

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Patricia Couto Gonçalves Mauro

Os Teoremas de Kuiper e Atiyah - Jänich

Rio de Janeiro

2010

Patricia Couto Gonçalves Mauro

OS TEOREMAS DE KUIPER E ATIYAH - JÄNICH

1 Volume

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (Matemática Pura), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Matemática).

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Rio de Janeiro
2010

M457t Mauro, Patricia Couto Gonçalves

Os teoremas de Kuiper e Atiyah - Jänich / Patricia Couto Gonçalves
Mauro. – Rio de Janeiro: UFRJ / Instituto de Matemática, 2010.

133f. ; 31cm.

Orientador: Antonio Roberto da Silva

Dissertação (Mestrado) - UFRJ / Instituto de Matemática,
2010.

Referências: f. 132 - 133

1. Grupos de homotopia. 2. Fibrados vetoriais. 3. Teorema de
Kuiper. 4. Teorema de Atiyah - Jänich. 5. Matemática - Tese. I. Silva,
Antonio Roberto da (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de
Janeiro, Instituto de Matemática. III. Título.

Folha de Aprovação

Patricia Couto Gonçalves Mauro

OS TEOREMAS DE KUIPER E ATIYAH - JÄNICH

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (Matemática Pura), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Matemática).

Rio de Janeiro, ____ de _____ de 20____.

Prof. Doutor Antonio Roberto da Silva (UFRJ)
Orientador

Prof. Doutora Walcy Santos (UFRJ)

Prof. Doutor Caio José Colletti Negreiros (UNICAMP)

Prof. Doutor Dinamérico Pereira Pombo Júnior (UFF)
Suplente

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e ânimo durante esses anos de estudo e por ter permitido que esse sonho se concretizasse na minha vida. Obrigada, Senhor! Toda honra e glória são dadas a Ti! Dedico este trabalho ao Senhor, sem O qual nada do que foi feito, se faria.

Agradeço também à minha família por ter me dado apoio para continuar estudando, mesmo quando as circunstâncias pareciam dizer que isso era impossível. Agradeço principalmente à minha mãe, que dedicou sua vida à minha criação e da minha irmã e sempre procurou despertar em nós o gosto pelo estudo.

Agradeço especialmente ao meu querido noivo que, com sua inteligência e criatividade, sempre me ajudou muito a resolver exercícios; com seu amor e paciência, me acalmava depois das provas, aguentando minha choradeira, quase sempre sem motivo; e com sua amizade e companheirismo, me acompanhou nesses dois anos de mestrado durante o caminho do Fundão para minha casa, suportando ônibus cheios, engarrafamentos e trajetos as vezes de mais de três horas, quando podia, simplesmente, ter ido direto para sua casa. Eu te ♡, Guilherme!

Finalmente agradeço aos professores Walcy Santos e Antonio Roberto da Silva pelo apoio e orientação durante os cursos de graduação e mestrado. Vocês são para mim um exemplo de profissional responsável e dedicado.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos dois resultados, o primeiro devido a N. H. Kuiper e o segundo devido a M. F. Atiyah e K. Jänich. No Capítulo 1, após uma breve introdução à teoria de homotopia, apresentamos a construção do grupo de Grothendieck de um semigrupo abeliano. No Capítulo 2 apresentamos alguns elementos da teoria de fibrados vetoriais e de sua K-teoria. No Capítulo 3 mostramos que todos os grupos de homotopia de $GL(H)$ são nulos. Este resultado é devido a N. H. Kuiper. Como consequência do Teorema de Kuiper, demonstramos um resultado sobre a estrutura topológica dos espaços $GL(H)$ e $U(H)$, a saber, que ambos são contráteis. No Capítulo 4 apresentamos uma generalização do conceito de índice de Fredholm de um operador linear agindo sobre um espaço de Hilbert separável H , e com este conceito de índice generalizado mostramos a existência de um isomorfismo entre os grupos $K(X)$ e $[X, \mathcal{F}(H)]$. Este último resultado é devido a M. F. Atiyah e K. Jänich.

Palavras-Chave: Grupos de homotopia, grupo de Grothendieck, fibrados vetoriais, teorema de Kuiper, índice de Fredholm, teorema de Atiyah - Jänich.

Abstract

In this dissertation we present two results, the first one is due to N. H. Kuiper and the second is due to M. F. Atiyah and K. Jänich. In Chapter 1, after a short introduction to homotopy theory, we present the Grothendieck group construction of an abelian semigroup. In Chapter 2 we present some elements of the vector bundles theory and of his K-theory. In Chapter 3 we show that all homotopy groups of $GL(H)$ are trivial. This result is due to N. H. Kuiper. As a consequence of Kuiper's Theorem, we demonstrate a result on the topological structure of the spaces $GL(H)$ and $U(H)$, namely, that both are contractible. In Chapter 4 we present a generalization of the concept of Fredholm index of a linear operator acting on a separable Hilbert space H , through this generalized index we show the existence of an isomorphism between the groups $K(X)$ and $[X, \mathcal{F}(H)]$. This latter result is due to M. F. Atiyah and K. Jänich.

Key-Words: Homotopy groups, Grothendieck group, vector bundles, Kuiper's theorem, Fredholm index, Atiyah - Jänich's theorem.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Grupos de homotopia	3
1.2 O grupo de Grothendieck	27
2 Fibrados Vetoriais	33
2.1 Definição e isomorfismo de fibrados vetoriais	33
2.2 K - Teoria para fibrados vetoriais	36
2.3 Fibrados restritos e fibrados induzidos	42
2.4 Seções de fibrados vetoriais	46
2.5 Propriedades homotópicas de fibrados vetoriais	53
2.6 Propriedades do grupo $K(X)$	60
3 O Teorema de Kuiper	68
3.1 Prova do Teorema	68
3.2 Aplicações	93
4 O Teorema de Atiyah - Jänich	98
4.1 O índice de Fredholm	98
4.2 O índice generalizado	100
4.3 Invariância homotópica do índice generalizado	110
4.4 O grupo $([X, \mathcal{F}(H)], \bullet)$	112
4.5 Os grupos $[X, \mathcal{F}(H)]$ e $K(X)$ são isomorfos	116
Referências Bibliográficas	132

Introdução

O objetivo da presente dissertação é apresentar com detalhes dois resultados, o primeiro devido a N. H. Kuiper e o segundo devido a M. F. Atiyah e K. Jänich.

A seguir expomos o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1 desenvolvemos alguns conceitos que serão necessários para o entendimento dos capítulos posteriores. Na primeira seção apresentamos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de homotopia, definimos os conceitos de funções homotópicas e espaços topológicos contráteis. A construção mais importante desta seção são os grupos de homotopia de um espaço topológico X , denotados por $\pi_n(X)$, $n = 1, 2, \dots$, que terão um papel central no Capítulo 3. Na segunda seção mostramos como construir, a partir de um semigrupo abeliano H , um grupo abeliano $K(H)$, chamado o grupo de Grothendieck de H .

No Capítulo 2 apresentamos um pouco da teoria de fibrados vetoriais. Iniciamos com os conceitos de fibrados vetoriais e isomorfismo de fibrados vetoriais. Veremos que este último conceito permite construir um semigrupo abeliano $Vect(X)$, onde X é um espaço topológico. Denotaremos por $K(X)$ o grupo de Grothendieck de $Vect(X)$. Este grupo será importante no Capítulo 4. No final do capítulo, definimos as seções de fibrados vetoriais, que nos permitirão, entre outros, obter resultados importantes sobre a estrutura do grupo $K(X)$, quando X é um espaço topológico de Hausdorff compacto.

No Capítulo 3 apresentamos o primeiro teorema central da dissertação, devido a N. H. Kuiper. Este teorema afirma que todos os grupos de homotopia de $GL(H)$, onde H é um espaço de Hilbert de dimensão infinita separável, são nulos. Como aplicação do Teorema de Kuiper mostraremos dois resultados importantes sobre o tipo de homotopia dos espaços $GL(H)$ e $U(H)$, a saber, que ambos têm o tipo de homotopia de um ponto, isto é, são contráteis.

Finalmente, no Capítulo 4, iniciamos com alguns resultados sobre o índice de Fredholm de um operador linear agindo sobre um espaço de Hilbert H e, a seguir, construímos o índice generalizado de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$, onde X é um espaço topológico de Hausdorff compacto e $\mathcal{F}(H)$ é o conjunto dos operadores de Fredholm. Este índice generalizado será um elemento do grupo $K(X)$, construído no Capítulo 2. Mostraremos através de um exemplo que o índice generalizado de fato estende o conceito de índice de

Fredholm. Após isso, mostramos que o índice generalizado é invariante por homotopias, isto é, provamos que se $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ e $g : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ são aplicações homotópicas, então seus índices generalizados coincidem. Em seguida, definimos uma operação no conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de X em $\mathcal{F}(H)$, denotado por $[X, \mathcal{F}(H)]$, de modo a torná-lo um grupo com esta operação. Concluimos o capítulo com o segundo resultado central da dissertação, devido a M. F. Atiyah e K. Jänich, a saber, que a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Ind} : [X, \mathcal{F}(H)] &\rightarrow K(X) \\ [f] &\mapsto \text{Ind } f \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos. Este resultado é obtido utilizando-se o Teorema de Kuiper, demonstrado no Capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos da teoria elementar de homotopia e introduzimos a construção de um grupo abeliano a partir de um semigrupo abeliano, devida a Grothendieck. Estes resultados serão necessários para o entendimento dos capítulos subsequentes.

1.1 Grupos de homotopia

Nesta seção estudamos o conceito de homotopia e construímos os grupos de homotopia de um espaço topológico X , $\pi_n(X)$, $n = 1, 2, \dots$

Durante esta seção, os símbolos X , Y , Z e W denotarão espaços topológicos de Hausdorff. Vamos denotar por I o intervalo unitário $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1 Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Dizemos que f é *homotópica* a g se existe uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$. Neste caso escrevemos $f \approx g : X \rightarrow Y$.

Suponha que $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ e $f(X_0) \subset Y_0$, $g(X_0) \subset Y_0$. Neste caso, escrevemos $f, g : X, X_0 \rightarrow Y, Y_0$. Se existe uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$ com $H(X_0 \times I) \subset Y_0$, então também dizemos que f é *homotópica* a g e escrevemos $f \approx g : X, X_0 \rightarrow Y, Y_0$.

Lema 1.1 (i) A relação

$$f \approx g : X \rightarrow Y \Leftrightarrow f \text{ é homotópica a } g$$

é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas com domínio X e contra-domínio Y .

(ii) A relação

$$f \approx g : X, X_0 \rightarrow Y, Y_0 \Leftrightarrow f \text{ é homotópica a } g$$

é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas com domínio X e contra-domínio Y , cuja imagem do conjunto X_0 está contida em Y_0 .

Demonstração: (i) Devemos mostrar que a relação $\approx$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva: A função

$$\begin{aligned} H : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

é contínua e $H(x, 0) = f(x) = H(x, 1)$, $\forall x \in X$. Isto mostra que $f \approx f$.

Simétrica: Suponha que $f \approx g : X \rightarrow Y$. Isto significa que existe uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$.

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{H} : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto H(x, 1 - t) \end{aligned}$$

Então $\tilde{H}$ é contínua e $\tilde{H}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$, $\tilde{H}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$. Isto mostra que $g \approx f$.

Transitiva: Suponha que $f \approx g : X \rightarrow Y$ e $g \approx h : X \rightarrow Y$. Logo, existem funções contínuas $H_1, H_2 : X \times I \rightarrow Y$ tais que $H_1(x, 0) = f(x)$, $H_1(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$ e $H_2(x, 0) = g(x)$, $H_2(x, 1) = h(x)$, $\forall x \in X$.

Defina

$$\begin{aligned} H : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} H_1(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então H é função contínua e $\begin{cases} H(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = H_2(x, 1) = h(x) \end{cases}$, $\forall x \in X$.

Isto mostra que $f \approx h$.

(ii) A demonstração é a mesma, basta observar que a imagem do conjunto $X_0 \times I$ permanece em Y_0 durante as homotopias. $\square$

Com este resultado, podemos dividir o conjunto $\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ é contínua}\}$ em classes de equivalência, que chamaremos classes de homotopia. Denotaremos a classe de homotopia de $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ por $[f]$ e denotaremos por $[X, Y] = \{[f] \mid f \in \mathcal{C}(X, Y)\}$ o conjunto das classes de homotopia das funções contínuas de X em Y .

Também podemos dividir o conjunto $\mathcal{C}(X, X_0; Y, Y_0) = \{f : X, X_0 \rightarrow Y, Y_0 \mid f \text{ é contínua}\}$ em classes de homotopia. Denotaremos também por $[f]$ a classe de homotopia de $f \in$

$\mathcal{C}(X, X_0; Y, Y_0)$ e por $[X, X_0; Y, Y_0] = \{[f] \mid f \in \mathcal{C}(X, X_0; Y, Y_0)\}$ o conjunto das classes de homotopia das funções contínuas de X em Y , que levam X_0 em Y_0 .

Proposição 1.1 *Sejam $F : X \rightarrow \tilde{X}$ e $G : Y \rightarrow \tilde{Y}$ homeomorfismos.*

(i) *Existe uma bijeção entre os conjuntos $[X, Y]$ e $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.*

(ii) *Suponha que $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$, $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$ e $\tilde{Y}_0 \subset \tilde{Y}$. Se $F|_{X_0} : X_0 \rightarrow \tilde{X}_0$ e $G|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow \tilde{Y}_0$ são bijeções, então existe uma bijeção entre os conjuntos $[X, X_0; Y, Y_0]$ e $[\tilde{X}, \tilde{X}_0; \tilde{Y}, \tilde{Y}_0]$.*

Demonstração: (i) Dada $f : X \rightarrow Y$ contínua, a função $G \circ f \circ F^{-1} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é contínua. Suponha que $f \approx g : X \rightarrow Y$, então existe $H_1 : X \times I \rightarrow Y$ contínua com $H_1(x, 0) = f(x)$ e $H_1(x, 1) = g(x), \forall x \in X$. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 : \tilde{X} \times I &\rightarrow \tilde{Y} \\ (\tilde{x}, t) &\mapsto G \circ H_1(F^{-1}(\tilde{x}), t) \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{H}_1$ é contínua e

$$\begin{cases} \tilde{H}_1(\tilde{x}, 0) = G \circ H_1(F^{-1}(\tilde{x}), 0) = G \circ f(F^{-1}(\tilde{x})) = G \circ f \circ F^{-1}(\tilde{x}) \\ \tilde{H}_1(\tilde{x}, 1) = G \circ H_1(F^{-1}(\tilde{x}), 1) = G \circ g(F^{-1}(\tilde{x})) = G \circ g \circ F^{-1}(\tilde{x}) \end{cases}, \forall \tilde{x} \in \tilde{X}.$$

Logo $G \circ f \circ F^{-1} \approx G \circ g \circ F^{-1} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$. Portanto está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : [X, Y] &\rightarrow [\tilde{X}, \tilde{Y}] \\ [f] &\mapsto [G \circ f \circ F^{-1}] \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Ψ é uma bijeção entre os conjuntos $[X, Y]$ e $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$.

Suponha que $[f], [g] \in [X, Y]$ são tais que

$$\Psi([f]) = \Psi([g]) \Leftrightarrow [G \circ f \circ F^{-1}] = [G \circ g \circ F^{-1}].$$

Então existe uma função contínua $\tilde{H}_2 : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{Y}$ tal que $\tilde{H}_2(\tilde{x}, 0) = (G \circ f \circ F^{-1})(\tilde{x})$ e $\tilde{H}_2(\tilde{x}, 1) = (G \circ g \circ F^{-1})(\tilde{x}), \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$.

Definimos

$$\begin{aligned} H_2 : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto G^{-1} \circ \tilde{H}_2(F(x), t) \end{aligned}$$

Temos que H_2 é contínua e

$$\begin{cases} H_2(x, 0) = G^{-1} \circ \tilde{H}_2(F(x), 0) = G^{-1} \circ (G \circ f \circ F^{-1})(F(x)) = f(x) \\ H_2(x, 1) = G^{-1} \circ \tilde{H}_2(F(x), 1) = G^{-1} \circ (G \circ g \circ F^{-1})(F(x)) = g(x) \end{cases}, \forall x \in X.$$

Logo $[f] = [g]$ e Ψ é injetiva.

Seja agora $[\tilde{f}] \in [\tilde{X}, \tilde{Y}]$. A função $G^{-1} \circ \tilde{f} \circ F : X \rightarrow Y$ é contínua e

$$\Psi([G^{-1} \circ \tilde{f} \circ F]) = [G \circ (G^{-1} \circ \tilde{f} \circ F) \circ F^{-1}] = [\tilde{f}].$$

Portanto Ψ é sobrejetiva.

(ii) A demonstração é a mesma. $\square$

Lema 1.2 *Sejam $f_0 : X \rightarrow Y$, $f_1 : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow W$ e $h : Z \rightarrow X$ funções contínuas. Suponha que $f_0 \approx f_1 : X \rightarrow Y$. Então $g \circ f_0 \approx g \circ f_1 : X \rightarrow W$ e $f_0 \circ h \approx f_1 \circ h : Z \rightarrow Y$.*

Demonstração: Por hipótese, existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$. Definimos as funções

$$\begin{aligned} G : X \times I &\rightarrow W \\ (x, t) &\mapsto g(F(x, t)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H : Z \times I &\rightarrow Y \\ (z, t) &\mapsto F(h(z), t) \end{aligned}$$

Temos que G e H são contínuas. Observe que:

$$\begin{cases} G(x, 0) = g(F(x, 0)) = g(f_0(x)) \\ G(x, 1) = g(F(x, 1)) = g(f_1(x)) \end{cases}, \forall x \in X \text{ e } \begin{cases} H(z, 0) = F(h(z), 0) = f_0(h(z)) \\ H(z, 1) = F(h(z), 1) = f_1(h(z)) \end{cases}, \forall z \in Z.$$

Logo, $g \circ f_0 \approx g \circ f_1 : X \rightarrow W$ e $f_0 \circ h \approx f_1 \circ h : Z \rightarrow Y$. $\square$

Definição 1.2 Dados dois espaços topológicos X e Y , dizemos que X tem o mesmo *tipo de homotopia* que Y se existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$ e $g \circ f \approx Id_X : X \rightarrow X$ (onde $Id_{\{.\}}$ denota a função identidade do espaço $\{.\}$). Neste caso dizemos que f e g são *equivalências homotópicas* e que $g \circ f$ é a *inversa homotópica* de $f \circ g$.

Lema 1.3 *A relação*

$$X \approx Y \Leftrightarrow X \text{ tem o mesmo tipo de homotopia que } Y$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos espaços topológicos.

Demonstração: Devemos mostrar que essa relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva: Tome $f, g = Id_X : X \rightarrow X$. f e g são contínuas e $f \circ g = Id_X : X \rightarrow X$, $g \circ f = Id_X : X \rightarrow X$. Logo $X \approx X$.

Simétrica: Suponha que $X \approx Y$, então existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$ e $g \circ f \approx Id_X : X \rightarrow X$. Tomando $\tilde{f} = g : Y \rightarrow X$ e $\tilde{g} = f : X \rightarrow Y$, temos que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são contínuas e $\tilde{f} \circ \tilde{g} = g \circ f \approx Id_X : X \rightarrow X$, $\tilde{g} \circ \tilde{f} = f \circ g \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$. Logo $Y \approx X$.

Transitiva: Suponha que $X \approx Y$ e $Y \approx Z$. Logo existem funções contínuas $f_1 : X \rightarrow Y$, $g_1 : Y \rightarrow X$, $f_2 : Y \rightarrow Z$ e $g_2 : Z \rightarrow Y$ tais que $f_1 \circ g_1 \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$, $g_1 \circ f_1 \approx Id_X : X \rightarrow X$, $f_2 \circ g_2 \approx Id_Z : Z \rightarrow Z$ e $g_2 \circ f_2 \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$.

Tome $f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ e $g = g_1 \circ g_2 : Z \rightarrow X$. Então f e g são contínuas.

Como $f_1 \circ g_1 \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$, pelo Lema 1.2, $(f_1 \circ g_1) \circ g_2 \approx g_2 : Z \rightarrow Y$. Novamente pelo Lema 1.2, $f \circ g = f_2 \circ (f_1 \circ g_1 \circ g_2) \approx f_2 \circ g_2 : Z \rightarrow Z$. Como $f_2 \circ g_2 \approx Id_Z : Z \rightarrow Z$, temos que $f \circ g \approx Id_Z : Z \rightarrow Z$. De maneira semelhante, mostra-se que $g \circ f \approx Id_X : X \rightarrow X$. Logo $X \approx Z$. $\square$

Definição 1.3 (a) Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço de X . Dizemos que Y é um *retrato* de X se existe uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(y) = y, \forall y \in Y$. Neste caso f é dita uma *retração*. Se $i \circ f : X \rightarrow X$ é homotópica à função $Id_X : X \rightarrow X$, onde $i : Y \rightarrow X$ é a inclusão (isto é, $i(y) = y, \forall y \in Y$), então Y é chamado uma *deformação retrato* de X .

(b) Dado um ponto $P \in X$, temos que $\{P\} \subset X$ e a função constante $f : X \rightarrow \{P\}, x \mapsto P$ é contínua. Logo todo ponto $\{P\} \subset X$ é trivialmente uma retrato de X . Se, além disso, $\{P\}$ é uma deformação retrato de X , isto é, se a função $i \circ f : X \rightarrow X, x \mapsto P$ é homotópica a função $Id_X : X \rightarrow X$, então X é dito *contrátil*.

Vamos considerar a partir de agora o caso particular em que $X = I^n = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n \text{ vezes}}$.

Vamos denotar por $\dot{I}^n$ a fronteira de I^n , isto é,

$$\dot{I}^n = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n \mid \text{existe } 1 \leq i \leq n \text{ tal que } t_i = 0 \text{ ou } t_i = 1\}.$$

Sejam $f, g : I^n \rightarrow Y$ funções contínuas tais que $f(1, t_2, \dots, t_n) = g(0, t_2, \dots, t_n)$.

A função

$$\begin{aligned} f + g & : I^n \longrightarrow Y \\ (t_1, \dots, t_n) & \longmapsto \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua.

Seja $y_0 \in Y$ fixado e seja $M_n(Y, y_0) = \{f : I^n, \dot{I}^n \rightarrow Y, y_0 \mid f \text{ é contínua}\}$. Então se f e $g \in M_n(Y, y_0)$, está bem definida a soma $f + g$ dada acima e $f + g \in M_n(Y, y_0)$. Seja $\pi_n(Y, y_0) = \{[f] \mid f \in M_n(Y, y_0)\}$ o conjunto das classes de homotopia das funções em $M_n(Y, y_0)$.

Lema 1.4 A aplicação

$$\begin{aligned} + : \pi_n(Y, y_0) \times \pi_n(Y, y_0) & \rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ ([f], [g]) & \mapsto [f + g] \end{aligned}$$

define uma operação no conjunto $\pi_n(Y, y_0)$.

Demonstração: Devemos mostrar que a aplicação está bem definida, isto é que se $[f_1] = [f_2]$ e $[g_1] = [g_2]$, então $[f_1 + g_1] = [f_2 + g_2]$.

Por hipótese existem funções contínuas $F, G : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow Y, y_0$ tais que

$$\begin{cases} F(t_1, \dots, t_n, 0) = f_1(t_1, \dots, t_n) \\ F(t_1, \dots, t_n, 1) = f_2(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} G(t_1, \dots, t_n, 0) = g_1(t_1, \dots, t_n) \\ G(t_1, \dots, t_n, 1) = g_2(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Definimos

$$H : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} F(2t_1, t_2, \dots, t_n, t) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

H está bem definida e é contínua.

Temos que, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$\begin{aligned} H(t_1, \dots, t_n, 0) &= \begin{cases} F(2t_1, t_2, \dots, t_n, 0) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, 0) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = \\ &\begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g_1(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f_1 + g_1(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H(t_1, \dots, t_n, 1) &= \begin{cases} F(2t_1, t_2, \dots, t_n, 1) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ G(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = \\ &\begin{cases} f_2(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f_2 + g_2(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Logo, $[f_1 + g_1] = [f_2 + g_2]$. $\square$

Teorema 1.1 *O par $(\pi_n(Y, y_0), +)$ é um grupo, com a operação de soma $+$ definida no Lema 1.4.*

Demonstração: Devemos mostrar que a operação de soma é associativa, que existe um elemento neutro em $\pi_n(Y, y_0)$ para a soma e que todo elemento de $\pi_n(Y, y_0)$ admite um inverso em $\pi_n(Y, y_0)$.

Associatividade da soma: Sejam $[f], [g], [h] \in \pi_n(Y, y_0)$. Vamos mostrar que

$$([f] + [g]) + [h] = [f] + ([g] + [h]) \Leftrightarrow [(f + g) + h] = [f + (g + h)].$$

Temos que

$$(f + g) + h(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f + g(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ h(t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

Como

$$f + g(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases},$$

então

$$(f + g) + h(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(4t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \\ g(4t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ h(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

De maneira similar,

$$f + (g + h)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(4t_1 - 2, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4} \\ h(4t_1 - 3, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

Defina

$$H : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} f(\frac{4t_1}{1+t}, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1+t}{4} \\ g(4t_1 - t - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1+t}{4} \leq t_1 \leq \frac{2+t}{4} \\ h(\frac{4t_1 - t - 2}{2-t}, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{2+t}{4} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

H está bem definida e é contínua. Observe que, $\forall(t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$H(t_1, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} f(4t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4} \\ g(4t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ h(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = (f + g) + h(t_1, \dots, t_n)$$

e

$$H(t_1, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(4t_1 - 2, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4} \\ h(4t_1 - 3, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f + (g + h)(t_1, \dots, t_n).$$

Isto mostra que $(f + g) + h \approx f + (g + h)$, ou seja, $[(f + g) + h] = [f + (g + h)]$.

Existência de elemento neutro para soma: Defina

$$e : I^n, \dot{I}^n \rightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto y_0$$

Então $e \in M_n(Y, y_0)$.

Seja $[f] \in \pi_n(Y, y_0)$. Vamos mostrar que

$$[f] + [e] = [f] = [e] + [f] \Leftrightarrow [f + e] = [f] = [e + f].$$

Logo, $[e]$ será o elemento neutro de $\pi_n(Y, y_0)$ com respeito à soma.

Definimos

$$H : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} f(\frac{2t_1}{1+t}, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1+t}{2} \\ y_0 & \text{se } \frac{1+t}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

H está bem definida e é contínua. Observe que, $\forall(t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$H(t_1, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ y_0 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f + e(t_1, \dots, t_n)$$

e

$$H(t_1, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} f(t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1 \\ y_0 & \text{se } 1 \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f(t_1, \dots, t_n).$$

Logo $f + e \approx f \Leftrightarrow [f + e] = [f]$.

Para a outra igualdade definimos

$$G : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} y_0 & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1-t}{2} \\ f(\frac{2t_1-1+t}{1+t}, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1-t}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

G está bem definida e é contínua. Observe que, $\forall(t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$G(t_1, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} y_0 & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = e + f(t_1, \dots, t_n)$$

e

$$G(t_1, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} y_0 & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 0 \\ f(t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f(t_1, \dots, t_n).$$

Portanto $e + f \approx f \Leftrightarrow [e + f] = [f]$.

Existência de inverso para a soma: Seja $[f] \in \pi_n(Y, y_0)$. Defina

$$g : I^n, \dot{I}^n \rightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(1 - t_1, \dots, t_n)$$

Então $g \in M_n(Y, y_0)$.

Vamos mostrar que

$$[f] + [g] = [e] = [g] + [f] \Leftrightarrow [f + g] = [e] = [g + f].$$

Logo $[g]$ será o inverso de $[f]$ em $\pi_n(Y, y_0)$ com respeito à soma.

Definimos

$$H : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} f(2(1-t)t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(1 - 2(1-t)(1-t_1), t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

H está bem definida e é contínua. Observe que, $\forall(t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$H(t_1, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f + g(t_1, \dots, t_n)$$

e

$$H(t_1, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} f(0, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = y_0 \text{ se } 0 \leq t_1 \leq 1 = e(t_1, \dots, t_n).$$

Logo $f + g \approx e \Leftrightarrow [f + g] = [e]$.

Para a outra igualdade definimos

$$G : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} g(2(1-t)t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(1-2(1-t)(1-t_1), t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

G está bem definida e é contínua. Observe que, $\forall(t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$G(t_1, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} g(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = g + f(t_1, \dots, t_n)$$

e

$$G(t_1, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} g(0, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = y_0 \text{ se } 0 \leq t_1 \leq 1 = e(t_1, \dots, t_n).$$

Logo $g + f \approx e \Leftrightarrow [g + f] = [e]$.

Fica assim demonstrado o Teorema. $\square$

Teorema 1.2 *Se $n \geq 2$, o grupo $\pi_n(Y, y_0)$ é abeliano.*

Demonstração: Sejam $[f], [g] \in \pi_n(Y, y_0)$. Vamos mostrar que

$$[f] + [g] = [g] + [f] \Leftrightarrow [f + g] = [g + f].$$

Definimos as três funções abaixo:

$$H_1 : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} f(2t_1, (1+t)t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \text{ e } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{1+t} \\ g(2t_1 - 1, (1+t)t_2 - t, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \text{ e } \frac{t}{1+t} \leq t_2 \leq 1 \\ y_0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$H_2 : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} f(2t_1 - t, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{t}{2} \leq t_1 \leq \frac{1+t}{2} \text{ e } 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 + t - 1, 2t_2 - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1-t}{2} \leq t_1 \leq \frac{2-t}{2} \text{ e } \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ y_0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$H_3 : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} f(2t_1 - 1, (2-t)t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2-t} \\ g(2t_1, (2-t)t_2 + t - 1, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1-t}{2-t} \leq t_2 \leq 1 \\ y_0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Temos que H_1, H_2 e H_3 estão bem definidas e são contínuas.

Finalmente, definimos

$$H : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \longrightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} H_1(t_1, t_2, \dots, t_n, 4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ H_2(t_1, t_2, \dots, t_n, 4t - 1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_3(t_1, t_2, \dots, t_n, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Temos que H está bem definida e é contínua. Observe que, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$\begin{aligned} H(t_1, t_2, \dots, t_n, 0) &= H_1(t_1, t_2, \dots, t_n, 0) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = \\ &= f + g(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H(t_1, t_2, \dots, t_n, 1) &= H_3(t_1, t_2, \dots, t_n, 1) = \begin{cases} f(2t_1 - 1, t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \\ g(2t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \end{cases} = \\ &= g + f(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Logo, $f + g \approx g + f \Leftrightarrow [f + g] = [g + f]$. $\square$

Sejam $y_0, y_1 \in Y$ e suponha que exista uma função contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = y_1$. Isto significa que existe um caminho contínuo em Y conectando y_0 a y_1 . Vamos mostrar que os grupos $\pi_n(Y, y_0)$ e $\pi_n(Y, y_1)$ são isomorfos. Para isso, precisaremos de alguns resultados de Topologia.

Vamos denotar por $B^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ e por $S^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.5 *Existe um homeomorfismo $\psi : I^n \rightarrow B^n$ tal que $\psi|_{\dot{I}^n} : \dot{I}^n \rightarrow S^{n-1}$ é bijeção.*

Demonstração: Ver [Mu2], p. 6.

Lema 1.6 *O conjunto $I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \subset I^n \times I$ é um retrato de $I^n \times I$.*

Demonstração: Primeiramente definimos

$$\rho' : B^n \times I \rightarrow B^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|}, 2 - \frac{2-t}{|x|} \right) & \text{se } |x| \geq 1 - \frac{t}{2} \\ \left(\frac{2x}{2-t}, 0 \right) & \text{se } |x| \leq 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$$

onde escrevemos abreviadamente $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

A função ρ' está bem definida e é contínua.

Note que $\begin{cases} \text{se } (x, t) \in B^n \times \{0\}, \text{ então } |x| \leq 1 - \frac{t}{2} = 1 \text{ e } \rho'(x, t) = (x, t) \\ \text{se } (x, t) \in S^{n-1} \times I, \text{ então } 1 = |x| \geq 1 - \frac{t}{2} \text{ e } \rho'(x, t) = (x, t) \end{cases}$.

Logo, $\rho'(x, t) = (x, t)$, $\forall (x, t) \in B^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$. Isto mostra que $B^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ é um retrato de $B^n \times I$.

Pelo Lema 1.5, existe um homeomorfismo $\psi : I^n \rightarrow B^n$ tal que $\psi|_{\dot{I}^n} : \dot{I}^n \rightarrow S^{n-1}$ é uma bijeção. Defina

$$\begin{aligned} \psi' : I^n \times I &\rightarrow B^n \times I \\ (t_1, \dots, t_n, t) &\mapsto (\psi(t_1, \dots, t_n), t) \end{aligned}$$

Temos que ψ' é contínua com inversa

$$\begin{aligned} \psi'^{-1} : B^n \times I &\rightarrow I^n \times I \\ (x_1, \dots, x_n, t) &\mapsto (\psi^{-1}(x_1, \dots, x_n), t) \end{aligned}$$

contínua. Logo ψ' é homeomorfismo.

Note que $\psi'|_{I^n \times \{0\}} : I^n \times \{0\} \rightarrow B^n \times \{0\}$ e $\psi'|_{\dot{I}^n \times I} : \dot{I}^n \times I \rightarrow S^{n-1} \times I$ são bijeções, pois $\psi|_{\dot{I}^n} : \dot{I}^n \rightarrow S^{n-1}$ é bijeção.

A função $\rho = \psi'^{-1} \circ \rho' \circ \psi' : I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I$ é contínua e

$\begin{cases} \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times \{0\}, \text{ então } \rho(t_1, \dots, t_n, t) = \psi'^{-1} \circ \rho'(t_1, \dots, t_n, t) = (t_1, \dots, t_n, t) \\ \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I, \text{ então } \rho(t_1, \dots, t_n, t) = \psi'^{-1} \circ \rho'(t_1, \dots, t_n, t) = (t_1, \dots, t_n, t) \end{cases}$.

Logo $\rho(t_1, \dots, t_n, t) = (t_1, \dots, t_n, t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I$. Isto mostra que $I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I$ é um retrato de $I^n \times I$. $\square$

Corolário 1.1 *O conjunto $I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I \subset I^n \times I \times I$ é um retrato de $I^n \times I \times I$.*

Demonstração: Sejam $p_1 : I^n \times I \rightarrow I^n$ e $p_2 : I^n \times I \rightarrow I$ as projeções na primeira e segunda coordenada, respectivamente.

Defina

$$\begin{aligned} \sigma : I^n \times I \times I &\rightarrow I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I \\ (t_1, \dots, t_n, s, t) &\mapsto (p_1 \circ \rho(t_1, \dots, t_n, t), s, p_2 \circ \rho(t_1, \dots, t_n, t)) \end{aligned}$$

onde $\rho : I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I$ é a função do Lema 1.6.

Temos que σ é função contínua e

$\begin{cases} \text{se } (t_1, \dots, t_n, s, t) \in I^n \times I \times \{0\}, \text{ então } \sigma(t_1, \dots, t_n, s, t) = (t_1, \dots, t_n, s, t) \\ \text{se } (t_1, \dots, t_n, s, t) \in \dot{I}^n \times I \times I, \text{ então } \sigma(t_1, \dots, t_n, s, t) = (t_1, \dots, t_n, s, t) \end{cases}$.

Logo, $\sigma(t_1, \dots, t_n, s, t) = (t_1, \dots, t_n, s, t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, s, t) \in I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I$. Isto mostra que $I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I$ é um retrato de $I^n \times I \times I$. $\square$

Lema 1.7 *Sejam $f_0, \tilde{f}_0 \in M_n(Y, y_0)$ e $\lambda \in M_1(Y, y_0)$. Suponha que exista uma função contínua $K : I^n \times I \rightarrow Y$ tal que $\begin{cases} K(t_1, \dots, t_n, 0) = f_0(t_1, \dots, t_n) \\ K(t_1, \dots, t_n, 1) = \tilde{f}_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$ e $K(t_1, \dots, t_n, t) = \lambda(t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$. Suponha também que $[\lambda] = [e]$, onde $[e]$ é a identidade do grupo $\pi_1(Y, y_0)$. Então $[f_0] = [\tilde{f}_0]$ em $\pi_n(Y, y_0)$.*

Demonstração: Como $[\lambda] = [e]$, existe uma função contínua $H : I \times I, \dot{I} \times I \rightarrow Y, y_0$ tal que $\begin{cases} H(t, 0) = \lambda(t) \\ H(t, 1) = e(t) = y_0 \end{cases}$, $\forall t \in I$.
Defina

$$G' : I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I \rightarrow Y$$

$$(t_1, \dots, t_n, t, s) \mapsto \begin{cases} K(t_1, \dots, t_n, t) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t, s) \in I^n \times I \times \{0\} \\ H(t, s) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t, s) \in \dot{I}^n \times I \times I \end{cases}$$

Observe que, se $(t_1, \dots, t_n, t, s) \in I^n \times I \times \{0\} \cap \dot{I}^n \times I \times I = \dot{I}^n \times I \times \{0\}$, então $K(t_1, \dots, t_n, t) = \lambda(t) = H(t, s)$. Portanto, a função G' está bem definida e é contínua.

Pelo Corolário 1.1, existe uma função contínua $\sigma : I^n \times I \times I \rightarrow I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I$ tal que $\sigma(t_1, \dots, t_n, t, s) = (t_1, \dots, t_n, t, s)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t, s) \in I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I$.

Seja $G = G' \circ \sigma : I^n \times I \times I \rightarrow Y$. Temos que G é função contínua e se $(t_1, \dots, t_n, t, s) \in I^n \times I \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I \times I$, então $G(t_1, \dots, t_n, t, s) = G'(t_1, \dots, t_n, t, s)$.

Sejam $F_1, F_2, F_3 : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow Y, y_0$, definidas por:

$$\begin{cases} F_1(t_1, \dots, t_n, t) = G(t_1, \dots, t_n, 0, t) \\ F_2(t_1, \dots, t_n, t) = G(t_1, \dots, t_n, t, 1) \\ F_3(t_1, \dots, t_n, t) = G(t_1, \dots, t_n, 1, 1-t) \end{cases}.$$

Observe que, se $(t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$, então:

$$\begin{cases} F_1(t_1, \dots, t_n, t) = G'(t_1, \dots, t_n, 0, t) = H(0, t) = y_0 \\ F_2(t_1, \dots, t_n, t) = G'(t_1, \dots, t_n, t, 1) = H(t, 1) = y_0 \\ F_3(t_1, \dots, t_n, t) = G'(t_1, \dots, t_n, 1, 1-t) = H(1, 1-t) = y_0 \end{cases}.$$

Logo $F_1, F_2, F_3 : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow Y, y_0$ estão bem definidas e são funções contínuas.

Defina

$$F : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow Y, y_0$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \mapsto \begin{cases} F_1(t_1, \dots, t_n, 4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ F_2(t_1, \dots, t_n, 4t-1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_3(t_1, \dots, t_n, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observe que, se $t = \frac{1}{4}$, então $F_1(t_1, \dots, t_n, 4t) = G(t_1, \dots, t_n, 0, 1) = F_2(t_1, \dots, t_n, 4t-1)$.

Se $t = \frac{1}{2}$, então $F_2(t_1, \dots, t_n, 4t-1) = G(t_1, \dots, t_n, 1, 1) = F_3(t_1, \dots, t_n, 2t-1)$.

Logo, F está bem definida e é contínua. Note que, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$\begin{cases} F(t_1, \dots, t_n, 0) = F_1(t_1, \dots, t_n, 0) = G'(t_1, \dots, t_n, 0, 0) = K(t_1, \dots, t_n, 0) = f_0(t_1, \dots, t_n) \\ F(t_1, \dots, t_n, 1) = F_3(t_1, \dots, t_n, 1) = G'(t_1, \dots, t_n, 1, 0) = K(t_1, \dots, t_n, 1) = \tilde{f}_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Isto mostra que $[f_0] = [\tilde{f}_0]$ em $\pi_n(Y, y_0)$. $\square$

Teorema 1.3 *Os grupos $\pi_n(Y, y_0)$ e $\pi_n(Y, y_1)$ são isomorfos.*

Demonstração:

Passo 1: Dada $f_1 \in M_n(Y, y_1)$, definimos

$$\begin{aligned} \tilde{g} : I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I &\rightarrow Y \\ (t_1, \dots, t_n, t) &\mapsto \begin{cases} f_1(t_1, \dots, t_n) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times \{0\} \\ \alpha(1-t) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma $\tilde{g}$ está bem definida e é contínua.

Seja $\rho : I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I$ a função dada pelo Lema 1.6. Então a função $g : I^n \times I \rightarrow Y$, $g = \tilde{g} \circ \rho$ é contínua e $g|_{I^n \times \{0\} \cup \dot{I}^n \times I} = \tilde{g}$.

Defina

$$\begin{aligned} f_0 : I^n, \dot{I}^n &\rightarrow Y, y_0 \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto g(t_1, \dots, t_n, 1) \end{aligned}$$

Temos que f_0 é contínua e $f_0(t_1, \dots, t_n) = g(t_1, \dots, t_n, 1) = \tilde{g}(t_1, \dots, t_n, 1) = \alpha(0) = y_0$, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \dot{I}^n$. Logo, $f_0 \in M_n(Y, y_0)$.

Passo 2: Seja $F : I^n \times I \rightarrow Y$ uma função contínua com

$$F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} f_1(t_1, \dots, t_n) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times \{0\} \\ \alpha'(1-t) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I \end{cases},$$

onde $\alpha' \approx \alpha : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_0, y_1$.

Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 : I^n, \dot{I}^n &\rightarrow Y, y_0 \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto F(t_1, \dots, t_n, 1) \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{f}_0$ é contínua e $\tilde{f}_0(t_1, \dots, t_n) = F(t_1, \dots, t_n, 1) = \alpha'(0) = y_0$, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \dot{I}^n$. Logo, $\tilde{f}_0 \in M_n(Y, y_0)$.

Vamos mostrar que $[\tilde{f}_0] = [f_0]$. Isto significa que a classe de homotopia de $\tilde{f}_0$ não depende da escolha da função contínua $F : I^n \times I \rightarrow Y$, com

$$F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} f_1(t_1, \dots, t_n) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times \{0\} \\ \alpha'(1-t) & \text{se } (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I \end{cases},$$

onde $\alpha' \approx \alpha : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_0, y_1$.

De fato, seja

$$\begin{aligned} K : I^n \times I &\rightarrow Y \\ (t_1, \dots, t_n, t) &\mapsto \begin{cases} g(t_1, \dots, t_n, 1-2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(t_1, \dots, t_n, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então K está bem definida e é contínua.

Note que $\begin{cases} K(t_1, \dots, t_n, 0) = g(t_1, \dots, t_n, 1) = f_0(t_1, \dots, t_n) \\ K(t_1, \dots, t_n, 1) = F(t_1, \dots, t_n, 1) = \tilde{f}_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$

Observe também que se $(t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$, então

$$K(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \lambda : I, \dot{I} &\rightarrow Y, y_0 \\ t &\mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então $\lambda \in M_1(Y, y_0)$. Temos que $K(t_1, \dots, t_n, t) = \lambda(t), \forall (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$.

Afirmção: $[\lambda] = [e]$ em $\pi_1(Y, y_0)$, onde $[e]$ é a identidade do grupo $\pi_1(Y, y_0)$.

Como $\alpha' \approx \alpha : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_0, y_1$, existe uma função contínua $G : I \times I, 0 \times I, 1 \times I \rightarrow Y, y_0, y_1$ tal que $G(t, 0) = \alpha(t)$ e $G(t, 1) = \alpha'(t), \forall t \in I$.

Seja

$$\begin{aligned} \gamma : I, \dot{I} &\rightarrow Y, y_0 \\ t &\mapsto \begin{cases} \alpha'(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então $\gamma \in M_1(Y, y_0)$.

Definimos as funções

$$\begin{aligned} H_1 : I \times I, \dot{I} \times I &\longrightarrow Y, y_0 \\ (t, s) &\longmapsto \begin{cases} \alpha'(2(1-s)t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2(1-s)(1-t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H_2 : I \times I, \dot{I} \times I &\longrightarrow Y, y_0 \\ (t, s) &\longmapsto \begin{cases} G(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

H_1 e H_2 estão bem definidas e são contínuas. Observe que

$$H_1(t, 0) = \begin{cases} \alpha'(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \gamma(t), \forall t \in I$$

e

$$H_1(t, 1) = \begin{cases} \alpha'(0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(0) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = y_0 = e(t), \forall t \in I.$$

Logo, $[\gamma] = [e]$ em $\pi_1(Y, y_0)$.

Note também que

$$H_2(t, 0) = \begin{cases} G(2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \lambda(t), \forall t \in I$$

e

$$H_2(t, 1) = \begin{cases} G(2t, 1) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \gamma(t), \forall t \in I.$$

Logo, $[\gamma] = [\lambda]$ em $\pi_1(Y, y_0)$.

Portanto, $[\lambda] = [\gamma] = [e]$ em $\pi_1(Y, y_0)$. Isto demonstra a afirmação.

Pelo Lema 1.7, $[f_0] = [\tilde{f}_0]$ em $\pi_n(Y, y_0)$.

Passo 3: Suponha agora que $f_1, f'_1 \in M_n(Y, y_1)$ são representantes da mesma classe de homotopia em $\pi_n(Y, y_1)$, isto é, $[f_1] = [f'_1]$ em $\pi_n(Y, y_1)$. Sejam $f_0, f'_0 \in M_n(Y, y_0)$ definidas no Passo 1. Logo existem funções contínuas $g, g' : I^n \times I \rightarrow Y$ tais que

$$\begin{cases} g(t_1, \dots, t_n, 0) = f_1(t_1, \dots, t_n) \\ g(t_1, \dots, t_n, 1) = f_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n \text{ e}$$

$$\begin{cases} g'(t_1, \dots, t_n, 0) = f'_1(t_1, \dots, t_n) \\ g'(t_1, \dots, t_n, 1) = f'_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Também temos que $g(t_1, \dots, t_n, t) = \alpha(1 - t) = g'(t_1, \dots, t_n, t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$.

Vamos mostrar que $[f_0] = [f'_0]$ em $\pi_n(Y, y_0)$. Dessa forma está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha^* : \pi_n(Y, y_1) &\rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [f_1] &\mapsto [f_0] \end{aligned}$$

De fato, como $[f_1] = [f'_1]$ em $\pi_n(Y, y_1)$, existe uma função contínua $H : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow Y, y_1$

$$\text{tal que } \begin{cases} H(t_1, \dots, t_n, 0) = f_1(t_1, \dots, t_n) \\ H(t_1, \dots, t_n, 1) = f'_1(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Definimos

$$\begin{aligned} F : I^n \times I &\longrightarrow Y \\ (t_1, \dots, t_n, t) &\longmapsto \begin{cases} H(t_1, \dots, t_n, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g'(t_1, \dots, t_n, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Então F está bem definida e é contínua.

$$\text{Temos que } \begin{cases} F(t_1, \dots, t_n, 0) = H(t_1, \dots, t_n, 0) = f_1(t_1, \dots, t_n) \\ F(t_1, \dots, t_n, 1) = g'(t_1, \dots, t_n, 1) = f'_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

$$\text{Note que se } (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I \text{ então } F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} y_1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Seja

$$\alpha' : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_0, y_1$$

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y_1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então $F(t_1, \dots, t_n, t) = \alpha'(1-t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times I$.

Definimos

$$G : I \times I, 0 \times I, 1 \times I \longrightarrow Y, y_0, y_1$$

$$(t, s) \longmapsto \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y_1 & \text{se } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Temos que G está bem definida e é contínua. Note que

$$G(t, 0) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y_1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \alpha'(t), \quad G(t, 1) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ y_1 & \text{se } 1 \leq t \leq 1 \end{cases} = \alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

Isto mostra que $\alpha' \approx \alpha : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_0, y_1$.

Pelo Passo 2, $[f_0] = [f'_0]$.

Passo 4: Mostraremos que a aplicação $\alpha^* : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é um homomorfismo de grupos. Para isso, sejam $[f_1], [f'_1] \in \pi_n(Y, y_1)$. Vamos mostrar que

$$\alpha^*([f_1] + [f'_1]) = \alpha^*([f_1]) + \alpha^*([f'_1]).$$

De fato, sejam $f_0, f'_0 \in M_n(Y, y_0)$ definidas no Passo 1. Então existem funções contínuas $g, g' : I^n \times I \rightarrow Y$ tais que

$$\begin{cases} g(t_1, \dots, t_n, 0) = f_1(t_1, \dots, t_n) \\ g(t_1, \dots, t_n, 1) = f_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} g'(t_1, \dots, t_n, 0) = f'_1(t_1, \dots, t_n) \\ g'(t_1, \dots, t_n, 1) = f'_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Também temos que $g(t_1, \dots, t_n, t) = \alpha(1-t) = g'(t_1, \dots, t_n, t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in I^n \times I$.

Definimos

$$G : I^n \times I \longrightarrow Y$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \longmapsto \begin{cases} g(2t_1, t_2, \dots, t_n, t) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g'(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

G está bem definida e é contínua.

Note que

$$\begin{aligned} G(t_1, \dots, t_n, 0) &= \begin{cases} g(2t_1, t_2, \dots, t_n, 0) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g'(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, 0) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} f_1(2t_1, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f'_1(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f_1 + f'_1(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G(t_1, \dots, t_n, 1) &= \begin{cases} g(2t_1, t_2, \dots, t_n, 1) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g'(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} f_0(2t_1, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f'_0(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} = f_0 + f'_0(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Se $(t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$, então $G(t_1, \dots, t_n) = \alpha(1 - t)$.

Pelo Passo 2, temos que

$$\alpha^*([f_1 + f'_1]) = [f_0 + f'_0].$$

Por definição, temos que

$$\alpha^*([f_1]) = ([f_0]) \text{ e } \alpha^*([f'_1]) = ([f'_0]).$$

Logo,

$$\alpha^*([f_1] + [f'_1]) = \alpha^*([f_1 + f'_1]) = [f_0 + f'_0] = [f_0] + [f'_0] = \alpha^*([f_1]) + \alpha^*([f'_1]).$$

Logo, α^* é um homomorfismo de grupos.

Passo 5: Vamos mostrar que $\alpha^* : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é uma bijeção.

Primeiramente, sejam $y_2 \in Y$ e $\beta : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_1, y_2$ uma função contínua.

A função

$$\begin{aligned} \alpha + \beta : I &\rightarrow Y \\ t &\mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{é contínua e } \begin{cases} \alpha + \beta(0) = \alpha(0) = y_0 \\ \alpha + \beta(1) = \beta(1) = y_2 \end{cases}.$$

Portanto, estão definidas as aplicações $\alpha^* : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$, $\beta^* : \pi_n(Y, y_2) \rightarrow \pi_n(Y, y_1)$ e $(\alpha + \beta)^* : \pi_n(Y, y_2) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$, como no Passo 3.

