UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

OS TEOREMAS DE KASPAROV E BROWN-GREEN-RIEFFEL

Aleksandro de Mello

Rio de Janeiro, 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Mello, Aleksandro de.

Os Teoremas de Kasparov e Brown-Green-Rieffel/ Aleksandro de Mello.-

Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2010.

v, 128p.

Orientador: Antônio Roberto da Silva

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2010.

Referências Bibliográficas: p.128.

1. Preliminares.
2. C*-Módulos de Hilbert.
3. Equivalência de Morita.
4. Teorema de Kasparov e Teorema de Brown-Green-Rieffel.

I. Silva, Antônio Roberto II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática. III. Título.

Aos meus queridos pais:
Prudêncio Frederico de Mello
e
Hilda Maria de Mello

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela graça da vida e por mais uma conquista em minha vida.

Aos meus pais, Dêncio e Hilda, por todo incentivo e confiança que sempre depositaram em mim.

À minha querida irmã, Cristiane, grande amiga e motivadora em todos os momentos.

À minha namorada, Juliana, pelo carinho e paciência nos momentos mais difíceis.

À minha família Mattos, pela compreensão e incentivo, em especial a Osmar e Isabel Mattos.

Ao meu orientador, Antônio Roberto da Silva, pela sua dedicação, orientação e inestimável apoio ao longo deste trabalho.

Finalmente, agradeço a todos, amigos e colegas, que me apoiaram e ajudaram em todos os momentos.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos inicialmente alguns resultados e conceitos básicos da teoria de C*-álgebras.

Posteriormente, introduzimos os conceitos de módulos de Hilbert e bimódulos de imprimitividade e apresentamos alguns exemplos e algumas das suas propriedades básicas. Em seguida, introduzimos a noção de Equivalência de Morita e o conceito de C*-álgebras estavelmente isomorfas.

A seguir, apresentamos o conceito de módulo gerado enumeravelmente e demonstramos o Teorema de Estabilização de Kasparov.

Finalmente, introduzimos o conceito de C*-álgebras separáveis e demonstramos o segundo teorema principal deste trabalho, o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

Abstract

In this work, we present initially some results and basic concepts of the C*-algebras theory.

Next, we introduce the concepts of Hilbert modules and imprimitivity bimodules and we present some examples and some of its basic properties. Following, we introduce the notion of Morita equivalence and the concept of C*-algebras stably isomorphic.

Next, we present the concept of module countably generated and we demonstrate the Kasparov Stabilization Theorem.

Finally, we introduce the concept of separable C*-algebras and we demonstrate the second main theorem of this work, the theorem of Brown-Green-Rieffel.

Sumário

Introdução

Esta dissertação, que está dividida em quatro capítulos, tem por objetivo demonstrar o Teorema de Estabilização de Kasparov e o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

No primeiro capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos da teoria das C*-álgebras, objetivando a construção de representações para C*-álgebras, a saber, a construção de Gelfand-Naimark-Segal.

No segundo capítulo, introduzimos os conceitos de módulos de Hilbert, que são uma generalização dos espaços de Hilbert, onde o corpo dos escalares é substituído por uma C*-álgebra, e apresentamos algumas das suas propriedades básicas que serão necessárias para o nosso estudo da equivalência de Morita no capítulo 3. Ainda nesse capítulo, introduzimos a construção de representações induzidas de uma C*-álgebra em outra e provamos alguns resultados da teoria dos espaços tensoriais que utilizaremos no decorrer do nosso trabalho.

No terceiro capítulo, apresentamos os conceitos de bimódulos de imprimitividade e algumas das suas propriedades básicas que serão importantes para definirmos a equivalência de Morita e para mostrarmos que a equivalência de Morita é uma relação de equivalência na classe das C*-álgebras.

No quarto e último capítulo, definimos o que são os módulos gerados enumeravelmente e demonstramos os dois principais resultados dessa dissertação, a saber, o Teorema de Estabilização de Kasparov e o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

Capítulo 1

Preliminares

Iniciamos esse capítulo apresentando alguns conceitos e resultados da teoria de C*-álgebras, que serão necessários para a construção de representações para C*-álgebras, e introduzimos algumas das propriedades básicas das representações. Ainda neste capítulo, provamos algumas propriedades da álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert.

1.1 Elementos da teoria de C*-álgebras

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados básicos da teoria das C*-álgebras que eventualmente utilizaremos nesta dissertação.

Definição 1.1 *Uma **álgebra** sobre o corpo dos números complexos é um espaço vetorial complexo A no qual está definida uma aplicação bilinear $\cdot : A \times A \to A$ dada por $(a,b) \mapsto a.b$ tal que, para quaisquer $a, b, c \in A$, vale*

$$a.(b.c) = (a.b).c, \ \ a.(b+c) = a.b + a.c, \ \ (b+c).a = b.a + c.a.$$

*Tal aplicação será denominada **multiplicação** ou **produto na álgebra A**.*

Se B é um subespaço vetorial da álgebra A tal que $b.b' \in B$, para quaisquer $b, b' \in B$, onde a multiplicação em B é a multiplicação em A restrita a B, então B é chamado **sub-álgebra da álgebra A**.

Definição 1.2 *Dizemos que uma álgebra A é **comutativa** se, para quaisquer $a, b \in A$, vale $a.b = b.a$, e dizemos que A é **unital** ou **com unidade** quando existe um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A.a = a.1_A = a$, para todo $a \in A$.*

Definição 1.3 *Seja A uma álgebra sobre o corpo dos complexos. Se A possui uma norma sub-multiplicativa, isto é, uma norma $\| \, . \, \|$ tal que $\|a.b\| \leq \|a\| \, . \, \|b\|$, para quaisquer $a, b \in A$, então A é chamada* ***álgebra normada****, e se A for completa com essa norma, dizemos que A é uma* ***álgebra de Banach****.*

Definição 1.4 *Uma álgebra de Banach A que possui um elemento 1_A tal que $\|1_A\| = 1$ e $1_A.a = a.1_A = a$, para todo $a \in A$, é denominada* ***álgebra de Banach com unidade****.*

Uma sub-álgebra fechada de uma álgebra de Banach é chamada **sub-álgebra de Banach**.

Definição 1.5 *Uma* ***involução*** *em uma álgebra A é uma aplicação $* : A \to A$ dada por $a \mapsto a^*$ tal que, para quaisquer $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$, vale:*

(i) $(a + b)^* = a^* + b^*$;

(ii) $(a^*)^* = a$;

(iii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda}.a^*$;

(iv) $(a.b)^* = b^*.a^*$.

Uma álgebra A é dita uma ****-álgebra*** *quando A possui uma involução. Se B é uma sub-álgebra auto-adjunta da *-álgebra A, ou seja, se para cada $b \in B$ tem-se $b^* \in B$, então B é chamada* ****-sub-álgebra da *-álgebra A****.*

Definição 1.6 *Seja A uma álgebra de Banach munida de uma involução. Dizemos que A é uma* ****-álgebra de Banach*** *quando $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a \in A$. Se, além disso, $\|a^*.a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$, dizemos que A é uma* ***C*-álgebra****. Se B é uma *-sub-álgebra da C*-álgebra A, dizemos que B é uma* ***C*-sub-álgebra da C*-álgebra A****.*

Definição 1.7 *Uma C*-álgebra A que possui uma unidade 1_A é chamada* ***C*-álgebra unital*** *ou* ***C*-álgebra com unidade****.*

Definição 1.8 *Sejam A e B duas *-álgebras e seja $\phi : A \to B$ uma aplicação linear. Dizemos que ϕ é um* ****-homomorfismo*** *quando, para quaisquer $a, a' \in A$, vale:*

$$\phi(a.a') = \phi(a).\phi(a') \quad e \quad \phi(a^*) = \phi(a)^*.$$

Quando A e B possuem unidades 1_A e 1_B, respectivamente, e $\phi(1_A) = 1_B$, dizemos que ϕ ***preserva a unidade****.*

Seja A uma *-álgebra de Banach que não tem unidade. Considere o espaço vetorial

$$A^1 := A \oplus \mathbb{C} = \{(a, \lambda); a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

com as operações usuais de soma e produto por escalar, isto é, com as operações:

$$(a, \lambda) + (b, \mu) = (a + b, \lambda + \mu) \ \text{ e } \ k.(a, \lambda) = (ka, k\lambda),$$

para todos $a, b \in A$ e $\lambda, \mu, k \in \mathbb{C}$. Defina, para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, as seguintes operações em A^1:

(I) $(a, \lambda).(b, \mu) = (a.b + \lambda.b + \mu.a, \lambda.\mu)$;

(II) $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$;

(III) $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$.

Afirmação: O espaço vetorial A^1, com as operações (I), (II) e (III) definidas acima, é uma *-álgebra de Banach cuja unidade é $(0, 1)$.

De fato,

(1) Para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda, \mu, \gamma, \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{gathered}((a, \lambda).(b, \mu)).(c, \gamma) = (a.b + \lambda.b + \mu.a, \lambda.\mu).(c, \gamma) = \\ = ((a.b + \lambda.b + \mu.a).c + (\lambda.\mu).c + \gamma.(a.b + \lambda.b + \mu.a), (\lambda.\mu).\gamma) = \\ = ((a.b).c + (\lambda.b).c + (\mu.a).c + (\lambda.\mu).c + \gamma.(a.b) + \gamma.(\lambda.b) + \gamma.(\mu.a), (\lambda.\mu).\gamma) = \\ = (a.(b.c + \gamma.b + \mu.c) + \lambda.(b.c + \gamma.b + \mu.c) + (\mu.\gamma).a, \lambda.(\mu.\gamma)) = \\ = (a, \lambda).(b.c + \gamma.b + \mu.c, \mu.\gamma) = (a, \lambda).((b, \mu).(c, \gamma)).\end{gathered}$$

Logo, a multiplicação definida em (I) é associativa.

(2) Como $\| \,.\, \|$ e $| \,.\, |$ são normas em A e $\mathbb{C}$, respectivamente, segue imediatamente que a aplicação definida em (III) é uma norma em A^1. Além disso, para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{gathered}\|(a, \lambda).(b, \mu)\| = \|(a.b + \lambda.b + \mu.a, \lambda.\mu)\| = \|a.b + \lambda.b + \mu.a\| + |\lambda.\mu| \leq \\ \leq \|a.b\| + |\lambda| \,.\, \|b\| + |\mu| \,.\, \|a\| + |\lambda| \,.\, |\mu| \leq \\ \leq \|a\| \,.\, \|b\| + |\lambda| \,.\, \|b\| + |\mu| \,.\, \|a\| + |\lambda| \,.\, |\mu| = \|(a, \lambda)\| \,.\, \|(b, \mu)\|.\end{gathered}$$

Segue daí que a aplicação definida em (III) é uma norma sub-multiplicativa.

(3) Como as *-álgebras A e $\mathbb{C}$ são completas com respeito as normas $\| \,.\, \|$ e $| \,.\, |$, respectivamente, então a álgebra A^1 também é completa com respeito a norma $\|(.\,,\,.)\|$ definida em (III).

De (1), (2) e (3) segue que A^1 é uma álgebra de Banach. Nosso próximo passo será mostrar que A^1 possui uma involução.

(4) A operação definida em (II) satisfaz trivialmente as condições (i), (ii) e (iii) da definição 1.5. Vamos mostrar que a mesma também satisfaz a condição (iv).

De fato, para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos que:

$$((a,\lambda).(b,\mu))^* = (a.b + \lambda.b + \mu.a, \lambda.\mu)^* = ((a.b + \lambda.b + \mu.a)^*, \overline{\lambda.\mu}) =$$
$$= (b^*.a^* + \overline{\lambda}.b^* + \overline{\mu}.a^*, \overline{\lambda}.\overline{\mu}) = (b^*, \overline{\mu}).(a^*, \overline{\lambda}) = (b,\mu)^*.(a,\lambda)^*.$$

Para provar que A^1 é uma *-álgebra de Banach, resta mostrar que $\|(a,\lambda)^*\| = \|(a,\lambda)\|$, para todos $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

(5) Dados $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\|(a,\lambda)^*\| = \left\|(a^*, \overline{\lambda})\right\| = \|a^*\| + \left|\overline{\lambda}\right| = \|a\| + |\lambda| = \|(a,\lambda)\|$$

e

$$(a,\lambda).(0,1) = (0,1).(a,\lambda) = (a,\lambda).$$

De $(1) - (5)$, concluímos que A^1 é *-álgebra de Banach cuja unidade é $(0,1)$.

Note agora que A é uma *-sub-álgebra fechada e um ideal de A^1, onde os elementos $a \in A$ são identificados por $(a,0) \in A^1$.

Se A é uma C*-álgebra, temos que:

$$\left\|(a^*, \overline{\lambda}).(a,\lambda)\right\| = \left\|(a^*.a + \overline{\lambda}.a + \lambda.a^*, \overline{\lambda}.\lambda)\right\| = \left\|a^*.a + \overline{\lambda}.a + \lambda.a^*\right\| + |\lambda|^2$$

e

$$\|(a,\lambda)\|^2 = (\|a\| + |\lambda|)^2 = \|a\|^2 + 2.\,\|a\|\,.\,|\lambda| + |\lambda|^2$$

não são necessariamente iguais. Nesse caso, A^1 não é uma C*-álgebra com a norma definida em (III). Assim, para que A^1 seja uma C*-álgebra, devemos definir uma norma que satisfaça a condição da definição 1.6, e essa nova norma é dada no nosso próximo resultado.

Proposição 1.1 *Seja A uma C*-álgebra. Em A^1, defina*

$$\|(a,\lambda)\|_1 = sup\left\{\|a.x+\lambda.x\|\,;x\in A, \|x\|\leq 1\right\}.$$

Então, A^1 é uma C-álgebra, onde A é um ideal de A^1 e $\|\,.\,\|_1$ estende $\|\,.\,\|$.*

Demonstração:

(i) Da afirmação anterior, temos que a multiplicação definida para o espaço vetorial A^1 é associativa.

(ii) Como $\|\,.\,\|$ é uma norma em A, temos que $\|\,.\,\|_1$ é uma norma em A^1. Além disso, como a álgebra A é completa com respeito a norma $\|\,.\,\|$, então a álgebra A^1 é completa com respeito a norma $\|\,.\,\|_1$. Vamos mostrar que $\|\,.\,\|_1$ é uma norma sub-multiplicativa.

Para quaisquer $a,b\in A$ e $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{gathered}
\|(a,\lambda).(b,\mu)\|_1 = \|(a.b+\lambda.b+\mu.a,\lambda.\mu)\|_1 = \\
= sup\left\{\|(a.b+\lambda.b+\mu.a).x+(\lambda.\mu).x\|\,;x\in A, \|x\|\leq 1\right\} = \\
= sup\left\{\|(a.b).x+(\lambda.b).x+(\mu.a).x+(\lambda.\mu).x\|\,;x\in A, \|x\|\leq 1\right\} \leq \\
\leq sup\left\{\|a.x+\lambda.x\|\,;x\in A, \|x\|\leq 1\right\}.sup\left\{\|b.x+\mu.x\|\,;x\in A, \|x\|\leq 1\right\} = \\
= \|(a,\lambda)\|_1\,.\,\|(b,\mu)\|_1\,.
\end{gathered}$$

(iii) Como $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a\in A$, temos que $\left\|(a^*,\overline{\lambda})\right\|_1 = \|(a,\lambda)\|_1$, para quaisquer $a\in A$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

De (i), (ii) e (iii), segue que A^1 é uma *-álgebra de Banach. Resta mostrar que A^1 é uma C*-álgebra e que $\|\,.\,\|_1$ estende $\|\,.\,\|$.

(I) Como A^1 é uma *-álgebra de Banach, temos que $\left\|(a,\lambda).(a^*,\overline{\lambda})\right\|_1 \leq \|(a,\lambda)\|_1^2$.

Por outro lado, se $\|x\|\leq 1$, então:

$$\begin{gathered}
\|a.x+\lambda.x\|^2 = \|(a.x+\lambda.x)^*.(a.x+\lambda.x)\| = \left\|(x^*.a^*+\overline{\lambda}.x^*).(a.x+\lambda.x)\right\| = \\
= \left\|x^*.[(a^*.a+\lambda.a^*+\overline{\lambda}.a).x+\overline{\lambda}.\lambda.x]\right\| \leq \left\|(a^*.a+\lambda.a^*+\overline{\lambda}.a)x+\overline{\lambda}.\lambda.x\right\|.
\end{gathered}$$

Tomando o supremo com $x\in A$ e $\|x\|\leq 1$ em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos:

$$\|(a,\lambda)\|_1^2 \leq \left\|(a,\lambda).(a^*,\overline{\lambda})\right\|_1.$$

Logo,

$$\|(a,\lambda)\|_1^2 = \left\|(a,\lambda).(a^*,\overline{\lambda})\right\|_1.$$

Portanto, A^1 é uma C*-álgebra.

(II) Dado $a \in A$, temos que:

$$\|(a,0)\|_1^2 = \|(a,0).(a^*,0)\|_1 = \|(a.a^*,0)\|_1 =$$
$$= sup\,\{\|(a.a^*).x\|\,; x \in A, \|x\| \leq 1\} \leq \|a.a^*\| = \|a\|^2.$$

Daí, $\|(a,0)\|_1 \leq \|a\|$, para todo $a \in A$.

Por outro lado,

$$\|(a,0)\|_1 = sup\,\{\|a.x\|\,; x \in A, \|x\| \leq 1\} \geq \|a.a^*/\,\|a\|\| = \|a\|^2/\,\|a\| = \|a\|.$$

Logo, $\|(a,0)\|_1 \geq \|a\|$, para todo $a \in A$.

Portanto, $\|(a,0)\|_1 = \|a\|$, para todo $a \in A$, o que conclui a prova.

$\square$

Proposição 1.2 *Sejam A e B duas *-álgebras e seja $\phi : A \to B$ um *-homomorfismo. Então, existe uma única extensão $\phi_1 : A^1 \to B^1$ de ϕ que é um *-homomorfismo e preserva a unidade.*

Demonstração:

Como ϕ é um *-homomorfismo, a aplicação $\phi_1 : A^1 \to B^1$ definida por

$$\phi_1(a,\lambda) := (\phi(a),\lambda)$$

é um *-homomorfismo.

De fato, dados $(a,\lambda),(a',\lambda') \in A^1$ e $k,k' \in \mathbb{C}$, temos que:

(i) $\phi_1(k(a,\lambda)+k'(a',\lambda')) = \phi_1(k.a+k'.a',k.\lambda+k'.\lambda') = (\phi(k.a+k'.a'),k.\lambda+k'.\lambda') =$

$= (k.\phi(a)+k'.\phi(a'),k.\lambda+k'.\lambda') = (k.\phi(a),k.\lambda)+(k'.\phi(a'),k'.\lambda') =$

$= k.(\phi(a),\lambda)+k'.(\phi(a'),\lambda') = k.\phi_1(a,\lambda)+k'.\phi_1(a',\lambda')$.

Daí, ϕ_1 é linear.

(ii) $\phi_1((a,\lambda).(a',\lambda')) = \phi_1(a.a'+\lambda.a'+\lambda'.a,\lambda.\lambda') = (\phi(a.a'+\lambda.a'+\lambda'.a),\lambda.\lambda') =$
$= (\phi(a).\phi(a')+\lambda.\phi(a')+\lambda'.\phi(a),\lambda.\lambda') = (\phi(a),\lambda).(\phi(a'),\lambda') = \phi_1(a,\lambda).\phi_1(a',\lambda')$.

(iii) $\phi_1((a,\lambda)^*) = \phi_1(a^*,\overline{\lambda}) = (\phi(a^*),\overline{\lambda}) = (\phi(a)^*,\overline{\lambda}) = (\phi(a),\lambda)^* = [\phi_1(a,\lambda)]^*$.

(iv) $\phi_1(0,1) = (\phi(0),1) = (0,1)$.

De $(i)-(iv)$, temos que ϕ_1 é um *-homomorfismo que preserva unidade e estende ϕ, visto que $\phi_1(a,0) = (\phi(a),0)$, para todo $a \in A$. Resta mostrar a unicidade.

Seja ψ outra extensão de ϕ que satisfaz as mesmas propriedades de ϕ_1, então:

$$\psi(a,\lambda) = \psi(a,0) + \psi(0,\lambda) = (\phi(a),0) + \lambda.\psi(0,1) = (\phi(a),0) + \lambda.(0,1) =$$
$$= (\phi(a),0) + (0,\lambda) = (\phi(a),\lambda) = \phi_1(a,\lambda),$$

para todo $(a,\lambda) \in A^1$.

Logo, $\psi = \phi_1$.

□

Definição 1.9 *Seja A uma álgebra com unidade 1_A. Um elemento $a \in A$ é dito* ***invertível*** *quando existe um elemento $b \in A$ tal que $a.b = b.a = 1_A$.*

Se $a \in A$ é invertível, então existe um único elemento $b \in A$ tal que $a.b = b.a = 1_A$. Nesse caso, denotaremos $b = a^{-1}$ e ***o conjunto dos elementos invertíveis da álgebra A*** *será denotado por* ***G(A)***.

Observação 1.1 *Se A é uma álgebra com unidade 1_A, então $G(A)$ é um grupo com a operação de multiplicação da álgebra A .*

De fato,

(1) Dados $a, b \in G(A)$, temos que $a.b \in G(A)$ e pela unicidade do elemento inverso, segue que $(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$, pois

$$(a.b).(a.b)^{-1} = 1_A = b^{-1}.a^{-1}.a.b.$$

Assim, para quaisquer $a, b, c \in G(A)$, obtemos $(a.b).c = a.(b.c)$, pois $G(A) \subset A$ e a multiplicação em A é associativa.

(2) O elemento neutro de $G(A)$ é 1_A, pois $1_A.1_A = 1_A$, isto é, $1_A \in G(A)$ e

$$1_A.a = a.1_A = a, \text{ para todo } a \in G(A).$$

(3) Dado $a \in G(A)$, existe $a^{-1} \in A$ tal que $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1_A$.

Daí, $a^{-1} \in G(A)$.

De (1), (2) e (3) segue o resultado desejado.

Definição 1.10 *O conjunto* $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda.1_A - a)$ *não é invertível*$\}$ *é chamado* ***espectro*** *do elemento* $a \in A$ *e o conjunto* $\rho(a) := \{\lambda \in \mathbb{C};\ (\lambda.1_A - a)$ *é invertível*$\}$ *é chamado* ***resolvente*** *do elemento* $a \in A$.

Exemplo 1.1 *Se* $A = C(X)$, *onde* X *é um espaço topológico compacto de Hausdorff, e* $f \in A$, *então* $\sigma(f) = f(X)$.

De fato,

$$(\lambda.1_A - f) \text{ não é invertível} \Leftrightarrow \text{ existe } \ x \in X \text{ tal que } (\lambda.1_A - f)(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda - f(x) = 0, \text{ para algum } x \in X \Leftrightarrow f(x) = \lambda, \text{ para algum } x \in X.$$

Definição 1.11 *Seja* A *uma álgebra de Banach. Um funcional linear não-nulo* $\phi : A \to \mathbb{C}$ *é dito um* ***caracter sobre a álgebra de Banach A*** *quando* $\phi(a.b) = \phi(a).\phi(b)$, *para quaisquer* $a, b \in A$. *Ou seja, um caracter sobre a álgebra de Banach* A *é um homomorfismo não-nulo de* A *em* $\mathbb{C}$ *e o* ***conjunto dos caracteres sobre a álgebra de Banach A*** *será denotado por* $\widehat{\boldsymbol{A}}$ *e denominado* ***espectro da álgebra de Banach A***.

Proposição 1.3 *Seja* A *uma álgebra de Banach. Se* $\phi : A \to \mathbb{C}$ *é um caracter sobre a álgebra* A, *então*

$$\|\phi\| := \sup\{|\phi(a)|\,;\ a \in A,\ \|a\| \leq 1\} \leq 1.$$

Em particular, se A *possui unidade* 1_A, *então* $\|\phi\| = 1$, *visto que* $\phi(1_A) = 1$.

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que $\|\phi\| > 1$. Então, existe $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$ tal que

$$|\phi(a)| > 1.$$

Tomando $a' = a/\phi(a)$, obtemos $\|a'\| < 1$ e $\phi(a') = 1$. Como $\|a'\| < 1$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty}(a')^n$ converge, digamos $\sum_{n=1}^{\infty}(a')^n = a'' \in A$. Daí,

$$a''.a' + a' = \sum_{n=2}^{\infty}(a')^n + a' = \sum_{n=1}^{\infty}(a')^n = a''.$$

Aplicando ϕ na igualdade acima, obtemos:

$$\phi(a'').\phi(a') + \phi(a') = \phi(a'') \Rightarrow \phi(a'') + 1 = \phi(a''),$$

o que é um absurdo. Logo, $\|\phi\| \leq 1$.

Por outro lado, se A tem unidade 1_A, então:

$$\phi(1_A) = \phi(1_A.1_A) = \phi(1_A).\phi(1_A) = \phi(1_A)^2.$$

Daí, $\phi(1_A) = 0$ ou $\phi(1_A) = 1$.

Se $\phi(1_A) = 0$, então:

$$\phi(a) = \phi(a.1_A) = \phi(a).\phi(1_A) = 0, \quad \text{para todo} \quad a \in A,$$

donde segue que $\phi = 0$, o que é um absurdo, pela definição de caracter.

Portanto, $\phi(1_A) = 1$ e temos $\|\phi\| = 1$.

$\square$

Observação 1.2 *Como consequência da proposição anterior temos que: se A é uma álgebra de Banach e $\phi : A \to \mathbb{C}$ é um caracter sobre a álgebra A, então, para todo $a \in A$, vale:*

$$|\phi(a)| \leq \|a\|.$$

Definição 1.12 *Seja A uma *-álgebra com unidade 1_A. Dizemos que um elemento $a \in A$ é:*

(i) ***auto-adjunto*** *ou* ***hermitiano****, quando $a = a^*$;*

(ii) ***normal****, quando $a.a^* = a^*.a$;*

(iii) *uma* ***projeção****, quando $a = a^* = a^2$;*

(iv) ***unitário****, quando $a.a^* = a^*.a = 1_A$.*

Definição 1.13 *Seja A uma C*-álgebra. Dizemos que um elemento $a \in A$ é* ***positivo*** *quando existe $b \in A$ tal que $a = b^*b$. Nesse caso, o denotamos por $a \geq 0$ e o* ***conjunto de todos elementos positivos de A*** *será denotado por $\boldsymbol{A}^+$. Além disso, se $a, b \in A$ e $a - b \in A^+$, dizemos que $a \geq b$ ou $b \leq a$.*

Proposição 1.4 *Sejam A uma C*-álgebra, $a \in A$ e $\phi : A \to \mathbb{C}$ um caracter sobre A. Então:*

(i) *Se a é auto-adjunto, então $\phi(a) \in \mathbb{R}$.*

(ii) $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$.

Demonstração:

Vamos supor que A possui unidade. Do contrário, tomamos A^1 e em seguida restringimos as propriedades de A^1 a A, pois na prova da afirmação anterior, vimos que A é uma *-subálgebra fechada e também é um ideal de A^1, onde os elementos $a \in A$ são identificados por $(a, 0) \in A^1$.

(i) Sendo $a \in A$ um elemento auto-adjunto e $t \in \mathbb{R}$, pela observação 1.2, temos que:

$$|\phi(a + it.1_A)|^2 \leq \|a + it.1_A\|^2 = \|(a + it.1_A)^*.(a + it.1_A)\| =$$

$$= \|(a - it.1_A).(a + it.1_A)\| = \left\|a^2 + t^2.1_A\right\| \leq \|a\|^2 + t^2.$$

Assim,

$$|\phi(a + it.1_A)|^2 \leq \|a\|^2 + t^2. \qquad (I)$$

Por outro lado, se $\phi(a) = \alpha + i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então:

$$|\phi(a + it.1_A)|^2 = |\phi(a) + i.t|^2 = |\alpha + i.(\beta + t)|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta.t + t^2. \quad (II)$$

De (I) e (II), segue que

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta.t \leq \|a\|^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.
Logo, $\beta = 0$ e portanto, $\phi(a) = \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Considere agora um elemento $a \in A$. Se a é auto adjunto, de (i) segue a veracidade do item (ii). Em caso contrário, note que podemos decompor a da seguinte forma:

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i.\frac{a - a^*}{2i} = b + i.c,$$

onde $b = \dfrac{a + a^*}{2}$ e $c = \dfrac{a - a^*}{2i}$ são auto-adjuntos.
Logo, pelo item (i), temos que $\phi(b)$ e $\phi(c) \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\phi(a^*) = \phi(b^* - i.c^*) = \phi(b - i.c) = \phi(b) - i.\phi(c) = \overline{\phi(b) + i.\phi(c)} = \overline{\phi(a)}.$$

□

Definição 1.14 *Seja A uma *-álgebra. Dizemos que um funcional linear $\phi : A \to \mathbb{C}$ é* ***positivo*** *quando $\phi(a) \geq 0$ para todo elemento positivo $a \in A$.*

Se $\tau : A \to \mathbb{C}$ é um funcional positivo com $\|\tau\| = 1$, dizemos que τ é um ***estado sobre a *-álgebra A****. Denotamos o* ***conjunto dos estados sobre a *-álgebra A*** *por* ***S(A)****.*

Além disso, dizemos que τ é um ***estado puro sobre a *-álgebra A*** *quando, para qualquer funcional positivo ρ, onde $\tau - \rho$ é positivo, existe $t \in [0, 1]$ tal que $\rho = t\tau$. Denotamos o* ***conjunto dos estados puros sobre a *-álgebra A*** *por* ***PS(A)****.*

Proposição 1.5 *Se $\phi : A \to \mathbb{C}$ é um funcional linear positivo, então $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$, para todo $a \in A$.*

Demonstração:

(*i*) Se $a \in A$ é auto-adjunto, isto é, $a = a^*$, então $a = a_+ - a_-$, com $a_+, a_- \geq 0$, (ver, por exemplo, [Mur], pág. 45). Assim, como ϕ é um funcional positivo, temos $\phi(a_+) \geq 0$ e $\phi(a_-) \geq 0$. Portanto,

$$\phi(a) = \phi(a_+) - \phi(a_-) \in \mathbb{R}.$$

(*ii*) Se $a \in A$ não é auto-adjunto, então $a = b + ic$, onde $b = \dfrac{a + a^*}{2}$ e $c = i.\dfrac{a - a^*}{2i}$ são auto-adjuntos, e a prova segue como no item (*ii*) da proposição 1.4.

$\square$

Definição 1.15 *Seja A uma *-álgebra de Banach. Uma* ***aproximação da unidade da *-álgebra de Banach A****, também chamada* ***aproximação da identidade da *-álgebra de Banach A****, é uma rede crescente $(\mu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos positivos de A, com $\|\mu_\lambda\| \leq 1$, tal que para todo $a \in A$ vale*

$$a = \lim_\lambda a.\mu_\lambda.$$

Observação 1.3 *Equivalentemente, podemos exigir que $a = \lim_\lambda \mu_\lambda.a$, para todo $a \in A$.*

De fato, se $\|a - a.\mu_\lambda\| \to 0$, para todo $a \in A$, temos que:

$$\|a - \mu_\lambda.a\|^2 = \|(a - \mu_\lambda.a).(a - \mu_\lambda.a)^*\| = \|a.a^* - \mu_\lambda.a.a^* - a.a^*\mu_\lambda + \mu_\lambda.a.a^*.\mu_\lambda\| \leq$$

$$\leq \|a.a^* - a.a^*\mu_\lambda\| + \|\mu_\lambda\| \, \|a.a^* - a.a^*.\mu_\lambda\| \to 0.$$

Observação 1.4 *É possível mostrar que:*

(1) *Um elemento $a \in A$ é positivo se, e somente se, $\sigma(a) \subset [0, \infty)$; e se $a, b \in A$ são auto-adjuntos com $a \leq b$, então $c^*.a.c \leq c^*.b.c$, para todo $c \in A$. (Ver, por exemplo, [Mur]; Teoremas 2.1.8, 2.2.4, 2.2.5).*

(2) *Vale a seguinte desigualdade: $b^*.a^*.a.b \leq \|a\|^2 .b^*.b$, para quaisquer $a, b \in A$.*

De fato, suponha que A não tem uma unidade. Note que, como $\sigma(a)$ é por definição o espectro em $A^1 = A \oplus \mathbb{C}$, a positividade é determinada em A^1. Como $\|a\|^2 .\mathbf{1} - a^*.a \geq 0$ em A^1, onde $\mathbf{1}$ é a unidade de A^1, por (1) temos que $b^*.(\|a\|^2 .\mathbf{1} - a^*.a).b \geq 0$ em A^1 e portanto, também em A. Daí,

$$0 \leq b^*.(\|a\|^2 .1 - a^*.a).b = \|a\|^2 .b^*.b - b^*.a^*.a.b.$$

(3) *Toda C*-álgebra possui uma aproximação da unidade. (Ver [Mur], Teorema 3.1.1).*

Lema 1.1 *Seja $\phi : A \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo sobre a C*-álgebra A. Então, para quaisquer $a, b \in A$, temos que:*

$$|\phi(b^*.a)|^2 \leq \phi(b^*.b).\phi(a^*.a).$$

Demonstração:

Fixe $a, b \in A$. Então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$0 \leq \phi((\lambda.a + b)^*.(\lambda.a + b)) = \phi((\overline{\lambda}.a^* + b^*).(\lambda.a + b)) =$$

$$= |\lambda|^2 .\phi(a^*.a) + \overline{\lambda}.\phi(a^*.b) + \lambda.\phi(b^*.a) + \phi(b^*.b). \quad (*)$$

Como $|\lambda|^2 .\phi(a^*.a) + \phi(b^*.b) \in \mathbb{R}$, temos

$$im(\overline{\lambda}.\phi(a^*.b) + \lambda.\phi(b^*.a)) = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, onde $im(z)$ representa a parte imaginária de um número complexo z.

Tomando $\lambda = 1$ e $\lambda = i$, obtemos:

$$im(\phi(a^*.b) + \phi(b^*.a)) = 0 \Rightarrow im(\phi(a^*.b)) = -im(\phi(b^*.a))$$

e

$$im(-i.\phi(a^*.b) + i.\phi(b^*.a)) = 0 \Rightarrow im(i.\phi(a^*.b)) = im(i.\phi(b^*.a)).$$

Segue daí que as partes real e imaginária de $\phi(a^*.b)$ e $\overline{\phi(b^*.a)}$ são iguais.

Logo, fazendo $\lambda = x.\overline{\phi(b^*.a)}$, para $x \in \mathbb{R}$, e substituindo em $(*)$, obtemos:

$$0 \leq x^2. |\phi(b^*.a)|^2 .\phi(a^*.a) + x. |\phi(a^*.b)|^2 + x. |\phi(b^*.a)|^2 + \phi(b^*.b) =$$

$$= x^2. |\phi(b^*.a)|^2 .\phi(a^*.a) + 2x. |\phi(b^*.a)|^2 + \phi(b^*.b).$$

Temos daí que

$$0 \leq x^2. |\phi(b^*.a)|^2 .\phi(a^*.a) + 2x. |\phi(b^*.a)|^2 + \phi(b^*.b).$$

Assim, no lado direito da desigualdade acima, temos uma função quadrática na variável x que é sempre não-negativa. Portanto,

$$4\,|\phi(b^*.a)|^4 - 4\,|\phi(b^*.a)|^2 .\phi(a^*.a).\phi(b^*.b) \leq 0.$$

Logo,

$$|\phi(b^*.a)|^2 \leq \phi(b^*.b).\phi(a^*.a).$$

$\square$

Observação 1.5 *Se τ é um funcional linear positivo sobre a C*-álgebra A e*

$$N_\tau := \{a \in A; \tau(a^*.a) = 0\},$$

então, pelo lema 1.1, temos que $\tau(b^*.a) = 0$ para $a \in N_\tau$ ou $b \in N_\tau$.

Lema 1.2 *Suponha que A é uma C*-álgebra que não tem unidade e seja $\rho \in S(A)$. Então,*

(a) *Se $\{e_i\}_{i\in I}$, onde I é um conjunto dirigido, é uma aproximação da identidade para A, temos que $\rho(e_i) \to 1 \in \mathbb{R}$.*

(b) *A fórmula $\tau(a + \lambda.\mathbf{1}) = \rho(a) + \lambda$ define um estado sobre a C*-álgebra A^1, onde $\mathbf{1}$ é a unidade de A^1.*

Demonstração:

(a) Como uma aproximação da identidade da C*-álgebra A é uma rede crescente e ρ é um funcional positivo, então $\{\rho(e_i)\}_{i\in I}$ é uma rede crescente de números reais positivos limitados por 1. Assim, $\{\rho(e_i)\}_i$ converge para algum $L \in \mathbb{R}$, com $L \leq 1$.

Por outro lado, temos que:

$$e_i^2 = (e_i^{1/2})^*.(e_i^{1/2})^*.e_i^{1/2}.e_i^{1/2} \leq \left\|(e_i^{1/2})^*.e_i^{1/2}\right\|.(e_i^{1/2})^*.e_i^{1/2} = e_i.$$

Logo, pelo lema 1.1, para todo $a \in A$, obtemos:

$$|\rho(e_i.a)|^2 \leq \rho(e_i^*.e_i).\rho(a^*.a) = \rho(e_i^2).\rho(a^*.a) \leq \rho(e_i).\|a\|^2 \leq L.\|a\|^2.$$

Como $\|\rho\| = 1$, obtemos $L \geq 1$. Portanto, temos que $L = 1$ e provamos (a).

(b) Pela prova de (a), temos que:

$$|\rho(e_i.a)|^2 \leq \rho(e_i^*.e_i).\rho(a^*.a) \Rightarrow |\rho(a)|^2 \leq \rho(a^*.a),$$

para todo $a \in A$. Assim, pela proposição 1.5, temos que:

$$\tau((\lambda.1_A + a)^*.(\lambda.1_A + a)) = \tau(|\lambda|^2.1_A + \overline{\lambda}.a + \lambda.a^* + a^*.a) =$$

$$= |\lambda|^2 + \rho(\overline{\lambda}.a + \lambda.a^* + a^*.a) = |\lambda|^2 + \overline{\lambda}.\rho(a) + \lambda.\rho(a^*) + \rho(a^*.a) =$$

$$= |\lambda|^2 + \overline{\lambda}.\rho(a) + \overline{\overline{\lambda}.\rho(a)} + \rho(a^*.a) = |\lambda|^2 + 2Re(\overline{\lambda}.\rho(a)) + \rho(a^*.a) \geq$$

$$\geq |\lambda|^2 - 2|\lambda|.|\rho(a)| + |\rho(a)|^2 = (|\lambda| - |\rho(a)|)^2 \geq 0,$$

donde segue que

$$\tau((\lambda.1_A + a)^*.(\lambda.1_A + a)) \geq 0,$$

para quaisquer $a \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Logo, τ é positivo e tem norma $\|\tau\| = 1$, pois $\tau(\mathbf{1}) = 1$, ou seja, τ é um estado.

$\square$

Introduzimos agora alguns conceitos que serão necessários nos próximos capítulos.

Definição 1.16 *Um ideal I de uma C*-álgebra A é chamado um* ***ideal essencial*** *quando tem interseção distinta de $\{0\}$ com cada ideal não nulo de A.*

Alternativamente, podemos utilizar a seguinte equivalência.

Lema 1.3 *Um ideal I de uma C*-álgebra A é essencial se, e somente se, $aI = \{0\} \Rightarrow a = 0$.*

Demonstração:
Para a prova, utilizaremos os seguintes resultados:

(i) Se I e J são ideais da C*-álgebra A, então $J \cap I = J.I$.

De fato, como I e J são ideais, então a inclusão $J.I \subset J \cap I$ é óbvia. Por outro lado, utilizando uma aproximação da unidade do ideal I, podemos aproximar qualquer elemento de $J \cap I$ por elementos de $J.I$. Logo, temos $J \cap I \subset J.I$, e portanto, segue a validade de (i).

(ii) Dado $a \in A$, considere o ideal

$$J_a = \overline{AaA} := \overline{span}\left\{a'ab; a', b \in A\right\}.$$

Note que $J_a.I = \{0\} \Leftrightarrow aI = \{0\}$. Assim, pelo item (i), temos que

$$J_a \cap I = \{0\} \Leftrightarrow aI = \{0\}.$$

Suponhamos agora que I é um ideal essencial. Seja $a \in A$.

Por (ii), se $aI = \{0\}$, temos que $J_a \cap I = \{0\}$. Como I é essencial, então $J_a = \{0\}$, e portanto, temos $a = 0$.

Reciprocamente, vamos supor que $aI = \{0\} \Rightarrow a = 0$.

Se J é um ideal não nulo e $a \in J - \{0\}$, por (ii) temos

$$a \neq 0 \Rightarrow aI \neq \{0\} \Rightarrow J_a \cap I \neq \{0\} \Rightarrow J \cap I \neq \{0\},$$

pois $J_a \subset J$.

Logo, I é um ideal essencial.

$\square$

Exemplo 1.2 *Seja A=$C_0(X)$ e seja U um aberto de um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto X. Então, o ideal*

$$I = \{f \in A; f(x) = 0, \text{ para todo } x \notin U\}$$

é essencial se, e somente se, U é denso em X.

De fato, é fácil de verificar que I é um ideal em A .

Suponhamos que U é denso em X. Seja $g \in A$ tal que $gI = \{0\}$. Então,

$$g(x).f(x) = 0,$$

para todo $f \in I$ e todo $x \in X$.

Logo, $g(x) = 0$, para todo $x \in U$. Como g é uma função contínua e U é denso em X, segue que $g(x) = 0$, para todo $x \in X$, ou seja, $g \equiv 0$.

