Espaços de Banach que Admitem uma Norma Uniformemente Convexa Equivalente

Rômulo Maia Vermersch

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Rio de Janeiro
Dezembro de 2009

Espaços de Banach que Admitem uma Norma Uniformemente Convexa Equivalente

Rômulo Maia Vermersch
Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____
Presidente, Prof. Nilson da Costa Bernardes Junior - IM/UFRJ

____
Prof. Antônio Roberto da Silva - IM/UFRJ

____
Prof. Dinamérico Pereira Pombo Junior - IM/UFF

____
Prof. Didier Jacques François Pilod - IM/UFRJ

Rio de Janeiro
Dezembro de 2009

Aos meus pais
Nilo e Glaucia.
À minha avó
Normília.
Ao meu irmão
Daniel.

Agradecimentos

À minha mãe Glaucia, por sua entrega total à criação e educação de seus filhos. Educação aqui tomada com o sentido mais amplo possível. O maior exemplo de amor que pude ter.

À minha avó Normília, por ter me ensinado a ler e a escrever, e por sempre ter me incentivado a aprender cada vez mais.

Ao meu orientador e amigo, Professor Nilson da Costa Bernardes Junior, por todo seu apoio e dedicação, e por ser um grande exemplo pessoal e profissional.

Aos meus professores que, durante minha formação superior, dedicaram-se a me mostrar o quanto é preciso ser persistente para seguir com solidez na Matemática.

Aos meus amigos de todos esses anos, aos quais devo muitos momentos divertidos e de muita paz de espírito.

À CAPES pelo apoio financeiro na realização deste trabalho.

Ficha Catalográfica

Vermersch, Rômulo Maia.
Espaços de Banach que Admitem uma Norma Uniformemente Convexa Equivalente/ Rômulo Maia Vermersch.- Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.
viii, 64f; 1cm.
Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior
Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2009.
Referências Bibliográficas: f.64.
1. Espaços de Banach.
2. Convexidade Estrita.
3. Convexidade Uniforme.
4. Norma Equivalente. I. Bernardes Jr., Nilson da Costa II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática. III. Título.

Espaços de Banach que admitem uma norma uniformemente convexa equivalente

Rômulo Maia Vermersch

Orientador: Nilson da Costa Bernardes Junior

A proposta deste trabalho foi estudar convexidade em espaços de Banach. Mais especificamente, compreender a resposta dada por Enflo à pergunta natural: quais condições são necessárias e suficientes para que um espaço de Banach admita uma norma uniformemente convexa equivalente? Começamos este trabalho tratando exclusivamente dos espaços normados estritamente convexos e discutimos vários exemplos. Apresentamos a aplicação do conceito de convexidade estrita ao estudo de existência e unicidade de melhor aproximação em espaços normados. Depois, passamos aos espaços normados uniformemente convexos, conceito este introduzido por Clarkson em 1936. Mostramos um resultado notável, o Teorema de Milman-Pettis, que relaciona a convexidade uniforme de um espaço de Banach(uma propriedade métrica) com reflexividade(uma propriedade topológica). Este resultado garante que todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo. Na sequência do trabalho, apresentamos o conceito de árvores em espaços de Banach, criado por R.C. James a fim de estudar os espaços superreflexivos, que também são uma criação sua. Apresentamos logo em seguida as Propriedades da Árvore Finita e da Árvore Infinita e demonstramos alguns resultados interessantes envolvendo tais propriedades com reflexividade, e com convexidade uniforme. Por fim, apresentamos a demonstração de Enflo, a qual relaciona as árvores de James com o conceito de partição, do seguinte resultado: *Um espaço de Banach admite uma norma uniformemente convexa equivalente se e somente se não possui a Propriedade da Árvore Finita.* Concluímos esta dissertação com alguns breves comentários finais a fim de esclarecer a importância do resultado obtido por Enflo.

palavras-chave: Espaços de Banach, convexidade estrita, convexidade uniforme, norma equivalente.

Banach spaces which can be given by an equivalent uniformly convex norm

Rômulo Maia Vermersch

Supervisor: Nilson da Costa Bernardes Junior

The purpose of this work was to study convexity in Banach spaces. More specifically, to understand the answer given by Enflo to the natural question: what conditions are necessary and sufficient for a Banach space to admit an uniformly convex equivalent norm? We begin this work by dealing exclusively with strictly convex normed spaces and by discussing several examples. We present the application of concept of strict convexity to the study of existence and uniqueness of best approximation in normed spaces. We then move to uniformly convex normed spaces, a concept introduced by Clarkson in 1936. We show a remarkable result, the Milman-Pettis´s Theorem, which relates the uniform convexity of a Banach space (a metric property) with reflexivity (a topological property). This result ensures that every uniformly convex Banach space is reflexive. In the sequel, we present the concept of trees in Banach spaces, which was introduced by R.C. James in order to study the superreflexive spaces, which were also introduced by himself. Then, we present Finite Tree Property and Infinite Tree Property and establish some interesting results relating such properties with reflexivity, and uniform convexity. Finally, we present the Enflo´s proof, which relates James´s trees with the concept of partition, to the following result: *A Banach space admits an uniformly convex equivalent norm if and only if it does not have Finite Tree Property.* We conclude this dissertation with some brief final comments in order to clarify the importance of the result obtained by Enflo.

keywords: Banach spaces, strict convexity, uniform convexity, equivalent norm.

Conteúdo

Introdução

Em Análise Funcional é muito comum, após estudar estensivamente uma dada propriedade métrica de uma classe de espaços de Banach, indagar-se que condições garantem a existência de uma norma equivalente à original com esta propriedade. Isto é particularmente interessante quando, dado um espaço de Banach sem a propriedade métrica desejada, se pode realizar uma "troca de normas", a fim de que o espaço em questão, munido da nova norma, possua tal propriedade. Bem entendido, realizar esta "troca"é encontrar um isomorfismo do espaço munido de sua norma original sobre o mesmo espaço munido de uma nova norma, que conte com a propriedade desejada. O que faremos aqui é uma exposição sobre isto. Em nosso caso, a propriedade desejada é a convexidade uniforme da norma, conceito este introduzido por Clarkson em 1936. Expomos aqui a resposta obtida por Enflo à seguinte questão: quais condições são necessárias e suficientes para que um dado espaço de Banach admita uma norma uniformemente convexa equivalente? É bem verdade que uma condição necessária foi encontrada por R.C.James. Porém, uma das questões mais desafiadoras da chamada Geometria dos Espaços de Banach era encontrar uma condição suficiente. O que Enflo mostrou em 1972, de maneira totalmente construtiva e sem utilizar nenhum resultado específico da teoria, foi que a condição necessária de James era também suficiente. Precisamente, Enflo mostrou o seguinte resultado: *Se um espaço de Banach não possui a Propriedade da Árvore Finita, então ele admite uma norma uniformemente convexa equivalente.*

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro, fazemos uma exposição sobre os espaços normados estritamente convexos e discutimos vários exemplos. Na última seção deste capítulo, apresentamos uma aplicação do conceito de convexidade estrita ao problema de existência de melhores aproximações em espaços normados e também sob quais condições temos unicidade. No segundo capítulo entram em cena os espaços normados uniformemente convexos. Talvez o resultado mais notável deste capítulo seja o Teorema de Milman-Pettis, que relaciona a convexidade uniforme de um espaço de Banach(uma propriedade métrica) com reflexividade(uma propriedade topológica). Este teorema garante que todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo. No último capítulo, introduzimos o conceito de Árvores em Espaços de Banach, o qual foi criado por R.C.James ao estudar os espaços super-reflexivos(também uma criação sua). Logo em seguida definimos as Propriedades da Árvore Finita e da Árvore Infinita e demonstramos alguns resultados interessantes envolvendo tais propriedades com reflexividade, e com convexidade uniforme. Na segunda seção deste capítulo apresentamos a demonstração de Enflo, a qual relaciona as árvores de James com o conceito de partição de um elemento de um espaço de Banach. Finalizamos esta dissertação com comentários finais a fim de esclarecer a importância do resultado obtido por Enflo.