Mostraremos que $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.

Para isso, sejam $[f_2] \in \pi_n(Y, y_2)$ e $[f_1] \in \pi_n(Y, y_1)$ tais que $\beta^*([f_2]) = [f_1]$. Pelo Passo 1, existe $g_2 : I^n \times I \rightarrow Y$ contínua com $\begin{cases} g_2(t_1, \dots, t_n, 0) = f_2(t_1, \dots, t_n) \\ g_2(t_1, \dots, t_n, 1) = f_1(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$.

Também temos que $g_2(t_1, \dots, t_n, t) = \beta(1 - t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$.

Seja agora $[f_0] \in \pi_n(Y, y_0)$ tal que $\alpha^*([f_1]) = [f_0]$. Da mesma forma existe $g_1 : I^n \times I \rightarrow Y$ contínua com $\begin{cases} g_1(t_1, \dots, t_n, 0) = f_1(t_1, \dots, t_n) \\ g_1(t_1, \dots, t_n, 1) = f_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$.

Também temos que $g_1(t_1, \dots, t_n, t) = \alpha(1 - t)$, $\forall (t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$.

Defina

$$g : I^n \times I \rightarrow Y$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \mapsto \begin{cases} g_2(t_1, \dots, t_n, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_1(t_1, \dots, t_n, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Temos que g está bem definida e é contínua. Note que

$$\begin{cases} g(t_1, \dots, t_n, 0) = g_2(t_1, \dots, t_n, 0) = f_2(t_1, \dots, t_n) \\ g(t_1, \dots, t_n, 1) = g_1(t_1, \dots, t_n, 1) = f_0(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Para $(t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$ temos que

$$g(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} \beta(1 - 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2 - 2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \alpha + \beta(1 - t).$$

Logo, temos que $(\alpha + \beta)^*([f_2]) = [f_0]$.

Portanto,

$$\alpha^* \circ \beta^*([f_2]) = \alpha^*(\beta^*([f_2])) = \alpha^*([f_1]) = [f_0] = (\alpha + \beta)^*([f_2]), \forall [f_2] \in \pi_n(Y, y_2) \Rightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^*.$$

Vamos tomar, em particular, $y_2 = y_0$ e $\beta : I, 0, 1 \rightarrow Y, y_1, y_0$; $\beta(t) = \alpha(1 - t)$.

Mostraremos que $[\alpha + \beta] = [e]$ em $\pi_1(Y, y_0)$, onde $[e]$ é a identidade de $\pi_1(Y, y_0)$.

Para isto, considere a função

$$G : I \times I, \dot{I} \times I \rightarrow Y, y_0$$

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(2(1 - s)t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(1 - 2(1 - s)(1 - t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Temos que G está bem definida e é contínua. Note que

$$G(t, 0) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \alpha + \beta(t), \forall t \in I \text{ e}$$

$$G(t, 1) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = y_0 = e(t), \forall t \in I.$$

Logo, $[\alpha + \beta] = [e]$ em $\pi_1(Y, y_0)$.

Com isso temos que $(\alpha + \beta)^* = Id_{\pi_n(Y, y_0)} : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$.

De fato, dada $[f_0] \in \pi_n(Y, y_0)$, tome

$$g : I^n \times I \rightarrow Y$$

$$(t_1, \dots, t_n, t) \mapsto f_0(t_1, \dots, t_n)$$

Então, para $(t_1, \dots, t_n, t) \in \dot{I}^n \times I$, temos
$$\begin{cases} g(t_1, \dots, t_n, t) = y_0 = e(1-t) \\ [\alpha + \beta] = [e] \in \pi_1(Y, y_0) \end{cases}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^*([f_0]) &= [f_0] = Id_{\pi_n(Y, y_0)}([f_0]), \forall [f_0] \in \pi_n(Y, y_0) \Rightarrow \\ \alpha^* \circ \beta^* &= (\alpha + \beta)^* = Id_{\pi_n(Y, y_0)} : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0). \end{aligned}$$

De maneira semelhante mostramos que $[\beta + \alpha] = [e'] \in \pi_1(Y, y_1)$, onde $[e']$ é a identidade de $\pi_1(Y, y_1)$ e concluímos que $\beta^* \circ \alpha^* = (\beta + \alpha)^* = Id_{\pi_n(Y, y_1)} : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_1)$.

Portanto, $\alpha^* : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é invertível com inversa $\beta^* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_1)$. Ou seja, α^* é uma bijeção.

Pelos Passos 4 e 5, concluímos que $\alpha^* : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é isomorfismo de grupos.

Logo, os grupos $\pi_n(Y, y_0)$ e $\pi_n(Y, y_1)$ são isomorfos. $\square$

Proposição 1.2 *Seja $f : X, x_0 \rightarrow Y, y_0$ uma função contínua. Então existe um homomorfismo de grupos $f^* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$. Se $g : Y, y_0 \rightarrow Z, z_0$ também é uma função contínua, então vale $(g \circ f)^* = g^* \circ f^* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Z, z_0)$.*

Demonstração: Sejam $h, h' \in M_n(X, x_0)$ tais que $[h] = [h']$ em $\pi_n(X, x_0)$. Logo, existe uma função contínua $F : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow X, x_0$ tal que
$$\begin{cases} F(t_1, \dots, t_n, 0) = h(t_1, \dots, t_n) \\ F(t_1, \dots, t_n, 1) = h'(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

A função $F' = f \circ F : I^n \times I, \dot{I}^n \times I \rightarrow Y, y_0$ é contínua e

$$\begin{cases} F'(t_1, \dots, t_n, 0) = f \circ F(t_1, \dots, t_n, 0) = f \circ h(t_1, \dots, t_n) \\ F'(t_1, \dots, t_n, 1) = f \circ F(t_1, \dots, t_n, 1) = f \circ h'(t_1, \dots, t_n) \end{cases}, \forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n.$$

Logo, $[f \circ h] = [f \circ h']$ em $\pi_n(Y, y_0)$.

Portanto está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} f^* : \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [h] &\mapsto [f \circ h]. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que f^* é homomorfismo de grupos. Para isso, sejam $[h_1], [h_2] \in \pi_n(X, x_0)$.

Note que

$$f^*([h_1] + [h_2]) = f^*([h_1 + h_2]) = [f \circ (h_1 + h_2)].$$

Como $f \circ (h_1 + h_2) = f \circ h_1 + f \circ h_2$, temos que

$$[f \circ (h_1 + h_2)] = [f \circ h_1 + f \circ h_2] = [f \circ h_1] + [f \circ h_2] = f^*([h_1]) + f^*([h_2]).$$

Logo,

$$f^*([h_1] + [h_2]) = f^*([h_1]) + f^*([h_2]).$$

Isto mostra que $f^* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ é homomorfismo de grupos.

Seja agora $g : Y, y_0 \rightarrow Z, z_0$ uma função contínua. Dada $[h] \in \pi_n(X, x_0)$, temos que

$$(g \circ f)^*([h]) = [(g \circ f) \circ h].$$

Por outro lado,

$$g^* \circ f^*([h]) = g^*(f^*([h])) = g^*([f \circ h]) = [g \circ (f \circ h)].$$

Como $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, temos que $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$. $\square$

Suponha que X é conexo por caminhos. Então, pelo Teorema 1.3, os grupos $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$ são isomorfos, quaisquer que sejam $x_0, x_1 \in X$. Neste caso o ponto base $x_0 \in X$ é irrelevante e faz sentido denotar $\pi_n(X, x_0)$ por $\pi_n(X)$, qualquer que seja $x_0 \in X$.

Teorema 1.4 *Sejam X e Y espaços topológicos conexos por caminhos que têm o mesmo tipo de homotopia. Então os grupos $\pi_n(X)$ e $\pi_n(Y)$ são isomorfos.*

Demonstração: Como X e Y têm o mesmo tipo de homotopia existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$ e $g \circ f \approx Id_X : X \rightarrow X$.

Fixe $x_0 \in X$ e sejam $y_0 = f(x_0) \in Y$, $x_1 = g(y_0) \in X$, $y_1 = f(x_1) \in Y$.

Pela Proposição 1.2, f induz os seguintes homomorfismos:
$$\begin{cases} f_0^* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ f_1^* : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_1) \end{cases}.$$

Pelo mesmo motivo, g induz o seguinte homomorfismo: $g^* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$.

Seja $h \in M_n(X, x_0)$. Como $g \circ f \approx Id_X : X \rightarrow X$, existe uma função contínua $H : X \times I \rightarrow X$

tal que
$$\begin{cases} H(x, 0) = x \\ H(x, 1) = g \circ f(x) \end{cases}, \forall x \in X.$$

Definimos

$$\begin{aligned} H' : I^n \times I &\rightarrow X \\ (t_1, \dots, t_n, t) &\mapsto H(h(t_1, \dots, t_n), t) \end{aligned}$$

Temos que H' é contínua e, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$\begin{cases} H'(t_1, \dots, t_n, 0) = H(h(t_1, \dots, t_n), 0) = h(t_1, \dots, t_n) \\ H'(t_1, \dots, t_n, 1) = H(h(t_1, \dots, t_n), 1) = g \circ f(h(t_1, \dots, t_n)) = g \circ f \circ h(t_1, \dots, t_n) \end{cases}.$$

Se $(t_1, \dots, t_n) \in \dot{I}^n$ então $H'(t_1, \dots, t_n, t) = H(h(t_1, \dots, t_n), t) = H(x_0, t)$.

Defina

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto H(x_0, 1 - t) \end{aligned}$$

Temos que α é contínua e
$$\begin{cases} \alpha(0) = H(x_0, 1) = g \circ f(x_0) = g(y_0) = x_1 \\ \alpha(1) = H(x_0, 0) = x_0 \end{cases}.$$

Seja $\alpha^* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$ o isomorfismo de grupos dado pelo Teorema 1.3. Temos que

$$\alpha^*([h]) = [g \circ f \circ h].$$

Por outro lado, $g^* \circ f_0^*([h]) = (g \circ f)^*([h]) = [g \circ f \circ h]$. Como $[h] \in \pi_n(X, x_0)$ é arbitrário, temos que $\alpha^* = g^* \circ f_0^*$. Portanto $g^* \circ f_0^*$ é isomorfismo de grupos.

Vamos mostrar que $g^* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$ é sobrejetiva. Seja $[h] \in \pi_n(X, x_1)$. Como $g^* \circ f_0^*$ é sobrejetiva, existe $[h'] \in \pi_n(X, x_0)$ tal que $g^* \circ f_0^*([h']) = [h]$.

Logo $f_0^*([h']) \in \pi_n(Y, y_0)$ e $g^*(f_0^*([h'])) = [h]$. Portanto g^* é sobrejetiva.

Seja agora $h \in M_n(Y, y_0)$. Como $f \circ g \approx Id_Y : Y \rightarrow Y$, existe uma função contínua

$$H : Y \times I \rightarrow Y \text{ tal que } \begin{cases} H(y, 0) = y \\ H(y, 1) = f \circ g(y) \end{cases}, \forall y \in Y.$$

Definimos

$$\begin{aligned} H' : I^n \times I &\rightarrow Y \\ (t_1, \dots, t_n, t) &\mapsto H(h(t_1, \dots, t_n), t) \end{aligned}$$

Temos que H' é contínua e, $\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n$,

$$\begin{cases} H'(t_1, \dots, t_n, 0) = H(h(t_1, \dots, t_n), 0) = h(t_1, \dots, t_n) \\ H'(t_1, \dots, t_n, 1) = H(h(t_1, \dots, t_n), 1) = f \circ g(h(t_1, \dots, t_n)) = f \circ g \circ h(t_1, \dots, t_n) \end{cases}.$$

Se $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$ então $H'(t_1, \dots, t_n, t) = H(h(t_1, \dots, t_n), t) = H(y_0, t)$.

A função

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow Y \\ t &\mapsto H(y_0, 1 - t) \end{aligned}$$

$$\text{é contínua e } \begin{cases} \alpha(0) = H(y_0, 1) = f \circ g(y_0) = f(x_1) = y_1 \\ \alpha(1) = H(y_0, 0) = y_0 \end{cases}.$$

Seja $\alpha^* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_1)$ o isomorfismo de grupos dado pelo Teorema 1.3. Temos que $\alpha^*([h]) = [f \circ g \circ h]$.

Por outro lado, $f_1^* \circ g^*([h]) = (f \circ g)^*([h]) = [f \circ g \circ h]$. Como $[h] \in \pi_n(Y, y_0)$ é arbitrário, temos que $\alpha^* = f_1^* \circ g^*$. Portanto $f_1^* \circ g^*$ é isomorfismo de grupos.

Vamos mostrar que $g^* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$ é injetiva. Sejam $[h_1], [h_2] \in \pi_n(Y, y_0)$ tais que $g^*([h_1]) = g^*([h_2])$. Então

$$f_1^*(g^*([h_1])) = f_1^*(g^*([h_2])) \Leftrightarrow f_1^* \circ g^*([h_1]) = f_1^* \circ g^*([h_2]).$$

Como $f_1^* \circ g^*$ é injetiva, temos que $[h_1] = [h_2]$. Portanto g^* é injetiva.

Logo, $g^* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$ é um homomorfismo bijetivo, isto é, um isomorfismo de grupos. Isto mostra que os grupos $\pi_n(X)$ e $\pi_n(Y)$ são isomorfos. $\square$

Vamos denotar por $B_+^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$ o hemisfério norte de S^n e por $B_-^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$ o hemisfério sul de S^n .

Observe que $\tilde{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \text{ e } (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}\}$ é subconjunto de B_+^n e B_-^n .

Lema 1.8 *Existem homeomorfismos $\psi_1 : B_+^n \rightarrow B_+^n$ e $\psi_2 : B_-^n \rightarrow B_-^n$ tais que $\psi_1|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$ e $\psi_2|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$ são bijeções.*

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} \phi_1 : B_+^n &\rightarrow B_+^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Temos que ϕ_1 é contínua e tem inversa

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1} : B_+^n &\rightarrow B_+^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}) \end{aligned}$$

contínua também. Logo ϕ_1 é homeomorfismo.

Observamos que $\phi_1|_{\tilde{S}^{n-1}} : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ é bijeção. De fato, $\phi_1|_{\tilde{S}^{n-1}}$ é injetiva pois ϕ_1 é injetiva. Para a sobrejetividade, seja $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$. Temos que $(x_1, \dots, x_n, 0) \in \tilde{S}^{n-1}$ e $\phi_1(x_1, \dots, x_n, 0) = (x_1, \dots, x_n)$. Isto mostra que $\phi_1|_{\tilde{S}^{n-1}}$ é sobrejetiva.

Tome $\psi_1 = \phi_1^{-1}$.

De maneira semelhante definimos

$$\begin{aligned} \phi_2 : B_-^n &\rightarrow B_-^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Temos que ϕ_2 é contínua e tem inversa

$$\begin{aligned} \phi_2^{-1} : B_-^n &\rightarrow B_-^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}) \end{aligned}$$

contínua também. Logo ϕ_2 é homeomorfismo. Do mesmo modo anterior mostra-se que $\phi_2|_{\tilde{S}^{n-1}} : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ é bijeção. Tome $\psi_2 = \phi_2^{-1}$. $\square$

Lema 1.9 *Existem homeomorfismos $\phi_1 : I^n \rightarrow B_+^n$ e $\phi_2 : I^n \rightarrow B_-^n$ tais que $\phi_1|_{I^n} : I^n \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$ e $\phi_2|_{I^n} : I^n \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$ são bijeções.*

Demonstração: Basta tomar $\phi_1 = \psi_1 \circ \psi$ e $\phi_2 = \psi_2 \circ \psi$, onde $\psi : I^n \rightarrow B^n$ é dada pelo Lema 1.5 e $\psi_1 : B^n \rightarrow B_+^n$, $\psi_2 : B^n \rightarrow B_-^n$ são dadas pelo Lema 1.8. $\square$

Como $Id_Y : Y \rightarrow Y$ é homeomorfismo, pela Proposição 1.1, existe uma bijeção entre os conjuntos $\pi_n(Y, y_0)$ e $[B_+^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0]$ e entre os conjuntos $\pi_n(Y, y_0)$ e $[B_-^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0]$.

Teorema 1.5 *Seja $p_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$. Então existe uma bijeção entre os conjuntos $\pi_n(Y, y_0)$ e $[S^n, p_0; Y, y_0]$.*

Demonstração: Vamos exibir uma bijeção entre os conjuntos $[B_+^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0]$ e $[S^n, p_0; Y, y_0]$. Como já sabemos existir uma bijeção entre $\pi_n(Y, y_0)$ e $[B_+^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0]$, o Teorema fica demonstrado.

Primeiramente vamos definir uma função contínua $\Phi : B_+^n, \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^n, p_0$ tal que $\Phi|_{B_+^n - \tilde{S}^{n-1}} : B_+^n - \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^n - p_0$ é uma bijeção.

Seja $q_0 = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$. Defina

$$\begin{aligned} \rho : S^n, q_0 &\rightarrow S^n, p_0 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (-x_{n+1}, x_2, \dots, x_n, x_1) \end{aligned}$$

Temos que ρ é contínua.

Defina também

$$\begin{aligned} \gamma : B_+^n, \tilde{S}^{n-1} &\rightarrow S^n, q_0 \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{1-(2x_{n+1}-1)^2}{1-x_{n+1}^2}} x_1, \dots, \sqrt{\frac{1-(2x_{n+1}-1)^2}{1-x_{n+1}^2}} x_n, 2x_{n+1} - 1 \right) & \text{se } x_{n+1} \neq 1 \\ (2x_1, \dots, 2x_n, 2x_{n+1} - 1) & \text{se } x_{n+1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que γ também é contínua pois

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1-(2x_{n+1}-1)^2}{1-x_{n+1}^2}} = 2.$$

Logo, a função $\Phi = \rho \circ \gamma : B_+^n, \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^n, p_0$ é contínua e $\Phi|_{B_+^n - \tilde{S}^{n-1}} : B_+^n - \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^n - p_0$ é bijeção pois $\gamma|_{B_+^n - \tilde{S}^{n-1}} : B_+^n - \tilde{S}^{n-1} \rightarrow S^n - q_0$ e $\rho|_{S^n - q_0} : S^n - q_0 \rightarrow S^n - p_0$ são bijeções.

Dada $f : S^n, p_0 \rightarrow Y, y_0$ contínua, temos que $f \circ \Phi : B_+^n, \tilde{S}^{n-1} \rightarrow Y, y_0$ é contínua.

Suponha que $[f] = [f']$ em $[S^n, p_0; Y, y_0]$.

Isto significa que existe uma função contínua $H : S^n \times I, p_0 \times I \rightarrow Y, y_0$ tal que

$$\begin{cases} H(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = f(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ H(x_1, \dots, x_{n+1}, 1) = f'(x_1, \dots, x_{n+1}) \end{cases}, \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n.$$

Definimos

$$\begin{aligned} H' : B_+^n \times I, S^{n-1} \times I &\rightarrow Y, y_0 \\ (x_1, \dots, x_{n+1}, t) &\mapsto H(\Phi(x_1, \dots, x_{n+1}), t) \end{aligned}$$

$$H' \text{ é contínua e } \begin{cases} H'(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = f(\Phi(x_1, \dots, x_{n+1})) \\ H'(x_1, \dots, x_{n+1}, 1) = f'(\Phi(x_1, \dots, x_{n+1})) \end{cases}, \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in B_+^n.$$

Logo $[f \circ \Phi] = [f' \circ \Phi]$ em $[B_+^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0]$.

Portanto, está bem definida a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\Gamma : [S^n, p_0; Y, y_0] &\rightarrow [B_+^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0] \\ [f] &\mapsto [f \circ \Phi]\end{aligned}$$

Vamos mostrar que Γ é uma bijeção.

Para a sobrejetividade, seja $g : B_+^n, \tilde{S}^{n-1} \rightarrow Y, y_0$ contínua. Definimos

$$\begin{aligned}\Phi_g : S^n, p_0 &\longrightarrow Y, y_0 \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \begin{cases} g(\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1})) & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) \neq p_0 \\ y_0 & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) = p_0 \end{cases}\end{aligned}$$

Vamos mostrar que Φ_g é contínua. De fato, se $A \subset Y$ é fechado, da continuidade de g , $g^{-1}(A) \subset B_+^n$ é fechado, logo compacto (pois B_+^n é compacto). Como $\Phi_g^{-1}(A) = \Phi(g^{-1}(A))$, temos que $\Phi(g^{-1}(A)) \subset S^n$ é compacto, logo fechado. Portanto $\Phi_g^{-1}(A)$ é fechado, mostrando a continuidade de Φ_g . Logo, $[\Phi_g] \in [S^n, p_0; Y, y_0]$.

Como

$$\Gamma([\Phi_g]) = [\Phi_g \circ \Phi] = [g],$$

temos que Γ é sobrejetiva.

Para a injetividade, sejam $[f], [f'] \in [S^n, p_0; Y, y_0]$ tais que

$$\Gamma([f]) = \Gamma([f']) \Leftrightarrow [f \circ \Phi] = [f' \circ \Phi].$$

Logo, existe uma função contínua $G : B_+^n \times I, \tilde{S}^{n-1} \times I \rightarrow Y, y_0$ tal que

$$\begin{cases} G(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = f \circ \Phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \\ G(x_1, \dots, x_{n+1}, 1) = f' \circ \Phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \end{cases}, \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in B_+^n.$$

Defina

$$\begin{aligned}G' : S^n \times I, p_0 \times I &\longrightarrow Y, y_0 \\ (x_1, \dots, x_{n+1}, t) &\longmapsto \begin{cases} G(\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}), t) & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) \neq p_0 \\ y_0 & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) = p_0 \end{cases}\end{aligned}$$

Temos que G' é contínua. Observe que, $\forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$,

$$\begin{aligned}G'(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) &= \begin{cases} G(\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}), 0) & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) \neq p_0 \\ y_0 & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) = p_0 \end{cases} = f(x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ e} \\ G'(x_1, \dots, x_{n+1}, 1) &= \begin{cases} G(\Phi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}), 1) & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) \neq p_0 \\ y_0 & \text{se } (x_1, \dots, x_{n+1}) = p_0 \end{cases} = f'(x_1, \dots, x_{n+1}).\end{aligned}$$

Logo $[f] = [f']$ em $[S^n, p_0; Y, y_0]$. Isto mostra que Γ é injetiva.

Temos que Γ é uma bijeção entre $[S^n, p_0; Y, y_0]$ e $[B_+^n, \tilde{S}^{n-1}; Y, y_0]$. $\square$

1.2 O grupo de Grothendieck

O grupo de Grothendieck é uma construção em Álgebra na qual, a partir de um semigrupo abeliano H , constrói-se um grupo abeliano $K(H)$.

Definição 1.4 Dizemos que o par $(H, +)$ é um *semigrupo abeliano* se em H está definida uma operação

$$\begin{aligned} + : H \times H &\rightarrow H \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

que satisfaz:

- (a) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in H$;
- (b) $a + b = b + a, \forall a, b \in H$;

Se além disso em H existe um elemento e (o qual é necessariamente único) tal que $a + e = a = e + a, \forall a \in H$, então H é dito um *semigrupo abeliano com elemento neutro* e .

Consideremos o conjunto $H \times H = \{(a, b) \mid a, b \in H\}$. Vamos definir em $H \times H$ a seguinte relação binária: $(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2) \Leftrightarrow$ existe $h \in H$ tal que $a_1 + b_2 + h = b_1 + a_2 + h$.

Lema 1.10 *A relação*

$$(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2) \Leftrightarrow \text{existe } h \in H \text{ tal que } a_1 + b_2 + h = b_1 + a_2 + h$$

é uma relação de equivalência em $H \times H$.

Demonstração: Vamos mostrar que a relação é simétrica, reflexiva e transitiva.

Reflexiva: Seja $(a, b) \in H \times H$, tome $h \in H$ qualquer, então $a + b + h = b + a + h$, logo $(a, b) \approx (a, b)$.

Simétrica: Suponha que $(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2)$, isto significa que existe $h \in H$ tal que $a_1 + b_2 + h = b_1 + a_2 + h$. Então é claro que $a_2 + b_1 + h = b_2 + a_1 + h$, logo $(a_2, b_2) \approx (a_1, b_1)$.

Transitiva: Suponha que $(a_1, b_1) \approx (a_2, b_2)$ e $(a_2, b_2) \approx (a_3, b_3)$.

Então existem $h, h' \in H$ tais que
$$\begin{cases} a_1 + b_2 + h = b_1 + a_2 + h \\ a_2 + b_3 + h' = b_2 + a_3 + h' \end{cases}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (a_1 + b_2 + h) + (a_2 + b_3 + h') &= (b_1 + a_2 + h) + (b_2 + a_3 + h') \Leftrightarrow \\ a_1 + b_3 + (b_2 + a_2 + h + h') &= b_1 + a_3 + (b_2 + a_2 + h + h'). \end{aligned}$$

Como $b_2 + a_2 + h + h' \in H$, temos que $(a_1, b_1) \approx (a_3, b_3)$. $\square$

Pelo Lema 1.10, podemos dividir o conjunto $H \times H$ em classes de equivalência. Vamos denotar a classe de equivalência de um elemento $(a, b) \in H \times H$ por $\overline{(a, b)}$. Dessa forma,

$\overline{(a, b)} = \{(a', b') \in H \times H \mid \text{existe } h \in H \text{ tal que } a + b' + h = b + a' + h\}.$

Vamos denotar o conjunto $\{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in H \times H\}$ por $K(H)$.

Lema 1.11 *A aplicação*

$$+ : K(H) \times K(H) \rightarrow K(H)$$

$$\left(\overline{(a_1, b_1)}, \overline{(a_2, b_2)} \right) \mapsto \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)}$$

define uma operação em $K(H)$.

Demonstração: Devemos mostrar que a aplicação está bem definida, isto é, vamos mostrar que se $\overline{(a'_1, b'_1)} = \overline{(a_1, b_1)}$ e $\overline{(a'_2, b'_2)} = \overline{(a_2, b_2)}$, então $\overline{(a'_1 + a'_2, b'_1 + b'_2)} = \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)}$. Por hipótese existem $h_1, h_2 \in H$ tais que

$$\begin{cases} a'_1 + b_1 + h_1 = b'_1 + a_1 + h_1 \\ a'_2 + b_2 + h_2 = b'_2 + a_2 + h_2 \end{cases}.$$

Então

$$(a'_1 + b_1 + h_1) + (a'_2 + b_2 + h_2) = (b'_1 + a_1 + h_1) + (b'_2 + a_2 + h_2) \Leftrightarrow$$

$$(a'_1 + a'_2 + b_1 + b_2) + (h_1 + h_2) = (b'_1 + b'_2 + a_1 + a_2) + (h_1 + h_2).$$

Como $h_1 + h_2 \in H$ temos que:

$$(a'_1 + a'_2, b'_1 + b'_2) \approx (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \Leftrightarrow \overline{(a'_1 + a'_2, b'_1 + b'_2)} = \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)}. \quad \square$$

Teorema 1.6 *O conjunto $K(H)$ com a operação definida no Lema 1.11 é um grupo abeliano.*

Demonstração: Devemos mostrar que a operação em $K(H)$ é associativa, comutativa, que existe um elemento neutro em $K(H)$ e que todo elemento de $K(H)$ tem inverso em $K(H)$.

Associatividade: Sejam $\overline{(a_1, b_1)}, \overline{(a_2, b_2)}, \overline{(a_3, b_3)} \in K(H)$. Temos que:

$$\begin{aligned} \left(\overline{(a_1, b_1)} + \overline{(a_2, b_2)} \right) + \overline{(a_3, b_3)} &= \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)} + \overline{(a_3, b_3)} = \\ \overline{((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3)} &= \overline{(a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3))} = \\ \overline{(a_1, b_1)} + \overline{(a_2 + a_3, b_2 + b_3)} &= \overline{(a_1, b_1)} + \left(\overline{(a_2, b_2)} + \overline{(a_3, b_3)} \right). \end{aligned}$$

Comutatividade: Sejam $\overline{(a_1, b_1)}, \overline{(a_2, b_2)} \in K(H)$. Então

$$\overline{(a_1, b_1)} + \overline{(a_2, b_2)} = \overline{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)} = \overline{(a_2 + a_1, b_2 + b_1)} = \overline{(a_2, b_2)} + \overline{(a_1, b_1)}.$$

Existência de elemento neutro: Seja $h \in H$ fixado. Se $h' \in H$ é outro elemento de H então $\overline{(h, h)} = \overline{(h', h')}$. De fato, basta tomar qualquer $h'' \in H$ que temos $h + h' + h'' = h + h' + h''$, logo $(h, h) \approx (h', h')$. Portanto a classe de equivalência do elemento $(h, h) \in H \times H$ não depende do elemento $h \in H$ que o representa. Por esta razão faz sentido denotarmos $e = \overline{(h, h)} \in K(H)$. Seja agora $\overline{(a, b)} \in K(H)$. Temos que $\overline{(a, b)} + e = \overline{(a + h, b + h)}$, onde $h \in H$ é qualquer

elemento fixado. Tome $h' \in H$ qualquer. Como $a + h + b + h' = b + h + a + h'$ temos que $(a + h, b + h) \approx (a, b)$. Logo $\overline{(a + h, b + h)} = \overline{(a, b)}$, isto é, $\overline{(a, b)} + e = \overline{(a, b)} = e + \overline{(a, b)}$.

Existência de inverso: Seja $\overline{(a, b)} \in K(H)$. Temos que $\overline{(b, a)} \in K(H)$ e

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, a + b)} = e = \overline{(b, a)} + \overline{(a, b)}.$$

Logo $\overline{(b, a)} \in K(H)$ é o inverso de $\overline{(a, b)}$ em $K(H)$. Vamos usar a notação $\overline{(b, a)} = -\overline{(a, b)}$.

Fica assim demonstrado o Teorema. $\square$

Definição 1.5 O grupo $(K(H), +)$ é chamado o *grupo de Grothendieck* de $(H, +)$.

Exemplo 1.1 O grupo de Grothendieck de $(\mathbb{N}, +)$ é, a menos de isomorfismo, $(\mathbb{Z}, +)$.

De fato, defina

$$\begin{aligned} \Psi : K(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \overline{(m, n)} &\mapsto m - n \end{aligned}$$

Temos que Ψ está bem definida. De fato, se $\overline{(m, n)} = \overline{(m', n')}$ então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $m + n' + i = n + m' + i$. Logo,

$$m + n' = n + m' \Rightarrow m - n = m' - n' \Rightarrow \Psi(\overline{(m, n)}) = \Psi(\overline{(m', n')})$$

Vamos mostrar que Ψ é isomorfismo de grupos.

Sejam $\overline{(m, n)}, \overline{(m', n')} \in K(\mathbb{N})$, então

$$\begin{aligned} \Psi(\overline{(m, n)} + \overline{(m', n')}) &= \Psi(\overline{(m + m', n + n')}) = (m + m') - (n + n') = \\ &= (m - n) + (m' - n') = \Psi(\overline{(m, n)}) + \Psi(\overline{(m', n')}). \end{aligned}$$

Logo, Ψ é homomorfismo de grupos.

Sejam $\overline{(m, n)}, \overline{(m', n')} \in K(\mathbb{N})$ tais que $\Psi(\overline{(m, n)}) = \Psi(\overline{(m', n')})$. Então $m - n = m' - n'$.

Tomando $i \in \mathbb{N}$ qualquer, temos que $m + n' + i = m' + n + i$. Logo $\overline{(m, n)} = \overline{(m', n')}$.

Portanto, Ψ é injetiva

Seja $k \in \mathbb{Z}$. Então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $k = m - n$. De fato, se $k \geq 0$, então basta tomar $m = k$ e $n = 0$. Se $k < 0$, tome $m = 0$ e $n = -k$. Temos que $\Psi(\overline{(m, n)}) = m - n = k$.

Logo, Ψ é sobrejetiva.

Portanto, Ψ é isomorfismo de grupos, provando que os grupos $K(\mathbb{N})$ e $\mathbb{Z}$ são isomorfos. $\square$

Seja $h \in H$ fixado. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} G_h : H &\rightarrow K(H) \\ a &\mapsto \overline{(a + h, h)} \end{aligned}$$

Seja $h' \in H$. Tomando $h'' \in H$ qualquer temos que $a + h + h' + h'' = h + a + h' + h''$. Logo $(a + h, h) \approx (a + h', h')$, $\forall a \in H$. Isto mostra que as aplicações G_h e $G_{h'}$ são iguais. Portanto faz sentido denotarmos a aplicação G_h apenas por G .

Definição 1.6 A aplicação $G : H \rightarrow K(H)$ é chamada a *função de Grothendieck* de H .

Proposição 1.3 (i) $G(a + b) = G(a) + G(b)$, $\forall a, b \in H$;

(ii) G é injetiva se e somente se H tem a seguinte propriedade: dados $a, a', h \in H$, se $a + h = a' + h$ então $a = a'$;

(iii) Todo elemento da forma $G(a)$, $a \in H$ é invertível em $K(H)$;

(iv) Dado um elemento $\overline{(a, b)} \in K(H)$, temos que $\overline{(a, b)} = G(a) - G(b)$.

Demonstração: (i) Sejam $a, b \in H$, então $G(a + b) = \overline{(a + b + h, h)}$, onde $h \in H$ é qualquer fixado. Por outro lado $G(a) + G(b) = \overline{(a + h, h)} + \overline{(b + h, h)} = \overline{(a + h + b + h, h + h)}$. Tome $h' \in H$ qualquer. Como $a + h + b + h + h + h' = h + h + a + b + h + h'$ temos que $(a + h + b + h, h + h) \approx (a + b + h, h)$. Logo $G(a + b) = G(a) + G(b)$.

(ii) Suponha que G é injetiva e sejam $a, a', h \in H$ tais que $a + h = a' + h$. Então $G(a + h) = G(a' + h)$. Por (i), temos que $G(a) + G(h) = G(a') + G(h)$. Como $G(h) \in K(H)$, existe um elemento $-G(h) \in K(H)$ tal que $G(h) + (-G(h)) = e$. Daí $G(a) = G(a')$. Como G é injetiva, $a = a'$.

Suponha agora que H tenha tal propriedade. Sejam $a, b \in H$ tais que $G(a) = G(b)$. Logo $\overline{(a + h, h)} = \overline{(b + h, h)}$, onde $h \in H$ é fixado. Isto significa que existe $h' \in H$ tal que $a + h + h + h' = h + b + h + h'$. Como $h + h + h' \in H$, temos por hipótese que $a = b$. Logo, G é injetiva.

(iii) Decorre do fato que $K(H)$ é um grupo.

(iv) Seja $\overline{(a, b)} \in K(H)$. Note que

$$\begin{aligned} G(a) - G(b) &= \overline{(a + h, h)} - \overline{(b + h, h)} = \overline{(a + h, h)} + \overline{(h, b + h)} = \\ &= \overline{(a + h + h, b + h + h)} = \overline{(a, b)} + \overline{(h + h, h + h)} = \overline{(a, b)} + e = \overline{(a, b)}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 1.7 Sejam $(H_1, +)$ e $(H_2, +)$ semigrupos abelianos com elemento neutro e_1 e e_2 , respectivamente (denotamos as operações em H_1 e H_2 pelo mesmo símbolo $+$). Dado $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$ um homomorfismo de semigrupos, existe um único homomorfismo de grupos $\Psi : K(H_1) \rightarrow K(H_2)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\Phi} & H_2 \\ G_1 \downarrow & & \downarrow G_2 \\ K(H_1) & \xrightarrow{\Psi} & K(H_2) \end{array}$$

comuta, onde $G_1 : H_1 \rightarrow K(H_1)$ e $G_2 : H_2 \rightarrow K(H_2)$ são as funções de Grothendieck de H_1 e H_2 , respectivamente.

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned}\Psi : K(H_1) &\rightarrow K(H_2) \\ \overline{(a_1, b_1)} &\mapsto G_2(\Phi(a_1)) - G_2(\Phi(b_1))\end{aligned}$$

Vamos mostrar que Ψ está bem definida. Sejam $\overline{(a'_1, b'_1)} = \overline{(a_1, b_1)} \in K(H_1)$, isto significa que existe $h_1 \in H_1$ tal que $a'_1 + b_1 + h_1 = b'_1 + a_1 + h_1$.

Logo,

$$\Phi(a'_1 + b_1 + h_1) = \Phi(b'_1 + a_1 + h_1) \Rightarrow \Phi(a'_1) + \Phi(b_1) + \Phi(h_1) = \Phi(b'_1) + \Phi(a_1) + \Phi(h_1),$$

pois Φ é homomorfismo. Daí, utilizando a Proposição 1.3(i), temos que

$$\begin{aligned}G_2(\Phi(a'_1) + \Phi(b_1) + \Phi(h_1)) &= G_2(\Phi(b'_1) + \Phi(a_1) + \Phi(h_1)) \Rightarrow \\ G_2(\Phi(a'_1)) + G_2(\Phi(b_1)) + G_2(\Phi(h_1)) &= G_2(\Phi(b'_1)) + G_2(\Phi(a_1)) + G_2(\Phi(h_1)).\end{aligned}$$

Como $G_2(\Phi(h_1))$ tem inverso em $K(H_2)$, temos que

$$\begin{aligned}G_2(\Phi(a'_1)) + G_2(\Phi(b_1)) &= G_2(\Phi(b'_1)) + G_2(\Phi(a_1)) \Rightarrow \\ G_2(\Phi(a'_1)) - G_2(\Phi(b'_1)) &= G_2(\Phi(a_1)) - G_2(\Phi(b_1)).\end{aligned}$$

Portanto $\Psi(\overline{(a_1, b_1)}) = \Psi(\overline{(a'_1, b'_1)})$, mostrando que Ψ está bem definida.

Vamos mostrar agora que Ψ é homomorfismo de grupos. Sejam $\overline{(a_1, b_1)}, \overline{(a'_1, b'_1)} \in K(H_1)$.

Temos que

$$\begin{aligned}\Psi(\overline{(a_1, b_1)} + \overline{(a'_1, b'_1)}) &= \Psi(\overline{(a_1 + a'_1, b_1 + b'_1)}) = \\ G_2(\Phi(a_1 + a'_1)) - G_2(\Phi(b_1 + b'_1)) &= \\ G_2(\Phi(a_1) + \Phi(a'_1)) - G_2(\Phi(b_1) + \Phi(b'_1)) &= \\ (G_2(\Phi(a_1)) + G_2(\Phi(a'_1))) - (G_2(\Phi(b_1)) + G_2(\Phi(b'_1))) &= \\ G_2(\Phi(a_1)) + G_2(\Phi(a'_1)) - G_2(\Phi(b_1)) - G_2(\Phi(b'_1)) &= \\ (G_2(\Phi(a_1)) - G_2(\Phi(b_1))) + (G_2(\Phi(a'_1)) - G_2(\Phi(b'_1))) &= \\ \Psi(\overline{(a_1, b_1)}) + \Psi(\overline{(a'_1, b'_1)}) &.\end{aligned}$$

Logo, Ψ é homomorfismo de grupos.

Para mostrar que o diagrama comuta, seja $a_1 \in H_1$, então

$$\begin{aligned}\Psi \circ G_1(a_1) &= \Psi(G_1(a_1)) = \Psi(\overline{(a_1 + h_1, h_1)}) = G_2(\Phi(a_1 + h_1)) - G_2(\Phi(h_1)) = \\ G_2(\Phi(a_1) + \Phi(h_1)) - G_2(\Phi(h_1)) &= G_2(\Phi(a_1)) + G_2(\Phi(h_1)) - G_2(\Phi(h_1)) = \\ G_2(\Phi(a_1)) &= G_2 \circ \Phi(a_1) \Rightarrow \Psi \circ G_1 = G_2 \circ \Phi.\end{aligned}$$

Resta mostrar a unicidade de Ψ . Suponha que $\Psi' : K(H_1) \rightarrow K(H_2)$ satisfaz as hipóteses do Teorema. Seja $\overline{(a_1, b_1)} \in K(H_1)$. Pela Proposição 1.3(iv) $\overline{(a_1, b_1)} = G_1(a_1) - G_1(b_1)$.

Logo,

$$\Psi' \left(\overline{(a_1, b_1)} \right) = \Psi'(G_1(a_1) - G_1(b_1)) = \Psi'(G_1(a_1)) + \Psi'(-G_1(b_1)),$$

pois Ψ' é homomorfismo de grupos. Também porque Ψ' é homomorfismo, temos que

$$\Psi'(-G_1(b_1)) = -\Psi'(G_1(b_1)) \Rightarrow \Psi' \left(\overline{(a_1, b_1)} \right) = \Psi'(G_1(a_1)) - \Psi'(G_1(b_1)).$$

Como $\Psi' \circ G_1 = G_2 \circ \Phi$, temos que

$$\Psi' \left(\overline{(a_1, b_1)} \right) = G_2(\Phi(a_1)) - G_2(\Phi(b_1)) = \Psi \left(\overline{(a_1, b_1)} \right).$$

Isto mostra que $\Psi' = \Psi$. $\square$

Capítulo 2

Fibrados Vetoriais

Neste capítulo apresentamos alguns elementos da teoria dos fibrados vetoriais, que serão utilizados principalmente no estudo do índice generalizado, feito no Capítulo 4.

2.1 Definição e isomorfismo de fibrados vetoriais

Nesta seção definimos os conceitos de fibrado vetorial e de isomorfismo de fibrados vetoriais, e ilustramos essas definições com alguns exemplos.

Definição 2.1 Um *fibrado vetorial* é uma terna $\xi = (E, \pi, X)$, onde E e X são espaços topológicos e $\pi : E \rightarrow X$ é uma função contínua e sobrejetiva, que satisfaz:

(a) Para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(\{x\}) \subset E$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita. Denotamos $\pi^{-1}(\{x\})$ por E_x e dizemos que E_x é a *fibra de E sobre X* .

(b) Para cada $x \in X$ existem um aberto $U \subset X$ com $x \in U$, um número $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes condições:

1- $p_1 \circ h = \pi$, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada.

2- Para cada $x' \in U$ fixado, a restrição de h a $E_{x'} = \pi^{-1}(\{x'\})$, $h|_{E_{x'}} : E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Observação 2.1 (1) Chamamos E de *espaço total* e X de *base* do fibrado $\xi = (E, \pi, X)$.

(2) A propriedade (b) da Definição 2.1 é chamada de *trivialidade local* de ξ e a propriedade

(b-1) é equivalente a dizer que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & U & \end{array}$$

Exemplo 2.1 Seja V um espaço vetorial real de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Então a terna $\xi = (X \times V, \pi, X)$, onde

$$\begin{aligned}\pi : X \times V &\rightarrow X \\ (x, v) &\mapsto x\end{aligned}$$

é um fibrado vetorial com base X .

De fato, note que π é uma função contínua e sobrejetiva. Note também que:

(a) Para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times V$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita n .

(b) Seja $x \in X$ fixado. Como V é um espaço vetorial real de dimensão n , V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal isomorfismo. Tome $U = X$, e seja

$$\begin{aligned}h : \pi^{-1}(U) = X \times V &\rightarrow U \times \mathbb{R}^n = X \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto (x, \varphi(v))\end{aligned}$$

Temos que h é função contínua com inversa

$$\begin{aligned}h^{-1} : U \times \mathbb{R}^n = X \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \pi^{-1}(U) = X \times V \\ (x, u) &\mapsto (x, \varphi^{-1}(u))\end{aligned}$$

contínua também. Logo, h é homeomorfismo.

Observe que

$$p_1 \circ h(x, v) = p_1(x, \varphi(v)) = x = \pi(x, v) \Rightarrow p_1 \circ h = \pi.$$

Para cada $x' \in U = X$ fixado, $h|_{\pi^{-1}(\{x'\})} : \{x'\} \times V \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo $\xi = (X \times V, \pi, X)$ é um fibrado vetorial.

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, a terna $\theta_n = (X \times \mathbb{R}^n, \pi_n, X)$, onde

$$\begin{aligned}\pi_n : X \times \mathbb{R}^n &\rightarrow X \\ (x, v) &\mapsto x\end{aligned}$$

é um fibrado vetorial com base X . Esse fibrado é chamado *fibrado vetorial trivial sobre X de dimensão n* ou simplesmente *fibrado trivial*. $\square$

Definição 2.2 Dados dois fibrados vetoriais com base X , $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$, dizemos que ξ é *isomorfo* a η se existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow F$ que satisfaz:

(a) $\rho \circ h = \pi$.

(b) Para cada $x \in X$, a restrição de h a E_x , $h|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$, é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Observação 2.2 A condição (a) da Definição 2.2 é equivalente a dizer que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & F \\ & \searrow \pi & \swarrow \rho \\ & X & \end{array}$$

Lema 2.1 A relação

$$\xi \approx \eta \Leftrightarrow \xi \text{ é isomorfo a } \eta$$

é uma relação de equivalência no conjunto dos fibrados vetoriais com base X .

Demonstração: Devemos mostrar que a relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva: Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Tome $h = Id_E : E \rightarrow E$. Temos que h é homeomorfismo e para cada $x \in X$, $h|_{E_x} = Id_{E_x} : E_x \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Como

$$\pi \circ h = \pi \circ Id_E = \pi,$$

temos que ξ é isomorfo a ele mesmo, isto é, $\xi \approx \xi$.

Simétrica: Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X e suponha que $\xi \approx \eta$. Isto significa que existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow F$ tal que $\rho \circ h = \pi$ e para cada $x \in X$, $h|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Seja $h' = h^{-1} : F \rightarrow E$. Temos que h' é homeomorfismo. Note que

$$\pi \circ h' = \pi \circ h^{-1} = (\rho \circ h) \circ h^{-1} = \rho \Rightarrow \pi \circ h' = \rho.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h'|_{F_x} = h|_{F_x}^{-1} = (h|_{E_x})^{-1} : F_x \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Logo η é isomorfo a ξ , isto é, $\eta \approx \xi$.

Transitiva: Sejam $\xi = (E, \pi, X)$, $\eta = (F, \rho, X)$ e $\psi = (G, \nu, X)$ fibrados vetoriais com base X e suponha que $\xi \approx \eta$ e $\eta \approx \psi$. Isto significa que existem homeomorfismos $h_1 : E \rightarrow F$ e $h_2 : F \rightarrow G$ tais que:

(a) $\rho \circ h_1 = \pi$ e $\nu \circ h_2 = \rho$.

(b) Para cada $x \in X$, $h_1|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ e $h_2|_{F_x} : F_x \rightarrow G_x$ são isomorfismos de espaços vetoriais.

Seja $h = h_2 \circ h_1 : E \rightarrow G$. Temos que h é homeomorfismo, pois é a composição de homeomorfismos. Note que

$$\nu \circ h = \nu \circ (h_2 \circ h_1) = (\nu \circ h_2) \circ h_1 = \rho \circ h_1 = \pi \Rightarrow \nu \circ h = \pi.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h|_{E_x} = (h_2 \circ h_1)|_{E_x} = h_2|_{F_x} \circ h_1|_{E_x} : E_x \rightarrow G_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois é a composição de isomorfismos de espaços vetoriais. Logo ξ é isomorfo a ψ , isto é, $\xi \approx \psi$.

Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Exemplo 2.2 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão $n \in \mathbb{N}$ e $\xi = (X \times V, \pi, X)$, onde*

$$\begin{aligned}\pi : X \times V &\rightarrow X \\ (x, v) &\mapsto x\end{aligned}$$

Então $\xi \approx \theta_n$.

De fato, como V tem dimensão n , existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tome

$$\begin{aligned}h : X \times V &\rightarrow X \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\mapsto (x, \varphi(v))\end{aligned}$$

Temos que h é contínua, com inversa

$$\begin{aligned}h^{-1} : X \times \mathbb{R}^n &\rightarrow X \times V \\ (x, u) &\mapsto (x, \varphi^{-1}(u))\end{aligned}$$

contínua. Logo h é homeomorfismo. Note que

$$\pi_n \circ h(x, v) = \pi_n(x, \varphi(v)) = x = \pi(x, v) \Rightarrow \pi_n \circ h = \pi.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h|_{\pi^{-1}(\{x\})} : \{x\} \times V \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Logo $\xi \approx \theta_n$. $\square$

Pelo Lema 2.1, podemos dividir o conjunto dos fibrados vetoriais com base X em classes de equivalência. Se $\xi = (E, \pi, X)$ é um fibrado vetorial com base X , vamos denotar a classe de equivalência de ξ por $\langle \xi \rangle$. Logo $\langle \xi \rangle = \{\eta = (F, \rho, X) \mid \eta \text{ é isomorfo a } \xi\}$.

Seja $Vect(X) = \{\langle \xi \rangle \mid \xi \text{ é fibrado vetorial com base } X\}$.

2.2 K - Teoria para fibrados vetoriais

Nesta seção vamos definir uma operação no conjunto $Vect(X)$ de modo a tornar $Vect(X)$ um semigrupo abeliano com elemento neutro. A K - Teoria para fibrados vetoriais é a construção de um grupo abeliano $K(X)$ a partir de $Vect(X)$.

Definição 2.3 Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . A terna $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e

$$\begin{aligned}\nu : G &\rightarrow X \\ (e, f) &\mapsto \pi(e) = \rho(f)\end{aligned}$$

é chamada de *soma direta* do fibrado ξ com o fibrado η .

Lema 2.2 A terna $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$ é um fibrado vetorial com base X .

Demonstração: Primeiramente observe que a função ν é contínua e sobrejetiva. De fato, dado $x \in X$, como π e ρ são sobrejetivas, existem $e \in E$ e $f \in F$ tais que $\pi(e) = x = \rho(f)$. Logo $(e, f) \in G$ e $\nu(e, f) = \pi(e) = x$.

Para cada $x \in X$, $\nu^{-1}(\{x\}) = E_x \times F_x$ tem uma estrutura de espaço vetorial real de dimensão finita, pois E_x e F_x são espaços vetoriais reais de dimensão finita.

Seja $x \in X$ fixado. Como ξ e η são fibrados vetoriais, existem abertos $U \subset X$ e $V \subset X$ com $x \in U \cap V$, números naturais m e n e homeomorfismos $h_1 : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, $h_2 : \rho^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^m$ tais que:

1- $p_1 \circ h_1 = \pi$ e $p'_1 \circ h_2 = \rho$, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ e $p'_1 : V \times \mathbb{R}^m \rightarrow V$ são projeções na primeira coordenada.

2- Para cada $x' \in U$ fixado, $h_1|_{E_{x'}}$ é isomorfismo de espaços vetoriais e para cada $x'' \in V$ fixado, $h_2|_{F_{x''}}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Tome $W = U \cap V \subset X$. Temos que W é aberto e $x \in W$.

Observando que $\nu^{-1}(W) = \{(e, f) \in \pi^{-1}(U) \times \rho^{-1}(V) \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e identificando $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ com $\mathbb{R}^{n+m}$, definimos

$$\begin{aligned}h : \nu^{-1}(W) &\rightarrow W \times \mathbb{R}^{n+m} \\ (e, f) &\mapsto (\nu(e, f), p_2 \circ h_1(e), p'_2 \circ h_2(f))\end{aligned}$$

onde $p_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $p'_2 : V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ são projeções na segunda coordenada.