Assim, pelo lema 1.3, segue que I é um ideal essencial.

Suponhamos agora que I é um ideal essencial e vamos mostrar que U é denso em X.

Suponhamos, por contradição, que esse não é o caso, isto é, que existe um elemento $x_0 \in X$ e um número real $\epsilon_0 > 0$ tais que a interseção $B(x_0, \epsilon_0) \cap U$ seja vazia.

Seja $g \in A$, não identicamente nula, tal que $g(x) = 0$ para $x \notin B(x_0, \epsilon_0)$.

Dada $f \in I$, temos que $g(x).f(x) = 0$, para todo $x \in X$.

Daí, $gI = \{0\}$ com $g \neq 0$.

Logo, pelo lema 1.3, temos que I não é essencial, o que é um absurdo.

Portanto, U é denso em X.

Definição 1.17 *Uma* ***unitização*** *de uma C*-álgebra A, é um par (B, i), onde B é uma C*-álgebra com unidade e $i : A \hookrightarrow B$ é um homomorfismo injetivo tal que i(A) é um ideal essencial de B.*

Observação 1.6 *Se a C*-álgebra A já possui unidade 1_A, então a única unitização de A é (A,i), onde $i : A \to A$ é a aplicação identidade.*

De fato, se existir uma C*-álgebra B tal que A é um ideal de B e existir $b \in B - A$ então

$$b.1_A \in A, \qquad b - b.1_A \neq 0,$$

com $(b - b.1_A)A = 0$.

Logo, pelo lema 1.3, segue que A não é essencial.

1.2 Representações de C*-álgebras

Nessa seção, apresentamos o conceito de representação de uma C*-álgebra e algumas das suas propriedades básicas. Ainda nessa seção, mostramos a construção de Gelfand-Naimark-Segal e provamos o teorema de Gelfand-Naimark-Segal, que afirma que toda C*-álgebra possui uma representação fiel, ou seja, afirma que toda C*-álgebra é isomorfa a uma C*-sub-álgebra de $B(H)$, para algum espaço de Hilbert H. (Para mais detalhes, ver [Mur]).

Definição 1.18 *Uma* ***representação de uma C*-álgebra A*** *é um par (H, ϕ), onde H é um espaço de Hilbert e $\phi : A \to B(H)$ é um *-homomorfismo. Quando ϕ é injetiva, isto é, $\phi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$, dizemos que a representação (H, ϕ) é* ***fiel****.*

Se $(H_\lambda, \phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de representações da C*-álgebra A, então podemos obter uma representação (H, ϕ) de A, denominada **soma direta** da família $(H_\lambda, \phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, definida por:

$$H := \oplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \quad \text{e} \quad \phi(a)((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) := (\phi_\lambda(a)(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$$

para quaisquer $a \in A$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in H$.

Definição 1.19 *Sejam H um espaço de Hilbert, S um subconjunto de H e $V \subset B(H)$ um conjunto de operadores lineares limitados de H. Denotamos por* ***VS*** *o* ***conjunto das combinações lineares*** *dos elementos do conjunto $\{T(x);\ T \in V \ \text{ e } x \in S\}$ e por* ***[VS]*** *o* ***fecho do conjunto VS****, ou seja,*

$$VS := span\,\{T(x);\ T \in V \ \text{ e } x \in S\},$$

$$[VS] := \overline{span}\,\{T(x);\ T \in V \ \text{ e } x \in S\}.$$

Quando $[VH] = H$, dizemos que ***V age não-degeneradamente em H****.*

Definição 1.20 *Uma representação (H, ϕ) de uma C*-álgebra A é dita* ***não-degenerada*** *quando a C*-subálgebra $\phi(A)$ de $B(H)$ age não-degeneradamente em H, isto é, quando $[\phi(A)H] = H$.*

Em particular, temos que a soma direta de representações não-degeneradas também é não-degenerada.

Observação 1.7 *Se A é uma C*-álgebra que atua não-degeneradamente sobre H e $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma aproximação da unidade para A, então $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge fortemente para a identidade de H.*

De fato, temos que mostrar que $\lim_{\lambda} u_\lambda(x) = x$, para todo $x \in H$.

Note que, se $x = a(y)$, para algum $a \in A$ e algum $y \in H$, então

$$\lim_{\lambda} u_\lambda(x) = \lim_{\lambda} u_\lambda a(y) = a(y) = x,$$

pois $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma aproximação da unidade para A. Daí, tomando $x \in H$ como combinações lineares de elementos da forma $a(y)$, para $a \in A$ e $y \in H$, temos que:

$$\lim_{\lambda} u_\lambda(x) = x.$$

Logo, $\lim_{\lambda} u_\lambda(x) = x$, para todo $x \in AH = span\,\{a(h);\, a \in A,\, h \in H\}$. Como A atua não-degeneradamente sobre H, temos que $[AH] = H$. Portanto, $\lim_{\lambda} u_\lambda(x) = x$, para todo $x \in H$, como queríamos demonstrar.

Observação 1.8 *Lembremos que se H é um espaço com produto interno, então existe um único produto interno sobre o espaço de Hilbert $\widehat{H}$, onde $\widehat{H}$ é o completamento de H, estendendo o produto interno de H.*

Nosso próximo passo é mostrar que, a cada funcional linear positivo sobre uma C*-álgebra, existe uma representação da C*-álgebra associada.

Para isso, seja $\tau : A \to \mathbb{C}$ um funcional positivo sobre uma C*-álgebra A. Considere o conjunto

$$N_\tau := \{a \in A; \tau(a^*.a) = 0\}.$$

Afirmação 1: N_τ é um ideal fechado à esquerda de A.

De fato,

(i) Dados $a \in N_\tau$ e $b \in A$ temos que $\tau(a^*.a) = 0$ e $(b.a)^*.(b.a) \geq 0$; esta desigualdade segue do fato que, em uma C*-álgebra A, $a^*.a \geq 0$, para todo $a \in A$. (Ver, por exemplo, [Mur]; teorema 2.2.4). Como $a^*.b^*.b.a \leq \|b^*.b\|\,.a^*.a = \|b\|^2\,.a^*.a$, pela observação 1.4, e τ é um funcional linear positivo, temos que:

$$0 \leq \tau((b.a)^*.(b.a)) = \tau(a^*.b^*.b.a) \leq \|b\|^2\,.\tau(a^*.a) = 0 \Rightarrow \tau((b.a)^*.(b.a)) = 0.$$

Daí, $b.a \in N_\tau$.

(ii) Dados $a, b \in N_\tau$, vamos mostrar que $a + b \in N_\tau$.

Por hipótese, temos que $\tau(a^*.a) = 0 = \tau(b^*.b)$ e pela observação 1.5,

$$\tau(a^*.a) = 0 \Rightarrow \tau(b.a) = 0,$$

para todo $b \in A$. Logo,

$$\tau((a+b)^*.(a+b)) = \tau(a^*.a) + \tau(a^*.b) + \tau(b^*.a) + \tau(b^*.b) = 0.$$

Donde, $a + b \in N_\tau$.

(iii) Se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em N_τ tal que $a_n \to a$, então:

$$\tau(a_n^*.a_n) \to \tau(a^*.a).$$

Como $\tau(a_n^*.a_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\tau(a^*.a) = 0$ e portanto, $a \in N_\tau$.

De $(i) - (iii)$, temos a veracidade da afirmação 1.

Afirmação 2: A aplicação $< . , . >: A/N_\tau \times A/N_\tau \to \mathbb{C}$ definida por:

$$< a + N_\tau, b + N_\tau >:= \tau(b^*.a),$$

onde $a, b \in A$, é um produto interno em A/N_τ.

Com efeito, dados $a + N_\tau, b + N_\tau, c + N_\tau \in A/N_\tau$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

(1) $< \lambda(a + N_\tau), b + N_\tau >=< \lambda.a + N_\tau, b + N_\tau >= \tau(b^*.\lambda.a) = \lambda.\tau(b^*.a) =$

$$= \lambda. < a + N_\tau, b + N_\tau > .$$

(2) $< (a+N_\tau)+(c+N_\tau), b+N_\tau >=< (a+c)+N_\tau, b+N_\tau >= \tau(b^*.(a+c)) = \tau(b^*.a+b^*.c) =$

$$= \tau(b^*.a) + \tau(b^*.c) =< a + N_\tau, b + N_\tau > + < c + N_\tau, b + N_\tau > .$$

(3) $< b + N_\tau, a + N_\tau >= \tau(a^*.b) = \tau((b^*.a)^*) = \overline{\tau(b^*.a)} = \overline{< a + N_\tau, b + N_\tau >}.$

(4) Como τ é um funcional linear positivo, temos que

$$< a + N_\tau, a + N_\tau >= \tau(a^*.a) \geq 0$$

e, se $< a + N_\tau, a + N_\tau >= \tau(a^*.a) = 0$, então $a \in N_\tau$, ou seja, $a + N_\tau = 0 + N_\tau$.

De $(1) - (4)$ segue a afirmação 2.

Denotamos por H_τ o completamento de A/N_τ.

Dado $a \in A$, defina o operador $\phi(a) \in B(A/N_\tau)$ por:

$$\phi(a)(b + N_\tau) = a.b + N_\tau.$$

Note que $\phi(a)$ é linear e é limitado pois, para todo $b + N_\tau \in A/N_\tau$,

$$\|\phi(a)(b + N_\tau)\|^2 = \|a.b + N_\tau\|^2 =< a.b + N_\tau, a.b + N_\tau >= \tau(b^*.a^*.a.b) \leq$$

$$\leq \|a^*.a\| \, \tau(b^*.b) = \|a\|^2 . \|b + N_\tau\|^2 .$$

Donde segue que

$$\|\phi(a)(b + N_\tau)\| \leq \|a\| . \|b + N_\tau\| .$$

Logo, $\phi(a)$ é limitado com $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ e portanto, tem uma única extensão a um operador linear limitado $\phi_\tau(a) : H_\tau \to H_\tau$.

Afirmação 3: A aplicação $\phi_\tau : A \to B(H_\tau)$ dada por $a \mapsto \phi_\tau(a)$ é um *-homomorfismo.

De fato, dados $a, a', b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

(i) $\phi(\lambda.a + a')(b + N_\tau) = (\lambda.a + a')b + N_\tau = \lambda.(a.b + N_\tau) + (a'.b + N_\tau) =$

$$= \lambda.\phi(a)(b + N_\tau) + \phi(a')(b + N_\tau).$$

(ii) $\phi(a.a')(b + N_\tau) = a.a'.b + N_\tau = \phi(a)(a'.b + N_\tau) = \phi(a).\phi(a')(b + N_\tau)$.

(iii) $< \phi(a)(b + N_\tau), c + N_\tau >=< a.b + N_\tau, c + N_\tau >= \tau(c^*.a.b) = \tau((a^*.c)^*.b) =$

$$=< b + N_\tau, a^*.c + N_\tau >=< b + N_\tau, \phi(a^*)(c + N_\tau) > .$$

Donde $\phi(a)^* = \phi(a^*)$.

De $(i) - (iii)$, segue que $\phi : A \to B(A/N_\tau)$, dada por $a \mapsto \phi(a)$, é um *-homomorfismo e portanto, sua extensão $\phi_\tau : A \to B(H_\tau)$ também é um *-homomorfismo.

Da afirmação 3, segue que (H_τ, ϕ_τ) é uma representação da C*-álgebra A, chamada a **representação de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) associada a** τ.

Definição 1.21 *A representação (H, ϕ) da C*-álgebra A dada pela soma direta da família $(H_\tau, \phi_\tau)_{\tau \in S(A)}$, onde*

$$H := \oplus_{\tau \in S(A)} H_\tau \quad e \quad \phi(a)((x_\tau)_{\tau \in S(A)}) := (\phi_\tau(a)(x_\tau))_{\tau \in S(A)},$$

*para quaisquer $a \in A$ e $(x_\tau)_{\tau \in S(A)} \in H$, é chamada a **representação universal** de A.*

Agora temos condições de provar o resultado principal dessa seção.

Teorema 1.1 ***(Teorema de Gelfand-Naimark-Segal)*** *Toda C*-álgebra A possui uma representação fiel. Em particular, a representação universal da C*-álgebra A é fiel.*

Demonstração:

Seja (H, ϕ) a representação universal de A e seja $a \in A$ tal que $\phi(a) = \mathbf{0}$. Vamos mostrar que $a = 0$.

Sendo $a^*.a$ um elemento normal de A, existe um estado τ sobre A tal que $\|a^*.a\| = \tau(a^*.a)$. (Ver [Mur], Teorema 3.3.6). Desse modo, se $b = (a^*.a)^{1/4}$, então:

$$\|a\|^2 = \|a^*.a\| = \tau(a^*.a) = \tau(b^4). \qquad (I)$$

Como $\phi(a) = \mathbf{0}$ e $\phi(a)((x_\tau)_{\tau \in S(A)}) := (\phi_\tau(a)(x_\tau))_{\tau \in S(A)}$, temos que $\phi_\tau(a) = 0$, para todo $\tau \in S(A)$ e portanto,

$$\phi_\tau(b^4) = \phi_\tau(a^*.a) = \phi_\tau(a^*).\phi_\tau(a) = 0.$$

Donde, $\phi_\tau(b) = 0$.

Assim, temos que:

$$0 = \|\phi_\tau(b)(b + N_\tau)\|^2 = \left\|b^2 + N_\tau\right\|^2 =< b^2 + N_\tau, b^2 + N_\tau >= \tau((b^2)^*.b^2),$$

ou seja,

$$\tau((b^2)^*.b^2) = 0. \qquad (II)$$

Além disso, como $(b^4)^* = (a^*.a)^* = a^*.a = b^4$, então

$$(b^2.b^2)^* = (b^2)^*.(b^2)^* = ((b^2)^*)^2 = (b^2)^2.$$

Logo, $(b^2)^* = b^2. \quad (III)$

De $(I), (II)$ e (III), temos que:

$$\|a\|^2 = \tau(b^4) = \tau((b^2)^2) = \tau((b^2)^*.b^2) = 0.$$

Logo, $a = 0$.

Portanto, ϕ é injetiva e a representação universal é fiel.

□

Apresentaremos agora alguns resultados que serão utilizados nos próximos capítulos.

Teorema 1.2 *Seja $a \in A$ um elemento auto-adjunto da C^*-álgebra A. Então,*

$$a \in A^+ \Leftrightarrow \tau(a) \geq 0,$$

para todo funcional linear positivo $\tau : A \to \mathbb{C}$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Se $a \in A^+$, então o resultado segue da própria definição de funcional linear positivo.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\tau(a) \geq 0$, para todo funcional linear positivo $\tau : A \to \mathbb{C}$.

Sejam (H, ϕ) a representação universal de A e $x \in H$. Definindo a aplicação $\tau : A \to \mathbb{C}$ por

$$\tau(b) = (\phi(b)(x)|\, x),$$

para todo $b \in A$, temos que τ é um funcional linear, pois ϕ é um homomorfismo e $(.\,|\,.)$ é o produto interno de H, que é linear na primeira variável. Segue também que τ é positivo, pois, dado $c \in A^+$, existe $b \in A$ tal que $c = b^*.b$, assim

$$\tau(c) = (\phi(c)(x)|\, x) = (\phi(b^*.b)(x)|\, x) = (\phi(b)(x)|\, \phi(b)(x)) \geq 0.$$

Logo, por hipótese, obtemos que $\tau(a) = (\phi(a)(x)|\, x) \geq 0$. $(*)$

Como $a = a^*$, então $\phi(a)^* = \phi(a^*) = \phi(a)$, ou seja, $\phi(a)$ é auto -adjunto.

Assim, como a desigualdade $(*)$ vale para todo $x \in H$, temos que $\phi(a)$ é um operador positivo sobre H.

Portanto, $\phi(a) \in \phi(A)^+$, o que implica que $a \in A^+$, pois $\phi : A \to \phi(A)$ é um *-isomorfismo.

$\square$

Definição 1.22 *Seja (H,ϕ) uma representação de uma C*-álgebra A. Dizemos que $x \in H$ é um **vetor cíclico** para (H,ϕ) quando*

$$\phi(A)x = span\,\{\phi(a)x;\ a \in A\}$$

*é denso em H, isto é, $[\phi(A)x] = H$. Se a representação (H,ϕ) possui um vetor cíclico, dizemos que (H,ϕ) é uma **representação cíclica**.*

Teorema 1.3 *Seja A uma C*-álgebra e $\tau \in S(A)$. Então existe um único vetor $x_\tau \in H_\tau$ tal que $\tau(a) = (a + N_\tau|\, x_\tau)$, para todo $a \in A$. Além disso, x_τ é vetor cíclico e unitário para a representação GNS associada a τ, denotada por (H_τ, ϕ_τ), e $\phi_\tau(a)(x_\tau) = a + N_\tau$, para todo $a \in A$.*

Reciprocamente, se h é um vetor cíclico e unitário para a representação $\pi : A \to B(H_\pi)$, então $\tau : A \to \mathbb{C}$ definida por $\tau(a) = (\pi(a)h|\, h)$ é um estado sobre A e a aplicação $a \mapsto \pi(a)h$ induz um isomorfismo unitário $U : H_\tau \to H_\pi$ tal que $\pi(a) = U\pi_\tau(a)U^*$, para todo $a \in A$.

Demonstração:

(1) Consideremos a aplicação $\rho_0 : A/N_\tau \to \mathbb{C}$ definida por

$$\rho_0(a + N_\tau) = \tau(a).$$

Como τ é um funcional linear positivo de norma igual a 1, temos que ρ_0 é linear e limitada. Assim, podemos estendê-la a um funcional linear limitado $\rho : H_\tau \to \mathbb{C}$, onde H_τ é o completamento de A/N_τ no produto interno definido na afirmação 2. Assim, pelo teorema de representação de Riesz (ver, por exemplo, [Nar], Teorema 1.9), existe um único vetor $x_\tau \in H_\tau$ tal que

$$\rho(y) = (y \mid x_\tau),$$

para todo $y \in H_\tau$ e portanto, x_τ é o único vetor de H_τ tal que $\tau(a) = (a + N_\tau|\, x_\tau)$.

(2) Para a segunda parte, considere $a, b \in A$. Então, usando o produto interno $< . , . >$ sobre A/N_τ definido na afirmação 2, temos que:

$$< b + N_\tau, \phi_\tau(a)(x_\tau) >=< \phi_\tau(a^*)(b + N_\tau), x_\tau >=< a^*b + N_\tau, x_\tau >=$$

$$= \tau(a^*b) =< b + N_\tau, a + N_\tau >,$$

para todo $b + N_\tau \in A/N_\tau$. Assim, obtemos:

$$\phi_\tau(a)(x_\tau) = a + N_\tau,$$

para todo $a \in A$. Logo, $\phi_\tau(A)(x_\tau)$ é denso em H_τ, pois A/N_τ é denso em H_τ e

$$\phi_\tau(A)(x_\tau) = span\,\{\phi_\tau(a)(x_\tau);\ a \in A\} = span\,\{a + N_\tau;\ a \in A\} = A/N_\tau.$$

Portanto, o vetor x_τ é um vetor cíclico para a representação (H_τ, ϕ_τ) e, consequentemente, $\phi_\tau(A)$ atua não-degeneradamente sobre H_τ.

Resta mostrar que x_τ é unitário.

Para isso, vamos tomar uma aproximação da unidade para A, digamos $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Temos que $(\phi_\tau(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ é uma aproximação da unidade para $\phi_\tau(A)$ e portanto, converge para a identidade de H_τ. Logo,

$$\|x_\tau\|^2 =< x_\tau, x_\tau >= \lim_\lambda < \phi_\tau(u_\lambda)(x_\tau), x_\tau >= \lim_\lambda \tau(u_\lambda).$$

Segue agora do Teorema 3.3.3 de [Mur] que:

$$\lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \|\tau\|.$$

Como $\|\tau\| = 1$, obtemos $\|x_\tau\| = 1$.

Para a recíproca, note que $\tau : A \to \mathbb{C}$ definida por $\tau(a) = (\pi(a)h|\, h)$ é um funcional linear positivo de norma no máximo $\|h\|^2 = 1$.

De fato, que τ é linear segue do fato de π ser linear. Agora, dado $a \geq 0$, existe um elemento $b \in A$ tal que $a = b^*b$. Assim, τ é positivo com norma no máximo igual a 1, pois:

$$\tau(a) = (\pi(b^*b)h|\, h) = (\pi(b)h|\, \pi(b)h) \geq 0 \qquad e$$

$$|\tau(a)| = |(\pi(a)h|\, h)| \leq \|\pi(a)\| . \|h\|^2 \leq \|a\| . \|h\|^2 = \|a\|.$$

Na verdade $\|\tau\| = 1$, pois se $\{e_i\}_{i\in I}$ é uma aproximação da unidade para A, então $\pi(e_i) \to I_{H_\pi}$. Logo,

$$|(\pi(e_i)h|\, h)| \to |(h \mid h)| = 1$$

e como $|(\pi(e_i)h|\, h)| \leq \|\tau\|$, segue que $1 \leq \|\tau\|$.

Note agora que:

$$N_\tau := \{a \in A; \tau(a^*a) = (\pi(a^*a)h|\, h) = (\pi(a)h|\, \pi(a)h) = 0\} = \{a \in A; \pi(a)h = 0\}.$$

Assim, existe uma aplicação linear bem definida $U_0 : A/N_\tau \to H_\pi$ tal que

$$U_0(a + N_\tau) = \pi(a)h.$$

Note ainda que U_0 é uma isometria. *De fato,*

$$(U_0(a + N_\tau)|U_0(b + N_\tau)) = (\pi(a)h|\pi(b)h) = (\pi(b^*a)h|\, h) = \tau(b^*a) =< a + N_\tau, b + N_\tau > .$$

Logo, U_0 pode ser estendido a uma isometria linear U do completamento H_τ de A/N_τ sobre

$$\overline{span}\,\{\pi(a)h; a \in A\} = H_\pi,$$

pois h é cíclico. Portanto, U é isomorfismo unitário e, pelo cálculo:

$$U\phi_\tau(a)(b+N_\tau) = U(ab+N_\tau) = \pi(ab)h = \pi(a)\pi(b)h = \pi(a)U(b+N_\tau),$$

temos que

$$U\phi_\tau(a) = \pi(a)U \Rightarrow \pi(a) = U\phi_\tau(a)U^*.$$

□

Para os próximos resultados, precisaremos das seguintes definições.

Definição 1.23 *Seja S um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Dizemos que S é* ***invariante*** *para um subconjunto $A \subset B(H)$ quando S é invariante para cada operador em A, isto é, $a(S) \subset S$, para todo $a \in A$.*

Definição 1.24 *Uma C*-sub-álgebra A de $B(H)$ é* ***irredutível*** *sobre H se os únicos subespaços vetoriais fechados de H que são invariantes por A são $\{\mathbf{0}\}$ e o próprio H.*

Teorema 1.4 *Seja (H,ϕ) uma representação não-degenerada de uma C*-álgebra A. Então, (H,ϕ) é uma soma direta de representações cíclicas da C*-álgebra A.*

Demonstração:

Para cada $x \in H$, consideremos $H_x = [\phi(A)(x)]$. Uma aplicação do lema de Zorn, mostra que existe um conjunto maximal Λ de elementos não-nulos de H tais que os espaços H_x, para $x \in \Lambda$, são dois a dois ortogonais. Assim, se $y \in (\bigcup_{x\in\Lambda} H_x)^\perp$, temos:

$$< y, \phi(a^*.b)(x) >= 0 \Rightarrow < \phi(a)(y), \phi(b)(x) >= 0,$$

para quaisquer $x \in \Lambda$ e $a, b \in A$. Segue que H_x e H_y são ortogonais para todo $x \in \Lambda$ e, sendo (H,ϕ) uma representação não-degenerada, obtemos $y \in H_y$. Pela maximalidade de Λ, $y = 0$ e portanto, $H = \oplus_{x\in\Lambda} H_x$.

Note que os espaços H_x são invariantes por $\phi(A)$ e a restrição $\phi_x : A \to B(H_x)$ definida por

$$\phi_x(a) = \phi(a)|_{H_x}$$

é uma representação de A que tem x como um vetor cíclico.

Portanto, (H,ϕ) é a soma direta das representações cíclicas $(H_x,\phi_x)_{x\in\Lambda}$.

□

Definição 1.25 *Duas representações (H_1,ϕ_1) e (H_2,ϕ_2) de uma C*-álgebra A são chamadas* ***unitariamente equivalentes*** *ou, simplesmente,* ***equivalentes*** *quando existe uma aplicação $U : H_1 \to H_2$ que é unitária, isto é, U satisfaz $UU^* = \mathbf{1}_{H_2}, U^*U = \mathbf{1}_{H_1}$, tal que*

$$\phi_2(a) = U\phi_1(a)U^*,$$

para todo $a \in A$.

Teorema 1.5 *Suponha que* (H_1, ϕ_1) *e* (H_2, ϕ_2) *são duas representações de uma C*-álgebra* A *com vetores cíclicos* x_1 *e* x_2*, respectivamente. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *Existe uma aplicação linear unitária* $U : H_1 \to H_2$ *tal que*

$$x_2 = U(x_1) \quad e \quad \phi_2(a) = U\phi_1(a)U^*,$$

para todo $a \in A$;

(ii) $< \phi_1(a)(x_1), x_1 >=< \phi_2(a)(x_2), x_2 >$, *para todo* $a \in A$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$

Como $x_2 = U(x_1)$, $\phi_2(a) = U\phi_1(a)U^*$, para qualquer elemento $a \in A$ e U satisfaz $UU^* = \mathbf{1}_{H_2}, U^*U = \mathbf{1}_{H_1}$, temos

$$< \phi_2(a)(x_2), x_2 >=< \phi_2(a)U(x_1), U(x_1) >=< U^*\phi_2(a)U(x_1), x_1 >=$$
$$=< U^*U\phi_1(a)U^*U(x_1), x_1 >=< \phi_1(a)(x_1), x_1 >,$$

para todo $a \in A$. Isso conclui $(i) \Rightarrow (ii)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Defina a aplicação $U_0 : \phi_1(A)(x_1) \to H_2$ por

$$U_0(\phi_1(a)(x_1)) = \phi_2(a)(x_2).$$

Note que U_0 é linear e é uma isometria, pois ϕ_1 e ϕ_2 são lineares e:

$$\|\phi_2(a)(x_2)\|^2 =< \phi_2(a)(x_2), \phi_2(a)(x_2) >=< \phi_2(a^*a)(x_2), x_2 > .$$

Como $< \phi_1(a)(x_1), x_1 >=< \phi_2(a)(x_2), x_2 >$, para todo elemento $a \in A$, temos que:

$$\|\phi_2(a)(x_2)\|^2 =< \phi_1(a^*a)(x_1), x_1 >=< \phi_1(a)(x_1), \phi_1(a)(x_1) >= \|\phi_1(a)(x_1)\|^2 .$$

Assim, sendo $[\phi_1(A)(x_1)] = H_1$, podemos estender U_0 a uma isometria linear

$$U : H_1 \to H_2$$

e, como $U(H_1) = [\phi_2(A)(x_2)] = H_2$, temos que a aplicação linear U é unitária.

Agora, dados $a, b \in A$, segue que:

$$U.\phi_1(a).\phi_1(b)x_1 = U.\phi_1(a.b)x_1 = \phi_2(a.b)x_2 = \phi_2(a).\phi_2(b)x_2 = \phi_2(a).U.\phi_1(b)x_1,$$

donde

$$U.\phi_1(a)(\phi_1(b)x_1) = \phi_2(a).U(\phi_1(b)x_1),$$

para todo $b \in A$.

Assim, temos que $U.\phi_1(a) = \phi_2(a).U$, para todo $a \in A$.

Portanto,

$$U.\phi_1(a).U^* = \phi_2(a),$$

para qualquer elemento $a \in A$.

Além disso, como $\phi_2(a).U(x_1) = U.\phi_1(a)(x_1) = \phi_2(a)(x_2)$ implica que

$$\phi_2(a)(U(x_1) - x_2) = 0,$$

para todo $a \in A$, e ϕ_2 é não-degenerada, segue que $U(x_1) = x_2$.

□

Definição 1.26 *Uma representação (H, ϕ) de uma C*-álgebra A é **irredutível** se a álgebra $\phi(A)$ atua irredutivelmente sobre H, isto é, se os únicos subespaços fechados de H que são invariantes por $\phi(A)$ são o subespaço nulo $\{\boldsymbol{0}\}$ e H.*

Pelo teorema 1.5, temos que: se duas representações de uma C*-álgebra são equivalentes, então a irredutibilidade de uma implica na irredutibilidade da outra.

Teorema 1.6 *Seja (H, ϕ) uma representação não-nula de uma C*-álgebra A. Se (H, ϕ) é irredutível, então todo vetor não-nulo de H é cíclico para essa representação.*

Demonstração:

Seja $x \in H$ um vetor não-nulo de H. Note que o espaço $[\phi(A)x]$ é invariante por $\phi(A)$. Como (H, ϕ) é irredutível, então $[\phi(A)x] = \{\mathbf{0}\}$ ou $[\phi(A)x] = H$. Agora, como ϕ é não-nula, existem $y \in H$ e $a \in A$ tais que $\phi(a)y \neq 0$.

Logo, $[\phi(A)y] = H$ e ϕ é não-degenerada. Portanto, o espaço $\phi(A)x$ não é o espaço nulo, ou seja, $[\phi(A)x] = H$ e temos que x é vetor cíclico para (H, ϕ).

□

1.3 A álgebra dos operadores compactos

Nesta seção, introduzimos o conceito de um operador linear compacto sobre um espaço de Hilbert e apresentamos alguns resultados básicos sobre esses operadores.

Definição 1.27 *Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno $(.\,|\,.)$. Um operador linear limitado $T : H \to H$ é dito **compacto** quando o conjunto*

$$T(H_1) := \{T(h);\ h \in H_1\}$$

é um subconjunto relativamente compacto de H, onde $H_1 := \{h \in H;\ \|h\| \leq 1\}$.

Observação 1.9 *Como operadores lineares compactos são contínuos (ver, por exemplo, [Nar], teorema 14.6), então:*

(1) *Esses operadores levam conjuntos compactos em conjuntos compactos;*

(2) *A composição de operadores compactos é um operador compacto;*

(3) *A soma de operadores compactos é um operador compacto;*

(4) *A combinação linear de operadores compactos é um operador compacto.*

Logo, os operadores compactos sobre um espaço de Hilbert H formam uma sub-álgebra $K(H)$ de $B(H)$, onde o espaço dos operadores lineares limitados de H, $B(H)$, com a norma usual, é uma C-álgebra unital considerando o produto a composição de operadores, a involução o adjunto de operadores e a unidade o operador identidade.*

Ainda nessa seção, mostraremos que, na verdade, $K(H)$ é uma C*-sub-álgebra de $B(H)$, isto é, mostraremos que $K(H)$ é fechada em relação a operação involução e que é fechada na topologia da norma.

Definição 1.28 *Seja $T : H \to H$ um operador linear sobre um espaço de Hilbert H. A dimensão do subespaço $T(H)$ será chamada de* ***posto do operador*** *T. Quando $T(H)$ tem dimensão finita, denotamos a dimensão de $T(H)$ por $dim\, T(H) = n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e dizemos que T tem* ***posto finito*** *igual a n.*

Proposição 1.6 *Seja H um espaço de Hilbert. Então:*

(i) *Todo operador de posto finito é um operador compacto.*

(ii) *Um operador linear limitado T é compacto se, e somente se, T é limite em norma de uma sequência de operadores de posto finito.*

(iii) *Se $h \otimes \overline{k} : H \to H$ denota o operador $(h \otimes \overline{k})(g) := (g \mid k)h$, então*

$$K(H) = \overline{span}\left\{h \otimes \overline{k};\ h, k \in H\right\}.$$

Demonstração:

(i) Sejam T um operador de posto finito, digamos $dim\, T(H) = n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ uma base ortonormal do espaço $T(H)$. Então, para $h \in H$, temos que:

$$T(h) = \sum_{i=1}^{n} (T(h)|\, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} (h|\, T^*(e_i))e_i = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \overline{T^*(e_i)}\right)(h) \qquad (I).$$

Daí,

$$\|T(h)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |(h|\, T^*(e_i))| \,.\, \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|h\| \,.\, \|T^*(e_i)\| = \|h\| \,.\, \sum_{i=1}^{n} \|T^*(e_i)\| \,.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} \|T^*(e_i)\|$ é finito, então T é limitado com $\|T\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|T^*(e_i)\|$. Assim, dado $h \in H_1$, temos que:

$$\|T(h)\| \leq \|T\|.$$

Logo, $T(H_1) \subset \overline{B(0, \|T\|)}$, onde $\overline{B(0, \|T\|)} = \{h \in H;\ \|h\| \leq \|T\|\}$ tem interseção compacta com o espaço normado de dimensão finita $T(H)$.

Portanto, $\overline{T(H_1)}$ é um subconjunto compacto de H e segue que T é compacto.

(ii) Suponhamos agora que $\{T_n\}_n$ é uma sequência de operadores de posto finito convergindo em norma para T. Vamos mostrar que T é compacto.

Como H é um espaço métrico completo, é suficiente provar que cada sequência $\{T(h_n)\}_n$, com $\|h_n\| \leq 1$, tem uma subsequência de Cauchy.

De fato, pelo item (i), temos que cada T_n é compacto e, em particular, é limitado. Assim, $T_n \to T$ implica que T limitado.

Logo, $T(H)$ é compacto se toda sequência $(T(h_n))_n$ em T(H) tem uma subsequência de Cauchy.

Desse modo, para cada m, podemos indutivamente escolher sequências $\{h_{n_j,m}\}$ tais que $\{h_{n_j,m+1}\}$ é uma subsequência de $\{h_{n_j,m}\}$ e $\{T_m(h_{n_j,m})\}$ converge.

Se definimos $y_m := h_{n_m,m}$, então $\{y_m\}_m$ é uma subsequência de $\{h_n\}_n$ e $\{T_k(y_m)\}_m$ converge para todo k.

Assim, como $\{T_n\}_n$ converge em norma para T, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $k, M \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|T - T_k\| < \epsilon/3 \ \text{ e } \ \|T_k(y_m) - T_k(y_l)\| < \epsilon/3, \quad (II)$$

para quaisquer $m, l \geq M$.

Agora, como $\{y_m\}_m$ é uma subsequência de $\{h_n\}_n$ e $\|h_n\| \leq 1$, temos que $\|y_m\| \leq 1$.

Logo, de $\|y_m\| \leq 1$ e (II), temos

$$\|T(y_m) - T(y_l)\| \leq \|T(y_m) - T_k(y_m)\| + \|T_k(y_m) - T_k(y_l)\| + \|T_k(y_l) - T(y_l)\| \leq$$

$$\leq \|T - T_k\| . \|y_m\| + \|T_k(y_m) - T_k(y_l)\| + \|T - T_k\| . \|y_l\| < \epsilon,$$

para quaisquer $m, l \geq M$.

Portanto, $\{T(y_m)\}_m$ é uma subsequência de Cauchy de $\{h_n\}_n$ o que mostra que T é compacto.

Reciprocamente, suponha que T é compacto.

Sejam $\{e_i\}_{i \in I}$ uma base ortonormal para H e $\Gamma := \{F \subset I;\ F \text{ é finito}\}$. Para cada $F \in \Gamma$, seja P_F a projeção ortogonal sobre $span\{e_i;\ i \in F\}$. Assim, Γ é parcialmente ordenado por inclusão e para qualquer $h \in H$, temos:

$$\|P_F(h) - h\|^2 = \left\| \sum_{i \notin F} (h \mid e_i) e_i \right\|^2 .$$

Como $\{e_i\}_{i \in I}$ é uma base ortonormal, temos que

$$\left\| \sum_{i \notin F} (h \mid e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i \notin F} |(h \mid e_i)|^2 .$$

Logo,

$$\|P_F(h) - h\|^2 = \sum_{i \notin F} |(h \mid e_i)|^2 \to 0, \text{ quando F cresce em } \Gamma. \quad (III)$$

Afirmação: A rede $P_F T \to T$ quando F cresce em Γ.

Suponhamos que a afirmação é falsa. Então, passando para uma subrede de Γ, podemos assumir que existem $\epsilon > 0$ e vetores unitários $h_F \in H$ tais que:

$$\|P_F T(h_F) - T(h_F)\| \geq \epsilon.$$

Como T é compacto, passando a outra subrede se necessário, temos que $T(h_F) \to h$, para algum $h \in H$.

Assim,

$$\epsilon \leq \|T(h_F) - P_F T(h_F)\| = \|(I_d - P_F)T(h_F) - (I_d - P_F)h + (I_d - P_F)h\| \leq$$

$$\leq \|(I_d - P_F)(T(h_F) - h)\| + \|h - P_F(h)\| \leq \|T(h_F) - h\| + \|h - P_F(h)\| . \quad (IV)$$

De (III) e (IV) segue que:

$$0 < \epsilon \leq \|T(h_F) - h\| + \|h - P_F(h)\| \to 0$$

quando F cresce em Γ, o que é um absurdo.

Portanto, a rede $P_F T \to T$ quando F cresce em Γ.

Agora, como a imagem de $P_F T$ é um subespaço do espaço de dimensão finita $span\,\{e_i;\ i \in F\}$, cada $P_F T$ é um operador de posto finito. Logo, segue da afirmação acima que T é limite em norma desses operadores, o que conclui (ii).

(iii) A relação (I) mostra que $span\left\{h \otimes \overline{k};\ h, k \in H\right\}$ é o conjunto dos operadores de posto finito e portanto, de (ii), temos a igualdade

$$K(H) = \overline{span}\left\{h \otimes \overline{k};\ h, k \in H\right\}.$$

$\square$

Como corolário da proposição 1.6, temos que $K(H)$ é uma C*-sub-álgebra de $B(H)$.

Corolário 1.1 *O conjunto $K(H)$ dos operadores compactos sobre o espaço de Hilbert H é um ideal fechado de $B(H)$ e, em particular, $K(H)$ é uma C*-sub-álgebra de $B(H)$.*

Demonstração:

Na observação 1.9, vimos que $K(H)$ é uma sub-álgebra de $B(H)$ e, na proposição 1.6, vimos que $K(H)$ é fechado. Resta mostrar que $K(H)$ é um ideal de $B(H)$.

(i) Seja $T : H \to H$ um operador de posto finito.

Então, pela proposição 1.6, temos que $T = \sum_n x_n \otimes \overline{y_n}$, para um número finito de elementos $x_n, y_n \in H$.

Note que $(x \otimes \overline{y})^* = y \otimes \overline{x}$ pois, dados $h, k \in H$,

$$((x \otimes \overline{y})^*(h)|\, k) = (h\,|(x \otimes \overline{y})(k)) = (h\,|(k \mid y)x) = \overline{(k \mid y)}.(h \mid x) =$$

$$= (y \mid k).(h \mid x) = ((h \mid x)y \mid k) = ((y \otimes \overline{x})(h)|\, k).$$

Como vale a igualdade $((x \otimes \overline{y})^*(h)|\, k) = ((y \otimes \overline{x})(h)|\, k)$, para quaisquer $h, k \in H$, segue que $(x \otimes \overline{y})^* = y \otimes \overline{x}$.

Daí, T^* também tem posto finito, pois:

$$T^* = \left(\sum_n x_n \otimes \overline{y_n}\right)^* = \sum_n (x_n \otimes \overline{y_n})^* = \sum_n y_n \otimes \overline{x_n}.$$

(ii) Agora, se T é um operador compacto sobre H, então existe uma sequência de operadores de posto finito, $\{T_n\}_n$, convergindo em norma para o operador T. Assim, T_n^* converge em norma para T^*.

De fato,

$$T_n \to T \text{ em norma } \Rightarrow \|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Como cada T_n^* é um operador de posto finito por (i) e T_n^* converge em norma para T^* temos, pela proposição 1.6, que T^* é compacto.

Logo, como o produto ST em $B(H)$ de um operador limitado S e um operador de posto finito T também é de posto finito e vimos acima que os adjuntos dos operadores de posto finito também tem posto finito, o conjunto desses operadores é um ideal de $B(H)$ e portanto, o seu fecho $K(H)$ também é um ideal de $B(H)$.

□

Capítulo 2

C*-Módulos de Hilbert

Iniciamos esse capítulo introduzindo os conceitos de módulos de Hilbert e apresentando algumas de suas propriedades básicas, que serão necessárias para definirmos a noção de Equivalência de Morita no próximo capítulo. Em seguida, tratamos dos operadores que atuam sobre esses módulos e da construção de representações de C*-álgebras. Além disso, introduzimos alguns conceitos e propriedades do produto tensorial espacial. Em nosso contexto, A denotará uma C*- álgebra e H denotará um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, a menos em menção do contrário.

2.1 Módulos de Hilbert

O objetivo dessa seção é introduzir o conceito de módulo de Hilbert e apresentar uma gama de propriedades e exemplos que reaparecerão no decorrer dessa dissertação.

Definição 2.1 *Um espaço vetorial complexo X é dito um **A-módulo à direita** quando existe uma aplicação bilinear* $. : X \times A \longrightarrow X$, *definida por* $(x, a) \longmapsto x.a$, *satisfazendo* $\lambda(x.a) = (\lambda x).a = x.(\lambda a)$, *onde* $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in A$, $x \in X$ *e as condições usuais de consistência, isto é, dados* $a, b \in A$, $x, y \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$, *temos que* $x.a + y.b \in X$ *e* $\lambda(x.a) \in X$.

Denotaremos um A-módulo à direita por X ou X_A, este último, quando quisermos enfatizá-lo ou para evitar uma possível confusão.