Capítulo 1

Espaços Estritamente Convexos

Quando pensamos na bola unitária fechada de um espaço normado, nossa intuição euclidiana nos leva a imaginar um objeto arredondado, "suave", no sentido de não existirem "bicos". Porém, este não é o caso em geral. Veja, por exemplo, como são as bolas unitárias fechadas dos espaços normados reais l_1^2 e l_∞^2 e perceba como suas formas contrastam fortemente com o que entendemos por uma "bola":

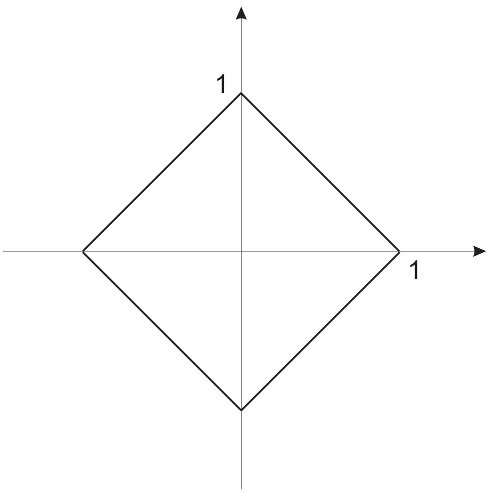


Figura 1.1: $S_{l_1^2}$

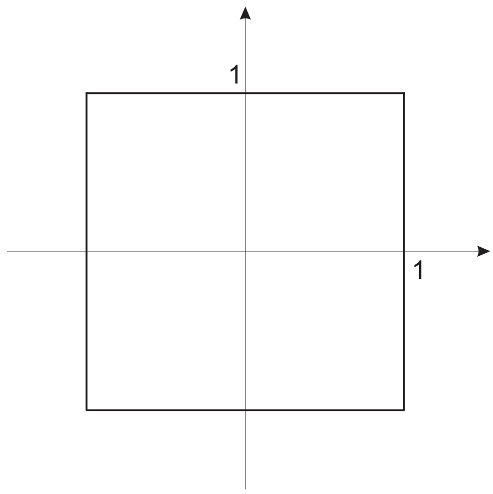


Figura 1.2: $S_{l_\infty^2}$

Nestes dois casos vemos que cada uma das bolas unitárias fechadas tem a forma de um quadrado, de modo que suas respectivas esferas unitárias são compostas de quatro segmentos de reta. Assim, ambas as bolas não são "redondas" como poderíamos imaginar.

Neste primeiro capítulo estudaremos espaços normados cuja bola unitária fechada é "redonda", no sentido de que sua esfera unitária não contém qualquer segmento de reta não-trivial.

1.1 Definição e exemplos

No presente trabalho $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. A norma de um espaço normado X sobre $\mathbb{K}$ será representada por $\|.\|$. Os fatos e exemplos básicos de Análise Funcional, que suporemos conhecidos, podem ser encontrados no livro [11]. Além disso, também adotaremos a terminologia e as notações deste livro.

No que se segue, B_X indicará a bola unitária fechada do espaço normado X, isto é, $B_X = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$, enquanto que S_X indicará a esfera unitária: $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$. Em todo este trabalho, o interior de um conjunto C será denotado por $\overset{\circ}{C}$.

Definição 1.1.1. Um espaço normado X é dito *estritamente convexo* se

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\| < 1$$

sempre que x_1 e x_2 são pontos distintos em S_X e $0 < t < 1$.

Geometricamente, a definição nos diz que um espaço normado é estritamente convexo quando sua esfera unitária não contém nenhum segmento de reta não-trivial. Realmente, seja X um espaço normado e considere $(x_1; x_2)$ o segmento de reta aberto

$$\{tx_1 + (1-t)x_2;\ 0 < t < 1\} \quad (x_1, x_2 \in X)\ .$$

Se X é estritamente convexo e x_1,x_2 são pontos distintos em S_X, então pela definição de convexidade estrita, temos $(x_1; x_2) \subset \overset{\circ}{B}_X$. Suponha reciprocamente que nenhum segmento de reta não-trivial está contido em S_X. Tome x_1,$x_2 \in S_X$ distintos. Daí, por hipótese, algum ponto de $(x_1; x_2)$ está em $\overset{\circ}{B}_X$. Como B_X é convexa, todos os pontos de $(x_1; x_2)$ estão em $\overset{\circ}{B}_X$ (a convexidade de B_X assegura que $tB_X + (1-t)\ \overset{\circ}{B}_X \subset \overset{\circ}{B}_X$ para todo $0 < t < 1$), donde X é estritamente convexo.

O conceito de convexidade estrita foi introduzido por Clarkson em 1936 (ver [6]) e por Akhiezer e Krein em 1938 (ver [1]).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.2. O corpo de escalares $\mathbb{K}$, visto como um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, é estritamente convexo, trivialmente. Mais geralmente, todo espaço normado cuja dimensão é 0 ou 1 é estritamente convexo.

Exemplo 1.1.3. Seja μ uma medida positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto Ω. Suponha que existam dois subconjuntos mensuráveis disjuntos A_1 e A_2 tais que $0 < \mu(A_1) < \infty$ e $0 < \mu(A_2) < \infty$. Sejam agora I_{A_1} e I_{A_2} as funções características destes conjuntos e ponha $f_1 = \mu(A_1)^{-1} I_{A_1}$, $f_2 = \mu(A_2)^{-1} I_{A_2}$, $g_1 = I_{A_1} + I_{A_2}$ e $g_2 = I_{A_1} - I_{A_2}$. Temos que

$$\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = \left\|\frac{f_1 + f_2}{2}\right\|_1 = 1$$

e

$$\|g_1\|_\infty = \|g_2\|_\infty = \left\|\frac{g_1+g_2}{2}\right\|_\infty = 1 \ ,$$

o que prova que os espaços $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ e $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ não são estritamente convexos. Em particular, os espaços l_1 e l_∞ não são estritamente convexos.

Além disso, os espaços l_1^n($\mathbb{K}^n$ munido da norma da soma) e l_∞^n($\mathbb{K}^n$ munido da norma do máximo) não são estritamente convexos quando $n > 1$. Quando $n = 1$, l_1^n e l_∞^n são estritamente convexos pelo primeiro exemplo. Se $1 < p < \infty$, temos que $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ é estritamente convexo. Para provarmos este fato, precisaremos de uma caracterização do conceito de convexidade estrita que veremos na próxima seção.

Por hora, continuaremos com mais exemplos:

Exemplo 1.1.4. Sejam $x_1 = (1, 1, 0, 0, ...)$ e $x_2 = (1, -1, 0, 0, ...)$ elementos de c_0. Como $\|x_1\|_\infty = \|x_2\|_\infty = \left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|_\infty = 1$, vemos que o espaço c_0 não é estritamente convexo.

Exemplo 1.1.5. Seja K um espaço de Hausdorff compacto possuindo pelo menos dois elementos. Sejam k_1 e k_2 dois pontos distintos em K. O Lema de Urysohn garante a existência de uma função contínua $f_1 : K \mapsto [0, 1]$ tal que $f_1(k_1) = 0$ e $f_1(k_2) = 1$. Considere agora f_2 a função constante igual a 1 definida em K. Como

$$1 = \|f_1\|_\infty = \|f_2\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right\|_\infty \ ,$$

vemos que o espaço $C(K)$ não é estritamente convexo.