Temos que h é contínua com inversa

$$\begin{aligned}h^{-1} : W \times \mathbb{R}^{n+m} &\rightarrow \nu^{-1}(W) \\ (w, u, v) &\mapsto (h_1^{-1}(w, u), h_2^{-1}(w, v))\end{aligned}$$

contínua. Logo h é homeomorfismo.

Note que

$$p''_1 \circ h(e, f) = p''_1(\nu(e, f), p_2 \circ h_1(e), p'_2 \circ h_2(f)) = \nu(e, f) \Rightarrow p''_1 \circ h = \nu,$$

onde $p''_1 : W \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow W$ é a projeção na primeira coordenada.

Seja $x' \in W$ fixado. Temos que $h|_{\nu^{-1}(\{x'\})} : E_{x'} \times F_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^{n+m}$ é isomorfismo de espaços

vetoriais.

Logo $\xi \oplus \eta$ é fibrado vetorial com base X . $\square$

Exemplo 2.3 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $\theta_{m+n} \approx \theta_m \oplus \theta_n$.*

De fato, temos que $\theta_m \oplus \theta_n = (G, \nu, X)$, onde $G = \{((x, u), (x, v)) \mid x \in X, u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^n\}$ e

$$\begin{aligned} \nu : G &\rightarrow X \\ ((x, u), (x, v)) &\mapsto x \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow X \times \mathbb{R}^{m+n} \\ ((x, u), (x, v)) &\mapsto (x, (u, v)) \end{aligned}$$

Temos que h é contínua com inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : X \times \mathbb{R}^{m+n} &\rightarrow G \\ (x, (u, v)) &\mapsto ((x, u), (x, v)) \end{aligned}$$

contínua. Logo h é homeomorfismo.

Note que

$$\pi_{m+n} \circ h((x, u), (x, v)) = \pi_{m+n}(x, (u, v)) = x = \nu((x, u), (x, v)) \Rightarrow \pi_{m+n} \circ h = \nu.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h|_{\nu^{-1}(\{x\})} : (\{x\} \times \mathbb{R}^m) \times (\{x\} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^{m+n}$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Logo, $\theta_m \oplus \theta_n$ é isomorfo a θ_{m+n} . $\square$

Teorema 2.1 *A aplicação*

$$\begin{aligned} + : Vect(X) \times Vect(X) &\rightarrow Vect(X) \\ (\langle \xi \rangle, \langle \eta \rangle) &\mapsto \langle \xi \oplus \eta \rangle \end{aligned}$$

define uma operação no conjunto $Vect(X)$ que o torna um semigrupo abeliano com elemento neutro $\langle \theta_0 \rangle$.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que a aplicação $+$ está bem definida. Para isso, sejam $\xi = (E, \pi, X)$, $\xi' = (E', \pi', X)$, $\eta = (F, \rho, X)$ e $\eta' = (F', \rho', X)$ fibrados vetoriais com base X tais que $\langle \xi \rangle = \langle \xi' \rangle$ e $\langle \eta \rangle = \langle \eta' \rangle$. Devemos mostrar que $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \xi' \oplus \eta' \rangle$.

Por hipótese, existem homeomorfismos $h_1 : E \rightarrow E'$ e $h_2 : F \rightarrow F'$ tais que:

(a) $\pi' \circ h_1 = \pi$ e $\rho' \circ h_2 = \rho$.

(b) Para cada $x \in X$, $h_{1|E_x} : E_x \rightarrow E'_x$ e $h_{2|F_x} : F_x \rightarrow F'_x$ são isomorfismos de espaços

vetoriais.

Observamos que:

(1) $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu(e, f) = \pi(e) = \rho(f)$.

(2) $\xi' \oplus \eta' = (G', \nu', X)$, onde $G' = \{(e', f') \in E' \times F' \mid \pi'(e') = \rho'(f')\}$ e $\nu' : G' \rightarrow X$, $\nu'(e', f') = \pi'(e') = \rho'(f')$.

Defina

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow G' \\ (e, f) &\mapsto (h_1(e), h_2(f)) \end{aligned}$$

h está bem definida pois se $\pi(e) = \rho(f)$ então $\pi'(h_1(e)) = \pi(e) = \rho(f) = \rho'(h_2(f))$. Também temos que h é função contínua, com inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : G' &\rightarrow G \\ (e', f') &\mapsto (h_1^{-1}(e'), h_2^{-1}(f')) \end{aligned}$$

contínua. Logo, h é homeomorfismo. Note que

$$\nu' \circ h(e, f) = \nu'(h_1(e), h_2(f)) = \pi'(h_1(e)) = \pi(e) = \nu(e, f) \Rightarrow \nu' \circ h = \nu.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h|_{G_x} : G_x = E_x \times F_x \rightarrow G'_x = E'_x \times F'_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois $h_1|_{E_x} : E_x \rightarrow E'_x$ e $h_2|_{F_x} : F_x \rightarrow F'_x$ são isomorfismos de espaços vetoriais.

Logo, os fibrados $\xi \oplus \eta$ e $\xi' \oplus \eta'$ são isomorfos, isto é, $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \xi' \oplus \eta' \rangle$.

Portanto a aplicação $+$ define uma operação em $Vect(X)$.

Vamos mostrar agora que o par $(Vect(X), +)$ é um semigrupo abeliano com elemento neutro $\langle \theta_0 \rangle$.

Associatividade da soma: Sejam $\xi = (E, \pi, X)$, $\eta = (F, \rho, X)$ e $\psi = (L, \sigma, X)$ fibrados vetoriais com base X . Devemos mostrar que

$$(\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle) + \langle \psi \rangle = \langle \xi \rangle + (\langle \eta \rangle + \langle \psi \rangle) \Leftrightarrow \langle (\xi \oplus \eta) \oplus \psi \rangle = \langle \xi \oplus (\eta \oplus \psi) \rangle.$$

Observamos que:

(1) $\xi \oplus \eta = (G_1, \nu_1, X)$, onde $G_1 = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e $\nu_1 : G_1 \rightarrow X$, $\nu_1(e, f) = \pi(e) = \rho(f)$.

(2) $\eta \oplus \psi = (G_2, \nu_2, X)$, onde $G_2 = \{(f, l) \in F \times L \mid \rho(f) = \sigma(l)\}$ e $\nu_2 : G_2 \rightarrow X$, $\nu_2(f, l) = \rho(f) = \sigma(l)$.

Portanto, temos que:

(3) $(\xi \oplus \eta) \oplus \psi = (G, \nu, X)$, onde $G = \{((e, f), l) \in (E \times F) \times L \mid \pi(e) = \rho(f) = \sigma(l)\}$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu((e, f), l) = \pi(e) = \rho(f) = \sigma(l)$.

(4) $\xi \oplus (\eta \oplus \psi) = (G', \nu', X)$, onde $G' = \{(e, (f, l)) \in E \times (F \times L) \mid \pi(e) = \rho(f) = \sigma(l)\}$ e $\nu' : G' \rightarrow X$, $\nu'(e, (f, l)) = \pi(e) = \rho(f) = \sigma(l)$.

Definimos

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow G' \\ ((e, f), l) &\mapsto (e, (f, l)) \end{aligned}$$

Temos que h é contínua com inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : G' &\rightarrow G \\ (e, (f, l)) &\mapsto ((e, f), l) \end{aligned}$$

contínua. Logo h é homeomorfismo. Note que

$$\nu' \circ h((e, f), l) = \nu'(e, (f, l)) = \pi(e) = \nu((e, f), l) \Rightarrow \nu' \circ h = \nu.$$

Fixado $x \in X$, é claro que $h|_{G_x} : G_x \rightarrow G'_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo os fibrados $(\xi \oplus \eta) \oplus \psi$ e $\xi \oplus (\eta \oplus \psi)$ são isomorfos, isto é, $\langle (\xi \oplus \eta) \oplus \psi \rangle = \langle \xi \oplus (\eta \oplus \psi) \rangle$.

Comutatividade da soma: Sejam $\xi = (E, \pi, X)$, $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . Devemos mostrar que

$$\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \xi \rangle \Leftrightarrow \langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \eta \oplus \xi \rangle.$$

Observamos que:

(1) $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu(e, f) = \pi(e) = \rho(f)$.

(2) $\eta \oplus \xi = (G', \nu', X)$, onde $G' = \{(f, e) \in F \times E \mid \rho(f) = \pi(e)\}$ e $\nu' : G' \rightarrow X$, $\nu'(f, e) = \rho(f) = \pi(e)$.

Defina

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow G' \\ (e, f) &\mapsto (f, e) \end{aligned}$$

Temos que h é contínua com inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : G' &\rightarrow G \\ (f, e) &\mapsto (e, f) \end{aligned}$$

contínua. Logo h é homeomorfismo. Note que

$$\nu' \circ h(e, f) = \nu'(f, e) = \rho(f) = \nu(e, f) \Rightarrow \nu' \circ h = \nu.$$

Fixado $x \in X$, é claro que $h|_{G_x} : G_x = E_x \times F_x \rightarrow G'_x = F_x \times E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo, os fibrados $\xi \oplus \eta$ e $\eta \oplus \xi$ são isomorfos, isto é $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \eta \oplus \xi \rangle$.

Existência de elemento neutro para soma: Seja $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial com base X . Vamos mostrar que

$$\langle \xi \rangle + \langle \theta_0 \rangle = \langle \xi \rangle = \langle \theta_0 \rangle + \langle \xi \rangle \Leftrightarrow \langle \xi \oplus \theta_0 \rangle = \langle \xi \rangle = \langle \theta_0 \oplus \xi \rangle.$$

Logo, $\langle \theta_0 \rangle$ é o elemento neutro do semigrupo abeliano $(Vect(X), +)$.

Lembramos que $\theta_0 = (X \times \{0\}, \pi_0, X)$, onde $\pi_0 : X \times \{0\} \rightarrow X$, $\pi_0(x, 0) = x$.

Logo, $\xi \oplus \theta_0 = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, (x, 0)) \in E \times (X \times \{0\}) \mid \pi(e) = x\}$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu(e, (x, 0)) = \pi(e) = x$.

Defina

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow E \\ (e, (x, 0)) &\mapsto e \end{aligned}$$

Temos que h é contínua com inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : E &\rightarrow G \\ e &\mapsto (e, (\pi(e), 0)) \end{aligned}$$

contínua. Logo, h é homeomorfismo. Note que

$$\pi \circ h(e, (x, 0)) = \pi(e) = \nu(e, (x, 0)) \Rightarrow \pi \circ h = \nu.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h|_{G_x} : G_x = E_x \times (\{x\} \times \{0\}) \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo os fibrados $\xi \oplus \theta_0$ e ξ são isomorfos, isto é $\langle \xi \oplus \theta_0 \rangle = \langle \xi \rangle$.

Como $(Vect(X), +)$ é semigrupo abeliano, temos que

$$\langle \theta_0 \rangle + \langle \xi \rangle = \langle \xi \rangle + \langle \theta_0 \rangle = \langle \xi \oplus \theta_0 \rangle = \langle \xi \rangle \Rightarrow \langle \theta_0 \oplus \xi \rangle = \langle \xi \rangle.$$

Concluimos que o par $(Vect(X), +)$ é semigrupo abeliano com elemento neutro $\langle \theta_0 \rangle$. $\square$

Vamos denotar por $K(X) = K(Vect(X))$ o grupo de Grothendieck de $Vect(X)$. Seja $G : Vect(X) \rightarrow K(X)$ a função de Grothendieck de $Vect(X)$. Vamos denotar por $[\xi]$ a imagem de um elemento $\langle \xi \rangle \in Vect(X)$ pela função G , isto é, $G(\langle \xi \rangle) = [\xi]$.

Pela Proposição 1.3(i), temos que vale:

$$G(\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle) = G(\langle \xi \rangle) + G(\langle \eta \rangle) \Leftrightarrow [\xi \oplus \eta] = [\xi] + [\eta], \forall \langle \xi \rangle, \langle \eta \rangle \in Vect(X).$$

2.3 Fibrados restritos e fibrados induzidos

Nesta seção mostramos como é possível construir fibrados vetoriais a partir de outros fibrados vetoriais (os fibrados restritos). Também mostramos como a partir de uma função contínua e um fibrado vetorial pode-se construir um outro fibrado vetorial (os fibrados induzidos).

O principal resultado desta seção é mostrar que se $\varphi : Y \rightarrow X$ é uma função contínua, então existe um homomorfismo de semigrupos $\varphi^* : Vect(X) \rightarrow Vect(Y)$.

Definição 2.4 Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Seja $Y \subset X$ um subconjunto de X . A terna $\xi|_Y = (E|_Y, \pi|_Y, Y)$, onde $E|_Y = \pi^{-1}(Y) \subset E$ e

$$\begin{aligned} \pi|_Y &= \pi|_{E|_Y} : E|_Y \rightarrow Y \\ e &\mapsto \pi(e) \end{aligned}$$

é chamada de *fibrado vetorial ξ restrito a Y* .

Lema 2.3 A terna $\xi|_Y = (E|_Y, \pi|_Y, Y)$ é um fibrado vetorial com base Y .

Demonstração: Note que $Y \subset X$ é um espaço topológico com a topologia induzida de X e $E|_Y \subset E$ é um espaço topológico com a topologia induzida de E . Observe também que a função $\pi|_Y$ é contínua e sobrejetiva, pois dado $y \in Y$, existe $e \in E$ tal que $\pi(e) = y$, logo $e \in E|_Y$ e $\pi|_Y(e) = y$.

Para cada $y \in Y$, $\pi|_Y^{-1}(\{y\}) = \pi^{-1}(\{y\}) \cap E|_Y = \pi^{-1}(\{y\})$. Logo $(E|_Y)_y = E_y$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita.

Seja $y \in Y$ fixado. Como $y \in X$, existem um aberto $U \subset X$ com $y \in U$, um número $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tais que:

- (a) $p_1 \circ h = \pi$, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada.
- (b) Para cada $x' \in U$, $h|_{E_{x'}} : E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Seja $V = U \cap Y$. Temos que $V \subset Y$ é um aberto de Y e $y \in V$. Note que $\pi^{-1}(V) = \pi|_Y^{-1}(V)$. Definimos $h' = h|_{\pi|_Y^{-1}(V)} : \pi|_Y^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$. Temos que h' é homeomorfismo pois $h(\pi^{-1}(V)) = V \times \mathbb{R}^n$. Também é claro que $p'_1 \circ h' = \pi|_Y$, onde $p'_1 : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$ é a projeção na primeira coordenada. Seja $y' \in V$ fixado, então $h'|_{(E|_Y)_{y'}} = h|_{E_{y'}} : E_{y'} \rightarrow \{y'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo a terna $\xi|_Y = (E|_Y, \pi|_Y, Y)$ é um fibrado vetorial com base Y . $\square$

Definição 2.5 Sejam X e Y espaços topológicos e $\varphi : Y \rightarrow X$ uma função contínua. Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . O *fibrado vetorial induzido por φ* é a terna $\varphi^*\xi = (\varphi^*E, \pi_*, Y)$, onde $\varphi^*E = \{(y, e) \in Y \times E \mid \varphi(y) = \pi(e)\} \subset Y \times E$ tem a topologia induzida de $Y \times E$ e

$$\begin{aligned} \pi_* : \varphi^*E &\rightarrow Y \\ (y, e) &\mapsto y \end{aligned}$$

Lema 2.4 A terna $\varphi^*\xi = (\varphi^*E, \pi_*, Y)$ é um fibrado vetorial com base Y .

Demonstração: Observe primeiramente que π_* é uma função contínua e sobrejetiva. De fato, dado $y \in Y$, como $\varphi(y) \in X$, existe $e \in E$ tal que $\pi(e) = \varphi(y)$. Logo $(y, e) \in \varphi^*E$ e $\pi_*(y, e) = y$.

Para cada $y \in Y$, $\pi_*^{-1}(\{y\}) = \{y\} \times E_{\varphi(y)}$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita pois $E_{\varphi(y)}$ é um espaço vetorial real de dimensão finita.

Seja $y \in Y$ fixado. Como $\varphi(y) \in X$, existem um aberto $U \subset X$ com $\varphi(y) \in U$, um número $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tais que:

(a) $p_1 \circ h = \pi$, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada.

(b) Para cada $x' \in U$, $h|_{E_{x'}} : E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Seja $V = \varphi^{-1}(U)$. Temos que $V \subset Y$ é aberto em Y , pois U é aberto em X e φ é função contínua. Como $\varphi(y) \in U$, temos que $y \in V$.

Observando que $\pi_*^{-1}(V) = \{(y, e) \in V \times E \mid \varphi(y) = \pi(e)\}$, definimos

$$h' : \pi_*^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$$

$$(y, e) \mapsto (y, p_2(h(e)))$$

onde $p_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção na segunda coordenada. Temos que h' é função contínua com inversa

$$h'^{-1} : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_*^{-1}(V)$$

$$(y, u) \mapsto (y, h^{-1}(\varphi(y), u))$$

contínua também. Logo, h' é homeomorfismo.

Seja $p'_1 : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$ a projeção na primeira coordenada. Note que

$$p'_1 \circ h'(y, e) = p'_1(y, h^{-1}(\varphi(y), u)) = y = \pi_*(y, e) \Rightarrow p'_1 \circ h' = \pi_*.$$

Seja $y' \in V$ fixado. Temos que $h'|_{\pi_*^{-1}(\{y'\})} : \{y'\} \times E_{\varphi(y')} \rightarrow \{y'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois $h|_{E_{\varphi(y')}} : E_{\varphi(y')} \rightarrow \{\varphi(y')\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Concluimos que $\varphi^*\xi = (\varphi^*E, \pi_*, Y)$ é fibrado vetorial com base Y . $\square$

Exemplo 2.4 Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço de X com a topologia induzida de X . Seja $i : Y \rightarrow X$ a função inclusão, isto é, $i(y) = y$, $\forall y \in Y$.

Se $\xi = (E, \pi, X)$ é um fibrado vetorial com base X , então os fibrados $i^*\xi = (i^*E, \pi_*, Y)$ e $\xi|_Y = (E|_Y, \pi|_Y, Y)$ são isomorfos.

De fato, temos por definição que $\begin{cases} i^*E = \{(y, e) \in Y \times E \mid y = \pi(e)\} \\ E|_Y = \pi^{-1}(Y) = \{e \in E \mid \pi(e) \in Y\} \end{cases}$ e $\begin{cases} \pi_*(y, e) = y \\ \pi|_Y(e) = \pi(e) \end{cases}$.

Definimos

$$h : i^*E \rightarrow E|_Y$$

$$(y, e) \mapsto e$$

Temos que h é função contínua com inversa

$$\begin{aligned} h^{-1} : E|_Y &\rightarrow i^*E \\ e &\mapsto (\pi(e), e) \end{aligned}$$

contínua. Logo h é homeomorfismo.

Note que

$$\pi|_Y \circ h(y, e) = \pi|_Y(e) = \pi(e) = y = \pi_*(y, e) \Rightarrow \pi|_Y \circ h = \pi_*.$$

Fixado $y \in Y$ temos que $h_{\{y\} \times E_y} : \{y\} \times E_y \rightarrow E_y$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Isto mostra que os fibrados $i^*\xi = (i^*E, \pi_*, Y)$ e $\xi|_Y = (E|_Y, \pi|_Y, Y)$ são isomorfos. $\square$

Teorema 2.2 *Sejam X e Y espaços topológicos e $\varphi : Y \rightarrow X$ uma função contínua. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi^* : Vect(X) &\rightarrow Vect(Y) \\ \langle \xi \rangle &\mapsto \langle \varphi^*\xi \rangle \end{aligned}$$

é um homomorfismo de semigrupos.

Demonstração: Primeiramente devemos mostrar que φ^* está bem definida. Para isso, sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X tais que $\langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle$. Vamos mostrar que $\langle \varphi^*\xi \rangle = \langle \varphi^*\eta \rangle$.

Por definição, temos que:

- (1) $\varphi^*\xi = (\varphi^*E, \pi_*, Y)$, onde $\varphi^*E = \{(y, e) \in Y \times E \mid \varphi(y) = \pi(e)\}$ e $\pi_* : \varphi^*E \rightarrow Y$, $\pi_*(y, e) = y$.
- (2) $\varphi^*\eta = (\varphi^*F, \rho_*, Y)$, onde $\varphi^*F = \{(y, f) \in Y \times F \mid \varphi(y) = \rho(e)\}$ e $\rho_* : \varphi^*F \rightarrow Y$, $\rho_*(y, f) = y$.

Como $\langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle$, existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow F$ tal que:

- (a) $\rho \circ h = \pi$.
- (b) Para cada $x \in X$, $h|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Defina

$$\begin{aligned} h' : \varphi^*E &\rightarrow \varphi^*F \\ (y, e) &\mapsto (y, h(e)) \end{aligned}$$

Temos que h' está bem definida, pois se $\varphi(y) = \pi(e)$, então $\rho(h(e)) = \pi(e) = \varphi(y)$. Também temos que h' é contínua com inversa

$$\begin{aligned} h'^{-1} : \varphi^*F &\rightarrow \varphi^*E \\ (y, f) &\mapsto (y, h^{-1}(f)) \end{aligned}$$

contínua. Logo, h' é homeomorfismo.

Note que

$$\rho_* \circ h'(y, e) = \rho_*(y, h(e)) = y = \pi_*(y, e) \Rightarrow \rho_* \circ h' = \pi_*.$$

Fixado $y \in Y$, temos que $h'_{|\pi_*^{-1}(\{y\})} : \{y\} \times E_{\varphi(y)} \rightarrow \{y\} \times F_{\varphi(y)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois $h_{|E_{\varphi(y)}} : E_{\varphi(y)} \rightarrow F_{\varphi(y)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Concluimos que os fibrados $\varphi^*\xi$ e $\varphi^*\eta$ são isomorfos, isto é, $\langle \varphi^*\xi \rangle = \langle \varphi^*\eta \rangle$. Portanto φ^* está bem definida.

Agora, vamos mostrar que φ^* é homomorfismo de semigrupos. Para isso, sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . Devemos mostrar que

$$\begin{aligned} \varphi^*(\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle) &= \varphi^*(\langle \xi \rangle) + \varphi^*(\langle \eta \rangle) \Leftrightarrow \varphi^*(\langle \xi \oplus \eta \rangle) = \langle \varphi^*\xi \rangle + \langle \varphi^*\eta \rangle \Leftrightarrow \\ &\langle \varphi^*(\xi \oplus \eta) \rangle = \langle \varphi^*\xi \oplus \varphi^*\eta \rangle. \end{aligned}$$

Observamos que:

(3) $\varphi^*\xi \oplus \varphi^*\eta = (G, \nu, Y)$, onde $G = \{((y, e), (y, f)) \in (Y \times E) \times (Y \times F) \mid \pi(e) = \varphi(y) = \rho(f)\}$ e $\nu : G \rightarrow Y$, $\nu((y, e), (y, f)) = y$.

(4) $\xi \oplus \eta = (G_1, \nu_1, X)$, onde $G_1 = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e $\nu_1 : G_1 \rightarrow X$, $\nu_1(e, f) = \pi(e) = \rho(f)$.

(5) $\varphi^*(\xi \oplus \eta) = (G', \nu', Y)$, onde $G' = \{(y, (e, f)) \in Y \times (E \times F) \mid \varphi(y) = \pi(e) = \rho(f)\}$ e $\nu' : G' \rightarrow Y$, $\nu'(y, (e, f)) = y$.

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{h} : G &\rightarrow G' \\ ((y, e), (y, f)) &\mapsto (y, (e, f)) \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{h}$ é função contínua com inversa

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{-1} : G' &\rightarrow G \\ (y, (e, f)) &\mapsto ((y, e), (y, f)) \end{aligned}$$

contínua. Logo, $\tilde{h}$ é homeomorfismo.

Note que

$$\nu' \circ \tilde{h}((y, e), (y, f)) = \nu'(y, (e, f)) = y = \nu((y, e), (y, f)) \Rightarrow \nu' \circ \tilde{h} = \nu.$$

Fixado $y \in Y$, é claro que $\tilde{h}_{|\nu^{-1}(\{y\})} : (\{y\} \times E_{\varphi(y)}) \times (\{y\} \times F_{\varphi(y)}) \rightarrow \{y\} \times (E_{\varphi(y)} \times F_{\varphi(y)})$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Concluimos que os fibrados $\varphi^*\xi \oplus \varphi^*\eta$ e $\varphi^*(\xi \oplus \eta)$ são isomorfos, isto é, $\langle \varphi^*\xi \oplus \varphi^*\eta \rangle = \langle \varphi^*(\xi \oplus \eta) \rangle$.

Portanto φ^* é homomorfismo de semigrupos. $\square$

Corolário 2.1 *Existe um único homomorfismo de grupos $K_\varphi : K(X) \rightarrow K(Y)$ que satisfaz*

$$K_\varphi([\xi]) = [\varphi^*\xi], \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X).$$

Demonstração: Segue do Teorema 1.7. $\square$

2.4 Seções de fibrados vetoriais

Nesta seção definimos o conceito de seção de um fibrado vetorial e apresentamos alguns resultados que serão usados posteriormente.

Definição 2.6 Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Uma *seção* de ξ é uma função contínua $s : X \rightarrow E$ que satisfaz: $\pi \circ s(x) = x$, $\forall x \in X$ (ou, equivalentemente, $s(x) \in E_x$, $\forall x \in X$).

Vamos denotar por $\Gamma(\xi) = \{s : X \rightarrow E \mid s \text{ é seção de } \xi\}$ o conjunto das seções de ξ .

Note que se s , s_1 e s_2 são seções de ξ , então para cada $x \in X$, $s(x), s_1(x), s_2(x) \in E_x$. Como E_x é um espaço vetorial real, a soma $s_1(x) + s_2(x)$ e a multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda s(x)$ ainda estão em E_x . Portanto estão bem definidas as funções:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto s_1(x) + s_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda s : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \lambda s(x) \end{aligned}$$

Proposição 2.1 *O conjunto $\Gamma(\xi)$ é um espaço vetorial real com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas abaixo:*

$$\begin{aligned} + : \Gamma(\xi) \times \Gamma(\xi) &\rightarrow \Gamma(\xi) \\ (s_1, s_2) &\mapsto s_1 + s_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \Gamma(\xi) &\rightarrow \Gamma(\xi) \\ (\lambda, s) &\mapsto \lambda s \end{aligned}$$

Demonstração: Basta mostrar que $s_1 + s_2 \in \Gamma(\xi)$ e $\lambda s \in \Gamma(\xi)$. Note que $s_1 + s_2$ e λs são funções contínuas e $s_1(x) + s_2(x), \lambda s(x) \in E_x$, $\forall x \in X$. Portanto, $s_1 + s_2, \lambda s \in \Gamma(\xi)$.

Logo $\Gamma(\xi)$ é um espaço vetorial real. $\square$

Proposição 2.2 *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Seja $x \in X$ fixado e suponha que $\dim E_x = n$. Então existem um aberto $U \subset X$ com $x \in U$ e funções contínuas $s_i : U \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ que satisfazem:*

- (1) *Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ vale: $s_i(y) \in E_y$, $\forall y \in U$.*
- (2) *$\{s_1(y), \dots, s_n(y)\} \subset E_y$ é uma base para E_y , $\forall y \in U$.*

Dizemos que as funções $s_i : U \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ formam uma *base local de ξ em x* .

Demonstração: Como ξ é fibrado vetorial, existem um aberto $U \subset X$ com $x \in U$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tais que $p_1 \circ h = \pi$ (onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada) e para cada $y \in U$, $h|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então $\{h^{-1}(y, e_1), \dots, h^{-1}(y, e_n)\}$ é base para E_y , para cada $y \in U$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, defina

$$\begin{aligned} s_i : U &\rightarrow E \\ y &\mapsto h^{-1}(y, e_i) \end{aligned}$$

Temos que s_i é função contínua, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e satisfaz:

- (1) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ vale: $s_i(y) \in E_y$, $\forall y \in U$.
- (2) $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\} \subset E_y$ é uma base para E_y , $\forall y \in U$. $\square$

Proposição 2.3 *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X e seja $x \in X$ fixado. Suponha que as funções $s_i : U \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ formam uma base local de ξ em x . Seja $s : U \rightarrow E$ uma função tal que $s(y) \in E_y$, $\forall y \in U$. Sejam $b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tais que $s(y) = \sum_{i=1}^n b_i(y)s_i(y)$, $\forall y \in U$.*

Então $s : U \rightarrow E$ é contínua se, e somente se, as funções $b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ são contínuas.

Demonstração: Suponha que a função $s : U \rightarrow E$ é contínua. Sejam $s'_i : U \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ base local de ξ em x dada pela demonstração da Proposição 2.2. Ou seja, $s'_i(y) = h^{-1}(y, e_i)$, $y \in U$, $i \in \{1, \dots, n\}$, onde $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é homeomorfismo satisfazendo as condições da Definição 2.1.

Temos que, para cada $y \in U$, existem números reais $\{b'_i(y), \dots, b'_n(y)\}$ tais que $s(y) = \sum_{i=1}^n b'_i(y)s'_i(y)$. Vamos mostrar que as funções $b'_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ são contínuas. De fato, seja $y \in U$ fixado. Como $h|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que

$$\begin{aligned} s(y) &= \sum_{i=1}^n b'_i(y)s'_i(y) = \sum_{i=1}^n b'_i(y)h^{-1}(y, e_i) = \sum_{i=1}^n h^{-1}(y, b'_i(y)e_i) = h^{-1}\left(y, \sum_{i=1}^n b'_i(y)e_i\right) = \\ &= h^{-1}(y, (b'_1(y), \dots, b'_n(y))). \end{aligned}$$

Logo, $h(s(y)) = (y, (b'_1(y), \dots, b'_n(y)))$, $\forall y \in U$. Como $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ e $s : U \rightarrow E$ são funções contínuas, temos que $b'_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ são funções contínuas.

Também temos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e para cada $y \in U$, existem números reais $\{a_{1i}(y), \dots, a_{ni}(y)\}$ tais que $s_i(y) = \sum_{j=1}^n a_{ji}(y)s'_j(y)$. Como $s_i : U \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ são funções contínuas, da mesma maneira, mostramos que as funções $a_{ji} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ são contínuas.

$$\text{Para cada } y \in U, \text{ seja } A(y) = \begin{pmatrix} a_{11}(y) & a_{12}(y) & \dots & a_{1n}(y) \\ a_{21}(y) & a_{22}(y) & \dots & a_{2n}(y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(y) & a_{n2}(y) & \dots & a_{nn}(y) \end{pmatrix}.$$

Então a aplicação $A : U \rightarrow GL_{n \times n}(\mathbb{R})$, $y \mapsto A(y)$ é contínua (note que a matriz $A(y)$ é a matriz de mudança da base $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ para base $\{s'_1(y), \dots, s'_n(y)\}$, logo é uma matriz invertível).

Como a aplicação $Inv : GL_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_{n \times n}(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$ é contínua, temos que a aplicação $Inv \circ A : U \rightarrow GL_{n \times n}(\mathbb{R})$, $y \mapsto A(y)^{-1}$ também é contínua.

Observe que, para cada $y \in U$,

$$(b'_1(y), \dots, b'_n(y)) = A(y) \begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(y) \\ \vdots \\ b_n(y) \end{pmatrix} \Rightarrow A(y)^{-1} \begin{pmatrix} b'_1(y) \\ b'_2(y) \\ \vdots \\ b'_n(y) \end{pmatrix} = (b_1(y), \dots, b_n(y)).$$

Com isso temos que as funções $b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ são contínuas.

Reciprocamente, se as funções $b_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ são contínuas, então $s : U \rightarrow E$ é contínua, pois $s(y) = \sum_{i=1}^n b_i(y)s_i(y)$, $\forall y \in U$. $\square$

Proposição 2.4 *Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Seja $x \in X$ fixado e suponha que $U \subset X$ é um aberto com $x \in U$ e $t_1, \dots, t_m : U \rightarrow X$ são funções contínuas que satisfazem:*

(1) *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ vale: $t_i(y) \in E_y$, $\forall y \in U$.*

(2) *$\{t_1(x), \dots, t_m(x)\} \subset E_x$ é um conjunto linearmente independente.*

Então existe um aberto $V \subset U$ com $x \in V$ tal que $\{t_1(y), \dots, t_m(y)\} \subset E_y$ é um conjunto linearmente independente, $\forall y \in V$.

Demonstração: Seja $n = \dim E_x$. Pela Proposição 2.2, existem um aberto $U' \subset X$ com $x \in U'$ e funções contínuas $s_i : U' \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, n\}$ que formam uma base local de ξ em x .

Seja $V' = U \cap U'$. Temos que V' é aberto e $x \in V'$. Seja $y \in V'$ fixado. Como o conjunto $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ é uma base de E_y , para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ existem números reais $\{a_{1j}(y), \dots, a_{nj}(y)\}$ tais que $t_j(y) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(y)s_i(y)$. Pela Proposição 2.3, as funções

$a_{ij} : V' \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ são contínuas.

Como $\{t_1(x), \dots, t_m(x)\}$ é conjunto linearmente independente a matriz

$$M(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nm}(x) \end{pmatrix}$$

tem uma submatriz $M'(x)$ de ordem $m \times m$ cujo determinante é não nulo.

Como as aplicações $M' : V' \rightarrow M_{m \times m}(\mathbb{R})$, $y \mapsto M'(y)$ e $\det : M_{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ são contínuas, também é contínua a aplicação $\det \circ M' : V' \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \det(M'(y))$. Como o determinante de $M'(x)$ é não nulo, existe um aberto $V \subset V'$ com $x \in V$, tal que o determinante de $M'(y)$ é não nulo, $\forall y \in V$.

Portanto, $V \subset U$ é um aberto com $x \in V$ e para $y \in V$ o conjunto $\{t_1(y), \dots, t_m(y)\}$ é linearmente independente. $\square$

Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . Suponha que $f : E \rightarrow F$ é uma função contínua que satisfaz:

(1) $\rho \circ f = \pi$.

(2) Para cada $x \in X$, $f|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ é homomorfismo de espaços vetoriais.

Por (2), para cada $x \in X$, a aplicação

$$\begin{aligned} f_x : E_x &\rightarrow F_x \\ e &\mapsto f(e) \end{aligned}$$

é homomorfismo de espaços vetoriais.

Seja $\bigcup_{x \in X} \text{Ker } f_x \subset E$ espaço topológico com a topologia induzida de E . Definimos a função $\sigma_1 : \bigcup_{x \in X} \text{Ker } f_x \rightarrow X$ da seguinte maneira: dado $h \in \bigcup_{x \in X} \text{Ker } f_x$, existe um único $x \in X$ tal que $h \in \text{Ker } f_x$. Então $\sigma_1(h) = x$. Temos que a função σ_1 é contínua e sobrejetiva. De fato, dado $x \in X$, tome 0_{E_x} o elemento neutro de E_x . Como $f_x : E_x \rightarrow F_x$ é homomorfismo de espaços vetoriais, $0_{E_x} \in \text{Ker } f_x$. Logo, $\sigma_1(0_{E_x}) = x$, o que mostra que σ_1 é sobrejetiva.

Fixado $x \in X$, temos que $\sigma_1^{-1}(\{x\}) = \text{Ker } f_x \subset E_x$ é um subespaço vetorial de E_x . Logo $\sigma_1^{-1}(\{x\})$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita.

Seja $\bigcup_{x \in X} \text{Im } f_x \subset F$ espaço topológico com a topologia induzida de F . Definimos a função $\sigma_2 : \bigcup_{x \in X} \text{Im } f_x \rightarrow X$ da seguinte maneira: dado $h \in \bigcup_{x \in X} \text{Im } f_x$, existe um único $x \in X$ tal que $h \in \text{Im } f_x$. Então $\sigma_2(h) = x$. Temos que a função σ_2 é contínua e sobrejetiva. De fato, dado $x \in X$, tome 0_{F_x} o elemento neutro de F_x . Como $f_x : E_x \rightarrow F_x$ é homomorfismo de espaços vetoriais, $0_{F_x} \in \text{Im } f_x$. Logo, $\sigma_2(0_{F_x}) = x$, o que mostra que σ_2 é sobrejetiva.

Fixado $x \in X$, temos que $\sigma_2^{-1}(\{x\}) = \text{Im } f_x \subset F_x$ é um subespaço vetorial de F_x . Logo $\sigma_2^{-1}(\{x\})$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita.

Proposição 2.5 *Suponha que a função $f : E \rightarrow F$ satisfaz, além de (1) e (2) acima, a condição*

(3) *Para cada $x \in X$ existe um aberto $U \subset X$ com $x \in U$ tal que $\dim \text{Ker } f_y = \dim \text{Ker } f_x$, $\forall y \in U$.*

Então as ternas $\text{Ker } f = (\bigcup_{x \in X} \text{Ker } f_x, \sigma_1, X)$ e $\text{Im } f = (\bigcup_{x \in X} \text{Im } f_x, \sigma_2, X)$ são fibrados vetoriais com base X .

Demonstração: Basta mostrarmos a propriedade de trivialidade local de $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.

Seja $x \in X$ fixado e sejam $m = \dim E_x$, $n = \dim F_x$. Pela Proposição 2.2 existem abertos $U_1, U_2 \subset X$ com $x \in U_1 \cap U_2$ e funções contínuas $s_i : U_1 \rightarrow E$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $t_j : U_2 \rightarrow F$, $j \in \{1, \dots, n\}$ que formam uma base local de ξ e η , respectivamente, em x .

Seja $k = \dim \text{Im } f_x$.

Como $\{s_1(x), \dots, s_m(x)\}$ é base de E_x , temos que $\text{Im } f_x = \text{span} \{f(s_1(x)), \dots, f(s_m(x))\}$. Renumerando os índices se necessário, podemos supor que $\{f(s_1(x)), \dots, f(s_k(x))\}$ é base para $\text{Im } f_x$.

Como $\text{Im } f_x \subset F_x$ e $\{t_1(x), \dots, t_n(x)\}$ é base para F_x , novamente renumerando os índices se necessário, podemos supor que $\{f(s_1(x)), \dots, f(s_k(x)), t_{k+1}(x), \dots, t_n(x)\}$ é uma base para F_x .

Seja $U_3 = U_1 \cap U_2$. Temos que $U_3 \subset X$ é aberto e $x \in U_3$. Também temos que as funções $f \circ s_1, \dots, f \circ s_k, t_{k+1}, \dots, t_n : U_3 \rightarrow F$ são contínuas e satisfazem

(1) Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $f \circ s_i(y) \in F_y$ e para cada $j \in \{k+1, \dots, n\}$, $t_j(y) \in F_y$, $\forall y \in U_3$.

(2) $\{f(s_1(x)), \dots, f(s_k(x)), t_{k+1}(x), \dots, t_n(x)\} \subset F_x$ é conjunto linearmente independente.

Pela Proposição 2.4, existe um aberto $U_4 \subset U_3$ com $x \in U_4$ tal que, para cada $y \in U_4$, o conjunto $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y)), t_{k+1}(y), \dots, t_n(y)\} \subset F_y$ é linearmente independente. Como $\dim F_y = \dim F_x = n$, temos que $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y)), t_{k+1}(y), \dots, t_n(y)\}$ forma uma base para F_y , $\forall y \in U_4$.

Por hipótese, existe um aberto $U \subset X$ com $x \in U$ tal que $\dim \text{Ker } f_y = \dim \text{Ker } f_x$, $\forall y \in U$.

Seja $U_5 = U \cap U_4$. Temos que $U_5 \subset X$ é aberto e $x \in U_5$.

Note que, para $y \in U_5$, $\begin{cases} \dim E_y = \dim E_x \\ \dim \text{Ker } f_y = \dim \text{Ker } f_x \end{cases}$.

Logo, $\forall y \in U_5$ vale

$$\dim E_y = \dim \text{Ker } f_y + \dim \text{Im } f_y \Rightarrow$$

$$\dim \text{Im } f_y = \dim E_y - \dim \text{Ker } f_y = \dim E_x - \dim \text{Ker } f_x = \dim \text{Im } f_x = k.$$

Como para $y \in U_5$, $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y))\}$ é conjunto linearmente independente, temos que $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y))\}$ é uma base para $\text{Im } f_y$, $\forall y \in U_5$.

Vamos agora mostrar a propriedade de trivialidade local de $\text{Im } f$.

Vamos definir $g : \sigma_2^{-1}(U_5) = \bigcup_{y \in U_5} \text{Im } f_y \rightarrow U_5 \times \mathbb{R}^k$ da seguinte forma: dado $h \in \bigcup_{y \in U_5} \text{Im } f_y$, existe um único $y \in U_5$ tal que $h \in \text{Im } f_y$. Como $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y))\}$ é base para $\text{Im } f_y$, existem únicos números reais $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ tais que $h = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(s_i(y))$. Definimos $g(h) = (y, (\lambda_1, \dots, \lambda_k))$. Temos que g é contínua.

A função

$$g^{-1} : U_5 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \bigcup_{y \in U_5} \text{Im } f_y$$

$$(y, (u_1, \dots, u_k)) \mapsto \sum_{i=1}^k u_i f(s_i(y))$$

está bem definida e é contínua.

Observe que:

$$(1) \ g^{-1} \circ g(h = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(s_i(y))) = g^{-1}(y, (\lambda_1, \dots, \lambda_k)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(s_i(y)) = h.$$

$$(2) \ g \circ g^{-1}(y, (u_1, \dots, u_k)) = g(\sum_{i=1}^k u_i f(s_i(y))) = (y, (u_1, \dots, u_k)).$$

Isto mostra que g^{-1} é a inversa da função g . Portanto, g é homeomorfismo.

Seja $p_1 : U_5 \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_5$ a projeção na primeira coordenada. Note que

$$p_1 \circ g \left(h = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(s_i(y)) \right) = p_1(y, (\lambda_1, \dots, \lambda_k)) = y = \sigma_2(h) \Rightarrow p_1 \circ g = \sigma_2.$$

Fixado $y \in U_5$ e observando a definição de g , temos que $g|_{\text{Im } f_y} : \text{Im } f_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^k$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Isto mostra que a terna $\text{Im } f = (\bigcup_{x \in X} \text{Im } f_x, \sigma_2, X)$ é um fibrado vetorial com base X .

Para mostrar a propriedade de trivialidade local de $\text{Ker } f$, note que $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y))\}$ é uma base para $\text{Im } f_y$, $\forall y \in U_5$. Logo, para cada $i \in \{k+1, \dots, m\}$ e $y \in U_5$, existem números reais $\{a_{i1}(y), \dots, a_{ik}(y)\}$ tais que $f(s_i(y)) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f(s_j(y))$.

Como as funções $f \circ s_i : U_5 \rightarrow \bigcup_{y \in U_5} \text{Im } f_y$ formam uma base local de $\text{Im } f$ em x , pela Proposição 2.3, as funções $a_{ij} : U_5 \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{k+1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ são contínuas.

Para cada $i \in \{k+1, \dots, m\}$, definimos

$$s'_i : U_5 \rightarrow E$$

$$y \mapsto s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y)$$

Temos que s'_i é função contínua e $s'_i(y) \in E_y$, $\forall y \in U_5$.

Sejam $y \in U_5$ e $i \in \{k+1, \dots, m\}$ fixados. Vamos mostrar que $s'_i(y) \in \text{Ker } f_y$. De fato,

$$f_y(s'_i(y)) = f_y \left(s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) = f_y(s_i(y)) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f_y(s_j(y)) =$$

$$f(s_i(y)) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f(s_j(y)) = f(s_i(y)) - f(s_i(y)) = 0.$$

Logo, $s'_i(y) \in \text{Ker } f_y$.

Fixado $y \in U_5$, vamos mostrar agora que $\{s'_{k+1}(y), \dots, s'_m(y)\}$ é conjunto linearmente independente. Sejam $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m\}$ números reais tais que $\sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y) = 0$. Note que

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y) &= \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \left(s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) = \\ &= \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s_i(y) - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \left(\sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s_i(y) - \sum_{i=k+1}^m \sum_{j=1}^k \lambda_i a_{ij}(y) s_j(y) = \\ &= \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s_i(y) + \sum_{j=1}^k \left(- \sum_{i=k+1}^m \lambda_i a_{ij}(y) \right) s_j(y) = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s_i(y) + \sum_{i=1}^k \left(- \sum_{j=k+1}^m \lambda_j a_{ji}(y) \right) s_i(y). \end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, seja $\beta_i = - \sum_{j=k+1}^m \lambda_j a_{ji}(y) \in \mathbb{R}$. Então temos que

$$\sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y) = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s_i(y) + \sum_{i=1}^k \beta_i s_i(y).$$

Logo,

$$\sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \beta_i s_i(y) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s_i(y) = 0.$$

Como $\{s_1(y), \dots, s_m(y)\}$ é conjunto linearmente independente, temos que $\beta_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ e $\lambda_i = 0, \forall i \in \{k+1, \dots, m\}$. Isto mostra que $\{s'_{k+1}(y), \dots, s'_m(y)\}$ é conjunto linearmente independente.

Como para $y \in U_5$, $\dim \text{Ker } f_y = \dim \text{Ker } f_x = \dim E_x - \dim \text{Im } f_x = m - k$, temos que $\{s'_{k+1}(y), \dots, s'_m(y)\}$ é base para $\text{Ker } f_y, \forall y \in U_5$.

Vamos agora mostrar a propriedade de trivialidade local de $\text{Ker } f$.

Vamos definir $\tilde{g} : \sigma_1^{-1}(U_5) = \bigcup_{y \in U_5} \text{Ker } f_y \rightarrow U_5 \times \mathbb{R}^{m-k}$ da seguinte forma: dado $h \in \bigcup_{y \in U_5} \text{Ker } f_y$, existe um único $y \in U_5$ tal que $h \in \text{Ker } f_y$. Como $\{s'_{k+1}(y), \dots, s'_m(y)\}$ é base para $\text{Ker } f_y$, existem únicos números reais $\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m\}$ tais que $h = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y)$. Definimos $\tilde{g}(h) = (y, (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m))$. Temos que $\tilde{g}$ é contínua.

A função

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} : U_5 \times \mathbb{R}^{m-k} &\rightarrow \bigcup_{y \in U_5} \text{Ker } f_y \\ (y, (u_{k+1}, \dots, u_m)) &\mapsto \sum_{i=k+1}^m u_i s'_i(y) \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua.

Observe que:

$$(1) \tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g}(h = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y)) = \tilde{g}^{-1}(y, (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)) = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y) = h.$$

$$(2) \tilde{g} \circ \tilde{g}^{-1}(y, (u_{k+1}, \dots, u_m)) = \tilde{g}(\sum_{i=k+1}^m u_i s'_i(y)) = (y, (u_{k+1}, \dots, u_m)).$$

Isto mostra que $\tilde{g}^{-1}$ é a inversa da função $\tilde{g}$. Portanto, $\tilde{g}$ é homeomorfismo.

Seja $\tilde{p}_1 : U_5 \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow U_5$ a projeção na primeira coordenada. Note que

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{g} \left(h = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i s'_i(y) \right) = \tilde{p}_1(y, (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)) = y = \sigma_1(h) \Rightarrow \tilde{p}_1 \circ \tilde{g} = \sigma_1.$$

Fixado $y \in U_5$ e observando a definição de $\tilde{g}$, temos que $\tilde{g}|_{Ker f_y} : Ker f_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^{m-k}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Isto mostra que a terna $Ker f = (\bigcup_{x \in X} Ker f_x, \sigma_1, X)$ é um fibrado vetorial com base X . $\square$

2.5 Propriedades homotópicas de fibrados vetoriais

Nesta seção mostraremos que se $\varphi : Y \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow X$ são funções homotópicas então as aplicações $\varphi^* : Vect(X) \rightarrow Vect(Y)$ e $\psi^* : Vect(X) \rightarrow Vect(Y)$ são idênticas.

Teorema 2.3 (Teorema da Extensão de Tietze) *Sejam X um espaço topológico normal, $Y \subset X$ um conjunto fechado e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Suponha que $g : Y \rightarrow V$ é uma função contínua. Então existe uma função contínua $g' : X \rightarrow V$ tal que $g'|_Y = g$.*

Demonstração: Ver [Mu1], p. 212. $\square$

Teorema 2.4 (Existência de partições da unidade) *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff compacto e $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ uma cobertura aberta finita de X (isto é, $n \in \mathbb{N}$, cada $U_i \subset X$ é um conjunto aberto e $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$). Então existem funções contínuas $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tais que:*

(1) *Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vale: $0 \leq \phi_i(x) \leq 1, \forall x \in X$.*

(2) *$\text{supp } \phi_i \subset U_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, onde $\text{supp } \phi_i = \overline{\{x \in X \mid \phi_i(x) \neq 0\}}$.*

(3) *$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \forall x \in X$.*

O conjunto das funções $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, m\}$ é chamado *partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$.*

Demonstração: Ver [Mu1], p. 222. $\square$

Lema 2.5 *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto e $Y \subset X$ um conjunto fechado. Suponha que $\xi = (E, \pi, X)$ é um fibrado vetorial com base X . Se $s \in \Gamma(\xi|_Y)$ então existe $s' \in \Gamma(\xi)$ tal que $s'|_Y = s$.*

Demonstração: Como ξ é um fibrado vetorial, para cada $x \in X$, existem um aberto $U_x \subset X$ com $x \in U_x$, um número $n_x \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h_x : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^{n_x}$

tais que:

- (1) $p_1 \circ h_x = \pi$, onde $p_1 : X \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada.
- (2) Para cada $x' \in U_x$, $h_x|_{E_{x'}} : E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^{n_x}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Defina

$$\begin{aligned} s_x : U_x \cap Y &\rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \\ y &\mapsto (p_2 \circ h_x) \circ s(y) \end{aligned}$$

onde $p_2 : X \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é a projeção na segunda coordenada. Como $s(y) \in E_y$, temos que s_x está bem definida e é contínua.

Como U_x é um espaço topológico normal e $U_x \cap Y \subset U_x$ é fechado em U_x (pois Y é fechado), pelo Teorema da Extensão de Tietze existe uma função contínua $s'_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ tal que $s'_{x|U_x \cap Y} = s_x$.

Definimos

$$\begin{aligned} S_x : U_x &\rightarrow \pi^{-1}(U_x) = E|_{U_x} \\ y &\mapsto h_x^{-1}(y, s'_x(y)) \end{aligned}$$

Temos que S_x é contínua e $S_x(y) \in E_y, \forall y \in U_x$. Logo, $S_x \in \Gamma(\xi|_{U_x})$.

Note que se $y \in U_x \cap Y$ então $s(y) \in E_y$, logo

$$h_x(s(y)) = (y, p_2 \circ h_x(s(y))) = (y, s_x(y)) = (y, s'_x(y)) \Rightarrow s(y) = h_x^{-1}(y, s'_x(y)) = S_x(y).$$

Portanto $S_{x|U_x \cap Y} = s$.