Definição 2.2 *Um A-módulo à direita X é dito um **A-módulo à direita com produto interno** quando existe uma aplicação* $< \, , \, >_A$: $X \times X \longrightarrow A$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $< x, \lambda y + \mu z >_A = \lambda < x, y >_A + \mu < x, z >_A$;

(b) $< x, y.a >_A = < x, y >_A a$;

(c) $< x, y >_A^* = < y, x >_A$;

(d) $< x, x >_A \geq 0$;

(e) $< x, x >_A = 0 \Rightarrow x = 0$,

para quaisquer $x, y, z \in X, a \in A$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Observação 2.1 *Note que das condições (a) e (c) da definição 2.2, temos que* $< . , . >_A$ *é linear conjugada na primeira variável, isto é, dados* $x, y, z \in X$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$< \lambda x + \mu y, z >_A = \bar{\lambda} < x, z >_A + \bar{\mu} < y, z >_A .$$

Além disso, as condições (b) e (c) dessa definição implicam que

$$< x.a, y >_A = a^* < x, y >_A .$$

Segue daí que o espaço gerado pelo conjunto $\{< x, y >_A;\ x, y \in X\}$, *denotado por*

$$span \{< x, y >_A;\ x, y \in X\},$$

é um ideal em A.

Apresentaremos agora dois exemplos básicos de A-módulo com produto interno que nos ajudarão a fixar as idéias.

Exemplo 2.1 *Os espaços vetoriais* H *com produto interno* $(. \mid .)$ *sobre* $\mathbb{C}$, *com o produto definido por* $h.\lambda = \lambda h$ *e com o produto interno definido por* $< h, k >_{\mathbb{C}} := (k \mid h)$, *onde* $h, k \in H$, *são* $\mathbb{C}$*-módulos à direita com produto interno.*

De fato, dados $h,\ k,\ w \in H$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos:

(a) $< x, \lambda y + \mu z >_{\mathbb{C}} = (\lambda y + \mu z \mid x) = \lambda(y \mid x) + \mu(z \mid x) = \lambda < x, y >_{\mathbb{C}} + \mu < x, z >_{\mathbb{C}}$;

(b) $< h, k.\lambda >_{\mathbb{C}} = (\lambda k \mid h) = \lambda(k \mid h) = (k \mid h)\lambda = < h, k >_{\mathbb{C}} \lambda$;

(c) $\overline{< h, k >_{\mathbb{C}}} = \overline{(k \mid h)} = (h \mid k) = < k, h >_{\mathbb{C}}$;

(d) $< h, h >_{\mathbb{C}} = (h \mid h) \geq 0$;

(e) $< h, h >_{\mathbb{C}} = 0 = (h \mid h) \Rightarrow h = 0$.

Exemplo 2.2 *A própria C*-álgebra A é um A-módulo à direita com produto interno com sua multiplicação usual e a aplicação $< . , . >_A$: $A \times A \to A$ definida por $< a, b >_A = a^*b$, para quaisquer a, $b \in A$.*

De fato, dados $a, b, c \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos que:

(a) $< a, \lambda b + \mu c >_A = a^*(\lambda b + \mu c) = \lambda a^*b + \mu a^*c = \lambda < a, b >_A + \mu < a, c >_A$;

(b) $< a, bc >_A = a^*bc = < a, b >_A c$;

(c) $< a, b >_A^* = (a^*b)^* = b^*a = < b, a >_A$;

(d) $< a, a >_A^* = a^*a \geq 0$;

(e) $< a, a >_A^* = a^*a = 0 \Rightarrow\ a = 0$.

Observação 2.2 *De modo análogo, podemos definir um A-módulo à esquerda com produto interno e denotaremos o produto interno à esquerda por $({}_A< . , . >)$ e um A-módulo à esquerda por X ou $({}_AX)$, para evitar qualquer confusão. Assim, por exemplo, a C*-álgebra A com a aplicação $({}_A< . , . >) : A \times A \to A$, definida por $({}_A< a, b >) = ab^*$, onde a, $b \in A$, é um A-módulo à esquerda com produto interno.*

Observação 2.3 *Frequentemente, omitiremos o termo* ***à direita*** *da expressão: X é um A-módulo à direita; e escreveremos apenas X é um A-módulo.*

Como no caso escalar, esperamos que um A-módulo de Hilbert seja um A-módulo com produto interno X, que é completo na norma

$$\|x\|_A := \|< x, x >_A\|^{1/2}; x \in X.$$

Esta fórmula, define de fato uma norma em X, mas para mostrarmos essa afirmação, precisamos de uma propriedade fundamental para produtos internos com valores em C*-álgebras.

Lema 2.1 ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Se X é um A-módulo com produto interno e $x, y \in X$, então:*

$$< x, y >_A^* < x, y >_A \leq \|< x, x >_A\| < y, y >_A .$$

Demonstração: Sejam x, $y \in X$ e $a \in A$. Vamos denotar $\|< x, x >_A\| = k$.
Assim, $xa - y \in X$ e pela condição (d) da definição 2.2, temos que:

$$0 \leq < xa - y, xa - y >_A = < xa, xa >_A - < xa, y >_A - < y, xa >_A + < y, y >_A =$$

$$= a^* < x,x >_A a - a^* < x,y >_A - < y,x >_A a + < y,y >_A \leq$$

$$\leq \| < x,x >_A \| \, a^*a - a^* < x,y >_A - < y,x >_A a + < y,y >_A =$$

$$= ka^*a - a^* < x,y >_A - < y,x >_A a + < y,y >_A .$$

A última desigualdade segue do fato que numa C*-álgebra A vale $a^*ba \leq \|b\| \, a^*a$, quando $a, b \in A$ e $b \geq 0$. (Ver observação 1.4).

Logo,

(i) Se k=0, então

$$k = \| < x,x >_A \| = 0 \Rightarrow < x,x >_A = 0 \ \Rightarrow x = 0 \Rightarrow < x,y >_A = 0.$$

(ii) Se $k \neq 0$, tomando $a = \frac{< x,y >_A}{k}$, temos que:

$$0 \leq k \frac{< x,y >_A^*}{k} . \frac{< x,y >_A}{k} - \frac{< x,y >_A^*}{k} < x,y >_A - < x,y >_A^* \frac{< x,y >_A}{k} + < y,y >_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < x,y >_A^* \frac{< x,y >_A}{k} \leq < y,y >_A .$$

Donde

$$< x,y >_A^* . < x,y >_A \leq \| < x,x >_A \| . < y,y >_A .$$

□

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.1 *Se X é um A-módulo com produto interno, então*

$$\|x\|_A := \| < x,x >_A \|^{1/2}$$

define uma norma em X tal que

$$\|x.a\|_A \leq \|x\|_A . \|a\| ,$$

para todo $x \in X$ e $a \in A$.

Além disso, o módulo normado $(X, \| . \|_A)$ é não-degenerado no sentido que os elementos da forma $x.a$ geram um subespaço denso em X, na verdade,

$$X. < X,X >_A := span \{ x. < y,z >_A ; x,y,z \in X \}$$

é $\|.\|_A$-denso em X.

Demonstração:

Vamos provar inicialmente que $\| . \|_A$ é uma norma.

Sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:

(1) $\|\lambda.x\|_A = \|<\lambda.x, \lambda.x>_A\|^{1/2} = \left\|\bar{\lambda}\lambda <x,x>_A\right\|^{1/2} = |\lambda| \, \|x\|_A$.

(2) De (d) e (e) da definição 2.2, temos que:

$$\|x\|_A = \|<x,x>_A\|^{1/2} \geq 0 \quad \text{ e } \quad \|x\|_A = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Pelo lema 2.1, temos que $\|<x,y>_A\| \leq \|x\|_A \, \|y\|_A$.

De fato,

$$0 \leq <x,y>_A^* \, . <x,y>_A \leq \|<x,x>_A\| <y,y>_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|<x,y>_A\|^2 = \|<x,y>_A^* <x,y>_A\| \leq \|<x,x>_A\| \, \|<y,y>_A\| = \|x\|_A^2 \, \|y\|_A^2 ,$$

donde

$$\|<x,y>_A\| \leq \|x\|_A \, \|y\|_A .$$

(3) Da desigualdade acima segue que

$\|x+y\|_A^2 = \|<x+y, x+y>_A\| \leq$

$$\leq \|<x,x>_A\| + \|<x,y>_A\| + \|<y,x>_A\| + \|<y,y>_A\| \leq$$

$$\leq \|x\|_A^2 + 2\,\|x\|_A \, \|y\|_A + \|y\|_A^2 = (\|x\|_A + \|y\|_A)^2.$$

Daí,

$$\|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A .$$

De (1), (2) e (3), segue que $\| . \|_A$ é uma norma.

(4) Dado $a \in A$, temos que:

$$\|x.a\|_A^2 = \|<x.a, x.a>_A\| = \|a^* <x,x>_A .a\| \leq \|a^*\| \, \|x\|_A^2 \, \|a\| = \|a\|^2 \, \|x\|_A^2 .$$

Logo,

$$\|x.a\|_A \leq \|a\| \, \|x\|_A .$$

(5) Vamos agora mostrar que

$$X. <X,X>_A := span \{x. <y,z>_A; x,y,z \in X\}$$

é $\|.\|_A$-denso em X_A.

Seja $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma aproximação da unidade para o ideal fechado

$$B = \overline{span} \{<x,y>_A; x,y \in X\} .$$

Como $\|x - x\mu_\lambda\|_A^2 = \|< x - x\mu_\lambda, x - x\mu_\lambda >_A\| =$

$$= \|< x, x >_A - < x, x >_A \mu_\lambda - \mu_\lambda < x, x >_A + \mu_\lambda < x, x >_A \mu_\lambda\|,$$

temos que, dado $\epsilon > 0$ existe μ_λ tal que

$$\|x - x\mu_\lambda\|_A < \epsilon/2. \qquad (I)$$

Além disso, sendo $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma aproximação da unidade para B, existem elementos $x_i, y_i \in X$ tais que

$$\left\|\sum < x_i, y_i >_A - \mu_\lambda\right\| < \epsilon/(2\,\|x\|_A). \qquad (II)$$

Notemos agora que, de (I) e (II), obtemos:

$$\left\|x - x.\sum < x_i, y_i >_A\right\|_A < \epsilon.$$

De fato,

$$\left\|x - x\mu_\lambda + x\mu_\lambda - x.\sum < x_i, y_i >_A\right\|_A \leq \|x - x\mu_\lambda\|_A + \left\|x\mu_\lambda - x.\sum < x_i, y_i >_A\right\|_A <$$

$$< \epsilon/2 + \|x\|_A . \left\|\mu_\lambda - \sum < x_i, y_i >_A\right\| < \epsilon.$$

Logo, a afirmação (5) é válida e concluímos a demonstração.

$\square$

Definição 2.3 *Um A-módulo com produto interno X que é completo na norma $\| \,.\, \|_A$, definida no corolário 2.1, é chamado um* ***A-módulo de Hilbert****.*

Consideremos agora o ideal $I = span\{< x, y >_A; x, y \in X\}$ da C*-álgebra A, onde X é um A-módulo com produto interno.

Definição 2.4 *Um A-módulo de Hilbert X é dito um* ***A-módulo de Hilbert pleno*** *quando o ideal*

$$I = span\{< x, y >_A; x, y \in X\}$$

é denso em A.

Exemplo 2.3 *Um espaço de Hilbert H sobre $\mathbb{C}$, com a multiplicação escalar usual (dada por $h.\lambda := \lambda.h$, onde $\lambda \in \mathbb{C}, h \in H$) e com o produto interno definido por $< h, k >_{\mathbb{C}} = (k \mid h)$, onde $h, k \in H$, é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert pleno.*

De fato, as condições $(a)-(e)$ da definição 2.2 seguem do exemplo 2.1. Como temos que

$$\|h\|_{\mathbb{C}} = |< h, h >_{\mathbb{C}}|^{1/2} = |(h \mid h)|^{1/2} = \|h\|\,,$$

onde $\|\ .\ \|$ é a norma em H, e $< h, k >_{\mathbb{C}} = (k \mid h)$, segue que H é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert à direita e é pleno pois, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, tomando $h \neq 0$ em H, temos que:

$$\lambda = \lambda\frac{(h \mid h)}{\|h\|^2} = \left(\lambda\frac{h}{\|h\|}|\frac{h}{\|h\|}\right) =< \frac{h}{\|h\|}, \lambda\frac{h}{\|h\|} >_{\mathbb{C}} \in I,$$

onde I=span$\{< h, k >_{\mathbb{C}}; h, k \in H\}$, ou seja, $I = \mathbb{C}$.

Exemplo 2.4 *Se A é uma C*-álgebra, então A_A é um A-módulo de Hilbert à direita pleno com a multiplicação da álgebra A, a.b= ab, onde a, $b \in A$ e com o produto interno definido por $< a, b >_A = a^*b$.*

De fato, as condições $(a)-(e)$ da definição 2.2 seguem do exemplo 2.2. Para ver que A_A é um A-módulo de Hilbert, basta notar que:

$$\|a\|_A = \|< a, a >_A\|^{1/2} = \|a^*a\|^{1/2} = \|a\|$$

e para ver que A_A é pleno, basta tomar uma aproximação da identidade de A.

Exemplo 2.5 *Se H é um espaço de Hilbert e K=K(H) é a C*-álgebra dos operadores compactos sobre H, então H é um K-módulo de Hilbert à esquerda pleno com a multiplicação definida por T.h=T(h) e com o produto interno definido por $({}_K< h, k >) := h \otimes \bar{k}$, onde $h \otimes \bar{k}(m) := h. < k, m >_{\mathbb{C}} = (m \mid k)h$, com h, k, $m \in H$.*

De fato, note que $(h \otimes \bar{k})^* = k \otimes \bar{h}$, pois, dados $h, k, l, m \in H$, temos que:

$$(h \otimes k(l)|\, m) = ((l \mid k)h|\, m) = (l \mid k)(h \mid m) = (l \mid \overline{(h \mid m)}k) = (l \mid (m \mid h)k) = (l \mid k \otimes \bar{h}(m)).$$

Assim, dados $h, h', k \in H$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, obtemos:

(a) $({}_K< \lambda h + \mu h', k >) = \lambda({}_K< h, k >) + \mu({}_K< h', k >)$.

De fato, para quaisquer $l, m \in H$, temos que

$$\big((\lambda h + \mu h') \otimes \bar{k}(l)|\, m\big) = ((l \mid k)\,(\lambda h + \mu h') \mid m) = (l \mid k)\,(\lambda h + \mu h'|\, m) =$$

$$= \lambda\,(l \mid k)\,(h \mid m) + \mu\,(l \mid k)\,(h' \mid m) = \lambda\,((l \mid k)\,h \mid m) + \mu\,((l \mid k)\,h' \mid m) =$$

$$= \lambda\,\big(h \otimes \bar{k}(l)|\, m\big) + \mu\,\big(h' \otimes \bar{k}(l)|\, m\big) = \big(\lambda\,\big(h \otimes \bar{k}\big)\,(l) + \mu\,\big(h' \otimes \bar{k}\big)\,(l)|\, m\big)\,;$$

(b) $({}_K\!< T.h, k >) = ({}_K\!< T(h), k >) = T(h) \otimes \bar{k} = T.(h \otimes \bar{k}) = T.({}_K\!< h, k >)$, pois para todos $l, k \in H$,

$$\big(T(h) \otimes \bar{k}(l) |\, m\big) = ((l \mid k)\, T(h) |\, m) = (l \mid k)\, (T(h) |\, m) = (l \mid k)\, (h \mid T^*(m)) =$$

$$= ((l \mid k)\, h \mid T^*(m)) = \big(T.(h \otimes \bar{k})(l) |\, m\big) \Rightarrow T(h) \otimes \bar{k} = T.(h \otimes \bar{k});$$

(c) $({}_K\!< h, k >^*) = (h \otimes \bar{k})^* = k \otimes \bar{h} = ({}_K\!< k, h >)$;

(d) $({}_K\!< h, h >) = h \otimes \bar{h} \geq 0$.

Com efeito, para todo $l \in H$,

$$\big(h \otimes \bar{h}(l) |\, l\big) = ((l \mid h)\, h \mid l) = (l \mid h)\, (h \mid l) = (l \mid h)\, \overline{(l \mid h)} = |(l \mid h)|^2 \geq 0;$$

(e) $({}_K\!< h, h >) = 0 \Rightarrow |(l \mid h)|^2 = 0$, para todo $l \in H$, donde segue que $h = 0$.

Para ver que H é completo, basta observar que:

$$\|h\|_K^2 = \left\|h \otimes \bar{h}\right\| = \sup \left\{\left\|h \otimes \bar{h}(l)\right\| ; \|l\| \leq 1\right\} = \|h\|^2 \Rightarrow \|h\|_K = \|h\| .$$

De fato,

$$\left\|h \otimes \bar{h}(l)\right\|^2 = \|(l \mid h)\, h\|^2 = ((l \mid h)\, h \mid\ (l \mid h)\, h) = (l \mid h)\, (h \mid h)\, \overline{(l \mid h)} = |(l \mid h)|^2 . \|h\|^2 \leq$$

$$\leq \|l\|^2 . \|h\|^2 \, \|h\|^2 ,$$

donde segue que $\left\|h \otimes \bar{h}(l)\right\| \leq \|h\|^2$, quando $\|l\| \leq 1$.

Daí,

$$\|h\|_K^2 \leq \|h\|^2 . \qquad (*)$$

Por outro lado, se $l = \frac{h}{\|h\|}$, onde $h \neq 0$, temos que:

$$\left\|h \otimes \bar{h}(l)\right\|^2 = |(l \mid h)|^2 . \|h\|^2 = \left|\frac{(h \mid h)}{\|h\|}\right|^2 . \|h\|^2 = \left|\frac{\|h\|^2}{\|h\|}\right|^2 . \|h\|^2 = \|h\|^4 .$$

Daí,

$$\|h\|_K^2 \geq \|h\|^2 . \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, obtemos $\|h\|_K = \|h\|$.

Que H é pleno segue do fato que

$$K(H) = \overline{span} \left\{h \otimes \bar{k}; h, k \in H\right\} = \overline{span} \left\{{}_K < h, k >; h, k \in H\right\} .$$

Exemplo 2.6 *Sejam T um espaço de Hausdorff localmente compacto e H um espaço de Hilbert. Então,*

$$X = C_0(T,H) = \{x : T \to H; x \in C(T,H) \ \ e \ \ t \mapsto \|x(t)\| \ \ pertence \ a \ C_0(T)\}$$

é um $C_0(T)$-módulo de Hilbert à direita pleno com a multiplicação definida por (x.f)(t)=x(t).f(t) e o produto interno $< x,y >_{C_0(T)} (t) := (y(t) \mid x(t))$.

De fato, as propriedades $(a) - (e)$ da definição 2.2 seguem das propriedades do produto interno $(. \mid .)$ e a norma é a usual, pois:

$$\|x\|_{C_0(T)} = \left\|< x,y >_{C_0(T)}\right\|^{1/2} = \sup\left\{< x,y >_{C_0(T)} (t); t \in T\right\} = \sup\left\{\|x(t)\|\,; t \in T\right\}$$

para a qual $C_0(T,H)$ é completo.

Considerando funções da forma $x(t) := f(t)h$, onde $f \in C_0(T), h \in H$ e $t \in T$, temos que os elementos $< x,y >_{C_0(T)} (t)$ separam pontos de T.

Logo, segue do Teorema de Stone-Weierstrass que X é pleno.

Observação 2.4 *Suponha que para cada $t \in T$ escolhemos um subespaço fechado H_t de H. Então $\overline{X} = \{x \in C_0(T,H); x(t) \in H_t, \ \ para \ todo \ t \in T\}$ é um submódulo de Hilbert de $C_0(T,H)$, que não é necessariamente pleno.*

De fato, tomando $T = [0,1]\,, H = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ e os subespaços

$$H_t = \{(w,0); w \in H\}$$

para t<1, e

$$H_1 = \{(0,z); z \in H\}$$

para t=1, temos que $x(1) = 0$, para todo $x \in \overline{X}$, onde

$$\overline{X} = \{x \in C_0(T,H); \ x(t) \in H_t, \ \text{para todo} \ t \in T\}\,.$$

Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, o ideal

$$I = \overline{span}\left\{< x,y >_{C_0(T)}; \ x,y \in \overline{X}\right\} = \{f \in C([0,1]); f(1) = 0\}$$

não é denso em C(T). Portanto, $\overline{X}$ não é pleno.

Exemplo 2.7 *Suponha que X e Y são A-módulos de Hilbert à direita. Então,*

$$Z = X \oplus Y := \{(x,y); x \in X, y \in Y\}$$

é um A-módulo de Hilbert à direita com as operações definidas por:

(i) $(x,y)+(x',y')=(x+x',\ y+y')$;

(ii) $(x\ ,\ y).a=(x.a\ ,\ y.a)$;

(iii) $\lambda(x,y)=(\lambda.x,\lambda.y)$;

(iv) $<(x,y),(x',y')>_A:=<x,x'>_A+<y,y'>_A$;

onde $a\in A,\ x,x'\in X,\ y,y'\in Y$ *e* $\lambda\in\mathbb{C}$.

De fato, como as aplicações $<x,x'>_A$ e $<y,y'>_A$ definidas sobre os espaços vetoriais $X\times X$ e $Y\times Y$, respectivamente, satisfazem as condições $(a)-(e)$ da definição 2.2 por hipótese, então a aplicação $<(x,y),(x',y')>_A$ definida sobre $Z\times Z$ também as satisfaz.

Para mostrar que Z é completo, note que:

$$\|x\|_A^2=\|<x,x>_A\|\leq\|<x,x>_A+<y,y>_A\|=\|(x,y)\|_A^2\leq\|x\|_A^2+\|y\|_A^2.$$

Em particular,

$$\max\{\|x\|_A,\|y\|_A\}\leq\|(x,y)\|_A\leq(\|x\|_A^2+\|\|_A^2)^{1/2}.$$

Logo, a completude de Z segue das completudes de X e Y.

Assim, por indução, segue que a soma direta $\oplus_{i=1}^n A:=A^n$, de n cópias do A-módulo de Hilbert A_A, é um A-módulo de Hilbert e aplicando o lema 2.1, temos que:

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i^*b_i\right\|^2\leq\left\|\sum_{i=1}^n a_i^*a_i\right\|.\left\|\sum_{i=1}^n b_i^*b_i\right\|.$$

Estudaremos agora o caso de somas diretas infinitas.

Proposição 2.1 *Seja A uma C*-álgebra. Então,*

$$\boldsymbol{H}_A:=\left\{\boldsymbol{a}=(a_i)_{i=1}^\infty\in\prod_{i=1}^\infty A_i;\sum_{i=1}^\infty a_i^*a_i\ \textit{converge em}\ A\right\}$$

é um A-módulo de Hilbert com a multiplicação $\boldsymbol{a}.a:=(a_i.a)_{i=1}^\infty$ *e com o produto interno*

$$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>_A:=\sum_{i=1}^\infty a_i^*b_i,$$

onde $\boldsymbol{a}=(a_i)_{i=1}^\infty,\ \boldsymbol{b}=(b_i)_{i=1}^\infty\in\boldsymbol{H}_A$ *e* $A_i=A$*, para todo* $i\in\mathbb{N}$.

Demonstração:

Vamos mostrar inicialmente, que as fórmulas fazem sentido.

Para $M\leq N$, temos que:

$$\sum_{i=M}^N(a_ia)^*a_ia=\ a^*\left(\sum_{i=M}^N a_i^*a_i\right)a\leq\left\|\sum_{i=M}^N a_i^*a_i\right\|a^*a.$$

Como $0 \leq b \leq c$ implica que $\|b\| \leq \|c\|$, onde $a, b \in A$, (ver, por exemplo, [Mur], 2.2.5) temos que:

$$\left\| \sum_{i=M}^{N} (a_i a)^* a_i a \right\| \leq \|a\|^2 . \left\| \sum_{i=M}^{N} a_i^* a_i \right\| .$$

Sendo $\mathbf{a} \in \mathbf{H}_A$, temos que a sequência das somas parciais de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$ é uma sequência de Cauchy. Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i a)^* a_i a$$

converge em A, ou seja, $\mathbf{a}$.a$= (a_i a) \in \mathbf{H}_A$.

Para ver que a fórmula que define o produto interno converge, basta notar, supondo $M \leq N$, que:

$$\left\| \sum_{i=M}^{N} a_i^* b_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=M}^{N} a_i^* a_i \right\| . \left\| \sum_{i=M}^{N} b_i^* b_i \right\| .$$

Como ambos os somatórios do lado direito da desigualdade são de sequências de Cauchy, segue que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i$ converge.

As propriedades da definição 2.2 para $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >_A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i$, seguem como no exemplo 2.2.

Portanto, $\mathbf{H}_A$ é um A-módulo com produto interno.

Vamos mostrar agora que $\mathbf{H}_A$ é um A-módulo de Hilbert.

Para isso, suponha que: $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_i^n)_{i=1}^{\infty}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbf{H}_A$. Como $\|x_i^n\|_A \leq \|\mathbf{x}^n\|_A$, cada sequência $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em A e portanto, converge para algum $a_i \in A$.

Vamos mostrar que $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{H}_A$ e que a sequência $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para

$$\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty}.$$

Para provar que $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbf{H}_A$, mostraremos inicialmente que, dado $\epsilon > 0$, existe $P \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq P \Rightarrow \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^* a_i \right\| \leq \epsilon^2.$$

Dados $\mathbf{x} \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, onde $A_i = A$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e $m \geq n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$, defina

$$\|\mathbf{x}\|_{n,m} := \left\| \sum_{i=n}^{m} x_i^* x_i \right\|^{1/2} .$$

Note que $\| \, . \, \|_{n,m}$ é a norma do A-módulo $\mathbf{H}_A$ sobre o subespaço de $\mathbf{H}_A$ cujos elementos são os pontos $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbf{H}_A$ tais que $x_i = 0$ para $i < n$ e $i > m$.

Além disso, se $\mathbf{x}$=$(x_i) \in \mathbf{H}_A$, temos que:

$$\sum_{i=n}^{m} x_i^* x_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i$$

e

$$\|\mathbf{x}\|_{n,m}^2 = \left\| \sum_{i=n}^{m} x_i^* x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* x_i \right\| = \|\mathbf{x}\|_A^2 \,, \text{ para todo } m \geq n.$$

Sendo $\{\mathbf{x}^n\}$ de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $k, l \geq N$,

$$\left\| \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^l \, \right\|_A < \epsilon/3. \quad (I)$$

Escolha agora $P \geq N$, onde $P \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\left\| \sum_{i=P}^{\infty} (x_i^N)^* x_i^N \right\|^{1/2} < \epsilon/3 \quad (II)$$

e fixe $m, n \geq P$.

Como $\| \, \|_{n,m}$ envolve apenas um número finito de entradas e $x_i^n \to a_i$, podemos encontrar $M \in \mathbb{N}$, com $M \geq N$ e M dependendo de m, n, tal que:

$$\left\| \mathbf{a} - \mathbf{x}^M \right\|_{n,m} = \left\| \sum_{i=n}^{m} (a_i - x_i^M)^* (a_i - x_i^M) \right\|^{1/2} < \epsilon/3. \quad (III)$$

De $(I), (II)$ e (III), segue que, para $m, n \geq P$,

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^* a_i \right\|^{1/2} = \|\mathbf{a}\|_{n,m} \leq \left\| \mathbf{a} - \mathbf{x}^M \right\|_{n,m} + \left\| \mathbf{x}^M - \mathbf{x}^N \right\|_{n,m} + \left\| \mathbf{x}^N \right\|_{n,m} <$$

$$< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \left\| \sum_{i=P}^{\infty} (x_i^N)^* x_i^N \right\|^{1/2} < \epsilon.$$

Logo,

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} a_i^* a_i \right\| \leq \epsilon^2.$$

Como P só depende do ϵ dado, temos que a sequência das somas parciais de $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$ é de Cauchy. Portanto, $\mathbf{a} \in \mathbf{H}_A$.

Vamos mostrar agora que $\{\mathbf{x}^n\}$ converge para $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty}$.

Dado $\epsilon > 0$, como $\{\mathbf{x}^n\}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_A = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)^* (x_i^n - x_i^m) \right\|^{1/2} < \epsilon,$$

para $n, m \geq N$. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (x_i^n - x_i^m)^*(x_i^n - x_i^m) \right\| < \epsilon^2.$$

Logo, fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (x_i^n - a_i)^*(x_i^n - a_i) \right\| \leq \epsilon^2, \tag{2.1}$$

para todo $n \geq N$. Como a desigualdade (2.1) é válida para todo $k \in \mathbb{N}$, então fazendo $k \to \infty$ em (2.1), obtemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^n - a_i)^*(x_i^n - a_i) \right\| \leq \epsilon^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}^n - \mathbf{a}\|_A \leq \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Logo, $\mathbf{x}^n \to \mathbf{a}$.

□

Lema 2.2 *Suponha que* $\boldsymbol{A}_0$ *é uma *-sub-álgebra densa em uma* C^**-álgebra* A *e que* X_0 *é um* A_0*-módulo à direita com um pré-produto interno, no sentido que existe uma aplicação* $< \, , \, >_0 : X_0 \times X_0 \longrightarrow A_0$ *que satisfaz as condições* $(a) - (d)$ *da definição 2.2. Então, existem um* A*-módulo de Hilbert* X *e uma aplicação linear* $q : X_0 \longrightarrow X$ *tais que* $q(X_0)$ *é denso em* X, $q(x).a = q(x.a)$ *e* $< q(x), q(y) >_A = < x, y >_0$ *. Nesse caso,* X *é chamado de* ***completamento*** *do módulo* X_0 *com pré-produto interno.*

Demonstração:

Seja $N = \{x \in X_0; < x, x >_0 = 0\}$ e seja $q : X_0 \to X_0/N$ a aplicação quociente,

$$q(x) := x + N.$$

Pelo lema 2.1, temos que

$$< x, y >_0 = 0 = < y, x >_0, \tag{2.2}$$

para $y \in X_0$ e $x \in N$.

Daí, N é um subespaço vetorial de X_0 e, das condições (b) e (c) da definição 2.2, obtemos que N é um A_0-submódulo.

De (2.2), temos que as fórmulas:

$$< q(x), q(y) >_A := < x, y >_0 \quad \text{e} \quad q(x).a := q(x.a)$$

são aplicações bem definidas e fornecem uma estrutura de módulo sobre X_0/N. Além disso, as condições $(a) - (e)$ da definição 2.2 são satisfeitas, pois $< \, , \, >_0$ satisfaz $(a) - (d)$ e

$$< q(x), q(x) >_A = < x, x >_0 = 0 \Rightarrow x \in N \Rightarrow q(x) = 0 + N.$$

De maneira análoga ao corolário 2.1,

$$\|q(x)\|_A := \|< x, x >_0\|^{1/2}$$

é uma norma sobre X_0/N e podemos formar o completamento X.

Como numa C*-álgebra A, vale $a^*b^*ba \leq \|b\|^2 a^*a$, para $a, b \in A$, temos que:

$$\|q(x).a\|_A^2 = \|q(x.a)\|_A^2 = \|< x.a, x.a >_0\| = \|a^* < x, x >_0 a\| \leq \|q(x)\|^2 . \|a\|^2 .$$

Logo, a multiplicação à direita por $a \in A_0$ é um operador limitado sobre X_0/N e portanto, essa multiplicação pode ser estendida a um operador limitado sobre X tal que

$$\|x.a\|_A \leq \|x\| . \|a\| ,$$

para $a \in A_0$ e $x \in X$.

Como A_0 é denso em A, podemos estender essa ação de A_0 para A.

Similarmente, o produto interno pode ser estendido para X da seguinte forma: dados $x, y \in X$, se $q(x_n) \to x$ e $q(y_n) \to y$, defina

$$< x, y >_A := \lim_{n\to\infty} < q(x_n), q(y_n) >_A .$$

As propriedades $(a), (b)$ e (c) da definição 2.2 seguem das propriedades de $< q(x), q(y) >_A$ e a condição (d) segue do fato que o conjunto dos elementos positivos de uma C*-álgebra é fechado (ver, por exemplo, [SBA], teorema 5.7).

De fato, como já vimos que $< q(x_n), q(x_n) >_A \geq 0$, se $x \in X$ e $\{q(x_n)\} \to x$, temos que $< x, x >_A = \lim_{n\to\infty} < q(x_n), q(y_n) >_A \geq 0$.

Seja agora $x \in X$ com $< x, x >_A = 0$. Então existe uma sequência $\{q(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge para x e, como $< x, x >_A = 0$, temos que

$$\|q(x_n)\|_A \to \|x\|_A = \|< x, x >_A\|^{1/2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Logo, X é um A-módulo de Hilbert.

□

2.2 Aplicações lineares sobre módulos de Hilbert

Iniciamos essa seção considerando uma classe especial de aplicações lineares que atuam sobre os módulos de Hilbert e mostramos que, ao contrário do que ocorre com as aplicações lineares definidas sobre espaços de Hilbert, os adjuntos não existem necessariamente. Mais ainda, mostramos que o conjunto dessa classe de aplicações sobre módulos de Hilbert, munido de operações apropriadas, é na verdade uma C*-álgebra.

Definição 2.5 *Sejam X e Y dois A-módulos de Hilbert à direita. Uma aplicação $T : X \to Y$ é chamada* ***adjuntável*** *se existe uma aplicação $T^* : Y \to X$ satisfazendo*

$$< T(x), y >_A = < x, T^*(y) >_A,$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Nosso próximo passo é mostrar que aplicações adjuntáveis são aplicações A-lineares e limitadas, no seguinte sentido: se X e Y são A-módulos de Hilbert à direita e $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação adjuntável, então T é linear, limitada e vale $T(x.a) = T(x).a$, para $a \in A$ e $x \in X$. Quando não houver perigo de confusão, escreveremos apenas que T é linear, ao invés de T é A-linear.

Lema 2.3 *Toda aplicação adjuntável $T : X \longrightarrow Y$ entre os A-módulos de Hilbert X e Y é uma aplicação linear limitada.*

Demonstração:

Pelo lema 2.1, temos que, para todo $z \in Z$, onde Z é um A-módulo de Hilbert, vale

$$\|z\|_A = \sup\{\|< z, y >_A\| ; y \in Z, \|y\|_A \leq 1\}. \quad (*)$$

De fato, como

$$0 \leq < z, y >_A^* . < z, y >_A \leq \|< z, z >_A\| . < y, y >_A,$$

então

$$\|< z, y >_A\|^2 = \|< z, y >_A^* . < z, y >_A\| \leq \|< z, z >_A\| . \|< y, y >_A\| = \|z\|_A^2 . \|y\|_A^2,$$

donde

$$\|< z, y >_A\|^2 \leq \|z\|_A^2,$$

quando $\|y\|_A \leq 1$.

Daí,

$$\sup\{\|< z, y >_A\| ; y \in Z, \|y\|_A \leq 1\} \leq \|z\|_A.$$

Por outro lado, tomando $y = \dfrac{z}{\|z\|_A}$ obtemos:

$$\|< z, y >_A\| = \left\|< z, \frac{z}{\|z\|_A} >_A\right\| = \frac{\|z\|_A^2}{\|z\|_A} = \|z\|_A.$$

Logo,

$$\sup\{\|< z, y >_A\| ; y \in Z, \|y\|_A \leq 1\} \geq \|z\|_A.$$

Como temos a desigualdade contrária, segue a igualdade $(*)$.

Portanto, dados $x, y \in Z$, temos que:

$$x = y \Leftrightarrow < x, z >_A = < y, z >_A,$$

para todo $z \in Z$.

Assim, dados $x, x' \in X, y \in Y, a \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

(i) $< T(\lambda x + \mu x'), y >_A = < \lambda x + \mu x', T^*(y) >_A =$

$$= \bar{\lambda} < x, T^*(y) >_A + \bar{\mu} < x', T^*(y) >_A = \bar{\lambda} < T(x), y >_A + \bar{\mu} < T(x)', y >_A =$$

$$= < \lambda T(x) + \mu T(x'), y >_A .$$

Daí,

$$T(\lambda x + \mu x') = \lambda T(x) + \mu T(x').$$

(ii) $< T(x.a), y >_A = < x.a, T^*(y) >_A = a^*. < x, T^*(y) >_A = < T(x).a, y >_A$, donde

$$T(x.a) = T(x).a.$$

De (i) e (ii), segue que T e T^* são A-lineares.

Resta mostrar que T é limitado.

Suponha que $x_n \to x$ e $T(x_n) \to z$, onde $x_n, x \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $z \in Y$. Então, para cada $y \in Y$, temos que:

$$< T(x_n), y >_A \to < z, y >_A$$

e

$$< T(x_n), y >_A = < x_n, T^*(y) >_A \to < x, T^*(y) >_A = < T(x), y >_A .$$

Assim, $< z, y >_A = < T(x), y >_A$, para todo $y \in Y$. Logo, $z = T(x)$.

Portanto, T tem gráfico fechado e, pelo Teorema do Gráfico Fechado (ver, por exemplo, [Nar], Teorema 16.7), T é limitado.

$\square$

Observação 2.5 *A recíproca do lema 2.3 não é válida.*

De fato, sejam $A=$ C([0,1]) e $J = \{f \in A; f(0) = 0\}$. Então, A e J são A-módulos de Hilbert à direita com o produto usual em A, $(fg)(x) = f(x).g(x)$, e com o produto interno definido por $< f, g >_A = \bar{f}g$.

Tome $X := A \oplus J$ e defina $T : X \to X$ por $T(f, g) = (g, 0)$. Então, T é limitado com norma $\|T\| = 1$ e é A-linear pois, para $f, h \in A$ e $g, k \in J$, temos:

(i) $T\left((f,g)+(h,k)\right)=T\left((f+h,g+k)\right)=(g+k,0)=(g,0)+(k,0)=$

$$=T\left(f,g\right)+T\left(h,k\right);$$

(ii) $T\left(h.\left(f,g\right)\right)=T\left((hf,hg)\right)=(hg,0)=h\left(g,0\right)=h.T\left(f,g\right);$

(iii) Pelo exemplo 2.7,

$$\|g\|_A\leq\|(g,0)\|_A\leq\left(\|g\|_A^2\right)^{1/2}=\|g\|_A\Rightarrow\|T\left(f,g\right)\|_A=\|g\|_A\,.$$

Logo,

$$\|T\|=\sup\left\{\|T\left(f,g\right)\|_A\,;\|(f,g)\|_A\leq1\right\}=\sup\left\{\|g\|_A\,;\|(f,g)\|_A\leq1\right\}=$$

$$=\sup\left\{\|g\|_A\,;\|g\|_A\leq1\right\}=1.$$

Mas T não é adjuntável pois, se existisse um adjunto T^* para T e se

$$(f,g):=T^*(1,0)$$

então, para todo $(h,k)\in X$, teríamos que:

$$\bar{k}=<T(h,k),(1,0)>_A=<(h,k),(f,g)>_A=\bar{h}f+\bar{k}g\Rightarrow f\equiv0\ \text{ e }\ g\equiv1,$$

o que é um absurdo pois $g(0)=0$ $(g\in J)$.

Logo, obtemos um operador linear e limitado que não é adjuntável.

Definição 2.6 *Sejam X e Y dois A-módulos de Hilbert. O conjunto das aplicações adjuntáveis $T:X\longrightarrow Y$ será denotado por **L(X,Y)**. Quando X=Y, escrevemos **L(X)** ou **L(**X_A).*

Observação 2.6 *Se $T\in$ **L(X)**, então, pelo que vimos no lema 2.3, podemos concluir que: $T^*\in$ **L(X)**, T^* é único e T^{**}=T. Na verdade, **L(X)** é uma sub-álgebra da álgebra de Banach B(X), onde B(X) é o conjunto dos operadores limitados sobre X, e a aplicação $T\longmapsto T^*$ é uma involução em **L(X)**.*

Nosso próximo passo é mostrar que ***L(X)*** é na verdade uma C*-álgebra.

Proposição 2.2 *Se X é um A-módulo de Hilbert, então **L(X)** é uma C*-álgebra com relação à norma de operadores.*

Demonstração:

Como *B(X)* é álgebra de Banach, temos que $\|T^*T\|\leq\|T^*\|\,\|T\|$.

Por outro lado, pelo lema 2.1,

$$\|T^*T\| \geq \sup\{\|< T^*T(x), x >_A\|, \|x\| \leq 1, x \in X\} =$$
$$= \sup\{\|< T(x), T(x) >_A\|, \|x\| \leq 1, x \in X\} = \|T\|^2.$$

Como $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\|$, segue que $\|T\| \leq \|T^*\|$.

Por outro lado, como T^{**}=T, temos $\|T\| \geq \|T^*\|$.

Assim, $\|T\| = \|T^*\|$ e, da desigualdade

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2,$$

segue que $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Pela continuidade da involução em *B(X)*, temos que ***L(X)*** é fechado em B(X) e portanto, é uma C*-álgebra.

□

Corolário 2.2 *Se X é um A-módulo de Hilbert e $T \in$ **L(X)**, então*

$$< T(x), T(x) >_A \leq \|T\|^2 < x, x >_A,$$

para todo $x \in X$.

Demonstração:

Como $\|T\|^2 I - T^*T$ é um elemento positivo da C*-álgebra ***L(X)***, existe um elemento $S \in$ ***L(X)*** tal que $\|T\|^2 I - T^*T = S^*S$.

Logo,

$$\|T\|^2 < x, x >_A - < T(x), T(x) >_A = < (\|T\|^2 I - T^*T)(x), x >_A =$$

$$= < S^*S(x), x >_A = < S(x), S(x) >_A \geq 0.$$

□

Observação 2.7 *Se H é um espaço de Hilbert, então H é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert e **L**(H)= B(H).*

De fato, pelo lema 2.3, temos que todo operador adjuntável $T : H \to H$ é linear e limitado. Daí, $\mathbf{L}(H) \subset B(H)$.