Com os primeiros exemplos dados, ficamos tentados a acreditar que todo espaço de Banach estritamente convexo é reflexivo. O próximo exemplo mostrará que isto é falso em geral. A construção de tal exemplo é um pouco técnica mas também servirá a nossos propósitos mais adiante. Vejamos isto:

Exemplo 1.1.6. O objetivo aqui é encontrar uma norma estritamente convexa equivalente à norma original de ℓ_1. Assim, munido desta nova norma, ℓ_1 será um espaço de Banach não-reflexivo e estritamente convexo. Começamos definindo, para cada inteiro positivo m, a função

$$f_m(t) = \frac{t^2+mt}{m+1} \qquad (t \geq 0) \ .$$

Temos então que as funções f_m satisfazem as seguintes propriedades:

(1) f_m aplica [0,1] continuamente sobre [0,1], $f_m(0) = 0$ e $f_m(1) = 1$;

(2) f_m, f_m' e f_m'' são positivas em $(0, \infty)$ e, em particular, f_m é estritamente crescente em $[0, \infty)$;

(3) $\frac{m}{m+1}\ t \leq f_m(t) \leq t$ sempre que $t \in [0, 1]$, com desigualdades estritas quando $t \in (0, 1)$;

(4) $f_m(st_1+(1-s)t_2) < sf_m(t_1)+(1-s)f_m(t_2)$ sempre que t_1 e t_2 são pontos distintos de $[0,\infty)$ e $0 < s < 1$;

(5) $|f_m(t_1) - f_m(t_2)| \le \max\{f'_m(t) \ ; \ 0 \le t \le 1\}|t_1-t_2| \le \dfrac{3}{2}|t_1-t_2|$ sempre que $t_1, t_2 \in [0,1]$.

Considere $\{A_m \ ; \ m \in \mathbb{N}\}$ uma coleção de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ dois a dois disjuntos cuja união é $\mathbb{N}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $m(n)$ o índice m do conjunto A_m que contém n. Seja

$$C = \left\{ (\alpha_n) \in \ell_1 \ ; \ \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \le 1 \right\} .$$

Afirmamos que se $(\alpha_n) \in C$ então $|\alpha_n| \le 1$ para cada n. De fato, se existisse $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_{n_0}| > 1$, teríamos

$$\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \ge f_{m(n_0)}(|\alpha_{n_0}|) > f_{m(n_0)}(1) = 1 ,$$

o que iria contradizer o fato de $(\alpha_n) \in C$. Mostremos agora que C é um conjunto fechado. Com efeito, seja $((c_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em C convergindo para algum elemento $(c_n) \in \ell_1$. Para cada j, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_n f_{m(n)}(|c_{n,j}|) - \sum_n f_{m(n)}(|c_n|) \right| &\le \sum_n |f_{m(n)}(|c_{n,j}|) - f_{m(n)}(|c_n|)| \\
&\le \frac{3}{2}\sum_n ||c_{n,j}| - |c_n|| \le \frac{3}{2}\sum_n |c_{n,j} - c_n| \\
&= \frac{3}{2}\|(c_{n,j}) - (c_n)\|_1 .
\end{aligned}$$

Portanto, como $((c_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge para $(c_n) \in \ell_1$, segue que

$$\sum_n f_{m(n)}(|c_n|) = \lim_j \sum_n f_{m(n)}(|c_{n,j}|) \le 1 ,$$

donde $(c_n) \in C$. Isto prova que C é fechado em ℓ_1. O conjunto C também é convexo, pois se $(\beta_n), (\gamma_n) \in C$ e $0 < s < 1$ então

$$\begin{aligned}
\sum_n f_{m(n)}(|s\beta_n + (1-s)\gamma_n|) &\le \sum_n f_{m(n)}(s|\beta_n| + (1-s)|\gamma_n|) \\
&\le s\sum_n f_{m(n)}(|\beta_n|) + (1-s)\sum_n f_{m(n)}(|\gamma_n|) \le 1 ,
\end{aligned}$$

donde $s(\beta_n) + (1-s)(\gamma_n) \in C$. Além disso, por definição, C é um conjunto equilibrado. Agora, note que $B_{\ell_1} \subset C$, já que dado $(\alpha_n) \in B_{\ell_1}$ tem-se

$$\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \leq \sum_n |\alpha_n| \leq 1 \ .$$

Como $B_{\ell_1} \subset C$, temos que C é um conjunto absorvente. Portanto, como C é um conjunto convexo, equilibrado e absorvente, o seu funcional de Minkowski p_C é uma semi-norma sobre ℓ_1. Afirmamos que p_C é, na verdade, uma norma sobre ℓ_1. De fato, fixe $x = (x_n) \in \ell_1$ tal que $p_C(x) = 0$. Vamos provar que $x = 0$. Dado $\epsilon > 0$, temos que $x \in \epsilon C$, ou seja, $\dfrac{x}{\epsilon} \in C$. Assim,

$$1 \geq \sum_n f_{m(n)}\left(\left|\frac{x_n}{\epsilon}\right|\right) \geq \sum_n \frac{1}{2}\left|\frac{x_n}{\epsilon}\right| = \frac{\|x\|_1}{2\epsilon} \ ,$$

ou seja,

$$\|x\|_1 \leq 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, devemos ter $x = 0$, o que prova que p_C é uma norma sobre ℓ_1. Ponha $\|x\|_r = p_C(x)$ para cada $x \in \ell_1$ e, quando munido desta nova norma, denotaremos ℓ_1 por $\ell_{1,r}$. Vamos mostrar que esta nova norma é equivalente à norma original de ℓ_1. Mais precisamente, vamos mostrar que

$$\frac{1}{2}\|x\|_1 \leq \|x\|_r \leq \|x\|_1$$

para todo $x \in \ell_1$. Realmente, provemos a desigualdade da esquerda: fixe $x = (x_n) \in \ell_1 \backslash \{0\}$. Seja $s > 0$ tal que $x = (x_n) \in sC$, isto é, $\left(\dfrac{x_n}{s}\right) \in C$. Pela definição de C,

$$1 \geq \sum_n f_{m(n)}\left(\left|\frac{x_n}{s}\right|\right) \geq \sum_n \frac{1}{2}\left|\frac{x_n}{s}\right| = \frac{1}{s}\frac{\|x\|_1}{2} \ ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|x\|_1 \leq s \ .$$

Como isto vale para todo $s > 0$ tal que $x \in sC$, segue que $\dfrac{1}{2}\|x\|_1 \leq p_C(x) = \|x\|_r$. Vejamos agora a desigualdade da direita: tome $x = (x_n) \in \ell_1 \backslash \{0\}$ tal que $\|x\|_1 = 1$. Como $B_{\ell_1} \subset C$, segue que $\|x\|_r \leq 1 = \|x\|_1$. Agora, tomando $x \in \ell_1 \backslash \{0\}$ qualquer, considere $y = \dfrac{x}{\|x\|_1} \in S_{\ell_1}$. Daí, $\|y\|_r \leq 1 = \|y\|_1$, o que nos dá

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_r \leq 1$$

e assim,

$$\|x\|_r \leq \|x\|_1 \ .$$

Por fim, verifiquemos que a nova norma é estritamente convexa. Para tal, recorde que por propriedade do funcional de Minkowski temos

$$\{ \ x \in \ell_1 \ ; \ \|x\|_r < 1\} \subset C \subset \{ \ x \in \ell_1 \ ; \ \|x\|_r \leq 1\} \ .$$

Além disso, como as normas são equivalentes e C é fechado na norma original, C também é fechado na nova norma. Portanto, $C = B_{\ell_{1,r}}$. Agora, suponha que (β_n) e (γ_n) sejam elementos distintos em $S_{\ell_{1,r}}$. Considere $(\mu_n) = \dfrac{1}{2}((\beta_n) + (\gamma_n))$. É suficiente achar um número real $a > 1$ tal que $a(\mu_n) \in C$, pois isto implicará $\|a(\mu_n)\|_r \leq 1$ e assim teremos $\|(\mu_n)\|_r < 1$. Seja então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{n_0} \neq \gamma_{n_0}$. Daí,

$$\left|\frac{1}{2}(\beta_{n_0} + \gamma_{n_0})\right| < \frac{1}{2}|\beta_{n_0}| + \frac{1}{2}|\gamma_{n_0}| \ \text{ ou } \ |\beta_{\mathrm{n_0}}| \neq |\gamma_{\mathrm{n_0}}| \ .$$