Observe que $X \subset \bigcup_{x \in X} U_x$. Como X é compacto, existe um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de X tal que $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Para simplificar a notação vamos escrever U_i no lugar de U_{x_i} e S_i no lugar de S_{x_i} . Temos que $S_i \in \Gamma(\xi|_{U_i})$ e $S_{i|U_i \cap Y} = s, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$, partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \dots, U_n\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos

$$\begin{aligned} S'_i : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \begin{cases} \phi_i(x)S_i(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases} \end{aligned}$$

Temos que S'_i é contínua pois $\text{supp } \phi_i \subset U_i$. Também temos que $S'_i(x) \in E_x, \forall x \in X$, logo $S'_i \in \Gamma(\xi)$.

Defina $s' = \sum_{i=1}^n S'_i$. Como $\Gamma(\xi)$ é espaço vetorial, temos que $s' \in \Gamma(\xi)$. Seja $y \in Y$, então

$$S'_i(y) = \begin{cases} \phi_i(y)S_i(y) & \text{se } y \in U_i \\ 0 & \text{se } y \notin U_i \end{cases} = \begin{cases} \phi_i(y)s(y) & \text{se } y \in U_i \\ 0 & \text{se } y \notin U_i \end{cases} = \phi_i(y)s(y).$$

Logo,

$$s'(y) = \sum_{i=1}^n S'_i(y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(y)s(y) = \left(\sum_{i=1}^n \phi_i(y) \right) s(y) = s(y).$$

Portanto, $s'_Y = s$. Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Proposição 2.6 *Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . A terna $\text{Hom}(\xi, \eta) = (H, \mu, X)$, onde $H = \bigcup_{x \in X} \text{hom}(E_x, F_x) = \bigcup_{x \in X} \{\varphi : E_x \rightarrow F_x \mid \varphi \text{ é linear}\}$ e*

$$\begin{aligned} \mu : H &= \bigcup_{x \in X} \text{hom}(E_x, F_x) \rightarrow X \\ \varphi \in \text{hom}(E_x, F_x) &\mapsto x \end{aligned}$$

é um fibrado vetorial com base X .

Demonstração: Ver [Bou1], Parágrafo 7. $\square$

Lema 2.6 *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto e $Y \subset X$ um subespaço fechado. Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . Suponha que $\xi|_Y$ e $\eta|_Y$ são isomorfos com $h : E|_Y \rightarrow F|_Y$ homeomorfismo satisfazendo as condições da Definição 2.2. Então existem um aberto $U \subset X$ com $Y \subset U$ e um homeomorfismo $h' : E|_U \rightarrow F|_U$ satisfazendo as condições da Definição 2.2 e tal que $h'|_{E|_Y} = h$. Em particular, os fibrados $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são isomorfos.*

Demonstração: Por definição, $\text{Hom}(\xi, \eta) = (H, \mu, X)$, onde $H = \bigcup_{x \in X} \text{hom}(E_x, F_x)$ e $\mu(\varphi) = x$, para $\varphi \in \text{hom}(E_x, F_x)$. Logo $\text{Hom}(\xi, \eta)|_Y = (H|_Y, \mu|_Y, Y)$, onde $H|_Y = \mu^{-1}(Y) = \bigcup_{y \in Y} \text{hom}(E_y, F_y)$ e $\mu|_Y(\varphi) = y$, para $\varphi \in \text{hom}(E_y, F_y)$.

Defina

$$\begin{aligned} s : Y &\rightarrow H|_Y \\ y &\mapsto h|_{E_y} \end{aligned}$$

Como para cada $y \in Y$, $h|_{E_y} : E_y \rightarrow F_y$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que a função s está bem definida e é contínua. Note também que $s(y) \in \text{hom}(E_y, F_y)$, $\forall y \in Y$, logo $s \in \Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta)|_Y)$. Pelo Lema 2.5, existe $s' \in \Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta))$ tal que $s'|_Y = s$.

Para cada $x \in X$, seja $\text{iso}(E_x, F_x) = \{\varphi : E_x \rightarrow F_x \mid \varphi \text{ é linear e bijetiva}\}$. Temos que $\text{hom}(E_x, F_x) \subset \text{iso}(E_x, F_x)$.

Defina $U = \{x \in X \mid s'(x) \in \text{iso}(E_x, F_x)\}$. Temos que $U \subset X$ e $Y \subset U$ pois para $y \in Y$, $s'(y) = s(y) = h|_{E_y}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Vamos mostrar que U é um conjunto aberto. Sabemos que $\text{iso}(E_x, F_x) \subset \text{hom}(E_x, F_x)$ é um conjunto aberto, para cada $x \in X$. Logo, $\bigcup_{x \in X} \text{iso}(E_x, F_x) \subset \bigcup_{x \in X} \text{hom}(E_x, F_x)$ também é um conjunto aberto. Note que $U = s'^{-1}(\bigcup_{x \in X} \text{iso}(E_x, F_x))$. Como s' é contínua, temos que U é aberto.

Defina

$$\begin{aligned} h' : E|_U &\rightarrow F|_U \\ e &\mapsto s'(\pi(e))(e) \end{aligned}$$

Note que, para cada $e \in E|_U$, $\pi(e) \in U$, logo $s'(\pi(e)) \in \text{iso}(E_{\pi(e)}, F_{\pi(e)})$. Daí, $s'(\pi(e))(e) \in F_{\pi(e)} \subset F|_U$. Portanto, a função h' está bem definida e é contínua.

A função

$$\begin{aligned} h'^{-1} : F|_U &\rightarrow E|_U \\ f &\mapsto (s'(\rho(f)))^{-1}(f) \end{aligned}$$

está bem definida, pois para cada $f \in F|_U$, $\rho(f) \in U$, logo $s'(\rho(f)) \in \text{iso}(E_{\rho(f)}, F_{\rho(f)})$. Daí $(s'(\rho(f)))^{-1}(f) \in E_{\rho(f)} \subset E|_U$. Também temos que h'^{-1} é contínua.

Note que:

$$(1) \ h'^{-1} \circ h'(e) = h'^{-1}(s'(\pi(e))(e)) = (s'(\rho(s'(\pi(e))(e))))^{-1}(s'(\pi(e))(e)).$$

Como $s'(\pi(e))(e) \in F_{\pi(e)}$, temos que $\rho(s'(\pi(e))(e)) = \pi(e)$.

$$\text{Logo, } (s'(\rho(s'(\pi(e))(e))))^{-1}(s'(\pi(e))(e)) = (s'(\pi(e)))^{-1} \circ s'(\pi(e))(e) = e.$$

Portanto, $h'^{-1} \circ h'(e) = e$, $\forall e \in E|_U$.

$$(2) \ h' \circ h'^{-1}(f) = h'((s'(\rho(f)))^{-1}(f)) = s'(\pi((s'(\rho(f)))^{-1}(f)))((s'(\rho(f)))^{-1}(f)).$$

Como $(s'(\rho(f)))^{-1}(f) \in E_{\rho(f)}$, temos que $\pi((s'(\rho(f)))^{-1}(f)) = \rho(f)$.

$$\text{Logo, } s'(\pi((s'(\rho(f)))^{-1}(f)))((s'(\rho(f)))^{-1}(f)) = s'(\rho(f)) \circ (s'(\rho(f)))^{-1}(f) = f.$$

Portanto, $h' \circ h'^{-1}(f) = f$, $\forall f \in F|_U$.

Isto mostra que h'^{-1} é a inversa de h' . Logo, h' é homeomorfismo.

Seja $e \in E|_U$. Como $s'(\pi(e))(e) \in F_{\pi(e)}$, temos que

$$\rho|_U \circ h'(e) = \rho(s'(\pi(e))(e)) = \pi(e) = \pi|_U(e) \Rightarrow \rho|_U \circ h' = \pi|_U.$$

Fixado $x \in U$, temos que $h'|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais. De fato, $h'|_{E_x}(e) = s'(\pi(e))(e) = s'(x)(e)$, $\forall e \in E_x$. Logo $h'|_{E_x} = s'(x) \in \text{iso}(E_x, F_x)$.

Portanto, $h' : E|_U \rightarrow F|_U$ satisfaz as condições da Definição 2.2.

Seja agora $e \in E|_Y$. Temos que $s'(\pi(e)) = s(\pi(e))$, logo

$$h'(e) = s'(\pi(e))(e) = s(\pi(e))(e) = h|_{E_{\pi(e)}}(e) = h(e).$$

Portanto, $h'|_{E|_Y} = h$. $\square$

Teorema 2.5 *Sejam X e Y espaços topológicos com Y espaço de Hausdorff compacto e $\varphi : Y \rightarrow X$, $\psi : Y \rightarrow X$ funções contínuas. Suponha que φ e ψ sejam funções homotópicas. Então as aplicações $\varphi^* : \text{Vect}(X) \rightarrow \text{Vect}(Y)$ e $\psi^* : \text{Vect}(X) \rightarrow \text{Vect}(Y)$ são idênticas.*

Demonstração: Como φ e ψ são homotópicas, existe uma função contínua $F : Y \times I \rightarrow X$ tal que $F(y, 0) = \varphi(y)$ e $F(y, 1) = \psi(y)$, $\forall y \in Y$.

Para cada $t \in I$, definimos

$$\begin{aligned} F_t : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto F(y, t) \end{aligned}$$

Temos que F_t é função contínua e $F_0 = \varphi$, $F_1 = \psi$.

Definimos também a função $p : Y \times I \rightarrow Y$, $(y, t) \mapsto y$.

Seja $\xi = (E, \pi, X)$ fibrado vetorial com base X . Vamos mostrar que $\langle \varphi^* \xi \rangle = \langle \psi^* \xi \rangle$ em $Vect(Y)$. Como ξ foi tomado arbitrariamente, concluímos que as aplicações φ^* e ψ^* são idênticas.

Seja $t_0 \in I$ fixado. Note que:

(1) $F^* \xi = (E^1, \pi^1, Y \times I)$, onde $E^1 = \{((y, t), e) \in (Y \times I) \times E \mid F(y, t) = \pi(e)\}$ e $\pi^1 : E^1 \rightarrow Y \times I$, $\pi^1((y, t), e) = (y, t)$.

(2) $F_{t_0}^* \xi = (E^2, \pi^2, Y)$, onde $E^2 = \{(y, e) \in Y \times E \mid F(y, t_0) = \pi(e)\}$ e $\pi^2 : E^2 \rightarrow Y$, $\pi^2(y, e) = y$.

(3) $p^* F_{t_0}^* \xi = (E^3, \pi^3, Y \times I)$, onde $E^3 = \{((y, t), e^2) \in (Y \times I) \times E^2 \mid p(y, t) = \pi^2(e^2)\} = \{((y, t), (y', e)) \in (Y \times I) \times (Y \times E) \mid y = y' \text{ e } F(y', t_0) = \pi(e)\}$ e $\pi^3 : E^3 \rightarrow Y \times I$, $\pi^3((y, t), (y, e)) = (y, t)$.

Vamos restringir os fibrados $F^* \xi$ e $p^* F_{t_0}^* \xi$ ao conjunto $Y \times \{t_0\} \subset Y \times I$. Temos que:

(4) $F^* \xi|_{Y \times \{t_0\}} = (E^1_{|Y \times \{t_0\}}, \pi^1_{|Y \times \{t_0\}}, Y \times \{t_0\})$, onde $E^1_{|Y \times \{t_0\}} = \{((y, t_0), e) \mid y \in Y, e \in E \text{ e } F(y, t_0) = \pi(e)\}$ e $\pi^1_{|Y \times \{t_0\}}((y, t_0), e) = (y, t_0)$.

(5) $p^* F_{t_0}^* \xi|_{Y \times \{t_0\}} = (E^3_{|Y \times \{t_0\}}, \pi^3_{|Y \times \{t_0\}}, Y \times \{t_0\})$, onde $E^3_{|Y \times \{t_0\}} = \{((y, t_0), (y, e)) \mid y \in Y, e \in E \text{ e } F(y, t_0) = \pi(e)\}$ e $\pi^3_{|Y \times \{t_0\}}((y, t_0), (y, e)) = (y, t_0)$.

Defina

$$h : E^3_{|Y \times \{t_0\}} \rightarrow E^1_{|Y \times \{t_0\}}$$

$$((y, t_0), (y, e)) \mapsto ((y, t_0), e)$$

Temos que h é contínua com inversa

$$h^{-1} : E^1_{|Y \times \{t_0\}} \rightarrow E^3_{|Y \times \{t_0\}}$$

$$((y, t_0), e) \mapsto ((y, t_0), (y, e))$$

contínua. Logo, h é homeomorfismo.

Note que

$$\pi^1_{|Y \times \{t_0\}} \circ h((y, t_0), (y, e)) = \pi^1_{|Y \times \{t_0\}}((y, t_0), e) = (y, t_0) = \pi^3_{|Y \times \{t_0\}}((y, t_0), (y, e)) \Rightarrow$$

$$\pi^1_{|Y \times \{t_0\}} \circ h = \pi^3_{|Y \times \{t_0\}}.$$

Seja $(y, t_0) \in Y \times \{t_0\}$ fixado. Temos que
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(E^1_{|Y \times \{t_0\}}\right)_{(y, t_0)} = \{(y, t_0)\} \times E_{F(y, t_0)} \\ \left(E^3_{|Y \times \{t_0\}}\right)_{(y, t_0)} = \{(y, t_0)\} \times \{y\} \times E_{F(y, t_0)} \end{array} \right.$$

Logo, é claro que $h_{\left(E^3_{|Y \times \{t_0\}}\right)_{(y, t_0)}} : \left(E^3_{|Y \times \{t_0\}}\right)_{(y, t_0)} \rightarrow \left(E^1_{|Y \times \{t_0\}}\right)_{(y, t_0)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Note que $Y \times I$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto e $Y \times \{t_0\} \subset Y \times I$ é um subespaço fechado. Também temos que $F^*\xi$ e $p^*F_{t_0}^*\xi$ são fibrados vetoriais com base $Y \times I$ tais que $F^*\xi|_{Y \times \{t_0\}}$ e $p^*F_{t_0}^*\xi|_{Y \times \{t_0\}}$ são isomorfos, com homeomorfismo $h : E^3_{|Y \times \{t_0\}} \rightarrow E^1_{|Y \times \{t_0\}}$ satisfazendo as condições da Definição 2.2. Portanto, pelo Lema 2.6, existem um aberto $U \subset Y \times I$ com $Y \times \{t_0\} \subset U$ e um homeomorfismo $h' : E^3|_U \rightarrow E^1|_U$ satisfazendo as condições da Definição 2.2 e tal que $h'|_{E^3_{|Y \times \{t_0\}}} = h$. Como $Y \times \{t_0\} \subset U$, temos que existe $\delta_{t_0} > 0$ tal que $U = Y \times (t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0})$. Por simplicidade vamos denotar $(t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0})$ por δt_0 . Logo $U = Y \times \delta t_0$.

Note que:

(6) $F^*\xi|_{Y \times \delta t_0} = (E^1_{|Y \times \delta t_0}, \pi^1_{|Y \times \delta t_0}, Y \times \delta t_0)$, onde

$$E^1_{|Y \times \delta t_0} = \{((y, t), e) \mid y \in Y, e \in E, t \in \delta t_0 \text{ e } F(y, t) = \pi(e)\} \text{ e } \pi^1_{|Y \times \delta t_0}((y, t), e) = (y, t).$$

(7) $p^*F_{t_0}^*\xi|_{Y \times \delta t_0} = (E^3_{|Y \times \delta t_0}, \pi^3_{|Y \times \delta t_0}, Y \times \delta t_0)$, onde

$$E^3_{|Y \times \delta t_0} = \{((y, t), (y, e)) \mid y \in Y, e \in E, t \in \delta t_0 \text{ e } F(y, t_0) = \pi(e)\} \text{ e } \pi^3_{|Y \times \delta t_0}((y, t), (y, e)) = (y, t).$$

Como $h' : E^3_{|Y \times \delta t_0} \rightarrow E^1_{|Y \times \delta t_0}$ é homeomorfismo satisfazendo as condições da Definição 2.2, temos que $\pi^1_{|Y \times \delta t_0} \circ h' = \pi^3_{|Y \times \delta t_0}$ e para cada $(y, t) \in Y \times \delta t_0$ fixado, $h'_{|\{(y, t)\} \times \{y\} \times E_{F(y, t_0)}} : \{(y, t)\} \times \{y\} \times E_{F(y, t_0)} \rightarrow \{(y, t)\} \times E_{F(y, t)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Em particular, temos que
$$\begin{cases} h'((y, t), (y, e)) = ((y, t), p_3 \circ h'((y, t), (y, e))) \\ h'^{-1}((y, t), e) = ((y, t), y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e)) \end{cases},$$

onde $p_3 : (Y \times I) \times E \rightarrow E$ e $p_4 : (Y \times I) \times (Y \times E) \rightarrow E$ são as projeções na terceira e na quarta coordenadas, respectivamente.

Seja $t \in \delta t_0$ fixado. Vamos mostrar que os fibrados $F_{t_0}^*\xi$ e $F_t^*\xi$ são isomorfos.

Observe primeiramente que:

(8) $F_t^*\xi = (E^4, \pi^4, Y)$, onde $E^4 = \{(y, e) \in Y \times E \mid F(y, t) = \pi(e)\}$ e $\pi^4 : E^4 \rightarrow Y$, $\pi^4(y, e) = y$.

Definimos

$$\begin{aligned} g : E^4 &\rightarrow E^2 \\ (y, e) &\mapsto (y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e)) \end{aligned}$$

A função g está bem definida pois $((y, t), e) \in E^1_{|Y \times \delta t_0}$ e $h'^{-1}((y, t), e) \in E^3_{|Y \times \delta t_0}$. Logo, $F(y, t_0) = \pi(p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e))$. Também temos que g é função contínua. Definimos também

$$\begin{aligned} g^{-1} : E^2 &\rightarrow E^4 \\ (y, e) &\mapsto (y, p_3 \circ h'((y, t), (y, e))) \end{aligned}$$

A função g^{-1} está bem definida pois $((y, t), (y, e)) \in E^3_{|Y \times \delta t_0}$ e $h'((y, t), (y, e)) \in E^1_{|Y \times \delta t_0}$. Logo, $F(y, t) = \pi(p_3 \circ h'((y, t), (y, e)))$. Também temos que g^{-1} é função contínua.

Observe que:

$$(9) \quad g \circ g^{-1}(y, e) = g(y, p_3 \circ h'((y, t), (y, e))) = (y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), p_3 \circ h'((y, t), (y, e)))) = (y, p_4 \circ h'^{-1}(h'((y, t), (y, e)))) = (y, p_4((y, t), (y, e))) = (y, e), \forall (y, e) \in E^2.$$

$$(10) \quad g^{-1} \circ g(y, e) = g^{-1}(y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e)) = (y, p_3 \circ h'((y, t), (y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e)))) = (y, p_3 \circ h'(h'^{-1}((y, t), e))) = (y, p_3((y, t), e)) = (y, e), \forall (y, e) \in E^4.$$

Logo, g^{-1} é a inversa da função g . Portanto, g é homeomorfismo.

Note que

$$\pi^2 \circ g(y, e) = \pi^2(y, p_4 \circ h'^{-1}((y, t), e)) = y = \pi^4(y, e) \Rightarrow \pi^2 \circ g = \pi^4.$$

Seja $y \in Y$ fixado. Temos que $g|_{\{y\} \times E_{F(y,t)}} : \{y\} \times E_{F(y,t)} \rightarrow \{y\} \times E_{F(y,t_0)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais pois $h'|_{\{(y,t)\} \times \{y\} \times E_{F(y,t_0)}} : \{(y,t)\} \times \{y\} \times E_{F(y,t_0)} \rightarrow \{(y,t)\} \times E_{F(y,t)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Isto mostra que os fibrados $F_{t_0}^* \xi$ e $F_t^* \xi$ são isomorfos.

Como $t \in \delta t_0$ foi tomado arbitrariamente, temos que $\langle F_t^* \xi \rangle = \langle F_{t_0}^* \xi \rangle$ em $Vect(Y)$, $\forall t \in \delta t_0$.

Mostramos assim que, para cada $t_0 \in I$, existe um aberto $\delta t_0 \subset I$ com $t_0 \in \delta t_0$, tal que $\langle F_t^* \xi \rangle = \langle F_{t_0}^* \xi \rangle$, $\forall t \in \delta t_0$. Logo, a aplicação

$$\begin{aligned} \Omega : I &\rightarrow Vect(Y) \\ t &\mapsto \langle F_t^* \xi \rangle \end{aligned}$$

é localmente constante.

Vamos mostrar que Ω é uma aplicação constante. De fato, temos que $I \subset \bigcup_{t \in I} \delta t$. Como I é compacto, existe um número $n \in \mathbb{N}$ e um conjunto $\{t_1, \dots, t_n\} \subset I$ tais que $I \subset \bigcup_{i=1}^n \delta t_i$.

Como I é conexo, após uma reordenação dos índices, podemos supor que $\delta t_i \cap \delta t_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

$$\text{Seja } t \in \delta t_1 \cap \delta t_2. \text{ Então } \begin{cases} \Omega(t) = \Omega(t_1) \\ \Omega(t) = \Omega(t_2) \end{cases} \Rightarrow \Omega(t_1) = \Omega(t_2).$$

$$\text{Analogamente, se } t \in \delta t_2 \cap \delta t_3, \text{ então } \begin{cases} \Omega(t) = \Omega(t_2) \\ \Omega(t) = \Omega(t_3) \end{cases} \Rightarrow \Omega(t_2) = \Omega(t_3).$$

Prosseguindo com este raciocínio, após $n-1$ passos teremos que

$$\Omega(t_1) = \Omega(t_2) = \Omega(t_3) = \dots = \Omega(t_{n-1}) = \Omega(t_n).$$

Isto mostra que a aplicação Ω é constante.

Logo,

$$\Omega(0) = \Omega(1) \Leftrightarrow \langle F_0^* \xi \rangle = \langle F_1^* \xi \rangle \Leftrightarrow \langle \varphi^* \xi \rangle = \langle \psi^* \xi \rangle. \quad \square$$

Corolário 2.2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.5, temos que as aplicações $K_\varphi : K(X) \rightarrow K(Y)$ e $K_\psi : K(X) \rightarrow K(Y)$ são idênticas.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.7, existe um único homomorfismo de grupos $K_\varphi : K(X) \rightarrow K(Y)$ que satisfaz

$$K_\varphi([\xi]) = [\varphi^*\xi], \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X).$$

Pelo mesmo motivo, existe um único homomorfismo de grupos $K_\psi : K(X) \rightarrow K(Y)$ que satisfaz

$$K_\psi([\xi]) = [\psi^*\xi], \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X).$$

Como $\varphi^* = \psi^* : Vect(X) \rightarrow Vect(Y)$, temos que

$$K_\psi([\xi]) = [\varphi^*\xi], \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X).$$

Logo $K_\psi : K(X) \rightarrow K(Y)$ também é um homomorfismo de grupos que satisfaz

$$K_\psi([\xi]) = [\varphi^*\xi], \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X).$$

Pela unicidade de $K_\varphi : K(X) \rightarrow K(Y)$, temos que $K_\psi = K_\varphi : K(X) \rightarrow K(Y)$. $\square$

2.6 Propriedades do grupo $K(X)$

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades do grupo $K(X)$ que serão utilizados no Capítulo 4.

Definição 2.7 Seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Um subespaço vetorial $V \subset \Gamma(\xi)$ é dito *amplo* se a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda : X \times V &\rightarrow E \\ (x, s) &\mapsto s(x) \end{aligned}$$

é sobrejetiva.

Proposição 2.7 *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff compacto e $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Então existe um subespaço vetorial de dimensão finita $V \subset \Gamma(\xi)$ tal que V é amplo.*

Demonstração: Para cada $x \in X$, existem um aberto $U_x \subset X$ com $x \in U_x$, um número $n_x \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h_x : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^{n_x}$ tais que $p_1 \circ h_x = \pi$ (onde $p_1 : X \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada) e para cada $x' \in U_x$, $h_x|_{E_{x'}} : E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^{n_x}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Temos que $X \subset \bigcup_{x \in X} U_x$. Como X é compacto, existe um número $m \in \mathbb{N}$ e um conjunto

$\{x_1, \dots, x_m\} \subset X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. Para simplificar a notação vamos escrever U_i no lugar de U_{x_i} , n_i no lugar de n_{x_i} e $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n_i}$ no lugar de $h_{x_i} : \pi^{-1}(U_{x_i}) \rightarrow U_{x_i} \times \mathbb{R}^{n_{x_i}}$.

Seja $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \dots, U_m\}$. Fixado $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_i}\}$ base ortonormal canônica de $\mathbb{R}^{n_i}$. Como para cada $y \in U_i$ fixado, $h_i|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^{n_i}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, o conjunto $\{h_i^{-1}(y, e_1), h_i^{-1}(y, e_2), \dots, h_i^{-1}(y, e_{n_i})\}$ é base de E_y .

Para cada $j \in \{1, \dots, n_i\}$, definimos

$$\begin{aligned} s_j^i : U_i &\rightarrow E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \\ y &\mapsto h_i^{-1}(y, e_j) \end{aligned}$$

Temos que s_j^i é contínua e $s_j^i(y) \in E_y$, $\forall y \in U_i$. Logo, $s_j^i \in \Gamma(\xi|_{U_i})$.

Seja $V_i = \text{span} \{s_1^i, s_2^i, \dots, s_{n_i}^i\}$. Então $V_i \subset \Gamma(\xi|_{U_i})$ é um subespaço vetorial de dimensão finita. Também temos que V_i é amplo pois a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda_i : U_i \times V_i &\rightarrow E|_{U_i} \\ (y, v) &\mapsto v(y) \end{aligned}$$

é sobrejetiva. De fato, seja $e \in E|_{U_i}$, então $\pi(e) \in U_i$. Tomando $y = \pi(e)$, temos que $y \in U_i$ e $e \in E_y$. Como $\{h_i^{-1}(y, e_1), h_i^{-1}(y, e_2), \dots, h_i^{-1}(y, e_{n_i})\}$ é base de E_y , existem escalares $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_i}\} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} e &= \lambda_1 h_i^{-1}(y, e_1) + \lambda_2 h_i^{-1}(y, e_2) + \dots + \lambda_{n_i} h_i^{-1}(y, e_{n_i}) \Leftrightarrow \\ e &= \lambda_1 s_1^i(y) + \lambda_2 s_2^i(y) + \dots + \lambda_{n_i} s_{n_i}^i(y). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Lambda_i(y, \lambda_1 s_1^i + \lambda_2 s_2^i + \dots + \lambda_{n_i} s_{n_i}^i) = \lambda_1 s_1^i(y) + \lambda_2 s_2^i(y) + \dots + \lambda_{n_i} s_{n_i}^i(y) = e.$$

Isto mostra que Λ_i é sobrejetiva.

Vamos agora definir uma aplicação $\Theta_i : V_i \rightarrow \Gamma(\xi)$ da seguinte maneira: para cada $v \in V_i$,

$$\begin{aligned} \Theta_i(v) : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \begin{cases} \phi_i(x)v(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada $v \in V_i$, temos que $\Theta_i(v)$ é função contínua (pois $\text{supp } \phi_i \subset U_i$) e $\Theta_i(v)(x) \in E_x$, $\forall x \in X$. Logo, $\Theta_i(v) \in \Gamma(\xi)$.

Vamos mostrar que Θ_i é uma aplicação linear. De fato, sejam $v, v' \in V_i$, então

$$\Theta_i(v + v') = \begin{cases} \phi_i(x)(v + v')(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Theta_i(v) + \Theta_i(v') &= \begin{cases} \phi_i(x)v(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases} + \begin{cases} \phi_i(x)v'(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \phi_i(x)(v+v')(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases}.\end{aligned}$$

Logo, $\Theta_i(v+v') = \Theta_i(v) + \Theta_i(v')$.

Seja agora $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\lambda\Theta_i(v) = \lambda \begin{cases} \phi_i(x)v(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases} = \begin{cases} \phi_i(x)(\lambda v)(x) \in E_x & \text{se } x \in U_i \\ 0 \in E_x & \text{se } x \notin U_i \end{cases} = \Theta_i(\lambda v).$$

Logo, $\Theta_i(\lambda v) = \lambda\Theta_i(v)$. Portanto, Θ_i é linear.

Defina

$$\begin{aligned}\Theta : V_1 \times \dots \times V_m &\rightarrow \Gamma(\xi) \\ (v_1, \dots, v_m) &\mapsto \Theta_1(v_1) + \dots + \Theta_m(v_m)\end{aligned}$$

Temos que Θ é aplicação linear. De fato, se $(v_1, \dots, v_m), (v'_1, \dots, v'_m) \in V_1 \times \dots \times V_m$, então

$$\begin{aligned}\Theta((v_1, \dots, v_m) + (v'_1, \dots, v'_m)) &= \Theta(v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m) = \\ \Theta_1(v_1 + v'_1) + \dots + \Theta_m(v_m + v'_m) &= (\Theta_1(v_1) + \Theta_1(v'_1)) + \dots + (\Theta_m(v_m) + \Theta_m(v'_m)) = \\ (\Theta_1(v_1) + \dots + \Theta_m(v_m)) + (\Theta_1(v'_1) + \dots + \Theta_m(v'_m)) &= \Theta(v_1, \dots, v_m) + \Theta(v'_1, \dots, v'_m).\end{aligned}$$

Seja agora $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned}\Theta(\lambda(v_1, \dots, v_m)) &= \Theta(\lambda v_1, \dots, \lambda v_m) = \Theta_1(\lambda v_1) + \dots + \Theta_m(\lambda v_m) = \\ \lambda\Theta_1(v_1) + \dots + \lambda\Theta_m(v_m) &= \lambda(\Theta_1(v_1) + \dots + \Theta_m(v_m)) = \lambda\Theta(v_1, \dots, v_m).\end{aligned}$$

Logo, Θ é aplicação linear.

Tome $V = \Theta(V_1 \times \dots \times V_m)$. Temos que V é subespaço vetorial de $\Gamma(\xi)$ e tem dimensão finita. De fato, como $\dim V_1 \times \dots \times V_m = \dim V_1 + \dots + \dim V_m < \infty$, temos que

$$\dim V = \dim \Theta(V_1 \times \dots \times V_m) \leq \dim V_1 \times \dots \times V_m < \infty.$$

Resta mostrar que V é amplo, isto é, que a aplicação

$$\begin{aligned}\Lambda : X \times V &\rightarrow E \\ (x, v) &\mapsto v(x)\end{aligned}$$

é sobrejetiva. Seja $e \in E$. Tome $x = \pi(e)$, então $x \in X$. Como $\sum_{i=1}^m \phi_i(x) = 1$, existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\phi_{i_0}(x) \neq 0$. Logo, $x \in \text{supp } \phi_{i_0} \subset U_{i_0}$. Portanto, $e \in E|_{U_{i_0}}$.

Já mostramos que a aplicação $\Lambda_{i_0} : U_{i_0} \times V_{i_0} \rightarrow E|_{U_{i_0}}$ é sobrejetiva e que $\Lambda_{i_0}(\pi(e) = x, v_{i_0}) = e$, para algum $v_{i_0} \in V_{i_0}$.

Seja $v = \Theta(0, \dots, 0, \frac{v_{i_0}}{\phi_{i_0}(x)}, 0, \dots, 0)$, onde $\frac{v_{i_0}}{\phi_{i_0}(x)}$ está na i_0 -ésima coordenada. Temos que $v \in V$ e, da definição de Θ , $v = \Theta_{i_0}(\frac{v_{i_0}}{\phi_{i_0}(x)}) = \frac{1}{\phi_{i_0}(x)}\Theta_{i_0}(v_{i_0})$.

Finalmente, temos que

$$\Lambda(x, v) = v(x) = \left(\frac{1}{\phi_{i_0}(x)}\Theta_{i_0}(v_{i_0}) \right)(x) = \frac{1}{\phi_{i_0}(x)}\phi_{i_0}(x)v_{i_0}(x) = v_{i_0}(x) = \Lambda_{i_0}(x, v_{i_0}) = e.$$

Logo, Λ é aplicação sobrejetiva. $\square$

Corolário 2.3 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 2.7, existem um número $N \in \mathbb{N}$ e uma função sobrejetiva $\Psi : X \times \mathbb{R}^N \rightarrow E$ tais que, para cada $x \in X$, $\Psi|_{\{x\} \times \mathbb{R}^N} : \{x\} \times \mathbb{R}^N \rightarrow E_x$ é linear e sobrejetiva.*

Demonstração: Pela Proposição 2.7, existe um subespaço vetorial $V \subset \Gamma(\xi)$ de dimensão finita e uma aplicação sobrejetiva $\Lambda : X \times V \rightarrow E$, $(x, v) \mapsto v(x)$.

Seja $N = \dim V$. Pelo Exemplo 2.2, os fibrados $(X \times V, \rho, X)$ (onde $\rho : X \times V \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada) e $\theta_N = (X \times \mathbb{R}^N, p_N, X)$ são isomorfos. Seja $h : X \times \mathbb{R}^N \rightarrow X \times V$ homeomorfismo satisfazendo as condições da Definição 2.2.

Definimos $\Psi = \Lambda \circ h : X \times \mathbb{R}^N \rightarrow E$. Temos que Ψ é sobrejetiva pois é a composição de aplicações sobrejetivas.

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $h|_{\{x\} \times \mathbb{R}^N} : \{x\} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \{x\} \times V$ é isomorfismo de espaços vetoriais, em particular, é linear e sobrejetiva. Vamos mostrar que $\Lambda|_{\{x\} \times V} : \{x\} \times V \rightarrow E_x$ também é linear e sobrejetiva. De fato, se $v_1, v_2 \in V$, então

$$\Lambda(x, v_1 + v_2) = (v_1 + v_2)(x) = v_1(x) + v_2(x) = \Lambda(x, v_1) + \Lambda(x, v_2).$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, então

$$\Lambda(x, \lambda v) = (\lambda v)(x) = \lambda v(x) = \lambda \Lambda(x, v).$$

Logo, $\Lambda|_{\{x\} \times V} : \{x\} \times V \rightarrow E_x$ é linear.

Para a sobrejetividade, seja $e \in E_x$. Então, existe $(x', v) \in X \times V$ tal que $\Lambda(x', v) = e$. Mas, $\Lambda(x', v) = v(x') \in E_{x'}$. Logo, $e \in E_x \cap E_{x'}$, o que implica que $x = x'$. Portanto, $\Lambda(x, v) = e$. Logo, $\Lambda|_{\{x\} \times V} : \{x\} \times V \rightarrow E_x$ é sobrejetiva.

Portanto, $\Psi|_{\{x\} \times \mathbb{R}^N} = \Lambda|_{\{x\} \times V} \circ h|_{\{x\} \times \mathbb{R}^N} : \{x\} \times \mathbb{R}^N \rightarrow E_x$ é linear e sobrejetiva. $\square$

Teorema 2.6 *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff compacto e ξ um fibrado vetorial com base X . Então existem um fibrado vetorial η com base X e um número $N \in \mathbb{N}$ tais que $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \theta_N \rangle$.*

Demonstração: Seja $\xi = (E, \pi, X)$. Pelo Corolário 2.3, existem um número $N \in \mathbb{N}$ e uma função sobrejetiva $\Psi : X \times \mathbb{R}^N \rightarrow E$ tais que, para cada $x \in X$, $\Psi|_{\{x\} \times \mathbb{R}^N} : \{x\} \times \mathbb{R}^N \rightarrow E_x$ é linear e sobrejetiva. Isto significa que, para cada $x \in X$, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_x : \{x\} \times \mathbb{R}^N &\rightarrow E_x \\ (x, u) &\mapsto \Psi(x, u) \end{aligned}$$

é linear e sobrejetiva.

Seja $\sigma_x = \psi_x|_{(Ker \psi_x)^\perp} : (Ker \psi_x)^\perp \rightarrow E_x$. Vamos mostrar que σ_x é isomorfismo de espaços vetoriais. De fato, σ_x é linear, pois ψ_x é linear. Seja $(x, u) \in (Ker \psi_x)^\perp$ tal que $\sigma_x(x, u) = 0$. Então $(x, u) \in Ker \psi_x \cap (Ker \psi_x)^\perp = \{(x, 0)\}$. Logo, $(x, u) = (x, 0)$, mostrando que σ_x é injetiva.

Para a sobrejetividade, seja $e \in E_x$. Então existe $u \in \mathbb{R}^N$ tal que $\psi_x(x, u) = e$. Como $\{x\} \times \mathbb{R}^N = Ker \psi_x \oplus (Ker \psi_x)^\perp$, temos que $(x, u) = (x, u_1) + (x, u_2)$, com $(x, u_1) \in Ker \psi_x$ e $(x, u_2) \in (Ker \psi_x)^\perp$. Portanto,

$$e = \psi_x(x, u) = \psi_x((x, u_1) + (x, u_2)) = \psi_x(x, u_2) = \sigma_x(x, u_2) \Rightarrow \sigma_x(x, u_2) = e.$$

Isto mostra que σ_x é sobrejetiva.

Seja $x \in X$ fixado. Como ξ é fibrado vetorial, existem um aberto $U \subset X$ com $x \in U$, um número $n \in \mathbb{N}$ e um homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tais que $p_1 \circ h = \pi$ (onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada) e para cada $x' \in U$, $h|_{E_{x'}} : E_{x'} \rightarrow \{x'\} \times \mathbb{R}^n$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Em particular, $\dim E_{x'} = \dim \{x'\} \times \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n$, $\forall x' \in U$.

Por outro lado, temos que $\{x\} \times \mathbb{R}^N = Ker \psi_x \oplus (Ker \psi_x)^\perp$, logo

$$N = \dim \{x\} \times \mathbb{R}^N = \dim Ker \psi_x + \dim (Ker \psi_x)^\perp, \forall x \in X.$$

Como $\sigma_x : (Ker \psi_x)^\perp \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que

$$\dim (Ker \psi_x)^\perp = \dim E_x, \forall x \in X.$$

Portanto, para $x' \in U$, temos que

$$\begin{aligned} N &= \dim Ker \psi_{x'} + \dim (Ker \psi_{x'})^\perp = \dim Ker \psi_{x'} + \dim E_{x'} = \dim Ker \psi_{x'} + n \Rightarrow \\ \dim Ker \psi_{x'} &= N - n. \end{aligned}$$

Seja $F = \bigcup_{x \in X} Ker \psi_x \subset X \times \mathbb{R}^N$. Definimos $\rho : F \rightarrow X$ da seguinte maneira: dado $f \in F$, existe um único $x \in X$ tal que $f \in Ker \psi_x$. Então $\rho(f) = x$.

Pela Proposição 2.5, temos que $\eta = (F, \rho, X)$ é um fibrado vetorial com base X .

Vamos mostrar que os fibrados $\xi \oplus \eta$ e $\theta_N = (X \times \mathbb{R}^N, p_N, X)$ são isomorfos.

Note que $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\} =$

$= \{(e, (x, u)) \in E \times \bigcup_{x \in X} \text{Ker } \psi_x \mid \pi(e) = x\}$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu(e, (x, u)) = x = \pi(e)$.

Vamos definir uma função $g : X \times \mathbb{R}^N \rightarrow G$ da seguinte maneira: dado $(x, u) \in X \times \mathbb{R}^N$, como $\{x\} \times \mathbb{R}^N = \text{Ker } \psi_x \oplus (\text{Ker } \psi_x)^\perp$, existem únicos $(x, u_1) \in \text{Ker } \psi_x$ e $(x, u_2) \in (\text{Ker } \psi_x)^\perp$ tais que $(x, u) = (x, u_1) + (x, u_2)$. Definimos $g(x, u) = (\sigma_x(x, u_2), (x, u_1))$. Como $\sigma_x(x, u_2) \in E_x$ temos que $\pi(\sigma_x(x, u_2)) = x$. Logo, g está bem definida e é contínua.

Definimos também

$$\begin{aligned} g^{-1} : G &\rightarrow X \times \mathbb{R}^N \\ (e, (x, u)) &\mapsto (x, u) + \sigma_x^{-1}(e) \end{aligned}$$

Como $\pi(e) = x$, temos que $e \in E_x$, logo $\sigma_x^{-1}(e) \in (\text{Ker } \psi_x)^\perp$. Portanto, $(x, u) + \sigma_x^{-1}(e) \in \text{Ker } \psi_x \oplus (\text{Ker } \psi_x)^\perp = \{x\} \times \mathbb{R}^N$. Portanto, g^{-1} está bem definida e é contínua.

Observe que:

$$(1) \quad g^{-1} \circ g((x, u) = (x, u_1) + (x, u_2)) = g^{-1}(\sigma_x(x, u_2), (x, u_1)) = (x, u_1) + \sigma_x^{-1}(\sigma_x(x, u_2)) = (x, u_1) + (x, u_2) = (x, u), \quad \forall (x, u) \in X \times \mathbb{R}^N.$$

$$(2) \quad g \circ g^{-1}(e, (x, u)) = g((x, u) + \sigma_x^{-1}(e)) = (\sigma_x(\sigma_x^{-1}(e)), (x, u)) = (e, (x, u)), \quad \forall (e, (x, u)) \in G.$$

Isto mostra que g^{-1} é a inversa da função g . Logo, g é homeomorfismo.

Note também que

$$\nu \circ g((x, u) = (x, u_1) + (x, u_2)) = \nu(\sigma_x(x, u_2), (x, u_1)) = x = p_N(x, u) \Rightarrow \nu \circ g = p_N.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $g|_{\{x\} \times \mathbb{R}^N} : \{x\} \times \mathbb{R}^N \rightarrow E_x \times \text{Ker } \psi_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois $\sigma_x : (\text{Ker } \psi_x)^\perp \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Isto mostra que $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \theta_N \rangle$. $\square$

Teorema 2.7 *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto e sejam ξ e η fibrados vetoriais com base X . Então $[\xi] = [\eta]$ em $K(X)$ se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\langle \xi \oplus \theta_N \rangle = \langle \eta \oplus \theta_N \rangle$.*

Demonstração: Suponha que $[\xi] = [\eta]$ em $K(X)$. Isto significa que

$$G(\langle \xi \rangle) = G(\langle \eta \rangle) \Leftrightarrow \overline{(\langle \xi \rangle, \langle \theta_0 \rangle)} = \overline{(\langle \eta \rangle, \langle \theta_0 \rangle)}.$$

Pela construção de $K(X)$ (ver Capítulo 1, seção 1.2), isto significa que existe um fibrado vetorial ψ com base X tal que $\langle \xi \rangle + \langle \psi \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \psi \rangle$.

Pelo Teorema 2.6, existem um fibrado vetorial ψ' com base X e um número $N \in \mathbb{N}$ tais que $\langle \psi \oplus \psi' \rangle = \langle \theta_N \rangle$, ou seja, $\langle \psi \rangle + \langle \psi' \rangle = \langle \theta_N \rangle$. Logo,

$$\langle \xi \rangle + \langle \psi \rangle + \langle \psi' \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \psi \rangle + \langle \psi' \rangle \Rightarrow \langle \xi \rangle + \langle \theta_N \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \theta_N \rangle \Leftrightarrow \langle \xi \oplus \theta_N \rangle = \langle \eta \oplus \theta_N \rangle.$$

Reciprocamente, suponha que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\langle \xi \oplus \theta_N \rangle = \langle \eta \oplus \theta_N \rangle$. Então

$$\langle \eta \rangle + \langle \theta_N \rangle = \langle \eta \rangle + \langle \theta_N \rangle \Rightarrow [\xi] + [\theta_N] = [\eta] + [\theta_N] \Rightarrow [\xi] = [\eta].$$

Logo, $[\xi] = [\eta]$ em $K(X)$. $\square$

Teorema 2.8 *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Então todo elemento de $K(X)$ é da forma $[\xi] - [\theta_N]$, onde ξ é um fibrado vetorial com base X e $N \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.3(iv), todo elemento de $K(X)$ é da forma $[\xi_1] - [\eta_1]$, onde ξ_1 e η_1 são fibrados vetoriais com base X . Pelo Teorema 2.6, existem um fibrado vetorial η_2 com base X e um número $N \in \mathbb{N}$ tais que $\langle \eta_1 \oplus \eta_2 \rangle = \langle \theta_N \rangle$. Logo,

$$[\xi_1] - [\eta_1] = [\xi_1] + [\eta_2] - [\eta_1] - [\eta_2] = [\xi_1 \oplus \eta_2] - [\eta_1 \oplus \eta_2] = [\xi_1 \oplus \eta_2] - [\theta_N].$$

Seja $\xi = \xi_1 \oplus \eta_2$, então ξ é fibrado vetorial com base X e

$$[\xi_1] - [\eta_1] = [\xi] - [\theta_N].$$

Portanto, todo elemento de $K(X)$ é da forma $[\xi] - [\theta_N]$, onde ξ é um fibrado vetorial com base X e $N \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 2.5 *Suponha que $X = \{x\}$, isto é, o espaço topológico X consiste de apenas um ponto. Então os grupos $K(X)$ e $\mathbb{Z}$ são isomorfos.*

De fato, seja $\xi = (E, \pi, X)$ um fibrado vetorial com base X . Como $\pi^{-1}(\{x\}) = E$, temos que E é um espaço vetorial real de dimensão finita. Definimos $\dim \xi = \dim E$.

Suponha agora que $\eta = (F, \rho, X)$ é outro fibrado vetorial com base X , isomorfo a ξ . Isto significa que existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow F$ tal que $\rho \circ h = \pi$ e $h|_{\pi^{-1}(\{x\})} : E \rightarrow F$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Em particular, $\dim E = \dim F$, isto é, $\dim \xi = \dim \eta$.

Isto mostra que está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : Vect(X) &\rightarrow \mathbb{N} \\ \langle \xi \rangle &\mapsto \dim \xi \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Φ é homomorfismo de semigrupos. Para isso, sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X . Vamos mostrar que

$$\Phi(\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle) = \Phi(\langle \xi \rangle) + \Phi(\langle \eta \rangle) \Leftrightarrow \dim(\xi \oplus \eta) = \dim \xi + \dim \eta.$$

Observe que $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\} = E \times F$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu(e, f) = x$. Logo, $\dim(\xi \oplus \eta) = \dim G = \dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Portanto,

$$\dim(\xi \oplus \eta) = \dim E + \dim F = \dim \xi + \dim \eta \Rightarrow \dim(\xi \oplus \eta) = \dim \xi + \dim \eta.$$

Isto mostra que Φ é homomorfismo de semigrupos.

Vamos mostrar agora que Φ é uma bijeção. Sejam $\xi = (E, \pi, X)$ e $\eta = (F, \rho, X)$ fibrados vetoriais com base X tais que

$$\Phi(\langle \xi \rangle) = \Phi(\langle \eta \rangle) \Leftrightarrow \dim \xi = \dim \eta \Leftrightarrow \dim E = \dim F.$$

Portanto, existe um isomorfismo de espaços vetoriais $h : E \rightarrow F$. Em particular, h é homeomorfismo. É claro que $\rho \circ h = \pi$ e $h|_{\pi^{-1}(\{x\})} : E \rightarrow F$ é isomorfismo de espaços vetoriais. Logo os fibrados ξ e η são isomorfos, isto é, $\langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle$. Portanto, Φ é injetiva.

Seja agora $n \in \mathbb{N}$. Temos que $\theta_n = (X \times \mathbb{R}^n, \pi_n, X)$ é fibrado vetorial com base X e $\dim \theta_n = \dim \mathbb{R}^n = n$. Logo, $\Phi(\langle \theta_n \rangle) = \dim \theta_n = n$. Portanto, Φ é sobrejetiva.

Logo, Φ é uma bijeção.

Pelo Teorema 1.7, existe um único homomorfismo de grupos $\Psi : K(X) \rightarrow K(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ que satisfaz

$$\Psi([\xi]) = \dim \xi \Leftrightarrow \Psi([\xi]) = \Phi(\langle \xi \rangle), \forall \langle \xi \rangle \in Vect(X).$$

Vamos mostrar que Ψ é uma aplicação bijetiva.

De fato, como X é espaço topológico de Hausdorff compacto, pelo Teorema 2.8, todo elemento de $K(X)$ é da forma $[\xi] - [\theta_N]$, onde ξ é um fibrado vetorial com base X e $N \in \mathbb{N}$. Sejam $[\xi] - [\theta_N]$ e $[\eta] - [\theta_M]$ elementos de $K(X)$ tais que $\Psi([\xi] - [\theta_N]) = \Psi([\eta] - [\theta_M])$. Note que

$$\begin{aligned} \Psi([\xi] - [\theta_N]) = \Psi([\eta] - [\theta_M]) &\Rightarrow \Psi([\xi]) - \Psi([\theta_N]) = \Psi([\eta]) - \Psi([\theta_M]) \Rightarrow \\ \Psi([\xi]) + \Psi([\theta_M]) &= \Psi([\eta]) + \Psi([\theta_N]) \Rightarrow \Phi(\langle \xi \rangle) + \Phi(\langle \theta_M \rangle) = \Phi(\langle \eta \rangle) + \Phi(\langle \theta_N \rangle) \Rightarrow \\ \Phi(\langle \xi \rangle + \langle \theta_M \rangle) &= \Phi(\langle \eta \rangle + \langle \theta_N \rangle) \Rightarrow \Phi(\langle \xi \oplus \theta_M \rangle) = \Phi(\langle \eta \oplus \theta_N \rangle). \end{aligned}$$

Como Φ é injetiva, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(\langle \xi \oplus \theta_M \rangle) = \Phi(\langle \eta \oplus \theta_N \rangle) &\Rightarrow \langle \xi \oplus \theta_M \rangle = \langle \eta \oplus \theta_N \rangle \Rightarrow [\xi \oplus \theta_M] = [\eta \oplus \theta_N] \Rightarrow \\ [\xi] + [\theta_M] &= [\eta] + [\theta_N] \Rightarrow [\xi] - [\theta_N] = [\eta] - [\theta_M]. \end{aligned}$$

Logo, Ψ é injetiva.

Seja agora $k \in \mathbb{Z}$. Então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $k = m - n$. De fato, se $k \geq 0$, tome $m = k$, $n = 0$. Se $k < 0$, tome $m = 0$, $n = -k$. Como Φ é sobrejetiva, existem $\langle \xi \rangle, \langle \eta \rangle \in Vect(X)$ tais que $\Phi(\langle \xi \rangle) = m$ e $\Phi(\langle \eta \rangle) = n$. Note que

$$\Psi([\xi] - [\eta]) = \Psi([\xi]) - \Psi([\eta]) = \Phi(\langle \xi \rangle) - \Phi(\langle \eta \rangle) = m - n = k.$$

Como $[\xi] - [\eta] \in K(X)$, temos que Ψ é sobrejetiva.