Por outro lado, todo operador $T \in B(H)$ possui um adjunto. Logo, $B(H) \subset \mathbf{L}(H)$.

Pela proposição 1.6, temos que a sub-álgebra de *B(H)* dos operadores compactos sobre o espaço de Hilbert H é

$$K(H) = \overline{span}\left\{h \otimes \bar{k}; h, k \in H\right\},$$

onde $h \otimes \bar{k}(m) := h. < k, m >_{\mathbb{C}} = (m \mid k)h$, com $h,\ k,\ m \in H$.

Buscaremos um análogo do ideal *K(H)* na C*-álgebra ***L(X)***, onde X é um A-módulo de Hilbert. Para isso, dados dois A-módulos de Hilbert X e Y e os elementos $x \in X$ e $y \in Y$, definimos a aplicação $\Theta_{y,x} : X \longrightarrow Y$ por:

$$\Theta_{y,x}(z) = \ y. < x, z >_A,$$

onde $z \in X$.

Assim, se $x' \in X, \ y' \in Y$, temos que:

$$< \Theta_{y,x}(x'), y' >_A = < y. < x, x' >_A, y' >_A = < x, x' >_A^* < y, y' >_A =$$

$$= < x', x >_A < y, y' >_A = < x', x < y, y' >_A >_A = < x', \Theta_{x,y}(y') >_A .$$

Logo, $\Theta_{y,x}$ é adjuntável com adjunto dado por $\Theta_{y,x}^* = \Theta_{x,y}$.

Definição 2.7 *Sejam X e Y dois A-módulos de Hilbert. Definimos **K(X, Y)** como sendo o subespaço linear fechado de $L(X,Y)$ gerado por $\{\Theta_{y,x};\ x \in X,\ y \in Y\}$, ou seja,*

$$K(X,Y) := \overline{span}\,\{\Theta_{y,x};\ x \in X,\ y \in Y\}\,.$$

Quando X=Y, denotamos o subespaço K(X,X) por K(X) ou por $K(X_A)$.

Lema 2.4 *Se X é um A-módulo de Hilbert, então K(X) é um ideal fechado em **L(X)**.*

Demonstração:

Dados $T \in$ ***L(X)***$, x, y, z \in X$, temos que:

(i) $T\Theta_{x,y}(z) = \ T(x. < y, z >_A) = \ T(x) < y, z >_A = \Theta_{T(x),y}(z) \ \Rightarrow \ T\Theta_{x,y} \in$ *K(X)*.

(ii) $\Theta_{x,y}T(z) = \ \Theta_{x,y}(T(z)) =$

$$= x. < y, T(z) >_A = \ x. < T^*(y), z >_A = \ \Theta_{x,T^*y}(z) \Rightarrow \ \Theta_{x,y}T \in K(X).$$

(iii) Como $\Theta_{y,x}^* = \Theta_{x,y}$, segue que *K(X)* é fechado em relação a operação involução.

Logo, como *K(X)* é fechado na topologia da norma por definição, temos o resultado desejado.

$\square$

Exemplo 2.8 *Se X é o A-módulo de Hilbert A_A, defina para cada $a \in A$ o operador*

$$L_a : \ A \longrightarrow A \ \ por \ \ L_a(b) := ab,$$

isto é, pela multiplicação à esquerda.

Então, a aplicação $L_{a^*} : \ A \longrightarrow A$ é um adjunto para L_a e $\|L_a\| = \ \|a\|$.

De fato, dados a, b, $c \in A$, temos que:

(i) $< L_a(b), c >_A = < ab, c >_A = b^*a^*c = < b, a^*c >_A = < b, L_{a^*}c >_A$;

(ii) $\|L_a(b)\| = \|ab\| \leq \|a\| . \|b\| \Rightarrow \|L_a\| \leq \|a\|$;

(iii) $\|L_a(a^*)\| = \|a.a^*\| = \|a\|^2 = \|a\| . \|a^*\| \Rightarrow \|L_a\| \geq \|a\|$.

Assim, a aplicação $L : A \longrightarrow \boldsymbol{L}(A_A)$, definida por $L(a) = L_a$, é um isomorfismo de A sobre uma *-sub-álgebra fechada de $\boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}$ pois, de $\|L_a\| = \|a\|$, temos que L é isometria injetiva com imagem fechada e, dados $a, b, c \in A$, temos:

$$L(a+b)(c) = L_{a+b}(c) = (a+b)c = ac + bc = L_a(c) + L_b(c)$$

e

$$L(ab)(c) = L_{ab}(c) = abc = aL_b(c) = L_aL_b(c).$$

Como $\Theta_{a,b}(c) = a. < b, c >_A = ab^*c = L_{ab^*}(c)$ e L é injetiva com imagem fechada, temos que *K(A)*$\subset Im(L)$.

Por outro lado, dado $a \in A$, se $\{u_\lambda\}$ é uma aproximação da identidade para A, então L_a pode ser aproximado por $\Theta_{a,u_\lambda} = L_{au_\lambda^*}$, ou seja, $L_a \in K(A_A)$.

Logo, $Im(L) \subset$ *K(A)*.

Portanto, $Im(L) =$ *K(A)* e L é um isomorfismo entre A e $K(A_A)$.

Exemplo 2.9 *Como um espaço de Hilbert H é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert à direita com o produto interno*

$$< h, k >_{\mathbb{C}} = (k \mid h),$$

onde $h, k \in H$, então K(H) é a álgebra usual K dos operadores compactos.

Vamos mostrar que $\mathbb{C}$ e K atuam de forma simétrica.

Para isso, vamos utilizar o espaço de Hilbert conjugado $\overline{H}$. Como um grupo aditivo, $\overline{H}$ é o próprio H e representando os elementos de $\overline{H}$ pela aplicação $\mathbf{b} : H \longrightarrow \overline{H}$ definida por $h \longmapsto \mathbf{b}(h)$, temos que a multiplicação por escalar sobre $\overline{H}$ é dada por $\lambda\mathbf{b}(h) = \mathbf{b}(h.\bar{\lambda})$.

Desse modo, temos que $\overline{H}$ é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert à esquerda com o produto interno

$$({}_{\mathbb{C}}< \mathbf{b}(h), \mathbf{b}(k) >) := < k, h >_{\mathbb{C}},$$

e também é um K-módulo de Hilbert à direita com a multiplicação definida como

$$\mathbf{b}(h).T := \mathbf{b}(T^*(h))$$

e com o produto interno

$$< \mathbf{b}(h), \mathbf{b}(k) >_K := \Theta_{h,k}.$$

Além disso, como

$\Theta_{\mathbf{b}(h),\mathbf{b}(k)}(\mathbf{b}(h')) = \mathbf{b}(h). < \mathbf{b}(k), \mathbf{b}(h') >_K = \mathbf{b}(h).\Theta_{k,h'} = \mathbf{b}(\Theta^*_{k,h'}(h)) = \mathbf{b}(\Theta_{h',k}(h)) =$

$$= \mathbf{b}.(h'. < k, h >_{\mathbb{C}}) =< h, k >_{\mathbb{C}} .\mathbf{b}(h') = ({}_{\mathbb{C}}< \mathbf{b}(h), \mathbf{b}(k) >).\mathbf{b}(h'),$$

temos que $\Theta_{\mathbf{b}(h),\mathbf{b}(k)}$ é a multiplicação à esquerda pelo escalar $({}_{\mathbb{C}}< \mathbf{b}(h), \mathbf{b}(k) >)$.

Logo, como no exemplo anterior, temos que $\mathbb{C}$ é isomorfo à *K(*$\overline{H}$*)*.

Vamos mostrar agora que se X é um A-módulo de Hilbert à direita, então X também é um *K(X)*-módulo de Hilbert à esquerda pleno. Para provar isso, precisamos do seguinte lema sobre operadores positivos em ***L(X)***.

Lema 2.5 *Sejam A uma C*-álgebra, X um A-módulo de Hilbert à direita e T:X⟶X um operador linear. Então, T é um elemento positivo de **L(X)** se, e somente se,*

$$< T(x), x >_A \geq 0,$$

para todo $x \in X$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $T \geq 0$ em ***L(X)***, então existe $S \in$ ***L(X)*** tal que $T = S^*S$. Daí,

$$< T(x), x >_A =< S(x), S(x) >_A \geq 0,$$

para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$) Suponha que $< T(x), x >_A \geq 0$, para todo $x \in X$.

Por hipótese, temos $< T(z), z >_A =< z, T(z) >_A$, para todo $z \in X$, e, pela identidade de polarização usual (ver, por exemplo, [Nar], Teorema 1.3), temos que:

$$4 < x, T(y) >_A = \sum_{k=0}^{3} i^k < x + i^k y, T(x + i^k y) >_A .$$

Segue daí que

$$< T(x), y >_A =< x, T(y) >_A,$$

para todo x, $y \in X$, ou seja, T é adjuntável com $T = T^*$.

Como podemos escrever $T = S - R$, onde $S, R \in$ ***L(X)***, $RS = SR = 0$ e $S \geq 0$, $R \geq 0$, obtemos:

$$0 \leq < TR(x), Rx >_A = - < R^3(x), x >_A .$$

Sendo $R \geq 0$, temos que:

$$R^3 \geq 0 \Rightarrow < R^3(x), x >_A \geq 0.$$

Assim, segue da identidade de polarização que:

$$< R^3(x), x >_A = 0,$$

para todo $x \in X$.

Portanto,

$$R^3 = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow T = S \geq 0.$$

$\square$

Observação 2.8 *Se X é um A-módulo de Hilbert e $T \geq 0$ em **L(X)**, então:*

$$\|T\| = \sup\{\|< T(x), x >_A\|, \|x\| \leq 1\}.$$

De fato, $T \geq 0$ implica que $T = S^*S$, para algum $S \in$***L(X)***. Logo,

$$\|T\| = \|S^*S\| = \sup\{\|< T(x), x >_A\|, \|x\| \leq 1\}.$$

Lema 2.6 *Se A é uma C*-álgebra e X é um A-módulo de Hilbert à direita, então X é um K(X)-módulo de Hilbert à esquerda pleno com a multiplicação T.x:=T(x) e com o produto interno definido por* $({}_K< x, y >) := \Theta_{x,y}$.

Além disso, as normas $\|x\|_A = \|< x, x >_A\|^{1/2}$ *e* $\|x\|_K = \|({}_K< x, x >)\|^{1/2}$ *coincidem.*

Demonstração:

Vamos provar inicialmente as propriedades $(a) - (e)$ da definição 2.2 nas versões à esquerda.

Dados $x,\ y,\ z,\ w \in X,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$ e $T \in$ *K(X)*,

(a) Como

$$\Theta_{\lambda.x+\mu.y,z}(w) = (\lambda.x + \mu.y) < z, w >_A = \lambda.x. < z, w >_A + \mu.y < z, w >_A =$$

$$= \lambda\Theta_{x,z}(w) + \mu\Theta_{y,z}(w),$$

temos que

$$({}_K< \lambda.x + \mu.y, z >) = \lambda.({}_K< x, z >) + \mu.({}_K< y, z >).$$

(b) Note que

$$\Theta_{T(x),y}(z) = T(x). < y, z >_A = T.x. < y, z >_A = T.\Theta_{x,y}(z),$$

donde

$$({}_K< T.x, y >) = T.({}_K< x, y >).$$

(c) $({}_K< x, y >)^* = \Theta^*_{x,y} = \Theta_{y,x} = ({}_K< y, x >)$.

(d) Como

$$< ({}_K< x,x >).y,y >_A = < \Theta_{x,x}.y,y >_A = < x. < x,y >_A, y >_A =$$

$$= < x,y >_A^* . < x,y >_A \geq 0,$$

pelo lema 2.5 temos que $({}_K< x,x >) \geq 0$.

(e) Se $({}_K< x,x >) = 0$, então, pela observação 2.8, temos que:

$$0 = \|< ({}_K< x,x >).y,y >_A\| = \|< x,y >_A^* . < x,y >_A\| = \|< x,y >_A\|^2 ,$$

donde segue que

$$< x,y >_A = 0,$$

para todo $y \in X$. Logo, $x = 0$.

Vamos usar agora o lema 2.1 para provar a igualdade das normas.

(i) Como $< ({}_K< x,x >).y,y >_A = < x,y >_A^* . < x,y >_A \leq \|< x,x >_A\| . < y,y >_A$, então:

$$\|({}_K< x,x >)\| \leq \|< x,x >_A\| .$$

Por outro lado, tomando y=$x/\|x\|_A$, temos que:

$$\|< ({}_K< x,x >).y,y >_A\| = \|< x,x >_A\| .$$

Segue daí que $\|({}_K< x,x >)\| = \|< x,x >_A\|$.

Portanto, temos que X é um *K(X)*-módulo de Hilbert à esquerda.

Segue agora da definição de *K(X)* que X é pleno.

□

Apresentamos a seguir alguns resultados técnicos úteis. Desses, o primeiro$-$ proposição 2.3 $-$ e o último$-$ lema 2.8 $-$ serão usados frequentemente nos próximos capítulos.

Proposição 2.3 *Se X é um A-módulo de Hilbert e $x \in X$, então existe um único $y \in X$ tal que $x = y. < y,y >_A$.*

Para provarmos a proposição acima, precisamos das aplicações adjuntáveis de um módulo de Hilbert em outro e do conceito de aplicações lineares conjugadas.

Definição 2.8 *Sejam X e Y dois espaços vetoriais complexos. Dizemos que uma aplicação $T : X \to Y$ é **linear conjugada** quando, para quaisquer $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, vale*

$$T(\lambda.x + \mu.y) = \overline{\lambda}.T(x) + \overline{\mu}.T(y).$$

Seja X um A-módulo de Hilbert à direita. Consideremos A como um A-módulo de Hilbert à direita. Para cada $x \in X$, defina as aplicações

$$D_x : X \longrightarrow A \ \text{ e } L_x : A \longrightarrow X \text{ por } D_x(y) = < x, y >_A \ \text{ e } \ L_x(a) = x.a.$$

Com essas definições e com o fato que X e A são A-módulos de Hilbert, temos que:

$$< D_x(y), a >_A = < y, L_x(a) >_A,$$

ou seja, $D_x^* = L_x$ e $L_x^* = D_x$.

Segue daí que $D_x \in \boldsymbol{L}(X_A, A_A)$, $L_x \in \boldsymbol{L}(A_A)$ e assim temos o seguinte resultado.

Lema 2.7 *Se X é um A-módulo de Hilbert, então:*

(*i*) *A aplicação* $D : X \longrightarrow \boldsymbol{L}(X_A, A_A)$*, definida por* $D(x) = D_x$*, é um isomorfismo linear conjugado isométrico de X sobre K(X,*A_A*).*

(*ii*) *A aplicação* $L : X \longrightarrow \boldsymbol{L}(A_A)$*, definida por* $L(x) = L_x$*, é um isomorfismo linear isométrico de X sobre K(*A_A*,X).*

Demonstração:

(i) Como o produto interno é linear conjugado na primeira variável, D é linear conjugado em X e é uma isometria, pois:

$$\|D_x\| = \sup\{\|< x, y >_A\|, \ \|y\|_A \leq 1\} = \|x\|_A .$$

Em particular, tem imagem fechada.

Além disso,

$$\Theta_{a,x}(y) = a. < x, y >_A = < x.a^*, y >_A = D_{x.a^*}(y),$$

para todo $y \in X$. Donde segue que $\Theta_{a,x} = D_{x.a^*}$.

Assim, a imagem de D contém todas as combinações lineares finitas de operadores $\Theta_{a,x}$ e estas combinações são densas em *K(X,*A_A*)*.

Logo, $K(X, A_A) \subset Im(D)$.

Por outro lado, dado $x \in X$, podemos aproximá-lo por elementos da forma $x.\mu_\lambda$, onde $\{\mu_\lambda\}$ é uma aproximação da identidade em A.

Como o produto interno é contínuo, temos que $\Theta_{\mu_\lambda,x} = D_{x.\mu_\lambda}$ se aproxima de D_x.

Assim, $Im(D) \subset$ *K(X,*A_A*)*.

Logo, $Im(D) = K(X, A_A)$, ou seja, D é sobrejetiva.

Para ver que D é injetiva, basta notar que

$$< x, y >_A = < x', y >_A, \ \text{ para todo } \ y \in X \ \Leftrightarrow x = x'.$$

Portanto, D é um isomorfismo linear conjugado isométrico.

(ii) Como $D_x^* = L_x$, basta aplicar o item (i) à aplicação $x \longmapsto D_x^*$.

$\square$

Note agora que dadas três aplicações $T \in$ *K(X,A_A)*, $S \in$ *K(A_A,X)* e $R \in$ *K(X)*, podemos combiná-las com um elemento $a \in A$ para construir um operador:

$$L = \begin{pmatrix} a & T \\ S & R. \end{pmatrix} : A \oplus X \longrightarrow A \oplus X,$$

definido por:

$$\begin{pmatrix} a & T \\ S & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + T(x) \\ S(b) + R(x) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

para todo $b \in A$ e todo $x \in X$.

Utilizando o produto interno de $A \oplus X$, definido no exemplo 2.7, temos que L é adjuntável com adjunto

$$L^* = \begin{pmatrix} a^* & S^* \\ T^* & R^* \end{pmatrix} : \mathbf{A} \oplus X \longrightarrow A \oplus X.$$

Além disso, L$\in$ *K($A \oplus X$)*.

Para ver isso, basta notar que as aplicações

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix} \text{ e } R \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

são lineares, isométricas e que cada operador de posto um é levado num operador de posto um, por exemplo:

$$\Theta_{a,\,x} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & \Theta_{a,\,x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{a,\,0} & \Theta_{a,\,x} \\ \Theta_{0,\,0} & \Theta_{0,\,x} \end{pmatrix} = \Theta_{(a,\,0),(0,\,x)}.$$

Podemos agora demonstrar a proposição 2.3, que afirma que: se X é um A-módulo de Hilbert e $x \in X$, então existe um único $y \in X$ tal que $x = y. < y, y >_A$.

Demonstração da proposição 2.3:

Para cada $x \in X$, temos que o operador $\begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix}$ é auto-adjunto em *K(X,A_A)*.

Se $\begin{pmatrix} a & T \\ S & R \end{pmatrix} \in$ *K($A \oplus X$)* é auto-adjunto e anti-comuta com $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então, pelos isomorfismos do Lema 2.7, temos que $\begin{pmatrix} a & T \\ S & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix}$.

Agora se T é um operador tal que $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix}$, então $T \in K(A \oplus X)$, é auto-adjunto e anti-comuta com $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Assim, pelo que mostramos acima, temos que $T = \begin{pmatrix} 0 & D_y \\ L_y & 0 \end{pmatrix}$, para algum $y \in X$ e

$$\begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_y \\ L_y & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & D_{y.<y,y>_A} \\ L_{y.<y,y>_A} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como D e L são isomorfismos, segue que $x = y. < y, y >_A$.

□

Como uma aplicação dessa proposição, daremos uma prova do Teorema de Hewitt-Cohen para módulos sobre C*-álgebras, a saber, proposição 2.4 abaixo. Mas, para isso, precisamos das seguintes definições.

Definição 2.9 *Um A-módulo à esquerda X é dito um* ***A-módulo de Banach*** *quando X é um espaço de Banach e $\|a.x\| \leq \|a\| . \|x\|$, para todo $a \in A$ e todo $x \in X$.*

Definição 2.10 *Um A-módulo de Banach X é* ***não-degenerado*** *quando*

$$span\,\{a.x;\ a \in A \, e \, x \in X\}$$

é denso em X.

Assim, temos que $a_i.x \to x$ sempre que $x \in X$ e $\{a_i\}_i$ é uma aproximação da identidade para A.

Proposição 2.4 ***(Teorema de Hewitt-Cohen)*** *Suponha que X é um A-módulo de Banach não-degenerado. Então cada elemento de X pode ser escrito na forma $a.x$, para algum $a \in A$ e algum $x \in X$.*

Demonstração:

Dado um elemento $x \in X$, vamos escrevê-lo como uma soma telescópica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1})$$

de elementos que podem ser fatorados na forma $v_n.y_n$, onde $v_n \in A$, $y_n \in X$, e aplicar a proposição 2.3 para o elemento $\mathbf{v} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ do A-módulo de Hilbert $\mathbf{H}_A$ da proposição 2.1.

Se $\{a_i\}_i$ é uma aproximação da identidade de A, como X é não-degenerado, para cada $z \in X$, temos $a_i.z \to z$.

Assim, dados $\epsilon > 0$ e $z \in X$, existe $u \in A$ tal que $\|u\| \leq 1$ e $\|z - u.z\| < \epsilon$.

Seja $x_0 = x$. Defina indutivamente as sequências $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ e $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ tais que:

$$x_{n+1} = x_n - u_n.x_n \text{ e } \|x_{n+1}\| \leq 2^{-2n-2}.$$

Normalizamos os elementos x_n para garantir que a sequência dos coeficientes está em $\mathbf{H}_A$.

Sejam $v_n = 2^{-n}u_n \in A$ e $y_n = 2^n x_n \in X$.

Assim, $\|x_n - x_{n+1}\| \to 0$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n.y_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.x_n = \sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n+1}) = x_0. \tag{2.4}$$

Defina agora $\mathbf{v} = (v_n)_{n=0}^{\infty}$ e note que, como $\|v_n^*.v_n\| \leq 2^{-2n}$, temos que:

$$\left\|\sum_{n=M}^{N} v_n^*.v_n\right\| \leq \sum_{n=M}^{N} \|v_n^*.v_n\| \leq \sum_{n=M}^{N} 2^{-2n} \to 0,$$

quando $M, N \to \infty$.

Logo, $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_A$ e, em particular, $\mathbf{v}^* \in \mathbf{H}_A$.

Como $\mathbf{H}_A$ é um A-módulo de Hilbert pela proposição 2.1, então, pela proposição 2.3, podemos escrever

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{w}. < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_A = (w_n. < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_A)_{n=0}^{\infty} = (v_n^*)_{n=0}^{\infty},$$

para algum $\mathbf{w} = (w_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{H}_A$.

Note que, sendo $\|w_n\| \leq \|\mathbf{w}\|_A^3 = \|\mathbf{v}\|_A$, temos que $\|w_n\|$ é limitado e que a série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n^*.y_n$ converge absolutamente para um elemento $y \in X$.

Agora, se $a =< \mathbf{w}, \mathbf{w} >_A$,

$$a.y = \sum_{n=0}^{\infty} < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_A (w_n^*.y_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(w_n < \mathbf{w}, \mathbf{w} >_A)^*.y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.y_n = x_0 = x.$$

Logo, $x = a.y$, onde $a =< \mathbf{w}, \mathbf{w} >_A$ e $y = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^*.y_n$.

□

Encerramos essa seção com um lema que será necessário nos próximos capítulos.

Lema 2.8 *Se X e Y são A-módulos de Hilbert e existe uma aplicação $T \in$ **$L(X, Y)$** tal que $\overline{T(X)} = Y$ e $\overline{T^*(Y)} = X$, então X e Y são isomorfos.*

Demonstração:

Como T e T^* são aplicações contínuas e possuem imagem densa, então a composição $T^*T: X \to X$ também tem imagem densa.

Temos daí que $|T| = (T^*T)^{1/2} : X \to X$ também tem imagem densa e que:

$$< T(x), T(x') >_A = < x, |T|^2 (x') >_A = < |T| (x), |T| (x') >_A,$$

para quaisquer x, $x' \in X$.

Então, existe uma isometria $u : T(X) \to |T| (X)$ tal que $u(T(x)) = |T| (x)$, para todo $x \in X$.

Como T e $|T|$ têm imagem densa, então a isometria u pode ser estendida a uma isometria de Y em X.

Agora, como T e $|T|$ são A-lineares, segue que u é A-linear e portanto, pode ser estendida a um isomorfismo.

□

2.3 Álgebra dos multiplicadores

Nessa seção, introduzimos o conceito de álgebra dos multiplicadores de uma C*-álgebra e apresentamos algumas propriedades dessa álgebra. Ainda nessa seção, mostramos alguns exemplos de álgebras de multiplicadores.

Começamos com um exemplo que mostra que uma C*-álgebra A é isomorfa à C*-álgebra dos operadores compactos sobre o A-módulo de Hilbert A_A, ou seja, A é isomorfa à $K(A_A)$.

Exemplo 2.10 *Sejam A uma C*-álgebra e $L : A \longrightarrow \boldsymbol{L}(A_A)$ definida por $L(a) = L_a$, onde $L_a : A \longrightarrow A$ é definida pela multiplicação à esquerda: $L_a(b) := ab$.*

No exemplo 2.8, vimos que a imagem de L é o ideal $K(A_A)$.

Afirmamos que $(\boldsymbol{L}(A_A), L)$ é uma unitização de A. Para mostrarmos isso, como L é homomorfismo injetivo e $K(A_A)$ é um ideal, basta mostrar que $K(A_A)$ é essencial.

Seja $T \in \boldsymbol{L}(A_A)$ tal que $TK(A_A) = \{0\}$. Assim,

$$0 = T.\Theta_{a,b} = \Theta_{T(a),b},$$

donde segue que

$$\Theta_{T(a),b}(c) = T(a). < b, c >_A = 0,$$

para quaisquer $a, b, c \in A$.

Logo, $T(a) = 0$, para todo $a \in A$, ou seja, $T = 0$.

Portanto, pelo lema 1.3, temos que $L(A) = K(A_A)$ é essencial.

Definição 2.11 *Uma unitização (B, i) de uma C*-álgebra A é chamada de* ***maximal*** *se, para cada aplicação* $j : A \to C$, *que leva A num ideal essencial da C*-álgebra C, existe um homomorfismo* $\phi : C \to B$, *tal que* $\phi(j(a)) = i(a)$, *para todo* $a \in A$.

Nosso próximo passo é mostrar que a unitização do exemplo 2.10 é maximal e, a menos de isomorfismo, é a única unitização maximal para uma C*-álgebra A. Para isso, precisamos de alguns resultados apresentados na sequência.

Definição 2.12 *Sejam B uma C*-álgebra e X um A-módulo de Hilbert. Um homomorfismo* $\alpha : B \to$ ***L(X)*** *é dito* ***não-degenerado*** *se*

$$\alpha(B).X := span\,\{\alpha(b)x; b \in B, x \in X\}$$

é denso em X.

Proposição 2.5 *Suponha que A, B e C são C*-álgebras, X um A-módulo de Hilbert e* $i : B \to C$ *um homomorfismo injetivo sobre um ideal em C. Se* $\alpha : B \to$ ***L(X)*** *é um homomorfismo não-degenerado, então existe um único homomorfismo* $\bar{\alpha} : C \to$ ***L(X)*** *tal que*

$$\bar{\alpha} \circ i = \alpha.$$

Além disso, se i(B) é um ideal essencial e α *é injetivo, então* $\bar{\alpha}$ *é injetivo.*

Demonstração:

Como i é injetivo e *i(B)* é um ideal em C, podemos supor, sem perda de generalidade, que B é um ideal em C. Seja $\{e_\lambda\}$ uma aproximação da identidade em B.

Se $c \in C$, $b_1, ..., b_n \in B$ e $x_1, ..., x_n \in X$, então:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(cb_i)(x_i) \right\| = lim_\lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(ce_\lambda b_i)(x_i) \right\| = lim_\lambda \left\| \alpha(ce_\lambda) \sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i)(x_i) \right\| \le \|c\| . \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i)(x_i) \right\|.$$

Assim, a aplicação

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i)(x_i) \right) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha(cb_i)(x_i)$$

está bem definida e é limitada sobre $\alpha(B).X$. Como α é não degenerado, $\alpha(B).X$ é denso em X.

Logo, essa aplicação pode ser estendida a um operador $\bar{\alpha}(c) : X \to X$, que está em ***L(X)*** pois $\bar{\alpha}(c^*)$ é o adjunto. Daí, $\bar{\alpha} : C \to$ ***L(X)***, dado por

$$\bar{\alpha}(c) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i)(x_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(cb_i)(x_i)$$

é um homomorfismo e é a única extensão de α, pois os elementos da forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha(b_i)(x_i)$ são densos em X.

Agora, se α é injetiva e B é essencial em C, então:

$$(\ker \bar{\alpha}) \cap B = (\ker \alpha) \cap B = \{0\} \Rightarrow \ker \bar{\alpha} = \{0\} \Rightarrow \bar{\alpha} \text{ é injetivo.}$$

□

Corolário 2.3 *Se $\phi : B \rightarrow \boldsymbol{L}(A_A)$ é um homomorfismo não-degenerado, então existe um único homomorfismo $\bar{\phi}: \boldsymbol{L}(B_B) \rightarrow \boldsymbol{L}(A_A)$ tal que $\bar{\phi}(b) = \phi(b)$, para todo $b \in B$.*

Demonstração:

Tomamos o A-módulo de Hilbert $X = A_A$ e a unitização (inclusão) $L : B \rightarrow \boldsymbol{L}(B_B)$ dada no exemplo 2.8. Então, pela proposição 2.5, temos que existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : \boldsymbol{L}(B_B) \rightarrow \boldsymbol{L}(A_A)$ tal que $\bar{\phi}(b) = \phi(b)$, para todo $b \in B$.

□

Lema 2.9 *Se $\boldsymbol{i} : A \hookrightarrow B$ é uma unitização maximal e se $j : A \rightarrow C$ aplica A num ideal essencial em C, então existe um único homomorfismo $\phi : C \rightarrow B$, tal que*

$$\phi(j(a)) = i(a), \quad \textit{para todo} \quad a \in A.$$

Demonstração:

Note que o homomorfismo ϕ deve ser injetivo.

De fato, como

$$(\ker \phi) \cap j(A) = \{0\}\,, \text{ pois } \quad \phi(j(a)) = i(a) = 0 \Rightarrow a = 0$$

e *j(A)* é essencial, segue que $\ker \phi = \{0\}$.

A existência segue da definição de unitização maximal.

Resta mostrar a unicidade.

Suponha que $\psi : C \rightarrow B$ seja outro tal homomorfismo. Assim, dado $c \in C$, temos que:

$$(\phi(c)-\psi(c))i(a) = \phi(c)i(a)-\psi(c)i(a) = \phi(c)\phi(j(a))-\psi(c)\psi(j(a)) = \phi(cj(a))-\psi(cj(a)) = 0,$$

para todo $a \in A$, pois

$$cj(a) \in j(A) \;\; e \;\; \phi(j(a)) = i(a) = \psi(j(a)),$$

para todo $a \in A$.

Logo, $(\phi(c) - \psi(c))i(A) = \{0\}$ e, como *i(A)* é essencial, segue que

$$\phi(c) = \psi(c),$$

para todo $c \in C$.

$\square$

Podemos agora mostrar a afirmação feita anteriormente: a unitização maximal de uma C*-álgebra é única a menos de isomorfismo.

Teorema 2.1 *Dada uma C*-álgebra A, a unitização* $L : A \longrightarrow \boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}$ *do exemplo 2.10 é maximal e é única no seguinte sentido: se* $j{:}A \hookrightarrow B$ *é outra unitização maximal, então existe um isomorfismo* $\phi : B \rightarrow \boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}$ *tal que* $\phi \circ j = L$.

Demonstração:

Suponhamos que $j : A \hookrightarrow C$ aplica A num ideal essencial de C. Como $L : A \longrightarrow \boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}$ é um homomorfismo não degenerado, aplicando a proposição 2.5 com $B = X = A$, temos que existe um homomorfismo $\bar{L} : C \rightarrow \boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}$ tal que $\bar{L} \circ j = L$.

Portanto, $(\boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}, L)$ é maximal.

Para a unicidade, note que, como $(\boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}, L)$ é maximal, existe um homomorfismo

$$\phi : B \rightarrow \mathbf{L}(A_A)$$

tal que $\phi \circ j = L$ e, da maximalidade de *(B,j)*, obtemos um homomorfismo $\psi : \boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)} \rightarrow B$ tal que $\psi \circ L = j$.

Daí, $\phi \circ \psi \circ L = L$ e pela unicidade dada pelo lema 2.9, segue que ϕ e ψ são inversas uma da outra e são únicas.

$\square$

Definição 2.13 *Dada uma C*-álgebra A,* $\boldsymbol{L(}A_A\boldsymbol{)}$ *será chamada de* ***álgebra dos multiplicadores de A*** *e os seus elementos, que são os operadores adjuntáveis sobre A, serão chamados de* ***multiplicadores de A****. Essa C*-álgebra será denotada por* ***M(A)****.*

Apresentamos agora alguns resultados necessários para mostrarmos que a álgebra dos multiplicadores da C*-álgebra $C_0(T)$, onde T é um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto, é isomorfa à álgebra $C_b(T)$ das funções contínuas e limitadas sobre T.

Proposição 2.6 *Suponha que A e C são C*-álgebras e seja X um C-módulo de Hilbert. Se* $\alpha : A \rightarrow \boldsymbol{L(X)}$ *é um homomorfismo injetivo não degenerado, então* α *pode ser estendido a um isomorfismo de* ***M(A)*** *sobre*

$$B := \{T \in \boldsymbol{L(X)}; T\alpha(A) \subset \alpha(A) \;\; e \;\; \alpha(A)T \subset \alpha(A)\}.$$

Demonstração:

Note que, pela definição de B, $\alpha(A)$ é um ideal em B e é essencial pois, se $T \in B$ satisfaz $T\alpha(A) = \{0\}$, então $T(\alpha(A).X) = \{0\}$.

Como α é não-degenerado, então $\alpha(A).X$ é denso em X. Assim,

$$T(X) = \{0\} \Rightarrow T = 0.$$

Logo, pelo lema 1.3, $\alpha(A)$ é um ideal essencial.

Desse modo, pelo teorema 2.1, basta mostrar que $\alpha : A \to B$ é unitização maximal.

Que α é uma unitização é imediato. Logo, resta mostrar que é maximal.

Suponha que $j : A \to D$ aplica A num ideal essencial de D. Como $\alpha : A \to$ ***L(X)*** é um homomorfismo injetivo não degenerado, segue, da proposição 2.5, que existe um único homomorfismo $\bar{\alpha} : D \to$ ***L(X)*** tal que $\bar{\alpha} \circ j = \alpha$.

Resta mostrar que $\bar{\alpha}(D) \subset B$.

Se $d \in D$ e $a \in A$ então

$$\bar{\alpha}(d).\alpha(a) = \bar{\alpha}(d)\bar{\alpha}(j(a)) = \bar{\alpha}(dj(a)) \in \alpha(A),$$

pois $j(A)$ é um ideal em D.

Logo, $\bar{\alpha}(d).\alpha(a) \in \alpha(A)$. $\quad (*)$

Analogamente, temos que

$$\alpha(a)\bar{\alpha}(d) \in \alpha(A). \qquad (**)$$

Como $(*)$ e $(**)$ são válidas para todo $d \in D$ e para todo $a \in A$, segue que $\bar{\alpha}(D) \subset B$.

□

Corolário 2.4 *Se X é um A-módulo de Hilbert, então a inclusão* $i : K(X) \to$ ***L(X)*** *é uma unitização maximal de K(X) e portanto,* ***L(X)*** *e* ***M(K(X))*** *são isomorfos.*

Demonstração:

Como $i(T) = T$, para todo $T \in K(X)$, temos que i é um homomorfismo injetivo. Vamos mostrar que i é não-degenerado.

Seja $\{T_\lambda\}$ uma aproximação da identidade para $K(X)$. Pela proposição 2.3, dado $x \in X$, existe $y \in X$ tal que $y. < y, y >_A = x$.

Assim,

$$T_\lambda(x) = T_\lambda(y. < y, y >_A) = T_\lambda({}_{K(X)}< y, y > (y)) =$$

$$= T_\lambda({}_{K(X)}< y, y >)(y) \longrightarrow ({}_{K(X)}< y, y >)(y) = x.$$

Logo, i é não-degenerado.

Como $K(X)$ é um ideal em ***L(X)***, tomando B=***L(X)***, $\alpha = i$ e A=$K(X)$ na proposição 2.6, segue que ***L(X)*** e ***M(K(X))*** são isomorfos.

□

Proposição 2.7 *(i) Se H é um espaço de Hilbert, então* ***M(K(X))*** *é isomorfo à B(H).*

(ii) Se T é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então ***M(**$C_0(T)$**)*** *é isomorfo à álgebra $C_b(T)$ das funções contínuas limitadas.*

Demonstração:

(i) É um caso especial do corolário 2.4, pois quando $X = H$, temos que ***L(X)***$=$ *B(H).*

(ii) Note que $C_0(T)$ é um ideal essencial em $C_b(T)$.

Seja μ a representação de $C_0(T)$ e $C_b(T)$ sobre $l^2(T)$, definida por

$$(\mu(f)h)(t) := f(t).h(t),$$

onde $f \in C_b(T)$ e $h \in l^2(T)$.

Seja

$$B' := \left\{m \in B(l^2(T)); m\mu(C_0(T)) \subset \mu(C_0(T)) \text{ e } \mu(C_0(T))m \subset \mu(C_0(T))\right\}.$$

Como $C_0(T)$ é um ideal em $C_b(T)$, é fácil ver que $\mu(C_b(T)) \subset B'$.

Assim, pela proposição 2.6, basta provar que se $m \in B'$, então $m \in \mu(C_b(T))$, pois daí seguirá que $\mu(C_b(T)) = B'$ e teremos que ***M(**$C_0(T)$**)*** e $C_b(T)$ são isomorfos.

Suponha que, para cada $f \in C_0(T)$, existe uma função $mf \in C_0(T)$ tal que

$$\mu(mf) = m\mu(f).$$

Afirmamos que se $t \in T$ é fixo e $f, g \in C_0(T)$ são tais que $f(t) = g(t) = 1$, então $mf(t) = mg(t)$.

De fato, se $h \in l^2(T)$ é o ponto de massa em t, então:

$$|mf(t) - mg(t)| = |mf(t)h(t) - mg(t)h(t)| = |(m\mu(f)h)(t) - (m\mu(g)h)(t)| \leq$$

$$\leq \|m\mu(f)h - m\mu(g)h\| \leq \|m\| . \|\mu(f)h - \mu(g)h\| = \|m\| . |f(t) - g(t)| = 0.$$

Podemos assim definir $\phi : T \to \mathbb{C}$ por $\phi(s) = mf(s)$, onde f é qualquer função em $C_0(T)$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(t) = 1$.

Como podemos escolher a mesma função f numa vizinhança de qualquer ponto $t \in T$ dado e mf é contínua, segue que ϕ é contínua e limitada por $\|m\|$. Portanto, $\phi \in C_b(T)$.

Agora, dada $h \in l^2(T)$ com suporte finito, podemos escolher uma função $f \in C_0(T)$ tal que $f \equiv 1$ no suporte de h. Daí,

$$\mu(\phi)h = \mu(mf)h = m\mu(f)h = mh,$$

donde segue que

$$m = \mu(\phi) \in \mu(C_b(T)).$$

□

2.4 Representações induzidas

Iniciamos essa seção utilizando algumas propriedades de módulos de Hilbert e representações de C*-álgebras para construírmos representações de uma C*-álgebra a partir de uma representação de outra C*-álgebra.

Seja X um B-módulo de Hilbert e suponha que outra C*-álgebra A atua como operadores adjuntáveis sobre X_B, ou seja, vamos supor que temos um homomorfismo de A sobre $\boldsymbol{L}_B(X)$.

Escreveremos $a.x$ para a ação de $a \in A$ sobre $x \in X$ e estaremos considerando X como um $A - B$ bimódulo ${}_AX_B$. Mostraremos como construir representações para a C*-álgebra A a partir de representações da C*-álgebra B.

Para essa construção, vamos utilizar o produto tensorial para mostrar que, se X é um B-módulo de Hilbert, A é uma C*-álgebra que atua como operadores adjuntáveis sobre X_B e B atua sobre H, então A atuará sobre $X \otimes H$. Para mais detalhes sobre produto tensorial, ver, por exemplo, [Lan].

Definição 2.14 *O* ***produto tensorial*** *entre dois espaços vetoriais V e W é um espaço vetorial, denotado por $V \otimes W$, sobre o qual está definida uma aplicação bilinear*

$$T : V \times W \to V \otimes W,$$

dada por

$$T(v, w) = v \otimes w,$$

tal que, se $B : V \times W \to Z$ é outra aplicação bilinear, então existe uma única aplicação linear $L : V \otimes W \to Z$ satisfazendo

$$L(v \otimes w) = B(v, w).$$

Desse modo, pensaremos no espaço vetorial $V \otimes W$ como um espaço vetorial gerado pelos elementos tensores $v \otimes w$, onde $v \in V$, $w \in W$, tais que:

$$(\lambda v_1 + \mu v_2) \otimes w = \lambda(v_1 \otimes w) + \mu(v_2 \otimes w) \quad e$$

$$v \otimes (\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda(v \otimes w_1) + \mu(v \otimes w_2)$$

para $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$, o que expressa a bilinearidade da aplicação $(v, w) \mapsto v \otimes w$.

Lema 2.10 *Se V e W são espaços de Hilbert, então existe um produto interno definido sobre $V \otimes W$ tal que*

$$(v_1 \otimes w_1 | v_2 \otimes w_2) := (v_1|v_2).(w_1|w_2). \qquad (I)$$

O espaço de Hilbert do produto tensorial é o completamento do produto tensorial $V \otimes W$ na norma induzida pelo produto interno (I).

Demonstração:

Sejam $v \in V$, $w \in W$ fixos. Considere os funcionais lineares $f_v : V \to \mathbb{C}$ e $f_w : W \to \mathbb{C}$, associados aos espaços V e W definidos, respectivamente, por

$$f_v(v_1) := (v_1|v) \quad \text{e} \quad f_w(w_1) := (w_1|w).$$

Note que a aplicação $f : V \times W \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(v_1, w_1) := f_v(v_1).f_w(w_1) = (v_1|v).(w_1|w)$$

é bilinear, pois $(.\,|\,.)$ é o produto interno usual e portanto, é linear na primeira variável.