Com efeito, se

$$\left|\frac{1}{2}(\beta_{n_0} + \gamma_{n_0})\right| = \frac{1}{2}(|\beta_{n_0}| + |\gamma_{n_0}|) \ \text{ e } \ |\beta_{\mathrm{n_0}}| = |\gamma_{\mathrm{n_0}}| \ ,$$

então

$$\left|\frac{1}{2}(\beta_{n_0} + \gamma_{n_0})\right| = |\beta_{n_0}| = |\gamma_{n_0}| \ ,$$

um absurdo pois $\mathbb{K}$ é estritamente convexo. Logo, uma das duas primeiras desigualdades abaixo é estrita:

$$\begin{aligned}
\sum_n f_{m(n)}(|\mu_n|) &= \sum_n f_{m(n)}\left(\left|\frac{1}{2}(\beta_n + \gamma_n)\right|\right) \leq \sum_n f_{m(n)}\left(\frac{1}{2}|\beta_n| + \frac{1}{2}|\gamma_n|\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_n f_{m(n)}(|\beta_n|) + \frac{1}{2}\sum_n f_{m(n)}(|\gamma_n|) \leq 1 \ .
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\sum\limits_n f_{m(n)}(|\mu_n|) < 1$. Daí, $\sup\limits_n |\mu_n| < 1$. De fato, se existisse $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_{n_0}| \geq 1$, então teríamos

$$\sum_n f_{m(n)}(|\mu_n|) \geq f_{m(n_0)}(|\mu_{n_0}|) \geq f_{m(n_0)}(1) = 1 \ ,$$

o que seria uma contradição. Como $\sup\limits_n |\mu_n| < 1$, podemos escolher $a > 1$ tal que $\sup\limits_n |a\mu_n| < 1$. Além disso,

$$\left|\sum_n f_{m(n)}(|a\mu_n|) - \sum_n f_{m(n)}(|\mu_n|)\right| \leq \frac{3}{2}\|a(\mu_n) - (\mu_n)\|_1 = \frac{3}{2}(a-1)\|(\mu_n)\|_1$$

e assim,

$$\left|\sum_n f_{m(n)}(|a\mu_n|)\right| \leq \frac{3}{2}(a-1)\|(\mu_n)\|_1 + \sum_n f_{m(n)}(|\mu_n|) \ .$$

Como

$$\sum_n f_{m(n)}(|\mu_n|) < 1 \ ,$$

podemos escolher $a > 1$ tão próximo de 1 para que tenhamos

$$\left| \sum_n f_{m(n)}(|a\mu_n|) \right| < 1 \ ,$$

o que nos dá $a(\mu_n) \in C$. Com isso, vemos que $\ell_{1,r}$ é estritamente convexo.

Observação 1.1.7. O argumento acima mostra que se $(\alpha_n) \in \ell_{1,r}$ e $\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) < 1$ então $\|(\alpha_n)\|_r < 1$. Usaremos este fato em um exemplo posterior.

1.2 Propriedades

Vejamos agora algumas caracterizações de convexidade estrita. Talvez a mais trivial seja a seguinte

Proposição 1.2.1. *Todo espaço normado que é isometricamente isomorfo a um espaço normado estritamente convexo é estritamente convexo.*

Demonstração: Decorre do fato de que a convexidade estrita é uma propriedade métrica.

Agora, algo um pouco mais interessante:

Proposição 1.2.2. *Seja X um espaço normado. São equivalentes:*

(a) X é estritamente convexo;

(b) $\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| < 1$ sempre que $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ e $x_1 \neq x_2$;

(c) Só ocorre $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ quando um dos dois vetores é um múltiplo real não-negativo do outro.

Demonstração: (a)$\Rightarrow$(b): Basta por $t = \frac{1}{2}$ na definição de convexidade estrita.

(b)$\Rightarrow$(c): Suponha que $x_1, x_2 \in X$ são tais que $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Podemos assumir que são ambos não-nulos e que $1 = \|x_1\| \leq \|x_2\|$. Ponha $y = \|x_2\|^{-1} x_2$. Então,

$$\begin{aligned} 2 &\geq \|x_1 + y\| = \|x_1 + \|x_2\|^{-1} x_2\| = \|x_1 + x_2 - x_2 + \|x_2\|^{-1} x_2\| \\ &= \|x_1 + x_2 - x_2(1 - \|x_2\|^{-1})\| \geq \|x_1 + x_2\| - \|x_2\|(1 - \|x_2\|^{-1}) \\ &= \|x_1\| + \|x_2\| - \|x_2\| + 1 = 2 \ . \end{aligned}$$

Logo, $\left\|\dfrac{x_1+y}{2}\right\| = 1$. Por (b), temos que $x_1 = y$, donde $x_1 = \|x_2\|^{-1}x_2$.

(c)$\Rightarrow$(a): Sejam $x_1, x_2 \in S_X$ tais que $x_1 \neq x_2$. Em particular, nenhum desses dois vetores é um múltiplo real não-negativo do outro. Daí, $\|x_1 + x_2\| < \|x_1\| + \|x_2\| = 2$, o que nos dá $\left\|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right\| < 1$. Vemos então que o ponto médio do segmento $(x_1; x_2)$ pertence a $\overset{o}{B}_X$. Como B_X é convexa, o segmento inteiro $(x_1; x_2)$ está contido em $\overset{o}{B}_X$. Isto nos diz que X é estritamente convexo. $\square$

Exemplo 1.2.3. Usando a proposição anterior podemos mostrar sem dificuldades que se μ é uma medida positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto $\Omega \neq \varnothing$ e $1 < p < \infty$, então $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ é estritamente convexo. Realmente, dadas $f_1 \neq f_2$ em $S_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}$, temos que nenhuma dessas duas funções é um múltiplo real não-negativo da outra. Logo, a desigualdade de Minkowski neste caso é estrita (ver [13], pág 63, Teorema 3.5):

$$\left\|\frac{f_1+f_2}{2}\right\|_p < \frac{1}{2}\|f_1\|_p + \frac{1}{2}\|f_2\|_p = 1 \ .$$

Em particular, são estritamente convexos os espaços normados ℓ_p e ℓ_p^n, com $n \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$.

Proposição 1.2.4. *Um espaço normado X é estritamente convexo se e somente se cada ponto de S_X é um ponto extremal de B_X.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Segue imediatamente da definição.

($\Rightarrow$) Se $x_0 \in S_X$ não é um ponto extremal de B_X, existe uma combinação convexa não-trivial de elementos de S_X que dá x_0, digamos $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$ com $x_1, x_2 \in S_X$ e $0 < t < 1$. Com isso, X não é estritamente convexo.

Para a próxima caracterização, precisaremos recordar a seguinte

Definição 1.2.5. Seja A um subconjunto de um espaço normado X. Dizemos que $x^* \in X^*\backslash\{0\}$ é um *funcional suporte para* A se existe $x_0 \in A$ tal que $\text{Re } x^*(x_0) = \sup\{\text{Re } x^*(x);\ x \in A\}$. Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto suporte de* A, que o conjunto

$$H = \{x \in X;\ \text{Re } x^*(x) = \text{Re } x^*(x_0)\}$$

é um *hiperplano suporte para* A e que o hiperplano H *suporta* A *em* x_0.

