

Antes de definir explicitamente uma métrica em $\mathcal{N}$, definamos uma base para a sua topologia pela coleção de conjuntos da forma

$$U_{n_1,\dots,n_m} = \{n_1\} \times \{n_2\} \times \dots \times \{n_m\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots .$$

Para ver que esta coleção é de fato uma base, considere um elemento $(n_j) \in \mathcal{N}$ ($n_j \in \mathbb{N}$, para todo j) e seja V uma vizinhança de (n_j) em $\mathcal{N}$. Então, existe uma sequência $\{W_n\}_n$ de subconjuntos abertos de $\mathbb{N}$ tal que

$$(n_j) \in \prod_{n=1}^{\infty} W_n \subset V,$$

onde $W_n = \mathbb{N}$, a menos de um número finito de n's. Assim, se $k = \max\{n : W_n \neq \mathbb{N}\}$, então o conjunto

$$U_{n_1,\dots,n_k} = \{n_1\} \times \{n_2\} \times \dots \times \{n_k\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots$$

satisfaz

$$(n_j) \in U_{n_1,\dots,n_k} \subset \prod_{n=1}^{\infty} W_n \subset V,$$

mostrando que a coleção de conjuntos desta forma é de fato uma base.

Denotando por $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ o conjunto de sequências finitas em $\mathbb{N}$, i.e.,

$$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{N}^m,$$

podemos então representar esta base por

$$\{U_{n_1,\ldots,n_m} : (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}.$$

Agora considere a aplicação $t : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to [0,1]$ definida por

$$t((n_j),(m_j)) = \begin{cases} 0 & \text{se } (n_j) = (m_j) \\ \frac{1}{k} & \text{se } (n_j) \neq (m_j) \text{ e } k = \min\{j : n_j \neq m_j\} \end{cases}.$$

Lema B.2.1 *A aplicação t é uma métrica completa e compatível com a topologia produto de $\mathcal{N}$.*

Prova: Para a prova de que t é uma métrica, apenas a desigualdade triangular não é tão imediata. Para isto, considere $(n_j), (m_j)$ e (p_j) elementos distintos em $\mathcal{N}$. Sejam $k_1 = \min\{j : n_j \neq p_j\}$ e $k_2 = \min\{j : m_j \neq p_j\}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $k_1 \leq k_2$. Então,

$$n_j = p_j = m_j \,,\ \forall j \leq k_1.$$

E, portanto,

$$t((n_j),(m_j)) = \frac{1}{\min\{j : n_j \neq m_j\}} \leq \frac{1}{k_1} = t((n_j),(p_j)) \leq t((n_j),(p_j)) + t((p_j),(m_j)).$$

Agora vamos mostrar que t é completa.

Seja $\{(m_j^n)\}_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{N}$. Então, para cada k, existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$t((m_j^n),(m_j^{N_k})) < \frac{1}{k} \,,\ \forall n \geq N_k.$$

Então, $m_j^n = m_j^{N_k}$ para todo $j \leq k$ e para todo $n \geq N_k$.

Defina $(m_k) \in \mathcal{N}$ por $m_k = m_k^{N_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$ e seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$. Considere $N_0 = \max\{N_1, \ldots, N_{k_0}\}$. Então,

$$m_k^n = m_k^{N_k} = m_k \,,\ \forall k \leq k_0 \,,\ \forall n \geq N_0.$$

Logo,

$$t((m_k^n),(m_k)) < \frac{1}{k_0} < \varepsilon \,,\ \forall n \geq N_0.$$

Ou seja, $t((m_k^n),(m_k)) \to 0$, o que acaba de mostrar que t é completa.

Resta apenas mostrar que t é uma métrica compatível em $\mathcal{N}$. Mas para isto basta notar que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $(n_j) \in \mathcal{N}$,

$$B_{\frac{1}{m}}((n_j)) = U_{n_1,\ldots,n_m} = \{n_1\} \times \ldots \times \{n_m\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots.$$

Portanto, a base $\{B_{\frac{1}{m}}((n_j)) : m \in \mathbb{N}, (n_j) \in \mathcal{N}\}$ da topologia gerada por t em $\mathcal{N}$ coincide com a base $\{U_{n_1,\ldots,n_m} : (n_1,\ldots,n_m) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ da topologia produto. Logo, as duas topologias são iguais. ■

Considere agora o espaço produto $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ dado pelo conjunto de sequências de elementos em $\mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ é um espaço Polonês, segue do Teorema B.1.1 que $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ é Polonês. O teorema seguinte nos diz que $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ e $\mathcal{N}$ são indistinguíveis do ponto de vista topológico.

Teorema B.2.2 *O espaço Polonês $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ é homeomorfo a $\mathcal{N}$.*

Prova: Vamos construir, através de um processo indutivo, uma sequência $\{N_i\}_i$ de subconjuntos disjuntos e infinitos de $\mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i. \tag{B.2}$$

Fixe $N_1 = \{1,3,5,\ldots\}$, i.e., o subconjunto dos números ímpares. Assim, para cada $i \geq 1$, se

$$\mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i} N_j\right) = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\},$$

com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, então tome $N_{i+1} = \{n_1, n_3, n_5, \ldots\}$. Note que a sequência $\{N_i\}_i$ assim construída satisfaz as condições pedidas.