Assim, pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $f_v \otimes f_w : V \otimes W \to \mathbb{C}$, tal que:

$$f_v \otimes f_w(v_1 \otimes w_1) = (v_1|v).(w_1|w).$$

Considere agora o espaço vetorial dos funcionais lineares conjugados de $V \otimes W$, denotado por $(V \otimes W)\breve{}$. Defina $\overline{f_v \otimes f_w} \in (V \otimes W)\breve{}$ por:

$$\overline{f_v \otimes f_w}(v_1 \otimes w_1) := \overline{f_v \otimes f_w(v_1 \otimes w_1)} = \overline{(v_1|v).(w_1|w)} = (v|v_1).(w|w_1),$$

para $\alpha = v_1 \otimes w_1 \in V \otimes W$.

Desse modo, a aplicação $T : V \times W \to (V \otimes W)\breve{}$ definida por

$$T(v, w) := \overline{f_v \otimes f_w}$$

é bilinear, pois $(.\,|\,.)$ é o produto interno, e pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $L : V \otimes W \to (V \otimes W)\breve{}$, definida por

$$L(\beta) := L_\beta = T(v_2, w_2),$$

onde $\beta = v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$, tal que

$$L_{v_2 \otimes w_2}(v_1 \otimes w_1) = \overline{(v_1|v_2).(w_1|w_2)},$$

para $v_1 \otimes w_1,\ v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$.

Assim, podemos definir uma aplicação sobre $(V \otimes W) \times (V \otimes W)$ satisfazendo (I), por:

$$(v_1 \otimes w_1 | v_2 \otimes w_2) = (\alpha|\beta) = \overline{L_\beta(\alpha)} = (v_1|v_2).(w_1|w_2),$$

para $\alpha = v_1 \otimes w_1, \beta = v_2 \otimes w_2 \in V \otimes W$.

Resta mostrar que essa aplicação é de fato um produto interno sobre $V \otimes W$.

Dados $\alpha = v_1 \otimes w_1, \beta = v_2 \otimes w_2, \gamma = v_3 \otimes w_3 \in V \otimes W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos que:

(i) Como L_γ é linear conjugada,

$$(\lambda.\alpha + \mu.\beta|\,\gamma) = \overline{L_\gamma(\lambda.\alpha + \mu.\beta)} = \overline{\bar{\lambda}L_\gamma(\alpha) + \bar{\mu}L_\gamma(\beta)} =$$

$$= \lambda.\overline{L_\gamma(\alpha)} + \mu.\overline{L_\gamma(\beta)} = \lambda.(\alpha|\,\gamma) + \mu.(\beta|\,\gamma).$$

Logo,

$$(\lambda.\alpha + \mu.\beta|\,\gamma) = \lambda.(\alpha|\,\gamma) + \mu.(\beta|\,\gamma).$$

(ii) $\overline{(\alpha|\,\beta)} = L_\beta(\alpha) = \overline{(v_1|v_2).(w_1|w_2)} = (v_2|v_1).(w_2|w_1) = \overline{L_\alpha(\beta)} = (\beta|\,\alpha)$.

(iii) Para a positividade, sendo $\alpha = \sum_{k=1}^{n}(v_k \otimes w_k)$ um elemento típico de $V \otimes W$, aplicando processo de Gram-Schmidt às famílias $\{v_k\}_{k=1}^{n}$ e $\{w_k\}_{k=1}^{n}$, podemos encontrar famílias ortonormais $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subset V$, $\{f_j\}_{j=1}^{n} \subset W$ e escalares $\{\lambda_{i,j}\}_{i,j=1}^{n} \subset \mathbb{C}$, tais que:

$$\alpha = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}(e_i \otimes f_j).$$

Assim,

$$(\alpha|\,\alpha) = \left(\sum_{i,j} \lambda_{i,j}(e_i \otimes f_j)|\sum_{k,l} \lambda_{k,l}(e_k \otimes f_l)\right) = \sum_{i,j,k,l} (\lambda_{i,j}(e_i \otimes f_j)|\,\lambda_{k,l}(e_k \otimes f_l)) =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j}.\overline{\lambda_{k,l}}(e_i|\,e_k).(f_j|\,f_l) = \sum_{i,j} |\lambda_{i,j}|^2 \geq 0$$

e $(\alpha|\,\alpha) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{i,j} = 0, \quad \text{para todos} \quad i,j \Leftrightarrow \alpha = 0.$

De $(i), (ii)$ e (iii) segue que (I) é um produto interno sobre $V \otimes W$.

□

Observação 2.9 *Como usaremos produtos tensoriais completos (em alguma norma) e produtos tensoriais algébricos lado-a-lado, vamos utilizar a seguinte notação para diferenciá-los:*

(i) $\otimes$ *denotará o produto tensorial que é completo em alguma norma;*

(ii) $\odot$ *representará o produto tensorial algébrico.*

Desse modo, nas discussões anteriores, podemos usar $V \odot W$ e deixar $V \otimes W$ apenas para o espaço de Hilbert que é o completamento de $V \odot W$.

Munidos das propriedades de produto tensorial, vamos voltar ao principal objetivo dessa seção, a saber, induzir representações de uma C*-álgebra em outra.

Seja ${}_AX_B$ um B-módulo de Hilbert com uma ação dos elementos de A como operadores adjuntáveis. Considere $\pi : B \to B(H_\pi)$ uma representação não-degenerada de B.

Nosso objetivo é encontrar uma representação de A a partir dessa representação de B. Para isso, utilizaremos o espaço vetorial $X \odot H_\pi$ e o produto interno sobre $X \odot H_\pi$ dado por:

$$(x \otimes h|\,y \otimes k) := (\pi(< y, x >_B)h|\,k). \quad (\Delta)$$

Assim, se $B = \mathbb{C}$, as únicas representações não-degeneradas de B são $\pi(z) := z.\mathbf{1}$ e, sendo X_B um espaço de Hilbert com $< x, y >_{\mathbb{C}} = (y|\, x)$, temos que o lado direito de (Δ) será:

$$(\pi(< x, y >_{\mathbb{C}})h|\, k) = (< x, y >_{\mathbb{C}} h|\, k) = < x, y >_{\mathbb{C}} . (h|\, k) = (y|\, x). (h|\, k) .$$

Em outras palavras, temos que o produto interno (Δ) reduz-se ao produto interno usual (I) do lema 2.10 para o produto tensorial $X_B \otimes H_\pi$ de espaços de Hilbert.

Proposição 2.8 *Se X_B é um B-módulo de Hilbert e $\pi : B \to B(H_\pi)$ uma representação não-degenerada de B, então existe um único produto interno positivo semi-definido sobre o espaço vetorial $X \odot H_\pi$ satisfazendo*

$$(x \otimes h|\, y \otimes k) := (\pi(< y, x >_B)h|\, k) \quad (\Delta)$$

para quaisquer $x \otimes h,\ y \otimes k \in X \odot H\pi$.

Demonstração:

Apresentamos um argumento análogo ao do lema 2.10.

Note que para $y \in X$ e $k \in H_\pi$ fixos, temos que a aplicação $T : X \times H_\pi \to \mathbb{C}$ definida por

$$T(x, h) := (\pi(< y, x >_B)h|\, k)$$

é bilinear e, pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $f_y \otimes f_k : X \odot H_\pi \to \mathbb{C}$ tal que

$$f_y \otimes f_k(x \otimes h) = (\pi(< y, x >_B)h|\, k).$$

Desse modo, temos que a aplicação $(y, k) \mapsto \overline{f_y \otimes f_k}$ é uma aplicação bilinear de $X \times H_\pi$ em $(X \odot H_\pi)\tilde{}$.

Logo, existe uma única aplicação linear $L : X \odot H_\pi \to (X \odot H_\pi)\tilde{}$ tal que

$$L(y \otimes k) = L(\beta) := L_\beta = \overline{f_y \otimes f_k},$$

para todo $\beta = y \otimes k \in X \odot H_\pi$.

Seja $(\alpha|\, \beta) := \overline{L_\beta(\alpha)}$, onde $\alpha = x \otimes h, \beta = y \otimes k \in X \odot H_\pi$. Assim,

$$(x \otimes h|\, y \otimes k) := (\pi(< y, x >_B)h|\, k).$$

Vamos verificar que essa aplicação define um produto interno semi-definido positivo.

Sejam $\alpha = x \otimes h,\ \beta = y \otimes k,\ \gamma = z \otimes m \in X \odot H_\pi$ e $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$.

Como L_β é linear conjugada, onde $\beta \in X \odot H_\pi$, de maneira análoga à demonstração do lema 2.10, temos que:

(i) $(\lambda.\alpha + \mu.\beta|\, \gamma) = \lambda.(\alpha|\, \gamma) + \mu.(\beta|\, \gamma)$;

(ii) $\overline{(\alpha|\,\beta)} = L_\beta(\alpha) = \overline{(\pi(< y, x >_B)h|\,k)} = (k|\,\pi(< y, x >_B)h) = (\pi(< y, x >_B^*)k|\,h) =$

$$= (\pi(< x, y >_B)k|\,h) = \overline{L_\alpha(\beta)} = \;(\beta|\,\alpha).$$

Resta mostrar a positividade, ou seja, devemos mostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes h_i|\,\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes h_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(< x_i, x_j >_B)h_j|\,h_i) \geq 0. \qquad (I)$$

Para isso, vamos considerar a família $(< x_i, x_j >_B)_{i,j=1}^n$ como uma matriz $n \times n$ com entradas de B. Tais matrizes formam uma *-álgebra $M_n(B)$ com a estrutura usual de espaço vetorial e multiplicação de matrizes, com adjunto dado por:

$$[(b_{i,j})_{i,j=1}^n]^* = (b_{j,i}^*)_{i,j=1}^n.$$

Desse modo, se $\pi : B \to B(H_\pi)$ é uma representação de B, então $\pi_n : M_n(B) \to B(H_\pi^n)$ definida por

$$\pi_n((b_{i,j})_{i,j=1}^n) = (\pi(b_{i,j}))_{i,j=1}^n$$

é uma representação da *-álgebra $M_n(B)$.

Considerando agora vetores de H_π^n com apenas uma coordenada diferente de zero, temos que:

(1) se π é fiel (injetiva), então π_n também é fiel;

(2) a C*-álgebra $\pi_n(M_n(B))$ é completa.

Dessa forma, podemos transportar a C*-norma de $B(H_\pi^n)$ para $M_n(B)$ e $M_n(B)$ torna-se uma C*-álgebra.

Como em qualquer *-álgebra existe no máximo uma C*-norma completa, (ver [SBA], corolário 2.8), essa construção independe da escolha da representação fiel π de B.

Assim, escrevendo $M = (< x_i, x_j >_B)_{i,j=1}^n \in M_n(B)$, temos que (I) fica da forma:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \pi(< x_i, x_j >_B)h_j|\,h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} ((\pi_n(M)\mathbf{h})_i\,|\,h_i) = (\pi_n(M)\mathbf{h}|\,\mathbf{h}),$$

onde $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_n)$ e $(\pi_n(M)\mathbf{h})_i$ é a i-ésima coordenada do vetor $\pi_n(M)\mathbf{h}$.

A positividade segue agora do nosso próximo resultado.

Lema 2.11 *Se X é um B-módulo de Hilbert e $x_1, ..., x_n \in X$, então a matriz*

$$M = (< x_i, x_j >_B)_{i,j=1}^n$$

é um elemento positivo da C-álgebra $M_n(B)$.*

Demonstração:

Seja $\pi : B \to B(H)$ uma representação fiel de B e seja π_n a correspondente representação de $M_n(B)$ sobre $H^n := \oplus_{i=1}^n H$. Pela permanência espectral da positividade, temos que $M \geq 0$ em $M_n(B)$ se, e somente se, $\pi_n(M)$ é um operador positivo, isto é, quando

$$(\pi_n(M)\mathbf{h}|\, \mathbf{h}) \geq 0, \quad (II)$$

para todo $\mathbf{h} \in H^n$.

Logo, para concluírmos a demonstração desse lema e, consequentemente, da proposição 2.8, basta provar (II).

Como π pode ser representado por uma soma direta de representações cíclicas, basta provar (II) quando π é cíclica, com vetor cíclico $h \in H$. Assim, podemos assumir que:

$$\mathbf{h} = (h_1, ..., h_n) = (\pi(b_1)h, ..., \pi(b_n)h),$$

onde $b_i \in B$, para todo $i = 1, 2, ...n$.

Temos que:

$$(\pi_n(M)\mathbf{h}|\, \mathbf{h}) = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \pi(< x_i, x_j >_B)\pi(b_j)h\right)_{i=1}^{n} |\, (\pi(b_i)h)_{i=1}^{n}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\pi(b_i^* < x_i, x_j >_B b_j)h|\, h) = \left(\pi\left(< \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} x_j b_j >_B\right) h|\, h\right) \geq 0.$$

Essa última desigualdade segue do fato que: se $b =< y, y >_B \geq 0$, então $(\pi(b)h|\, h) \geq 0$.

Logo, obtemos a validade de (II), o que conclui a demonstração do lema e, consequentemente, da proposição 2.8.

$\square$

Observação 2.10 *Note que o produto interno* (Δ) *sobre* $X \odot H_\pi$*, que definimos na proposição 2.8, não é positivo definido, pois qualquer vetor da forma* $(x.b) \otimes h - x \otimes \pi(b)h$*, onde* $x \in X$*,* $b \in B$*,* $h \in H_\pi$*, satisfaz,*

$$((x.b) \otimes h - x \otimes \pi(b)h|\, y \otimes k) = ((x.b) \otimes h|\, y \otimes k) - (x \otimes \pi(b)h|\, y \otimes k) =$$

$$= (\pi(< y, x.b >_B)h|\, k) - (\pi(< y, x >_B)\pi(b)h|\, k) =$$

$$= (\pi(< y, x >_B .b)h|\, k) - (\pi(< y, x >_B .b)h|\, k) = 0,$$

para todo $y \otimes k \in X \odot H_\pi$.

No entanto, no completamento de $X \odot H_\pi$, os vetores da forma $(x.b) \otimes h - x \otimes \pi(b)h$, onde $x \in X$, $b \in B$, $h \in H_\pi$, que chamamos de vetores de comprimento zero, são excluídos no seguinte sentido: no completamento temos que

$$(x.b) \otimes h = x \otimes \pi(b)h,$$

para quaisquer $x \in X$, $b \in B$, $h \in H_\pi$. Denotamos esse completamento por $X \otimes_B H_\pi$.

Escreveremos $x \otimes_B h$ para a imagem em $X \otimes_B H_\pi$ do elemento tensor $x \otimes h \in X \odot H_\pi$, para enfatizar que podemos fazer manipulações como $(x.b) \otimes_B h = x \otimes_B \pi(b)h$.

Estamos agora em condições de tratar o principal objetivo dessa seção, que é induzir representações de uma C*-álgebra em outra.

Proposição 2.9 *Seja X um B-módulo de Hilbert. Suponha que A é uma C*-álgebra que atua como operadores adjuntáveis sobre X e que $\pi : B \to B(H_\pi)$ é uma representação não-degenerada de B. Então, a fórmula*

$$Ind\pi(a)(x \otimes_B h) := (a.x) \otimes_B h$$

pode ser estendida a uma representação Ind(π) de A como operadores limitados sobre o espaço de Hilbert $X \otimes_B H_\pi$, obtido completando $X \odot H_\pi$ no produto interno (Δ) definido na proposição 2.8. Além disso, se X é não-degenerado como um A-módulo, isto é, se $A.X$ é denso em X, então $Ind\pi$ é uma representação não-degenerada de A sobre $X \otimes_B H_\pi$.

Demonstração:

Dado $a \in A$ fixo, a aplicação $T : X \times H_\pi \to X \odot H_\pi$ dada por $T(x, h) := (a.x) \otimes h$ é bilinear. Logo, pela definição 2.14, existe um único operador linear $L_a : X \odot H_\pi \to X \odot H_\pi$ tal que

$$L_a(x \otimes h) = (a.x) \otimes h.$$

Para mostrar que L_a é limitado, vamos decompor π como soma direta de representações cíclicas, digamos $\pi = \oplus_{s\in I}\pi_s$, onde I é um conjunto de índices. Assim, a aplicação

$$U' : X \odot (\oplus_{s\in I} H_s) \to \oplus_{s\in I}(X \odot H_s)$$

definida por

$$U'(x \otimes \{h_s\}_{s\in I}) := \{x \otimes h_s\}_{s\in I}$$

pode ser estendida a uma transformação unitária

$$U : X \otimes_B (\oplus_{s\in I} H_s) \to \oplus_{s\in I}(X \otimes_B H_s)$$

tal que

$$U((a.x) \otimes_B \{h_s\}_{s\in I}) = \{(a.x) \otimes_B h_s\}_{s\in I}.$$

Como $\|\oplus_{s\in I} L_a\| = sup_{s\in I} \|L_a\|$, basta mostrarmos que se π é cíclica, então L_a é limitada com norma independente de π.

Desse modo, vamos supor que π é cíclica com vetor cíclico $h \in H$.

Então, para $x_i \in X$, $b_i \in B$, temos que:

$$\left\| L_a\left(\sum_i x_i \otimes \pi(b_i)h\right)\right\|^2 = \left(\sum_i (a.x_i)\otimes \pi(b_i)h|\ \sum_j (a.x_j \otimes \pi(b_j)h\right) =$$

$$= \sum_{i,j} ((a.x_i)\otimes \pi(b_i)h|\ (a.x_j)\otimes \pi(b_j)h) = \sum_{i,j} (\pi(< a.x_j, a.x_i >_B)\pi(b_i)h|\ \pi(b_j)h) =$$

$$= \sum_{i,j} \left(\pi(b_j^*)\pi(< a.x_j, a.x_i >_B b_i)h|\ h\right) = \sum_{i,j} \left(\pi(b_j^* < a.x_j, a.x_i b_i >_B)h|\ h\right) =$$

$$= (\pi(< a.(\sum_j x_j.b_j), a.(\sum_i x_i.b_i) >_B)h|\ h).$$

Usando agora o corolário 2.2 e (Δ) da proposição 2.8, temos que:

$$\left\| L_a\left(\sum_i x_i \otimes \pi(b_i)h\right)\right\|^2 = (\pi(< a.(\sum_j x_j.b_j), a.(\sum_i x_i.b_i) >_B)h|\ h) \leq$$

$$\leq \|a\|^2 (\pi(< \sum_j x_j.b_j, \sum_i x_i.b_i >_B)h|\ h) =$$

$$= \|a\|^2 ((\sum_i x_i.b_i)\otimes h|\ (\sum_j x_j.b_j)\otimes h) = \|a\|^2 \left\|\sum_i x_i \otimes \pi(b_i)h\right\|^2.$$

Esta última igualdade vale pois:

$$\left\|\sum_i x_i \otimes \pi(b_i)h\right\|^2 = (\sum_i x_i \otimes \pi(b_i)h|\ \sum_j x_j \otimes \pi(b_j)h) =$$

$$= \sum_{i,j} (x_i \otimes \pi(b_i)h|\ x_j \otimes \pi(b_j)h)$$

e, usando (Δ) da proposição 2.8, temos

$$\left\|\sum_i x_i \otimes \pi(b_i)h\right\|^2 = \sum_{i,j} (\pi(< x_j, x_i >_B)\pi(b_i)h|\ \pi(b_j)h) =$$

$$= \sum_{i,j} (\pi(b_j^*)\pi(< x_j, x_i >_B b_i)h|\ h) = \sum_{i,j} (\pi(< x_j b_j, x_i.b_i >_B)h|\ h) =$$

$$= (\pi(< \sum_j x_j b_j, \sum_i x_i.b_i >_B)h|\ h) = ((\sum_i x_i.b_i)\otimes h|\ (\sum_j x_j.b_j)\otimes h).$$

Logo, obtemos que L_a é um operador limitado com norma $\|L_a\| \leq \|a\|$, ou seja, a norma de L_a independe da representação π.

Temos assim que L_a pode ser estendido a um operador $Ind(\pi(a))$ sobre $X \otimes_B H_\pi$ com norma $\|Ind\pi(a)\| \leq \|a\|$.

Pela definição de L_a, temos que $L_a.L_{a'} = L_{a.a'}$, para quaisquer $a, a' \in A$. Além disso, sendo $a \in A$ um operador adjuntável sobre X, usando (Δ) da proposição 2.8, temos que:

$$(L_a(x \otimes h)|\, y \otimes k) = ((a.x) \otimes h|\, y \otimes k) = (\pi(< y, a.x >_B)h|\, k) =$$

$$= (\pi(< a^*.y, x >_B)h|\, k) = (x \otimes h|\, (a^*.y) \otimes k) = (x \otimes h|\, L_{a^*}(y \otimes k)),$$

para $x \otimes h, y \otimes k \in X \odot H_\pi$.

Logo, $Ind(\pi)$ é uma *-representação de A sobre $X \otimes_B H_\pi$.

Suponhamos agora que X é um A-módulo não-degenerado.

Para mostrar que $Ind\pi$ é não-degenerada, basta provar que cada tensor $x \otimes h \in X \odot H_\pi$, pode ser aproximado por uma soma da forma $\sum_{i=1}^n (a_i.x_i) \otimes h_i$.

Note que, como X é um A-módulo não-degenerado, dado $x \in X$ existem $a_i \in A$ e $x_i \in X$, onde $i = 1, ..., n$, tais que x é aproximado por $\sum_{i=1}^n a_i.x_i$.

Assim, como

$$\|y \otimes k\|^2 = (y \otimes k|\, y \otimes k) = (\pi(< y, y >_B)k|\, k) \leq \|\pi(< y, y >_B)k\| . \|k\| \leq$$

$$\leq \|< y, y >_B\| . \|k\|^2 = \|y\|_B^2 . \|k\|^2$$

para todo $y \otimes k \in X \odot H_\pi$, segue que $\sum_{i=1}^n (a_i.x_i) \otimes h$ aproxima $x \otimes h$, quando x é aproximado por $\sum_{i=1}^n a_i.x_i$, pois:

$$\left\| \sum_{i=1}^n (a_i.x_i) \otimes h - x \otimes h \right\| = \left\| (\sum_{i=1}^n (a_i.x_i) - x) \otimes h \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i.x_i) - x \right\|_B . \|h\|,$$

o que conclui a prova do resultado.

□

Observação 2.11 *Como vimos, a representação induzida* $Ind\pi$ *depende do* B*-módulo de Hilbert* X *e da representação* $A \to \boldsymbol{L}(X_B)$ *que estamos usando. Quando quisermos enfatizar alguma dessas dependências, escreveremos:* $X - Ind_B^A\pi$, $Ind_B^A\pi$ *ou* $X - Ind\pi$.

Proposição 2.10 *Seja* A *uma C*-álgebra que atua não-degeneradamente como operadores adjuntáveis sobre um* B*-módulo de Hilbert* X*. Suponha que* $\pi_i : B \to B(H_i)$*, com i=1,2, são representações não-degeneradas da C*-álgebra* B *e que* $T : H_1 \to H_2$ *é uma aplicação limitada entrelaçando* π_1 *e* π_2 *no seguinte sentido:*

$$T(\pi_1(b)h) = \pi_2(b)(Th),$$

para todos $b \in B$, $h \in H_1$. Então, a aplicação $\mathbf{1} \otimes T : X \odot H_1 \to X \odot H_2$ definida por

$$\mathbf{1} \otimes T(x \otimes h) := x \otimes Th$$

*pode ser estendida a uma aplicação limitada $\mathbf{1} \otimes_B T : X \otimes_B H_1 \to X \otimes_B H_2$ que entrelaça $Ind\pi_1$ e $Ind\pi_2$. Além disso, temos que a correspondência $T \mapsto \mathbf{1} \otimes_B T$ é *-linear e se $S : H_2 \to H_3$ entrelaça π_2 e π_3, então*

$$\mathbf{1} \otimes_B (S \circ T) = (\mathbf{1} \otimes_B S) \circ (\mathbf{1} \otimes_B T).$$

Em particular, temos que a aplicação Ind respeita equivalência unitária e somas diretas.

Demonstração:

Primeiramente, note que a aplicação $V : X \times H_1 \to X \odot H_2$ definida por $V(x, h) = x \otimes Th$ é bilinear. Logo, pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $\mathbf{1} \otimes T : X \odot H_1 \to X \odot H_2$ tal que

$$\mathbf{1} \otimes T(x \otimes h) = x \otimes Th,$$

para todo $x \otimes h \in H_1$.

Assim, para todos $x \otimes h' \in X \odot H_2$, $y \otimes k, x \otimes h \in X \odot H_1$, temos que:

(i) $(x \otimes h' |\, (\mathbf{1} \otimes T)(y \otimes k)) = (x \otimes h' |\, y \otimes Tk) = (\pi_2(< y, x >_B)h' |\, Tk) =$

$$= (h' |\, \pi_2(< y, x >_B^*)T(k)) = (h' |\, T(\pi_1(< y, x >_B^*)k)) = (T^* h' |\, \pi_1(< y, x >_B^*)k) =$$

$$= (\pi_1(< y, x >_B)T^* h' |\, k) = (x \otimes T^* h' |\, y \otimes k) = ((\mathbf{1} \otimes T^*)(x \otimes h') |\, (y \otimes k)).$$

Logo,

$$(\mathbf{1} \otimes T)^* = \mathbf{1} \otimes T^*.$$

(ii) $(\mathbf{1} \otimes S) \circ (\mathbf{1} \otimes T)(x \otimes h) = (\mathbf{1} \otimes S)(x \otimes Th) = x \otimes S \circ Th = (\mathbf{1} \otimes (S \circ T))(x \otimes h)$. Segue daí que

$$(\mathbf{1} \otimes S) \circ (\mathbf{1} \otimes T) = \mathbf{1} \otimes (S \circ T).$$

De (i) e (ii), obtemos que a aplicação $T \mapsto \mathbf{1} \otimes T$ é *-linear e respeita a composição.

Agora, como o operador positivo $\|T\|^2 - T^*T = S^*S$, para algum $S \in B(H_1)$, temos que:

$$\|T\|^2 \|y\|^2 - \|(\mathbf{1} \otimes T)y\|^2 = (\|T\|^2 y |\, y) - ((\mathbf{1} \otimes T)y |\, (\mathbf{1} \otimes T)y) =$$

$$= (\|T\|^2 y |\, y) - ((\mathbf{1} \otimes T^*)(\mathbf{1} \otimes T)y |\, y) = (\|T\|^2 y |\, y) - ((\mathbf{1} \otimes (T^*T))y |\, y) =$$

$$= (\mathbf{1} \otimes (\|T\|^2 - T^*T)y |\, y) = ((\mathbf{1} \otimes S^*S)y |\, y) = ((\mathbf{1} \otimes S)y |\, (\mathbf{1} \otimes S)y) \geq 0.$$

Daí, $\|(\mathbf{1} \otimes T)y\| \leq \|T\| \, \|y\|$ e portanto, temos que $\mathbf{1} \otimes T$ é limitada com norma

$$\|\mathbf{1} \otimes T\| \leq \|T\|.$$

Logo, $\mathbf{1} \otimes T$ pode ser estendida a uma aplicação limitada

$$\mathbf{1} \otimes_B T : X \otimes_B H_1 \to X \otimes_B H_2$$

que entrelaça $\mathrm{Ind}\pi_1$ e $\mathrm{Ind}\pi_2$, pois:

(iii) $(\mathbf{1} \otimes_B T)(\mathrm{Ind}\pi_1(a))(x \otimes h) = (\mathbf{1} \otimes_B T)((a.x) \otimes h) = (a.x) \otimes Th$, e

(iv) $\mathrm{Ind}\pi_2(a)(\mathbf{1} \otimes_B T)(x \otimes h) = \mathrm{Ind}\pi_2(a)(x \otimes Th) = (a.x) \otimes Th$;

Resta mostrar que Ind respeita equivalência unitária e somas diretas.

(v) Se π_1 e π_2 são unitariamente equivalentes, então existe uma aplicação unitária limitada $U : H_1 \to H_2$ tal que

$$U(\pi_1(b)h) = \pi_2(b)(Uh),$$

para todos $h \in H_1$, $b \in B$.

Assim, a aplicação $(\mathbf{1} \otimes_B U) : X \otimes_B H_1 \to X \otimes_B H_2$ é tal que, para todo $x \otimes h \in X \odot H_1$, vale

(1) $(\mathbf{1} \otimes_B U)(\mathrm{Ind}\pi_1(a))(x \otimes h) = (\mathbf{1} \otimes_B U)((a.x) \otimes h) = (a.x) \otimes Uh$ e

(2) $\mathrm{Ind}\pi_2(a)(\mathbf{1} \otimes_B U)(x \otimes h) = \mathrm{Ind}\pi_2(a)(x \otimes Uh) = (a.x) \otimes Uh$

Logo, de (1) e (2), Ind respeita equivalencia unitária.

De maneira análoga, temos que Ind respeita somas diretas, pois vimos na proposição 2.10 que $X \otimes_B \oplus_{s \in I} H_s$ é isomorfo a $\oplus_{s \in I}(X \otimes_B H_s)$.

□

Apresentamos agora alguns resultados que serão necessários nos próximos capítulos.

Definição 2.15 *Sejam ρ e π_s representações de uma C*-álgebra A, onde s pertence a um conjunto de índices S. Dizemos que ρ* ***está fracamente contida na família de representações*** *$\{\pi_s;\ s \in S\}$, quando*

$$\cap_{s \in S} ker(\pi_s) \subset ker(\rho).$$

Proposição 2.11 *Suponhamos que uma C*-álgebra A atua não-degeneradamente sobre um B-módulo de Hilbert X e que $\{\pi_s;\ s \in S\}$ é uma família de representações da C*-álgebra B. Se ρ é uma representação não-degenerada de B que está fracamente contida na família $\{\pi_s;\ s \in S\}$, então $X-Ind\rho$ ($= Ind\rho$) está fracamente contida na família $\{X - Ind\pi_s;\ s \in S\}$ de representações de A.*

Demonstração:
Como toda representação não-degenerada é soma direta de representações cíclicas então

$$ker(\oplus_{s\in S}\pi_s) = \cap_{s\in S} ker(\pi_s).$$

Pela proposição 2.10, temos que:

$$X - Ind(\oplus_{s\in S}\pi_s) = \oplus_{s\in S}(\text{X-Ind}\pi_s).$$

Logo, podemos supor que existe apenas uma representação π na família $\{\pi_s;\ s \in S\}$.
Dado $a \in ker(\text{X-Ind}\pi)$, temos que:

$$\text{X-Ind}\pi(a) = 0 \Leftrightarrow \text{X-Ind}\pi(a)(x \otimes_B h) = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad x \in X,\ h \in H_\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a.x) \otimes_B h = 0, \quad \text{para quaisquer } x \in X,\ h \in H_\pi$$

$$\Leftrightarrow \|(a.x) \otimes_B h\| = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad x \in X,\ h \in H_\pi$$

$$\Leftrightarrow ((a.x) \otimes_B h|\ (a.x) \otimes_B h) = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad x \in X, h \in H_\pi.$$

Usando (Δ) da proposição 2.8,

$$\text{X-Ind}\pi(a) = 0 \Leftrightarrow (\pi(< a.x, a.x >_B)h|\ h) = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad x \in X,\ h \in H_\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi(< a.x, a.x >_B) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Como $ker(\pi) \subset ker(\rho)$, por hipótese, segue que:

$$\pi(< a.x, a.x >_B) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(< a.x, a.x >_B) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\rho(< a.x, a.x >_B)h|\ h) = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad x \in X,\ h \in H_\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{X-Ind}\rho(a) = 0.$$

Logo, se $a \in ker(\text{X-Ind}\pi)$ então $a \in ker(\text{X-Ind}\rho)$, ou seja, $ker(\text{X-Ind}\pi) \subset ker(\text{X-Ind}\rho)$, o que prova a proposição.

$\square$

Obtemos as seguintes consequências da proposição acima:

Corolário 2.5 *Se π e ρ são duas representações de uma C*-álgebra B tais que $ker(\pi) = ker(\rho)$, então $ker(X\text{-}Ind_B^A\pi) = ker(X\text{-}Ind_B^A\rho)$.*

Demonstração:

Da proposição 2.11, temos que:

$$ker(\pi) \subset ker(\rho) \Rightarrow ker(\text{X-Ind}_B^A\pi) \subset ker(\text{X-Ind}_B^A\rho);$$

$$ker(\pi) \supset ker(\rho) \Rightarrow ker(\text{X-Ind}_B^A\pi) \supset ker(\text{X-Ind}_B^A\rho).$$

Como $ker(\pi) = ker(\rho)$ por hipótese, obtemos a conclusão do corolário.

□

Corolário 2.6 *Sejam A e B duas C^*-álgebras e π uma representação fiel (injetiva) de B. Suponha que a ação de A sobre X é fiel, isto é, que a aplicação que leva A em $\boldsymbol{L}(X_B)$ é injetiva. Então $X - Ind_B^A\pi$ é uma representação fiel de A.*

Demonstração:

Seja $a \in A$ tal que X-Ind$\pi(a) = 0$. Pelos cálculos realizados na demonstração da proposição 2.11, temos que:

$$X - Ind\pi(a) = 0 \Leftrightarrow \pi(< a.x, a.x >_B) = 0,$$

para todo $x \in X$. Como π é fiel, então

$$\pi(< a.x, a.x >_B) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X \Rightarrow < a.x, a.x >_B = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a.x = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X \Rightarrow a = 0.$$

Logo, temos que X-Ind$\pi(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$, e portanto, X-Ind$\pi$ é fiel.

□

2.5 O produto tensorial espacial

Encerramos esse capítulo apresentando alguns resultados que serão necessários para definirmos as noções de norma espacial e de produto tensorial espacial.

Lema 2.12 *Sejam A e B duas C^*-álgebras. Existe uma única estrutura de *-álgebra sobre o produto tensorial $A \odot B$ tal que:*

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd \quad e \quad (a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*,$$

para quaisquer $a, c \in A$, $b, d \in B$.

Demonstração:

Sejam $a \in A$ e $b \in B$ dois elementos fixos. Note que a aplicação $f : A \times B \to A \odot B$ definida por $f(c,d) = ac \otimes bd$ é bilinear, pois o produto tensorial $\odot$ é bilinear. Logo, pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $L_a \otimes L_b : A \odot B \to A \odot B$, tal que

$$L_a \otimes L_b(c \otimes d) = ac \otimes bd.$$

Assim, se $L(A \odot B)$ é o conjunto dos operadores lineares de $A \odot B$, então a aplicação $g : A \times B \to L(A \odot B)$ dada por $g(a,b) := L_a \otimes L_b$ também é bilinear. Logo, existe uma única aplicação linear $M : A \odot B \to L(A \odot B)$ tal que

$$M(a \otimes b) = L_a \otimes L_b.$$

Dados $a \otimes b, c \otimes d \in A \odot B$, defina

$$(a \otimes b)(c \otimes d) := M(a \otimes b)(c \otimes d).$$

Temos que,

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = L_a \otimes L_b(c \otimes d) = ac \otimes bd.$$

Para provarmos a igualdade $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$, consideremos o espaço vetorial $(A \odot B)\breve{}$, no qual os elementos são da forma $(a \otimes b)$, com $a \in A, b \in B$, e satisfazem a igualdade

$$(\lambda.a) \otimes b = a \otimes (\lambda.b) = \overline{\lambda}(a \otimes b),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Logo, a aplicação $h : A \times B \to (A \odot B)\breve{}$ definida por $h(a,b) := a^* \otimes b^*$ é bilinear e portanto, existe uma única aplicação linear $T : A \odot B \to (A \odot B)\breve{}$ tal que

$$T(a \otimes b) = a^* \otimes b^*.$$

Assim, definimos

$$(a \otimes b)^* := T(a \otimes b) = a^* \otimes b^*$$

para $a \otimes b \in A \odot B$, e como $A \odot B$ é gerado pelos elementos tensores da forma $a \otimes b$, onde $a \in A$ e $b \in B$, temos o resultado desejado.

$\square$

Dados um operador $T \in B(H)$ e um elemento $h \in H$, para simplificar a notação, no próximo lema escrevemos apenas Th ao invés de $T(h)$. Além disso, o produto tensorial $H \otimes K$ dos espaços de Hilbert H e K representará o completamento do produto tensorial $H \odot K$.

Lema 2.13 *Sejam H e K espaços de Hilbert, $S \in B(H)$ e $T \in B(K)$. Então, existe um único operador limitado $S\widehat{\otimes}T : H \otimes K \to H \otimes K$ tal que*

$$S\widehat{\otimes}T(h \otimes k) = Sh \otimes Tk,$$

para todos $h \in H$, $k \in K$ e

$$\left\|S\widehat{\otimes}T\right\| = \|S\| \,.\, \|T\| \,.$$

Demonstração: Note que a aplicação $f : H \times K \to H \odot K$ definida por $f(h,k) := Sh \otimes Tk$ é bilinear. Logo, existe um único operador linear $S\widehat{\otimes}T : H \odot K \to H \odot K$ tal que

$$S\widehat{\otimes}T(h \otimes k) = Sh \otimes Tk,$$

para quaisquer $h \in H$, $k \in K$. Vamos mostrar que $S\widehat{\otimes}T$ é limitado com norma $\|S\| \,.\, \|T\|$, pois assim podemos estendê-lo a um operador sobre o completamento $H \otimes K$ do espaço $H \odot K$, com as mesmas propriedades.

(i) Vamos supor que S e T são unitários e $\alpha \in H \odot K$. Como H e K são espaços de Hilbert, sabemos que possuem bases ortonormais e portanto, podemos escrever

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes k_i$$

de tal forma que o conjunto $\{k_i\}_{i=1}^{n}$ seja ortogonal, isto é, os vetores k_i, onde $i = 1, ..., n$, são dois-a-dois ortogonais.

Como $(Tk|\, Tk) = (k \mid k)$, para todo $k \in K$, pois T é unitário, e o conjunto $\{k_i\}_{i=1}^{n}$ é ortogonal, então $\{Tk_i\}_{i=1}^{n}$ é um conjunto ortogonal e os vetores $Sh_i \otimes Tk_i$ também são ortogonais. Logo, o produto interno em $H \odot K$ é dado por

$$(h \otimes k|\, h' \otimes k') := (h \mid h').(k \mid k').$$

Daí,

$$\left\|S\widehat{\otimes}T(\alpha)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} Sh_i \otimes Tk_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Sh_i \otimes Tk_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Sh_i \otimes Tk_i | Sh_i \otimes Tk_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Sh_i|\, Sh_i).(Tk_i|\, Tk_i) = \sum_{i=1}^{n} (h_i \mid h_i).(k_i \mid k_i) = \sum_{i=1}^{n} \|h_i\|^2 \,.\, \|k_i\|^2 = \|\alpha\|^2 \,.$$

Donde segue que $\left\|S\widehat{\otimes}T\right\| = 1 = \|S\| \,.\, \|T\|$, pois S e T são unitários.

(ii) Para o caso geral, precisamos da seguinte afirmação: Se H é um espaço de Hilbert, então $B(H)$ é gerado pelos unitários.

De fato,

(1) Seja $T \in B(H)$ tal que $0 \leq \|T\| \leq 1$.

Temos que $U = T + i(I_d - T^2)^{1/2}$ é unitário e $2T = U + U^*$.

(2) Agora, se $T \in B(H)$ e $\|T\| > 1$, então $T' = T/\|T\|$ é unitário e $T = \|T\| T'$.

De (1) e (2) segue a afirmação.

Assim, como $\|S\widehat{\otimes}T\| = 1$ para $S \in B(H)$ e $T \in B(K)$ unitários, pela afirmação acima, segue que $S\widehat{\otimes}T$ é limitado para todos $S \in B(H)$ e $T \in B(K)$.

Note agora que as aplicações $\alpha : B(H) \to B(H \otimes K)$ e $\beta : B(K) \to B(H \otimes K)$, definidas por $S \mapsto S\widehat{\otimes}1_K$ e $T \mapsto 1_H\widehat{\otimes}T$, respectivamente, são homomorfismos injetivos. Como homomorfismos injetivos entre C*-álgebras são isometrias, temos que:

$$\|S\widehat{\otimes}1_K\| = \|S\| \quad \text{e} \quad \|1_H\widehat{\otimes}T\| = \|T\|.$$

Além disso, da definição de $S\widehat{\otimes}T$, segue que $(S\widehat{\otimes}1_K)(1_H\widehat{\otimes}T) = S\widehat{\otimes}T$, pois para todo $h \otimes k \in H \odot K$ temos que:

$$(S\widehat{\otimes}1_K)(1_H\widehat{\otimes}T)(h \otimes k) = (S\widehat{\otimes}1_K)(h \otimes Tk) = Sh \otimes Tk = (S\widehat{\otimes}T)(h \otimes k).$$

Logo,

$$\|S\widehat{\otimes}T\| = \|(S\widehat{\otimes}1_K)(1_H\widehat{\otimes}T)\| \leq \|S\widehat{\otimes}1_K\| . \|1_H\widehat{\otimes}T\| = \|S\| \|T\|.$$

Por outro lado, note que podemos aproximar $\|S\|$ e $\|T\|$ por $\|Sh\|$ e $\|Tk\|$, respectivamente, onde $h \in H$ e $k \in K$ vetores unitários.

Daí, $h \otimes k$ é unitário e podemos aproximar $\|S\widehat{\otimes}T\|$ por $\|Sh \otimes Tk\|$.

Assim, como $\|Sh \otimes Tk\| = \|Sh\| . \|Tk\|$, temos que $\|S\widehat{\otimes}T\| \geq \|S\| . \|T\|$.