Lema 1.2.6. *Se H é um hiperplano suporte para um subconjunto A de um espaço normado X, então $H \cap \overset{o}{A} = \varnothing$.*

Demonstração: Sejam $x^* \in X^*\backslash\{0\}$ e $x_0 \in X$ tais que

$$\text{Re } x^*(x_0) = \sup\{\text{Re } x^*(x);\ x \in A\}$$

e

$$H = \{\ x \in X;\ \text{Re } x^*(x) = \text{Re } x^*(x_0)\}\ .$$

Suponhamos que exista $y \in H \cap \overset{o}{A}$. Então, Re $x^*(y) =$ Re $x^*(x_0)$. Seja $x_1 \in X$ tal que Re $x^*(x_1) = 1$ (recorde que todo funcional linear não-nulo é sobrejetivo). Como $y \in \overset{o}{A}$, existe $\delta > 0$ tal que $y + \delta x_1 \in \overset{o}{A}$. Logo,

$$\text{Re } x^*(x_0) \geq \text{Re } x^*(y + \delta x_1) = \text{Re } x^*(x_0) + \delta \text{Re } x^*(x_1) = \text{Re } x^*(x_0) + \delta > \text{Re } x^*(x_0) \ ,$$

um absurdo. $\square$

Teorema 1.2.7. *Um espaço normado X é estritamente convexo se e somente se cada hiperplano suporte para B_X suporta B_X em um único ponto.*

Demonstração: Suponha que X é estritamente convexo. Seja H um hiperplano suporte para B_X. Então, $H \cap B_X \subset S_X$ uma vez que $H \cap \overset{o}{B_X} = \varnothing$ (lema anterior). A convexidade de H e de B_X garante que $H \cap B_X$ é convexo. Daí, se $H \cap B_X$ contém dois pontos distintos, então deve conter todo o segmento que os une, o que não é possível já que $H \cap B_X \subset S_X$ e X é estritamente convexo. Reciprocamente, suponha que X não é estritamente convexo. Então existem $x_1 \neq x_2$ em S_X tais que

$$\{tx_1 + (1-t)x_2;\ 0 \leq t \leq 1\} \subset S_X \ .$$

Chame este segmento de C. Como consequência do Teorema de Separação de Hahn-Banach(ver [12], Teorema 3.4), existem $x^* \in X^* \backslash \{0\}$ e $r \in \mathbb{R}$ tais que Re $x^*(x) \geq r$ para cada $x \in C$ e Re $x^*(x) \leq r$ para cada $x \in B_X$. Em particular, Re $x^*(x_1) =$ Re $x^*(x_2) = r$. Logo,

$$\{\ x \in X;\ \text{Re } x^*(x) = r\}$$

é um hiperplano que suporta B_X em x_1 e em x_2. $\square$

Observação 1.2.8. Tem-se que $x^* \in S_{X^*}$ suporta B_X em algum ponto $x_0 \in S_X$ se e somente se Re $x^*(x_0) = x^*(x_0) = 1$. De fato, primeiro provemos duas afirmações úteis:

(1) $\sup\limits_{y \in B_X} |x^*(y)| = \sup\limits_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)|$:

Com efeito, para cada $y \in B_X$, escreva $x^*(y) = |x^*(y)|e^{it_y}$, para algum $t_y \in \mathbb{R}$. Agora, note que $0 \leq |x^*(y)| = x^*(y)e^{-it_y} = x^*(e^{-it_y}y)=$ Re $x^*(e^{-it_y}y)$. Daí,

$$\sup_{y \in B_X} |x^*(y)| \leq \sup_{y \in B_X} \text{Re } x^*(e^{-it_y}y) \leq \sup_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)| \ ,$$

o que nos dá

$$\sup_{y \in B_X} |x^*(y)| = \sup_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)| \ .$$

(2) $\sup\limits_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)| = \sup\limits_{y \in B_X} \text{Re } x^*(y)$:

Como B_X é simétrica, temos que $y \in B_X$ se e somente se $-y \in B_X$. Daí, como Re $x^*(y) \geq 0$ ou Re $x^*(-y) \geq 0$ para cada $y \in B_X$, segue que

$$\sup_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)| = \sup_{y \in B_X} \text{Re } x^*(y) \ .$$

Agora, suponha que $x^* \in S_{X^*}$ suporta B_X em $x_0 \in S_X$. Temos então

$$\text{Re } x^*(x_0) = \sup_{y \in B_X} \text{Re } x^*(y) = \sup_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)| = \sup_{y \in B_X} |x^*(y)| = \|x^*\| = 1 \ .$$

Como $|x^*(x_0)| \leq 1$ segue que $x^*(x_0) = 1 = \text{Re } x^*(x_0)$.

Reciprocamente, suponha que Re $x^*(x_0) = x^*(x_0) = 1$. Então, vale

$$\text{Re } x^*(x_0) = x^*(x_0) = 1 = \|x^*\| = \sup_{y \in B_X} |x^*(y)| = \sup_{y \in B_X} |\text{Re } x^*(y)| = \sup_{y \in B_X} \text{Re } x^*(y)$$

e assim,

$$\text{Re } x^*(x_0) = \sup_{y \in B_X} \text{Re } x^*(y) \ .$$

O teorema anterior e a observação acima nos dão o seguinte

Corolário 1.2.9. *Seja X um espaço normado. São equivalentes:*

(a) X é estritamente convexo;

(b) Nenhum $x^* \in S_{X^*}$ suporta B_X em mais de um ponto;

(c) Para cada $x^* \in S_{X^*}$, existe no máximo um $x \in S_X$ tal que Re $x^*(x) = 1$;

(d) Para cada $x^* \in S_{X^*}$, existe no máximo um $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = 1$.

Agora, veremos caracterizações de convexidade estrita envolvendo subespaços:

Proposição 1.2.10. *Se um espaço normado é estritamente convexo então o mesmo vale para cada um de seus subespaços.*

Demonstração: Segue imediatamente do fato de todo subespaço vetorial ser convexo e de que $B_Y = B_X \cap Y$, para todo subespaço $Y \subset X$. $\square$

Proposição 1.2.11. *Um espaço normado X é estritamente convexo se e somente se cada um de seus subespaços bidimensionais são estritamente convexos.*

Demonstração:($\Rightarrow$) Segue da proposição anterior.

($\Leftarrow$) Suponha que X não é estritamente convexo. Então existem $x_1 \neq x_2$ em S_X tais que $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in S_X$. Se existisse um escalar α tal que $x_1 = \alpha x_2$, então 1 e α seriam escalares distintos com valor absoluto 1 tais que $\frac{1}{2}(1 + \alpha)$ também teria valor absoluto 1, contradizendo o fato de $\mathbb{K}$ ser estritamente convexo. Logo, x_1 e x_2 são linearmente independentes, donde $[x_1, x_2]$ é um subespaço bidimensional de X que não é estritamente convexo. $\square$

Logo após discutirmos a convexidade estrita em subespaços vem à nossa mente a questão: será o quociente de um espaço estritamente convexo também um espaço estritamente convexo? Contrariando as expectativas, a resposta é negativa mesmo em espaços de Banach. O próximo exemplo, referente a essa situação, é devido a Victor Klee.

Exemplo 1.2.12. Relembremos algumas partes da construção do espaço de Banach estritamente convexo e não-reflexivo $\ell_{1,r}$ dada no Exemplo 1.1.6:

(i) A propriedade (3) das funções f_m: $\dfrac{m}{m+1}\ t \leq f_m(t) \leq t$ para cada $t \in [0,1]$, com desigualdades estritas quando $t \in (0,1)$;

(ii) A definição dos conjuntos A_m: para cada $m \in \mathbb{N}$, A_m é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que $A_m \cap A_n = \varnothing$ quando $m \neq n$ e $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \mathbb{N}$;

(iii) A definição de C : $C = \left\{ (\alpha_n) \in \ell_1 \ ; \ \displaystyle\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \leq 1 \right\}$;

(iv) Se $(\alpha_n) \in C$ então $|\alpha_n| \leq 1$ para cada n;

(v) $C = B_{\ell_{1,r}}$;

(vi) $\|(\alpha_n)\|_r < 1$ sempre que $(\alpha_n) \in \ell_{1,r}$ e $\displaystyle\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) < 1$.