Para cada i, considere

$$N_i = \{k_1^i, k_2^i, \ldots\}.$$

E seja $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ a função definida, para cada $(n_l) \in \mathcal{N}$, por $f((n_l)) = ((n_j^1),(n_j^2),\ldots)$, onde $n_j^i = n_{k_j^i}$.

É claro que f é sobrejetiva. Além disso, se $(n_l), (m_l) \in \mathcal{N}$ são tais que $f((n_l)) = f((m_l))$, então

$$n_{k_j^i} = n_j^i = m_j^i = m_{k_j^i}\ ,\ \forall i, \forall j.$$

Logo, por (B.2), $(n_l) = (m_l)$. Isto mostra que f é injetiva. Agora vamos mostrar que f é contínua.

Seja $(n_l) \in \mathcal{N}$ e considere V uma vizinhança de $f((n_l))$ em $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \ldots,$$

onde V_i é aberto em $\mathcal{N}$ (podendo eventualmente ser igual ao próprio $\mathcal{N}$), para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. E também, para cada i, podemos supor que existe $p_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_i = V_i^1 \times \ldots \times V_i^{p_i} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots,$$

onde V_i^j é aberto em $\mathbb{N}$, para todo $j \in \{1, \ldots, p_i\}$.

Agora, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, defina

$$W_i = \prod_{j=1}^{\infty} W_i^j,$$

onde $W_i^{k_1^i} = V_i^1, \ldots, W_i^{k_{p_i}^i} = V_i^{p_i}$ e $W_i^j = \mathbb{N}$ se $j \notin \{k_1^i, \ldots, k_{p_i}^i\}$.

Então, se

$$W = \bigcap_{i=1}^{m} W_i,$$

temos que W é uma vizinhança de (n_l) em $\mathcal{N}$ tal que $f(W) \subset V$. Logo, f é contínua.

Para mostrar que f é um homeomorfismo, resta provar que a inversa de f é contínua. Denotaremos esta inversa por $g : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$, a qual é definida, para cada $((n_j^1), (n_j^2), \ldots) \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$, por $g((n_j^1), (n_j^2), \ldots) = (n_l)$, onde $n_{k_j^i} = n_j^i$.

Sejam $((n_j^1), (n_j^2), \ldots) \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ e W uma vizinhança de $g((n_j^1), (n_j^2), \ldots)$ em $\mathcal{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que W é da forma

$$W = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_m \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots,$$

onde W_i é aberto em $\mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, sejam $i_l, j_l \in \mathbb{N}$ tais que $l = k_{j_l}^{i_l}$. Seja V o subconjunto de $\mathcal{N}$ definido por

$$V = \prod_{n=1}^{\infty} V_n,$$

onde $V_n = \mathcal{N}$ se $n \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$ e, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$,

$$V_{i_l} = \prod_{j=1}^{\infty} V_{i_l}^j,$$

onde $V_{i_l}^j = W_l$ se $j = j_l$ e $V_{i_l}^j = \mathbb{N}$, caso contrário.

Note que V é uma vizinhança de $((n_j^1), (n_j^2), \ldots)$ tal que $g(V) \subset W$. Logo, g é contínua. ■

Obs.: Há uma outra demonstração para o teorema acima que utiliza um raciocínio mais simples.

Considere a aplicação $f : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ definida por

$$f((\mathbf{n}^j)_j) = (n_k^j)_{(j,k)},$$

onde $(\mathbf{n}^j)_j$ é a sequência em $\mathcal{N}$ representada pela função

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \to \mathcal{N} \\ &j \mapsto \mathbf{n}^j = (n_k^j)_k. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Seja $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$ a aplicação definida por

$$g((n_k^j)_{(j,k)}) = (m_i)_i,$$

onde $m_i = n_k^j$, sendo $(j,k) = \varphi^{-1}(i)$.

Consideremos o espaço $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ munido da topologia gerada pela família de aplicações $\{P_{j,k}\}_{(j,k)}$, dadas por

$$\begin{aligned} P_{j,k} \quad : \quad & \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \\ & (n_k^j)_{(j,k)} \mapsto n_k^j\,, \end{aligned}$$

i.e., é a menor topologia para a qual todas as aplicações $P_{j,k}$ são contínuas.

Utilizando esta topologia, mostra-se que f e g são homeomorfismos, donde conclui-se que $g \circ f : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{N}$ é um homeomorfismo. $\square$

Antes de prosseguirmos, daremos uma definição.

Definição Seja A um subconjunto não-vazio de um espaço topológico X. Dizemos que A é uma *retração* de X se existe uma função contínua $f : X \to A$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in A$. Ou seja, todo elemento de A é um ponto fixo de f. Além disso, dizemos que f é uma *retração* de X em A.

Observe que toda retração f de um espaço topológico X em um subconjunto A é uma aplicação sobrejetiva, já que $A = f(A) \subset f(X)$.

Lema B.2.3 *Se $F \subset \mathcal{N}$ é um subconjunto fechado e não-vazio, então F é uma retração de $\mathcal{N}$.*

Prova: Primeiramente, vamos construir indutivamente uma sequência de subconjuntos fechados e não-vazios de F.