Portanto,

$$\|S\widehat{\otimes}T\| = \|S\| . \|T\|$$

□

Apresentamos agora dois resultados necessários para definirmos a norma espacial sobre o espaço vetorial $A \odot B$, onde A e B são duas C*-álgebras, e denotamos por $A \otimes_C B$ o completamento de $A \odot B$.

Proposição 2.12 *Considere os espaços de Hilbert H e K. Suponha que as C*-álgebras*

$$A' \subset B(H) \text{ e } B' \subset B(K)$$

são C-álgebras concretas, isto é, são C*-sub-álgebras não-degeneradas, e sejam $\rho \in S(A')$ e $\tau \in S(B')$. Então, existe um único estado $\rho \otimes \tau$ sobre $A' \otimes_C B'$, tal que*

$$\rho \otimes \tau(S \otimes T) = \rho(S)\tau(T),$$

para quaisquer $S \in A'$, $T \in B'$.

Um estado dessa forma é chamado de ***estado produto*** *sobre $A' \otimes_C B'$.*

Proposição 2.13 *Sejam H e K espaços de Hilbert. Suponha que $A' \subset B(H)$ e $B' \subset B(K)$ são C*-álgebras concretas e que $T \in A' \odot B'$. Então, como um operador sobre o completamento $H \otimes K$ de $H \odot K$, temos que*

$$\|T\|^2 = \sup\ M,$$

onde M é o conjunto dos quocientes da forma $\rho \otimes \tau(S^*T^*TS)/\rho \otimes \tau(S^*S)$ tais que

$$\rho \in S(A'), \tau \in S(B') \ \text{ e } S \in A' \odot B' \text{ satisfaz } \rho \otimes \tau(S^*S) \neq 0.$$

As demonstrações dessas proposições utilizam estados vetores de uma C*-sub-álgebra não degenerada $A' \subset B(H)$, sendo que, por definição, um estado vetor sobre A' é um estado $\rho \in S(A')$ da forma $\rho(T) = (Th \mid h)$, para algum vetor unitário $h \in H$, onde H é um espaço de Hilbert. Para maiores detalhes, ver [Wil], proposições B-7 e B-8.

Consideremos agora duas C*-álgebras A e B.

Se $\rho \in S(A)$ e $\tau \in S(B)$, então a aplicação $f : A \times B \to \mathbb{C}$ definida por $f(a,b) = \rho(a).\tau(b)$, é bilinear e, pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $\rho \odot \tau : A \odot B \to \mathbb{C}$ tal que

$$\rho \odot \tau(a \odot b) = \rho(a).\tau(b).$$

Podemos agora provar o nosso próximo resultado.

Teorema 2.2 *Sejam A e B duas C*-álgebras.*

(*a*) *Se $t \in A \odot B$, $\rho \in S(A)$, $\tau \in S(B)$, então $\rho \odot \tau(t^*t) \geq 0$.*

(*b*) *Para cada $t \in A \odot B$, defina*

$$\|t\|_\sigma^2 = \sup\ M,$$

onde M é o conjunto dos quocientes da forma $\rho \odot \tau(s^*t^*ts)/\rho \odot \tau(s^*s)$ tais que

$$\rho \in S(A), \tau \in S(B) \ \text{ e } s \in A \odot B \text{ satisfaz } \rho \otimes \tau(s^*s) \neq 0.$$

Então, $\|\,.\,\|_\sigma$ é uma C-norma sobre $A \odot B$ tal que $\|a \otimes b\|_\sigma = \|a\|\,\|b\|$.*

(*c*) *Se $\pi : A \to B(H_\pi)$ e $\eta : B \to B(H_\eta)$ são representações não-degeneradas, então existe um único *-homomorfismo $\pi \otimes \eta : A \odot B \to B(H_\pi \otimes H_\eta)$ tal que*

$$\pi \otimes \eta(a \otimes b) = \pi(a) \otimes \eta(b).$$

Além disso, para cada $t \in A \odot B$, temos que $\|\pi \otimes \eta(t)\| \leq \|t\|_\sigma$.

(*d*) *Se π e η são representações fiéis de A e B respectivamente, então vale a igualdade em (c), isto é, para quaisquer $a_i \in A$ e $b_i \in B$,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\|_{\sigma} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi(a_i) \otimes \eta(b_i) \right\|_{B(H_\pi \otimes H_\eta)}.$$

Demonstração:

Suponha que π e η são representações fiéis das C*-álgebras A e B respectivamente.

Como a aplicação $g : A \times B \to B(H_\pi \otimes H_\eta)$ dada por $g(a, b) = \pi(a) \otimes \eta(b)$ é bilinear, existe uma única aplicação linear $\pi \otimes \eta : A \odot B \to B(H_\pi \otimes H_\eta)$ tal que

$$\pi \otimes \eta(a \otimes b) = \pi(a) \otimes \eta(b).$$

Note que essa aplicação é um *-homomorfismo e é fiel.

De fato,

(i) $\pi \otimes \eta((a \otimes b)(c \otimes d)) = \pi \otimes \eta(ac \otimes bd) = \pi(ac) \otimes \eta(bd) = \pi(a)\pi(c) \otimes \eta(b)\eta(d) =$

$$= (\pi(a) \otimes \eta(b))(\pi(c) \otimes \eta(d)) = \pi \otimes \eta(a \otimes b).\pi \otimes \eta(c \otimes d);$$

(ii) $\pi \otimes \eta((a \otimes b)^*) = \pi \otimes \eta(a^* \otimes b^*) = \pi(a^*) \otimes \eta(b^*) = \pi(a)^* \otimes \eta(b)^* = (\pi \otimes \eta(a \otimes b))^*;$

(iii) $\pi \otimes \eta(a \otimes b) = \pi(a) \otimes \eta(b) = 0 \otimes 0 \Rightarrow \pi(a) = 0$ e $\eta(b) = 0.$

Como π e η são representações fiéis, então $a = 0 = b$, donde segue que $\pi \otimes \eta$ é fiel.

Agora, sendo π e η duas representações injetivas, temos que os estados de A são da forma $\rho \circ \pi$, onde ρ um estado de $\pi(A)$ e os estados de B são da forma $\tau \circ \eta$, onde τ é um estado de $\eta(B)$.

Note também que

$$(\rho \circ \pi) \odot (\tau \circ \eta)(t) = \rho \otimes \tau(\pi \otimes \eta(t)),$$

para todo $t \in A \odot B$.

Com efeito, para $t = a \otimes b \in A \odot B$ temos que:

(iv) $\rho \otimes \tau(\pi \otimes \eta(t)) = \rho \otimes \tau(\pi(a) \otimes \eta(b)) = \rho(\pi(a)).\tau(\eta(b))$, pela proposição 2.12;

(v) $(\rho \circ \pi) \odot (\tau \circ \eta)(t) = (\rho \circ \pi)(a).(\tau \circ \eta)(b) = \rho(\pi(a)).\tau(\eta(b)).$

Como $\pi \otimes \eta$ é um *-homomorfismo, $\pi \otimes \eta(t^*t)$ é um elemento positivo de $\pi(A) \otimes_C \eta(B)$, onde $\pi(A) \otimes_C \eta(B)$ é o espaço isomorfo ao espaço $A \otimes_C B$, que é o completamento do espaço $A \odot B$.

Assim, usando a proposição 2.12 com $A' = \pi(A)$ e $B' = \eta(B)$, temos a validade de (a), pois se $t \in A \odot B$, então

$$(\rho \circ \pi) \odot (\tau \circ \eta)(t^*t) = \rho \otimes \tau(\pi \otimes \eta(t^*t)) \geq 0.$$

Note agora que a proposição 2.13 implica que $\|t\|_\sigma$ é a norma do operador $\pi \otimes \eta(t)$.

De fato, se $t, s \in A \odot B$,

$$\|\pi \otimes \eta(t)\|^2 = sup\left\{\rho \otimes \tau(\pi \otimes \eta(s^*)\pi \otimes \eta(t^*)\pi \otimes \eta(t)\pi \otimes \eta(s))/\rho(\pi \otimes \eta(s^*)\pi \otimes \eta(s))\right\},$$

(onde $\rho \in S(\pi(A)), \tau \in S(\eta(B))$ e $s \in A \odot B$ satisfaz $\rho(\pi \otimes \eta(s^*)\pi \otimes \eta(s)) \neq 0$).

Donde,

$$\|\pi \otimes \eta(t)\|^2 =$$

$$= sup\left\{(\rho \circ \pi) \odot (\tau \circ \eta)(s^*t^*ts)/(\rho \circ \pi) \odot (\tau \circ \eta)(s^*s); \rho \in S(\pi(A)), \tau \in S(\eta(B))\right\},$$

(onde $s \in A \odot B$ satisfaz $(\rho \circ \pi) \odot (\tau \circ \eta)(s^*s) \neq 0$).

Logo, como

$$\|\pi \otimes \eta(t)\|^2 = \|t\|_\sigma^2 \Rightarrow \|\pi \otimes \eta(t)\| = \|t\|_\sigma,$$

temos a validade de (d).

Além disso, se $t = a \otimes b$, então:

$$\|a \otimes b\|_\sigma = \|\pi \otimes \eta(a \otimes b)\| = \|\pi(a) \otimes \eta(b)\| = \|\pi(a)\| \, \|\eta(b)\| = \|a\| \, . \, \|b\|,$$

sendo que essas últimas igualdades seguem do lema 2.13 e do fato que π e η serem isometrias.

Daí, $\|a \otimes b\|_\sigma = \|a\| \, . \, \|b\|$, donde concluímos a prova do item (b).

Por outro lado, mesmo se π e η não são fiéis, temos ainda que $\rho \circ \pi$ e $\tau \circ \eta$ são estados quando $\rho \in S(\pi(A))$ e $\tau \in S(\eta(B))$.

Logo, o item (c) segue do item (b).

□

Corolário 2.7 *Sejam A e B duas C^*-álgebras e $\pi : A \to B(H_\pi)$ e $\eta : B \to B(H_\eta)$ duas representações. Então, existe uma única representação $\pi \otimes \eta : A \otimes_\sigma B \to B(H_\pi \otimes H_\eta)$ satisfazendo $\pi \otimes \eta(a \otimes b) = \pi(a) \otimes \eta(b)$. Se π e η são fiéis, então $\pi \otimes \eta$ também é fiel.*

Demonstração: (Ver [Wil], corolário B.11)

Definição 2.16 *Sejam A e B duas C^*-álgebras, então a norma $\| \, . \, \|_\sigma$ definida no teorema 2.2 é chamada **norma espacial** sobre $A \odot B$. O completamento de $A \odot B$ nessa norma é denotado por $A \otimes_\sigma B$ e é chamado de **produto tensorial espacial**.*

Capítulo 3

Equivalência de Morita

Neste capítulo definimos alguns conceitos cruciais para a dissertação, a saber, os bimódulos de imprimitividade e a Equivalência de Morita. Além disso, mostramos que a Equivalência de Morita é uma relação de equivalência na classe das C*-álgebras.

3.1 Bimódulos de imprimitividade

Iniciamos essa seção introduzindo o conceito de bimódulo de imprimitividade e a seguir provamos algumas das suas propriedades elementares, que serão necessárias no próximo capítulo.

Definição 3.1 *Sejam A e B duas C*-álgebras. Dizemos que um espaço vetorial complexo X é um* ***A - B bimódulo*** *quando X é simultaneamente um A-módulo à esquerda e um B-módulo à direita. Um* ***A - B bimódulo de imprimitividade*** *é um A - B bimódulo X que satisfaz as seguintes condições:*

(a) *X é um A-módulo de Hilbert à esquerda pleno e é um B-módulo de Hilbert à direita pleno;*

(b) *Dados $x, y \in X, a \in A$ e $b \in B$, temos:*

$$< a.x, y >_B = < x, a^* y >_B \quad e \quad ({}_A< x.b, y >) = ({}_A< x, y.b^* >).$$

(c) *Dados $x, y, z \in X$, temos $({}_A< x, y >).z = x. < y, z >_B$.*

Observação 3.1 *A condição (b) da definição anterior nos diz que a C*-álgebra A atua como operadores adjuntáveis sobre X_B e que a C*-álgebra B atua como operadores adjuntáveis sobre $({}_A X)$.*

Em particular, temos que $(a.x).b = a.(x.b)$ e $(\lambda.a).(x.b) = a.(x.(\lambda.b))$ pois, para quaisquer $x \in X, a \in A, b \in B, \lambda \in \mathbb{C}$, vale:

(i) $_A< (a.x).b, y >=_A< a.x, y.b^* >= a._A< x, y.b^* >= a._A< x.b, y >=_A< a.(x.b), y >$;

(ii) $< (\lambda.a).(x.b), y >_B =< x.b, \overline{\lambda}a^*.y >_B = \overline{\lambda} < x.b, a^*.y >_B = < x.(\lambda.b), a^*.y >_B =$
$=< a.(x.(\lambda.b)), y >_B$.

Apresentamos agora alguns exemplos de bimódulos de imprimitividade.

Exemplo 3.1 *Um espaço de Hilbert H é um K(H) - $\mathbb{C}$ bimódulo de imprimitividade com os produtos internos definidos por:*

$$({}_K< h, k >) := h \otimes \bar{k} \quad e$$

$$< h, k >_{\mathbb{C}} = (k \mid h),$$

onde $h \otimes \bar{k}(m) := h. < k, m >_{\mathbb{C}} = (m \mid k)h$, *com* $h,\ k,\ m \in H$.

De fato,

(a) No exemplo 2.5 vimos que H é um *K(H)*-módulo de Hilbert à esquerda pleno e, como $< h, k >_{\mathbb{C}} = (k \mid h)$, com $h,\ k,\ m \in H$, temos que $I = span\,\{< x, y >_{\mathbb{C}}; x, y \in X\}$ é denso em $\mathbb{C}$. Portanto, H é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert à direita pleno.

(b) Dados $h, k, m, x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

(i)$< (h \otimes \bar{k})x, y >_{\mathbb{C}} = < h. < k, x >_{\mathbb{C}}, y >_{\mathbb{C}} =< (x \mid k)h, y >_{\mathbb{C}} = \ (y \mid (x \mid k)h) =$

$$= (y \mid h)\overline{(x \mid k)} = (y \mid h)(k \mid x);$$

(ii)$< x, (h \otimes \bar{k})^* y >_{\mathbb{C}} = < x, (k \otimes \bar{h})y >_{\mathbb{C}} = \ < x, k. < h, y >_{\mathbb{C}} >_{\mathbb{C}} = < x, (y \mid h)k >_{\mathbb{C}} =$

$$= ((y \mid h)k \mid x) = (y \mid h)(k \mid x);$$

(iii)$_K < h.\lambda, k > (m) = (h.\lambda) \otimes \bar{k}(m) = (m \mid k)h.\lambda$;

(iv)$_K < h, k.\bar{\lambda} > (m) = (m \mid k.\bar{\lambda})h = \lambda(m \mid k)h = (m \mid k)h.\lambda$.

Como $K(H)$ é gerado pelos elementos da forma $h \otimes \bar{k}$, onde $h, k \in H$, dados os elementos $x, y \in H,\ T \in K(H), \lambda \in \mathbb{C}$, de $(i) - (iv)$ temos que:

$$({}_K< x.\lambda, y >) = ({}_K< x, y.\bar{\lambda} >) \quad \text{e}$$

$$< T(x), y >_{\mathbb{C}} =< x, T^*(y) >_{\mathbb{C}} .$$

Logo, vale a condição (b) da definição 3.1.

(c) Dados $h, k, m \in H$, temos que:

$$({}_K\!< h, k >)(m) = \; h \otimes \bar{k}(m) = \; h. < k, m >_{\mathbb{C}} .$$

Portanto, H é um *K(H)* - $\mathbb{C}$ bimódulo de imprimitividade.

Exemplo 3.2 *Toda C*-álgebra é um A - A bimódulo de imprimitividade com os produtos internos dados por* $< a, b >_A := \; a^*b$ *e* $({}_A\!< a, b >) := a.b^*$, *onde* $a, b \in A$.

De fato, sejam $a, b, c, x \in A$.

(a) Vimos no exemplo 2.2 que A é um A-módulo de Hilbert à direita com o produto interno $< a, b >_A := \; a^*b$.

De maneira análoga, obtemos que A é um A-módulo de Hilbert à esquerda com o produto interno $({}_A\!< a, b >) := a.b^*$.

(b) Note que:

$$< x.a, b >_A = \; (xa)^*b = \; a^*x^*b = < a, x^*.b >_A \quad \text{e}$$

$$({}_A\!< a.x, b >) = \; a.xb^* = \; a.(b.x^*)^* = \; ({}_A\!< a, b.x^* >).$$

(c) Como $({}_A\!< a, b >).c = \; a.b^*.c = \; a. < b, c >_A$, temos a validade da condição (c) da definição 3.1.

A afirmação segue agora de $(a), (b)$ e (c).

Lema 3.1 *Sejam A e B duas C*-álgebras. Suponha que X é um A - B bimódulo satisfazendo as condições (a) e (c) da definição 3.1. Então, X é um A - B bimódulo de imprimitividade se, e somente se, X satisfaz a condição:*

(b') *Dados* $a \in A$, $b \in B$ *e* $x \in X$, *valem as desigualdades:*

$$< a.x, a.x >_B \leq \|a\|^2 . < x, x >_B \qquad e$$

$$({}_A\!< x.b, x.b >) \; \leq \|b\|^2 .({}_A\!< x, x >).$$

Demonstração:

(i) Se X é um A - B bimódulo de imprimitividade, então X satisfaz a condição (b) da definição 3.1. Assim, A atua como operadores adjuntáveis sobre X_B e B atua como operadores adjuntáveis sobre $({}_AX)$. Logo, a condição (b') segue do corolário 2.2.

(ii) Suponhamos agora que X satisfaz as condições $(a), (b')$ e (c). Então,

$$< ({}_A< x,y >).z,w >_B = < x. < y,z >_B, w >_B = < y,z >_B^* . < x,w >_B =$$
$$= < z,y >_B . < x,w >_B = < z,y. < x,w >_B >_B = < z, ({}_A< y,x >).w >_B =$$
$$= < z, ({}_A< x,y >^*).w >_B .$$

Assim, obtemos que $< a.z, w >_B = < z, a^*.w >_B$, para quaisquer $z, w \in X$ e para todo a pertencente ao conjunto

$$({}_A< X,X >) = \ span \{({}_A< x,y >); x,y \in X\} .$$

De (b'), temos que a aplicação $p : X \to X$ dada por $p(x) = a.x$, onde $a \in ({}_A< X,X >)$, tem norma menor ou igual que $\|a\|$ e, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que:

$$\|< a.z,w >_B\|^2 = \ \|< a.z,w >_B^* . < a.z,w >_B\| \ \leq \ \|< a.z,a.z >_B\| . \|< w,w >_B\| \ \leq$$
$$\leq \ \left\| \|a\|^2 < z,z >_B \right\| . \|< w,w >_B\| = \ \|a\|^2 . \|z\|_B^2 . \|w\|_B^2 ,$$

donde segue que

$$\|< a.z,w >_B\| \leq \ \|a\| . \|z\|_B . \|w\|_B ,$$

para todos $z, w \in X$.

Como $({}_A< X,X >)$ é denso em A e $< . , . >_B$ é contínua, segue que a igualdade

$$< a.z,w >_B = < z,a^*.w >_B$$

é válida para quaisquer $z, w \in X$, $a \in A$.

Analogamente, temos que a igualdade $({}_A< z.b,w >) = \ ({}_A< z,w.b^* >)$, é válida para quaisquer $z, w \in X$, $b \in B$.

Portanto, obtemos a validade da condição (b) da definição 3.1, ou seja, X é um A - B bimódulo de imprimitividade.

□

Proposição 3.1 *(I) Todo B-módulo de Hilbert pleno é um K(X) - B bimódulo de imprimitividade com o produto interno*

$$({}_K< x,y >) := \Theta_{x,y},$$

onde $\Theta_{x,y}(z) := \ x. < y,z >_B$, para $x,y,z \in X$.

(II) Reciprocamente, se X é um A - B bimódulo de imprimitividade, então existe um isomorfismo $\phi : A \to K(X)$ tal que $\phi(({}_A< x,y >)) = \ {}_K < x,y >$, para $x,y \in X$.

Demonstração:

(1) Seja X_B um B-módulo de Hilbert pleno. Pelo lema 2.6, temos que X é um *K(X)*-módulo de Hilbert à esquerda pleno com o produto interno $({}_K\!< x, y >) := \Theta_{x,y}$. Assim, obtemos que a condição (a) da definição 3.1 é satisfeita.

(2) Dados $x, y, z, w \in X, b \in B$, temos que:
(i)$({}_K\!< x.b, y >)(z) = \Theta_{x.b,y}(z) = x.b. < y, z >_B = x. < y.b^*, z >_B = \Theta_{x,y.b^*}(z) =$

$$= ({}_K\!< x, y.b^* >)(z);$$

(ii)$< \Theta_{x,y}(z), w >_B = < x. < y, z >_B, w >_B = < z, y >_B . < x, w >_B =$

$$= < z, y. < x, w >_B >_B = < z, \Theta_{y,x}(w) >_B = < z, \Theta^*_{x,y}(w) >_B .$$

Como os elementos da forma $\Theta_{x,y}$ geram *K(X)*, onde $x, y \in X$, segue que:

$$< T(z), w >_B = < z, T^*(w) >_B,$$

para quaisquer $z, w \in X$ e todo $T \in K(X)$.

Logo, a condição (b) da definição 3.1 é satisfeita.

(3) Como $({}_K\!< x, y >).z := ({}_K\!< x, y >)(z) = \Theta_{x,y}(z) := x. < y, z >_B$, para $x, y, z \in X$, temos que a condição (c) da definição 3.1 é válida.

De (1), (2) e (3) obtemos a afirmação (I).

Reciprocamente, suponhamos que X é um A - B bimódulo de imprimitividade.

Como A atua como operadores adjuntáveis, a aplicação $\phi : A \to$ ***L(X)***, definida por

$$\phi(a)(x) = a.x,$$

é um homomorfismo entre C*-álgebras, pois dados $a, b \in A, x \in X$, temos que:

$$\phi(a+b)(x) = (a+b)x = a.x + b.x = \phi(a)(x) + \phi(b)(x) \quad \text{e}$$

$$\phi(ab)(x) = ab.x = a.b.x = a.\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)).$$

Seja $a \in A$ tal que $\phi(a) = 0$. Como X é um A-módulo de Hilbert pleno, então

$$({}_A\!< X, X >) = span\,\{({}_A\!< x, y >);\ x, y \in X\}$$

é um ideal denso em A. Logo, podemos aproximar a por elementos da forma

$$a. \sum_i ({}_A\!< x_i, y_i >).$$

Sendo $\phi(a) = 0$, temos

$$a.\sum_i ({}_A< x_i, y_i >) = \sum_i ({}_A< a.x_i, y_i >) = \sum_i ({}_A< \phi(a)(x_i), y_i >) = 0.$$

Segue daí que $a = 0$, ou seja, ϕ é injetiva.

Além disso, para $x, y, z \in A$, temos:

$$\phi(({}_A< x, y >))(z) = ({}_A< x, y >).z = x. < y, z >_B = \Theta_{x,y}(z) = ({}_K< x, y >)(z),$$

ou seja,

$$\phi({}_A< x, y >) = {}_K < x, y >,$$

para todo $x, y \in X$.

Logo, $\phi(({}_A< X, X >)) \subset K(X)$. Agora, como $({}_A< X, X >)$ é denso em A e *K(X)* é fechado, temos $\phi(A) \subset K(X)$.

Por outro lado, dados $x, y \in X$, temos que $\Theta_{x,y} = \phi(({}_A< x, y >))$, isto é, $\phi(A)$ contém todos os geradores de *K(X)* e, como imagem de ϕ é fechada, segue que *K(X)* $\subset \phi(A)$,

Portanto, $\phi(A) = K(X)$ e como ϕ é injetiva, obtemos o resultado desejado.

□

Definição 3.2 *Sejam A e B duas C*-álgebras e $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$, duas *-subálgebras densas. Dizemos que um espaço vetorial X_0 é um $A_0 - B_0$* ***pré-bimódulo de imprimitividade*** *quando X_0 é um $A_0 - B_0$ bimódulo que satisfaz as seguintes condições:*

(a) *X_0 é um A_0-módulo com um pré-produto interno à esquerda e é um B_0-módulo com um pré-produto interno à direita no sentido que existem aplicações*

$$({}_{A_0}< . , . >) : X_0 \times X_0 \to A_0 \quad e \quad < . , . >_{B_0} : X_0 \times X_0 \to B_0$$

satisfazendo as condições $(a) - (d)$ da definição 2.2, com as devidas adaptações para o caso "à esquerda";

(b) *$({}_{A_0}< X_0, X_0 >)$ e $< X_0, X_0 >_{B_0}$ geram ideais densos em A e B, respectivamente;*

(c) *$< a.x, a.x >_{B_0} \leq \|a\|^2 < x, x >_{B_0}$ e $({}_{A_0}< x.b, x.b >) \leq \|b\|^2 ({}_{A_0}< x, x >)$, para quaisquer $a \in A_0$, $x \in X_0$, $b \in B_0$;*

(d) *$({}_{A_0}< x, y >).z = x. < y, z >_{B_0}$, para todos $x, y, z \in X_0$.*

Nosso próximo passo é tomar o completamento de um pré-bimódulo de imprimitividade X_0 para obter um bimódulo de imprimitividade. Para isso, precisamos que as duas semi-normas

$$\|x\|_A^2 := \|({}_{A_0}< x, x >)\| \quad \text{e}$$

$$\|x\|_B^2 := \|< x, x >_{B_0}\|,$$

definidas sobre X_0, coincidam. O próximo resultado garante esta igualdade.

Proposição 3.2 *Sejam A e B duas C^*-álgebras e $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$, duas *-subálgebras densas. Se X_0 é um $A_0 - B_0$ pré-bimódulo de imprimitividade, então*

$$\|x\|_A^2 := \|({}_{A_0}< x, x >)\| = \|< x, x >_{B_0}\| := \|x\|_B^2,$$

para todo $x \in X_0$.

Demonstração:

Fixado $x \in X_0$, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição de pré-bimódulo de imprimitividade, obtemos que:

$$\|< x, x >_{B_0}\|^2 = \left\|< x, x >_{B_0}^* . < x, x >_{B_0}\right\| = \|< x, x >_{B_0} . < x, x >_{B_0}\| =$$

$$= \|< x, x. < x, x >_{B_0}>_{B_0}\| = \|< x, ({}_{A_0}< x, x >).x >_{B_0}\| =$$

$$= \left\|< x, ({}_{A_0}< x, x >).x >_{B_0}^* . < x, ({}_{A_0}< x, x >).x >_{B_0}\right\|^{1/2} \leq$$

$$\leq \|< x, x >_{B_0}\|^{1/2} . \|< ({}_{A_0}< x, x >).x, ({}_{A_0}< x, x >).x >_{B_0}\| \leq$$

$$\leq \|< x, x >_{B_0}\|^{1/2} . \|({}_{A_0}< x, x >)\| . \|< x, x >_{B_0}\|^{1/2}$$

Daí, $\|< x, x >_{B_0}\| \leq \|({}_{A_0}< x, x >)\|$.

Analogamente, podemos mostrar que $\|({}_{A_0}< x, x >)\| \leq \|< x, x >_{B_0}\|$, donde segue a igualdade desejada.

□

Proposição 3.3 *Sejam A e B duas C^*-álgebras e $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$, duas *-subálgebras densas. Se X_0 é um $A_0 - B_0$ pré-bimódulo de imprimitividade, então existem um $A - B$ bimódulo de imprimitividade X e um homomorfismo $q : X_0 \to X$, entre $A_0 - B_0$ bimódulos, tais que $q(X_0)$ é denso em X e*

$$({}_A< q(x), q(y) >) = ({}_{A_0}< x, y >) \quad e$$

$$< q(x), q(y) >_B = < x, y >_{B_0},$$

para todos $x, y \in X$, $a \in A_0$, $b \in B_0$.

Demonstração:

Pela proposição 3.2, temos que as seminormas $\| \, . \, \|_A$ e $\| \, . \, \|_B$ coincidem em X_0. Assim, pelo lema 2.2, temos que o completamento X de $(X_0, \| \, . \, \|_A)$ é um B-módulo de Hilbert à direita e, por simetria, X também é um A-módulo de Hilbert à esquerda.

Além disso, desse mesmo lema, segue que existe uma aplicação linear $q : X_0 \to X$, tal que $q(X_0)$ é denso em X e vale:

$$({}_A\!< q(x), q(y) >) = ({}_{A_0}\!< x, y >) \quad \text{e}$$

$$< q(x), q(y) >_B = < x, y >_{B_0},$$

para todos $x, y \in X$, $a \in A_0$, $b \in B_0$.

Também temos que a aplicação q é um homomorfismo, pois $q : X_0 \to X$ é a extensão da aplicação canônica $q : X_0 \to X_0/N$, onde $q(x) := x + N$ e

$$N = \{x \in X_0; < x, x >_{B_0} = 0 = ({}_{A_0}\!< x, x >)\} .$$

Como X_0 é um $A_0 - B_0$ pré-bimódulo de imprimitividade, temos que:

(I) X é um A-módulo de Hilbert à esquerda pleno e também que X é um B-módulo de Hilbert à direita pleno, pelas condições (a) e (b) da definição 3.2;

(II) Como as condições (c) da definição de 3.1 e (b') do lema 3.1 valem sobre X_0, então elas permanecem válidas sobre o completamento X.

Portanto, X é um A - B bimódulo de imprimitividade.

$\square$

Corolário 3.1 *Suponha que A e B são duas C*-álgebras e que X é um A - B bimódulo satisfazendo as condições $(a), (b)$ e (d) da definição 3.2, (com $A = A_0$ e $B = B_0$). Então, X é um $A - B$ pré-bimódulo de imprimitividade se, e somente se, para $x, y \in X$, $a \in A$, $b \in B$, vale a seguinte condição:*

(c') $< a.x, y >_B = < x, a^*.y >_B$, $({}_A\!< x.b, y >) = ({}_A\!< x, y.b^* >)$.

Demonstração:

Suponhamos que valem $(a), (b), (c')$ e (d).

Note que a ação de A sobre X pode ser estendida a para $A^1 = A \oplus \mathbb{C}$ via

$$(a + \lambda.\mathbf{1}).x := a.x + \lambda.x$$

onde $\mathbf{1}$ é a unidade de A^1. Assim,

$$< (a+\lambda.\mathbf{1}).x, y >_B = < a.x + \lambda.x, y >_B = < a.x, y >_B + < \lambda.x, y >_B =$$

$$= < x, a^*.y >_B + \bar{\lambda}. < x, y >_B = < x, (a^* + \bar{\lambda}.\mathbf{1})y >_B = < x, (a+\lambda.\mathbf{1})^*.y >_B,$$

ou seja, para todo $a_1 \in A^1$ vale $< a_1.x, y >_B = < x, a_1^*.y >_B$.

Logo, se $c \in A^1$ é um elemento positivo, então $c = d^*d$ para algum $d \in A^1$ e temos

$$< x, c.x >_B = < d.x, d.x >_B \geq 0.$$

Como $\|a\|^2.\mathbf{1} - a^*a \in A^1$ é um elemento positivo, segue que:

(i) $\|a\|^2 < x, x >_B - < a.x, a.x >_B = < x, \|a\|^2.\mathbf{1}.x >_B - < x, a^*a.x >_B =$

$$= < x, (\|a\|^2.1_A - a^*a).x >_B \geq 0.$$

(ii) De modo análogo, obtemos que $\|b\|^2.({}_A< x, x >) - ({}_A< x.b, x.b >) \geq 0.$

De (i) e (ii), obtemos que a condição (c) da definição 3.2 é satisfeita. Portanto, X é um $A - B$ pré-bimódulo de imprimitividade.

Por outro lado, se X é um $A-B$ pré-bimódulo de imprimitividade, então vale a condição (b') do lema 3.1, pois (b') é igual a condição (c) da definição 3.2. Logo, (c') segue como na demonstração do lema 3.1.

□

3.2 Equivalência de Morita

Nessa seção, apresentamos o conceito de Equivalência de Morita entre C*-álgebras e provamos que a Equivalência de Morita é uma relação de equivalência na classe das C*-álgebras.

Definição 3.3 *Duas C*-álgebras A e B são* ***Morita equivalentes****, ou também chamadas* ***equivalentes à Morita****, quando existe um A - B bimódulo de imprimitividade X.*

Nosso próximo passo será provar que a Equivalência de Morita é, de fato, uma relação de equivalência. Para isso, precisamos de alguns resultados apresentados na sequência.

Observação 3.2 *Se as C*-álgebras A e B são isomorfas, então A e B são Morita equivalentes.*

De fato, seja $\phi : A \to B$ um isomorfismo entre as C*-álgebras A e B. Então, $X = B$ é um $A - B$ bimódulo de imprimitividade com as operações:

$$x.b := xb; \quad a.x := \phi(a)x, \quad < x, y >_B := x^*y \quad e \quad ({}_A< x, y >) := \phi^{-1}(xy^*).$$

Vamos verificar que X com essas operações é, de fato, um $A - B$ bimódulo de imprimitividade.

(1) No exemplo 2.4, vimos que $X = B$ é um B-módulo de Hilbert à direita pleno com o produto interno $< x, y >_B := x^*y$. Vamos mostrar que X é um A-módulo de Hilbert à esquerda pleno com a operação definida por

$$({}_A< x, y >) := \phi^{-1}(xy^*).$$

Dados $x, y, z \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}, a \in A$ e lembrando que $\phi^{-1} : B \to A$ é isomorfismo, temos que:

(a) $({}_A< \lambda x + \mu y, z >) = \phi^{-1}((\lambda x + \mu y)z^*) = \lambda\phi^{-1}(xz^*) + \mu\phi^{-1}(yz^*) =$

$$= \lambda({}_A< x, z >) + \mu({}_A< y, z >);$$

(b) $({}_A< a.x, y >) = ({}_A< \phi(a)x, y >) = \phi^{-1}(\phi(a)xy^*) = \phi^{-1}(\phi(a)).\phi^{-1}(xy^*) =$

$$= a.({}_A< x, y >);$$

(c) $({}_A< x, y >)^* = (\phi^{-1}(xy^*))^* = \phi^{-1}((xy^*)^*) = \phi^{-1}(yx^*) = ({}_A< y, x >)$;

(d) $({}_A< x, x >) = \phi^{-1}(xx^*) \geq 0$, pois $x.x^*$ é um elemento positivo de B;

(e) $({}_A< x, x >) = \phi^{-1}(xx^*) = 0 \Rightarrow xx^* = 0 \Rightarrow x = 0$.

Note que o ideal $I = span\,\{({}_A< x, y >); x, y \in X\} = span\,\{\phi^{-1}(xy^*); x, y \in X = B\}$ é denso em A, pois ϕ^{-1} é isomorfismo, e como

$$\|x\|_A^2 = \|({}_A< x, x >)\| = \left\|\phi^{-1}(xx^*)\right\| = \|xx^*\| = \|x\|^2,$$

segue que X é um A-módulo de Hilbert à esquerda pleno.

(2) Dados $x, y \in X,\ a \in A,\ b \in B$, temos que:

$$< a.x, y >_B = < \phi(a)x, y >_B = (\phi(a)x)^*y = x^*\phi(a^*)y = x^*(a^*.y) = < x, a^*.y >_B$$

e

$$({}_A< x.b, y >) = \phi^{-1}(xby^*) = \phi^{-1}(x.(yb^*)^*) = ({}_A< x, y.b^* >);$$

(3) Dados $x, y, z \in X$, temos que:

$$({}_A< x, y >).z = \phi^{-1}(xy^*).z = \phi(\phi^{-1}(xy^*))z = xy^*z = x. < y, z >_B;$$

De (1), (2) e (3), segue o resultado.

$\square$

Para mostrarmos que a Equivalência de Morita é uma relação de equivalência sobre a classe das C*-álgebras, precisamos formar o produto tensorial de dois bimódulos de imprimitividade.

Sejam X um A - B bimódulo de imprimitividade e Y um B - C bimódulo de imprimitividade, onde A, B e C são C*-álgebras. Vamos mostrar o produto tensorial algébrico $X \odot Y$ é um A - C pré-bimódulo de imprimitividade com as operações apropriadas. Aqui é conveniente trabalhar com o produto tensorial B-balanceado, denotado por $X \odot_B Y$, que é o quociente de $X \odot Y$ pelo subespaço

$$N = span\left\{(x.b) \otimes y - x \otimes (b.y); x \in X,\ y \in Y,\ b \in B\right\}.$$

Escrevemos $x \otimes_B y$ para a imagem do elemento tensorial $x \otimes y \in X \odot Y$ no quociente $X \odot_B Y$ e, pela observação 2.11, com Y no lugar de H_π e com $\pi : B \to \mathbf{L(Y)}$ dada por $\pi(b) = b$, podemos fazer manipulações como $(x.b) \otimes_B y = x \otimes_B (b.y)$, para quaisquer $x \in X, y \in Y$ e $b \in B$.

Proposição 3.4 *Considere as C*-álgebras A,B e C. Suponha que X é um A - B bimódulo de imprimitividade e que Y é um B - C bimódulo de imprimitividade. Então* $Z = X \odot_B Y$ *é um A - C bimódulo e existem pré-produtos internos sobre Z únicos tais que, para todos* $x, z \in X,\ y, w \in Y$, *são válidas:*

$$(1)\, \langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle_C = << z, x >_B .y, w >_C;$$

$$(2)\, ({}_A\langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle) = \ ({}_A< x, z.({}_B< w, y >) >).$$

Com respeito a esses pré-produtos internos, Z é um A - C pré-bimódulo de imprimitividade e o seu completamento é um A - C bimódulo de imprimitividade, que denotamos por $X \otimes_B Y$ *e chamamos de* ***produto tensorial interno.***

Demonstração:

Mostraremos o caso do pré-produto interno com valores em C, o caso para valores em A é análogo.

Fixe $x \in X$ e $y \in Y$.

Então, a aplicação definida por $(z, w) \mapsto << z, x >_B .y, w >_C$ é uma forma bilinear de $X \times Y$ para C. Logo, pela definição 2.14, existe uma única aplicação linear $L_{x,y} : X \odot Y \to C$, satisfazendo

$$L_{x,y}(z \otimes w) = << z, x >_B .y, w >_C,$$

para $z \in X,\ w \in Y$.

Definindo a aplicação $L_{x,y}^* : X \odot Y \to C$ por $L_{x,y}^*(\alpha) = (L_{x,y}(\alpha))^*$, onde $\alpha \in X \odot Y$, temos que $L_{x,y}^* : X \odot Y \to C$ é uma aplicação linear conjugada e a aplicação

$$(x, y) \mapsto L_{x,y}^*$$

é uma forma bilinear de $X \times Y$ para CL, onde CL representa o espaço vetorial das aplicações $T : X \odot Y \to C$ que são lineares conjugadas.

Logo, existe uma única aplicação linear $L^* : X \odot Y \to CL$ tal que

$$L^*(x \otimes y)(\beta) = L_{x,y}^*(\beta) = (L_{x,y}(\beta))^*,$$

para todo $\beta \in X \odot Y$.

Agora, dados $\alpha, \beta \in X \odot Y$, definimos

$$\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle_C = (L^*(\alpha)(\beta))^*.$$

Assim, dados $x, z, z' \in X,\ y, w, w' \in Y,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos que:

(a)$\langle\langle x \otimes_B y, \lambda(z \otimes_B w) + \mu(z' \otimes_B w') \rangle\rangle_C = \langle\langle x \otimes_B y, (\lambda.z) \otimes_B w + (\mu.z') \otimes_B w' \rangle\rangle_C =$

$$= << \lambda.z, x >_B .y, w >_C + << \mu.z', x >_B .y, w' >_C =$$

$$= < \bar{\lambda} < z, x >_B .y, w >_C + < \bar{\mu} < z', x >_B .y, w' >_C =$$

$$= \lambda << z, x >_B .y, w >_C + \mu << z', x >_B .y, w' >_C =$$

$$= \lambda \langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle_C + \mu \langle\langle x \otimes_B y, z' \otimes_B w' \rangle\rangle_C ;$$

(b) $\langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w.c \rangle\rangle_C = << z, x >_B .y, w.c >_C = << z, x >_B .y, w >_C .c =$

$$= \langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle_C .c;$$

(c) $\langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle_C^* = << z, x >_B .y, w >_C^* = << x, z >_B^* .y, w >_C^* =$

$$= < y, < x, z >_B .w >_C^* = << x, z >_B .w, y >_C = \langle\langle z \otimes_B w, x \otimes_B y \rangle\rangle_C ;$$

(d) Se $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \otimes_B y_i$, então

$$\langle\langle \alpha, \alpha \rangle\rangle_C = \sum_{i,j} \langle\langle x_i \otimes_B y_i, x_j \otimes_B y_j \rangle\rangle_C = \sum_{i,j} << x_j, x_i >_B .y_i, y_j >_C;$$

Pelo lema 2.14, $M = (< x_j, x_i >_B)_{i,j=1,\ldots,n}$ é uma matriz positiva na C*-álgebra $M_n(B)$. Assim, existe uma matriz $D = (d_{i,j}) \in M_n(B)$ tal que $M = D^*D$.

Daí, $< x_j, x_i >_B = \sum_{k=1}^n d_{k,j}^*.d_{k,i}$ e temos que:

$$\langle\langle \alpha, \alpha \rangle\rangle_C = \sum_{i,j,k} < d_{k,j}^*.d_{k,i}.y_i, y_j >_C = \sum_{i,j,k} < d_{k,i}.y_i, d_{k,j}^*.y_j >_C = \sum_{k} < z_k, z_k >_C \geq 0,$$

onde $z_k = \sum_{i=1}^{n} d_{k,i}.y_i \in Y$.