Seja agora Y qualquer espaço de Banach separável não estritamente convexo; por exemplo, c_0 ou ℓ_1. Tome D um subconjunto contável e denso de $\overset{\circ}{B}_Y$ e considere g uma função de $\mathbb{N}$ sobre D tal que $g(A_m) \subset \dfrac{m}{m+1} B_Y$ para cada m. Defina $T : \ell_{1,r} \longrightarrow Y$ pela expressão $T((\alpha_n)) = \displaystyle\sum_n \alpha_n g(n)$. Note que T está bem definida pois

$$\sum_n \|\alpha_n g(n)\| = \sum_n |\alpha_n| \|g(n)\| \leq \sum_n |\alpha_n| = \|(\alpha_n)\|_1 < \infty \ .$$

Além disso, T é claramente linear. Mostraremos agora que T aplica a bola unitária aberta de $\ell_{1,r}$ sobre a bola unitária aberta de Y. Para isto, primeiramente mostraremos que $T(C) \subset B_Y$. Seja $(\alpha_n) \in C$. Então,

$$\begin{aligned} \|T((\alpha_n))\| &= \left\| \sum_n \alpha_n g(n) \right\| \leq \sum_n |\alpha_n| \|g(n)\| \\ &\leq \sum_m \left(\sum_{n\in A_m} |\alpha_n| \frac{m}{m+1} \right) \leq \sum_m \left(\sum_{n\in A_m} f_m(|\alpha_n|) \right) \\ &= \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \leq 1 \ . \end{aligned}$$

Assim, $T(C) \subset B_Y$. Note que isto também mostra que T é limitado pois $C = B_{\ell_{1,r}}$.

Sejam agora $U_{\ell_{1,r}}$ e U_Y as bolas unitárias abertas de $\ell_{1,r}$ e Y respectivamente. Mostraremos que $U_Y \subset T(U_{\ell_{1,r}})$. Fixe $y \in U_Y$. Como $\|2y\| < 2$, as bolas abertas de raio 1 centradas em $2y$ e a origem se intersectam (em y por exemplo), donde existe $d_1 \in D$ tal que $\|2y - d_1\| < 1$ (pois D é denso em U_Y). Como $\|4y - 2d_1\| < 2$, existe $d_2 \in D$

tal que $\|4y - 2d_1 - d_2\| < 1$. Como $\|8y - 4d_1 - 2d_2\| < 2$, existe $d_3 \in d$ tal que $\|8y - 4d_1 - 2d_2 - d_3\| < 1$. Continuando este processo, obtemos uma sequência $(d_n) \subset D$ tal que $\|y - \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} d_n\| < 2^{-k}$, para cada $k \geq 1$, donde $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} d_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que $d_n = g(m(n))$. Daí,

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} d_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} g(m(n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n g(n) = T((\gamma_n)) \ ,$$

onde

$$\gamma_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } \ n = m(n) \\ 0 & \text{se } \ n \neq m(n) \end{cases}$$

Segue então de (i) que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_{m(n)}(|\gamma_n|) < \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1$, donde $(\gamma_n) \in U_{\ell_{1,r}}$. Com isso, $y = T((\gamma_n)) \in T(U_{\ell_{1,r}})$. Isto prova que $U_Y \subset T(U_{\ell_{1,r}})$. Como T é linear, temos que $rU_Y \subset T(rU_{\ell_{1,r}})$ para todo $r > 0$, e assim, $T(\ell_{1,r}) = Y$. Portanto, T é linear, contínua e sobrejetiva entre os espaços de Banach $\ell_{1,r}$ e Y. Assim, T é uma aplicação aberta. Como $U_Y \subset T(U_{\ell_{1,r}}) \subset B_Y$ e $T(U_{\ell_{1,r}})$ é aberto, temos $T(U_{\ell_{1,r}}) = U_Y$. Pelo Teorema dos Isomorfismos para Espaços de Banach (ver [11], pág 56, Teorema 1.7.14), existe um isomorfismo S de $\ell_{1,r}/Ker\ T$ sobre Y que satisfaz $T = S \circ \pi$, onde π é a aplicação quociente de $\ell_{1,r}$ sobre $\ell_{1,r}/Ker\ T$. Seja $U_{\ell_{1,r}}/Ker\ T$ a bola unitária aberta de $\ell_{1,r}/Ker\ T$. Então, $\pi(U_{\ell_{1,r}}) = U_{\ell_{1,r}}/Ker\ T$. Como $T(U_{\ell_{1,r}}) = U_Y$, segue que $S(U_{\ell_{1,r}/Ker\ T}) = U_Y$. Daí, S é um isomorfismo isométrico de $\ell_{1,r}/Ker\ T$ sobre Y. Assim, embora $\ell_{1,r}$ seja estritamente convexo, o espaço quociente $\ell_{1,r}/Ker\ T$ não o é.

Apesar de um espaço quociente de um espaço estritamente convexo não ser necessariamente estritamente convexo, as somas diretas satisfazem o que é esperado. De fato, vale o seguinte

Teorema 1.2.13. *Suponha que $X_1, \dots, X_n$ são espaços normados. Então, $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ é estritamente convexo se e somente se cada X_j é estritamente convexo.*

Demonstração: Podemos assumir que $n = 2$ pois $(X_1 \oplus \dots \oplus X_{k-1}) \oplus X_k$ é isometricamente isomorfo a $X_1 \oplus \dots \oplus X_k$ $(2 \leq k \leq n)$ e indução finita nos dá o caso geral. Usaremos também o fato de ℓ_2^2 sobre $\mathbb{R}$ ser um espaço normado estritamente convexo. Suponha inicialmente que X_1 (ou X_2) não seja estritamente convexo. Daí, como $X_1 \oplus X_2$ possui um subespaço isometricamente isomorfo a X_1(ou a X_2), segue que $X_1 \oplus X_2$ não é estritamente convexo. Reciprocamente, suponha que X_1 e X_2 são estritamente convexos. Sejam (x_1, x_2) e (y_1, y_2) elementos distintos de $S_{X_1 \oplus X_2}$. Vamos mostrar que $\left\| \frac{1}{2}(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \right\|_{X_1 \oplus X_2} < 1$, o que concluirá a demonstração. Primeiro, note que como (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in S_{X_1 \oplus X_2}$, segue que

$$(\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}) \ , (\|y_1\|_{X_1}, \|y_2\|_{X_2}) \in S_{\ell_2^2} \ .$$

Para simplificar a escrita, omitiremos o espaço na notação da norma, isto é,

$$\|x_j\|_{X_j} = \|x_j\| \ , \|y_j\|_{X_j} = \|y_j\| \ (1 \leq j \leq 2) \ .$$

Observe que se $\|x_1\| \neq \|y_1\|$ ou $\|x_2\| \neq \|y_2\|$, vale:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1, x_2+y_2)\right\| &= \left(\left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(x_2+y_2)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|\frac{1}{2}(\|x_1+y_1\|, \|x_2+y_2\|)\right\|_2 \leq \left\|\frac{1}{2}(\|x_1\|+\|y_1\|, \|x_2\|+\|y_2\|)\right\|_2 \\
&= \left\|\frac{1}{2}\left((\|x_1\|, \|x_2\|) + (\|y_1\|, \|y_2)\ \|)\right)\right\|_2 < 1 \ ,
\end{aligned}$$

pois $(\|x_1\|\ , \|x_2\|)\ , (\|y_1\|\ , \|y_2\|)$ são pontos distintos de $S_{\ell_2^2}$ (lembre que estamos supondo $\|x_1\| \neq \|y_1\|$ ou $\|x_2\| \neq \|y_2\|$) e ℓ_2^2 sobre $\mathbb{R}$ é estritamente convexo. Podemos então supor que $\|x_1\| = \|y_1\|$ e $\|x_2\| = \|y_2\|$. Também podemos supor sem perda de generalidade que $x_1 \neq y_1$. Então, $\left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1)\right\| < \frac{1}{2}(\|x_1\|+\|y_1\|)$ pela convexidade estrita de X_1. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1, x_2+y_2)\right\| &= \left\|\frac{1}{2}(\|x_1+y_1\|, \|x_2+y_2\|)\right\|_2 \\
&< \left\|\frac{1}{2}(\|x_1\|+\|y_1\|, \|x_2\|+\|y_2\|)\right\|_2 = \|(\|x_1\|, \|x_2\|)\|_2 = 1 \ ,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