Fixe um elemento $(n_j) \in \mathcal{N}$. Para simplificar, denotaremos também $(n_j) = \mathbf{n}$.

Considere $F_0^{\mathbf{n}} = F$. Assim, para cada $k \geq 0$, construímos $F_{k+1}^{\mathbf{n}}$ da seguinte forma:

Se existe $(m_j) \in F_k^{\mathbf{n}}$ tal que $m_{k+1} = n_{k+1}$, então

$$F_{k+1}^{\mathbf{n}} = \{(m_j) \in F_k^{\mathbf{n}} \,|\, m_{k+1} = n_{k+1}\}.$$

Caso contrário, definimos

$$F_{k+1}^{\mathbf{n}} = \{(m_j) \in F_k^{\mathbf{n}} \,|\, m_{k+1} = \min\{p_{k+1} : p \in F_k^{\mathbf{n}}\}\}.$$

Note que a sequência $\{F_k^{\mathbf{n}}\}_k$ assim formada é decrescente e cada $F_k^{\mathbf{n}}$ é não-vazio. Vamos mostrar que cada $F_k^{\mathbf{n}}$ também é fechado em relação à métrica t.

Sejam $\{(m_j^n)\}_n$ uma sequência em $F_k^{\mathbf{n}}$ e $(m_j) \in \mathcal{N}$ tais que $t((m_j^n),(m_j)) \to 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$t((m_j^N),(m_j)) < \frac{1}{k}.$$

Portanto, $m_j = m_j^N$ para todo $j \leq k$, e isto implica que $(m_j) \in F_k^{\mathbf{n}}$. Logo, $F_k^{\mathbf{n}}$ é fechado, para todo k.

Além disso, como todo elemento em $F_k^{\mathbf{n}}$ assume o mesmo valor até o índice k, temos que

$$diam(F_k^{\mathbf{n}}) \leq \frac{1}{k}\,,\ \forall k.$$

Portanto, pelo Teorema A.0.18, existe um único elemento pertencente a $F_k^{\mathbf{n}}$ para todo k. Considere a função $f : \mathcal{N} \to F$ definida por

$$\{f(\mathbf{n})\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^{\mathbf{n}}\,,\ \forall \mathbf{n} = (n_j) \in \mathcal{N}.$$

Por construção, segue diretamente que $f(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, para todo $\mathbf{n} \in F$. Agora vamos mostrar que f é contínua.

Sejam $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ e $\varepsilon > 0$. Considere $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$.

Observe que se $\mathbf{m} = (m_j) \in B_{\frac{1}{k_0}}(\mathbf{n})$, então

$$m_j = n_j\,,\ \forall j \leq k_0,$$

o que implica

$$F_j^{\mathbf{n}} = F_j^{\mathbf{m}}\,,\ \forall j \leq k_0,$$

e consequentemente

$$f(\mathbf{n})_j = f(\mathbf{m})_j\,,\ \forall j \leq k_0.$$

Logo,

$$t(f(\mathbf{n}), f(\mathbf{m})) < \frac{1}{k_0} < \varepsilon,$$

o que mostra que f é contínua. Portanto, f é uma retração de $\mathcal{N}$ em F. ■

O teorema a seguir nos diz que todo espaço Polonês é a imagem por uma aplicação injetiva e contínua de um subconjunto fechado do espaço de Baire.

Teorema B.2.4 *Se X é um espaço Polonês, então existem um subconjunto fechado F de $\mathcal{N}$ e uma bijeção contínua $f : F \to X$.*

Prova: Inicialmente, vamos mostrar que para todo subconjunto A de X que é $\mathcal{F}_\sigma$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência de conjuntos $\{B_n\}_n$ dois a dois disjuntos tal que cada B_n é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$, $diam(B_n) \leq \varepsilon$, $\overline{B}_n \subset A$ e

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Seja d uma métrica completa e compatível em X. Se A é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$, então A pode ser escrito como

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

onde cada F_n é um conjunto fechado em relação a d.

Como X é separável, existe um subconjunto enumerável e denso $\{x_m\}_m$. Para cada m, considere a bola fechada $\overline{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_m)$. E, para cada n e cada m, seja $D_{n,m} = F_n \cap \overline{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_m)$. Note que cada $D_{n,m}$ é um conjunto fechado e

$$A = \bigcup_{n,m} D_{n,m}.$$

Além disso, como $D_{n,m} \subset \overline{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_m)$, então diam$D_{n,m} \leq \varepsilon$, para todo n e todo m.

Para simplificar, vamos reescrever a união acima como

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

onde cada C_n é um conjunto fechado tal que $diam(C_n) \leq \varepsilon$.

Agora, considere $B_1 = C_1$ e, para cada $n \geq 1$,

$$B_{n+1} = C_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^{n} C_m.$$

Note que $\{B_n\}_n$ é uma sequência de conjuntos disjuntos. Como $B_n \subset C_n$, temos que $diam(B_n) \leq \varepsilon$. E, como C_n é fechado, então $\overline{B}_n \subset C_n \subset A$.