Assim, temos que as condições $(a)-(d)$ da definição 2.2 são satisfeitas e portanto, temos que (1) é um pré-produto interno sobre $X \odot Y$.

Note que cada vetor de N se anula no pré-produto interno (1), no seguinte sentido: dados os elementos $x \in X,\ y \in Y,\ b \in B$,

$$\langle\langle (x.b) \otimes y - x \otimes (b.y), (x.b) \otimes y - x \otimes (b.y) \rangle\rangle_C =$$

$$= \langle\langle (x.b) \otimes y, (x.b) \otimes y \rangle\rangle_C - \langle\langle (x.b) \otimes y, x \otimes (b.y) \rangle\rangle_C - \langle\langle x \otimes (b.y), (x.b) \otimes y \rangle\rangle_C +$$

$$+ \langle\langle x \otimes (b.y), x \otimes (b.y) \rangle\rangle_C =$$

$$=<< x.b, x.b >_B .y, y >_C - << x, x.b > B.y, b.y >_C - << x.b, x >_B .b.y, y >_C +$$

$$+ << x, x >_B .b.y, b.y >_C=$$

$$=< b^*. < x, x >_B .b.y, y >_C - < b^*. < x, x >_B .b.y, y >_C - < b^*. < x, x >_B .b.y, y >_C +$$

$$+ < b^*. < x, x >_B .b.y, y >_C= 0.$$

(I) Assim, podemos ver $\langle\langle . \, , \, . \rangle\rangle_C$ como um pré-produto interno sobre $X \odot_B Y$.

(II) Como o subespaço gerado $< X, X >_B= span \{< x, y >_B;\ x, y \in X\}$ é denso em B, o subespaço gerado $< Y, Y >_C= span \{< x, y >_C;\ x, y \in Y\}$ é denso em C e $B.Y$ é denso em Y, então o subespaço gerado $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle_C$ é denso em C, pois

$$<< X, X >_B .Y, Y >_C \subset \langle\langle Z, Z \rangle\rangle_C .$$

(III) De maneira análoga, obtemos que ${}_A \langle\langle Z, Z \rangle\rangle$ é denso em A e que $({}_A\langle\langle . \, , \, . \rangle\rangle)$ é um pré-produto interno sobre $Z = X \odot_B Y$.

De (I), (II) e (III), temos que as condições (a) e (b) da definição de pré-bimódulo com produto interno são satisfeitas.

(IV) $(x \otimes_B y). \langle\langle z \otimes_B w, z' \otimes_B w' \rangle\rangle_C =$

$$= x \otimes_B [y. << z', z >_B .w, w' >_C] = \ x \otimes_B [({}_B< y, < z', z >_B .w >).w'] =$$

$$= [x.({}_B< y, < z', z >_B .w >)] \otimes_B w' = [x.({}_B< y, w >) < z', z >_B^*] \otimes_B w' =$$

$$= [x.({}_B< y, w >) < z, z' >_B] \otimes_B w' = [x. < z.({}_B< y, w >)^*, z' >_B] \otimes_B w' =$$

$$= [({}_A< x, z.({}_B< w, y >) >).z'] \otimes_B w' = ({}_A\langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle).(z' \otimes_B w'),$$

donde

$$(x \otimes_B y). \langle\langle z \otimes_B w, z' \otimes_B w' \rangle\rangle_C = ({}_A\langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w \rangle\rangle).(z' \otimes_B w'),$$

para todos $x \otimes_B y, z \otimes_B w, z' \otimes_B w' \in Z$.

Obtemos assim a validade da condição (d) da definição 3.2.

Como as álgebras completas A e C atuam sobre Z, basta mostrarmos que a condição (c') do corolário 3.1 é satisfeita.

(V) $\langle\langle a.x \otimes_B y, z \otimes_B w\rangle\rangle_C = << z, a.x >_B .y, w >_C = << a^*.z, x >_B .y, w >_C =$

$$= \langle\langle x \otimes_B y, a^*.z \otimes_B w\rangle\rangle_C \,;$$

(VI) $({}_A\langle\langle x \otimes_B y.c, z \otimes_B w\rangle\rangle) = \ ({}_A< x, z.({}_B< w, y.c >) >) =$

$$= ({}_A< x, z.({}_B< w.c^*, y >) >) = \ ({}_A\langle\langle x \otimes_B y, z \otimes_B w.c^*\rangle\rangle).$$

De (V) e (VI) temos que a condição (c') é satisfeita e portanto, Z é um A - C pré-bimódulo de imprimitividade, como queríamos demonstrar.

$\square$

Encerramos essa seção demonstrando que a Equivalência de Morita é uma relação de equivalência sobre a classe das C*-álgebras.

Proposição 3.5 *A Equivalência de Morita é uma relação de equivalência na classe das C*-álgebras.*

Demonstração:

(1°) Vimos no exemplo 3.2 que toda C*-álgebra A é um A - A bimódulo de imprimitividade com as operações:

$$({}_A< a, b >) := ab^* \quad \text{e}$$

$$< a, b >_A := a^*b.$$

Logo, a Equivalência de Morita é reflexiva.

(2°) Se A e B são Morita equivalentes e B e C são Morita equivalentes, então existem um A - B bimódulo de imprimitividade X e um B - C bimódulo de imprimitividade Y.

Pela proposição 3.4, temos que $X \otimes_B Y$ é um A - C bimódulo de imprimitividade e portanto, A e C são Morita equivalentes. Logo, a Equivalência de Morita é transitiva.

(3°) Para mostrarmos a simetria, utilizaremos o seguinte: se X é um A - B bimódulo de imprimitividade, seja $\widetilde{X}$ o espaço vetorial conjugado (como no exemplo 2.9). Logo, existe uma bijeção aditiva $b : X \to \widetilde{X}$ tal que $b(\lambda.x) = \bar{\lambda}b(x)$, para quaisquer $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Assim, temos que $\widetilde{X}$ é um B - A bimódulo de imprimitividade com as operações:

$$b.\mathbf{b}(x) := \mathbf{b}(x.b^*), \;\; \mathbf{b}(x).a := \mathbf{b}(a^*.x),$$

$$({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >) := < x, y >_B \;\; e \;\; < \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >_A := \; ({}_A\!< x, y >),$$

para todos $x, y \in X, \; a \in A, \; b \in B$.

De fato,

(1) $\widetilde{X}$ é um B-módulo à esquerda com produto interno pois, dados $x, x', y \in X, \; \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, temos:

(a) $({}_B\!< \lambda.\mathbf{b}(x) + \mu\mathbf{b}(x'), \mathbf{b}(y) >) = \; ({}_B\!< \mathbf{b}(\bar{\lambda}.x) + \mathbf{b}(\bar{\mu}.x'), \mathbf{b}(y) >) =$

$$= \; ({}_B\!< \mathbf{b}(\bar{\lambda}.x + \bar{\mu}.x'), \mathbf{b}(y) >) = < \bar{\lambda}.x + \bar{\mu}.x', y >_B = \; \lambda < x, y >_B + \mu < x', y >_B =$$

$$= \; \lambda. \, ({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >) + \mu. \, ({}_B\!< \mathbf{b}(x'), \mathbf{b}(y) >);$$

(b) $({}_B\!< b.\mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >) = \; ({}_B\!< \mathbf{b}(x.b^*), \mathbf{b}(y) >) = < x.b^*, y >_B = \; b. < x, y >_B =$

$$= \; b.({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >);$$

(c) $({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >)^* = < x, y >_B^* = < y, x >_B = \; ({}_B\!< \mathbf{b}(y), \mathbf{b}(x) >)$;

(d) $({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(x) >) = < x, x >_B \geq 0$;

(e) $({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(x) >) = < x, x >_B = 0 \; \Rightarrow x = 0$.

(2) Como X é B-módulo de Hilbert à direita e

$$\|\mathbf{b}(x)\|_B = \; \|({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(x) >)\|^{1/2} = \; \|< x, x >_B\|^{1/2} = \; \|x\|_B \, ,$$

temos que $\widetilde{X}$ é um B-módulo de Hilbert à esquerda.

(3) Que $\widetilde{X}$ é um B-módulo de Hilbert à esquerda pleno segue do fato que

$$I = \; span \left\{ ({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >) ; x, y \in X \right\} = \; span \left\{ < x, y >_B ; x, y \in X \right\},$$

sendo que este último é denso em B, pois X é B-módulo de Hilbert à direita pleno.

(4) Analogamente, obtemos que $\widetilde{X}$ é um A-módulo de Hilbert à direita pleno com as operações

$$\mathbf{b}(x).a := \mathbf{b}(a^*.x) \quad \text{e} \quad < \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >_A := \; {}_A < x, y >,$$

definidas para $x, y \in X, \; a \in A$.

De (3) e (4), obtemos que $\widetilde{X}$ satisfaz (a) da definição 3.1.

(5) $({}_B\!< \mathbf{b}(x).a, \mathbf{b}(y) >) = \ ({}_B\!< \mathbf{b}(a^*.x), \mathbf{b}(y) >) = < a^*.x, y >_B = < x, a.y >_B =$

$$= \ ({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(a.y) >) = \ ({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y).a^* >);$$

(6) $< b.\mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >_A = < \mathbf{b}(x.b^*), \mathbf{b}(y) >_A = \ ({}_A\!< x.b^*, y >) =$

$$= \ ({}_A\!< x, y.b >) = < \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y.b) >_A = < \mathbf{b}(x), b^*.\mathbf{b}(y) >_A;$$

De (5) e (6) segue a validade da condição (b) da definição 3.1.

(7) $({}_B\!< \mathbf{b}(x), \mathbf{b}(y) >).\mathbf{b}(z) = < x, y >_B .\mathbf{b}(z) = \ \mathbf{b}(z. < x, y >_B^*) = \ \mathbf{b}(z. < y, x >_B) =$

$$= \ \mathbf{b}(({}_A\!< z, y >).x) = \ \mathbf{b}(x).({}_A\!< z, y >)^* = \ \mathbf{b}(x).({}_A\!< y, z >) = \ \mathbf{b}(x). < \mathbf{b}(y), \mathbf{b}(z) >_A .$$

Logo, temos a validade da condição (c) da definição 3.1, o que conclui a demonstração.

$\square$

3.3 Produto tensorial externo

Nessa terceira e última seção desse capítulo, introduzimos a noção de produto tensorial externo e provamos algumas das suas propriedades.

Proposição 3.6 *Suponha que A, B, C e D são C*-álgebras, que X é um A - C bimódulo de imprimitividade e que Y é um B - D bimódulo de imprimitividade. Então $Z := X \odot Y$ é um $A \odot B - C \odot D$ bimódulo e existem pré-produtos internos sobre Z únicos com valores em $A \odot B$ e $C \odot D$ tais que:*

$$(i)\ ({}_{A\otimes_\sigma B}\langle\langle x \otimes y, z \otimes w\rangle\rangle) = \ ({}_A\!< x, z >) \otimes \ ({}_B\!< y, w >) \ \ e$$

$$(ii)\ \ \langle\langle x \otimes y, z \otimes w\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D} = < x, z >_C \otimes < y, w >_D,$$

para quaisquer $x, z \in X$, $y, w \in Y$.

Com esses produtos internos e usando a norma espacial, da definição 1.28, sobre $A \odot B$ e $C \odot D$, Z torna-se um $A \odot B - C \odot D$ pré-bimódulo de imprimitividade. O completamento $X \otimes Y$ de $Z = X \odot Y$ é um $A \otimes_\sigma B - C \otimes_\sigma D$ bimódulo de imprimitividade.

Demonstração:

Seguindo o mesmo roteiro das demonstrações das proposições 2.9 e 3.4, temos que as propriedades universais do produto tensorial algébrico $\odot$ implicam na existência de formas sesquilineares sobre Z únicas, satisfazendo (i) e (ii) sobre os elementos tensores.

(1) Vamos mostrar que essas aplicações definem pré-produtos internos sobre Z.

Mostraremos o caso (ii), pois o caso (i) segue de maneira análoga.

Dados $x\otimes y,\ z\otimes w,\ r\otimes s\in Z,\ \lambda,\mu\in\mathbb{C},\ c\otimes d\in C\odot D$, temos que:

(a) $\langle\langle x\otimes y,\lambda.z\otimes w+\mu.r\otimes s\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}=\lambda\,\langle\langle x\otimes y,z\otimes w\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}+\mu\,\langle\langle x\otimes y,r\otimes s\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}$, pois $\langle\langle .\,,\,.\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}$ é uma forma sesquilinear;

(b) $\langle\langle x\otimes y,(z\otimes w).(c\otimes d)\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}=\langle\langle x\otimes y,z.c\otimes w.d\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}=<x,z.c>_C\otimes<y,w.d>_D=$

$$=<x,z>_C.c\otimes<y,w>_D.d=\ (<x,z>_C\otimes<y,w>_D)(c\otimes d)=$$

$$=\langle\langle x\otimes y,(z\otimes w)\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}.(c\otimes d);$$

(c) $\langle\langle x\otimes y,z\otimes w\rangle\rangle^*_{C\otimes_\sigma D}=\ (<x,z>_C\otimes<y,w>_D)^*=<x,z>^*_C\otimes<y,w>^*_D)=$

$$=<z,x>_C\otimes<w,y>_D=\langle\langle z\otimes w,x\otimes y\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D};$$

(d) Seja $\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\in Z$.

Pelo lema 2.14, temos que as matrizes da forma $M_{n\times n}=(<x_i,x_j>_C)_{1,j=1,\dots,n}$ são positivas em $M_n(C)$. Assim, existem $\{e_{i,j}\}\subset C$ e $\{f_{i,j}\}\subset D$ tais que:

$$<x_i,x_j>_C=\sum_{k=1}^n e^*_{k,i}e_{k,j},\quad <y_i,y_j>_D=\sum_{k=1}^n f^*_{k,i}f_{k,j}.$$

Logo,

$$\langle\langle\alpha,\alpha\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}=\sum_{i,j}<x_i,x_j>_C\otimes<y_i,y_j>_D=\sum_{i,j,k,m}e^*_{k,i}e_{k,j}\otimes f^*_{m,i}f_{m,j}=$$

$$=\sum_{i,j,k,m}(e_{k,i}\otimes f_{m,i})^*(e_{k,j}\otimes f_{m,j})=\sum_{k,m}\left[\left(\sum_j e_{k,j}\otimes f_{m,j}\right)^*\cdot\left(\sum_j e_{k,j}\otimes f_{m,j}\right)\right]\geq 0.$$

De $(a)-(d)$, temos que (ii) define um pré-produto interno sobre Z.

Analogamente, podemos mostrar que (i) define um pré-produto interno sobre Z. Logo, obtemos que a condição (a) da definição 3.2 é válida.

(2) Note que

$$\langle\langle\ Z,Z\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}=<X,X>_C\otimes<Y,Y>_D\ .$$

Como X é um C-módulo de Hilbert pleno e Y é um D-módulo de Hilbert pleno, então $<X,X>_C$ é denso em C, $<Y,Y>_D$ é denso em D e temos que $\langle\langle\ Z,Z\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}$ é denso em $C\odot D$.

Analogamente, temos que $({}_{A\otimes_\sigma B}\langle\langle Z,Z\rangle\rangle)$ é denso em $A\odot B$.

Portanto, temos a validade da condição (b) da definição 3.2.

(3) Dados $x \otimes y$, $z \otimes w$, $r \otimes s \in Z$, a validade da condição (d) da definição 3.2 segue do cálculo:

$$({}_{A\otimes_\sigma B}\langle\langle x \otimes y, z \otimes w\rangle\rangle).(r \otimes s) = \; (({}_{A}< x, z >) \otimes \; ({}_{B}< y, w >)).(r \otimes s) =$$

$$= \; (({}_{A}< x, z >).r) \otimes \; (({}_{B}< y, w >).s) = \; (x. < z, r >_C) \otimes (y. < w, s >_D) =$$

$$= (x \otimes y).(< z, r >_C \otimes < w, s >_D) = \; (x \otimes y). \langle\langle \; z \otimes w, r \otimes s\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D} \, .$$

Resta mostrar agora a condição (c) da definição 3.2, pois assim teremos que Z é um $A \odot B - C \odot D$ pré-bimódulo de imprimitividade e portanto, o completamento de Z, $X \otimes Y$, é um $A \otimes_\sigma B - C \otimes_\sigma D$ bimódulo de imprimitividade.

Suponha que $\pi : C \to B(H_\pi)$ e $\eta : D \to B(H_\eta)$ são representações não-degeneradas e fiéis de C e D respectivamente.

Pelo corolário 2.6, temos que $X - Ind\,\pi : A \to B(X \otimes H_\pi)$ e $Y - Ind\,\eta : B \to B(Y \otimes H_\eta)$ são representações fiéis não-degeneradas de A e B respectivamente, e do corolário 1.2, temos que

$$\pi \otimes \eta : C \otimes_\sigma D \to B(H_\pi \otimes H_\eta) \quad e$$

$$(X - Ind\,\pi) \otimes (Y - Ind\,\eta) : A \otimes_\sigma B \to B\left((X \otimes H_\pi) \otimes (Y \otimes H_\eta)\right)$$

são representações fiéis de $C \otimes_\sigma D$ e de $A \otimes_\sigma B$, respectivamente.

Considere agora

$$\alpha = \sum_r x_r \otimes y_r \in X \odot Y \quad e \quad \tau = \sum_j a_j \otimes b_j \in A \odot B.$$

Lembremos que $X - Ind\,\pi$ atua sobre o completamento de $X \odot H_\pi$, que denotamos por V_π, com respeito ao produto interno dado por

$$(x \otimes h \mid y \otimes k)_{V_\pi} := \; (\pi(< y, x >_C)| \, k) \, .$$

Analogamente para $Y - Ind\,\eta$.

Assim, se

$$\gamma = \sum_k \xi_k \otimes \zeta_k \in H_\pi \otimes H_\eta,$$

utilizando a definição da representação $Ind\pi$, dada na proposição 2.9, e a norma espacial, dada na definição 2.16, temos:

$\left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle \; \tau.\alpha, \tau.\alpha\rangle\rangle_{C\otimes_\sigma D}\right) .\gamma | \, \gamma\right) =$

$$\left(\pi \otimes \eta \left(\left\langle\left\langle \; \sum_i a_i \otimes b_i . \sum_r x_r \otimes y_r, \; \sum_j a_j \otimes b_j . \sum_s x_s \otimes y_s \right\rangle\right\rangle_{C\otimes_\sigma D}\right) .\gamma | \, \gamma\right) =$$

$$= \sum_{i,j,r,s} \left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle\ a_i.x_r \otimes b_i.y_r,\ a_j.x_s \otimes b_j.y_s \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D}\right) \gamma |\ \gamma\right) =$$

$$= \sum_{i,j,r,s} \left(\pi \otimes \eta \left(< a_i.x_r, a_j.x_s >_C \otimes < b_i.y_r, b_j.y_s >_D\right) \gamma |\ \gamma\right) =$$

$$= \sum_{i,j,r,s,k,m} \left(\pi \otimes \eta \left(< a_i.x_r, a_j.x_s >_C \otimes < b_i.y_r, b_j.y_s >_D\right) . \left(\xi_k \otimes \zeta_k\right) |\ \xi_m \otimes \zeta_m\right) =$$

$$= \sum_{i,j,r,s,k,m} \left(\left[\pi \left(< a_i.x_r, a_j.x_s >_C\right) \xi_k\right] \otimes \left[\eta \left(< b_i.y_r, b_j.y_s >_D\right) \zeta_k\right] |\ \xi_m \otimes \zeta_m\right) =$$

$$= \sum_{i,j,r,s,k,m} \left[\left(\pi \left(< a_i.x_r, a_j.x_s >_C\right) \xi_k |\ \xi_m\right) . \left(\eta \left(< b_i.y_r, b_j.y_s >_D\right) \zeta_k |\ \zeta_m\right)\right] =$$

$$= \sum_{i,j,r,s,k,m} \left[\left(\pi \left(< a_j^*.a_i.x_r, x_s >_C\right) \xi_k |\ \xi_m\right) . \left(\eta \left(< b_j^*.b_i.y_r, y_s >_D\right) \zeta_k |\ \zeta_m\right)\right] =$$

$$= \sum_{i,j,r,s,k,m} \left[\left(Ind\, \pi \left(a_j^*.a_i\right) (x_s \otimes \xi_k) | x_r \otimes \zeta_m\right)_{V_\pi} . \left(Ind\, \eta \left(b_j^*.b_i\right) (y_s \otimes \xi_k) | y_r \otimes \zeta_m\right)_{V_\eta}\right].$$

Esta última igualdade segue do cálculo:

$$\left(Ind\, \pi \left(a_j^*.a_i\right) (x_s \otimes \xi_k) | x_r \otimes \zeta_m\right)_{V_\pi} = \left((a_j^*.a_i.x_s) \otimes \xi_k | x_r \otimes \zeta_m\right)_{V_\pi} =$$

$$= \left(\pi \left(< x_r, a_j^*.a_i.x_s >_C\right) \xi_k | \zeta_m\right) = \left(\pi \left(< a_i^*.a_j.x_r, x_s >_C\right) \xi_k | \zeta_m\right).$$

Agora, se $v_{s,k} := (x_s \otimes \xi_k) \otimes (y_s \otimes \zeta_k) \in V_\pi \otimes V_\eta$, temos que:
$\left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle\ \tau.\alpha, \tau.\alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D}\right) .\gamma |\ \gamma\right) =$

$$= \sum_{i,j,k,m,r,s} \left(\left(Ind\, \pi \left(a_j^*.a_i\right)\right) \otimes \left(Ind\, \eta \left(b_j^*.b_i\right)\right) .v_{s,k} |\ v_{r,m}\right)_{V_\pi \otimes V_\eta} =$$

$$= \sum_{i,j,k,m,r,s} \left(\left(Ind\, \pi \otimes Ind\, \eta\right) \left(a_j^*.a_i \otimes b_j^*.b_i\right) .v_{s,k} |\ v_{r,m}\right)_{V_\pi \otimes V_\eta} =$$

$$= \sum_{i,j,k,m,r,s} \left(\left(Ind\, \pi \otimes Ind\, \eta\right) \left(\left(a_j \otimes b_j\right)^* \left(a_i \otimes b_i\right)\right) .v_{s,k} |\ v_{r,m}\right)_{V_\pi \otimes V_\eta} =$$

$$= \sum_{r,s,k,m} \left(\left(Ind\, \pi \otimes Ind\, \eta\right) \left[\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)^* . \left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right] .v_{s,k} |\ v_{r,m}\right)_{V_\pi \otimes V_\eta} =$$

$$= \left(Ind\,\pi \otimes Ind\,\eta(\tau^*\tau) \left(\sum_{s,k} v_{s,k} \right) | \sum_{s,k} v_{s,k} \right)_{V_\pi \otimes V_\eta} =$$

$$= \left(Ind\,\pi \otimes Ind\,\eta(\tau) \left(\sum_{s,k} v_{s,k} \right) | Ind\,\pi \otimes Ind\,\eta(\tau)(\sum_{s,k} v_{s,k}) \right)_{V_\pi \otimes V_\eta} \leq$$

$$\leq \| Ind\,\pi \otimes Ind\,\eta(\tau) \|^2 . \sum_{s,r,k,m} (v_{s,k} | \, v_{r,m}) \, .$$

Refazendo os mesmos cálculos sem o elemento τ, obtemos que:

$$\left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle \, \alpha, \alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \right) .\gamma | \, \gamma \right) = \sum_{s,r,k,m} (v_{s,k} | \, v_{r,m}) \, .$$

Além disso, pelo teorema 2.2 aplicado às representações $Ind\,\pi$ e $Ind\,\eta$, temos que:

$$\| Ind\,\pi \otimes Ind\,\eta(\tau) \|^2 = \| \tau \|_\sigma^2 \, .$$

Assim,
$\left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle \, \tau.\alpha, \tau.\alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \right) .\gamma | \, \gamma \right) \leq$

$$\leq \| \tau \|_\sigma^2 . \left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle \, \alpha, \alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \right) .\gamma | \, \gamma \right) = \left(\pi \otimes \eta \left(\| \tau \|_\sigma^2 \langle\langle \, \alpha, \alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \right) .\gamma | \, \gamma \right) .$$

Resumindo, temos:

$$\left(\pi \otimes \eta \left(\langle\langle \, \tau.\alpha, \tau.\alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \right) .\gamma | \, \gamma \right) \leq \left(\pi \otimes \eta \left(\| \tau \|_\sigma^2 \langle\langle \, \alpha, \alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \right) .\gamma | \, \gamma \right) ,$$

para todos

$$\alpha = \sum_r x_r \otimes y_r \in X \odot Y, \quad \tau = \sum_j a_j \otimes b_j \in A \odot B, \quad \gamma = \sum_k \xi_k \otimes \zeta_k \in H_\pi \otimes H_\eta .$$

Assim, como $\pi \otimes \eta$ é fiel, $\langle\langle \, \alpha, \alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \geq 0$ e os elementos da forma

$$\gamma = \sum_k \xi_k \otimes \zeta_k \in H_\pi \otimes H_\eta$$

geram um conjunto denso em $H_\pi \otimes H_\eta$, segue que:

$$\langle\langle \, \tau.\alpha, \tau.\alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \leq \| \tau \|_\sigma^2 \langle\langle \, \alpha, \alpha \rangle\rangle_{C \otimes_\sigma D} \, .$$

De modo análogo, obtemos:

$${}_{A \otimes_\sigma B} \langle\langle \alpha.\kappa, \alpha.\kappa \rangle\rangle \leq \| \kappa \|_\sigma^2 \, . {}_{A \otimes_\sigma B} \langle\langle \alpha, \alpha \rangle\rangle \, ,$$

onde $\kappa = \sum_j c_j \otimes d_j \in C \odot D$.

Portanto, a condição (c) da definição 3.2 é válida, o que completa a prova.

$\square$

Definição 3.4 *Sejam A, B, C e D C*-álgebras, X um A - C bimódulo de imprimitividade e Y um B - D bimódulo de imprimitividade. O completamento $X \otimes Y$ de $Z := X \odot Y$ nos produtos internos definidos na proposição anterior, é um $A \otimes_\sigma B - C \otimes_\sigma D$ bimódulo de imprimitividade e é chamado* ***produto tensorial externo*** *de X e Y.*

A proposição acima possui três corolários que serão importantes no próximo capítulo.

Corolário 3.2 *Se A é Morita equivalente a C e B é Morita equivalente a D, então $A \otimes_\sigma B$ e $C \otimes_\sigma D$ são Morita equivalentes.*

Demonstração:

Pela definição de C*-álgebras Morita equivalentes, existem um A - C bimódulo de imprimitividade X e um B - D bimódulo de imprimitividade Y. Logo, pela proposição acima, temos que $X \otimes Y$ é um $A \otimes_\sigma B - C \otimes_\sigma D$ bimódulo de imprimitividade e pela definição de equivalência de Morita, segue que $A \otimes_\sigma B$ e $C \otimes_\sigma D$ são Morita equivalentes.

$\square$

Corolário 3.3 *Suponha que X é um A-módulo de Hilbert e que Y é um B-módulo de Hilbert. Então, $X \otimes Y$ é um $A \otimes_\sigma B$-módulo de Hilbert e $K(X \otimes Y) \cong K(X) \otimes_\sigma K(Y)$, onde o símbolo $\cong$ denota um isomorfismo entre $K(X \otimes Y)$ e $K(X) \otimes_\sigma K(Y)$.*

Demonstração:

Pela proposição 3.1, temos que X é um $K(X) - A$ bimódulo de imprimitividade e que Y é um $K(Y) - B$ bimódulo de imprimitividade.

Assim, usando a proposição acima com $A = K(X)$, $C = A$, $B = K(Y)$ e $D = B$, temos que $X \otimes Y$ é um $K(X) \otimes_\sigma K(Y) - A \otimes_\sigma B$ bimódulo de imprimitividade.

Daí, $X \otimes Y$ é um $A \otimes_\sigma B$-módulo de Hilbert e, novamente pela proposição 3.1, temos que

$$K(X \otimes Y) \cong K(X) \otimes_\sigma K(Y).$$

$\square$

Corolário 3.4 *Se A é uma C*-álgebra e H é um espaço de Hilbert, então A é Morita equivalente a $A \otimes_\sigma K(H)$.*

Demonstração

Como já vimos nos exemplos 3.1 e 3.2, a própria C*-álgebra A é um A - A bimódulo de imprimitividade e H é um $K(H) - \mathbb{C}$ bimódulo de imprimitividade. Assim, usando a proposição acima com *A=A, C=A, B=K(H)* e $D = \mathbb{C}$, temos que $A \otimes H$ é um $A \otimes_\sigma K(H) - A \otimes_\sigma \mathbb{C}$ bimódulo de imprimitividade. Logo, $A \otimes_\sigma K(H)$ e $A \otimes_\sigma \mathbb{C}$ são Morita equivalentes.

Além disso, como $A \otimes_\sigma \mathbb{C}$ é isomorfo à A via $a \otimes_\sigma \lambda \mapsto \lambda.a$, então $A \otimes_\sigma \mathbb{C}$ e A também são Morita equivalentes. Portanto, pela transitividade da Equivalência de Morita, temos que A e $A \otimes_\sigma K(H)$ são Morita equivalentes.

$\square$

Definição 3.5 *Dizemos que duas C*-álgebras A e B são* ***estavelmente isomorfas*** *quando existe um isomorfismo entre* $A \otimes_\sigma K(H)$ *e* $B \otimes_\sigma K(H)$*, onde H é um espaço de Hilbert separável, e dizemos que A é* ***estável*** *quando* $A \otimes_\sigma K(H)$ *e A são isomorfas.*

Observação 3.3 *Como isomorfismo implica Morita equivalência (observação 3.2), se duas C*-álgebras A e B são estavelmente isomorfas, então* $A \otimes_\sigma K(H)$ *e* $B \otimes_\sigma K(H)$ *são Morita equivalentes. Pelo corolário acima, temos que A é Morita equivalente a* $A \otimes_\sigma K(H)$ *e que B é Morita equivalente a* $B \otimes_\sigma K(H)$*. Logo, pela transitividade da equivalência de Morita, temos que A e B são Morita equivalentes.*

Usando o produto tensorial externo (ver definição 3.4) apresentamos uma descrição alternativa para o A-módulo de Hilbert $\mathbf{H}_A$ da proposição 2.1. Note que se X é um A-módulo de Hilbert e H é um espaço de Hilbert, pela proposição 3.1 e pelo exemplo 3.1 temos que X é um *K(X)* - *A* bimódulo de imprimitividade e que H é um *K(H)* - $\mathbb{C}$-bimódulo de imprimitividade. Logo, pela proposição 3.6, com *A=K(X), C=A, B=K(H)* e $D = \mathbb{C}$, temos que $H \otimes X$ é um $\mathbb{C} \otimes A$-módulo de Hilbert e como $\mathbb{C} \otimes A$ e A são isomorfos, segue que $H \otimes X$ é um A-módulo de Hilbert.

Lema 3.2 *Seja A uma C*-álgebra e H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Então o produto tensorial externo* $H \otimes A$ *é isomorfo à* H_A*, como A-módulos de Hilbert.*

Demonstração:

Seja $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de H.

Se $H_0 := span\,\{e_i;\ i = 1, 2, ...\}$, então $H_0 \odot A$ é denso no produto tensorial externo $H \otimes A$.

Note agora que a aplicação $\varphi : H_0 \times A \to H_A$ definida por

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i.e_i, a_i)) = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, ..., \lambda_n a_n, 0, 0, ...)$$

é uma aplicação bilinear.

Logo, existe uma única aplicação linear $\phi : H_0 \odot A \to H_A$ tal que

$$\phi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.e_i \otimes a_i) = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, ..., \lambda_n a_n, 0, 0, ...).$$

Além disso, de

(i) $< \phi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i \otimes a), \phi(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i.e_i \otimes b) >_A=$

$$=< (\lambda_1 a, \lambda_2 a, ..., \lambda_n a, 0, 0, ...), (\gamma_1 a, \gamma_2 a, ..., \gamma_n a, 0, 0, ...) >_A= \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda_i}.\gamma_i a^* b;$$

(ii) $< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i \otimes a, \sum_{i=j}^{n} \gamma_j.e_j \otimes b >_A= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\lambda_i}.\gamma_j < e_i \otimes a, e_j \otimes b >_A= \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda_i}.\gamma_i a^* b;$

(iii) $\phi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i \otimes a.b) = (\lambda_1 ab, \lambda_2 ab, ..., \lambda_n ab, 0, 0, ...) = (\lambda_1 a, \lambda_2 a, ..., \lambda_n a, 0, 0, ...).b$, temos que ϕ preserva o produto interno e é A-linear.

Assim, dado $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in H_A$, segue que

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty} - (a_1, a_2, ..., a_k, 0, 0, ...)\|_A^2 = \|(0, 0, ..., 0, a_{k+1}, ...)\|_A^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^*.a_i \right\| \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$, pois $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$ converge em A.

Como cada $(a_1, a_2, ..., a_k, 0, 0, ...) = \phi(\sum_{i=1}^{n} 1.e_i \otimes a_i)$, então ϕ tem imagem densa em H_A.

Portanto, como ϕ preserva o produto interno, é A-linear e tem imagem densa, segue que estendendo ϕ obtemos o isomorfismo desejado.

$\square$

Capítulo 4

Teorema de Kasparov e Teorema de Brown-Green-Rieffel

Nesse capítulo vamos associar os tópicos vistos nos capítulos anteriores para demonstrarmos o Teorema de Estabilização de Kasparov e o Teorema de Brown-Green-Rieffel. Para a prova desse último, precisamos de três resultados que, além de necessários para a demonstração do Teorema de Brown-Green-Rieffel, fornecerão uma ligação entre os dois teoremas acima citados.

4.1 Teorema de Estabilização de Kasparov

Iniciamos essa seção introduzindo alguns conceitos e provamos o primeiro dos resultados principais dessa dissertação, a saber, o Teorema de Estabilização de Kasparov.

Definição 4.1 *Sejam X e Y dois A- módulos de Hilbert. Dizemos que X e Y são **isomorfos** quando existe uma bijeção linear $\psi : X \to Y$ tal que*

$$< \psi(x_1), \psi(x_2) >_A = < x_1, x_2 >_A,$$

*para $x_1, x_2 \in X$. Nesse caso, dizemos que ψ é um **isomorfismo** entre X e Y.*

Lema 4.1 *Seja $\psi : X \to Y$ um isomorfismo entre os A-módulos de Hilbert X e Y. Então, a aplicação $\phi : \boldsymbol{L(X)} \to \boldsymbol{L(Y)}$ definida por $\phi(m) := \psi \circ m \circ \psi^{-1}$ é um *-isomorfismo. Além disso, temos que $K(X)$ e $K(Y)$ são isomorfos.*

Demonstração:

Como $\psi : X \to Y$ é um isomorfismo entre os A-módulos de Hilbert X e Y, temos que

$$< \psi(x_1), \psi(x_2) >_A = < x_1, x_2 >_A,$$

para todos $x_1, x_2 \in X$. Vamos mostrar que ϕ é um *-isomorfismo.

(1) Dados $m, n \in \boldsymbol{L(X)}$ e $y \in Y$, usando a linearidade de ψ e as igualdades

$$\psi \circ \psi^{-1} = Id_Y, \quad \psi^{-1} \circ \psi = Id_X \quad e \quad \psi^* = \psi^{-1},$$

cuja validade é garantida pelo fato de ψ ser um isomorfismo, temos que:

- $\phi(m+n)(y) = \psi \circ (m+n) \circ \psi^{-1}(y) = \psi \circ m \circ \psi^{-1}(y) + \psi \circ n \circ \psi^{-1}(y) =$

$$= \phi(m)(y) + \phi(n)(y);$$

- $\phi(m \circ n)(y) = \psi \circ (m \circ n) \circ \psi^{-1}(y) = \psi \circ m \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ n \circ \psi^{-1}(y) =$

$$= \left(\psi \circ m \circ \psi^{-1}\right) \circ \left(\psi \circ n \circ \psi^{-1}\right)(y) = \phi(m) \circ \phi(n)(y);$$

- Dado $m \in \boldsymbol{L(X)}$, temos que $\phi(m^*) = \psi \circ m^* \circ \psi^{-1}$ e

$$(\phi(m))^* = (\psi \circ m \circ \psi^{-1})^* = (\psi^{-1})^* \circ m^* \circ \psi^* = (\psi^*)^* \circ m^* \circ \psi^{-1} = \psi \circ m^* \circ \psi^{-1}.$$

  Donde $\phi(m^*) = (\phi(m))^*$.

Logo, ϕ é um *-homomorfismo.

(2) Dado $T \in \boldsymbol{L(Y)}$, note que $\psi^{-1} \circ T \circ \psi \in \boldsymbol{L(X)}$ com adjunto $\psi^{-1} \circ T^* \circ \psi$, pois como ψ é isomorfismo, temos que:

$$< \psi(x), y >_B = < \psi^{-1} \circ \psi(x), \psi^{-1}(y) >_B = < x, \psi^{-1}(y) >_B,$$

para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$, ou seja, $\psi^* = \psi^{-1}$ e

$$< \psi^{-1} \circ T^* \circ \psi(x), x' >_B = < T \circ \psi(x), \psi(x') >_B = < \psi(x), T^* \circ \psi(x') >_B = < x, \psi^{-1} \circ T \circ \psi(x') >_B$$

para todos $x, x' \in X$.

Daí, $\phi(\psi^{-1} \circ T \circ \psi) = T$ e portanto, ϕ é sobrejetiva.

(3) Sejam $m, n \in \boldsymbol{L(X)}$. Então,

$\phi(m) = \phi(n) \Leftrightarrow \psi \circ (m-n) \circ \psi^{-1}(y) = 0, \quad$ para todo $\quad y \in Y$

$$\Leftrightarrow < \psi \circ (m-n) \circ \psi^{-1}(y), y' >_B = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad y, y' \in Y$$

$$\Leftrightarrow < (m-n) \circ \psi^{-1}(y), \psi^{-1}(y') >_B = 0, \quad \text{para todos} \quad y, y' \in Y. \quad (*)$$

Como ψ, ψ^{-1} são isomorfismos, temos que

$$(*) \Leftrightarrow < (m-n)(x), x' >_B = 0, \quad \text{para quaisquer} \quad x, x' \in X$$

$$\Leftrightarrow (m-n)(x) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in X$$

$$\Leftrightarrow m(x) = n(x), \quad \text{para todo} \quad x \in X$$

$$\Leftrightarrow m = n.$$

Portanto, ϕ é injetiva e de (1), (2) e (3), concluímos que ϕ é um *-isomorfismo entre ***L(X)*** e ***L(Y)***.

Mostraremos agora que $K(X)$ e $K(Y)$ são isomorfos.

(4) Dados $x, x' \in X$ e $y \in Y$ temos que:

$$\phi(\Theta_{x,x'})(y) = \psi \circ \Theta_{x,x'} \circ \psi^{-1}(y) = \psi(x. < x', \psi^{-1}(y) >_B) =$$

$$= \psi(x). < \psi(x), y >_B = \Theta_{\psi(x),\psi(x')}(y).$$

Logo, $\phi(\Theta_{x,x'}) = \Theta_{\psi(x),\psi(x')}$, para todo $x, x' \in X$ e temos que

$$\phi(K(X)) \subset K(Y).$$

Por outro lado, dados $y, y', y'' \in Y$, como ψ é um isomorfismo, existem $x, x' \in X$ tais que

$$y = \psi(x) \quad e \quad y' = \psi(x').$$

Daí,

$$\Theta_{y,y'}(y'') = \Theta_{\psi(x),\psi(x')}(y'') = \phi(\Theta_{x,x'})(y'') \Rightarrow \Theta_{y,y'} = \phi(\Theta_{x,x'}).$$

Assim, $\Theta_{y,y'} \in \phi(K(X))$, para todo $y, y' \in Y$ e concluímos que

$$K(Y) \subset \phi(K(X)).$$

Portanto, $\phi(K(X)) = K(Y)$ e, como ϕ é injetiva, concluímos que $K(X)$ e $K(Y)$ são isomorfos.

□

De agora em diante, denotaremos por K a álgebra *K(H)* dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita H e, em todo esse capítulo, o produto tensorial de outras C*-álgebras por *K(H)* será o produto tensorial espacial da definição 2.16 e escreveremos apenas $\otimes$ ao invés de $\otimes_\sigma$. Além disso, como os espaços de Hilbert $H \otimes H$ e H tem a mesma dimensão, então eles são isomorfos e, pelo lema anterior, temos que $K(H \otimes H)$ e $K(H)$ são isomorfos, ou seja,

$$K \otimes K := K(H) \otimes K(H) \cong K(H \otimes H) \cong K(H) = K.$$

Note que, de acordo com a definição 3.5, K e $\mathbb{C}$ são estavelmente isomorfas pois

$$K \otimes K \cong K \cong \mathbb{C} \otimes K,$$

ou seja, isomorfismo estavel é mais fraco do que isomorfismo. No entanto, Brown, Green e Rieffel mostraram que para C*-álgebras separáveis a estabilidade corresponde a equivalência de Morita. Este resultado e o Teorema de Estabilização de Kasparov são os principais teoremas desse capítulo que serão apresentados na sequência.

Observação 4.1 *Lembremos que, no corolário 3.3, vimos que se X é um A-módulo de Hilbert e Y é um B-módulo de Hilbert, então o produto tensorial externo $X \otimes Y$ é um $A \otimes B$-módulo de Hilbert. Além disso, no lema 3.2 vimos que: se H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então $H \otimes A \cong \boldsymbol{H}_A$.*

Apresentamos agora alguns conceitos necessários para provarmos o primeiro dos teoremas principais dessa dissertação, a saber, o Teorema de Kasparov.