O resultado anterior pode ser estendido a somas diretas infinitas enumeráveis. Para mostrarmos este fato, precisamos do

Lema 1.2.14. *Seja (X_n) uma família contável de espaços normados. Considere o conjunto $X = \{(x_n) \in \prod X_n\ ;\ \sum \|x_n\|^2 < \infty\}$ munido das operações $(x_n)+(y_n) = (x_n+y_n)$ $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$ e $\|(x_n)\| = (\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Então, X é um espaço normado e cada X_n é isometricamente isomorfo a um subespaço fechado de X. Além disso, se cada X_n é de Banach então X é de Banach e, se cada X_n é reflexivo então X é reflexivo.*

O espaço de Banach X definido acima é dito a ℓ_2-soma da família (X_n) e é frequentemente denotado por $(\sum X_n)_2$.

Demonstração: É fácil verificar que X é um espaço vetorial quando munido das operações definidas acima. Verifiquemos que $\|(x_n)\| = (\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$ é de fato uma norma para X:

- $\|(x_n)\| = 0 \Leftrightarrow (x_n) = (0)$;
- $\|(\lambda x_n)\| = (\sum \|\lambda x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|(\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|(x_n)\|$;
- $\|(x_n)+(y_n)\| = (\sum \|x_n+y_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum(\|x_n\|+\|y_n\|)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|(x_n)\| + \|(y_n)\|$, onde a primeira desigualdade decorre da desigualdade triangular nos espaços X_n e a segunda da desigualdade triangular no espaço ℓ_2.

Suponhamos cada X_n de Banach. Agora, seja $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X e escreva $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, l \geq k_0$ implica $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \epsilon$, ou seja,

$$\left(\sum_n \|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \quad (*)$$

sempre que $k, l \geq k_0$. Assim, $\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\| < \epsilon$ para cada $n \geq 1$, sempre que $k, l \geq k_0$. Como cada X_n é completo, segue que para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in X_n$ tal que $x_n = \lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(k)}$(na norma de X_n). Ponha $x = (x_1, x_2, ...)$. Vamos mostrar que $x \in X$ e $x^{(k)} \longrightarrow x$ em X quando $k \to \infty$. Realmente, como $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $C > 0$ tal que $\|x^{(k)}\| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $\left(\sum_n \|x_n^{(k)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} \|x_n^{(k)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$, para todo $m \geq 1$ e todo $k \geq 1$. Fixando $m \geq 1$ e fazendo $k \to \infty$, obtemos $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} \|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$. Fazendo $m \to \infty$, vem $(\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C$, donde $(x_n) \in X$.

Agora, por $(*)$, temos que $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} \|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, para todo $m \geq 1$ e todos $k, l \geq k_0$.

Fixando $m \geq 1$, $k \geq k_0$ e fazendo $l \to \infty$, obtemos $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} \|x_n^{(k)} - x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$. Portanto, mantendo fixado $k \geq k_0$ e fazendo $m \to \infty$, vem $\left(\sum_n \|x_n^{(k)} - x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$, isto é,

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \epsilon \;\text{ sempre que }\; k \geq k_0 \,.$$

Assim , $x^{(k)} \longrightarrow x$ em X quando $k \to \infty$, donde X é completo.

Mostremos agora que cada X_n é isometricamente isomorfo a um subespaço fechado de X:

Para cada $n \geq 1$, ponha $X'_n = \{(x_m) \in X; x_m = 0 \;\; \forall m \neq n\}$. Cada X'_n é subespaço fechado de X. De fato, X'_n é claramente um subespaço de X e, se $(0, 0, 0, ..., x^{(k)}, 0, 0, ...)$ é uma sequência em X'_n (com $x^{(k)}$ na n-ésima coordenada) tal que $\|(0, ..., x^{(k)}, 0, ...) - (x_1, x_2, ...)\| \longrightarrow 0$ então, pela definição da norma de X segue que $x_m = 0 \;\; \forall m \neq n$, o que mostra que X'_n é fechado. Agora, mostraremos que X_n é isometricamente isomorfo a X'_n $(n \geq 1)$. De fato, considere a aplicação $x \in X_n \mapsto (0, 0, ..., 0, x, 0, 0, ...) \in X'_n$, a qual é obviamente linear e bijetiva. Como $\|(x_n)\| = (\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$ para todo $(x_n) = (0, 0, ..., 0, x, 0, 0, ...) \in X$, vemos que ela é uma isometria.

Por fim, vamos mostrar que se cada X_n é reflexivo, então X é reflexivo. Para isto, antes precisamos construir um isomorfismo isométrico entre

$$\left(\sum X_n^*\right)_2$$

e

$$\left(\sum X_n\right)_2^* ,$$

o que faremos da seguinte maneira: Para cada $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ defina $f_{(x_n^*)}((x_n)) = \sum x_n^*(x_n)$ ($(x_n) \in (\sum X_n)_2$). Note que $f_{(x_n^*)}$ está bem definida para cada $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ pois

$$\sum |x_n^*(x_n)| \leq (\sum \|x_n^*\|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n^*)\| \|(x_n)\| ,$$

para todo $(x_n) \in (\sum X_n)_2$. Como $f_{(x_n^*)}$ é claramente linear, segue que $f_{(x_n^*)} \in (\sum X_n)_2^*$ e $\|f_{(x_n^*)}\| \leq \|(x_n^*)\|$.

Considere a aplicação linear $Q : (x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2 \mapsto f_{(x_n^*)} \in (\sum X_n)_2^*$. Como

$$\|Q((x_n^*))\| \leq \|(x_n^*)\|$$

para todo $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$, segue que Q é contínua. Agora, basta mostrar que Q é sobrejetiva e que vale $\|(x_n^*)\| \leq \|Q((x_n^*))\|$ para todo $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$. Seja

$$g_m : X_m \mapsto (\sum X_n)_2$$

o isomorfismo isométrico dado por $g_m(x_m) = (0, 0, ..., x_m, 0, 0, ...)$ (x_m na m-ésima coordenada). Tome $h \in (\sum X_n)_2^*$ e defina $x_n^* = h \circ g_n \in X_n^*$ $(n \geq 1)$. Observe que

$$f_{(x_n^*)}((x_n)) = \sum x_n^*(x_n) = \sum h \circ g_n(x_n) = \sum h(g_n(x_n)) = h((x_n)) ,$$

para todo $(x_n) \in (\sum X_n)_2$, donde $h = f_{(x_n^*)} = Q((x_n^*))$. Isto mostra que Q é sobrejetiva.

Mostremos que $\|(x_n^*)\| \leq \|Q((x_n^*))\|$, para todo $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$. Fixe $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ e $t > 1$. Podemos supor $(x_n^*) \neq 0$. Para cada n, seja $x_n \in S_{X_n}$ tal que

$$x_n^*(x_n) \geq \frac{\|x_n^*\|}{t} .$$

Então,

$$\begin{aligned} \|(x_n^*)\|^2 &= \sum \|x_n^*\|^2 \leq \sum t\|x_n^*\| x_n^*(x_n) = t \sum x_n^*(\|x_n^*\| x_n) \\ &= t f_{(x_n^*)}((\|x_n^*\| x_n)) \leq t \|f_{(x_n^*)}\| \|(\|x_n^*\| x_n)\| \\ &= t \|f_{(x_n^*)}\| \|(x_n^*)\| , \end{aligned}$$

donde $\|f_{(x_n^*)}\| \geq \frac{1}{t} \|(x_n^*)\|$. Fazendo $t \to 1^+$, obtemos $\|Q((x_n^*))\| = \|f_{(x_n^*)}\| \geq \|(x_n^*)\|$.