Concluimos que $\Psi : K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ é isomorfismo de grupos. $\square$

Capítulo 3

O Teorema de Kuiper

Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita sobre o corpo dos números reais e suponha que H é separável. Utilizaremos a seguinte notação:

$$\mathcal{L}(H) = \{T : H \rightarrow H \mid T \text{ é linear e limitado}\} = \{T : H \rightarrow H \mid T \text{ é linear e contínuo}\}$$

$$GL(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) \mid T \text{ é bijetivo}\}$$

$$U(H) = \{T \in GL(H) \mid |T(h)| = |h|, \forall h \in H\} = \{T \in GL(H) \mid \|T\| = 1 = \|T^{-1}\|\}$$

É conhecido que $\mathcal{L}(H)$ é uma álgebra de Banach com a multiplicação dada pela composição de operadores e norma dada por $\|T\| = \sup \{|T(h)| \mid |h| = 1\}$.

Também sabe-se que $GL(H) \subset \mathcal{L}(H)$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{L}(H)$ e que a aplicação $GL(H) \rightarrow GL(H)$, $T \mapsto T^{-1}$ é contínua. Para uma demonstração destes fatos, ver [Bac].

O objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte

Teorema 3.1 (Teorema de Kuiper) *Todos os grupos de homotopia de $GL(H)$ são nulos, isto é, $\pi_k(GL(H)) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$*

3.1 Prova do Teorema

Sejam $S^k = \{x = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\}$ a esfera de raio 1 em $\mathbb{R}^{k+1}$ e $f_0 : S^k \rightarrow GL(H)$ uma aplicação contínua. Vamos construir uma sequência de aplicações contínuas $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 : S^k \rightarrow GL(H)$ tal que f_0 é homotópica a f_1 , f_1 é homotópica a f_2 , f_2 é homotópica a f_3 , f_3 é homotópica a f_4 , f_4 é homotópica a f_5 e $f_5(s) = Id_H \in GL(H)$, $\forall s \in S^k$. Daí, concluímos que f_0 é homotópica a f_5 , cuja classe de homotopia é a identidade do grupo $\pi_k(GL(H))$.

Lema 3.1 *Existe uma aplicação contínua $f_1 : S^k \rightarrow GL(H)$ tal que f_0 é homotópica a f_1 e $f_1(S^k)$ está contido em um subespaço vetorial $W \subset \mathcal{L}(H)$ de dimensão finita.*

Demonstração: Como $GL(H)$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{L}(H)$, para cada $s \in S^k$, existe $r_s > 0$ tal que $B(f_0(s), r_s) = \{g \in \mathcal{L}(H) \mid \|g - f_0(s)\| < r_s\} \subset GL(H)$. Tomando

$\epsilon_s = \frac{r_s}{3}$, temos que $B(f_0(s), \epsilon_s) \subset B(f_0(s), r_s) \subset GL(H)$. Temos então que $f_0(S^k) \subset \bigcup_{s \in S^k} B(f_0(s), \epsilon_s)$. Como S^k é compacto e f_0 é contínua, $f_0(S^k)$ é compacto, logo existem $N \in \mathbb{N}$ e $s_1, \dots, s_N \in S^k$ tais que $f_0(S^k) \subset \bigcup_{j=1}^N B(f_0(s_j), \epsilon_{s_j})$. Para simplificar a notação vamos denotar $f_0(s_j)$ por z_j , ϵ_{s_j} por ϵ_j e vamos escrever B_j no lugar de $B(f_0(s_j), \epsilon_{s_j})$.

Para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, defina

$$\Psi_j : \bigcup_{i=1}^N B_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } z \notin B_j \\ \epsilon_j - \|z - z_j\| & \text{se } z \in B_j \end{cases}$$

Observe que Ψ_j é contínua e $\Psi_j(z) > 0$ se $z \in B_j$.

Defina também

$$\Phi_j : \bigcup_{i=1}^N B_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto \frac{\Psi_j(z)}{\sum_{l=1}^N \Psi_l(z)}$$

Temos que Φ_j é contínua, $0 \leq \Phi_j(z) \leq 1$ e $\sum_{j=1}^N \Phi_j(z) = 1$, $\forall z \in \bigcup_{i=1}^N B_i$.

Para cada $t \in [0, 1]$, defina

$$\sigma_t : \bigcup_{i=1}^N B_i \rightarrow GL(H)$$

$$z \mapsto (1-t)z + t \sum_{j=1}^N \Phi_j(z) z_j$$

Temos que σ_t é contínua. Para ver porque $\sigma_t(z) \in GL(H)$, note que $\Phi_j(z) \neq 0 \Leftrightarrow z \in B_j$. Sejam $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, \dots, N\}$ tais que $z \in \bigcap_{i=1}^m B_{j_i}$ e $z \notin \bigcup_{l \neq j_1, \dots, j_m} B_l$. Seja $M \in \{j_1, \dots, j_m\}$ tal que $\epsilon_M = \max \{\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_m}\}$. Para $i \in \{1, \dots, m\}$ temos que $B_{j_i} \subset B(z_M, 3\epsilon_M)$. De fato, se $\|w - z_{j_i}\| < \epsilon_{j_i}$, então

$$\|w - z_M\| \leq \|w - z\| + \|z - z_M\| < \|w - z\| + \epsilon_M \leq \|w - z_{j_i}\| + \|z_{j_i} - z\| + \epsilon_M < \epsilon_{j_i} + \epsilon_{j_i} + \epsilon_M \leq \epsilon_M + \epsilon_M + \epsilon_M = 3\epsilon_M.$$

Portanto,

$$\left\| \sum_{j=1}^N \Phi_j(z) z_j - z_M \right\| = \left\| \sum_{j=1}^N \Phi_j(z) z_j - \sum_{j=1}^N \Phi_j(z) z_M \right\| = \left\| \sum_{j=1}^N \Phi_j(z) (z_j - z_M) \right\| =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^m \Phi_{j_i}(z) (z_{j_i} - z_M) \right\| \leq \sum_{i=1}^m |\Phi_{j_i}(z)| \|z_{j_i} - z_M\| = \sum_{i=1}^m \Phi_{j_i}(z) \|z_{j_i} - z_M\| <$$

$$\sum_{i=1}^m \Phi_{j_i}(z) 3\epsilon_M = 3\epsilon_M \sum_{j=1}^N \Phi_j(z) = 3\epsilon_M.$$

Daí $\sum_{j=1}^N \Phi_j(z)z_j \in B(z_M, 3\epsilon_M)$. Como $z \in B(z_M, 3\epsilon_M)$ e $B(z_M, 3\epsilon_M)$ é um conjunto convexo, temos que $(1-t)z + t\sum_{j=1}^N \Phi_j(z)z_j \in B(z_M, 3\epsilon_M)$, $\forall t \in [0, 1]$. Como $B(z_M, 3\epsilon_M) \subset GL(H)$, temos que $\sigma_t(z) \in GL(H)$, $\forall z \in \bigcup_{i=1}^N B_i$ e $\forall t \in [0, 1]$.

Defina

$$\begin{aligned} F_1 : S^k \times I &\rightarrow GL(H) \\ (s, t) &\mapsto \sigma_t(f_0(s)) \end{aligned}$$

Temos que F_1 é contínua. Seja $f_1 : S^k \rightarrow GL(H)$, $f_1(s) = F_1(s, 1)$.

Então $\begin{cases} F_1(s, 0) = \sigma_0(f_0(s)) = f_0(s) \\ F_1(s, 1) = f_1(s) \end{cases}$, $\forall s \in S^k$, ou seja, as aplicações $f_0, f_1 : S^k \times I \rightarrow GL(H)$ são homotópicas.

Note que $f_1(s) = \sigma_1(f_0(s)) = \sum_{j=1}^N \Phi_j(f_0(s))z_j$, $\forall s \in S^k$. Tome $W = \text{span}\{z_1, z_2, \dots, z_N\} \subset \mathcal{L}(H)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}(H)$ gerado pelos elementos $z_1, \dots, z_N \in GL(H)$. Então $f_1(S^k) \subset W$ e o Lema está provado, pois $\dim W \leq N$. $\square$

Vamos construir, por indução, uma sequência de vetores unitários $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset H$, uma sequência de subespaços vetoriais $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de dimensão $N + 2$ e uma outra sequência de vetores unitários $(a_i^0)_{i \in \mathbb{N}} \subset H$ tais que:

- (1) $\{a_i, a_i^0, z_1(a_i), z_2(a_i), \dots, z_N(a_i)\} \subset A_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$;
- (2) a_i^0 é ortogonal aos vetores $a_i, z_1(a_i), z_2(a_i), \dots, z_N(a_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$;
- (3) os espaços vetoriais A_i e A_j são ortogonais se $i \neq j$.

Começamos tomando $a_1 \in H$ um vetor unitário. Seja $a_1^0 \in H$ um vetor unitário ortogonal a $a_1, z_1(a_1), \dots, z_N(a_1)$ (tome, por exemplo, $a_1^0 \in (\text{span}\{a_1, z_1(a_1), \dots, z_N(a_1)\})^\perp$ que é um subespaço vetorial de H de dimensão infinita). Seja $A_1 \subset H$ subespaço vetorial de H de dimensão $N + 2$ que contém os vetores $a_1, a_1^0, z_1(a_1), z_2(a_1), \dots, z_N(a_1)$.

Suponha por indução que foram escolhidos $k - 1$ vetores unitários $a_1, \dots, a_{k-1}$, $k - 1$ subespaços vetoriais $A_1, \dots, A_{k-1}$ de dimensão $N + 2$ e outros $k - 1$ vetores unitários $a_1^0, \dots, a_{k-1}^0$ satisfazendo as propriedades (1), (2) e (3).

Tome

$$a_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} \left[A_i^\perp \cap \left(\bigcap_{j=1}^N z_j^{-1}(A_i^\perp) \right) \right]$$

um vetor unitário. Para que isso seja possível observe que os espaços $A_i^\perp$, $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ têm codimensão finita e $H = A_i \oplus A_i^\perp \Rightarrow H = z_j^{-1}(H) = z_j^{-1}(A_i) \oplus z_j^{-1}(A_i^\perp)$, logo a codimensão de $z_j^{-1}(A_i^\perp)$ é finita, para $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ e $j \in \{1, \dots, N\}$. Como a interseção de espaços de codimensão finita tem codimensão finita (ver [Bou2], p. AII.100), temos que o espaço $\bigcap_{i=1}^{k-1} \left[A_i^\perp \cap \left(\bigcap_{j=1}^N z_j^{-1}(A_i^\perp) \right) \right]$ tem codimensão finita, logo dimensão infinita.

Da escolha do vetor a_k temos que $a_k \in A_i^\perp$ e $z_j(a_k) \in A_i^\perp$ para $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

Escolha $A_k \subset H$ um subespaço vetorial de dimensão $N+2$ que contém os vetores $a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)$ e é ortogonal a A_i para $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Para isso complete a dimensão de $\text{span}\{a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)\}$ com vetores no espaço $\bigcap_{i=1}^{k-1} \left[A_i^\perp \cap \left(\bigcap_{j=1}^N z_j^{-1}(A_i^\perp) \right) \right]$, que sabemos ter dimensão infinita.

Por último, tome $a_k^0 \in A_k$ um vetor unitário ortogonal aos vetores $a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)$. Para isso, observe que

$$A_k = \text{span}\{a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)\} \oplus \{a \in A_k \mid a \text{ é ortogonal a } a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)\}.$$

Como $\dim \text{span}\{a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)\} \leq N+1$ e $\dim A_k = N+2$, temos que

$$\dim \{a \in A_k \mid a \text{ é ortogonal aos vetores } a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)\} \geq 1.$$

Tomamos então $a_k^0 \in \{a \in A_k \mid a \text{ é ortogonal aos vetores } a_k, z_1(a_k), \dots, z_N(a_k)\}$.

Dessa forma construímos por indução uma sequência de vetores unitários $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset H$, uma sequência de subespaços vetoriais $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de dimensão $N+2$ e uma outra sequência de vetores unitários $(a_i^0)_{i \in \mathbb{N}} \subset H$ satisfazendo (1), (2) e (3).

Observe que as aplicações $f_1 : S^k \rightarrow GL(H)$ (do Lema 3.1) e $\|\cdot\| : GL(H) \rightarrow \mathbb{R}, T \mapsto \|T\|$ são contínuas, logo a aplicação $\|\cdot\| \circ f_1 : S^k \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \|f_1(s)\|$ também é contínua. Como S^k é compacto, o conjunto $\{\|f_1(s)\| \mid s \in S^k\} \subset \mathbb{R}$ é compacto, logo existe $M_1 > 0$ tal que $\|f_1(s)\| \leq M_1, \forall s \in S^k$. Da continuidade da aplicação $GL(H) \rightarrow GL(H), T \mapsto T^{-1}$, segue que também é contínua a aplicação $S^k \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \|(f_1(s))^{-1}\|$. Portanto, existe $M_2 > 0$ tal que $\|(f_1(s))^{-1}\| \leq M_2, \forall s \in S^k$.

Tome $c = \max\{M_1, M_2\}$, então $\|f_1(s)\| \leq c$ e $\|(f_1(s))^{-1}\| \leq c, \forall s \in S^k$.

Defina $W_c = \{w \in W \cap GL(H) \mid \|w\| \leq c, \|w^{-1}\| \leq c\}$. É claro que $f_1(S^k) \subset W_c$.

Seja $i \in \mathbb{N}$ fixado. Observamos que para $w \in W_c, w(a_i) \in A_i$. De fato, como $w \in W = \text{span}\{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tais que $w = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_N z_N$. Daí $w(a_i) = \alpha_1 z_1(a_i) + \dots + \alpha_N z_N(a_i) \in A_i$ (olhar a construção de A_i).

Observe também que $1 = \|Id_H\| = \|w^{-1} \circ w\| \leq \|w^{-1}\| \|w\| \leq c \|w\| \Rightarrow \frac{1}{c} \leq \|w\| \leq c$. Em particular $c \geq 1$ e $\frac{1}{c} \leq |w(a_i)| \leq c$ pois $\|a_i\| = 1$.

Geometricamente, nosso objetivo é rotacionar o vetor $w(a_i)$ no plano gerado pelos vetores mutuamente ortogonais $w(a_i), a_i^0 \in A_i$, até que $w(a_i)$ tome a posição do vetor $|w(a_i)| a_i^0$. Após, vamos rotacionar o vetor a_i^0 no plano gerado pelos vetores mutuamente ortogonais $a_i, a_i^0 \in A_i$ até que a_i^0 tome a posição do vetor a_i . Durante essas duas rotações vamos manter os vetores ortogonais ao plano onde a rotação ocorre fixados. Após essas duas rotações, o vetor $w(a_i)$ tomará o lugar do vetor $|w(a_i)| a_i$.

Definimos $K_i : W_c \times I \rightarrow U(A_i) = \{T : A_i \rightarrow A_i \mid T \text{ é linear, bijetora e } |T(h)| = |h|, \forall h \in A_i\}$

do seguinte modo:

Para $w \in W_c$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} K_i(w, t)(w(a_i)) = (\cos \pi t)w(a_i) + (\sin \pi t)|w(a_i)|a_i^0 \\ K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0) = (-\sin \pi t)w(a_i) + (\cos \pi t)|w(a_i)|a_i^0 \\ K_i(w, t)(x) = x, \text{ se } x \in A_i \text{ e } x \perp w(a_i), x \perp a_i^0 \end{cases}$$

Estendemos $K_i(w, t) : A_i \rightarrow A_i$ a todo o espaço A_i de maneira linear. Isto é, como

$$\begin{aligned} A_i &= \text{span} \{w(a_i), |w(a_i)|a_i^0\} \oplus (\text{span} \{w(a_i), |w(a_i)|a_i^0\})^\perp \\ &= \text{span} \{w(a_i)\} \oplus \text{span} \{|w(a_i)|a_i^0\} \oplus \{x \in A_i \mid x \perp w(a_i), x \perp a_i^0\}, \end{aligned}$$

dado $h \in A_i$, existem únicos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e um único $x \in \{x \in A_i \mid x \perp w(a_i), x \perp a_i^0\}$ tais que $h = \alpha w(a_i) + \beta |w(a_i)|a_i^0 + x$. Então,

$$K_i(w, t)(h) = \alpha K_i(w, t)(w(a_i)) + \beta K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0) + K_i(w, t)(x).$$

Dessa maneira $K_i(w, t)$ está bem definida e é linear.

Para ver porque $K_i(w, t) \in U(A_i)$, vamos mostrar que $|K_i(w, t)(h)| = |h|$, $\forall h \in A_i$. Daí teremos que $K_i(w, t)$ é injetiva e, como A_i tem dimensão finita, teremos que $K_i(w, t)$ também é sobrejetiva, logo uma bijeção.

Seja $h = \alpha w(a_i) + \beta |w(a_i)|a_i^0 + x \in A_i$, então

$$\begin{aligned} |h|^2 &= \langle h, h \rangle = \langle \alpha w(a_i) + \beta |w(a_i)|a_i^0 + x, \alpha w(a_i) + \beta |w(a_i)|a_i^0 + x \rangle = \\ &= \alpha^2 \langle w(a_i), w(a_i) \rangle + \beta^2 |w(a_i)|^2 \langle a_i^0, a_i^0 \rangle + \langle x, x \rangle = \\ &= \alpha^2 |w(a_i)|^2 + \beta^2 |w(a_i)|^2 |a_i^0|^2 + |x|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2 + |x|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, note da definição de $K_i(w, t)$ que:

- (a) $|K_i(w, t)(w(a_i))|^2 = (\cos \pi t)^2 |w(a_i)|^2 + (\sin \pi t)^2 |w(a_i)|^2 |a_i^0|^2 = |w(a_i)|^2$,
- (b) $|K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0)|^2 = (\sin \pi t)^2 |w(a_i)|^2 + (\cos \pi t)^2 |w(a_i)|^2 |a_i^0|^2 = |w(a_i)|^2$,
- (c) $|K_i(w, t)(x)|^2 = |x|^2$,
- (d) $\langle K_i(w, t)(w(a_i)), K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0) \rangle = 0$,
- (e) $\langle K_i(w, t)(w(a_i)), K_i(w, t)(x) \rangle = 0$,
- (f) $\langle K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0), K_i(w, t)(x) \rangle = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} |K_i(w, t)(h)|^2 &= |\alpha K_i(w, t)(w(a_i)) + \beta K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0) + K_i(w, t)(x)|^2 = \\ &= \alpha^2 |K_i(w, t)(w(a_i))|^2 + \beta^2 |K_i(w, t)(|w(a_i)|a_i^0)|^2 + |K_i(w, t)(x)|^2 = \\ &= \alpha^2 |w(a_i)|^2 + \beta^2 |w(a_i)|^2 + |x|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2 + |x|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|K_i(w, t)(h)| = |h|$.

Note que $K_i(w, 0) = Id_{A_i}$ e $K_i(w, \frac{1}{2})(w(a_i)) = |w(a_i)|a_i^0$. Portanto $K_i(w, t)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, corresponde à primeira rotação.

Para cada $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, vamos definir um operador linear $\phi_i(t) : A_i \rightarrow A_i$ do seguinte modo:

$$\begin{cases} \phi_i(t)(a_i^0) = (\cos \pi(t - 1/2))a_i^0 + (\sin \pi(t - 1/2))a_i \\ \phi_i(t)(a_i) = -(\sin \pi(t - 1/2))a_i^0 + (\cos \pi(t - 1/2))a_i \\ \phi_i(t)(x) = x, \text{ se } x \in A_i \text{ e } x \perp a_i, x \perp a_i^0 \end{cases}$$

Estendemos $\phi_i(t) : A_i \rightarrow A_i$ de maneira linear a todo A_i , isto é, como

$$A_i = \text{span} \{a_i, a_i^0\} \oplus (\text{span} \{a_i, a_i^0\})^\perp = \text{span} \{a_i\} \oplus \text{span} \{a_i^0\} \oplus \{x \in A_i \mid x \perp a_i, x \perp a_i^0\},$$

dado $h \in A_i$ existem únicos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e um único $x \in \{x \in A_i \mid x \perp a_i, x \perp a_i^0\}$ tais que $h = \alpha a_i + \beta a_i^0 + x$. Então,

$$\phi_i(t)(h) = \alpha \phi_i(t)(a_i) + \beta \phi_i(t)(a_i^0) + \phi_i(t)(x).$$

Dessa maneira, $\phi_i(t)$ está bem definida e é linear. Vamos mostrar que $\phi_i(t) \in U(A_i)$. Para isso basta que $|\phi_i(t)(h)| = |h|$, $\forall h \in A_i$.

Seja $h = \alpha a_i + \beta a_i^0 + x \in A_i$, então

$$\begin{aligned} |h|^2 &= \langle h, h \rangle = \langle \alpha a_i + \beta a_i^0 + x, \alpha a_i + \beta a_i^0 + x \rangle = \alpha^2 \langle a_i, a_i \rangle + \beta^2 \langle a_i^0, a_i^0 \rangle + \langle x, x \rangle = \\ &= \alpha^2 |a_i|^2 + \beta^2 |a_i^0|^2 + |x|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + |x|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, note que:

$$(a) \quad |\phi_i(t)(a_i^0)|^2 = (\cos \pi(t - 1/2))^2 |a_i^0|^2 + (\sin \pi(t - 1/2))^2 |a_i|^2 = 1$$

$$(b) \quad |\phi_i(t)(a_i)|^2 = (\sin \pi(t - 1/2))^2 |a_i^0|^2 + (\cos \pi(t - 1/2))^2 |a_i|^2 = 1,$$

$$(c) \quad |\phi_i(t)(x)|^2 = |x|^2,$$

$$(d) \quad \langle \phi_i(t)(a_i), \phi_i(t)(a_i^0) \rangle = 0,$$

$$(e) \quad \langle \phi_i(t)(a_i), \phi_i(t)(x) \rangle = 0,$$

$$(f) \quad \langle \phi_i(t)(a_i^0), \phi_i(t)(x) \rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\phi_i(t)(h)|^2 &= |\alpha \phi_i(t)(a_i) + \beta \phi_i(t)(a_i^0) + \phi_i(t)(x)|^2 = \\ &= \alpha^2 |\phi_i(t)(a_i)|^2 + \beta^2 |\phi_i(t)(a_i^0)|^2 + |\phi_i(t)(x)|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + |x|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|\phi_i(t)(h)| = |h|$.

Note que $\phi_i(1/2) = Id_{A_i}$ e $\phi_i(1)(a_i^0) = a_i$. Logo $\phi_i(t)$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, é a segunda rotação.

Para $w \in W_c$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, definimos

$$K_i(w, t) = \phi_i(t) \circ K_i(w, 1/2).$$

Como $\phi_i(\frac{1}{2}) = Id_{A_i}$, não há ambiguidade na definição de K_i no ponto $(w, \frac{1}{2}) \in W_c \times I$.

Observe que $K_i(w, t) \in U(A_i)$ para $w \in W_c$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, pois $\phi_i(t)$, $K_i(w, \frac{1}{2}) \in U(A_i)$.

Observe também que

$$K_i(w, 1)(w(a_i)) = \phi_i(1) \circ K_i(w, \frac{1}{2})(w(a_i)) = \phi_i(1)(|w(a_i)| a_i^0) = |w(a_i)| \phi_i(1)(a_i^0) = |w(a_i)| a_i.$$

Portanto, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos definida uma aplicação $K_i : W_c \times I \rightarrow U(A_i)$ tal que $K_i(w, 0) = Id_{A_i}$ e $K_i(w, 1)(w(a_i)) = |w(a_i)| a_i$.

Lema 3.2 Para cada $i \in \mathbb{N}$, a aplicação $K_i : W_c \times I \rightarrow U(A_i)$ é contínua.

Demonstração: Note que a função K_i foi definida separadamente em cada um dos subconjuntos fechados $W_c \times [0, \frac{1}{2}]$ e $W_c \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $W_c \times I$ e na interseção desses conjuntos, $W_c \times \{\frac{1}{2}\}$, a função está bem definida. Logo basta mostrar a continuidade de K_i separadamente em cada um dos conjuntos $W_c \times [0, \frac{1}{2}]$ e $W_c \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Dado $(w_0, t_0) \in W_c \times I$, observe que

$$\|K_i(w, t) - K_i(w_0, t_0)\| \leq \|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| + \|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\|.$$

(a) Continuidade de K_i em $W_c \times [0, \frac{1}{2}]$:

Seja $(w_0, t_0) \in W_c \times [0, \frac{1}{2}]$ fixado.

Primeiramente mostraremos que $\|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| \leq \pi |t - t_0|$. Para isso, seja $h \in A_i$, então existem únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e um único $x \in A_i$, $x \perp w(a_i)$, $x \perp a_i^0$ tais que $h = \alpha w(a_i) + \beta |w(a_i)| a_i^0 + x$. Temos que

$$\begin{aligned} & |(K_i(w, t) - K_i(w, t_0))(h)|^2 = \\ & \alpha^2 |(\cos \pi t - \cos \pi t_0)w(a_i) + (\sin \pi t - \sin \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0|^2 + \\ & \beta^2 |(-\sin \pi t + \sin \pi t_0)w(a_i) + (\cos \pi t - \cos \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0|^2 + \\ & 2\alpha\beta (|w(a_i)|^2 (\cos \pi t - \cos \pi t_0)(-\sin \pi t + \sin \pi t_0 + \sin \pi t - \sin \pi t_0)) = \\ & (\alpha^2 + \beta^2) ((\cos \pi t - \cos \pi t_0)^2 |w(a_i)|^2 + (\sin \pi t - \sin \pi t_0)^2 |w(a_i)|^2) = \\ & (\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2 (2 - 2 \cos \pi t \cos \pi t_0 - 2 \sin \pi t \sin \pi t_0) = \\ & 2(\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2 (1 - \cos(\pi t - \pi t_0)). \end{aligned}$$

Já vimos anteriormente que $|h|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2 + |x|^2 \geq (\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2$, logo

$$2(\alpha^2 + \beta^2) |w(a_i)|^2 (1 - \cos(\pi t - \pi t_0)) \leq 2 |h|^2 (1 - \cos \pi(t - t_0)).$$

Utilizando a identidade $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ temos que

$$1 - \cos \pi(t - t_0) = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}(t - t_0).$$

Utilizando a desigualdade de Jordan: $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta$, se $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, cuja demonstração pode ser encontrada em [Áv], p. 165, temos que

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} (t - t_0) = \sin^2 \frac{\pi}{2} |t - t_0| \leq \left(\frac{\pi}{2} |t - t_0| \right)^2 \text{ já que } 0 \leq \frac{\pi}{2} |t - t_0| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$2|h|^2 (1 - \cos \pi(t - t_0)) \leq 2|h|^2 2 \left(\frac{\pi}{2} |t - t_0| \right)^2.$$

Ou seja,

$$|(K_i(w, t) - K_i(w, t_0))(h)|^2 \leq 4|h|^2 \left(\frac{\pi}{2} |t - t_0| \right)^2 = (\pi |t - t_0| |h|)^2.$$

Logo,

$$\|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| \leq \pi |t - t_0|.$$

Seja θ o ângulo entre $w(a_i)$ e $w_0(a_i)$, isto é, $\theta \in [0, \pi]$ e $\cos \theta = \frac{\langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle}{|w(a_i)| |w_0(a_i)|}$. Como $w, w_0 \in W_c$, temos que $|w(a_i)| \geq \frac{1}{c}$ e $|w_0(a_i)| \geq \frac{1}{c}$.

Notemos que

$$\begin{aligned} |w(a_i) - w_0(a_i)|^2 &= \langle w(a_i) - w_0(a_i), w(a_i) - w_0(a_i) \rangle = \\ &= |w(a_i)|^2 + |w_0(a_i)|^2 - 2 \langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle = |w(a_i)|^2 + |w_0(a_i)|^2 - 2 \cos \theta |w(a_i)| |w_0(a_i)|. \end{aligned}$$

Usando a identidade $\sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$, temos que

$$\begin{aligned} |w(a_i) - w_0(a_i)|^2 &= |w(a_i)|^2 + |w_0(a_i)|^2 + |w(a_i)| |w_0(a_i)| \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \right) = \\ &= (|w(a_i)| - |w_0(a_i)|)^2 + 4 |w(a_i)| |w_0(a_i)| \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 4 |w(a_i)| |w_0(a_i)| \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq \frac{4}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $|w(a_i) - w_0(a_i)|^2 \geq \left(\frac{2}{c} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$. Portanto $|w(a_i) - w_0(a_i)| \geq \frac{2}{c} \sin \frac{\theta}{2}$.

Se $\theta = 0$, então $\langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle = |w(a_i)| |w_0(a_i)|$, isto significa que temos uma igualdade na fórmula da desigualdade de Cauchy-Schwarz, portanto os vetores $w(a_i)$ e $w_0(a_i)$ são múltiplos um do outro, e temos que $w_0(a_i) = \gamma w(a_i)$, onde $\gamma = \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|}$. Temos então que

$$\begin{aligned} K_i(w, t_0)(w_0(a_i)) &= \gamma K_i(w, t_0)(w(a_i)) = \gamma (\cos \pi t_0 w(a_i) + \sin \pi t_0 |w(a_i)| a_i^0) = \\ &= \cos \pi t_0 w_0(a_i) + \sin \pi t_0 |w_0(a_i)| a_i^0 = K_i(w_0, t_0)(w_0(a_i)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K_i(w, t_0)(|w_0(a_i)| a_i^0) &= \gamma K_i(w, t_0)(|w(a_i)| a_i^0) = \gamma (-\sin \pi t_0 w(a_i) + \cos \pi t_0 |w(a_i)| a_i^0) = \\ &= -\sin \pi t_0 w_0(a_i) + \cos \pi t_0 |w_0(a_i)| a_i^0 = K_i(w_0, t_0)(|w_0(a_i)| a_i^0). \end{aligned}$$

Agora se $x \in A_i$ e $x \perp w_0(a_i)$, $x \perp a_i^0$, então $x \perp w(a_i)$ e $K_i(w, t_0)(x) = x = K_i(w_0, t_0)(x)$.

Concluimos que $K_i(w, t_0) = K_i(w_0, t_0)$, daí

$$\|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| = 0 = 4 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Caso $\theta = \pi$, então $\langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle = -|w(a_i)| |w_0(a_i)| \Rightarrow \langle -w(a_i), w_0(a_i) \rangle = |-w(a_i)| |w_0(a_i)|$, ou seja, os vetores $-w(a_i)$ e $w_0(a_i)$ são múltiplos um do outro e podemos escrever $w_0(a_i) = -\gamma w(a_i)$, onde $\gamma = \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|}$.

Seja $h \in A_i$, então existem únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e um único $x \in A_i$, $x \perp w_0(a_i)$, $x \perp a_i^0$ tais que $h = \alpha w_0(a_i) + \beta |w_0(a_i)| a_i^0 + x = -\alpha \gamma w(a_i) + \beta \gamma |w(a_i)| a_i^0 + x$.

Observe que

$$\begin{aligned} K_i(w_0, t_0)(h) &= \alpha((\cos \pi t_0)w_0(a_i) + (\sin \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) + \\ &\quad \beta((-\sin \pi t_0)w_0(a_i) + (\cos \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) + x. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} K_i(w, t_0)(h) &= -\alpha \gamma((\cos \pi t_0)w(a_i) + (\sin \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0) + \\ &\quad \beta \gamma((-\sin \pi t_0)w(a_i) + (\cos \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0) + x = \\ &\quad \alpha((\cos \pi t_0)w_0(a_i) - (\sin \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) + \beta((\sin \pi t_0)w_0(a_i) + (\cos \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) + x. \end{aligned}$$

Logo,

$$(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h) = -2\alpha(\sin \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0 + 2\beta(\sin \pi t_0)w_0(a_i).$$

Daí

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h)|^2 &= 4\alpha^2 \sin^2 \pi t_0 |w_0(a_i)|^2 + 4\beta^2 \sin^2 \pi t_0 |w_0(a_i)|^2 = \\ &= 4(\alpha^2 + \beta^2) |w_0(a_i)|^2 \sin^2 \pi t_0. \end{aligned}$$

Como $|h|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) |w_0(a_i)|^2 + |x|^2 \geq (\alpha^2 + \beta^2) |w_0(a_i)|^2$, temos que

$$4(\alpha^2 + \beta^2) |w_0(a_i)|^2 \sin^2 \pi t_0 \leq 4 |h|^2 \sin^2 \pi t_0.$$

Mas

$$0 \leq \pi t_0 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 0 \leq \sin \pi t_0 \leq \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin^2 \pi t_0 \leq \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h)|^2 &\leq 4 |h|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \Rightarrow \|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| &\leq 2 \sin \frac{\theta}{2} \leq 4 \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Caso $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, os vetores $w(a_i)$ e $w_0(a_i)$ são linearmente independentes, e, como ambos são ortogonais ao vetor a_i^0 , temos que o subespaço vetorial E de A_i gerado pelos vetores $w(a_i)$, $w_0(a_i)$, a_i^0 tem dimensão 3.

Notemos que:

$$\begin{cases} K_i(w, t_0)(w(a_i)) = (\cos \pi t_0)w(a_i) + (\sin \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0 \\ K_i(w, t_0)(a_i^0) = \frac{1}{|w(a_i)|}((-\sin \pi t_0)w(a_i) + (\cos \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} K_i(w_0, t_0)(w_0(a_i)) = (\cos \pi t_0)w_0(a_i) + (\sin \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0 \\ K_i(w_0, t_0)(a_i^0) = \frac{1}{|w_0(a_i)|} ((-\sin \pi t_0)w_0(a_i) + (\cos \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) \end{cases}.$$

Como $A_i = \text{span} \{w(a_i)\} \oplus \text{span} \{|w(a_i)| a_i^0\} \oplus \{x \in A_i \mid x \perp w(a_i), x \perp a_i^0\}$, temos que $w_0(a_i) = \alpha_1 w(a_i) + \gamma_1 |w(a_i)| a_i^0 + x$, onde $\alpha_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\begin{cases} 0 = \langle w_0(a_i), a_i^0 \rangle = 0 + \gamma_1 |w(a_i)| + 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0 \\ \langle w_0(a_i), w(a_i) \rangle = \alpha_1 |w(a_i)|^2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta \end{cases}.$$

Logo, $w_0(a_i) = \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta w(a_i) + x$. Daí,

$$\begin{aligned} K_i(w, t_0)(w_0(a_i)) &= \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta ((\cos \pi t_0)w(a_i) + (\sin \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0) + x = \\ &= \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta ((\cos \pi t_0)w(a_i) + (\sin \pi t_0) |w(a_i)| a_i^0) + w_0(a_i) - \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta w(a_i). \end{aligned}$$

De modo análogo, como $A_i = \text{span} \{w_0(a_i)\} \oplus \text{span} \{|w_0(a_i)| a_i^0\} \oplus \{y \in A_i \mid y \perp w_0(a_i), y \perp a_i^0\}$, temos que $w(a_i) = \beta_2 w_0(a_i) + \gamma_2 |w_0(a_i)| a_i^0 + y$, onde $\beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\begin{cases} 0 = \langle w(a_i), a_i^0 \rangle = 0 + \gamma_2 |w_0(a_i)| + 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0 \\ \langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle = \beta_2 |w_0(a_i)|^2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta \end{cases}.$$

Logo, $w(a_i) = \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta w_0(a_i) + y$. Daí,

$$\begin{aligned} K_i(w_0, t_0)(w(a_i)) &= \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta ((\cos \pi t_0)w_0(a_i) + (\sin \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) + y = \\ &= \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta ((\cos \pi t_0)w_0(a_i) + (\sin \pi t_0) |w_0(a_i)| a_i^0) + w(a_i) - \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta w_0(a_i). \end{aligned}$$

Observe que $K_i(w, t_0)|_{E^\perp} = Id_{E^\perp} = K_i(w_0, t_0)|_{E^\perp}$. Portanto dado $h = h_1 + h_2 \in A_i = E \oplus E^\perp$, temos que

$$(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h) = (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h_1).$$

Pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, a partir da base $\{a_i^0, w_0(a_i), w(a_i)\}$ de E construímos uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ para E , onde

$$\begin{cases} e_1 = a_i^0 \\ e_2 = \frac{w_0(a_i)}{|w_0(a_i)|} \\ e_3 = \frac{1}{|w(a_i)| \sin \theta} \left(w(a_i) - \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta w_0(a_i) \right) \end{cases}.$$

Para mais detalhes sobre o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, ver [Bac], p. 12.

Como $h_1 \in E$ existem únicos escalares α, β, γ tais que $h_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Note que

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h_1)| &\leq |\alpha| |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_1)| + \\ &+ |\beta| |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_2)| + |\gamma| |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|. \end{aligned}$$

Observe que

(1)

$$(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(a_i^0) = -\frac{\sin \pi t_0}{|w(a_i)|} w(a_i) + \frac{\sin \pi t_0}{|w_0(a_i)|} w_0(a_i).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(a_i^0)|^2 &= \frac{\sin^2 \pi t_0}{|w(a_i)|^2} |w(a_i)|^2 - 2 \sin^2 \pi t_0 \cos \theta + \frac{\sin^2 \pi t_0}{|w_0(a_i)|^2} |w_0(a_i)|^2 = \\ 2 \sin^2 \pi t_0 (1 - \cos \theta) &= 4 \sin^2 \pi t_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 16 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(a_i^0)| \leq 4 \sin \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_1)| \leq 4 \sin \frac{\theta}{2}.$$

(2)

$$\begin{aligned} (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w(a_i)) &= (\cos \pi t_0 - 1)w(a_i) + \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta (1 - \cos \pi t_0) w_0(a_i) + \\ |w(a_i)| \sin \pi t_0 (1 - \cos \theta) a_i^0. \end{aligned}$$

Utilizando a identidade $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ temos que

$$\begin{aligned} (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w(a_i)) &= -2 \sin^2 \frac{\pi t_0}{2} w(a_i) + 2 \frac{|w(a_i)|}{|w_0(a_i)|} \cos \theta \sin^2 \frac{\pi t_0}{2} w_0(a_i) + \\ 2 |w(a_i)| \sin \pi t_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} a_i^0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w(a_i))|^2 &= \\ 4 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} (|w(a_i)|^2 - 2 |w(a_i)|^2 \cos^2 \theta + |w(a_i)|^2 \cos^2 \theta) + |w(a_i)|^2 \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) &= \\ 4 |w(a_i)|^2 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} (1 - \cos^2 \theta) + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) &= \\ 4 |w(a_i)|^2 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Como $\sin^2 \pi t_0 \leq 1$ e $\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \leq 1$ temos que

$$4 |w(a_i)|^2 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) \leq 4 |w(a_i)|^2 \left(\sin^2 \theta + \sin^4 \frac{\theta}{2} \right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \left(2 \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow \\ \sin^2 \theta &= 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 4 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^4 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Portanto $\sin^2 \theta + \sin^4 \frac{\theta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 3 \sin^4 \frac{\theta}{2} \leq 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Logo,

$$4 |w(a_i)|^2 \left(\sin^2 \theta + \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) \leq 16 |w(a_i)|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Ou seja,

$$|(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w(a_i))| \leq 4 |w(a_i)| \sin \frac{\theta}{2}.$$

(3)

$$\begin{aligned} (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w_0(a_i)) &= \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta (\cos \pi t_0 - 1) w(a_i) + (1 - \cos \pi t_0) w_0(a_i) + \\ |w_0(a_i)| \sin \pi t_0 (\cos \theta - 1) a_i^0 &= -2 \frac{|w_0(a_i)|}{|w(a_i)|} \cos \theta \sin^2 \frac{\pi t_0}{2} w(a_i) + 2 \sin^2 \frac{\pi t_0}{2} w_0(a_i) - \\ 2 |w_0(a_i)| \sin \pi t_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} a_i^0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w_0(a_i))|^2 &= \\ 4 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} (|w_0(a_i)|^2 \cos^2 \theta - 2 |w_0(a_i)|^2 \cos^2 \theta + |w_0(a_i)|^2) + |w_0(a_i)|^2 \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) &= \\ 4 |w_0(a_i)|^2 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} (1 - \cos^2 \theta) + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) &= \\ 4 |w_0(a_i)|^2 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) &\leq 16 |w_0(a_i)|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w_0(a_i))| &\leq 4 |w_0(a_i)| \sin \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_2)| &\leq 4 \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

(4) Temos que

$$\begin{aligned} (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3) &= \frac{1}{\sin \theta} (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w(a_i)}{|w(a_i)|} \right) - \\ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) &\left(\frac{w_0(a_i)}{|w_0(a_i)|} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|^2 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left| (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w(a_i)}{|w(a_i)|} \right) \right|^2 + \\ \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \left| (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w_0(a_i)}{|w_0(a_i)|} \right) \right|^2 &- \\ 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left\langle (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w(a_i)}{|w(a_i)|} \right), (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w_0(a_i)}{|w_0(a_i)|} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Pelos itens (2) e (3) temos que

$$\begin{aligned}
& \langle (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w(a_i)), (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(w_0(a_i)) \rangle = \\
& 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \cos \theta |w(a_i)| |w_0(a_i)| - 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle - 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \cos^2 \theta \langle w(a_i), w_0(a_i) \rangle + \\
& 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \cos \theta |w(a_i)| |w_0(a_i)| - 4 \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} |w(a_i)| |w_0(a_i)| = \\
& 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} |w(a_i)| |w_0(a_i)| \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) - 4 \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} |w(a_i)| |w_0(a_i)| = \\
& 4 |w(a_i)| |w_0(a_i)| \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left| (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w(a_i)}{|w(a_i)|} \right) \right|^2 = \left| (K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)) \left(\frac{w_0(a_i)}{|w_0(a_i)|} \right) \right|^2 = \\
& 4 \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|^2 = \frac{4}{\sin^2 \theta} \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) (1 + \cos^2 \theta) - \\
& 8 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \left(\sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \pi t_0 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) = 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) + \\
& 4 \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} \sin^2 \pi t_0 (1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta) = 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + 4 \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} \sin^2 \pi t_0 (1 + \cos \theta)^2.
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ temos que

$$|(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|^2 = 4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \theta + 16 \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \theta} \sin^2 \pi t_0 \cos^4 \frac{\theta}{2}.$$

Como $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, então

$$\begin{aligned}
& |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|^2 = 4 \left(4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \pi t_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = \\
& 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} + \sin^2 \pi t_0 \right).
\end{aligned}$$

Como $4 \sin^4 \frac{\pi t_0}{2} + \sin^2 \pi t_0 \leq 5$ temos que

$$|(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|^2 \leq 20 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

De $\cos^2 \frac{\theta}{2} \leq 1$, concluímos que

$$|(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)|^2 \leq 20 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(e_3)| \leq \sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}.$$

De (1), (3) e (4) temos que

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h_1)| &\leq |\alpha| \left(4 \sin \frac{\theta}{2}\right) + |\beta| \left(4 \sin \frac{\theta}{2}\right) + |\gamma| \left(\sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}\right) \leq \\ &|\alpha| \left(\sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}\right) + |\beta| \left(\sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}\right) + |\gamma| \left(\sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}\right) = (|\alpha| + |\beta| + |\gamma|) \left(\sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $|h_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, temos que $|\alpha| \leq |h_1|$, $|\beta| \leq |h_1|$ e $|\gamma| \leq |h_1|$.

Logo $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq 3|h_1|$ e

$$|(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h_1)| \leq 3\sqrt{20} |h_1| \sin \frac{\theta}{2}.$$

Como $|h| = \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2} \geq |h_1|$, temos que

$$\begin{aligned} |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h)| &= |(K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0))(h_1)| \leq 3\sqrt{20} |h_1| \sin \frac{\theta}{2} \leq \\ &3\sqrt{20} |h| \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq 3\sqrt{20} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Como $15 > 3\sqrt{20} > 4 > 0$, vale a desigualdade

$$\|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq 15 \sin \frac{\theta}{2}$$

qualquer que seja o ângulo $\theta \in [0, \pi]$.

Observe que $|w(a_i) - w_0(a_i)| \leq \|w - w_0\| |a_i| = \|w - w_0\|$.

Daí,

$$\|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq 15 \sin \frac{\theta}{2} \leq \frac{15c}{2} |w(a_i) - w_0(a_i)| \leq \frac{15c}{2} \|w - w_0\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|K_i(w, t) - K_i(w_0, t_0)\| &\leq \|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| + \|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq \\ &\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade mostra a continuidade da função K_i em $W_c \times [0, \frac{1}{2}]$.

(b) Continuidade de K_i em $W_c \times [\frac{1}{2}, 1]$:

Seja $(w_0, t_0) \in W_c \times [\frac{1}{2}, 1]$ fixado.

Primeiramente mostraremos que $\|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| \leq \pi |t - t_0|$.

Como $t, t_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, $K_i(w, t) = \phi_i(t) \circ K_i(w, \frac{1}{2})$ e $K_i(w, t_0) = \phi_i(t_0) \circ K_i(w, \frac{1}{2})$.

Logo,

$$K_i(w, t) - K_i(w, t_0) = (\phi_i(t) - \phi_i(t_0)) \circ K_i\left(w, \frac{1}{2}\right).$$

Daí,

$$\|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| \leq \|\phi_i(t) - \phi_i(t_0)\| \left\| K_i\left(w, \frac{1}{2}\right) \right\|.$$

Como $K_i(w, \frac{1}{2}) \in U(A_i)$, temos que $\|K_i(w, \frac{1}{2})\| = 1$. Logo,

$$\|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| \leq \|\phi_i(t) - \phi_i(t_0)\|.$$

Seja $h \in A_i$, então existem únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e um único $x \in A_i$, $x \perp a_i$, $x \perp a_i^0$ tais que $h = \alpha a_i + \beta a_i^0 + x$. Temos que

$$\begin{aligned} |(\phi_i(t) - \phi_i(t_0))(h)|^2 &= \\ \alpha^2 |(-\sin \pi(t - 1/2) + \sin \pi(t_0 - 1/2))a_i^0 + (\cos \pi(t - 1/2) - \cos \pi(t_0 - 1/2))a_i|^2 &+ \\ \beta^2 |(\cos \pi(t - 1/2) - \cos \pi(t_0 - 1/2))a_i^0 + (\sin \pi(t - 1/2) - \sin \pi(t_0 - 1/2))a_i|^2 &= \\ (\alpha^2 + \beta^2) ((\cos \pi(t - 1/2) - \cos \pi(t_0 - 1/2))^2 + (\sin \pi(t - 1/2) - \sin \pi(t_0 - 1/2))^2) &= \\ (\alpha^2 + \beta^2) (2 - 2 \sin \pi(t - 1/2) \sin \pi(t_0 - 1/2) - 2 \cos \pi(t - 1/2) \cos \pi(t_0 - 1/2)) &= \\ 2(\alpha^2 + \beta^2) (1 - \cos(\pi t - \pi t_0)). \end{aligned}$$

Já vimos anteriormente que $|h|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + |x|^2 \geq \alpha^2 + \beta^2$, logo

$$2(\alpha^2 + \beta^2) (1 - \cos(\pi t - \pi t_0)) \leq 2|h|^2 (1 - \cos \pi(t - t_0)).$$

Como

$$1 - \cos \pi(t - t_0) = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}(t - t_0) \leq 2 \left(\frac{\pi}{2} |t - t_0| \right)^2,$$

temos que

$$2|h|^2 (1 - \cos \pi(t - t_0)) \leq 2|h|^2 2 \left(\frac{\pi}{2} |t - t_0| \right)^2.$$

Ou seja,

$$|(\phi_i(t) - \phi_i(t_0))(h)|^2 \leq 4|h|^2 \left(\frac{\pi}{2} |t - t_0| \right)^2 = (\pi |t - t_0| |h|)^2.$$

Logo,

$$\|\phi_i(t) - \phi_i(t_0)\| \leq \pi |t - t_0| \Rightarrow \|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| \leq \pi |t - t_0|.$$

Observe que

$$\begin{aligned} K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0) &= \phi_i(t_0) \circ K_i(w, 1/2) - \phi_i(t_0) \circ K_i(w_0, 1/2) = \\ \phi_i(t_0) \circ (K_i(w, 1/2) - K_i(w_0, 1/2)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq \|\phi_i(t_0)\| \|K_i(w, 1/2) - K_i(w_0, 1/2)\| = \|K_i(w, 1/2) - K_i(w_0, 1/2)\|,$$

pois $\|\phi_i(t_0)\| = 1$.

Como já mostramos anteriormente que $\|K_i(w, 1/2) - K_i(w_0, 1/2)\| \leq \frac{15c}{2} \|w - w_0\|$, temos que

$$\|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq \frac{15c}{2} \|w - w_0\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|K_i(w, t) - K_i(w_0, t_0)\| &\leq \|K_i(w, t) - K_i(w, t_0)\| + \|K_i(w, t_0) - K_i(w_0, t_0)\| \leq \\ &\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade mostra a continuidade da função K_i em $W_c \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Seja $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \{u \in H \mid u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i, u_i \in A_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$. $A \subset H$ é subespaço vetorial de H e $A_{i_0} \cap \left(\sum_{i=1, i \neq i_0}^{\infty} A_i\right) = \{0\}$, para cada $i_0 \in \mathbb{N}$ pois os espaços vetoriais A_i e A_j são ortogonais se $i \neq j$. Logo A é a soma direta dos subespaços A_i , $i \in \mathbb{N}$ e escrevemos $A = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$, ao invés de $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Também temos que A é subespaço vetorial fechado de H e $H = A \oplus A^\perp$. Para mais detalhes, consultar [He], Capítulo II.

Definimos uma aplicação $K : W_c \times I \rightarrow GL(H)$ da seguinte forma: para cada $(w, t) \in W_c \times I$,

$$\begin{cases} K(w, t)(h) = K_i(w, t)(h) & \text{se } h \in A_i, \text{ para algum } i \in \mathbb{N} \\ K(w, t)(h) = h & \text{se } h \perp A_i, \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Estendemos $K(w, t) : H \rightarrow H$ a todo o espaço H de maneira linear. Isto é, dado $h \in H = A \oplus A^\perp$, existem únicos $u \in A$, $v \in A^\perp$ tais que $h = u + v$. Como $A = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$, existem únicos $u_i \in A_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Então,

$$\begin{aligned} K(w, t)(h) &= K(w, t)(u) + K(w, t)(v) = K(w, t) \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \right) + K(w, t)(v) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} K(w, t)(u_i) + K(w, t)(v) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i) + v. \end{aligned}$$

Dessa forma K está bem definida e é linear.

Para ver porque $K(w, t) \in GL(H)$, observe primeiramente que dado $h = \sum_{i=1}^{\infty} u_i + v \in H$, temos que

$$\begin{aligned} |h|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} u_i + v, \sum_{j=1}^{\infty} u_j + v \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} u_i, \sum_{j=1}^{\infty} u_j \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} u_i, v \right\rangle + \langle v, v \rangle = \\ &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle u_i, u_j \rangle + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i, v \rangle + \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_i, u_i \rangle + 0 + \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 + |v|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|K(w, t)(h)|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i) + v, \sum_{j=1}^{\infty} K_j(w, t)(u_j) + v \right\rangle = \\
&\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i), \sum_{j=1}^{\infty} K_j(w, t)(u_j) \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i), v \right\rangle + \langle v, v \rangle = \\
&\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle K_i(w, t)(u_i), K_j(w, t)(u_j) \rangle + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle K_i(w, t)(u_i), v \rangle + \langle v, v \rangle = \\
&\sum_{i=1}^{\infty} \langle K_i(w, t)(u_i), K_i(w, t)(u_i) \rangle + 0 + \langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |K_i(w, t)(u_i)|^2 + |v|^2 = \\
&\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 + |v|^2,
\end{aligned}$$

pois $K_i(w, t) \in U(A_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Logo, $|K(w, t)(h)| = |h|$, $\forall h \in H$. Isto mostra que $K(w, t) \in \mathcal{L}(H)$ e $K(w, t)$ é injetiva. Da sobrejetividade das aplicações $K_i(w, t)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, também ocorre que $K(w, t)$ é sobrejetiva.