Além disso, como todo conjunto aberto é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$, então o complementar de $\bigcup_{m=1}^n C_m$ é $\mathcal{F}_\sigma$. Disto segue que B_n também é um conjunto $\mathcal{F}_\sigma$, para todo n. Como também

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

então vemos que a sequência de conjuntos $\{B_n\}_n$ satisfaz as condições pedidas.

Portanto, em particular, podemos escrever

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

onde $\{A_n\}_n$ é uma sequência de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ e disjuntos tais que $diam(A_n) \leq 1/2$. Mas, para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, também podemos escrever

$$A_{n_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n_1,n},$$

onde $\{A_{n_1,n}\}_n$ é uma sequência de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ e disjuntos tais que $diam(A_{n_1,n}) \leq 1/4$ e $\overline{A_{n_1,n}} \subset A_{n_1}$. Prosseguindo indutivamente neste processo, para cada $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ obtém-se um subconjunto $\mathcal{F}_\sigma$ $A_{n_1,\ldots,n_m}$ tal que $diam(A_{n_1,\ldots,n_m}) \leq 1/2^m$ e para o qual existe uma sequência de conjuntos $\mathcal{F}_\sigma$ e disjuntos $\{A_{n_1,\ldots,n_m,n}\}_n$ tais que

$$\overline{A_{n_1,\ldots,n_m,n}} \subset A_{n_1,\ldots,n_m} \tag{B.3}$$

e

$$A_{n_1,\ldots,n_m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_m,n}.$$

Para cada $(n_j) \in \mathcal{N}$, considere a sequência de conjuntos fechados $\{\overline{A_{n_1,\ldots,n_k}} : k \in \mathbb{N}\}$. Note que esta sequência é decrescente e que $diam(\overline{A_{n_1,\ldots,n_k}}) \to 0$. Agora seja F o conjunto definido por

$$F = \{(n_j) \in \mathcal{N} : A_{n_1,\ldots,n_k} \neq \emptyset, \forall k\}.$$

Assim, usando o Teorema A.0.18, podemos definir a função

$$\begin{aligned} f \;:\; & F \to X \\ & (n_j) \mapsto \{f((n_j))\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_{n_1,\ldots,n_k}}. \end{aligned}$$

Por (B.3), temos também que

$$f((n_j)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Como, para cada $x \in X$, existe A_{n_1} tal que $x \in A_{n_1}$ e, por sua vez, existe A_{n_1,n_2} tal que $x \in A_{n_1,n_2}$ e assim por diante, então $F \neq \emptyset$ e f é sobrejetiva. Além disso, como os conjuntos da sequência $\{A_{n_1,\ldots,n_m,n}\}$ são disjuntos, para todo n, então f também é injetiva.

Agora vamos mostrar que f é contínua.

Sejam $(n_j) \in F$ e $\varepsilon > 0$. Considere um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$. Então, para todo $(m_j) \in B_{\frac{1}{k_0}}((n_j))$ temos que $m_j = n_j$, para todo $j \leq k_0$ e, consequentemente, $A_{n_1,\ldots,n_{k_0}} = A_{m_1,\ldots,m_{k_0}}$. Mas como $f((n_j)) \in A_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ e $f((m_j)) \in A_{m_1,\ldots,m_{k_0}}$, então

$$d(f((n_j)), f((m_j))) \leq diam(A_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) = diam(A_{m_1,\ldots,m_{k_0}}) \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Logo, f é contínua.

Para completar a prova, resta apenas mostrar que F é um conjunto fechado. Para isto, vamos mostrar que F^c, o complementar de F em $\mathcal{N}$, é aberto.

Seja $(n_j) \in F^c$. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_1,\ldots,n_k} = \emptyset$. Observe que se $(m_j) \in B_{\frac{1}{k}}((n_j))$, então $m_j = n_j$, para todo $j \leq k$ e, consequentemente, $A_{m_1,\ldots,m_k} = A_{n_1,\ldots,n_k} = \emptyset$, ou seja, $(m_j) \in F^c$. Logo, $B_{\frac{1}{k}}((n_j)) \subset F^c$, o que mostra que F^c é aberto. ■

Na verdade, utilizando o Lema B.2.3, obtemos também que todo espaço Polonês é a imagem por uma aplicação contínua do espaço de Baire.

Corolário B.2.5 *Se X é um espaço Polonês, então existe uma função contínua $f : \mathcal{N} \to X$ tal que $f(\mathcal{N}) = X$.*

Prova: De fato, pelos Teoremas B.2.3 e B.2.4, existem um subconjunto fechado $F \subset \mathcal{N}$, uma bijeção contínua $g : F \to X$ e uma retração $h : \mathcal{N} \to F$ de $\mathcal{N}$ em F. Assim, basta considerar a função contínua $f = g \circ h$. ■

Na demonstração do teorema anterior, construímos uma família de conjuntos em que cada conjunto era representado por uma sequência finita $(n_1, \ldots, n_k)$ de números naturais. Este tipo de família recebe um nome especial.

Definição Dizemos que uma família de conjuntos indexada por $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, i.e., uma família da forma $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ é um *esquema de Suslin*. E definimos o *núcleo* do esquema de Suslin por

$$\mathcal{A}(A_s) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1, \ldots, n_k}.$$

O teorema abaixo mostra que o resultado do teorema anterior também é válido para todo subconjunto de Borel de um espaço Polonês.