Definição 4.2 *Um A-módulo de Hilbert X é **gerado enumeravelmente** quando X contêm um subconjunto enumerável D que não está contido em nenhum subconjunto fechado próprio de X. Equivalentemente, $X = \overline{D.A} := \overline{span}\ \{d.a;\ d \in D,\ a \in A\}$.*

Exemplo 4.1 *No exemplo 2.1, vimos que um espaço de Hilbert H é um $\mathbb{C}$- módulo de Hilbert com a operação $< h\,,\, k >_{\mathbb{C}} = (k\,|\,h)$. Em particular, H é gerado enumeravelmente se, e somente se, H é separável.*

Definição 4.3 *Dizemos que um submódulo Y de um A-módulo de Hilbert X está **complementado** quando*

$$X \cong Y \oplus Y^{\perp},$$

onde $Y^{\perp} := \ \{x \in X;\ < x, y >_A = 0,\ \textit{para todo}\ \ y \in Y\}$.

Agora temos as ferramentas necessárias para provarmos o

Teorema 4.1 ***(Teorema de Estabilização de Kasparov)*** *Sejam A uma C^*-álgebra e X um A-módulo de Hilbert gerado enumeravelmente. Então $X \oplus \boldsymbol{H}_A$ e $\boldsymbol{H}_A$ são isomorfos como A-módulos de Hilbert.*

Demonstração:

Se a C*-álgebra A não tem identidade, então X pode ser considerado um A^1-módulo de Hilbert com o mesmo produto interno, $< .\,,\, . >_A$, e com o produto definido por

$$x.(a + \lambda.1) := x.a + \lambda.x.$$

Pela observação 4.1, podemos identificar $\mathbf{H}_A$ e $\mathbf{H}_{A^1}$ com $H \otimes A$ e $H \otimes A^1$, respectivamente, onde H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

Note que a aplicação inclusão $\phi : \mathbf{H}_A \hookrightarrow \mathbf{H}_{A^1}$ definida por

$$\phi\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) := \ (a_i + 0.\mathbf{1})_{i=1}^{\infty},$$

onde $\mathbf{1}$ é a unidade de A^1, é uma isometria pois

$$\left\|\phi\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right\|_A = \|(a_i + 0.\mathbf{1})_{i=1}^{\infty}\| = \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_A\,,$$

com imagem $\overline{\mathbf{H}_{A^1}.A}$, com $h \otimes a := (h \otimes 1).a$ em $\mathbf{H}_{A^1}$.

Obtemos assim um isomorfismo entre $\mathbf{H}_A$ e $\overline{\mathbf{H}_{A^1}.A}$.

Analogamente, como $\overline{X.A} = X$ (corolário 2.1), temos um isomorfismo entre $X \oplus \mathbf{H}_A$ e $\overline{(X \oplus \mathbf{H}_{A^1}).A)}$. Logo, qualquer isomorfismo $\psi : \mathbf{H}_{A^1} \to X \oplus \mathbf{H}_{A^1}$ pode ser restrito a um isomorfismo de $\overline{\mathbf{H}_{A^1}.A}$ sobre $\overline{(X \oplus \mathbf{H}_{A^1}.A)}$.

Daí, $X \oplus \mathbf{H}_A$ e $\mathbf{H}_A$ são isomorfos.

Desse modo, podemos assumir que a C*-álgebra A possui identidade. Pelo lema 2.8, basta encontrarmos uma aplicação $T \in \boldsymbol{L}(\mathbf{H}_A, X \oplus \mathbf{H}_A)$ tal que T e T^* tenham imagem densa.

Como X é gerado enumeravelmente, existe um subconjunto enumerável D contido em X tal que $X = \overline{D.A}$. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores unitários em X tal que cada elemento de D aparece infinitas vezes nessa sequência. Se $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal para o espaço de Hilbert separável de dimensão infinita H, então $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um conjunto gerador para H_A, onde

$$e_n := h_n \otimes 1 \in \mathbf{H}_A (\cong H \otimes A).$$

Consideraremos X e $\mathbf{H}_A$ como submódulos ortogonais em $X \oplus \mathbf{H}_A$, isto é,

$$< x, \mathbf{h} >_A = 0,$$

para quaisquer $x \in X$, $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_A$.

Como $\Theta_{e_n,e_n} : \mathbf{H}_A \to \mathbf{H}_A$, $\Theta_{x_n,e_n} : \mathbf{H}_A \to X$ e X e $\mathbf{H}_A$ são submódulos ortogonais em $X \oplus \mathbf{H}_A$, temos que

$$\Theta_{e_n,e_n},\ \Theta_{x_n,e_n} \in K(\mathbf{H}_A, X \oplus \mathbf{H}_A).$$

Além disso, como $K(\mathbf{H}_A, X \oplus \mathbf{H}_A)$ é fechado, segue que

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n}.\Theta_{x_n,e_n} + 4^{-n}.\Theta_{e_n,e_n}\right)$$

também pertence à $K(\mathbf{H}_A, X \oplus \mathbf{H}_A)$.

Observe agora que, para cada $n' \in \mathbb{N}$, temos:

$$T(e_{n'}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^{-n}.\Theta_{x_n,e_n}(e_{n'}) + 4^{-n}.\Theta_{e_n,e_n}(e_{n'})\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n}.x_n. < e_n, e_n >_A + 4^{-n}.e_n. < e_n, e_{n'} >_A\right).$$

Como

$$< e_n, e_m >_A = < h_n \otimes 1, h_m \otimes 1 >_A = \ (h_n | \, h_m)$$

e $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de H, temos que

$$T(e_{n'}) = 2^{-n'}.x_{n'} + 4^{-n'}.e_{n'},$$

isto é,

$$T(e_n) = 2^{-n}.x_n + 4^{-n}.e_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $x_m = x_n$, temos que $T(2^m e_m) = x_n + 2^{-m}.e_m$.

Como, por hipótese, existe uma infinidade de números naturais m tais que $x_m = x_n$, temos que

$$T(2^m e_m) = x_n + 2^{-m}.e_m \to x_n$$

quando $m \to \infty$. Portanto, $x_n \in \overline{T(\mathbf{H}_A)}$.

Sendo $e_n = T(4^n e_n) - 2^n x_n$, temos que $e_n \in \overline{T(\mathbf{H}_A)}$.

Desse modo, como $\overline{T(\mathbf{H}_A)}$ contém todos os geradores x_n de X e todos os geradores e_n de $\mathbf{H}_A$, temos que $\overline{T(\mathbf{H}_A)} = X \otimes \mathbf{H}_A$.

Por outro lado, como

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n}.\Theta_{e_n,x_n} + 4^{-n}.\Theta_{e_n,e_n}\right)$$

e os submódulos X e $\mathbf{H}_A$ de $X \oplus \mathbf{H}_A$ são ortogonais, temos que

$T^*(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{-k}.\Theta_{e_k,x_k}(e_n) + 4^{-k}.\Theta_{e_k,e_k}(e_n)\right] =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}.e_k. < x_k, e_n >_A + 4^{-k}.e_k. < e_k, e_n >_A\right) = \ 4^{-n}.e_n.$$

Assim, $T^*(4^n e_n) = e_n$, ou seja,

$$e_n \in \overline{T^*(X \oplus \mathbf{H}_A)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\overline{T^*(X \oplus \mathbf{H}_A)} = \mathbf{H}_A$.

Portanto, T e T^* tem imagem densas e assim, pelo lema 2.8, segue que $X \oplus \mathbf{H}_A$ e $\mathbf{H}_A$ são isomorfos.

$\square$

4.2 Teorema de Brown-Green-Rieffel

Introduzimos nessa seção o conceito de C*-álgebra separável e provamos o segundo e último dos teoremas principais desse trabalho, a saber, o Teorema de Brown-Green-Rieffel. A prova desse teorema é longa e para apresentá-la faremos uso de três lemas.

Definição 4.4 *Uma C*-álgebra é chamada* σ***-unital*** *ou* ***separável*** *quando possui uma aproximação enumerável da identidade.*

Observação 4.2 *No próximo resultado, usaremos o fato que: uma C*-álgebra A é σ-unital se, e somente se, A possui um elemento estritamente positivo, que, por definição, é um elemento $a \in A$ tal que $\rho(a) > 0$, para todo estado ρ de A.*

A demonstração desse resultado requer ferramentas que fogem ao objetivo do trabalho e pode ser encontrada em [Ped], teorema 3.10.5.

Proposição 4.1 *Seja X um A-módulo de Hilbert. Então X é gerado enumeravelmente se, e somente se, K(X) é σ-unital.*

Demonstração:

Suponhamos que *K(X)* é σ-unital. Então, por definição, existe uma aproximação enumerável da identidade para *K(X)*, digamos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Desse modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_i^n, y_i^n \in X,\ i = 1, 2, ..., M_n$ tais que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{M_n} ({}_{K(X)}< x_i^n, y_i^n >) - V_n \right\| <\ 1/n.$$

Assim, dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$, como $V_n(x) \to x$ quando $n \to \infty$, temos, para n suficientemente grande, que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{M_n} [({}_{K(X)}< x_i^n, y_i^n >)(x)] - x \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{M_n} ({}_{K(X)}< x_i^n, y_i^n >)(x) - V_n(x) \right\| + \|V_n(x) - x\| < \epsilon.$$

Como $({}_{K(X)}< x_i^n, y_i^n >)(x) = x_i^n. < y_i^n, x >_A$, temos que o conjunto enumerável

$$D := \{x_i^n; n \geq 1,\ 1 \leq i \leq M_n\}$$

é tal que $X = \overline{D.A}$, pois cada elemento $x \in X$ pode ser aproximado por elementos da forma

$$\sum_{i=1}^{M_n} x_i^n. < y_i^n, x >_A \in D.A.$$

Logo, X é gerado enumeravelmente.

Para a recíproca, como já comentamos no Teorema de Estabilização de Kasparov, podemos assumir que a C*-álgebra A tem identidade.

Vamos provar o resultado inicialmente para o A-módulo de Hilbert $\mathbf{H}_A$ e depois aplicaremos o Teorema de Estabilização de Kasparov para mostrar o caso geral. Lembremos que $\mathbf{H}_A \cong H \otimes A$, onde H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e, se $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de H, então $\mathbf{H}_A$ é gerado enumeravelmente pelos elementos $e_n := h_n \otimes 1$, isto é, $D = \{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é tal que $\mathbf{H}_A = \overline{D.A}$.

Considere agora o operador

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} ({}_{K(H_A)}< e_n, e_n >) \in K(\mathbf{H}_A).$$

Seja ρ um estado de $K(\mathbf{H}_A)$ tal que $\rho(T) = 0$. Temos que, $\rho({}_{K(H_A)}< e_n, e_n >) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\left|\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >))\right|^2 = \overline{\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >))}.\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >)) =$$

$$= \rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >)^*).\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >)) = \rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >)^*.({}_{K(H_A)}< x, e_n >)) \leq$$

$$\leq \rho(\left\|({}_{K(H_A)}< x, x >)\right\| ({}_{K(H_A)}< e_n, e_n >)) = 0.$$

Logo,

$$\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n >)) = 0,$$

para todos $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbf{H}_A$.

Além disso, como

$$\left|\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n.a >))\right|^2 \leq \left\|({}_{K(H_A)}< x, x >)\right\| .\rho(({}_{K(H_A)}< e_n.a, e_n.a >)) \leq$$

$$\leq \left\|({}_{K(H_A)}< x, x >)\right\| . \|a\|^2 .\rho(({}_{K(H_A)}< e_n, e_n >)) = 0$$

temos que

$$\rho(({}_{K(H_A)}< x, e_n.a >)) = 0$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbf{H}_A$, $a \in A$.

Logo, $\rho(K(\mathbf{H}_A)) = \{0\}$ e, como $\|\rho\| = 1$, chegamos a um absurdo.

Portanto, temos que $\rho(T) > 0$ para todo estado ρ de $K(\mathbf{H}_A)$, ou seja, T é um elemento estritamente positivo de $K(\mathbf{H}_A)$.
Assim, da observação 4.2, segue que $K(\mathbf{H}_A)$ é σ-unital.

Considere agora um A-módulo de Hilbert X arbitrário gerado enumeravelmente.

Pelo Teorema de Estabilização de Kasparov, temos que

$$\mathbf{H}_A \cong X \oplus \mathbf{H}_A.$$

Assim, pelo lema 4.1, temos que $K(\mathbf{H}_A)$ e $K(X \oplus \mathbf{H}_A)$ são isomorfos e sendo $K(\mathbf{H}_A)$ uma C*-álgebra σ-unital, então $K(X \oplus \mathbf{H}_A)$ também é σ-unital. Logo, por definição, existe uma aproximação enumerável da identidade para $K(X \oplus \mathbf{H}_A)$, digamos $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Note agora que a projeção $P : X \oplus \mathbf{H}_A \to X$ definida por $P(x, \mathbf{h}) := x$ é uma aplicação adjuntável, com adjunto $P^* : X \to X \oplus \mathbf{H}_A$ dado por $P^*(x) = (x, \mathbf{0})$, onde $\mathbf{0} := (0)_{n=1}^{\infty}$, pois dados $x, y \in X, \mathbf{h} \in \mathbf{H}_A$, temos que:

$$< P(x, \mathbf{h}), y >_A = < x, y >_A = < x, y >_A + < \mathbf{h}, \mathbf{0} >_A =$$

$$= < (x, \mathbf{h}), (y, \mathbf{0}) >_A = < (x, \mathbf{h}), P^*(y) >_A .$$

Além disso, dados $x, y, z \in X$,

(I) $P^*.\Theta_{x,y}(z) = P^*(x. < y, z >_A) = (x. < y, z >_A, \mathbf{0}) = (x, \mathbf{0}). < y, z >_A$;

(II) $\Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}P^*(z) = \Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}(z, \mathbf{0}) = (x, \mathbf{0}). < (y, \mathbf{0}), (z, \mathbf{0}) >_A = (x, \mathbf{0}). < y, z >_A$ e

(III) $P\Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}.P^*(z) = P\Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}(z, \mathbf{0}) = P(x. < y, z >_A) = x. < y, z >_A = \Theta_{x,y}(z)$.

Assim, para $(x, \mathbf{0}), (y, \mathbf{0}) \in X \oplus \mathbf{H}_A$, segue que

$$P^*.\Theta_{x,y} = \Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}P^* \quad \text{e} \quad P\Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}.P^* = \Theta_{x,y}.$$

Logo,

(i) $P.V_nP^*\Theta_{x,y} = P.V_n\Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}P^* \to P\Theta_{(x,\mathbf{0}),(y,\mathbf{0})}.P^* = \Theta_{x,y}$, quando $n \to \infty$;

(ii) Como $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma aproximação da identidade de $K(X \oplus \mathbf{H}_A)$, existe um número real $M > 0$ tal que $\|V_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que

$$\|P.V_nP^*\| \leq M. \|P\|^2 ,$$

donde segue que $\{P.V_nP^*\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada em $K(X)$.

De (i) e (ii), temos que $\{P.V_nP^*\}_{n=1}^{\infty}$ é uma aproximação enumerável da identidade para $K(X)$. Logo, $K(X)$ é σ-unital.

$\square$

Apresentamos agora três lemas necessários para demonstrarmos o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

Lema 4.2 *Sejam A uma C*-álgebra, X um A-módulo de Hilbert e S a coleção dos elementos positivos na bola unitária de A que são somas finitas de elementos da forma $< x, x >_A$, com $x \in X$. Então:*

(a) *Dados $y_1, ..., y_n \in X$ e $\delta > 0$, existe um elemento $c \in S$ tal que*

$$\left\|(1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2}\right\| < \delta \text{ para todo i=1,2,...,n.}$$

(b) *Se X é pleno, dados $a \in A$ e $\epsilon > 0$, existe $c \in S$ tal que $\|(1-c)a\| < \epsilon$.*

Demonstração:

(a) Lembremos que mesmo que A não tenha identidade, X é ainda um A^1-módulo de Hilbert. Assim, dados $y_1, ..., y_n \in X$ e $\delta > 0$, podemos definir $x_i \in X$, i=1,2,...,n, por:

$$x_i := \ y_i \left(\delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right)^{-1/2}.$$

Para simplificar a notação, escreveremos:

$$a := \left(\delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right)^{-1/2}.$$

Note que $a > 0$ e $\sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A \geq 0$. Definindo $c := \sum_{i=1}^{n} < x_i, x_i >_A$, temos que:

$$\|c\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} < y_j.a, y_j.a >_A\right\| = \left\|a^*. \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A .a\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right\| . \left\|\left(\delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right)^{-1}\right\| =$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right\| . \left\|\left(\delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right)\right\|^{-1}.$$

Por outro lado, a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A \leq \delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A$$

implica que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right\| \leq \left\|\delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right\|,$$

donde segue que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right\| . \left\|\delta^2.1 + \sum_{j=1}^{n} < y_j, y_j >_A\right\|^{-1} \leq 1.$$

O que mostra que $c \in S$.

Considerando agora as funções contínuas $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(t) = \frac{t}{\delta^2 + t} = (\delta^2 + t)^{-1/2}.t.(\delta^2 + t)^{-1/2} \quad e$$

$$g(t) = \frac{\delta^4 t}{(\delta^2 + t)^2} = (1 - f(t)).t.(1 - f(t)),$$

temos que $\|f\|_\infty = 1$ e $\|g\|_\infty = \delta^2/4$.

Assim, pelo cálculo funcional, se $f, g : A^+ \to A$ estão dadas pelas mesmas fórmulas acima, então para $t = \sum_{i=1}^n < y_i, y_i >_A$, temos que

$$f(t) = c \quad \text{e} \quad \left\| (1-c)\left[\sum_{i=1}^n < y_i, y_i >_A\right](1-c) \right\| = \|g(t)\| \le \|g\|_\infty = \delta^2/4.$$

Como $< y_i, y_i >_A \le \sum_{j=1}^n < y_j, y_j >_A$, para todo i=1,2,...,n; então

$$\|(1-c) < y_i, y_i >_A (1-c)\| \le \left\| (1-c)\left[\sum_{j=1}^n < y_j, y_j >_A\right](1-c) \right\| \le \delta^2/4.$$

Por outro lado,

$$\|(1-c) < y_i, y_i >_A (1-c)\| = \left\| (1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2} . < y_i, y_i >_A^{1/2} (1-c) \right\| =$$

$$= \left\| (1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2} .[(1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2}]^* \right\| = \left\| (1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2} \right\|^2 \le \delta^2/4.$$

Portanto,

$$\left\| (1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2} \right\| < \delta/2 < \delta$$

para todo i=1,2,...,n.

(b) Vamos provar agora a segunda afirmação do lema. Como X é pleno, dado $a \in A$, podemos aproximar o elemento a por elementos da forma

$$\sum_{j=1}^m < w_j, z_j >_A,$$

onde $w_j, z_j \in X$. Assim, dado $\epsilon > 0$, usando a fórmula de polarização

$$4 < w, z >_A = \sum_{k=1}^3 i^k < w + i^k z, w + i^k z >_A$$

podemos encontrar elementos $y_1, ..., y_n \in X$ e $k_1, ...k_n \in \{-1, 1, -i, i\}$ tais que

$$b := \sum_{i=1}^n k_i < y_i, y_i >_A$$

satisfaz

$$\|a - b\| < \epsilon/2. \quad (I)$$

Seja $M := max\{\|y_i\|\,; i = 1, ..., n\}$ e

$$\delta = \epsilon/2nM. \ (II)$$

Usando o item (a) já provado acima, podemos encontrar $c \in S$ tal que

$$\left\|(1-c) < y_i, y_i >_A^{1/2}\right\| < \delta. \quad (III)$$

Daí,

$$\|(1-c)a\| \leq \|(1-c)b\| + \|(1-c)(a-b)\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|(1-c)k_i < y_i, y_i >_A\| + \|(1-c)\| \,.\, \|a-b\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|(1-c)k_i < y_i, y_i >_A^{1/2}\right\| . \left\|< y_i, y_i >_A^{1/2}\right\| + \epsilon/2.$$

Esta última desigualdade segue de (I) e do fato que

$$0 < c < 1 \Rightarrow 0 < 1 - c < 1 \Rightarrow \|1 - c\| \leq 1,$$

onde a última implicação é válida pois numa C*-álgebra A, se $a, b \in A$ e $0 \leq a \leq b$ então $\|a\| \leq \|b\|$. (Ver, por exemplo, [Mur], 2.2.5)

Portanto, de (II) e (III), obtemos

$$\|(1-c)a\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\|(1-c)k_i < y_i, y_i >_A^{1/2}\right\| . \left\|< y_i, y_i >_A^{1/2}\right\| + \epsilon/2 \leq \delta.n.M + \epsilon/2 = \epsilon,$$

o que concluí a demonstração.

□

Definição 4.5 *Sejam A uma C*-álgebra, $a \in A$ e $\|\,.\,\|_a$ a seminorma sobre **M(A)** definida por $\|b\|_a := \|ab\| + \|ba\|$. Definimos a topologia estrita sobre **M(A)** como sendo a topologia gerada pelas seminormas $\{\|\,.\,\|_a\,;\ a \in A\}$.*

Uma sequência $\{a_n\}$ de elementos de A converge para $\mathbf{1} \in \mathbf{M}(A)$ estritamente se, e somente se, $a_n.a \to a$ e $a.a_n \to a$ em norma para todo $a \in A$. Como todo elemento de uma C*-álgebra pode ser escrito como uma combinação linear de elementos positivos, uma sequência $\{a_n\}$ de elementos auto-adjuntos em ***M(A)*** converge estritamente para b se, e só se, $a_n.a \to b.a$ para todo elemento positivo $a \in A$.

Lembremos que uma aproximação da identidade em uma C*-álgebra A é, por definição, uma rede crescente de elementos positivos de norma no máximo igual a um, que converge estritamente para $\mathbf{1} = 1_{M(A)}$. Nosso próximo passo será mostrar que as C*-álgebras possuem uma aproximação da identidade que têm uma forma particular.

Lema 4.3 *Sejam A uma C^*-álgebra σ- unital e X um A-módulo de Hilbert pleno. Então existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A$ converge estritamente para* $\mathbf{1}$ *em* $\boldsymbol{M}(A)$.

Demonstração:

Afirmamos que basta encontrar uma sequência $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ no conjunto S definido no lema 4.2 tal que a sequência das somas parciais $\sum_{n=1}^{N} c_n$ converge estritamente para $\mathbf{1}$ em $\boldsymbol{M}(A)$.

Obteremos assim uma sequência $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ e uma sequência crescente $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de inteiros tais que

$$\sum_{i=1}^{M_n} < y_i, y_i >_A .a \to a$$

quando $n \to \infty$, para todo elemento positivo $a \in A$ fixado. Como cada $c_n \in S$ é representado por uma soma de elementos da forma $< y_i, y_i >_A$, afirmamos que

$$\sum_{i=1}^{k} < y_i, y_i >_A .a \to a$$

quando $k \to \infty$.

De fato, fixe um elemento $a > 0$ e $\epsilon > 0$. Como X é pleno, pelo lema anterior temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$c_n = \sum_{i=1}^{M_n} < x_i, x_i >_A$$

tal que

$$\|(1 - c)a\| < 1/n.$$

Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \ min\left\{\epsilon/3, \frac{2\epsilon^2}{9.\|a\|}\right\}$, temos que, para todo $n \geq N$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{M_n} < y_i, y_i >_A .a - a\right\| < min\left\{\epsilon/3, \frac{2\epsilon^2}{9.\left\|a\right\|}\right\}. \ (I)$$

Assim, como a sequência $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ é crescente, para $k > M_N$, existe $n \geq N$ tal que $M_n < k \leq M_{n+1}$. Logo,

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} < y_i, y_i >_A .a - a\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{M_n} < y_i, y_i >_A .a - a\right\| + \left\|\sum_{i=M_n+1}^{k} < y_i, y_i >_A .a\right\| \leq$$

$$< \epsilon/3 + \left\|\sum_{i=M_n+1}^{k} < y_i, y_i >_A .a\right\|$$

onde a última desigualdade segue de (I).

Para simplificar a notação, sejam

$$b := \sum_{i=M_n+1}^{M_{n+1}} < y_i, y_i >_A \ \text{ e } \ c := \sum_{i=M_n+1}^{k} < y_i, y_i >_A .$$

Para concluírmos que $\sum_{i=1}^{k} < y_i, y_i >_A .a \to a$, resta mostrar que

$$\|c.a\| < 2\epsilon/3.$$

De (I), temos que:

$$\|b.a\| = \left\| \sum_{i=M_n+1}^{M_{n+1}} < y_i, y_i >_A .a \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{M_{n+1}} < y_i, y_i >_A .a - \sum_{i=1}^{M_n} < y_i, y_i >_A .a \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{M_{n+1}} < y_i, y_i >_A .a - a \right\| + \left\| a - \sum_{i=1}^{M_n} < y_i, y_i >_A .a \right\| < \ 2.\frac{2\epsilon^2}{9. \|a\|}.$$

Daí,

$$\|b.a\|^{1/2} \leq 2\epsilon/[3. \|a\|^{1/2}]. \quad (II)$$

Como

$$b \leq \sum_{i=1}^{M_{n+1}} < y_i, y_i >_A = c_{n+1},$$

temos que $\|b\| \leq 1$, ou seja, b está na bola unitária de A, que denotaremos por B_A. Note que $0 \leq c \leq b$, pois $k \leq M_{n+1}$. Logo $c \in B_A$.

Note também que:

(i) $c^{1/2} \in B_A$, pois em caso contrário

$$\left\|c^{1/2}\right\| > 1 \Rightarrow 1 \geq \|c\| = \left\|c^{1/2}.c^{1/2}\right\| = \left\|c^{1/2}\right\|^2 > 1$$

o que é um absurdo, e

(ii) $c \leq c^{1/2}$, pois

$$c^{1/2} < c \Rightarrow 1 = \left\|c^{-1/2}.c^{1/2}\right\| < \left\|c^{-1/2}.c\right\| = \left\|c^{1/2}\right\|$$

o que contradiz (i).

Logo, de (II), obtemos

$$\|c.a\| \leq \left\|c^{1/2}.a\right\| = \left\|[c^{1/2}.a]^*.c^{1/2}.a\right\|^{1/2} = \|a.c.a\|^{1/2} \leq \|a.b.a\|^{1/2} \leq \|a\|^{1/2} . \|b.a\|^{1/2} < 2\epsilon/3.$$

Vamos obter agora a sequência $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ no conjunto S definido no lema 4.2 tal que a sequência das somas parcias $\sum_{n=1}^{N} c_n$ converge estritamente para $\mathbf{1}$ em $\boldsymbol{M}(A)$.

Como A é σ-unital, existe uma aproximação enumerável da identidade, digamos $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definindo o elemento

$$h := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n,$$

temos que h é um elemento estritamente positivo de A.

De fato, em caso contrário, ou seja, se existisse um estado $\rho \in S(A)$ tal que $\rho(h) = 0$, então $\rho(e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como ρ é um homomorfismo, teríamos que $\rho(a.e_n) = 0$, para todo $a \in A$ e portanto, $\rho \equiv 0$, o que é um absurdo.

Vamos então definir indutivamente uma sequência $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ tal que, para $n \geq 1$, satisfaça:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \leq 1 \text{ e } \left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right) h \right\| < 2^{-n}. \quad (III)$$

Para $n = 1$, pelo lema 4.2, existe c_1 satisfazendo (III). Agora, se $c_1, ..., c_n \in S$ satisfazem (III), usando novamente o lema 4.2, temos que existe $d \in S$ tal que

$$\left\| (1-d) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} h \right\| \leq 2^{-(n+1)}. \quad (IV)$$

Defina então,

$$c_{n+1} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} .d. \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2}.$$

Note que $c_{n+1} \in S$, pois se $d = \sum_{i=1}^{m} < x_i, x_i >_A \in S$ e $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$, então

$$\|a^*.d.a\| \leq 1, \quad a^*.d.a = \sum_{i=1}^{m} < x_i.a, x_i.a >_A .$$

Como $(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k)^{1/2} \geq 0$, temos que

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} = \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2}\right]^*.$$

Logo, usando que $a^*ba \leq \|b\| .a^*a$, quando $a, b \in A$ com $b \geq 0$, obtemos

$$c_{n+1} \leq \|d\| . \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right) \leq 1 - \sum_{k=1}^{n} c_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} c_k \leq 1.$$

Temos também que

$$\left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n+1} c_k\right) h \right\| = \left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right) h - c_{n+1}.h \right\| =$$

$$= \left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} (1-d) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} h \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} \right\| . \left\| (1-d) \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} h \right\| < 2^{-(n+1)},$$

sendo que está última desigualdade segue de (IV) e do fato que

$$\left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} c_k\right)^{1/2} \right\| \leq 1.$$

Assim, obtemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} c_k \leq 1 \quad \text{e} \quad \left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{n+1} c_k\right) h \right\| < 2^{-(n+1)},$$

completando o processo indutivo e provando que a sequência $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ satisfaz (III).

Por construção, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n.h = h$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n.h.a = h.a$, para todo $a \in A$, ou seja, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n.a = a$$

para todo $a \in \overline{h.A}$.

Agora, se $\overline{h.A} \neq A$, então existe um estado $\rho \in S(A)$ tal que $\rho(\overline{h.A}) = \{0\}$. (Ver, por exemplo, [Wil], Proposição A-54)

Obtemos daí que

$$\rho(h.e_n) = 0, \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

donde $\rho(h) = 0$, o que é um absurdo, pois h é um elemento estritamente positivo.

Portanto, temos que $\overline{h.A} = A$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n.a = a$, para todo $a \in A$.

Como cada c_n é positivo, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge estritamente para $\mathbf{1}$.

□

Lema 4.4 *Suponha que A é uma C*-álgebra σ- unital, que X é um A-módulo de Hilbert pleno e que H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Então:*

(a) *Existe um A-módulo de Hilbert Y tal que $H \otimes X$ é isomorfo à $A \oplus Y$.*

(b) *Se X é enumeravelmente gerado, então $H \otimes X$ é isomorfo à $\boldsymbol{H}_A$.*

Demonstração:

(a) Pelo lema anterior, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A$ converge estritamente para $\mathbf{1}$ em $\boldsymbol{M}(A)$.

Seja $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal para H. Defina $T : A \to H \otimes X$ por:

$$T(a) := \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n.a. \quad (I)$$

A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A$ é o que precisamos para que o lado direito de (I) convirja, pois

$$< T(a), T(a) >_A = < \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n.a, \sum_{m=1}^{\infty} h_m \otimes x_m.a >_A =$$

$$= a^* < \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n, \sum_{m=1}^{\infty} h_m \otimes x_m >_A .a =$$

$$= a^*. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} < h_n \otimes x_n, h_m \otimes x_m >_A .a =$$

$$= a^*. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (h_n|h_m). < x_n, x_m >_A .a.$$

Como $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal para H e $\sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A$ converge estritamente para $\mathbf{1}$, temos que

$$< T(a), T(a) >_A = a^*. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (h_n|h_m). < x_n, x_m >_A .a =$$

$$= \ a^*. \sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A .a = \ a^*.a = < a, a >_A .$$

Assim, T é uma isometria. *De fato,*

$$\|T(a)\|_A = \|< T(a), T(a) >_A\|^{1/2} = \|a^*.a\|^{1/2} = \|a\| .$$

Além disso,

(i) T é uma aplicação adjuntável com adjunto $T^* : H \otimes X \to A$ dado por

$$T^*(h_n \otimes x) = < x_n, x >_A,$$

pois dados $x \in X$ e $a \in A$,

$$< T(a), h_n \otimes x >_A = < \sum_{k=1}^{\infty} h_k \otimes x_k.a, h_n \otimes x >_A = a^*. \sum_{k=1}^{\infty} < h_k \otimes x_k, h_n \otimes x >_A =$$

$$= \ a^*. < x_n, x >_A = < a, < x_n, x >_A >_A = < a, T^*(h_n \otimes x) >_A .$$

(ii) Como

$$T^*T(a) = T^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n.a \right) = \sum_{n=1}^{\infty} T^*(h_n \otimes x_n.a) = \sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n.a >_A =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A .a = a$$

e

$$< T(a), T(b) >_A = < a, T^*T(b) >_A = < a, b >_A,$$

para quaisquer $x \in X$, $a, b \in A$, temos que $T^*T(a) = a$, para todo $a \in A$, e T preserva o produto interno.

Portanto, T é um isomorfismo do A-módulo de Hilbert A sobre um submódulo de Hilbert de $H \otimes X$.

Note agora que as aplicações $TT^* : H \otimes X \to H \otimes X$ e $\mathbf{1} - TT^* : H \otimes X \to H \otimes X$ são tais que

$$Im(TT^*) = T(A) \quad \text{e} \quad Im(\mathbf{1} - TT^*) = Ker(T^*).$$

De fato,

(1) $TT^*(h_n \otimes x) = T(< x_n, x >_A) \in T(A) \Rightarrow Im(TT^*) \subset T(A)$.

(2) Dado $y \in T(A)$, temos que existe $a \in A$ tal que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n.a = T(a).$$

Tomando $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n.a \in H \otimes X$, temos que

$$TT^*(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n.a) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n.a >_A\right) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A .a\right) = T(a) = y.$$

Daí, $T(A) \subset Im(TT^*)$ e, de (1), temos $Im(TT^*) = T(A)$.

(3) $(\mathbf{1} - TT^*)(h_n \otimes x) = h_n \otimes x - \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n. < x_n, x >_A \in Ker(T^*)$, pois

$$T^*(h_n \otimes x) - T^*(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes x_n. < x_n, x >_A) = < x_n, x >_A - \sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n. < x_n, x >_A >_A =$$

$$= < x_n, x >_A - \sum_{n=1}^{\infty} < x_n, x_n >_A . < x_n, x >_A = 0.$$

Portanto, $Im(\mathbf{1} - TT^*) \subset Ker(T^*)$.

(4) Se $h \otimes x \in Ker(T^*)$, então $h \otimes x \in Im(\mathbf{1} - TT^*)$, pois

$$(\mathbf{1} - TT^*)(h \otimes x) = h \otimes x - T(0) = h \otimes x.$$

Logo, $Ker(T^*) \subset Im(\mathbf{1} - TT^*)$.

De (3) e (4) temos $Im(\mathbf{1} - TT^*) = Ker(T^*)$.

Note que $Y = Ker(T^*)$ é um A- módulo de Hilbert com as operações definidas por

$$(h \otimes x).a := h \otimes x.a \quad e \quad < h \otimes x, h' \otimes x' >_A := (h \mid h'). < x, x' >_A,$$

para $h \otimes x,\ h' \otimes x' \in Ker(T^*)$.

Assim, como $Im(\mathbf{1} - TT^*) = Ker(T^*) = Y$ e $Im(TT^*) = T(A)$, temos que

$$H \otimes X \cong T(A) \oplus Y$$

e, como $T(A) \cong A$, segue que

$$H \otimes X \cong A \oplus Y.$$

(b) Como H e $H \otimes H$ são espaços de Hilbert de mesma dimensão, temos que $H \cong H \otimes H$. Assim, usando (a) e o lema 3.2, que afirma que $H \otimes A \cong \mathbf{H}_A$, temos que:

$$H \otimes X \cong H \otimes H \otimes X \cong H \otimes (A \oplus Y) \cong (H \otimes A) \oplus (H \otimes Y) \cong \mathbf{H}_A \oplus (H \otimes Y).$$

Note agora que, como X e H são gerados enumeravelmente, $H \otimes X$ também é gerado enumeravelmente. Sendo $H \otimes X \cong A \oplus Y$, temos que $A \oplus Y$ é gerado enumeravelmente e, como A é σ-unital, segue que Y é gerado enumeravelmente. Portanto, $H \otimes Y$ é gerado enumeravelmente e, pelo Teorema de Estabilização de Kasparov, segue que

$$\mathbf{H}_A \oplus (H \otimes Y) \cong \mathbf{H}_A.$$

Logo,

$$H \otimes X \cong \mathbf{H}_A \oplus (H \otimes Y) \cong \mathbf{H}_A.$$

$\square$

Uma vez concluída as provas dos lemas anteriores, podemos demonstrar o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

Teorema 4.2 ***(Teorema de Brown-Green-Rieffel)****: Sejam A e B duas C*-álgebras σ-unitais. Então, A e B são estavelmente isomorfas se, e somente se, são Morita equivalentes.*

Demosntração:

Se A e B são estavelmente isomorfas, então A e B são Morita equivalentes pela observação 3.3.

Vamos supor agora que A e B são Morita equivalentes. Então, por definição, existe um B - A bimódulo de imprimitividade X. Pela proposição 3.1, temos que $K(X) \cong B$ e, sendo B uma C*-álgebra σ-unital, temos que $K(X)$ é σ-unital. Assim, pela proposição 4.1, segue que X é gerado enumeravelmente.

Desse modo, se H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então o teorema segue dos seguintes fatos:

(1) Vimos no exemplo 2.8 que $K(A) \cong A$;

(2) Temos, pela proposição 3.1, que $K(X) \cong B$;

(3) Temos, pelo lema 3.2, que $H \otimes A \cong \mathbf{H}_A$;

(4) Como X e A são A-módulos de Hilbert e H é um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert, pelo corolário 3.3 temos que $K(H) \otimes K(X) \cong K(H \otimes X)$ e $K(H \otimes A) \cong K(H) \otimes K(A)$;

(5) Temos, pelo lema 4.4, que $H \otimes X \cong \mathbf{H}_A$;

(6) Como os A-módulos de Hilbert $H \otimes A, \mathbf{H}_A$ e $H \otimes X$ são isomorfos, pelo lema 4.1 temos que $K(H \otimes X) \cong K(\mathbf{H}_A) \cong K(H \otimes A)$.

De fato, de $(1) - (6)$, temos que

$$K(H) \otimes B \cong K(H) \otimes K(X) \cong K(H \otimes X) \cong K(\mathbf{H}_A) \cong K(H \otimes A) \cong K(H) \otimes K(A) \cong K(H) \otimes A$$

Portanto, $K(H) \otimes B \cong K(H) \otimes A$, ou seja, A e B são estavelmente isomorfas.

□

Apresentamos agora alguns exemplos nos quais podemos aplicar o teorema **BGR.**

Exemplo 4.2 *No exemplo 4.1 vimos que se H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então H é gerado enumeravelmente e também é um $\mathbb{C}$- módulo de Hilbert.*

Assim, pela proposição 4.1 e pelo exemplo 3.1, temos que $K(H)$ é σ-unital e que H é um $K(H) - \mathbb{C}$- bimódulo de imprimitividade, respectivamente, ou seja, $K(H)$ e $\mathbb{C}$ são Morita equivalentes. Logo, pelo teorema BGR, temos que $K(H)$ e $\mathbb{C}$ são estavelmente isomorfas.

Exemplo 4.3 *Se A e B são duas C*-álgebras σ-unitais Morita equivalentes e X é um B - A bimódulo de imprimitividade, pela demonstração do Teorema de Brown-Green-Rieffel, temos que X é gerado enumeravelmente e que*

$$K(H) \otimes K(X) \cong K(H \otimes X) \cong K(\boldsymbol{H}_A) \cong K(H \otimes A) \cong K(H) \otimes K(A),$$

ou seja, temos que $K(X)$ e $K(A)$ são estavelmente isomorfas. Como X e A são gerados enumeravelmente, pela proposição 4.1 segue que $K(X)$ e $K(A)$ são σ- unitais. Logo, pelo Teorema de BGR, temos que $K(X)$ e $K(A)$ são Morita equivalentes. Além disso, como $K(A) \cong A$ e isomorfismo implica Morita equivalência, pelo exemplo 2.8 e pela observação 3.2, respectivamente, temos que $K(X)$ e A são Morita equivalentes. Pela transitividade da equivalência de Morita, segue também que B e $K(X)$ são Morita equivalentes.

Exemplo 4.4 *Seja A uma C*-álgebra σ- unital. Como X=$\boldsymbol{H}_A$ é um A-módulo de Hilbert gerado enumeravelmente, pela proposição 4.1 temos que $K(X)$ é σ- unital. Além disso, sendo X é um $K(X) - A$ bimódulo de imprimitividade, temos que $K(X)$ e A são Morita equivalentes. Logo, pelo teorema de BGR, segue que A e $K(X)$ são estavelmente isomorfas.*

Referências Bibliográficas

[BGR] L.G.Brown, P. Green, and M.A. Rieffel, *Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C*-algebras*, Pacific J. Math. **71**, 1977, 349-363.

[Dix] Jacques Dixmier, *C*-algebras*, North-Holland Mathematical Library, vol 15, North Holland, New York, 1977.

[Dou] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York, 1972.

[Jen] K. K. Jensen and K. Thomsen, *Elements of KK-theory*, Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1991.

[Kad] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, *Fundamentals of The Theory of Operator Algebras vol.I Elementary Theory*, Amer. Math. Soc., 1997.

[Kas] G. G. Kasparov, *Hilbert C*-modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu,* J. Operator Theory **4**, 1980, 133-150.

[Lan] E.C Lance, *Hilbert C*-modules: A toolkit for operator algebraists*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 210, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[Mun] G. J. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice Hall, New Jersey, 1975.

[Mur] G. Murphy, *C*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, New York, 1990.

[Nar] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1966.

[Ped] Gert K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[SBA] C. Cerri e A. R da Silva, *Introdução à Teoria das C*-álgebras*, 56° Seminário Brasileiro de Análise, UFF, 2002.

[Wil] I. Raeburn and D. Williams, *Morita Equivalence and Continuous- Trace C*-Algebras*, Amer. Math. Soc., 1998.