Definimos a aplicação $K'(w, t) : H \rightarrow H$ por

$$\begin{cases} K'(w, t)(h) = K_i(w, t)^{-1}(h) & \text{se } h \in A_i, \text{ para algum } i \in \mathbb{N} \\ K'(w, t)(h) = h & \text{se } h \perp A_i, \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Como na definição de $K(w, t)$, estendemos $K'(w, t)$ a todo o espaço H de maneira linear. De maneira análoga mostramos que $|K'(w, t)(h)| = |h|$, $\forall h \in H$. Logo, $K'(w, t) \in \mathcal{L}(H)$ e é uma aplicação bijetiva. Observe que $K'(w, t)$ é a inversa de $K(w, t)$. Concluimos então que $K(w, t) \in GL(H)$. Na verdade mostramos mais: mostramos que $K(w, t) \in U(H)$.

Lema 3.3 *A aplicação $K : W_c \times I \rightarrow GL(H)$ é contínua.*

Demonstração: Seja $(w_0, t_0) \in W_c \times I$ fixado e seja $h = \sum_{i=1}^{\infty} u_i + v \in H$. Temos que

$$\begin{aligned}
|K(w, t)(h) - K(w_0, t_0)(h)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i) + v - \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_i(w_0, t_0)(u_i) + v \right) \right| = \\
&\left| \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i) - \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w_0, t_0)(u_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i) \right| = \\
&\left(\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i), \sum_{j=1}^{\infty} K_j(w, t)(u_j) - K_j(w_0, t_0)(u_j) \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i), K_j(w, t)(u_j) - K_j(w_0, t_0)(u_j) \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i), K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i) \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|K(w, t)(h) - K(w_0, t_0)(h)| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sabemos da demonstração do Lema 3.2 que para cada $i \in \mathbb{N}$ vale $\|K_i(w, t) - K_i(w_0, t_0)\| \leq \pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\|$.

Daí,

$$|K_i(w, t)(u_i) - K_i(w_0, t_0)(u_i)| \leq \|K_i(w, t) - K_i(w_0, t_0)\| |u_i| \leq \left(\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\| \right) |u_i|, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |K(w, t)(h) - K(w_0, t_0)(h)| &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\| \right)^2 |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &\left(\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\| \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\left(\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\| \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 + |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &\left(\pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\| \right) |h|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|K(w, t) - K(w_0, t_0)\| \leq \pi |t - t_0| + \frac{15c}{2} \|w - w_0\|.$$

Esta desigualdade mostra a continuidade da aplicação $K : W_c \times I \rightarrow GL(H)$ em (w_0, t_0) .

Como $(w_0, t_0) \in W_c \times I$ é arbitrário, segue que $K : W_c \times I \rightarrow GL(H)$ é contínua. $\square$

Observe que $K(w, 0) = Id_H$ e $K(w, 1)(w(a_i)) = |w(a_i)| a_i, \forall i \in \mathbb{N}$.

Definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F_2 : S^k \times I &\rightarrow GL(H) \\ (s, t) &\mapsto K(f_1(s), t) \circ f_1(s) \end{aligned}$$

F_2 está bem definida e é contínua.

Seja $f_2 : S^k \rightarrow GL(H)$, $f_2(s) = F_2(s, 1)$.

Como $\begin{cases} F_2(s, 0) = K(f_1(s), 0) \circ f_1(s) = Id_H \circ f_1(s) = f_1(s) \\ F_2(s, 1) = f_2(s) \end{cases}, \forall s \in S^k$, temos que as apli-

cações $f_1, f_2 : S^k \rightarrow GL(H)$ são homotópicas.

Note que, $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$f_2(s)(a_i) = F_2(s, 1)(a_i) = (K(f_1(s), 1) \circ f_1(s))(a_i) = K(f_1(s), 1)(f_1(s)(a_i)) = |f_1(s)(a_i)| a_i.$$

Lema 3.4 *Existem um subespaço vetorial $H' \subset H$ fechado, de dimensão infinita, e uma aplicação contínua $f_3 : S^k \rightarrow GL(H)$ homotópica à aplicação $f_2 : S^k \rightarrow GL(H)$ tal que $f_3(s)(h') = h', \forall s \in S^k$ e $\forall h' \in H'$.*

Demonstração: Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $A'_i = \{\lambda a_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset H$, A'_i é subespaço vetorial fechado de H . Note que os espaços vetoriais A'_i e A'_j são ortogonais se $i \neq j$. Tomamos $H' = \sum_{i=1}^{\infty} A'_i$. Como $A'_i \perp A'_j$ se $i \neq j$ então para cada $i_0 \in \mathbb{N}$ temos que $A'_{i_0} \cap \sum_{i=1, i \neq i_0}^{\infty} A'_i = \{0\}$. Logo H' é a soma direta dos espaços A'_i , $i \in \mathbb{N}$ e escrevemos $H' = \oplus_{i=1}^{\infty} A'_i$ ao invés de $H' = \sum_{i=1}^{\infty} A'_i$. Temos que H' é subespaço vetorial fechado de H e como $\{a_1, a_2, \dots\} \subset H'$ é um conjunto linearmente independente com um número infinito de vetores, temos que H' tem dimensão infinita.

Seja $H_1 = H'^{\perp}$. H_1 é um subespaço vetorial fechado de H de dimensão infinita (pois $\{a_1^0, a_2^0, \dots\} \subset H_1$ é um conjunto linearmente independente infinito) e $H = H' \oplus H_1$. Sejam $p', p_1 \in \mathcal{L}(H)$ as projeções ortogonais em H' e H_1 respectivamente (isto é, dado $h \in H$, existem únicos $h' \in H'$ e $h_1 \in H_1$ tais que $h = h' + h_1$, então $p'(h) = h'$ e $p_1(h) = h_1$). Temos que $p' + p_1 = Id_H$.

Definimos

$$F_3 : S^k \times I \rightarrow GL(H)$$

$$(s, t) \mapsto ((1-t)f_2(s) + tId_H) \circ p' + f_2(s) \circ p_1$$

Temos que F_3 é contínua. Seja $f_3 : S^k \rightarrow GL(H)$, $f_3(s) = F_3(s, 1)$.

Como $\begin{cases} F_3(s, 0) = f_2(s) \circ p' + f_2(s) \circ p_1 = f_2(s) \circ (p' + p_1) = f_2(s) \circ Id_H = f_2(s) \\ F_3(s, 1) = f_3(s) \end{cases}, \forall s \in S^k,$

as aplicações $f_2, f_3 : S^k \rightarrow GL(H)$ são homotópicas.

Vamos mostrar porque $F_3(S^k \times I) \subset GL(H)$. Como $F_3(s, 0) = f_2(s) \in GL(H)$, basta mostrarmos que $F_3(s, t) \in GL(H)$ para $(s, t) \in S^k \times I$, $t \neq 0$.

Primeiramente notemos que dado um operador $T \in \mathcal{L}(H)$, como $H = H' \oplus H_1$ podemos representar T por uma matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} m(1, 1) & m(1, 2) \\ m(2, 1) & m(2, 2) \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } \begin{cases} m(1, 1) : H' \rightarrow H' \in \mathcal{L}(H') \\ m(1, 2) : H_1 \rightarrow H' \in \mathcal{L}(H_1, H') \\ m(2, 1) : H' \rightarrow H_1 \in \mathcal{L}(H', H_1) \\ m(2, 2) : H_1 \rightarrow H_1 \in \mathcal{L}(H_1) \end{cases}.$$

Suponha, em particular, que $T \in \mathcal{L}(H)$ é representado por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Se $A \in GL(H')$ e $D \in GL(H_1)$ então $T \in GL(H)$ e sua inversa T^{-1} é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \circ B \circ D^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Reciprocamente, se $T \in GL(H)$ e $T(H') = H'$ então $A \in GL(H')$ e $D \in GL(H_1)$ e a inversa de T , T^{-1} , é representada pela matriz acima.

Para provar essa última afirmação, note que por hipótese existe um operador $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ tal que $T \circ T^{-1} = Id_H = T^{-1} \circ T$. Suponha que T^{-1} é representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}.$$

Logo, temos que

$$T \circ T^{-1} = Id_H \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{H'} & 0 \\ 0 & Id_{H_1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A \circ \tilde{A} + B \circ \tilde{C} = Id_{H'} \\ A \circ \tilde{B} + B \circ \tilde{D} = 0 \\ D \circ \tilde{C} = 0 \\ D \circ \tilde{D} = Id_{H_1} \end{cases}$$

e

$$T^{-1} \circ T = Id_H \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{H'} & 0 \\ 0 & Id_{H_1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{A} \circ A = Id_{H'} \\ \tilde{A} \circ B + \tilde{B} \circ D = 0 \\ \tilde{C} \circ A = 0 \\ \tilde{C} \circ B + \tilde{D} \circ D = Id_{H_1} \end{cases}.$$

Seja $h_1 \in H_1$ e suponha que $D(h_1) = 0$, então $T(h_1) = B(h_1) + D(h_1) = B(h_1) \in H'$. Como $T(H') = H'$, temos que existe $h' \in H'$ tal que $T(h') = B(h_1)$. Como T é injetivo temos que $h_1 = h'$, logo $h_1 = 0 = h'$. Portanto o operador $D \in \mathcal{L}(H_1)$ é injetivo.

Seja $h' \in H'$, então $D \circ \tilde{C}(h') = 0 \Rightarrow \tilde{C}(h') = 0$. Logo $\tilde{C}$ é o operador nulo.

Portanto temos que: $\begin{cases} A \circ \tilde{A} = Id_{H'} \text{ e } \tilde{A} \circ A = Id_{H'} \Rightarrow A \in GL(H') \\ D \circ \tilde{D} = Id_{H_1} \text{ e } \tilde{D} \circ D = Id_{H_1} \Rightarrow D \in GL(H_1) \end{cases}$.

Isto mostra a afirmação.

Seja $(s, t) \in S^k \times I$, $t \neq 0$ fixado. Note que $f_2(s)(a_i) = |f_1(s)(a_i)| a_i$, logo $f_2(s)(H') = H'$. Como $f_2(s) \in GL(H)$, $f_2(s)$ é representada por uma matriz

$$\begin{pmatrix} A(s) & B(s) \\ 0 & D(s) \end{pmatrix}$$

com $A(s) \in GL(H')$ e $D(s) \in GL(H_1)$.

As projeções p' e p_1 são representadas, respectivamente, pelas matrizes:

$$\begin{pmatrix} Id_{H'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{H_1} \end{pmatrix}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} ((1-t)f_2(s) + tId_H) \circ p' &= \begin{pmatrix} (1-t)A(s) + tId_{H'} & (1-t)B(s) \\ 0 & (1-t)D(s) + tId_{H_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_{H'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)A(s) + tId_{H'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$f_2(s) \circ p_1 = \begin{pmatrix} A(s) & B(s) \\ 0 & D(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{H_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(s) \\ 0 & D(s) \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$F_3(s, t) = ((1-t)f_2(s) + tId_H) \circ p' + f_2(s) \circ p_1 = \begin{pmatrix} (1-t)A(s) + tId_{H'} & B(s) \\ 0 & D(s) \end{pmatrix}.$$

Como $D(s) \in GL(H_1)$, para que $F_3(s, t) \in GL(H)$ basta mostrarmos que $(1-t)A(s) + tId_{H'} \in GL(H')$. Note que

$$((1-t)A(s) + tId_{H'})(a_i) = (1-t)|f_1(s)(a_i)|a_i + ta_i = ((1-t)|f_1(s)(a_i)| + t)a_i.$$

Como $(1-t)|f_1(s)(a_i)| + t > 0$, está bem definido o operador linear $A'(s, t) : H' \rightarrow H'$ dado por $A'(s, t)(a_i) = \frac{1}{((1-t)|f_1(s)(a_i)| + t)}a_i$. Como sempre, $A'(s, t)$ é estendido a todo espaço H' de maneira linear, isto é, se $h' = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$, então $A'(s, t)(h') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A'(s, t)(a_i)$.

É claro que $((1-t)A(s) + tId_{H'}) \circ A'(s, t) = Id_{H'} = A'(s, t) \circ ((1-t)A(s) + tId_{H'})$.

Como

$$\begin{aligned} |A'(s, t)(h')|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_j \langle A'(s, t)(a_i), A'(s, t)(a_j) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |A'(s, t)(a_i)|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{((1-t)|f_1(s)(a_i)| + t)^2} \end{aligned}$$

e

$$|f_1(s)(a_i)| \geq \frac{1}{c} \Rightarrow (1-t)|f_1(s)(a_i)| + t \geq (1-t)\frac{1}{c} + t > 0,$$

temos que

$$|A'(s, t)(h')|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{((1-t)\frac{1}{c} + t)^2} = \frac{1}{((1-t)\frac{1}{c} + t)^2} |h'|^2.$$

Logo,

$$\|A'(s, t)\| \leq \frac{1}{((1-t)\frac{1}{c} + t)}.$$

Isto mostra que $A'(s, t) \in \mathcal{L}(H')$. Logo, $(1-t)A(s) + tId_{H'} \in GL(H')$ e $F_3(S^k \times I) \subset GL(H)$.
 Sejam $s \in S^k$ e $h' \in H'$. Então $f_3(s)(h') = F_3(s, 1)(h') = (Id_H \circ p' + f_2(s) \circ p_1)(h') = p'(h') + f_2(s)(p_1(h')) = h' + f_2(s)(0) = h'$. Isto demonstra o Lema. $\square$

Seja $B = \{z \in GL(H) \mid z = p' + zp_1\} \subset GL(H)$. Se $z \in B$ então $z(h') = h', \forall h' \in H'$.
 Seja $w_z = (p' + p_1 \circ z \circ p_1) \circ z^{-1}$, então $w_z \circ z = p' + p_1 \circ z \circ p_1$. Vamos mostrar que $w_z \circ z \in GL(H)$. Para isso note que z é representado por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} Id_{H'} & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

pois $z|_{H'} = Id_{H'}$. Como $z \in GL(H)$, temos que $D \in GL(H_1)$.

Note que

$$p_1 \circ z \circ p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{H_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_{H'} & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{H_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$p' + p_1 \circ z \circ p_1 = \begin{pmatrix} Id_{H'} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Como $D \in GL(H_1)$ temos que $w_z \circ z = p' + p_1 \circ z \circ p_1 \in GL(H)$.

Observamos que:

- (a) $w_z \circ z(h') = p'(h') + p_1 \circ z \circ p_1(h') = h' + p_1 \circ z(0) = h' + p_1(0) = h', \forall h' \in H'$.
- (b) $w_z \circ z(H_1) = H_1$. De fato, se $h_1 \in H_1$, então $w_z \circ z(h_1) = (p' + p_1 \circ z \circ p_1)(h_1) = p'(h_1) + p_1 \circ z \circ p_1(h_1) = 0 + p_1(z(h_1)) \in H_1$. Logo $w_z \circ z(H_1) \subset H_1$. Reciprocamente seja $h_1 \in H_1$. Como $w_z \circ z \in GL(H)$, existe $u = u' + u_1 \in H = H' \oplus H_1$ tal que $w_z \circ z(u) = h_1$. Logo $u' + p_1(z(u_1)) = h_1 \Leftrightarrow u' = h_1 - p_1(z(u_1))$. Logo $u' \in H' \cap H_1 = \{0\}$. Daí $u' = 0$, o que implica que $u = u_1$ e $w \circ z(u_1) = h_1$. Portanto $h_1 \in w_z \circ z(H_1)$ e vale a inclusão $H_1 \subset w_z \circ z(H_1)$.

Definimos a aplicação

$$F_4 : S^k \times I \rightarrow GL(H)$$

$$(s, t) \mapsto (1-t)f_3(s) + t(p' + p_1 \circ f_3(s) \circ p_1)$$

Temos que F_4 é contínua. Seja $f_4 : S^k \rightarrow GL(H)$, $f_4(s) = F_4(s, 1)$.

Como $\begin{cases} F_4(s, 0) = f_3(s) \\ F_4(s, 1) = f_4(s) \end{cases}, \forall s \in S^k$, as aplicações $f_3, f_4 : S^k \rightarrow GL(H)$ são homotópicas.

Vamos mostrar que $F_4(S^k \times I) \subset GL(H)$. Já sabemos que a função $f_3(s)$ é representada

pela matriz

$$\begin{pmatrix} Id_{H'} & B(s) \\ 0 & D(s) \end{pmatrix}$$

com $D(s) \in GL(H_1)$.

Daí

$$p' + p_1 \circ f_3(s) \circ p_1 = \begin{pmatrix} Id_{H'} & 0 \\ 0 & D(s) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_4(s, t) &= (1-t)f_3(s) + t(p' + p_1 \circ f_3(s) \circ p_1) = \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)Id_{H'} & (1-t)B(s) \\ 0 & (1-t)D(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tId_{H'} & 0 \\ 0 & tD(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{H'} & (1-t)B(s) \\ 0 & D(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $D(s) \in GL(H_1)$, temos que $F_4(s, t) \in GL(H)$, $\forall (s, t) \in S^k \times I$.

Note que $f_4(s) = F_4(s, 1) = p' + p_1 \circ f_3(s) \circ p_1$, $\forall s \in S^k$. Como $f_3(s) \in B$, temos que $f_4(s) = w_{f_3(s)} \circ f_3(s)$ e para todo $s \in S^k$ vale:

(a) $f_4(s)(h') = h'$, $\forall h' \in H'$.

(b) $f_4(s)(H_1) = H_1$.

Lema 3.5 *Sejam $H', H_1 \subset H$ subespaços vetoriais de H , fechados e de dimensão infinita tais que $H = H' \oplus H_1$. Suponha também que H' e H_1 são ortogonais. Então $V = \{z \in GL(H) \mid z(h') = h', \forall h' \in H' \text{ e } z(H_1) = H_1\} \subset GL(H)$ é contrátil em $GL(H)$ para $\{Id_H\} \subset V$.*

Demonstração: Devemos mostrar que a aplicação $V \rightarrow V, z \mapsto Id_H$ é homotópica (em $GL(H)$) à aplicação $Id_V : V \rightarrow V$. Ou seja, vamos mostrar que existe uma aplicação contínua $F : V \times I \rightarrow GL(H)$ tal que $F(z, 0) = z$ e $F(z, 1) = Id_H$, $\forall z \in V$.

Começamos decompondo H em um número infinito de espaços de Hilbert $H_1, H_2, H_3, \dots$ dois a dois ortogonais tais que $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots$.

Para isso, seja $\mathbb{N}_i = \{2^{i-2}(2m+1) \mid m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ para cada $i \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Temos que

$$\mathbb{N} - \{0\} = \bigcup_{i=2}^{\infty} \mathbb{N}_i$$

De fato, é claro que $\mathbb{N}_i \subset \mathbb{N} - \{0\}$, $\forall i \in \{2, 3, 4, \dots\}$, logo $\bigcup_{i=2}^{\infty} \mathbb{N}_i \subset \mathbb{N} - \{0\}$. Reciprocamente, seja $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Decompondo n em fatores primos podemos escrever $n = 2^k l$, onde l não divide 2 e $k \in \mathbb{N}$. Tome $i = k + 2 \geq 2$ e $m = \frac{l-1}{2} \in \mathbb{N}$. Então $2^{i-2}(2m+1) = 2^k l = n$, isto é, $n \in \mathbb{N}_i$. Portanto $\mathbb{N} - \{0\} \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} \mathbb{N}_i$. Falta mostrar que $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Suponha que exista $n_0 \in \mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j$. Então, como $n_0 \in \mathbb{N}_i$, $n_0 = 2^{i-2}(2m+1)$ para algum $i \in \{2, 3, 4, \dots\}$

e para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $n_0 \in \mathbb{N}_j$ também, temos que $n_0 = 2^{j-2}(2n+1)$ para algum $j \in \{2, 3, 4, \dots\}$ e para algum $n \in \mathbb{N}$. Observe que $2m+1$ e $2n+1$ não dividem 2. Como a decomposição em fatores primos de um número é única (a menos de reordenação), temos que $i-2 = j-2 \Leftrightarrow i = j$. Portanto se $i \neq j$ então $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$.

Para cada $i \in \{2, 3, 4, \dots\}$, seja $H_i = \sum_{j \in \mathbb{N}_i} A'_j$, onde $A'_j = \{\lambda a_j \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Observe que H_i é um subespaço vetorial fechado de H e de dimensão infinita, pois $\{a_j \mid j \in \mathbb{N}_i\} \subset H_i$ é um conjunto linearmente independente infinito.

Note que se $i \neq j$ então $H_i \perp H_j$, pois $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$.

Como

$$H' = \sum_{j=1}^{\infty} A'_j = \sum_{j \in \bigcup_{i=2}^{\infty} \mathbb{N}_i} A'_j = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{N}_i} A'_j = \sum_{i=2}^{\infty} H_i,$$

temos que $H = H_1 \oplus H' = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots$

Dado um operador $z \in \mathcal{L}(H)$, vamos representar z por uma matriz com um número infinito de entradas $(m(i, j))_{i, j \in \mathbb{N}}$, onde cada entrada $(m(i, j))$ representa um operador $m(i, j) \in \mathcal{L}(H_j, H_i)$. Dessa maneira z é representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} m(1,1) & m(1,2) & m(1,3) & \dots \\ m(2,1) & m(2,2) & m(2,3) & \dots \\ m(3,1) & m(3,2) & m(3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Em particular, se $z \in V$, temos que $z(h') = h', \forall h' \in H'$ e $z(H_1) = H_1$. Neste caso a matriz que representa z é da forma

$$\begin{pmatrix} z|_{H_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Id_{H_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & Id_{H_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

onde $z|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$ é o operador z restrito ao subespaço H_1 .

Por simplicidade vamos denotar a matriz que representa z por

$$\begin{pmatrix} z|_{H_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

onde os espaços em branco representam os operadores nulos e o símbolo 1 representa o operador identidade agindo nos respectivos subespaços H_i , $i \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Definimos a aplicação $F : V \times I \rightarrow GL(H)$ da seguinte forma:

Se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ então $F(z, t) = \begin{pmatrix} z_{|H_1} & & & \\ & m(2, 2) & m(2, 3) & \\ & m(3, 2) & m(3, 3) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, onde

$$\begin{pmatrix} m(2j, 2j) & m(2j, 2j+1) \\ m(2j+1, 2j) & m(2j+1, 2j+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t\pi & -\sin t\pi \\ \sin t\pi & \cos t\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{|H_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t\pi & \sin t\pi \\ -\sin t\pi & \cos t\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{|H_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para $j \in \mathbb{N}$.

Se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, então $F(z, t) = \begin{pmatrix} m(1, 1) & m(1, 2) & & \\ m(2, 1) & m(2, 2) & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, onde

$$\begin{pmatrix} m(2j-1, 2j-1) & m(2j-1, 2j) \\ m(2j, 2j-1) & m(2j, 2j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t\pi & -\sin t\pi \\ \sin t\pi & \cos t\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{|H_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t\pi & \sin t\pi \\ -\sin t\pi & \cos t\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{|H_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para $j \in \mathbb{N}$.

F está bem definida e é contínua. Também ocorre que $F(z, t) \in GL(H)$ pois $z \in GL(H)$.

Note que $F(z, 0) = \begin{pmatrix} z_{|H_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = z, \forall z \in V$

e $F(z, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = Id_H, \forall z \in V.$

Isso conclui a demonstração do Lema. $\square$

Demonstração do Teorema 3.1 (Teorema de Kuiper): Definimos

$$F_5 : S^k \times I \rightarrow GL(H)$$

$$(s, t) \mapsto F(f_4(s), t)$$

onde $F : V \times I \rightarrow GL(H)$ é a aplicação do Lema 3.5.

Observe que F_5 é contínua e está bem definida pois $f_4(s) \in V, \forall s \in S^k$.

Definimos $f_5 : S^k \rightarrow GL(H)$, $s \mapsto Id_H$.

Como $\begin{cases} F_5(s, 0) = F(f_4(s), 0) = f_4(s) \\ F_5(s, 1) = F(f_4(s), 1) = Id_H = f_5(s) \end{cases}$, $\forall s \in S^k$, as aplicações $f_4, f_5 : S^k \rightarrow GL(H)$ são homotópicas.

Portanto, a aplicação f_0 é homotópica à aplicação f_5 e como $f_0 : S^k \rightarrow GL(H)$ é uma aplicação qualquer, concluímos que o único elemento do grupo $\pi_k(GL(H))$ é a identidade. Logo, $\pi_k(GL(H)) = 0$, demonstrando o Teorema de Kuiper. $\square$

3.2 Aplicações

Nesta seção apresentamos algumas aplicações do Teorema de Kuiper.

Corolário 3.1 $GL(H)$ é contrátil à $\{Id_H\} \subset GL(H)$.

Demonstração: Devemos mostrar que existe uma aplicação contínua $F : GL(H) \times I \rightarrow GL(H)$ tal que $F(z, 0) = z$ e $F(z, 1) = Id_H$, $\forall z \in GL(H)$.

Como $GL(H) \subset \mathcal{L}(H)$ é um conjunto aberto, para cada $z \in GL(H)$ existe $r_z > 0$ tal que $B(z, r_z) = \{w \in \mathcal{L}(H) \mid \|w - z\| < r_z\} \subset GL(H)$. Tomando $\epsilon_z = \frac{r_z}{3}$ temos que $B(z, \epsilon_z) \subset B(z, r_z) \subset GL(H)$.

Observe que $\mathcal{A} = \{B(z, \epsilon_z) \mid z \in GL(H)\}$ é uma cobertura aberta para $GL(H)$. Para cada $z \in GL(H)$, vamos denotar $B(z, \epsilon_z)$ por B_z . Seja $J = GL(H)$, então $\mathcal{A} = \{B_j \mid j \in J\}$ é uma cobertura aberta para $GL(H)$.

Como $\mathcal{L}(H)$ é um espaço topológico metrizável (cuja topologia provém da métrica oriunda da norma em $\mathcal{L}(H)$), $GL(H) \subset \mathcal{L}(H)$ também é um espaço topológico metrizável com a topologia induzida por $\mathcal{L}(H)$. Logo, $GL(H)$ é um espaço topológico paracompacto (ver [Sc], p. 101).

Por [Sc], p. 99, existe uma coleção de funções contínuas $\phi_j : GL(H) \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in J$, tal que:

- (1) Para cada $j \in J$ tem-se que $\phi_j(z) \geq 0$, $\forall z \in GL(H)$;
- (2) $\text{supp } \phi_j = \overline{\{z \in GL(H) \mid \phi_j(z) \neq 0\}} \subset B_j$, $\forall j \in J$;
- (3) Para cada $z \in GL(H)$, existe um aberto $U_z \subset GL(H)$ com $z \in U_z$ tal que $\phi_j(w) = 0$, $\forall w \in U_z$, exceto para um número finito de índices $\{j_1, \dots, j_k\} \subset J$, $k \in \mathbb{N}$;
- (4) $\sum_{j \in J} \phi_j(z) = 1$, $\forall z \in GL(H)$.

Defina

$$\begin{aligned} \Phi : GL(H) \times I &\rightarrow GL(H) \\ (z, t) &\mapsto (1 - t)z + t \sum_{j \in J} \phi_j(z)j \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\Phi(z, t) \in GL(H)$, $\forall (z, t) \in GL(H) \times I$.

De fato, seja $(z, t) \in GL(H) \times I$ fixado. Pela propriedade (3), $\phi_j(z) \neq 0$ apenas para

um número finito de índices $\{j_1, \dots, j_k\} \subset J$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, se $j \in \{j_1, \dots, j_k\}$ então $z \in \text{supp } \phi_j \subset B_j$.

Seja $M \in \{j_1, \dots, j_k\}$ tal que $\epsilon_M = \max\{\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_k}\}$. Então, para $i \in \{1, \dots, k\}$, temos que $B_{j_i} \subset B(M, 3\epsilon_M)$. Com efeito, se $\|w - j_i\| < \epsilon_{j_i}$, então

$$\begin{aligned} \|w - M\| &\leq \|w - j_i\| + \|j_i - M\| < \epsilon_{j_i} + \|j_i - M\| \leq \epsilon_{j_i} + \|j_i - z\| + \|z - M\| < \\ &\epsilon_{j_i} + \epsilon_{j_i} + \epsilon_M \leq 3\epsilon_M. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in J} \phi_j(z)j - M \right\| &= \left\| \sum_{j \in J} \phi_j(z)j - \sum_{j \in J} \phi_j(z)M \right\| = \left\| \sum_{j \in J} \phi_j(z)(j - M) \right\| = \\ &\left\| \sum_{i=1}^k \phi_{j_i}(z)(j_i - M) \right\| \leq \sum_{i=1}^k \phi_{j_i}(z) \|j_i - M\| < \sum_{i=1}^k \phi_{j_i}(z)(3\epsilon_M) = 3\epsilon_M. \end{aligned}$$

Isto significa que $\sum_{j \in J} \phi_j(z)j \in B(M, 3\epsilon_M)$. Como $B(M, 3\epsilon_M)$ é um conjunto convexo e $z \in B(M, 3\epsilon_M)$, temos que $(1-t)z + t \sum_{j \in J} \phi_j(z)j \in B(M, 3\epsilon_M) \subset GL(H)$.

Logo, $\Phi(z, t) \in GL(H)$, $\forall (z, t) \in GL(H) \times I$.

Vamos mostrar agora que Φ é contínua. De fato, seja $(z_0, t_0) \in GL(H) \times I$ fixado. Por (3), existe um aberto $U_{z_0} \subset GL(H)$ com $z_0 \in U_{z_0}$ tal que $\phi_j(w) = 0$, $\forall w \in U_{z_0}$, exceto para um número finito de índices $\{j_1, \dots, j_k\} \subset J$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, para $(z, t) \in U_{z_0} \times I$, temos que

$$\Phi(z, t) = (1-t)z + t \sum_{i=1}^k \phi_{j_i}(z)j_i.$$

Como $\phi_{j_i} : GL(H) \rightarrow \mathbb{R}$ é função contínua, $i \in \{1, \dots, k\}$, temos que $\Phi|_{U_{z_0} \times I}$ é função contínua. Em particular, Φ é contínua em (z_0, t_0) . Como $(z_0, t_0) \in GL(H) \times I$ foi tomado arbitrariamente, segue que $\Phi : GL(H) \times I \rightarrow GL(H)$ é contínua.

Observe que $GL(H) \subset \bigcup_{j \in J} \text{supp } \phi_j$, logo $\mathcal{B} = \{\text{supp } \phi_j \mid j \in J\}$ é cobertura para $GL(H)$.

Seja N o *nervo* da cobertura $\mathcal{B}$, isto é, N é o esquema simplicial $(\mathcal{B}, \Psi)$, onde $\Psi = \left\{ s = \{\text{supp } \phi_{j_1}, \dots, \text{supp } \phi_{j_k}\} \mid k \in \mathbb{N} \text{ e } \bigcap_{i=1}^k \text{supp } \phi_{j_i} \neq \emptyset \right\}$. Os elementos $\text{supp } \phi_j \in \mathcal{B}$ são chamados de *vértices* e os elementos $s \in \Psi$ são chamados de *simplexos*.

Para mais detalhes sobre o assunto, consultar [Li].

Por simplicidade vamos denotar $\text{supp } \phi_j$ por b_j , $j \in J$.

Definimos

$$\begin{aligned} \sigma : GL(H) &\rightarrow N \\ z &\mapsto \sum_{j \in J} \phi_j(z)b_j \end{aligned}$$

Vamos definir uma aplicação contínua $\rho_0 : N \rightarrow GL(H)$ da seguinte maneira:

(1) $\rho_0(b_j) = j$, $\forall j \in J$;

(2) Se $s = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_k}\}$ é um simplexo e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, onde $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ então

$$\rho_0 \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i b_{j_i} \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i j_i.$$

Para ver porque $\sum_{i=1}^k \lambda_i j_i \in GL(H)$, notemos que $\bigcap_{i=1}^k \text{supp } \phi_{j_i} \neq \emptyset$ pois s é um simplexo de N . Seja $z \in \bigcap_{i=1}^k \text{supp } \phi_{j_i}$. Como $\text{supp } \phi_{j_i} \subset B_{j_i}, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, temos que $z \in \bigcap_{i=1}^k B_{j_i}$. Tome $M \in \{j_1, \dots, j_k\}$ tal que $\epsilon_M = \max \{\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_k}\}$. Então, para $i \in \{1, \dots, k\}$, temos que $B_{j_i} \subset B(M, 3\epsilon_M)$. Com efeito, se $\|w - j_i\| < \epsilon_{j_i}$, então

$$\begin{aligned} \|w - M\| &\leq \|w - j_i\| + \|j_i - M\| < \epsilon_{j_i} + \|j_i - M\| \leq \epsilon_{j_i} + \|j_i - z\| + \|z - M\| < \\ &\epsilon_{j_i} + \epsilon_{j_i} + \epsilon_M \leq 3\epsilon_M. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i j_i - M \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i j_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i M \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i (j_i - M) \right\| \leq \\ &\sum_{i=1}^k \lambda_i \|j_i - M\| < \sum_{i=1}^k \lambda_i 3\epsilon_M = 3\epsilon_M. \end{aligned}$$

Isto é, $\sum_{i=1}^k \lambda_i j_i \in B(M, 3\epsilon_M) \subset GL(H)$.

Seja $z \in GL(H)$ fixado. Por (3), $\phi_j(z) \neq 0$ apenas para um número finito de índices $\{j_1, \dots, j_k\} \subset J, k \in \mathbb{N}$. Como $z \in \bigcap_{i=1}^k \text{supp } \phi_{j_i}$, temos que $\{\text{supp } \phi_{j_1}, \dots, \text{supp } \phi_{j_k}\}$ é um simplexo de N . Portanto, da definição de ρ_0 , temos

$$\rho_0 \circ \sigma(z) = \rho_0 \left(\sum_{j \in J} \phi_j(z) b_j \right) = \rho_0 \left(\sum_{i=1}^k \phi_{j_i}(z) b_{j_i} \right) = \sum_{i=1}^k \phi_{j_i}(z) j_i = \sum_{j \in J} \phi_j(z) j = \Phi(z, 1).$$

Como $z \in GL(H)$ foi tomado arbitrariamente, temos que $\rho_0 \circ \sigma(z) = \Phi(z, 1), \forall z \in GL(H)$. Pelo Teorema de Kuiper, $\pi_k(GL(H)) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$. Logo, a função ρ_0 pode ser estendida a uma função contínua $\rho : N \times I \rightarrow GL(H)$ tal que $\begin{cases} \rho(u, 0) = \rho_0(u), \\ \rho(u, 1) = Id_H \end{cases}, \forall u \in N$.

Para uma demonstração deste fato ver [Wh], p. 105.

Portanto, definindo

$$\begin{aligned} F : GL(H) \times I &\rightarrow GL(H) \\ (z, t) &\mapsto \begin{cases} \Phi(z, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \rho(\sigma(z), 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

temos que F está bem definida, é contínua e $\begin{cases} F(z, 0) = \Phi(z, 0) = z \\ F(z, 1) = \rho(\sigma(z), 1) = Id_H \end{cases}, \forall z \in GL(H)$.

Isto mostra que $GL(H)$ é contrátil à $\{Id_H\} \subset GL(H)$. $\square$

Corolário 3.2 $U(H)$ é contrátil à $\{Id_H\} \subset U(H)$.

Demonstração: Primeiramente lembramos que se $T \in \mathcal{L}(H)$ então existe um único operador $T^* \in \mathcal{L}(H)$ com a seguinte propriedade:

$$\langle T(h_1), h_2 \rangle = \langle h_1, T^*(h_2) \rangle, \forall h_1, h_2 \in H.$$

T^* é chamado o operador adjunto de T .

Se ocorrer que $T = T^*$ então dizemos que T é auto-adjunto. Neste caso $\langle T(h_1), h_2 \rangle = \langle h_1, T(h_2) \rangle, \forall h_1, h_2 \in H$.

Se ocorrer que $T \in GL(H)$, então $T^* \in GL(H)$ e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Dizemos que um operador auto-adjunto T é positivo se $\langle T(h), h \rangle \geq 0, \forall h \in H$.

Se $T \in GL(H)$ é positivo então T^{-1} também é positivo. De fato, T^{-1} é auto-adjunto pois $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$. Dado $h \in H$, temos que $\langle T^{-1}(h), h \rangle = \langle T^{-1}(h), T \circ T^{-1}(h) \rangle = \langle T(T^{-1}(h)), T^{-1}(h) \rangle \geq 0$ pois T é positivo e $T^{-1}(h) \in H$.

Lembramos que dado um operador positivo T , existe um único operador positivo R com as seguintes propriedades:

- (1) $R^2 = T$;
- (2) R comuta com todo operador em $\mathcal{L}(H)$ que comuta com T ;
- (3) se $T \in GL(H)$ então $R \in GL(H)$ e $(R^{-1})^2 = T^{-1}$.

Chamamos R de a *raiz quadrada positiva* de T e escrevemos $R = \sqrt{T}$. Para maiores detalhes sobre a construção da raiz quadrada de um operador positivo, ver [Bac], p. 422.

Dado $T \in GL(H)$, observe que o operador $T^* \circ T \in GL(H)$ é positivo. De fato,

$$(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^* = T^* \circ T \text{ e } \langle T^* \circ T(h), h \rangle = \langle T(h), T(h) \rangle \geq 0, \forall h \in H.$$

Logo também é positivo o operador $(T^* \circ T)^{-1}$. Portanto está bem definida sua raiz quadrada positiva $\sqrt{(T^* \circ T)^{-1}}$.

Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : GL(H) &\rightarrow U(H) \\ z &\mapsto z \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \end{aligned}$$

Ψ está bem definida e é contínua. Temos que $\Psi(z) \in GL(H)$ pois $z, \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \in GL(H)$. Sejam $z \in GL(H)$ e $h \in H$ fixados. Temos que

$$\begin{aligned} |\Psi(z)(h)|^2 &= \langle \Psi(z)(h), \Psi(z)(h) \rangle = \langle \Psi(z)^* \circ \Psi(z)(h), h \rangle = \\ &= \left\langle \left(z \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \right)^* \circ \left(z \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \right) (h), h \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \circ z^* \right) \circ \left(z \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \right) (h), h \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $z^* \circ z$ comuta com $(z^* \circ z)^{-1}$, temos que $\sqrt{(z^* \circ z)^{-1}}$ comuta com $z^* \circ z$. Daí,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \circ z^* \right) \circ \left(z \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \right) &= (z^* \circ z) \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} \circ \sqrt{(z^* \circ z)^{-1}} = \\ &= (z^* \circ z) \circ (z^* \circ z)^{-1} = Id_H. \end{aligned}$$

Logo, $|\Psi(z)(h)|^2 = \langle h, h \rangle = |h|^2$. Portanto, $\Psi(z) \in U(H)$, $\forall z \in GL(H)$.

Observe que se $z \in U(H)$ então $z^* \circ z = Id_H$. De fato, sejam $h_1, h_2 \in H$. Temos que

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \frac{1}{2} (|h_1 + h_2|^2 - |h_1|^2 - |h_2|^2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle z(h_1), z(h_2) \rangle &= \frac{1}{2} (|z(h_1) + z(h_2)|^2 - |z(h_1)|^2 - |z(h_2)|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (|z(h_1 + h_2)|^2 - |z(h_1)|^2 - |z(h_2)|^2). \end{aligned}$$

Como $z \in U(H)$, temos que $|z(h_1)| = |h_1|$, $|z(h_2)| = |h_2|$ e $|z(h_1 + h_2)| = |h_1 + h_2|$. Logo, $\langle z(h_1), z(h_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle$. Daí,

$$\langle z^* \circ z(h_1), h_2 \rangle = \langle z(h_1), z(h_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle = \langle Id_H(h_1), h_2 \rangle, \forall h_1, h_2 \in H.$$

Isto mostra que $z^* \circ z = Id_H$.

Portanto, para $z \in U(H)$ temos que $\Psi(z) = z \circ \sqrt{(Id_H)^{-1}} = z \circ \sqrt{Id_H} = z \circ Id_H = z$.

Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{F} : U(H) \times I &\rightarrow U(H) \\ (z, t) &\mapsto \Psi(F(z, t)) \end{aligned}$$

onde $F : GL(H) \times I \rightarrow GL(H)$ é a aplicação do Corolário 3.1.

$\tilde{F}$ é uma aplicação contínua e $\begin{cases} \tilde{F}(z, 0) = \Psi(F(z, 0)) = \Psi(z) = z \\ \tilde{F}(z, 1) = \Psi(F(z, 1)) = \Psi(Id_H) = Id_H \end{cases}, \forall z \in U(H).$

Isto mostra que $U(H)$ é contrátil à $\{Id_H\} \subset U(H)$. $\square$

Capítulo 4

O Teorema de Atiyah - Jänich

O objetivo deste capítulo é mostrar a existência de um isomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \text{Ind} : [X, \mathcal{F}(H)] &\rightarrow K(X) \\ [f] &\mapsto \text{Ind } f \end{aligned}$$

onde $K(X) = K(\text{Vect}(X))$ é o grupo de Grothendieck de $\text{Vect}(X)$ e $[X, \mathcal{F}(H)]$ é o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de X em $\mathcal{F}(H)$, onde X é um espaço topológico de Hausdorff compacto e $\mathcal{F}(H)$ é o conjunto dos operadores de Fredholm.

4.1 O índice de Fredholm

Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita sobre o corpo dos números reais e suponha que H é separável. Sejam $\mathcal{L}(H)$, $GL(H)$ e $U(H)$ como no Capítulo 3.

Definição 4.1 Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ é um *operador de Fredholm* se:

- (a) o *núcleo* de T , $\text{Ker } T = \{h \in H \mid T(h) = 0\} \subset H$, tem dimensão finita;
- (b) o *conúcleo* de T , $\text{coKer } T = H/\text{Im } T = \{h + \text{Im } T \mid h \in H\}$, tem dimensão finita.

Denotamos por $\mathcal{F}(H)$ o conjunto dos operadores de Fredholm.

Definição 4.2 Dado um operador de Fredholm $T \in \mathcal{F}(H)$ o número inteiro

$$\text{ind } T = \dim \text{Ker } T - \dim \text{coKer } T \in \mathbb{Z}$$

é chamado o *índice de Fredholm* de T , ou simplesmente o *índice* de T .

Definição 4.3 Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ é um *operador compacto* se T leva o conjunto $\{h \in H \mid \|h\| \leq 1\}$ em um subconjunto de H cujo fecho é compacto.

Denotamos por $\mathcal{K}(H)$ o conjunto dos operadores compactos.

Listamos a seguir os resultados mais importantes sobre operadores de Fredholm e operadores compactos. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [Pa], Capítulos VI e VII.

- (1) Se $T \in \mathcal{F}(H)$ então $\text{Im } T \subset H$ é um subespaço vetorial fechado de H .
- (2) Se $T \in \mathcal{F}(H)$ então $T^* \in \mathcal{F}(H)$ e $\text{ind } T^* = -\text{ind } T$.
- (3) Se $T \in \mathcal{L}(H)$ e existem $S, S' \in \mathcal{L}(H)$ tais que $S \circ T - \text{Id}_H \in \mathcal{K}(H)$ e $T \circ S' - \text{Id}_H \in \mathcal{K}(H)$ então $T \in \mathcal{F}(H)$. Reciprocamente, se $T \in \mathcal{F}(H)$ então existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tal que $S \circ T - \text{Id}_H \in \mathcal{K}(H)$ e $T \circ S - \text{Id}_H \in \mathcal{K}(H)$.
- (4) Se $T \in \mathcal{F}(H)$ e $K \in \mathcal{K}(H)$ então $T + K \in \mathcal{F}(H)$ e $\text{ind}(T + K) = \text{ind } T$.
- (5) $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ é um conjunto aberto.
- (6) Se $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(H)$ então $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{F}(H)$ e $\text{ind } T_1 \circ T_2 = \text{ind } T_1 + \text{ind } T_2$.
- (7) A aplicação

$$\begin{aligned} \text{ind} : \mathcal{F}(H) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ T &\mapsto \text{ind } T \end{aligned}$$

é constante em cada componente conexa de $\mathcal{F}(H)$.

Note que, como $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ é um conjunto aberto, temos que T_1 e T_2 estão na mesma componente conexa de $\mathcal{F}(H)$ se, e somente se, existe uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $\alpha(0) = T_1$ e $\alpha(1) = T_2$.

- (8) Se $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(H)$ são tais que $\text{ind } T_1 = \text{ind } T_2$ então T_1 e T_2 estão na mesma componente conexa de $\mathcal{F}(H)$.
- (9) Se $T \in \mathcal{L}(H)$ e $\dim \text{Im } T < \infty$, então $T \in \mathcal{K}(H)$.

Utilizaremos neste capítulo o *Teorema da Aplicação Aberta*, enunciado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [Bac], p. 271.

Teorema 4.1 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert e $T : H_1 \rightarrow H_2$ uma transformação linear e contínua. Se T é injetiva e a imagem de T , $\text{Im } T = \{T(h_1) \mid h_1 \in H_1\} \subset H_2$, é um subconjunto fechado de H_2 , então existe uma transformação linear e contínua $T' : \text{Im } T \rightarrow H_1$ tal que $T \circ T' = \text{Id}_{\text{Im } T}$ e $T' \circ T = \text{Id}_{H_1}$.*

Lembramos ainda que se H_1 e H_2 são espaços de Hilbert então o conjunto $H_1 \times H_2 = \{(h_1, h_2) \mid h_1 \in H_1 \text{ e } h_2 \in H_2\}$ é um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais com a soma e multiplicação por escalar definidas por:
$$\begin{cases} (h_1, h_2) + (h'_1, h'_2) = (h_1 + h'_1, h_2 + h'_2) \\ \lambda(h_1, h_2) = (\lambda h_1, \lambda h_2) \end{cases}$$
 e produto interno dado por: $\langle (h_1, h_2), (h'_1, h'_2) \rangle = \langle h_1, h'_1 \rangle + \langle h_2, h'_2 \rangle$. Consequentemente a norma em $H_1 \times H_2$ é dada por: $\|(h_1, h_2)\| = \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2}$. Dada uma sequência $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em $H_1 \times H_2$ temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n) = (u, v) \in H_1 \times H_2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v.$$

Se H_1 e H_2 são separáveis com bases ortonormais $\{e_0, e_1, \dots\}$ e $\{d_0, d_1, \dots\}$ respectivamente (podendo ser um conjunto finito ou infinito), então $H_1 \times H_2$ também é separável com base ortonormal $\{(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (0, d_0), (0, d_1), \dots\}$. Logo, $\dim H_1 \times H_2 = \dim H_1 + \dim H_2$. A demonstração destes fatos é imediata e não será feita aqui.

4.2 O índice generalizado

Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Dada uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ vamos definir o *índice generalizado* de f como um elemento $\text{Ind } f \in K(X)$. Veremos no Exemplo 4.1 que quando X consiste de apenas um ponto então f representa apenas um operador de Fredholm e o *índice de Fredholm* de $f(x)$ coincide (a menos de um isomorfismo) com o *índice generalizado* de f . Por isso o *índice generalizado* estende o conceito de *índice de Fredholm* de um operador.

Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\} \subset H$ base ortonormal de H . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $H_n = \overline{\text{span}\{e_n, e_{n+1}, \dots\}}$. Temos que $H_n \subset H$ é subespaço vetorial fechado de H e $H = H_n \oplus H_n^\perp$, onde $H_n^\perp = \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$.

Seja $P_n : H \rightarrow H_n \subset H$ a projeção ortogonal em H_n , isto é, dado $h = a + b \in H = H_n \oplus H_n^\perp$, então $P_n(h) = a$.

Observe que $P_n \in \mathcal{L}(H)$ e

- (a) $\text{Ker } P_n = H_n^\perp \Rightarrow \dim \text{Ker } P_n = n < \infty$.
- (b) $\text{Im } P_n = H_n \Rightarrow \text{coKer } P_n \cong H_n^\perp \Rightarrow \dim \text{coKer } P_n = n < \infty$.

Logo P_n é um operador de Fredholm com índice zero.

Observe que se $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ é contínua então para cada $x \in X$, $P_n \circ f(x) \in \mathcal{F}(H)$ e $\text{ind } P_n \circ f(x) = \text{ind } P_n + \text{ind } f(x) = \text{ind } f(x)$.

Lema 4.1 *Sejam $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ uma aplicação contínua e $x_0 \in X$ fixado. Existem um aberto $U \subset X$ com $x_0 \in U$ e um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que se $n \geq n_0$ então vale:*

- (1) $\text{Im } P_n \circ f(x) = H_n, \forall x \in U$.
- (2) $\dim \text{Ker } P_n \circ f(x) = \dim \text{Ker } P_n \circ f(x_0), \forall x \in U$.

Demonstração: Seja $V \subset H$ subespaço vetorial de H tal que $H = \text{Im } f(x_0) \oplus V$. Logo, $H/\text{Im } f(x_0) \cong V$. Como $f(x_0)$ é um operador de Fredholm temos que $\dim H/\text{Im } f(x_0) < \infty$. Logo V também tem dimensão finita e temos que $V = \text{span}\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$. Tomamos $n_0 - 1 = \max\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Então $V \subset \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_{n_0-1}\}$ e H é gerado pelo conjunto $\text{Im } f(x_0) \cup \{e_0, e_1, \dots, e_{n_0-1}\}$.

Para $n \geq n_0$ temos:

- (a) $\text{Im } P_n \circ f(x_0) \subset \text{Im } P_n = H_n$ e $H_n \subset \text{Im } f(x_0)$. Logo, $P_n(H_n) \subset \text{Im } P_n \circ f(x_0)$. Como $H_n = P_n(H_n)$, temos que $\text{Im } P_n \circ f(x_0) = H_n$.

(b) De (a) segue que $\text{coKer } P_n \circ f(x_0) \cong H_n^\perp \Rightarrow \dim \text{coKer } P_n \circ f(x_0) = n$.

Seja $n \geq n_0$ fixado.

Dado $T \in \mathcal{L}(H)$ considere a aplicação

$$\begin{aligned}\widehat{T} : H &\rightarrow H_n \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \\ h &\mapsto (P_n \circ T(h), p(h))\end{aligned}$$

onde $p : H = \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \oplus (\text{Ker } P_n \circ f(x_0))^\perp \rightarrow \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \subset H$ é a projeção ortogonal de H em $\text{Ker } P_n \circ f(x_0)$.