Teorema B.2.6 *Seja B um subconjunto de Borel de um espaço Polonês (X, τ). Então existem um subconjunto fechado F de $\mathcal{N}$ e uma bijeção contínua $f : F \to B$.*

Prova: Pelo Teorema B.1.5, existe uma topologia Polonesa τ' tal que $\tau' \supset \tau$ e para a qual B é fechado. Logo, B é um subconjunto fechado do espaço Polonês (X, τ'). Pela Proposição B.1.2, (B, τ'_B) é um espaço Polonês, onde $\tau'_B = \{V \cap B \,|\, V \in \tau'\}$. Pelo Teorema B.2.4, existem um subconjunto fechado F do espaço de Baire $\mathcal{N}$ e uma bijeção contínua $f : F \to (B, \tau'_B)$. Mas como $\tau' \supset \tau$, então $f : F \to (B, \tau_B)$ também é uma bijeção contínua, onde $\tau_B = \{V \cap B \,|\, V \in \tau\}$. ■

B.3 Primeiros Resultados Sobre Conjuntos Analíticos

Começamos esta seção com a prova do item (ii) do Teorema 2.5.1 sobre conjuntos analíticos, que segue imediatamente dos resultados anteriores.

Teorema B.3.1 *Se B é um subconjunto de Borel não-vazio de um espaço Polonês (X, τ), então B é a imagem por uma aplicação contínua do espaço de Baire $\mathcal{N}$ e, portanto, é um conjunto analítico.*

Prova: Pelo Teorema B.2.6, existem um subconjunto fechado F de $\mathcal{N}$ e uma bijeção contínua $g : F \to B$. E, pelo Teorema B.2.3, existe uma função contínua $h : \mathcal{N} \to F$ tal que $h(\mathcal{N}) = F$. Logo, $f = g \circ h : \mathcal{N} \to B$ é uma função contínua tal que $f(\mathcal{N}) = g(h(\mathcal{N})) = g(F) = B$. ■

Além disso, pelo Corolário B.2.5 temos que todo espaço Polonês é um conjunto analítico nele mesmo. Com isto, obtemos a seguinte Proposição.

Proposição B.3.2 *Sejam X um espaço Polonês e A um subconjunto não-vazio de X. Então, A é analítico se e somente se A é a imagem por uma aplicação contínua de um espaço Polonês.*

Prova: Suponha que exista um espaço Polonês Y e uma função contínua e sobrejetiva $g : Y \to A$. Como Y também é um conjunto analítico (e não-vazio), existe uma função contínua e sobrejetiva $h : \mathcal{N} \to Y$. Assim, $f = g \circ h : \mathcal{N} \to A$ é uma função contínua e sobrejetiva. Logo, A é analítico.

A recíproca segue diretamente do fato que $\mathcal{N}$ é um espaço Polonês. ■

A seguir apresentamos a demonstração do item (iii) do Teorema 2.5.1.

Teorema B.3.3 *A família de subconjuntos analíticos de um espaço Polonês é fechada sob uniões enumeráveis e interseções enumeráveis.*

Prova: Sejam X um espaço Polonês e $\{A_k\}_k$ uma sequência de subconjuntos analíticos em X. Seja $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Se $A = \emptyset$ então A é analítico. Suponha então que $A \neq \emptyset$. Assim, $A_k \neq \emptyset$, para todo k. Portanto, para cada k, existe uma função contínua e sobrejetiva $f_k : \mathcal{N} \to A_k$. Considere D o subconjunto de $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ dado por

$$D = \{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots) \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \mid f_1(\mathbf{n}_1) = f_2(\mathbf{n}_2) = \ldots = f_k(\mathbf{n}_k) = \ldots\}.$$

Seja $\{(\mathbf{n}_1^\alpha, \mathbf{n}_2^\alpha, \ldots)\}_\alpha$ uma rede em D tal que $(\mathbf{n}_1^\alpha, \mathbf{n}_2^\alpha, \ldots) \to (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots)$ em $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$. Então $\mathbf{n}_i^\alpha \to \mathbf{n}_i$ em $\mathcal{N}$, para todo i. E como f_i é contínua, então $f_i(\mathbf{n}_i^\alpha) \to f_i(\mathbf{n}_i)$, para todo i. Mas sendo $\{(\mathbf{n}_1^\alpha, \mathbf{n}_2^\alpha, \ldots)\}_\alpha$ uma rede em D, temos que $\{f_i(\mathbf{n}_i^\alpha)\}_\alpha$ é a mesma rede, para todo i. Portanto, pela unicidade do limite de redes, $f_1(\mathbf{n_1}) = f_2(\mathbf{n}_2) = \ldots$. Logo, $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots) \in D$, o que mostra que D é fechado. Mas, pelo Teorema B.2.2, temos que $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ é um espaço Polonês. Portanto, pela Proposição B.1.2, D também é um espaço Polonês.

Considere a função $f : D \to X$ dada por $f((\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots)) = f_k(\mathbf{n}_k)$, para qualquer k. Note que, pela definição de D, f está bem definida. Além disso, como cada f_k é contínua, então f também é contínua.