Note que $\widehat{T}$ é uma transformação linear.

Como H_n e $\text{Ker } P_n \circ f(x_0)$ são subespaços vetoriais fechados de H , eles são espaços de Hilbert separáveis, e como a dimensão de H_n é infinita temos que $H_n \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0)$ é espaço de Hilbert de dimensão infinita e separável. Logo $H \cong H_n \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0)$ e podemos considerar $\widehat{T} : H \rightarrow H$ como um operador linear de H em H . Logo $\widehat{T} \in \mathcal{L}(H)$, $\forall T \in \mathcal{L}(H)$.

A aplicação

$$\begin{aligned}\Lambda : \mathcal{L}(H) &\rightarrow \mathcal{L}(H) \\ T &\mapsto \widehat{T}\end{aligned}$$

é contínua. De fato, seja $T_0 \in \mathcal{L}(H)$ fixado e seja $\epsilon > 0$. Se $T \in \mathcal{L}(H)$ e $\|T - T_0\| < \epsilon$ então:

$$\begin{aligned}\left| (\widehat{T} - \widehat{T}_0)(h) \right| &= |(P_n \circ (T - T_0)(h), 0)| = |P_n \circ (T - T_0)(h)| \leq \|P_n \circ (T - T_0)\| |h|, \forall h \in H \\ \Rightarrow \left\| \widehat{T} - \widehat{T}_0 \right\| &\leq \|P_n \circ (T - T_0)\| \leq \|P_n\| \|T - T_0\| = \|T - T_0\| \\ \Rightarrow \|\Lambda(T) - \Lambda(T_0)\| &< \epsilon.\end{aligned}$$

Logo Λ é contínua.

Como $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ é contínua, a aplicação

$$\begin{aligned}\Lambda' : X &\rightarrow \mathcal{L}(H) \\ x &\mapsto \widehat{f(x)}\end{aligned}$$

também é contínua.

Mostraremos agora que $\widehat{f(x_0)}$ é uma bijeção. De fato, se $h \in H$ e $\widehat{f(x_0)}(h) = (0, 0)$, então $P_n \circ f(x_0)(h) = 0 = p(h)$. Logo,

$$h \in \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \cap \text{Ker } p = \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \cap (\text{Ker } P_n \circ f(x_0))^\perp = \{0\} \Rightarrow h = 0.$$

Portanto, $\widehat{f(x_0)}$ é injetiva.

Seja agora $(a, b) \in H_n \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0)$. Como $\text{Im } P_n \circ f(x_0) = H_n$, existe $a' \in H$ tal

que $P_n \circ f(x_0)(a') = a$. Como $H = \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \oplus (\text{Ker } P_n \circ f(x_0))^\perp$, existem $a_1 \in \text{Ker } P_n \circ f(x_0)$ e $b_1 \in (\text{Ker } P_n \circ f(x_0))^\perp$ tais que $a' = a_1 + b_1$. Note que

$$\begin{aligned} P_n \circ f(x_0)(b + b_1) &= P_n \circ f(x_0)(b) + P_n \circ f(x_0)(b_1) = P_n \circ f(x_0)(b_1) = \\ P_n \circ f(x_0)(b_1) + P_n \circ f(x_0)(a_1) &= P_n \circ f(x_0)(a_1 + b_1) = P_n \circ f(x_0)(a') = a. \end{aligned}$$

Por outro lado $p(b + b_1) = b$. Logo, $\widehat{f(x_0)}(b + b_1) = (a, b)$ e $\widehat{f(x_0)}$ é sobrejetiva.

Em particular $\widehat{f(x_0)} \in \mathcal{L}(H)$ e, por ser uma bijeção, pelo Teorema da Aplicação Aberta, a inversa de $\widehat{f(x_0)}$ é contínua. Logo, $\widehat{f(x_0)} \in GL(H)$.

Como $GL(H) \subset \mathcal{L}(H)$ é um conjunto aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B = \left\{ T \in \mathcal{L}(H) \mid \|T - \widehat{f(x_0)}\| < \epsilon \right\} \subset GL(H).$$

Da continuidade da aplicação Λ' , existe um aberto $U \subset X$ com $x_0 \in U$ tal que se $x \in U$ então $\widehat{f(x)} \in B$.

Em particular $\widehat{f(x)}$ é sobrejetiva, $\forall x \in U$. Logo, $\text{Im } P_n \circ f(x) = H_n$, $\forall x \in U$. Isto demonstra o item (1).

Vamos mostrar agora que $\text{Ker } P_n \circ f(x) = \widehat{f(x)}^{-1}(\{0\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0))$. De fato, se $h \in \text{Ker } P_n \circ f(x)$ então

$$\widehat{f(x)}(h) = (P_n \circ f(x)(h), p(h)) = (0, p(h)) \in \{0\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0).$$

Reciprocamente, se $h \in H$ e $\widehat{f(x)}(h) \in \{0\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0)$, então

$$(P_n \circ f(x)(h), p(h)) \in \{0\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0) \Rightarrow P_n \circ f(x)(h) = 0 \Rightarrow h \in \text{Ker } P_n \circ f(x).$$

Em particular, se $x \in U$ então $\widehat{f(x)} \in GL(H)$. Daí

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } P_n \circ f(x) &= \dim \widehat{f(x)}^{-1}(\{0\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0)) = \\ \dim \{0\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x_0) &= \dim \text{Ker } P_n \circ f(x_0). \end{aligned}$$

Logo, $\dim \text{Ker } P_n \circ f(x) = \dim \text{Ker } P_n \circ f(x_0)$, $\forall x \in U$.

Isto demonstra o item (2). $\square$

Corolário 4.1 *Seja $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ uma aplicação contínua e $x_0 \in X$ fixado. Existe um aberto $U \subset X$ com $x_0 \in U$ tal que*

$$\text{ind } f(x) = \text{ind } f(x_0), \forall x \in U.$$

Demonstração: Pelo Lema 4.1 existem um aberto $U \subset X$ com $x_0 \in U$ e um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que se $n \geq n_0$ então vale:

- (1) $Im P_n \circ f(x) = H_n, \forall x \in U.$
 (2) $dim Ker P_n \circ f(x) = dim Ker P_n \circ f(x_0), \forall x \in U.$

Logo, fixado $n \geq n_0$ temos que $coKer P_n \circ f(x) \cong H_n^\perp, \forall x \in U.$ Daí

$$\begin{aligned} ind f(x) &= ind P_n \circ f(x) = dim Ker P_n \circ f(x) - dim coKer P_n \circ f(x) = \\ &= dim Ker P_n \circ f(x_0) - dim H_n^\perp = dim Ker P_n \circ f(x_0) - dim coKer P_n \circ f(x_0) = \\ &= ind P_n \circ f(x_0) = ind f(x_0). \end{aligned}$$

Logo, $ind f(x) = ind f(x_0), \forall x \in U.$ $\square$

Lema 4.2 *Seja $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ uma aplicação contínua. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $Im P_n \circ f(x) = H_n, \forall x \in X.$*

Demonstração: Pelo Lema 4.1, para cada $x \in X$ existe um aberto $U_x \subset X$ com $x \in U_x$ e um número $n_x \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_x$ então vale:

- (1) $Im P_n \circ f(y) = H_n, \forall y \in U_x.$
 (2) $dim Ker P_n \circ f(y) = dim Ker P_n \circ f(x), \forall y \in U_x.$

Temos que $X \subset \bigcup_{x \in X} U_x.$ Como X é compacto existem $m \in \mathbb{N}$ e um conjunto $\{x_1, \dots, x_m\} \subset X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}.$

Tome $n_0 = \max \{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\} \in \mathbb{N}.$

Seja $n \geq n_0$ fixado.

Se $x \in X$ então existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in U_{x_i}.$ Como $n \geq n_0 \geq n_{x_i}$ temos que:

- (1) $Im P_n \circ f(y) = H_n, \forall y \in U_{x_i}.$
 (2) $dim Ker P_n \circ f(y) = dim Ker P_n \circ f(x_i), \forall y \in U_{x_i}.$

Em particular, $Im P_n \circ f(x) = H_n.$

Como $x \in X$ é arbitrário temos que $Im P_n \circ f(x) = H_n, \forall x \in X.$ $\square$

Sejam $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ uma aplicação contínua e $n_0 \in \mathbb{N}$ dado pelo Lema 4.2. A partir de agora vamos fixar $n \geq n_0.$

Observe que o conjunto $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker P_n \circ f(x) \subset X \times H$ é um espaço topológico munido da topologia induzida de $X \times H.$ Seja

$$\begin{aligned} \pi : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker P_n \circ f(x) &\rightarrow X \\ (x, h) &\mapsto x \end{aligned}$$

Temos que π é uma função contínua e sobrejetiva.

Lema 4.3 *A terna $Ker P_n \circ f = (\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker P_n \circ f(x), \pi, X)$ é um fibrado vetorial com base $X.$*

Demonstração:

(a) Para cada $x \in X$ temos que $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x)$ tem a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão finita pois $\text{Ker } P_n \circ f(x)$ é um espaço vetorial real de dimensão finita.

(b) Seja $x \in X$ fixado. Na demonstração do Lema 4.2 vimos que existem $x_i \in X$ e um aberto $U_{x_i} \subset X$ com $x \in U_{x_i}$ tais que $\dim \text{Ker } P_n \circ f(y) = \dim \text{Ker } P_n \circ f(x_i)$, $\forall y \in U_{x_i}$. Seja $d = \dim \text{Ker } P_n \circ f(x_i)$. Então $\text{Ker } P_n \circ f(y) \cong \mathbb{R}^d$, $\forall y \in U_{x_i}$. Seja $\varphi_y : \text{Ker } P_n \circ f(y) \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal isomorfismo.

Defina

$$g : \pi^{-1}(U_{x_i}) = \bigcup_{y \in U_{x_i}} \{y\} \times \text{Ker } P_n \circ f(y) \rightarrow U_{x_i} \times \mathbb{R}^d$$

$$(y, h) \mapsto (y, \varphi_y(h))$$

Temos que g é função contínua com inversa

$$g^{-1} : U_{x_i} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \pi^{-1}(U_{x_i}) = \bigcup_{y \in U_{x_i}} \{y\} \times \text{Ker } P_n \circ f(y)$$

$$(y, v) \mapsto (y, \varphi_y^{-1}(v))$$

contínua. Logo, g é homeomorfismo.

Lembrando que $p_1 : U_{x_i} \times \mathbb{R}^d \rightarrow U_{x_i}$ denota a projeção na primeira coordenada, temos que

$$p_1 \circ g(y, h) = p_1(y, \varphi_y(h)) = y = \pi(y, h) \Rightarrow p_1 \circ g = \pi.$$

É claro que pra cada $y \in U_{x_i}$ fixado, $g|_{\pi^{-1}(\{y\})}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo, $\text{Ker } P_n \circ f$ é um fibrado vetorial com base X . $\square$

Observe que o conjunto $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{coKer } P_n \circ f(x) \subset X \times H$ é um espaço topológico munido da topologia induzida de $X \times H$. Seja

$$\pi : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{coKer } P_n \circ f(x) \rightarrow X$$

$$(x, h) \mapsto x$$

Temos que π é uma função contínua e sobrejetiva.

Lema 4.4 *A terna $\text{coKer } P_n \circ f = (\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{coKer } P_n \circ f(x), \pi, X)$ é um fibrado vetorial com base X .*

Demonstração:

(a) Para cada $x \in X$ temos que $\pi^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times \text{coKer } P_n \circ f(x)$ tem a estrutura de um

espaço vetorial real de dimensão finita pois $\text{coKer } P_n \circ f(x)$ é um espaço vetorial real de dimensão finita.

(b) Pelo Lema 4.2 temos que $\text{coKer } P_n \circ f(x) \cong H_n^\perp$, $\forall x \in X$. Como $H_n^\perp \cong \mathbb{R}^n$ temos que para cada $x \in X$ existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\varphi_x : \text{coKer } P_n \circ f(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Defina

$$g : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{coKer } P_n \circ f(x) \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$$

$$(x, h) \mapsto (x, \varphi_x(h))$$

Temos que g é função contínua com inversa

$$g^{-1} : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{coKer } P_n \circ f(x)$$

$$(x, v) \mapsto (x, \varphi_x^{-1}(v))$$

contínua. Logo, g é homeomorfismo.

Seja $p_1 : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ a projeção na primeira coordenada. Note que

$$p_1 \circ g(x, h) = p_1(x, \varphi_x(h)) = x = \pi(x, h) \Rightarrow p_1 \circ g = \pi.$$

Como para cada $x \in X$ fixado, $g|_{\pi^{-1}(\{x\})}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que $\text{coKer } P_n \circ f$ é um fibrado vetorial com base X .

Na verdade mostramos mais: mostramos que $\text{coKer } P_n \circ f$ é um fibrado vetorial isomorfo ao fibrado trivial $\theta_n = (X \times \mathbb{R}^n, \pi_n, X)$. $\square$

Seja $G : \text{Vect}(X) \rightarrow K(\text{Vect}(X)) = K(X)$ a função de Grothendieck de $\text{Vect}(X)$. Vamos denotar a imagem de um elemento $\langle \xi \rangle \in \text{Vect}(X)$ pela função G por $[\xi]$, isto é, $G(\langle \xi \rangle) = [\xi]$.

Definição 4.4 $\text{Ind } f = [\text{Ker } P_n \circ f] - [\text{coKer } P_n \circ f] \in K(X)$ é chamado *índice generalizado* de $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$.

Observação 4.1 Pelo Lema 4.4, $\langle \text{coKer } P_n \circ f \rangle = \langle \theta_n \rangle$. Logo, $\text{Ind } f = [\text{Ker } P_n \circ f] - [\theta_n]$.

A princípio, nossa definição de índice generalizado depende não só da aplicação $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$, mas também do $n \geq n_0$ fixado e da base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ escolhida para H . Vamos mostrar que essa dependência é só aparente.

Lema 4.5 $\text{Ind } f$ não depende do $n \geq n_0$ escolhido.

Demonstração: Basta mostrar que $[\text{Ker } P_n \circ f] - [\theta_n] = [\text{Ker } P_{n+1} \circ f] - [\theta_{n+1}]$. De fato, se tivéssemos escolhido outro número $m \geq n_0$ então, supondo $m > n$, teríamos que $m = n + k$,

onde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Daí, por indução temos

$$\begin{aligned} [Ker P_n \circ f] - [\theta_n] &= [Ker P_{n+1} \circ f] - [\theta_{n+1}] = [Ker P_{n+2} \circ f] - [\theta_{n+2}] = \dots = \\ &= [Ker P_{n+k} \circ f] - [\theta_{n+k}] = [Ker P_m \circ f] - [\theta_m]. \end{aligned}$$

De modo análogo, se $m < n$ temos que $[Ker P_n \circ f] - [\theta_n] = [Ker P_m \circ f] - [\theta_m]$.

Logo, $Ind f$ não depende do $n \geq n_0$ escolhido.

Observe que θ_{n+1} é fibrado vetorial isomorfo ao fibrado $\theta_n \oplus \theta_1$ (ver Exemplo 2.3). Logo,

$$\langle \theta_{n+1} \rangle = \langle \theta_n \oplus \theta_1 \rangle = \langle \theta_n \rangle + \langle \theta_1 \rangle \Rightarrow [\theta_{n+1}] = [\theta_n] + [\theta_1].$$

Seja $x \in X$ fixado. Vamos mostrar que $P_n \circ f(x)|_{(Ker P_n \circ f(x))^\perp} : (Ker P_n \circ f(x))^\perp \rightarrow H_n$ é bijeção. De fato se $h \in (Ker P_n \circ f(x))^\perp$ e $(P_n \circ f(x))(h) = 0$, então $h \in Ker P_n \circ f(x) \cap (Ker P_n \circ f(x))^\perp = \{0\}$. Logo, temos a injetividade da transformação linear. Para a sobrejetividade, seja $h \in H_n$. Como $Im P_n \circ f(x) = H_n$, temos que existe $h' = h_1 + h_2 \in H = Ker P_n \circ f(x) \oplus (Ker P_n \circ f(x))^\perp$ tal que

$$(P_n \circ f(x))(h') = h \Rightarrow (P_n \circ f(x))(h_1) + (P_n \circ f(x))(h_2) = h \Rightarrow (P_n \circ f(x))(h_2) = h.$$

Logo, temos a sobrejetividade da transformação linear. Portanto, $P_n \circ f(x)|_{(Ker P_n \circ f(x))^\perp}$ é uma bijeção.

Como $(Ker P_n \circ f(x))^\perp$ e H_n são subespaços vetoriais de H fechados, ambos são espaços de Hilbert. Logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta, existe uma transformação linear e contínua $\widetilde{f(x)} : H_n \rightarrow (Ker P_n \circ f(x))^\perp$ que é a inversa da transformação $P_n \circ f(x)|_{(Ker P_n \circ f(x))^\perp}$. Seja $v_x = \widetilde{f(x)}(e_n) \in (Ker P_n \circ f(x))^\perp$, então $(P_n \circ f(x))(v_x) = e_n$.

Vamos mostrar que $Ker P_{n+1} \circ f(x) = Ker P_n \circ f(x) \oplus \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Primeiro observe que se $h \in Ker P_n \circ f(x) \cap \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, então $(P_n \circ f(x))(h) = 0$. Por outro lado $h = \lambda v_x$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo,

$$f(x)(h) = \lambda f(x)(v_x) \Rightarrow (P_n \circ f(x))(h) = \lambda(P_n \circ f(x))(v_x) \Rightarrow 0 = \lambda e_n \Rightarrow \lambda = 0.$$

Logo, $h = 0$ e a soma é direta.

Seja $h \in Ker P_{n+1} \circ f(x)$. Como $H = Ker P_n \circ f(x) \oplus (Ker P_n \circ f(x))^\perp$, temos que $h = h_1 + h_2$ com $h_1 \in Ker P_n \circ f(x)$ e $h_2 \in (Ker P_n \circ f(x))^\perp$. Como $\widetilde{f(x)}$ é sobrejetiva, existe $\widetilde{h}_2 \in H_n$ tal que $\widetilde{f(x)}(\widetilde{h}_2) = h_2$. Logo, $(P_n \circ f(x))(h_2) = \widetilde{h}_2$. Como $H_n = \overline{span \{e_n, e_{n+1}, \dots\}}$, temos que $\widetilde{h}_2 = \sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i e_i$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \geq n$. Daí

$$\begin{aligned} (P_n \circ f(x))(h) &= (P_n \circ f(x))(h_1) + (P_n \circ f(x))(h_2) = (P_n \circ f(x))(h_2) = \widetilde{h}_2 \Rightarrow \\ P_{n+1}((P_n \circ f(x))(h)) &= P_{n+1}(\widetilde{h}_2) \Rightarrow (P_{n+1} \circ f(x))(h) = P_{n+1} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i e_i \right) \Rightarrow \\ 0 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i e_i \Rightarrow \widetilde{h}_2 = \lambda_n e_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$h = h_1 + h_2 = h_1 + \widetilde{f(x)}(\widetilde{h_2}) = h_1 + \widetilde{f(x)}(\lambda_n e_n) = h_1 + \lambda_n \widetilde{f(x)}(e_n) = h_1 + \lambda_n v_x.$$

Portanto, $h \in \text{Ker } P_n \circ f(x) \oplus \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Reciprocamente, seja $h = h' + \lambda v_x \in \text{Ker } P_n \circ f(x) \oplus \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Então $(P_{n+1} \circ f(x))(h) = (P_{n+1} \circ f(x))(h') + (P_{n+1} \circ f(x))(\lambda v_x)$. Observando que $P_{n+1} \circ P_n = P_{n+1}$, temos que

$$(P_n \circ f(x))(h') = 0 \Rightarrow (P_{n+1} \circ f(x))(h') = 0 \Rightarrow (P_{n+1} \circ f(x))(h) = (P_{n+1} \circ f(x))(\lambda v_x).$$

Por outro lado,

$$(P_n \circ f(x))(\lambda v_x) = \lambda e_n \Rightarrow (P_{n+1} \circ f(x))(\lambda v_x) = \lambda P_{n+1}(e_n) \Rightarrow (P_{n+1} \circ f(x))(\lambda v_x) = 0.$$

Logo, $(P_{n+1} \circ f(x))(h) = 0$, isto é, $h \in \text{Ker } P_{n+1} \circ f(x)$.

Como $x \in X$ é arbitrário, temos que $\text{Ker } P_{n+1} \circ f(x) = \text{Ker } P_n \circ f(x) \oplus \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\forall x \in X$.

Seja $\xi = (\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \rho, X)$, onde $\rho(x, \lambda v_x) = x$. Temos que ξ é fibrado vetorial com base X pois $\{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

Vamos mostrar que o fibrado $\text{Ker } P_{n+1} \circ f$ é isomorfo ao fibrado $\text{Ker } P_n \circ f \oplus \xi$.

De fato, $\text{Ker } P_n \circ f \oplus \xi = (E, \nu, X)$, onde

$$\begin{cases} E = \{((x, h), (x, \lambda v_x)) \mid x \in X, h \in \text{Ker } P_n \circ f(x), \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \nu((x, h), (x, \lambda v_x)) = x \end{cases}.$$

A função

$$g : E \rightarrow \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } P_{n+1} \circ f(x)$$

$$((x, h), (x, \lambda v_x)) \mapsto (x, h + \lambda v_x)$$

está bem definida e é contínua. A inversa de g ,

$$g^{-1} : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } P_{n+1} \circ f(x) \rightarrow E$$

$$(x, h = h' + \lambda v_x) \mapsto ((x, h'), (x, \lambda v_x))$$

também é contínua. Logo g é homeomorfismo.

Temos que

$$\pi \circ g((x, h), (x, \lambda v_x)) = \pi(x, h + \lambda v_x) = x = \nu((x, h), (x, \lambda v_x)) \Rightarrow \pi \circ g = \nu.$$

Seja $x \in X$ fixado. Observe que $g|_{\nu^{-1}(\{x\})} : (\{x\} \times \text{Ker } P_n \circ f(x)) \times (\{x\} \times \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}) \rightarrow \{x\} \times \text{Ker } P_{n+1} \circ f(x)$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Isto mostra que os fibrados $\text{Ker } P_{n+1} \circ f$ e $\text{Ker } P_n \circ f \oplus \xi$ são isomorfos.

Vamos mostrar agora que o fibrado ξ é isomorfo ao fibrado trivial $\theta_1 = (X \times \mathbb{R}, \pi_1, X)$.

De fato, a função

$$g : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \rightarrow X \times \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda v_x) \mapsto (x, \lambda)$$

é contínua, e sua inversa

$$g^{-1} : X \times \mathbb{R} \rightarrow \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \{\lambda v_x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, \lambda) \mapsto (x, \lambda v_x)$$

é contínua. Logo, g é homeomorfismo. Temos que

$$\pi_1 \circ g(x, \lambda v_x) = \pi_1(x, \lambda) = x = \rho(x, \lambda v_x) \Rightarrow \pi_1 \circ g = \rho.$$

Como, para cada $x \in X$, $g|_{\rho^{-1}(\{x\})}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, fica demonstrado que os fibrados ξ e θ_1 são isomorfos.

Portanto,

$$\langle \text{Ker } P_{n+1} \circ f \rangle = \langle \text{Ker } P_n \circ f \oplus \xi \rangle = \langle \text{Ker } P_n \circ f \rangle + \langle \xi \rangle = \langle \text{Ker } P_n \circ f \rangle + \langle \theta_1 \rangle \Rightarrow$$

$$[\text{Ker } P_{n+1} \circ f] = [\text{Ker } P_n \circ f] + [\theta_1].$$

Logo,

$$[\text{Ker } P_{n+1} \circ f] - [\theta_{n+1}] = ([\text{Ker } P_n \circ f] + [\theta_1]) - ([\theta_n] + [\theta_1]) = [\text{Ker } P_n \circ f] - [\theta_n].$$

Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Lema 4.6 *Ind f não depende da base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ escolhida para H .*

Demonstração: Seja $\{d_0, d_1, d_2, \dots\}$ uma outra base ortonormal para H .

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sejam $\tilde{H}_m = \overline{\text{span}\{d_m, d_{m+1}, \dots\}}$ e $\tilde{P}_m : H = \tilde{H}_m \oplus \tilde{H}_m^\perp \rightarrow \tilde{H}_m$ a projeção ortogonal em $\tilde{H}_m$, onde $\tilde{H}_m^\perp = \text{span}\{d_0, d_1, \dots, d_{m-1}\}$.

Pelo Lema 4.2, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$, então $\text{Im } \tilde{P}_m \circ f(x) = \tilde{H}_m, \forall x \in X$. Seja $m \geq m_0$ fixado.

Vamos mostrar que

$$[\text{Ker } P_n \circ f] - [\text{coKer } P_n \circ f] = [\text{Ker } \tilde{P}_m \circ f] - [\text{coKer } \tilde{P}_m \circ f].$$

Logo, $Ind f$ não depende da base ortonormal escolhida para H .

Seja $l_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \subset \text{span}\{d_0, d_1, \dots, d_{l_0-1}\}$.

Observe que se $l \geq l_0$ então

$$\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \subset \text{span}\{d_0, d_1, \dots, d_{l-1}\} \Rightarrow H_n^\perp \subset \tilde{H}_l^\perp \Rightarrow H_n \supset \tilde{H}_l.$$

Logo, existe $k \geq n$ tal que $\tilde{H}_l = \overline{\text{span}\{e_k, e_{k+1}, \dots\}} = H_k$. Daí, $\tilde{P}_l = P_k$.

Pelo Lema 4.5, $[Ker P_n \circ f] - [coKer P_n \circ f]$ não depende do $n \geq n_0$ escolhido. Logo,

$$\begin{aligned} [Ker P_n \circ f] - [coKer P_n \circ f] &= [Ker P_k \circ f] - [coKer P_k \circ f] \Rightarrow \\ [Ker P_n \circ f] - [coKer P_n \circ f] &= [Ker \tilde{P}_l \circ f] - [coKer \tilde{P}_l \circ f]. \end{aligned}$$

Em particular, tomando $l = \max\{l_0, m\}$, temos que:

- (1) $[Ker P_n \circ f] - [coKer P_n \circ f] = [Ker \tilde{P}_l \circ f] - [coKer \tilde{P}_l \circ f]$.
- (2) Pelo Lema 4.5, $[Ker \tilde{P}_m \circ f] - [coKer \tilde{P}_m \circ f]$ não depende do $m \geq m_0$ escolhido. Logo,

$$[Ker \tilde{P}_m \circ f] - [coKer \tilde{P}_m \circ f] = [Ker \tilde{P}_l \circ f] - [coKer \tilde{P}_l \circ f].$$

De (1) e (2), temos que

$$[Ker P_n \circ f] - [coKer P_n \circ f] = [Ker \tilde{P}_m \circ f] - [coKer \tilde{P}_m \circ f].$$

Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Suponha que $X = \{x\}$, isto é, o espaço topológico X consiste de apenas um ponto. Neste caso X é espaço topológico de Hausdorff compacto. No Exemplo 2.5, mostramos que existe um isomorfismo de grupos $\Psi : K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisfaz: $\Psi([\xi]) = \dim E$, onde $\xi = (E, \pi, X)$ é um fibrado vetorial com base X .

Exemplo 4.1 *Seja $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ uma aplicação contínua. Então $\Psi(Ind f) = ind f(x)$.*

De fato, seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal para H . Como $f(x)$ é um operador de Fredholm, $\dim coKer f(x) < \infty$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Im f(x) = \overline{\text{span}\{e_n, e_{n+1}, \dots\}} = H_n$. Tomando $n = 0$, temos que $Im P_n \circ f(x) = Im f(x) = H_n, \forall x \in X$.

Por definição,

$$Ind f = [Ker P_n \circ f] - [coKer P_n \circ f] = [Ker f] - [coKer f].$$

Note que $Ker f = (E, \pi, X)$, onde $E = \bigcup_{y \in X} \{y\} \times Ker f(y) = \{x\} \times Ker f(x)$ e $\pi : E \rightarrow X$, $\pi(x, h) = x$. Logo, $\Psi([Ker f]) = \dim Ker f(x)$.

Note também que $coKer f = (F, \rho, X)$, onde $F = \bigcup_{y \in X} \{y\} \times coKer f(y) = \{x\} \times coKer f(x)$

e $\rho : F \rightarrow X$, $\rho(x, h) = x$. Logo, $\Psi([coKer f]) = \dim coKer f(x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \Psi(Ind f) &= \Psi([Ker f] - [coKer f]) = \Psi([Ker f]) - \Psi([coKer f]) = \\ \dim Ker f(x) - \dim coKer f(x) &= ind f(x) \Rightarrow \Psi(Ind f) = ind f(x). \quad \square \end{aligned}$$

Portanto, quando X consiste de apenas um ponto, o índice generalizado coincide (a menos de isomorfismo) com o índice de Fredholm de um operador. Por isso o índice generalizado estende o conceito de índice de Fredholm.

4.3 Invariância homotópica do índice generalizado

Nesta seção mostraremos que se $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ e $g : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ são aplicações homotópicas, então os índices generalizados de f e g coincidem.

Lembramos que se X e Y são espaços topológicos e $\varphi : Y \rightarrow X$ é uma função contínua, então existe um único homomorfismo de grupos $K_\varphi : K(X) \rightarrow K(Y)$ que satisfaz $K_\varphi([\xi]) = [\varphi^*\xi]$, $\forall \langle \xi \rangle \in Vect(X)$ (ver Seção 2.3).

Lema 4.7 *Sejam X e Y espaços topológicos de Hausdorff compactos e $\varphi : Y \rightarrow X$ uma função contínua. Se $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ é uma aplicação contínua, então $Ind f \circ \varphi = K_\varphi(Ind f)$ em $K(Y)$.*

Demonstração: Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal de H . Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $Im P_n \circ f(x) = H_n, \forall x \in X$.

Note que

$$Im P_n \circ f(\varphi(y)) = H_n, \forall y \in Y \Rightarrow Im P_n \circ (f \circ \varphi)(y) = H_n, \forall y \in Y.$$

$$\text{Logo, por definição, } \begin{cases} Ind f = [Ker P_n \circ f] - [\theta_n] \in K(X) \\ Ind f \circ \varphi = [Ker P_n \circ (f \circ \varphi)] - [\theta'_n] \in K(Y) \end{cases},$$

onde $\theta'_n = (Y \times \mathbb{R}^n, \pi'_n, Y)$ é o fibrado trivial com base Y .

Temos que

$$K_\varphi(Ind f) = K_\varphi([Ker P_n \circ f]) - K_\varphi([\theta_n]) = [\varphi^* Ker P_n \circ f] - [\varphi^* \theta_n].$$

Vamos mostrar que os fibrados $\varphi^* Ker P_n \circ f$ e $Ker P_n \circ (f \circ \varphi)$ são isomorfos. Primeiramente, seja $Ker P_n \circ f = (E, \pi, X)$, onde $E = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker P_n \circ f(x)$.

Então $\varphi^* Ker P_n \circ f = (\varphi^* E, \pi_\varphi, Y)$, onde

$$\begin{cases} \varphi^* E = \{(y, (x, h)) \in Y \times E \mid x = \varphi(y)\} = \{(y, (\varphi(y), h)) \mid y \in Y, h \in Ker P_n \circ f(\varphi(y))\} \\ \pi_\varphi(y, (\varphi(y), h)) = y \end{cases}.$$

Seja $\text{Ker } P_n \circ (f \circ \varphi) = (F, \rho, Y)$, onde $F = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times \text{Ker } P_n \circ (f \circ \varphi)(y)$.

Defina

$$\begin{aligned} g : \varphi^* E &\rightarrow F \\ (y, (\varphi(y), h)) &\rightarrow (y, h) \end{aligned}$$

A função g é contínua com inversa

$$\begin{aligned} g^{-1} : F &\rightarrow \varphi^* E \\ (y, h) &\rightarrow (y, (\varphi(y), h)) \end{aligned}$$

contínua. Logo, g é homeomorfismo.

Temos que

$$\rho \circ g(y, (\varphi(y), h)) = \rho(y, h) = y = \pi_\varphi(y, (\varphi(y), h)) \Rightarrow \rho \circ g = \pi_\varphi.$$

Como para cada $y \in Y$ fixado, $g|_{\pi_\varphi^{-1}(\{y\})}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que os fibrados $\varphi^* \text{Ker } P_n \circ f$ e $\text{Ker } P_n \circ (f \circ \varphi)$ são isomorfos. Logo,

$$\langle \varphi^* \text{Ker } P_n \circ f \rangle = \langle \text{Ker } P_n \circ (f \circ \varphi) \rangle \Rightarrow [\varphi^* \text{Ker } P_n \circ f] = [\text{Ker } P_n \circ (f \circ \varphi)].$$

Vamos mostrar agora que os fibrados $\varphi^* \theta_n$ e θ'_n são isomorfos.

Como $\theta_n = (X \times \mathbb{R}^n, \pi_n, X)$, temos que $\varphi^* \theta_n = (\varphi^* X \times \mathbb{R}^n, \pi_{n\varphi}, Y)$, onde

$$\begin{cases} \varphi^* X \times \mathbb{R}^n = \{(y, (x, u)) \in Y \times (X \times \mathbb{R}^n) \mid x = \varphi(y)\} = \{(y, (\varphi(y), u)) \mid y \in Y, u \in \mathbb{R}^n\} \\ \pi_{n\varphi}(y, (\varphi(y), u)) = y \end{cases}.$$

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \varphi^* X \times \mathbb{R}^n &\rightarrow Y \times \mathbb{R}^n \\ (y, (\varphi(y), u)) &\mapsto (y, u) \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{g}$ é função contínua com inversa

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} : Y \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \varphi^* X \times \mathbb{R}^n \\ (y, u) &\mapsto (y, (\varphi(y), u)) \end{aligned}$$

contínua. Logo, $\tilde{g}$ é homeomorfismo.

Observe que

$$\pi'_n \circ \tilde{g}(y, (\varphi(y), u)) = \pi'_n(y, u) = y = \pi_{n\varphi}(y, (\varphi(y), u)) \Rightarrow \pi'_n \circ \tilde{g} = \pi_{n\varphi}.$$

Como para cada $y \in Y$ fixado, $\tilde{g}|_{\pi_{n\varphi}^{-1}(\{y\})}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que os fibrados $\varphi^* \theta_n$ e θ'_n são isomorfos. Logo,

$$\langle \varphi^* \theta_n \rangle = \langle \theta'_n \rangle \Rightarrow [\varphi^* \theta_n] = [\theta'_n].$$

Portanto,

$$\text{Ind } f \circ \varphi = [\text{Ker } P_n \circ (f \circ \varphi)] - [\theta'_n] = [\varphi^* \text{Ker } P_n \circ f] - [\varphi^* \theta_n] = K_\varphi(\text{Ind } f).$$

Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Lema 4.8 *Sejam $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ e $g : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ aplicações contínuas e homotópicas. Então $\text{Ind } f = \text{Ind } g$.*

Demonstração: Como f e g são homotópicas existe uma aplicação contínua $F : X \times I \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $\begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}, \forall x \in X$.
Para cada $t \in I$, seja

$$\begin{aligned} i_t : X &\rightarrow X \times I \\ x &\mapsto (x, t) \end{aligned}$$

Temos que i_t é uma função contínua.

Observamos que i_0 e i_1 são funções homotópicas com homotopia dada pela função identidade $\text{Id}_{X \times I} : X \times I \rightarrow X \times I$. Pelo Corolário 2.2, $K_{i_0} = K_{i_1} : K(X \times I) \rightarrow K(X)$.

Note que $\begin{cases} f(x) = F(x, 0) = F \circ i_0(x), \forall x \in X \Rightarrow f = F \circ i_0 \\ g(x) = F(x, 1) = F \circ i_1(x), \forall x \in X \Rightarrow g = F \circ i_1 \end{cases}$.

Pelo Lema 4.7 temos que $\text{Ind } F \circ i_0 = K_{i_0}(\text{Ind } F)$ e $\text{Ind } F \circ i_1 = K_{i_1}(\text{Ind } F)$.

Como $K_{i_0} = K_{i_1}$, temos que $K_{i_0}(\text{Ind } F) = K_{i_1}(\text{Ind } F)$.

Logo,

$$\text{Ind } f = \text{Ind } F \circ i_0 = K_{i_0}(\text{Ind } F) = K_{i_1}(\text{Ind } F) = \text{Ind } F \circ i_1 = \text{Ind } g \Rightarrow \text{Ind } f = \text{Ind } g.$$

Fica assim demonstrado o Lema. $\square$

Seja $[X, \mathcal{F}(H)] = \{[f] \mid f : X \rightarrow \mathcal{F}(H) \text{ é contínua}\}$, onde $[f]$ denota a classe de homotopia de $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$. Definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \text{Ind} : [X, \mathcal{F}(H)] &\rightarrow K(X) \\ [f] &\mapsto \text{Ind } f \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.8, a aplicação Ind está bem definida.

4.4 O grupo $([X, \mathcal{F}(H)], \bullet)$

Nesta seção vamos definir uma operação no conjunto $[X, \mathcal{F}(H)]$ de maneira que, com esta operação, $[X, \mathcal{F}(H)]$ se tornará um grupo.

Note que se $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ são aplicações contínuas, então está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} f_1 f_2 : X &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto f_1(x) \circ f_2(x) \end{aligned}$$

pois a composição de operadores de Fredholm é um operador de Fredholm. Também temos que $f_1 f_2$ é uma aplicação contínua. Logo, $[f_1 f_2] \in [X, \mathcal{F}(H)]$.

Lema 4.9 *A aplicação*

$$\begin{aligned} \bullet : [X, \mathcal{F}(H)] \times [X, \mathcal{F}(H)] &\rightarrow [X, \mathcal{F}(H)] \\ ([f_1], [f_2]) &\mapsto [f_1] \bullet [f_2] = [f_1 f_2] \end{aligned}$$

define uma operação no conjunto $[X, \mathcal{F}(H)]$ de maneira que $([X, \mathcal{F}(H)], \bullet)$ é um grupo.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que a aplicação $\bullet$ está bem definida, isto é, que se $[f_1] = [f'_1]$ e $[f_2] = [f'_2]$, então $[f_1 f_2] = [f'_1 f'_2]$.

Por hipótese existem aplicações contínuas $F_1, F_2 : X \times I \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tais que

$$\begin{cases} F_1(x, 0) = f_1(x) \\ F_1(x, 1) = f'_1(x) \end{cases}, \forall x \in X \text{ e } \begin{cases} F_2(x, 0) = f_2(x) \\ F_2(x, 1) = f'_2(x) \end{cases}, \forall x \in X.$$

Defina

$$\begin{aligned} F_3 : X \times I &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ (x, t) &\mapsto F_1(x, t) \circ F_2(x, t) \end{aligned}$$

A aplicação F_3 está bem definida e é contínua.

$$\text{Observe que } \begin{cases} F_3(x, 0) = F_1(x, 0) \circ F_2(x, 0) = f_1(x) \circ f_2(x) = f_1 f_2(x) \\ F_3(x, 1) = F_1(x, 1) \circ F_2(x, 1) = f'_1(x) \circ f'_2(x) = f'_1 f'_2(x) \end{cases}, \forall x \in X.$$

Logo, as aplicações $f_1 f_2, f'_1 f'_2 : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ são homotópicas, isto é, $[f_1 f_2] = [f'_1 f'_2]$.

Vamos agora mostrar que, com esta operação, $[X, \mathcal{F}(H)]$ é um grupo. Para isso devemos mostrar que a operação é associativa, que existe um elemento neutro em $[X, \mathcal{F}(H)]$ e que todo elemento de $[X, \mathcal{F}(H)]$ admite inverso em $[X, \mathcal{F}(H)]$.

Associatividade: Sejam $[f_1], [f_2], [f_3] \in [X, \mathcal{F}(H)]$. Devemos mostrar que

$$([f_1] \bullet [f_2]) \bullet [f_3] = [f_1] \bullet ([f_2] \bullet [f_3]) \Leftrightarrow [(f_1 f_2) f_3] = [f_1 (f_2 f_3)].$$

$$\text{Note que } \begin{cases} ((f_1 f_2) f_3)(x) = (f_1 f_2)(x) \circ f_3(x) = (f_1(x) \circ f_2(x)) \circ f_3(x) \\ (f_1 (f_2 f_3))(x) = f_1(x) \circ (f_2 f_3)(x) = f_1(x) \circ (f_2(x) \circ f_3(x)) \end{cases}, \forall x \in X.$$

Como, para cada $x \in X$ vale $(f_1(x) \circ f_2(x)) \circ f_3(x) = f_1(x) \circ (f_2(x) \circ f_3(x))$, temos que as aplicações $(f_1 f_2) f_3$ e $f_1 (f_2 f_3)$ são idênticas. Logo, $[(f_1 f_2) f_3] = [f_1 (f_2 f_3)]$.

Existência de elemento neutro: Seja

$$\begin{aligned} e : X &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto Id_H \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $[e]$ é o elemento neutro de $[X, \mathcal{F}(H)]$. Para isso, seja $[f] \in [X, \mathcal{F}(H)]$. Devemos mostrar que

$$[f] \bullet [e] = [f] = [e] \bullet [f] \Leftrightarrow [fe] = [f] = [ef].$$

Note que

$$fe(x) = f(x) \circ e(x) = f(x) \circ Id_H = f(x), \forall x \in X \Rightarrow fe = f \Rightarrow [fe] = [f].$$

Analogamente mostramos que $[f] = [ef]$.

Existência de inverso: Seja $[f] \in [X, \mathcal{F}(H)]$. Defina

$$\begin{aligned} f^* : X &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto f(x)^* \end{aligned}$$

onde $f(x)^* \in \mathcal{F}(H)$ é o operador adjunto de $f(x)$. Dessa forma, f^* está bem definida e é contínua, de modo que $[f^*] \in [X, \mathcal{F}(H)]$. Vamos mostrar que $[f^*]$ é o inverso de $[f]$ em $[X, \mathcal{F}(H)]$, ou seja, devemos mostrar que

$$[f] \bullet [f^*] = [e] = [f^*] \bullet [f] \Leftrightarrow [ff^*] = [e] = [f^*f].$$

Seja $x \in X$ fixado. Note que, pelas propriedades dos operadores de Fredholm,

$$\begin{aligned} \text{ind } ff^*(x) &= \text{ind } f(x) \circ f(x)^* = \text{ind } f(x) + \text{ind } f(x)^* = \text{ind } f(x) - \text{ind } f(x) = 0 \Rightarrow \\ \dim \text{Ker } ff^*(x) &= \dim \text{coKer } ff^*(x). \end{aligned}$$

Logo, os espaços vetoriais $\text{Ker } ff^*(x)$ e $\text{coKer } ff^*(x)$ são isomorfos.

Por outro lado, temos que $\text{Im } ff^*(x)$ é um conjunto fechado, o que implica que $H = \text{Im } ff^*(x) \oplus (\text{Im } ff^*(x))^\perp$. Logo, $\text{coKer } ff^*(x)$ é isomorfo a $(\text{Im } ff^*(x))^\perp$. Portanto, $\text{Ker } ff^*(x)$ e $(\text{Im } ff^*(x))^\perp$ são espaços vetoriais isomorfos.

Seja $\varphi_x : \text{Ker } ff^*(x) \rightarrow (\text{Im } ff^*(x))^\perp$ tal isomorfismo.

Definimos $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(H)$ da seguinte maneira: para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) : H &= \text{Ker } ff^*(x) \oplus (\text{Ker } ff^*(x))^\perp \rightarrow H = \text{Im } ff^*(x) \oplus (\text{Im } ff^*(x))^\perp \\ h &= h_1 + h_2 \mapsto \varphi_x(h_1) \end{aligned}$$

Dessa maneira $\Phi(x) \in \mathcal{L}(H)$, $\forall x \in X$. Note que $\text{Im } \Phi(x) = \text{Im } \varphi_x = (\text{Im } ff^*(x))^\perp$. Logo, $\dim \text{Im } \Phi(x) < \infty$, o que implica que $\Phi(x) \in \mathcal{K}(H)$, $\forall x \in X$.

Defina

$$\begin{aligned} F_1 : X \times I &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ (x, t) &\mapsto ff^*(x) + t\Phi(x) \end{aligned}$$

Temos que F_1 é uma aplicação contínua. Fixado $(x, t) \in X \times I$, temos que $t\Phi(x) \in \mathcal{K}(H)$ e $ff^*(x) \in \mathcal{F}(H)$. Portanto, $ff^*(x) + t\Phi(x) \in \mathcal{F}(H)$. Logo, $F_1(X \times I) \subset \mathcal{F}(H)$.

Note que, $\begin{cases} F_1(x, 0) = ff^*(x) \\ F_1(x, 1) = ff^*(x) + \Phi(x) \end{cases}, \forall x \in X.$

Seja

$$\begin{aligned} ff^* + \Phi &: X \rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto ff^*(x) + \Phi(x) \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que $ff^* \approx ff^* + \Phi : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$.

Vamos mostrar que $ff^*(x) + \Phi(x) \in GL(H)$, $\forall x \in X$.

Seja $h = h_1 + h_2 \in H = \text{Ker } ff^*(x) \oplus (\text{Ker } ff^*(x))^\perp$ e suponha que $(ff^*(x) + \Phi(x))(h) = 0$. Então

$$(ff^*(x) + \Phi(x))(h_1 + h_2) = 0 \Rightarrow ff^*(x)(h_2) + \varphi_x(h_1) = 0 + 0 \in \text{Im } ff^*(x) \oplus (\text{Im } ff^*(x))^\perp.$$

Pela unicidade, temos que $ff^*(x)(h_2) = 0$ e $\varphi_x(h_1) = 0$. Como φ_x é isomorfismo, temos que $h_1 = 0$. Observe também que $h_2 \in \text{Ker } ff^*(x) \cap (\text{Ker } ff^*(x))^\perp = \{0\}$. Logo, $h_2 = 0$. Portanto, $h = h_1 + h_2 = 0$. Isto mostra que $ff^*(x) + \Phi(x)$ é injetiva.

Para a sobrejetividade, seja $h = h_1 + h_2 \in H = \text{Im } ff^*(x) \cap (\text{Im } ff^*(x))^\perp$. Logo, existe $h'_1 \in H$ tal que $ff^*(x)(h'_1) = h_1$. Como $H = \text{Ker } ff^*(x) \oplus (\text{Ker } ff^*(x))^\perp$, existem $h''_1 \in \text{Ker } ff^*(x)$ e $h''_2 \in (\text{Ker } ff^*(x))^\perp$ tais que $h'_1 = h''_1 + h''_2$. Daí $h_1 = ff^*(x)(h'_1) = ff^*(x)(h''_2)$. Por outro lado, como φ_x é isomorfismo, existe $h'_2 \in \text{Ker } ff^*(x)$ tal que $\varphi_x(h'_2) = h_2$.

Portanto $h'_2 + h''_2 \in \text{Ker } ff^*(x) \oplus (\text{Ker } ff^*(x))^\perp$ e

$$(ff^*(x) + \Phi(x))(h'_2 + h''_2) = ff^*(x)(h''_2) + \varphi_x(h'_2) = h_1 + h_2 = h \Rightarrow h \in \text{Im } ff^*(x) + \Phi(x).$$

Isto mostra que $ff^*(x) + \Phi(x)$ é sobrejetiva.

Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que a inversa de $ff^*(x) + \Phi(x)$ é contínua. Logo, $ff^*(x) + \Phi(x) \in GL(H)$.

Pelo Corolário 3.1, existe uma aplicação contínua $F : GL(H) \times I \rightarrow GL(H)$ tal que $F(z, 0) = z$ e $F(z, 1) = Id_H$, $\forall z \in GL(H)$.

Defina

$$\begin{aligned} F_2 &: X \times I \rightarrow GL(H) \\ (x, t) &\mapsto F(ff^*(x) + \Phi(x), t) \end{aligned}$$

Temos que F_2 é contínua e $\begin{cases} F_2(x, 0) = ff^*(x) + \Phi(x) = (ff^* + \Phi)(x) \\ F_2(x, 1) = Id_H = e(x) \end{cases}, \forall x \in X.$

Logo, $ff^* + \Phi \approx e : X \rightarrow GL(H)$.

Como $GL(H) \subset \mathcal{F}(H)$, temos que $ff^* + \Phi \approx e : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$.

Portanto, $ff^* \approx ff^* + \Phi \approx e : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$, ou seja, $[ff^*] = [e]$.

A demonstração da igualdade $[e] = [f^*f]$ é exatamente a mesma.

Logo, $[f^*]$ é o inverso de $[f]$ em $[X, \mathcal{F}(H)]$.

Portanto, $([X, \mathcal{F}(H)], \bullet)$ é um grupo. $\square$

4.5 Os grupos $[X, \mathcal{F}(H)]$ e $K(X)$ são isomorfos

Nesta seção mostramos que a aplicação $Ind : [X, \mathcal{F}(H)] \rightarrow K(X)$, definida na Seção 4.3, é um isomorfismo de grupos.

Teorema 4.2 (Teorema de Atiyah - Jänich) *A aplicação*

$$\begin{aligned} Ind : [X, \mathcal{F}(H)] &\rightarrow K(X) \\ [f] &\mapsto Ind f \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração:

Passo 1: Ind é um homomorfismo de grupos.

Primeiramente, observamos que dados operadores lineares $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(H)$, o operador

$$\begin{aligned} T_1 \oplus T_2 : H \times H &\rightarrow H \times H \\ (h_1, h_2) &\mapsto (T_1(h_1), T_2(h_2)) \end{aligned}$$

é um operador de Fredholm sobre o espaço de Hilbert $H \times H$. De fato,

(a) $Ker T_1 \oplus T_2 = Ker T_1 \times Ker T_2$.

Para demonstrar essa igualdade, seja $(h_1, h_2) \in Ker T_1 \oplus T_2$, então

$$\begin{aligned} T_1 \oplus T_2(h_1, h_2) = (0, 0) &\Rightarrow (T_1(h_1), T_2(h_2)) = (0, 0) \Rightarrow T_1(h_1) = 0 \text{ e } T_2(h_2) = 0 \Rightarrow \\ (h_1, h_2) &\in Ker T_1 \times Ker T_2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $(h_1, h_2) \in Ker T_1 \times Ker T_2$, então

$$\begin{aligned} T_1(h_1) = 0 \text{ e } T_2(h_2) = 0 &\Rightarrow (T_1(h_1), T_2(h_2)) = (0, 0) \Rightarrow T_1 \oplus T_2(h_1, h_2) = (0, 0) \Rightarrow \\ (h_1, h_2) &\in Ker T_1 \oplus T_2. \end{aligned}$$

Logo, $\dim Ker T_1 \oplus T_2 = \dim Ker T_1 + \dim Ker T_2 < \infty$.

(b) $Im T_1 \oplus T_2 = Im T_1 \times Im T_2$.