Vamos mostrar que $f(D) = A$. De fato, se $y \in f(D)$ então, pela definição de f, $y \in A_k$ para todo k. Reciprocamente, se $y \in A$, então para cada k existe $\mathbf{n}_k \in \mathcal{N}$ tal que $y = f_k(\mathbf{n}_k)$. Portanto, $y = f((\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots))$ e $f_1(\mathbf{n_1}) = f_2(\mathbf{n}_2) = \ldots$. Logo, $y \in f(D)$.

Assim, como D é um espaço Polonês, pela Proposição B.3.2 temos que A é analítico.

Resta mostrar que $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ é um conjunto analítico. Sem perda de generalidade, podemos supor que $A_k \neq \emptyset$, para todo k.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere

$$U_k = \{k\} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \ldots .$$

Note que $\bigcup_{k=1}^\infty U_k = \mathcal{N}$. Seja $h_k : U_k \to \mathcal{N}$ a função definida por $h((k, n_1, n_2, \ldots)) = (n_1, n_2, \ldots)$. Não é difícil verificar que h_k é um homeomorfismo.

Como cada A_k é um conjunto analítico, para cada k existe uma função contínua e sobrejetiva $g_k : \mathcal{N} \to A_k$. Então a função $p_k = g_k \circ h_k : U_k \to A_k$ é contínua e sobrejetiva. Agora considere a função $p : \mathcal{N} \to X$ tal que $p_{|U_k} = p_k$. Como cada p_k é contínua e sobrejetiva, então p é contínua e $p(\mathcal{N}) = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Logo, $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ é analítico. ■

B.4 Mensurabilidade de Conjuntos Analíticos

Reservamos esta seção para a prova do Teorema 2.5.3 enunciado na seção 2.5 sobre a mensurabilidade de conjuntos analíticos.

A menos de menção em contrário, consideraremos sempre que μ é uma medida de probabilidade de Borel em um espaço Polonês X. Mostraremos várias propriedades da aplicação μ^* correspondente, as quais serão necessárias na demonstração do resultado final.

Lembramos que a notação $\mathcal{P}(X)$ refere-se ao conjunto das partes de um conjunto X.

Proposição B.4.1 *Seja μ uma medida de probabilidade de Borel em um espaço Polonês X. Então a aplicação μ^*, definida para todo subconjunto $A \subset X$ por*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \,|\, B \in \mathcal{B}(X),\, A \subset B\},$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $\{K_n\}_n$ é uma sequência de compactos tal que $K_n \downarrow K$, então $\mu^*(K_n) \downarrow \mu^*(K)$;

(iii) Dado $A \subset X$, existe $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subset B$ e $\mu^*(A) = \mu(B)$;

(iv) Se $A_n \uparrow A$ em $\mathcal{P}(X)$ então $\mu^*(A_n) \uparrow \mu^*(A)$.

Prova: (i) Já sabemos que μ^* coincide com μ em $\mathcal{B}(X)$. Portanto, sendo $\emptyset$ um conjunto de Borel e μ uma medida, temos que $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Como $K \in \mathcal{B}(X)$ e $\{K_n\}_n \subset \mathcal{B}(X)$, então $\mu^*(K) = \mu(K)$ e $\mu^*(K_n) = \mu(K_n)$, para todo n. Portanto, sendo μ uma medida finita, isto segue diretamente do item (ii) da Proposição 2.4.2.

(iii) Pela definição de μ^*, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subset B_n$ e

$$\mu(B_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Considere $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Então $B \in \mathcal{B}(X)$, $A \subset B$ e

$$\mu^*(A) \leq \mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}\,,\ \forall n.$$

Logo, tomando o limite quando $n \to \infty$ acima, obtemos que $\mu(B) = \mu^*(A)$.

(iv) Pelo item (iii), existem $B \in \mathcal{B}(X)$ e uma sequência $\{B_n\}_n \subset \mathcal{B}(X)$ tais que $\mu^*(A) = \mu(B)$ e $\mu^*(A_n) = \mu(B_n)$, para todo n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja o conjunto de Borel $E_n = (\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k) \cap B$. Então observe que $A_n \subset E_n \subset B_n$, para todo n. E, se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, também temos que $A \subset E \subset B$. Portanto,

$$\mu^*(A_n) \leq \mu(E_n) \leq \mu(B_n) = \mu^*(A_n)$$

e

$$\mu^*(A) \leq \mu(E) \leq \mu(B) = \mu^*(A).$$

Logo, $\mu^*(A_n) = \mu(E_n)$ e $\mu^*(A) = \mu(E)$. Assim, pelo item (i) da Proposição 2.4.2, temos que $\mu^*(A_n) = \mu(B_n) \uparrow \mu(B) = \mu^*(A)$. ■

Lema B.4.2 *Se A é um subconjunto analítico de um espaço Polonês X, então existe um esquema de Suslin $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ cujo núcleo é A, i.e., $A = \mathcal{A}(A_s)$, e tal que*

(i) A_s é analítico, para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$;

(ii) Para toda sequência finita $(n_1, \ldots, n_k)$ temos que $A_{n_1,\ldots,n_k,j} \uparrow A_{n_1,\ldots,n_k}$;

(iii) Para todo $\mathbf{n} = (n_j) \in \mathcal{N}$, o conjunto $A_{\mathbf{n}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_j}$ é compacto;

(iv) Se $\mathbf{n} = (n_j) \in \mathcal{N}$ e V é um conjunto aberto em X tal que $A_{\mathbf{n}} \subset V$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_1,\ldots,n_j} \subset V$.