Para demonstrar essa igualdade, seja $(h_1, h_2) \in Im T_1 \oplus T_2$, então existe $(h'_1, h'_2) \in H \times H$ tal que

$$\begin{aligned} T_1 \oplus T_2(h'_1, h'_2) = (h_1, h_2) &\Rightarrow (T_1(h'_1), T_2(h'_2)) = (h_1, h_2) \Rightarrow T_1(h'_1) = h_1 \text{ e } T_2(h'_2) = h_2 \Rightarrow \\ (h_1, h_2) &\in Im T_1 \times Im T_2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $(h_1, h_2) \in \text{Im } T_1 \times \text{Im } T_2$, então existem $h'_1 \in H$ e $h'_2 \in H$ tais que

$$T_1(h'_1) = h_1 \text{ e } T_2(h'_2) = h_2 \Rightarrow (T_1(h'_1), T_2(h'_2)) = (h_1, h_2) \Rightarrow T_1 \oplus T_2(h'_1, h'_2) = (h_1, h_2) \Rightarrow (h_1, h_2) \in \text{Im } T_1 \oplus T_2.$$

Sejam $N_1, N_2 \subset H$ tais que $H = \text{Im } T_1 \oplus N_1$ e $H = \text{Im } T_2 \oplus N_2$. Então $\text{coKer } T_1 \cong N_1$ e $\text{coKer } T_2 \cong N_2$. Note que

$$\begin{aligned} H \times H &= (\text{Im } T_1 \oplus N_1) \times (\text{Im } T_2 \oplus N_2) = (\text{Im } T_1 \times \text{Im } T_2) \oplus (N_1 \times N_2) \Rightarrow \\ H \times H &= (\text{Im } T_1 \oplus T_2) \oplus (N_1 \times N_2) \Rightarrow \text{coKer } T_1 \oplus T_2 \cong N_1 \times N_2. \end{aligned}$$

Logo, $\dim \text{coKer } T_1 \oplus T_2 = \dim N_1 + \dim N_2 < \infty$.

Portanto, $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{F}(H \times H)$.

Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ aplicações contínuas. Pelos argumentos anteriores, a aplicação

$$\begin{aligned} f_1 \oplus f_2 : X &\rightarrow \mathcal{F}(H \times H) \\ x &\mapsto f_1(x) \oplus f_2(x) \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua.

Afirmção 1: $\text{Ind } f_1 \oplus f_2 = \text{Ind } f_1 + \text{Ind } f_2$ em $K(X)$.

Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal para H .

Pelo Lema 4.2, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que,

$$\begin{cases} \text{se } n \geq n_1, \text{ então } & \text{Im } P_n \circ f_1(x) = H_n, \forall x \in X \\ \text{se } n \geq n_2, \text{ então } & \text{Im } P_n \circ f_2(x) = H_n, \forall x \in X \end{cases}.$$

Tomando $n = \max \{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, temos que $\begin{cases} \text{Im } P_n \circ f_1(x) = H_n, \forall x \in X \\ \text{Im } P_n \circ f_2(x) = H_n, \forall x \in X \end{cases}$.

Por definição, $\begin{cases} \text{Ind } f_1 = [\text{Ker } P_n \circ f_1] - [\theta_n] \\ \text{Ind } f_2 = [\text{Ker } P_n \circ f_2] - [\theta_n] \end{cases}$.

Sabemos que $\{(e_0, 0), (e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (0, e_0), (0, e_1), (0, e_2), \dots\}$ é uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $H \times H$.

Seja $\tilde{H}_n = H_n \times H_n \subset H \times H$. Como $H_n = \overline{\text{span} \{e_n, e_{n+1}, \dots\}}$, H_n é um espaço de Hilbert com base ortonormal $\{e_n, e_{n+1}, \dots\}$. Logo $\tilde{H}_n$ também é um espaço de Hilbert com base ortonormal $\{(e_n, 0), (e_{n+1}, 0), \dots, (0, e_n), (0, e_{n+1}), \dots\}$.

Logo, $\tilde{H}_n = \overline{\text{span} \{(e_n, 0), (e_{n+1}, 0), \dots, (0, e_n), (0, e_{n+1}), \dots\}}$.

Portanto $\tilde{H}_n^\perp = \text{span} \{(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_{n-1}, 0), (0, e_0), (0, e_1), \dots, (0, e_{n-1})\} = H_n^\perp \times H_n^\perp$, pois $H_n^\perp = \text{span} \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$.

Logo, $H \times H = \tilde{H}_n \oplus \tilde{H}_n^\perp = (H_n \times H_n) \oplus (H_n^\perp \times H_n^\perp)$.

Seja $\tilde{P}_n : H \times H = \tilde{H}_n \oplus \tilde{H}_n^\perp \rightarrow \tilde{H}_n \subset H \times H$ a projeção ortogonal em $\tilde{H}_n$.

Se $(h_1, h_2) = (h'_1, h'_2) + (h''_1, h''_2) \in H \times H = \tilde{H}_n \oplus \tilde{H}_n^\perp$, então $\tilde{P}_n(h_1, h_2) = (h'_1, h'_2)$.

Por outro lado, como $(h_1, h_2) = (h'_1, h'_2) + (h''_1, h''_2)$, temos que $h_1 = h'_1 + h''_1 \in H_n \oplus H_n^\perp$ e $h_2 = h'_2 + h''_2 \in H_n \oplus H_n^\perp$. Logo, $P_n(h_1) = h'_1$ e $P_n(h_2) = h'_2$.

Concluimos que $\tilde{P}_n = P_n \oplus P_n$.

Seja $x \in X$ fixado. Observe que

$$\begin{aligned} (\tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2(x))(h_1, h_2) &= (\tilde{P}_n \circ f_1(x) \oplus f_2(x))(h_1, h_2) = \tilde{P}_n(f_1(x)(h_1), f_2(x)(h_2)) = \\ &= P_n \oplus P_n(f_1(x)(h_1), f_2(x)(h_2)) = (P_n(f_1(x)(h_1)), P_n(f_2(x)(h_2))) = \\ &= ((P_n \circ f_1(x))(h_1), (P_n \circ f_2(x))(h_2)) = (P_n \circ f_1(x)) \oplus (P_n \circ f_2(x))(h_1, h_2), \forall (h_1, h_2) \in H \times H. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2(x) = (P_n \circ f_1(x)) \oplus (P_n \circ f_2(x))$, $\forall x \in X$.

$$\text{Daí } \begin{cases} \text{Im } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2(x) = \text{Im } P_n \circ f_1(x) \times \text{Im } P_n \circ f_2(x) = H_n \times H_n = \tilde{H}_n, \forall x \in X \\ \text{Ker } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2(x) = \text{Ker } P_n \circ f_1(x) \times \text{Ker } P_n \circ f_2(x), \forall x \in X \end{cases}.$$

Portanto $\text{Ind } f_1 \oplus f_2 = [\text{Ker } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2] - [\theta_{2n}]$, já que $\dim \tilde{H}_n^\perp = \dim H_n^\perp + \dim H_n^\perp = 2n$.

Como o fibrado trivial θ_{2n} é isomorfo ao fibrado $\theta_n \oplus \theta_n$ (ver Exemplo 2.3), temos que

$$\langle \theta_{2n} \rangle = \langle \theta_n \oplus \theta_n \rangle = \langle \theta_n \rangle + \langle \theta_n \rangle \Rightarrow [\theta_{2n}] = [\theta_n] + [\theta_n].$$

Vamos mostrar agora que os fibrados $\text{Ker } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2$ e $\text{Ker } P_n \circ f_1 \oplus \text{Ker } P_n \circ f_2$ são isomorfos.

Temos que $\text{Ker } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2 = (E, \pi, X)$, onde

$$\begin{cases} E = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2(x) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } P_n \circ f_1(x) \times \text{Ker } P_n \circ f_2(x) \\ \pi(x, h_1, h_2) = x \end{cases}.$$

Também temos que $\text{Ker } P_n \circ f_1 \oplus \text{Ker } P_n \circ f_2 = (F, \rho, X)$, onde

$$\begin{cases} F = \{(x, h_1, x, h_2) \mid x \in X, h_1 \in \text{Ker } P_n \circ f_1(x), h_2 \in \text{Ker } P_n \circ f_2(x)\} \\ \rho(x, h_1, x, h_2) = x \end{cases}.$$

Defina

$$\begin{aligned} g : F &\rightarrow E \\ (x, h_1, x, h_2) &\mapsto (x, h_1, h_2) \end{aligned}$$

Temos que g é contínua com inversa

$$\begin{aligned} g^{-1} : E &\rightarrow F \\ (x, h_1, h_2) &\mapsto (x, h_1, x, h_2) \end{aligned}$$

contínua. Logo, g é homeomorfismo.

Observe que

$$\pi \circ g(x, h_1, x, h_2) = \pi(x, h_1, h_2) = x = \rho(x, h_1, x, h_2) \Rightarrow \pi \circ g = \rho.$$

Como para cada $x \in X$ fixado, $g|_{\rho^{-1}(\{x\})}$ é isomorfismo de espaços vetoriais, temos que os fibrados $\text{Ker } \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2$ e $\text{Ker } P_n \circ f_1 \oplus \text{Ker } P_n \circ f_2$ são isomorfos.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle Ker \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2 \rangle &= \langle Ker P_n \circ f_1 \oplus Ker P_n \circ f_2 \rangle = \langle Ker P_n \circ f_1 \rangle + \langle Ker P_n \circ f_2 \rangle \Rightarrow \\ [Ker \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2] &= [Ker P_n \circ f_1] + [Ker P_n \circ f_2]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Ind f_1 + Ind f_2 &= ([Ker P_n \circ f_1] - [\theta_n]) + ([Ker P_n \circ f_2] - [\theta_n]) = \\ ([Ker P_n \circ f_1] + [Ker P_n \circ f_2]) &- ([\theta_n] + [\theta_n]) = [Ker \tilde{P}_n \circ f_1 \oplus f_2] - [\theta_{2n}] = Ind f_1 \oplus f_2. \end{aligned}$$

Isto demonstra a Afirmação 1.

Observe agora que dados operadores lineares $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{L}(H)$, a matriz $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ representa um operador linear em $H \times H$ no seguinte sentido: dado $(h_1, h_2) \in H \times H$, então

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (T_1(h_1) + T_2(h_2), T_3(h_1) + T_4(h_2)) \in H \times H.$$

Vamos mostrar que esta matriz representa um operador em $\mathcal{L}(H \times H)$. A linearidade decorre do fato que T_1, T_2, T_3, T_4 são operadores lineares. Para a continuidade, seja $(u_0, v_0) \in H \times H$ fixado e seja $((u_k, v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $H \times H$ convergente para (u_0, v_0) . Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u_0 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v_0.$$

Como $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{L}(H)$ temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_1(u_k) = T_1(u_0), \lim_{k \rightarrow \infty} T_2(v_k) = T_2(v_0), \lim_{k \rightarrow \infty} T_3(u_k) = T_3(u_0), \lim_{k \rightarrow \infty} T_4(v_k) = T_4(v_0).$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_1(u_k) + T_2(v_k) = T_1(u_0) + T_2(v_0) \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} T_3(u_k) + T_4(v_k) = T_3(u_0) + T_4(v_0).$$

Daí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T_1(u_k) + T_2(v_k), T_3(u_k) + T_4(v_k)) = (T_1(u_0) + T_2(v_0), T_3(u_0) + T_4(v_0)).$$

Logo, a matriz $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ representa um operador em $\mathcal{L}(H \times H)$.

Em particular, se $T_1, T_2 \in \mathcal{F}(H)$, então o operador $T_1 \oplus T_2 \in \mathcal{F}(H \times H)$ é representado pela matriz $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$.

Afirmação 2: As aplicações $f_2 \oplus f_1 : X \rightarrow \mathcal{F}(H \times H)$ e $f_1 f_2 \oplus e : X \rightarrow \mathcal{F}(H \times H)$ são homotópicas. Consequentemente, $Ind f_2 \oplus f_1 = Ind f_1 f_2 \oplus e$ em $K(X)$.

Para cada $x \in X$ fixado, os operadores $f_2(x) \oplus f_1(x)$ e $f_1(x) \circ f_2(x) \oplus Id_H \in \mathcal{F}(H \times H)$ podem ser representados, respectivamente, pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & f_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} f_1(x) \circ f_2(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix}.$$

Seja $F : X \times I \rightarrow \mathcal{F}(H \times H)$ definida por:

$$F(x, t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & -\sin \frac{\pi t}{2} \\ \sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & \sin \frac{\pi t}{2} \\ -\sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix}.$$

Temos que F é uma aplicação contínua.

Vamos mostrar que $F(X \times I) \subset \mathcal{F}(H \times H)$. Seja $(x, t) \in X \times I$ fixado. Observe que as matrizes

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = f_1(x) \oplus Id_H \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = f_2(x) \oplus Id_H$$

representam operadores de Fredholm.

Por outro lado, note que

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & -\sin \frac{\pi t}{2} \\ \sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & \sin \frac{\pi t}{2} \\ -\sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = Id_{H \times H}$$

e

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & \sin \frac{\pi t}{2} \\ -\sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & -\sin \frac{\pi t}{2} \\ \sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = Id_{H \times H}.$$

Logo, $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & -\sin \frac{\pi t}{2} \\ \sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{2} & \sin \frac{\pi t}{2} \\ -\sin \frac{\pi t}{2} & \cos \frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}$ representam operadores em $GL(H \times H)$.

Como $GL(H \times H) \subset \mathcal{F}(H \times H)$, temos que essas matrizes também representam operadores de Fredholm.

Como a composição de operadores de Fredholm ainda é um operador de Fredholm temos que $F(x, t) \in \mathcal{F}(H \times H)$, $\forall (x, t) \in X \times I$.

Note que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \begin{pmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_H & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x) \circ f_2(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = f_1(x) \circ f_2(x) \oplus Id_H = f_1 f_2 \oplus e(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(x, 1) &= \begin{pmatrix} 0 & -Id_H \\ Id_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id_H \\ -Id_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & Id_H \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_2(x) & 0 \\ 0 & f_1(x) \end{pmatrix} = f_2(x) \oplus f_1(x) = f_2 \oplus f_1(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Logo, as aplicações $f_2 \oplus f_1 : X \rightarrow \mathcal{F}(H \times H)$ e $f_1 f_2 \oplus e : X \rightarrow \mathcal{F}(H \times H)$ são homotópicas. Isto demonstra a Afirmação 2.

Afirmação 3: $Ind e = 0$ em $K(X)$.

Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal para H . Tome $n = 0$.

Temos que
$$\begin{cases} Im P_n \circ e(x) = Im P_n \circ Id_H = Im Id_H = H = H_n, \forall x \in X \\ Ker P_n \circ e(x) = Ker P_n \circ Id_H = Ker Id_H = \{0\}, \forall x \in X \end{cases}.$$

Observe que $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker P_n \circ e(x) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \{0\} = X \times \{0\}$. Logo, o fibrado $Ker P_n \circ e$ é o fibrado trivial $\theta_0 = (X \times \{0\}, \pi_0, X)$.

Daí $Ind e = [Ker P_n \circ e] - [\theta_n] = [\theta_0] - [\theta_0] = 0 \in K(X)$.

Isto demonstra a Afirmação 3.

Vamos mostrar agora que Ind é homomorfismo de grupos. Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ aplicações contínuas.

Pela Afirmação 1 temos que $Ind f_1 f_2 + Ind e = Ind f_1 f_2 \oplus e$ e $Ind f_2 \oplus f_1 = Ind f_2 + Ind f_1$.

Pela Afirmação 2 temos que $Ind f_1 f_2 \oplus e = Ind f_2 \oplus f_1$.

Pela Afirmação 3 temos que $Ind e = 0$.

Daí

$$\begin{aligned} Ind f_1 f_2 &= Ind f_1 f_2 + 0 = Ind f_1 f_2 + Ind e = Ind f_1 f_2 \oplus e = Ind f_2 \oplus f_1 = \\ &Ind f_2 + Ind f_1 = Ind f_1 + Ind f_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$Ind([f_1] \bullet [f_2]) = Ind([f_1 f_2]) = Ind f_1 f_2 = Ind f_1 + Ind f_2 = Ind([f_1]) + Ind([f_2]).$$

Portanto, Ind é homomorfismo de grupos.

Passo 2: Ind é uma aplicação bijetiva.

Seja $[X, GL(H)] = \{[f] \mid f : X \rightarrow GL(H) \text{ é contínua}\}$, onde $[f]$ denota a classes de homotopia de $f : X \rightarrow GL(H)$.

Como $GL(H) \subset \mathcal{F}(H)$, dada um aplicação contínua $f : X \rightarrow GL(H) \subset \mathcal{F}(H)$, temos que $[f] \in [X, \mathcal{F}(H)]$. Dessa maneira $[X, GL(H)] \subset [X, \mathcal{F}(H)]$.

Observamos que $([X, GL(H)], \bullet)$ é subgrupo de $([X, \mathcal{F}(H)], \bullet)$. De fato, a operação $\bullet$ está bem definida em $[X, GL(H)]$ pois a composição de operadores em $GL(H)$ ainda é um operador em $GL(H)$. Temos que $[e] \in [X, GL(H)]$. Por último, como o adjunto de um operador em $GL(H)$ ainda é um operador em $GL(H)$, temos que se $[f] \in [X, GL(H)]$, então $[f]^{-1} = [f^*] \in [X, GL(H)]$.

Seja $A : [X, GL(H)] \rightarrow [X, \mathcal{F}(H)]$, $[f] \mapsto [f]$ a inclusão. Seja também $B : K(X) \rightarrow \{0\}$ o homomorfismo nulo.

Vamos mostrar que a sequência de homomorfismos

$$[X, GL(H)] \xrightarrow{A} [X, \mathcal{F}(H)] \xrightarrow{Ind} K(X) \xrightarrow{B} \{0\}$$

é exata, isto é, que $Im A = Ker Ind$ e $Im Ind = Ker B$.

Com isso teremos que Ind é bijeção.

De fato, pelo Corolário 3.1, existe uma aplicação contínua $F : GL(H) \times I \rightarrow GL(H)$ tal que

$$\begin{cases} F(z, 0) = z \\ F(z, 1) = Id_H \end{cases}, \forall z \in GL(H).$$

Seja $[f] \in [X, GL(H)]$. Tome

$$\begin{aligned} F' : X \times I &\rightarrow GL(H) \\ (x, t) &\mapsto F(f(x), t) \end{aligned}$$

Temos que F' é contínua e $\begin{cases} F'(x, 0) = F(f(x), 0) = f(x) \\ F'(x, 1) = F(f(x), 1) = Id_H = e(x) \end{cases}, \forall x \in X$.

Logo, $[f] = [e]$ em $[X, GL(H)]$. Portanto $[X, GL(H)] = 0$.

Daí $0 = Im A = Ker Ind$ e temos que Ind é injetiva.

Por outro lado $Im Ind = Ker B = K(X)$ e temos que Ind é sobrejetiva.

Afirmção 1: $Im A = Ker Ind$.

Seja $[f] \in Im A$, isto significa que $f : X \rightarrow GL(H)$ é contínua.

Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal para H . Tome $n = 0$.

Temos que $\begin{cases} Im P_n \circ f(x) = Im f(x) = H = H_n, \forall x \in X \\ Ker P_n \circ f(x) = Ker f(x) = \{0\}, \forall x \in X \end{cases}$.

Observe que $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker P_n \circ f(x) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \{0\} = X \times \{0\}$. Logo o fibrado $Ker P_n \circ f$ é o fibrado trivial $\theta_0 = (X \times \{0\}, \pi_0, X)$.

Por definição, $Ind f = [Ker P_n \circ f] - [\theta_n] = [\theta_0] - [\theta_0] = 0$.

Logo, $Ind([f]) = Ind f = 0$, o que mostra que $[f] \in Ker Ind$.

Reciprocamente, seja $[f] \in Ker Ind$. Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal de H e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $Im P_n \circ f(x) = H_n, \forall x \in X$. Temos que

$$0 = Ind([f]) = Ind f = [Ker P_n \circ f] - [\theta_n] \Rightarrow [Ker P_n \circ f] = [\theta_n].$$

Pelo Teorema 2.7, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle Ker P_n \circ f \oplus \theta_N \rangle = \langle \theta_n \oplus \theta_N \rangle.$$

Mas no Lema 4.5 vimos que vale

$$\langle \theta_{k+1} \rangle = \langle \theta_k \oplus \theta_1 \rangle \text{ e } \langle Ker P_{k+1} \circ f \rangle = \langle Ker P_k \circ f \oplus \theta_1 \rangle,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $Im P_k \circ f(x) = H_k, \forall x \in X$.

Por indução segue que

$$\langle \theta_{n+N} \rangle = \langle \theta_n \oplus \theta_N \rangle \text{ e } \langle Ker P_{n+N} \circ f \rangle = \langle Ker P_n \circ f \oplus \theta_N \rangle.$$

Portanto, fazendo $m = n + N$ temos que

$$\langle \theta_m \rangle = \langle \theta_n \oplus \theta_N \rangle \text{ e } \langle \text{Ker } P_m \circ f \rangle = \langle \text{Ker } P_n \circ f \oplus \theta_N \rangle.$$

Daí

$$\langle \text{Ker } P_m \circ f \rangle = \langle \text{Ker } P_n \circ f \oplus \theta_N \rangle = \langle \theta_n \oplus \theta_N \rangle = \langle \theta_m \rangle.$$

Como $\dim H_m^\perp = m$, temos que os fibrados $\theta_m = (X \times \mathbb{R}^m, \pi_m, X)$ e $\xi = (X \times H_m^\perp, \rho, X)$, onde $\rho(x, h) = x$, são isomorfos (ver Exemplo 2.2).

Logo,

$$\langle \text{Ker } P_m \circ f \rangle = \langle \theta_m \rangle = \langle \xi \rangle.$$

Isto significa que existe um homeomorfismo $g : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } P_m \circ f(x) \rightarrow X \times H_m^\perp$ tal que:

- (1) $\rho \circ g(x, h) = x$, $\forall (x, h) \in \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \text{Ker } P_m \circ f(x)$;
- (2) Para cada $x \in X$ fixado, $g|_{\{x\} \times \text{Ker } P_m \circ f(x)}$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Em particular, para cada $x \in X$, existe um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\varphi_x : \text{Ker } P_m \circ f(x) \rightarrow H_m^\perp.$$

Definimos $\Phi : X \rightarrow \mathcal{K}(H)$ da seguinte maneira: para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) : H = \text{Ker } P_m \circ f(x) \oplus (\text{Ker } P_m \circ f(x))^\perp &\rightarrow H_m^\perp \subset H \\ h_1 + h_2 &\mapsto \varphi_x(h_1) \end{aligned}$$

Dessa maneira $\Phi(x) \in \mathcal{L}(H)$. Vamos mostrar que $\Phi(x)$ é um operador compacto. Note que

$$\text{Im } \Phi(x) = \text{Im } \varphi_x = H_m^\perp \Rightarrow \dim \text{Im } \Phi(x) = m < \infty.$$

Logo, $\Phi(x) \in \mathcal{K}(H)$, $\forall x \in X$.

A continuidade da função Φ segue do fato de que g é um homeomorfismo.

Definimos

$$\begin{aligned} F_1 : X \times I &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ (x, t) &\mapsto P_m \circ f(x) + t\Phi(x) \end{aligned}$$

Temos que F_1 é contínua e $\begin{cases} F_1(x, 0) = P_m \circ f(x) \\ F_1(x, 1) = P_m \circ f(x) + \Phi(x) \end{cases}, \forall x \in X.$

Como, para cada $(x, t) \in X \times I$ fixado, $P_m \circ f(x) \in \mathcal{F}(H)$ e $t\Phi(x) \in \mathcal{K}(H)$, temos que $F_1(x, t) = P_m \circ f(x) + t\Phi(x) \in \mathcal{F}(H)$. Logo, $F_1(X \times I) \subset \mathcal{F}(H)$.

Observamos que Id_H e P_m são operadores de Fredholm de índice zero, logo existe uma

aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $\alpha(0) = Id_H$ e $\alpha(1) = P_m$.

Defina

$$\begin{aligned} F_2 : X \times I &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ (x, t) &\mapsto \alpha(t) \circ f(x) \end{aligned}$$

Temos que F_2 é contínua e $\begin{cases} F_2(x, 0) = \alpha(0) \circ f(x) = Id_H \circ f(x) = f(x) \\ F_2(x, 1) = \alpha(1) \circ f(x) = P_m \circ f(x) \end{cases}, \forall x \in X.$

Para cada $(x, t) \in X \times I$ fixado, $\alpha(t), f(x) \in \mathcal{F}(H)$. Logo, $F_2(X \times I) \subset \mathcal{F}(H)$ pois a composição de operadores de Fredholm ainda é um operador de Fredholm.

Sejam

$$\begin{aligned} P_m \circ f : X &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto P_m \circ f(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_m \circ f + \Phi : X &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto P_m \circ f(x) + \Phi(x) \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que $P_m \circ f \approx P_m \circ f + \Phi : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ e $f \approx P_m \circ f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$.

Logo, $f \approx P_m \circ f + \Phi : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$, isto é $[f] = [P_m \circ f + \Phi]$ em $[X, \mathcal{F}(H)]$.

Vamos mostrar que $P_m \circ f(x) + \Phi(x) \in GL(H), \forall x \in X$.

De fato, observe primeiro que $Im P_m \circ f(x) = H_m, \forall x \in X$ pois $m \geq n$.

Como $H = Ker P_m \circ f(x) \oplus (Ker P_m \circ f(x))^\perp$, dado $h = h_1 + h_2 \in H$, temos que

$$\begin{aligned} ((P_m \circ f(x) + \Phi(x)))(h) &= (P_m \circ f(x))(h) + \Phi(x)(h) = (P_m \circ f(x))(h_2) + \varphi_x(h_1) = \\ &= (P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp})(h_2) + \varphi_x(h_1) \in Im P_m \circ f(x) \oplus (Im P_m \circ f(x))^\perp. \end{aligned}$$

Logo, podemos representar o operador $P_m \circ f(x) + \Phi(x) \in \mathcal{F}(H)$ pela matriz

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & 0 \\ 0 & P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp} \end{pmatrix},$$

significando que dado $h = h_1 + h_2 \in H = Ker P_m \circ f(x) \oplus (Ker P_m \circ f(x))^\perp$, então

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & 0 \\ 0 & P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \varphi_x(h_1) + (P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp})(h_2).$$

Temos que $\varphi_x : Ker P_m \circ f(x) \rightarrow (Im P_m \circ f(x))^\perp$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, logo a sua inversa $\varphi_x^{-1} : (Im P_m \circ f(x))^\perp \rightarrow Ker P_m \circ f(x)$ é contínua.

Observamos que $P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp} : (Ker P_m \circ f(x))^\perp \rightarrow Im P_m \circ f(x)$ é bijeção.

De fato se $h_2 \in (Ker P_m \circ f(x))^\perp$ e $(P_m \circ f(x))(h_2) = 0$ então

$$h_2 \in Ker P_m \circ f(x) \cap (Ker P_m \circ f(x))^\perp = \{0\} \Rightarrow h_2 = 0.$$

Logo, $P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp}$ é injetiva.

Seja $h' \in Im P_m \circ f(x)$, então existe $h = h_1 + h_2 \in H = Ker P_m \circ f(x) \oplus (Ker P_m \circ f(x))^\perp$ tal que

$$(P_m \circ f(x))(h) = h' \Rightarrow (P_m \circ f(x))(h_1) + (P_m \circ f(x))(h_2) = h' \Rightarrow (P_m \circ f(x))(h_2) = h' \Rightarrow h' \in Im P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp}.$$

Logo, $P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp}$ é sobrejetiva.

Como $P_m \circ f(x) \in \mathcal{F}(H)$ temos que $Im P_m \circ f(x)$ é um subespaço vetorial de H fechado, logo $Im P_m \circ f(x)$ é um espaço de Hilbert. Também temos que $(Ker P_m \circ f(x))^\perp$ é um subespaço vetorial de H fechado, logo $(Ker P_m \circ f(x))^\perp$ é um espaço de Hilbert. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, a inversa de $P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp}$ é uma transformação linear e contínua. Vamos denotá-la por $\widetilde{f(x)} : Im P_m \circ f(x) \rightarrow (Ker P_m \circ f(x))^\perp$.

O operador

$$T_x : H = (Im P_m \circ f(x))^\perp \oplus Im P_m \circ f(x) \rightarrow H = Ker P_m \circ f(x) \oplus (Ker P_m \circ f(x))^\perp$$

$$h = h_1 + h_2 \mapsto \varphi_x^{-1}(h_1) + \widetilde{f(x)}(h_2)$$

é linear e contínuo.

T_x pode ser representado pela matriz

$$\begin{pmatrix} \varphi_x^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{f(x)} \end{pmatrix},$$

significando que dado $h = h_1 + h_2 \in (Im P_m \circ f(x))^\perp \oplus Im P_m \circ f(x)$ então

$$\begin{pmatrix} \varphi_x^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{f(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \varphi_x^{-1}(h_1) + \widetilde{f(x)}(h_2).$$

Como

$$\begin{pmatrix} \varphi_x^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{f(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x & 0 \\ 0 & P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{Ker P_m \circ f(x)} & 0 \\ 0 & Id_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & 0 \\ 0 & P_m \circ f(x)|_{(Ker P_m \circ f(x))^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x^{-1} & 0 \\ 0 & \widetilde{f(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{(Im P_m \circ f(x))^\perp} & 0 \\ 0 & Id_{Im P_m \circ f(x)} \end{pmatrix},$$

temos que $T_x = (P_m \circ f(x) + \Phi(x))^{-1}$. Logo, $P_m \circ f(x) + \Phi(x) \in GL(H)$.

Portanto $[P_m \circ f + \Phi] \in [X, GL(H)]$ e

$$A([P_m \circ f + \Phi]) = [P_m \circ f + \Phi] = [f] \in [X, \mathcal{F}(H)] \Rightarrow [f] \in Im A.$$

Isto demonstra a Afirmação 1.

Afirmação 2: $Im Ind = Ker B \Leftrightarrow Im Ind = K(X)$.

Seja $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ base ortonormal para H . Vamos definir os operadores

$$T_- : H \rightarrow H$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_{i-1}$$

e

$$T_+ : H \rightarrow H$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_{i+1}$$

Temos que T_- e T_+ são operadores de Fredholm. De fato,

$$(1) Ker T_- = \{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_{i-1} = 0\} = span \{e_0\} \Rightarrow dim Ker T_- = 1.$$

$$(2) Ker T_+ = \{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i \mid \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_{i+1} = 0\} = \{0\} \Rightarrow dim Ker T_+ = 0.$$

$$(3) Im T_- = \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_{i-1} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i < \infty\} = H \Rightarrow coKer T_- = \{0\} \Rightarrow dim coKer T_- = 0.$$

$$(4) Im T_+ = \{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_{i+1} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i < \infty\} = \overline{span \{e_1, e_2, \dots\}} \Rightarrow coKer T_+ \cong span \{e_0\} \Rightarrow dim coKer T_+ = 1.$$

Logo T_- e T_+ são operadores de Fredholm com $ind T_- = 1$ e $ind T_+ = -1$.

Sabemos do Teorema 2.8 que todo elemento de $K(X)$ é da forma $[\xi] - [\theta_N]$, onde ξ é um fibrado vetorial com base X e $N \in \mathbb{N}$. Portanto, dado $[\xi] - [\theta_N] \in K(X)$, devemos mostrar que $[\xi] - [\theta_N] \in Im Ind$.

Suponha que exista uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $Ind f = [\xi] \in K(X)$.

A aplicação

$$f_1 : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$$

$$x \mapsto T_+$$

é contínua e $Im P_1 \circ f_1(x) = Im P_1 \circ T_+ = Im T_+ = H_1, \forall x \in X$.

Observe que $Ker P_1 \circ f_1(x) = Ker P_1 \circ T_+ = Ker T_+ = \{0\}$. Logo o fibrado $Ker P_1 \circ f_1$ é o fibrado trivial θ_0 .

Por definição, $Ind f_1 = [Ker P_1 \circ f_1] - [\theta_1] = [\theta_0] - [\theta_1] = -[\theta_1]$.

Mostramos no Passo 1 que Ind é homomorfismo de grupos. Logo,

$$Ind f_1^N f = Ind f_1^N + Ind f = \underbrace{Ind f_1 + \dots + Ind f_1}_{N \text{ vezes}} + Ind f = \underbrace{-[\theta_1] - \dots - [\theta_1]}_{N \text{ vezes}} + [\xi].$$

Note que

$$\underbrace{\langle \theta_1 \rangle + \dots + \langle \theta_1 \rangle}_{N \text{ vezes}} = \langle \theta_N \rangle \Rightarrow \underbrace{[\theta_1] + \dots + [\theta_1]}_{N \text{ vezes}} = [\theta_N].$$

Portanto,

$$\text{Ind } f_1^N f = [\xi] - [\theta_N] \Rightarrow \text{Ind } ([f_1^N f]) = [\xi] - [\theta_N] \Rightarrow [\xi] - [\theta_N] \in \text{Im Ind}.$$

Isto mostra que $\text{Im Ind} = K(X)$. Logo basta mostrarmos que existe uma aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathcal{F}(H)$ tal que $\text{Ind } f = [\xi] \in K(X)$.

Seja $\xi = (E, \pi, X)$. Pelo Teorema 2.6, existe um fibrado vetorial $\eta = (F, \rho, X)$ tal que $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \theta_m \rangle$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Lembramos que $\xi \oplus \eta = (G, \nu, X)$, onde $G = \{(e, f) \in E \times F \mid \pi(e) = \rho(f)\}$ e $\nu : G \rightarrow X$, $\nu(e, f) = \pi(e) = \rho(f)$. Também temos que $\theta_m = (X \times \mathbb{R}^m, \pi_m, X)$, onde $\pi_m : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada. Como $\langle \xi \oplus \eta \rangle = \langle \theta_m \rangle$, existe um homeomorfismo $g : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow G$ tal que $\nu \circ g = \pi_m$ e para cada $x \in X$, $g|_{\{x\} \times \mathbb{R}^m} : \{x\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow E_x \times F_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Em particular, para cada $x \in X$, os espaços vetoriais $E_x \times F_x$ e $\mathbb{R}^m$ são isomorfos com isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{R}^m &\rightarrow E_x \times F_x \\ u &\mapsto g(x, u) \end{aligned}$$

Vamos escrever $\varphi_x(u) = (\varphi_x^1(u), \varphi_x^2(u))$, $u \in \mathbb{R}^m$.

Seja

$$\begin{aligned} p_x : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto \varphi_x^{-1}((\varphi_x^1(u), 0)) \end{aligned}$$

a projeção de $\mathbb{R}^m$ em E_x . Temos que $p_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$.

Seja $\mathbb{R}^m \otimes H$ o produto tensorial de $\mathbb{R}^m$ e H .

Temos que $\mathbb{R}^m \otimes H = \left\{ \sum_{i=1}^k u_i \otimes h_i \mid k \in \mathbb{N}, u_i \in \mathbb{R}^m, h_i \in H, \text{ para } 1 \leq i \leq k \right\}$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}^m \otimes H) \times (\mathbb{R}^m \otimes H) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\sum_{i=1}^{k_1} u_i \otimes h_i, \sum_{j=1}^{k_2} u'_j \otimes h'_j \right) &\mapsto \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \langle u_i, u'_j \rangle \langle h_i, h'_j \rangle \end{aligned}$$

Em $\mathbb{R}^m \otimes H$ vale a seguinte propriedade:

$$\begin{cases} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \otimes h = \lambda_1 (u_1 \otimes h) + \lambda_2 (u_2 \otimes h) \\ u \otimes (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 (u \otimes h_1) + \lambda_2 (u \otimes h_2) \end{cases}, \text{ onde } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m \text{ e } h_1, h_2 \in H.$$

Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ e $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ bases ortonormais de $\mathbb{R}^m$ e H , respectivamente. Então $\{v_1 \otimes e_0, v_1 \otimes e_1, \dots; v_2 \otimes e_0, v_2 \otimes e_1, \dots; \dots; v_m \otimes e_0, v_m \otimes e_1, \dots\}$ é base ortonormal para $\mathbb{R}^m \otimes H$. Portanto $\mathbb{R}^m \otimes H$ é espaço de Hilbert separável. Logo, $\mathbb{R}^m \otimes H \cong H$.

Dados $T \in \mathcal{L}(H)$ e $\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, definimos

$$\begin{aligned} \tau \otimes T : \mathbb{R}^m \otimes H &\rightarrow \mathbb{R}^m \otimes H \\ \sum_{i=1}^k u_i \otimes h_i &\mapsto \sum_{i=1}^k \tau(u_i) \otimes T(h_i) \end{aligned}$$

Temos que $\tau \otimes T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \otimes H)$.

A demonstração destes fatos pode ser encontrada em [Ka], pp. 125 a 147.

Para cada $x \in X$ fixado, definimos $f(x) = p_x \otimes T_- + (Id_{\mathbb{R}^m} - p_x) \otimes Id_H$. Dessa forma $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \otimes H)$.

Seja $u \in \mathbb{R}^m$. Observe que

$$f(x)(u \otimes e_i) = p_x(u) \otimes T_-(e_i) + (u - p_x(u)) \otimes e_i.$$

$$\text{Em particular, } \begin{cases} f(x)(u \otimes e_i) = p_x(u) \otimes e_{i-1} + (u - p_x(u)) \otimes e_i, & \text{se } i \geq 1 \\ f(x)(u \otimes e_0) = p_x(u) \otimes 0 + (u - p_x(u)) \otimes e_0 = (u - p_x(u)) \otimes e_0 \end{cases}.$$

Vamos mostrar que $\text{Ker } f(x) = \{u \otimes e_0 \mid u \in \mathbb{R}^m \text{ e } \varphi_x^2(u) = 0\}$.

De fato, se $u \in \mathbb{R}^m$ e $\varphi_x^2(u) = 0$, então

$$\varphi_x(u) = (\varphi_x^1(u), \varphi_x^2(u)) = (\varphi_x^1(u), 0) \Rightarrow p_x(u) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(u), 0) = u.$$

Logo,

$$f(x)(u \otimes e_0) = (u - p_x(u)) \otimes e_0 = 0 \otimes e_0 = 0 \Rightarrow u \otimes e_0 \in \text{Ker } f(x).$$

Reciprocamente, seja $\sum_{j=1}^k u_j \otimes h_j \in \text{Ker } f(x)$. Como $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ é base ortonormal de H , para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existem escalares $\lambda_i^j \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ tais que $h_j = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^j e_i$.

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k u_j \otimes h_j &= \sum_{j=1}^k u_j \otimes \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^j e_i \right) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^j (u_j \otimes e_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^k \lambda_i^j (u_j \otimes e_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_i^j u_j \right) \otimes e_i. \end{aligned}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $w_i = \sum_{j=1}^k \lambda_i^j u_j \in \mathbb{R}^m$. Então $\sum_{j=1}^k u_j \otimes h_j = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \otimes e_i$.

Note que

$$\begin{aligned}
f(x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \otimes e_i \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} f(x)(w_i \otimes e_i) = f(x)(w_0 \otimes e_0) + \sum_{i=1}^{\infty} f(x)(w_i \otimes e_i) = \\
&= (w_0 - p_x(w_0)) \otimes e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (p_x(w_i) \otimes e_{i-1} + (w_i - p_x(w_i)) \otimes e_i) = \\
&= (w_0 - p_x(w_0)) \otimes e_0 + \sum_{i=0}^{\infty} p_x(w_{i+1}) \otimes e_i + \sum_{i=1}^{\infty} (w_i - p_x(w_i)) \otimes e_i = \\
&= (w_0 - p_x(w_0)) \otimes e_0 + p_x(w_1) \otimes e_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (p_x(w_{i+1}) \otimes e_i + (w_i - p_x(w_i)) \otimes e_i) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (p_x(w_{i+1}) \otimes e_i + (w_i - p_x(w_i)) \otimes e_i) = \sum_{i=0}^{\infty} (p_x(w_{i+1}) + w_i - p_x(w_i)) \otimes e_i.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^k u_j \otimes h_j = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \otimes e_i \in \text{Ker } f(x)$, temos que

$$f(x) \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \otimes e_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} (p_x(w_{i+1}) + w_i - p_x(w_i)) \otimes e_i = 0.$$

Como o conjunto $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ é linearmente independente, por [We], p. 319, temos que

$$p_x(w_{i+1}) + w_i - p_x(w_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(w_{i+1}), 0) + w_i - \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(w_i), 0) = 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\forall i \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned}
&\varphi_x(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(w_{i+1}), 0) + w_i - \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(w_i), 0)) = (0, 0) \Rightarrow \\
&(\varphi_x^1(w_{i+1}), 0) + (\varphi_x^1(w_i), \varphi_x^2(w_i)) - (\varphi_x^1(w_i), 0) = (0, 0) \Rightarrow (\varphi_x^1(w_{i+1}), \varphi_x^2(w_i)) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Portanto, $\begin{cases} \varphi_x^1(w_{i+1}) = 0 \\ \varphi_x^2(w_i) = 0 \end{cases}, \forall i \in \mathbb{N}.$

Seja $i_0 \in \{1, 2, \dots\}$ fixado. Então $w_{i_0} = 0$. De fato, tomando $i = i_0 - 1 \in \mathbb{N}$, temos que

$$\varphi_x^1(w_{i_0}) = \varphi_x^1(w_{i_0+1}) = 0. \text{ Tomando } i = i_0 \in \mathbb{N}, \text{ temos que } \varphi_x^2(w_{i_0}) = \varphi_x^2(w_i) = 0.$$

Logo, $\varphi_x(w_{i_0}) = (\varphi_x^1(w_{i_0}), \varphi_x^2(w_{i_0})) = (0, 0)$. Como φ_x é isomorfismo, temos que $w_{i_0} = 0$.

Portanto, $\sum_{j=1}^k u_j \otimes h_j = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \otimes e_i = w_0 \otimes e_0$, com $w_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\varphi_x^2(w_0) = 0$. Isto é, $\sum_{j=1}^k u_j \otimes h_j \in \{u \otimes e_0 \mid u \in \mathbb{R}^m \text{ e } \varphi_x^2(u) = 0\}$.

Com isso temos que vale a igualdade $\text{Ker } f(x) = \{u \otimes e_0 \mid u \in \mathbb{R}^m \text{ e } \varphi_x^2(u) = 0\}$.

Portanto $\text{Ker } f(x)$ é isomorfo a E_x , com isomorfismo dado pela aplicação

$$\begin{aligned}
\psi_x : \text{Ker } f(x) &\rightarrow E_x \\
u \otimes e_0 &\mapsto \varphi_x^1(u)
\end{aligned}$$

Logo, $\dim \text{Ker } f(x) = \dim E_x < \infty$.

Vamos mostrar agora que $\text{Im } f(x) = \mathbb{R}^m \otimes H$. Para isso, basta mostrarmos que todo elemento

da base de $\mathbb{R}^m \otimes H$ está na imagem de $f(x)$. Seja $v_i \otimes e_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j < \infty$ um elemento da base de $\mathbb{R}^m \otimes H$. Observe primeiramente que

$$\begin{aligned} \varphi_x(v_i - \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)) &= \varphi_x(v_i) - (\varphi_x^1(v_i), 0) = (\varphi_x^1(v_i), \varphi_x^2(v_i)) - (\varphi_x^1(v_i), 0) = (0, \varphi_x^2(v_i)) \\ \Rightarrow v_i - p_x(v_i) &= v_i - \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0) = \varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)). \end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)) = (\varphi_x^1(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)), \varphi_x^2(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0))) \\ (\varphi_x^1(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)), \varphi_x^2(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0))) = \varphi_x(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)) = (\varphi_x^1(v_i), 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\varphi_x(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)) = (\varphi_x^1(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)), 0) \Rightarrow \\ &p_x(p_x(v_i)) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(p_x(v_i)), 0) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(\varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0)), 0) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x^1(v_i), 0) \Rightarrow \\ &p_x(p_x(v_i)) = p_x(v_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x)(p_x(v_i) \otimes e_{j+1} + \varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)) \otimes e_j) = f(x)(p_x(v_i) \otimes e_{j+1}) + f(x)(\varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)) \otimes e_j).$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(x)(p_x(v_i) \otimes e_{j+1}) &= p_x(p_x(v_i)) \times T_-(e_{j+1}) + (p_x(v_i) - p_x(p_x(v_i))) \otimes e_{j+1} = \\ p_x(v_i) \otimes e_j + (p_x(v_i) - p_x(v_i)) \otimes e_{j+1} &= p_x(v_i) \otimes e_j + 0 \otimes e_{j+1} = p_x(v_i) \otimes e_j \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x)(\varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)) \otimes e_j) &= p_x(\varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i))) \otimes T_-(e_j) + \\ (\varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)) - p_x(\varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)))) \otimes e_j &= p_x(v_i - p_x(v_i)) \otimes T_-(e_j) + \\ (v_i - p_x(v_i) - p_x(v_i - p_x(v_i))) \otimes e_j &= (p_x(v_i) - p_x(p_x(v_i))) \otimes T_-(e_j) + \\ (v_i - p_x(v_i) - p_x(v_i) + p_x(p_x(v_i))) \otimes e_j &= (p_x(v_i) - p_x(v_i)) \otimes T_-(e_j) + \\ (v_i - p_x(v_i) - p_x(v_i) + p_x(v_i)) \otimes e_j &= (v_i - p_x(v_i)) \otimes e_j. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} f(x)(p_x(v_i) \otimes e_{j+1} + \varphi_x^{-1}(0, \varphi_x^2(v_i)) \otimes e_j) &= p_x(v_i) \otimes e_j + (v_i - p_x(v_i)) \otimes e_j = \\ (p_x(v_i) + v_i - p_x(v_i)) \otimes e_j &= v_i \otimes e_j. \end{aligned}$$

Portanto $v_i \otimes e_j \in \text{Im } f(x)$. Logo, $\text{coKer } f(x) = \{0\}$ e $\dim \text{coKer } f(x) = 0$.

Com isso $f(x)$ é um operador de Fredholm, $\forall x \in X$. Como $\mathbb{R}^m \otimes H \cong H$, temos que $f(x) \in \mathcal{F}(H)$, $\forall x \in X$. Por isso a aplicação

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathcal{F}(H) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua.

Como $Im f(x) = H$, $\forall x \in X$, pelo Lema 4.3, a terna $Ker f = (\bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker f(x), \pi', X)$ é um fibrado vetorial com base X . Vamos mostrar que os fibrados $Ker f$ e ξ são isomorfos.

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker f(x) &\rightarrow E \\ (x, h) &\rightarrow \psi_x(h) \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{g}$ é contínua pois $g : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow G$ é homeomorfismo.

A função

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} : E &\rightarrow \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker f(x) \\ e &\rightarrow (\pi(e), \psi_{\pi(e)}^{-1}(e)) \end{aligned}$$

também é contínua.

Observe que

(1) $\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g}(x, h) = \tilde{g}^{-1}(\psi_x(h)) = (\pi(\psi_x(h)), \psi_{\pi(\psi_x(h))}^{-1}(\psi_x(h)))$. Como $\psi_x(h) \in E_x$, temos que $\pi(\psi_x(h)) = x$. Logo, $(\pi(\psi_x(h)), \psi_{\pi(\psi_x(h))}^{-1}(\psi_x(h))) = (x, \psi_x^{-1}(\psi_x(h))) = (x, h)$.

Portanto, $\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{g}(x, h) = (x, h)$, $\forall (x, h) \in \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Ker f(x)$.

(2) $\tilde{g} \circ \tilde{g}^{-1}(e) = \tilde{g}(\pi(e), \psi_{\pi(e)}^{-1}(e)) = \psi_{\pi(e)}(\psi_{\pi(e)}^{-1}(e)) = e$, $\forall e \in E$.

Isto mostra que $\tilde{g}^{-1}$ é a inversa da função $\tilde{g}$. Logo, $\tilde{g}$ é homeomorfismo.

Note que

$$\pi \circ \tilde{g}(x, h) = \pi(\psi_x(h)) = x = \pi'(x, h) \Rightarrow \pi \circ \tilde{g} = \pi'.$$

Seja $x \in X$ fixado. Temos que $\tilde{g}|_{\{x\} \times Ker f(x)} : \{x\} \times Ker f(x) \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais, pois $\psi_x : Ker f(x) \rightarrow E_x$ é isomorfismo de espaços vetoriais.

Portanto, temos que $\langle Ker f \rangle = \langle \xi \rangle$.

Como $f(x)$ é sobrejetiva, $\forall x \in X$, temos por definição que $Ind f = [Ker f] - [\theta_0] = [\xi]$.

Isto demonstra a Afirmação 2.

Logo, $Ind : [X, \mathcal{F}(H)] \rightarrow K(X)$ é um homomorfismo bijetivo, isto é, um isomorfismo de grupos.

Concluimos a demonstração do Teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

- [At] ATIYAH, M. F. *K-Theory*. New York: W. A. Benjamin, 1967.
- [Áv] ÁVILA, G. S. S. *Variáveis complexas e aplicações*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.
- [Bac] BACHMAN, G.; NARICI L. *Functional analysis*. New York: Dover Publications, Inc., 2000.
- [Boo] BOOSS, B.; BLEECKER, D. D. *Topology and analysis: the Atiyah - Singer index formula and Gauge - theoretic physics*. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [Bou1] BOURBAKI, N. *Variétés différentielles et analytiques: fascicule de résultats*. Paris: Hermann, 1967.
- [Bou2] BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique: algèbre. Livre II*. Paris: Hermann, 1970.
- [Di] DIEUDONNÉ, J. *Foundations of modern analysis*. New York: Academic Press, Inc., 1969.
- [He] HELMBERG, G. *Introduction to spectral theory in Hilbert space*. Amsterdam, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1975.
- [Hi] HILTON, P. J. *An introduction to homotopy theory*. London: The Syndics of the Cambridge University Press, 1961.
- [Jä] JÄNICH, K. Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren. *Mathematische Annalen*, Berlin, n. 161, p. 129-142, 1965.
- [Ka] KADISON, R. V.; RINGROSE, J. R. *Fundamentals of the theory of operator algebras*. Volume I: Elementary Theory. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1997.
- [Ku] KUIPER, N. H. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. *Topology*, Oxford, v. 3, p. 19-30, 1965.

- [Li] LIMA, E. L. *Homologia básica*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2009.
- [Mu1] MUNKRES, J. R. *Topology: a first course*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [Mu2] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1984.
- [Pa] PALAIS, R. S. *Seminar on the Atiyah - Singer index theorem*. New Jersey: Princeton University Press, 1965.
- [Re] RETHERFORD, J. R. *Hilbert space: compact operators and the trace theorem*. London: The Syndics of the Cambridge University Press, 1993.
- [Sc] SCHUBERT, H. *Topology*. Massachusetts: Allyn and Bacon, Inc., 1968.
- [Ta] TAYLOR, A. E.; LAY, D. C. *Introduction to functional analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [We] WEGGE-OLSEN, N. E. *K-Theory and C*-algebras: a friendly approach*. New York: Oxford University Press, 1994.
- [Wh] WHITEHEAD, G. W. *Elements of homotopy theory*. New York: Springer-Verlag, 1978.