Prova: Se $A = \emptyset$, então basta considerar $A_s = \emptyset$, para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Suponha então que $A \neq \emptyset$ e seja $f : \mathcal{N} \to A$ uma função contínua e sobrejetiva.

Para cada $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, seja o conjunto

$$V_{n_1,\ldots,n_k} = \{(m_j) \in \mathcal{N} \,|\, m_j \leq n_j, \, j = 1, \ldots, k\}.$$

E, para cada $\mathbf{n} = (n_j) \in \mathcal{N}$, seja

$$V_{\mathbf{n}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} V_{n_1,\ldots,n_j} = \{(m_j) \in \mathcal{N} \,|\, m_j \leq n_j, \, \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Note que $V_{\mathbf{n}}$ também pode ser escrito como

$$V_{\mathbf{n}} = \prod_{j=1}^{\infty} \{1, \ldots, n_j\}.$$

Assim, como $\{1, \ldots, n_j\}$ é um conjunto compacto em $\mathbb{N}$, para todo j, pelo Teorema A.0.21 temos que $V_{\mathbf{n}}$ é um conjunto compacto.

Seja $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ o esquema de Suslin definido por $A_{n_1,\ldots,n_k} = f(V_{n_1,\ldots,n_k})$.

Como todo $V_{n_1,\ldots,n_k}$ é um subconjunto fechado do espaço Polonês $\mathcal{N}$, então $V_{n_1,\ldots,n_k}$ é analítico. Portanto, como f é contínua, pelo item (i) do Teorema 2.5.1 temos que $A_{n_1,\ldots,n_k}$ é analítico, para todo $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Além disso, como $V_{n_1,\ldots,n_k,j} \subseteq V_{n_1,\ldots,n_k,j+1}$, para todo j, e $V_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{n_1,\ldots,n_k,j}$, então $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ satisfaz o item (ii).

Vamos mostrar que $A_{\mathbf{n}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_j}$ é compacto. Seja $x \in A_{\mathbf{n}}$. Então, como $A_{n_1,\ldots,n_j} = f(V_{n_1,\ldots,n_j})$, para cada j existe $\mathbf{n}_j \in V_{n_1,\ldots,n_j}$ tal que $f(\mathbf{n}_j) = x$. Mas como as coordenadas dos termos da sequência $\{\mathbf{n}_k\}_k$ pertencem a subconjuntos limitados de $\mathbb{N}$, por um processo de diagonalização obtém-se uma subsequência $\{\mathbf{n}_{k_i}\}_i$ convergente a um elemento $\mathbf{m} \in V_{\mathbf{n}}$. Assim, como $f(\mathbf{n}_{k_i}) = x$, para todo i, então $f(\mathbf{m}) = x$. Portanto, $x \in f(V_{\mathbf{n}})$. Por outro lado, é claro que $f(V_{\mathbf{n}}) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} f(V_{n_1,\ldots,n_j}) = A_{\mathbf{n}}$. Logo, $f(V_{\mathbf{n}}) = A_{\mathbf{n}}$ e, como f é contínua e $V_{\mathbf{n}}$ é compacto, então $A_{\mathbf{n}}$ é compacto, o que prova o item (iii).

Agora considere um conjunto aberto V em X tal que $A_{\mathbf{n}} \subset V$ e suponha por contradição que para cada j existe $\mathbf{n}_j \in V_{n_1,\ldots,n_j}$ tal que $f(\mathbf{n}_j) \in V^c$. Novamente por um processo de diagonalização obtém-se uma subsequência convergente a um elemento $\mathbf{m} \in V_{\mathbf{n}}$ e, sendo f contínua e V^c um conjunto fechado, temos que $f(\mathbf{m}) \in f(V_{\mathbf{n}}) \cap V^c = A_{\mathbf{n}} \cap V^c$. Mas isto é um absurdo, pois $A_{\mathbf{n}} \cap V^c = \emptyset$. Isto mostra o item (iv).

Resta apenas verificar que A é o núcleo do esquema de Suslin $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$. Para isto, observe que

$$\mathcal{A}(A_s) = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_j} = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}} f(V_{\mathbf{n}}) = f\left(\bigcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}} V_{\mathbf{n}}\right) = f(\mathcal{N}) = A. \qquad \blacksquare$$

A seguir apresentamos uma propriedade da aplicação μ^* relacionada a conjuntos analíticos, que nos será essencial.

Lema B.4.3 *Se A é um subconjunto analítico de um espaço Polonês X, então*

$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \textit{ é compacto e } K \subset A\}.$$

Prova: Se $\mu^*(A) = 0$, então basta usar o fato que $\emptyset$ é um conjunto compacto. Suponha então que $\mu^*(A) > 0$.

Seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mu^*(A) > \varepsilon_0$. Basta mostrar que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ existe um conjunto compacto $K_\varepsilon \subset A$ tal que $\mu^*(A) - \varepsilon \leq \mu(K_\varepsilon)$. Considere então $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \varepsilon_0$ e seja $\alpha_\varepsilon = \mu^*(A) - \varepsilon > 0$.

Seja $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ um esquema de Suslin satisfazendo os itens $(i) - (iv)$ do Lema anterior. Como $A_k \uparrow A$ e $\mu^*(A) > \alpha_\varepsilon$, pelo item (iv) da Proposição B.4.1 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^*(A_{n_1}) > \alpha_\varepsilon$. Assim, como também $A_{n_1,k} \uparrow A$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^*(A_{n_1,n_2}) > \alpha_\varepsilon$. Prosseguindo indutivamente deste modo, obtemos $\mathbf{n} = (n_j) \in \mathcal{N}$ tal que

$$\mu^*(A_{n_1,\ldots,n_j}) > \alpha_\varepsilon\,,\ \forall j. \tag{B.4}$$

Seja $A_{\mathbf{n}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_j}$. Já sabemos que $A_{\mathbf{n}}$ é um conjunto compacto. Vamos mostrar que $\mu^*(A_n) \geq \alpha_\varepsilon$.

Suponha, por contradição, que $\mu^*(A_{\mathbf{n}}) < \alpha_\varepsilon$. Assim, como $A_{\mathbf{n}}$ é um conjunto de Borel e a restrição de μ^* a $\mathcal{B}(X)$ é uma medida regular (cf. Proposição 2.4.6), existe um conjunto aberto V em X tal que $\mu^*(A_{\mathbf{n}}) \leq \mu(V) < \alpha_\varepsilon$. Portanto, pelo item (iv) do Lema B.4.2, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_1,\ldots,n_j} \subset V$. Logo, usando também (B.4), obtemos que

$$\alpha_\varepsilon < \mu^*(A_{n_1,\ldots,n_j}) \leq \mu(V) < \alpha_\varepsilon,$$

o que é um absurdo. ■

Agora estamos prontos para mostrar o resultado sobre mensurabilidade de conjuntos analíticos.

Teorema B.4.4 *Se A é um subconjunto analítico de um espaço Polonês X então A é universalmente mensurável.*

Prova: Seja μ uma medida de probabilidade definida em uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ completa tal que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Queremos mostrar que $A \in \mathcal{A}$.

Pelo item (iii) da Proposição B.4.1, existe $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subset B$ e $\mu(B) = \mu^*(A)$. Pelo Lema anterior, para cada n existe um conjunto compacto $K_n \subset A$ tal que

$$\mu(B) = \mu^*(A) \leq \mu(K_n) + \frac{1}{n}.$$

Considere o conjunto de Borel $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Como $E \subset A \subset B$, temos que

$$\mu(B \setminus E) = \mu(B) - \mu(E) \leq \mu(B) - \mu(K_n) \leq \frac{1}{n}\,,\ \forall n.$$

Assim, $B \setminus E$ é um conjunto de Borel tal que $\mu(B \setminus E) = 0$ e $B \setminus E \supset A \setminus E$. Como $\mathcal{A}$ é completa, então $A \setminus E \in \mathcal{A}$. Além disso, como $A = E \cup (A \setminus E)$ e $E \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$, então $A \in \mathcal{A}$. ■

Bibliografia

[1] C. Foias, R. Rosa e R. Temam, “Properties of Time-Dependent Statistical Solutions of the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations” (a ser publicado).

[2] C. Foias, R. Rosa e R. Temam, “Properties of Stationary Statistical Solutions of the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations” (a ser publicado).

[3] R. G. Bartle, “The Elements of Integration and Lebesgue Measure”, John Wiley & Sons (1995).

[4] C. Isnard, “Introdução à Medida e Integração”, Projeto Euclides, IMPA (2007).

[5] J. L. Lions, “Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod (1969).

[6] W. Rudin, “Functional Analysis”, 2ª ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill International Editions (1991).

[7] H. Brézis, “Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications”, Masson (1983).

[8] E. L. Lima, “Espaços Métricos”, Projeto Euclides, IMPA (2003).

[9] C. D. Aliprantis e K. C. Border, “Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker’s Guide”, 2ª ed., Springer (1999).

[10] J. P. Aubin, “Applied Functional Analysis”, John Wiley & Sons (1979).

[11] N. Dunford, J. Schwartz, “Linear Operators, Part I: General Theory”, John Wiley & Sons (1988).

[12] R. E. Edwards, “Functional Analysis: Theory and Applications”, Dover (1995).

[13] P. R. Halmos, “Measure Theory”, Springer (1974).

[14] E. Hille, R. Philips, “Functional Analysis and Semi-Groups”, Colloquium Publications, Vol.31, AMS.

[15] A. W. Naylor e G. R. Sell, “Linear Operator Theory in Engineering and Science”, Springer (1982).

[16] J. C. Robinson, “Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors”, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press (2001).

[17] R. Temam, “Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis”, SIAM (1983).

[18] K. Yosida, “Functional Analysis”, 6ª ed., Springer (1980).