Como existe um isomorfismo isométrico entre

$$\left(\sum X_n^*\right)_2$$

e

$$\left(\sum X_n\right)_2^* ,$$

aplicando-o duas vezes obtemos

$$X^{**} = \left(\sum X_n\right)_2^{**} = \left(\sum X_n^{**}\right)_2 .$$

Supondo também cada X_n reflexivo, vale

$$\left(\sum X_n^{**}\right)_2 = \left(\sum X_n\right)_2 = X \ .$$

Portanto, valem as seguintes identificações, feitas através de isomorfismos isométricos

$$X^{**} = \left(\sum X_n\right)_2^{**} = \left(\sum X_n^{**}\right)_2 = \left(\sum X_n\right)_2 = X \ .$$

Como a composição desses isomorfismos isométricos coincide com a imersão canônica de X em X^{**}, segue que X é reflexivo. Isto conclui a demonstração do lema. $\square$

Observação 1.2.15. Usaremos a reflexividade da ℓ_2-soma de espaços reflexivos apenas no capítulo 2.

Teorema 1.2.16. *Seja (X_n) uma família contável de espaços normados. Então, a ℓ_2-soma $(\sum X_n)_2$ é um espaço normado estritamente convexo se e somente se cada X_j é estritamente convexo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Novamente segue do fato de cada X_j ser isometricamente isomorfo a um subespaço (fechado) de $(\sum X_n)_2$.

($\Leftarrow$) Ponha $X = (\sum X_n)_2$ e sejam $(x_n), (y_n)$ dois elementos distintos de S_X. Vamos mostrar que

$$\left\| \frac{(x_n) + (y_n)}{2} \right\| < 1 \ .$$

Primeiro, observe que $(\|x_n\|), (\|y_n\|) \in S_{\ell_2}$, pois $\sum \|x_n\|^2 = 1 = \sum \|y_n\|^2$. Agora, se $\|x_n\| \neq \|y_n\|$ para algum n, ou seja, se $(\|x_n\|) \neq (\|y_n\|)$, temos

$$\left\| \frac{(x_n) + (y_n)}{2} \right\| = \left(\sum \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \frac{(\|x_n + y_n\|)}{2} \right\|_2 \leq \left\| \frac{(\|x_n\| + \|y_n\|)}{2} \right\|_2 < 1 \ ,$$

pois ℓ_2 é estritamente convexo. Podemos então supor que $\|x_n\| = \|y_n\|$ para cada n. Como $(x_n) \neq (y_n)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \neq y_m$. Em particular, vemos que x_m não é um múltiplo real não-negativo de y_m. Daí, como X_m é estritamente convexo, vale a desigualdade triangular estrita, ou seja,

$$\left\| \frac{x_m + y_m}{2} \right\| < \frac{1}{2}(\|x_m\| + \|y_m\|) \ .$$

Portanto,

$$\left\| \frac{(x_n) + (y_n)}{2} \right\| = \left\| \frac{(\|x_n + y_n\|)}{2} \right\|_2 < \left\| \frac{(\|x_n\| + \|y_n\|)}{2} \right\|_2 \leq 1 \ .$$

$\square$

1.3 Aplicação ao problema da melhor aproximação

Nesta seção obtemos uma caracterização dos espaços normados estritamente convexos que afirma serem eles exatamente aqueles espaços que satisfazem a propriedade de unicidade de minimização de distâncias em subconjuntos convexos e não-vazios do espaço todo. É neste sentido que usaremos o termo "melhor aproximação". Mostraremos também que se o espaço normado estritamente convexo for reflexivo, então a compacidade fraca de B_X nos dá a existência de tal minimização, porém quando o subconjunto convexo e não-vazio em questão também for fechado. Para esclarecer, começaremos com três definições:

Definição 1.3.1. Um subconjunto não-vazio A de um espaço métrico (M, d) é um *conjunto de unicidade* se para todo elemento $x \in M$ existe no máximo um elemento $y \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, A) = \inf\{d(x, t); t \in A\}$.

Definição 1.3.2. Um subconjunto não-vazio A de um espaço métrico (M, d) é dito um *conjunto de existência* ou um *conjunto proximal* se para cada $x \in M$ existe pelo menos um $y \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, A) = \inf\{d(x, t); t \in A\}$. Neste caso dizemos que y é uma *melhor aproximação para x em A.*

Definição 1.3.3. Um subconjunto não-vazio A de um espaço métrico (M, d) é um *conjunto de Chebyshev* se para cada $x \in M$ existe um único $y \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, A) = \inf\{d(x, t); t \in A\}$, ou seja, A é tanto um conjunto de existência quanto um conjunto de unicidade.

Teorema 1.3.4. *Seja X um espaço normado. São equivalentes:*

(a) X é estritamente convexo;

(b) Todo subconjunto convexo e não-vazio de X é um conjunto de unicidade;

(c) Todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio de X é um conjunto de unicidade;

Demonstração: (a)$\Rightarrow$(b): Suponha X estritamente convexo, considere C um subconjunto convexo e não-vazio de X e tome $x_0 \in X$. Mostraremos que não podem existir dois ou mais pontos de C mais próximos de x_0, ou seja, que não podem existir duas melhores aproximações para x_0 em C. Observe que como $y \in C$ é uma melhor aproximação de x_0 em C se e somente se $y - x_0$ é uma melhor aproximação de 0 em $C - x_0$, podemos supor que $x_0 = 0$. Também podemos supor que $d(0, C) > 0$. Além disso, após multiplicarmos todos os pontos de C por uma mesma constante positiva, podemos assumir que $d(0, C) = 1$. Suponha que c_1 e c_2 são pontos de C mais próximos de 0. Então, $\|c_1\| = \|c_2\| = 1$, donde $\{tc_1 + (1 - t)c_2 \ ; \ 0 \leq t \leq 1\} \subset C \cap B_X \subset S_X$. Como X é estritamente convexo, segue que $c_1 = c_2$, o que mostra que C é um conjunto de unicidade.

(b)$\Rightarrow$(c): É claro.

(c)$\Rightarrow$(a): Suponha que X não é estritamente convexo. Então, existe um segmento não-degenerado em S_X da forma $\{tx_1 + (1 - t)x_2 \ ; \ 0 \leq t \leq 1\}$ $(x_1 \neq x_2)$. Este segmento de reta é um subconjunto convexo, fechado e não-vazio de X tal que cada um dos seus infinitos pontos distam 1 da origem. Isto mostra que não valendo (a), não vale (c). $\square$

Para demonstrarmos um corolário importante deste teorema precisamos recordar a

Proposição 1.3.5. *Seja X um espaço normado. Se $(x_i)_{i\in I} \subset X$ é uma rede que converge fracamente para $x \in X$ então*
$$\|x\| \leq \liminf_i \|x_i\| \ .$$

Demonstração: Podemos supor $x \neq 0$. Seja $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = \|x\|$. Temos então $\|x\| = \lim_i |x^*(x_i)|$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $i_0(\epsilon)$ em I tal que $\|x\| - \epsilon \leq |x^*(x_i)| \leq \|x_i\|$, desde que $i \geq i_0(\epsilon)$. Portanto, $\|x\| \leq \liminf_i \|x_i\|$. $\square$

Corolário 1.3.6 (Mahlon Day)**.** *Se um espaço normado X é estritamente convexo e reflexivo, então cada um dos seus subconjuntos convexos, fechados e não-vazios é um conjunto de Chebyshev.*

Demonstração: Seja $C \subset X$ um subconjunto não-vazio, convexo e fechado e tome $x_0 \in X$. Existe $(y_n) \subset C$ tal que $\lim_n \|y_n - x_0\| = d(x_0, C)$. Como (y_n) é limitada e X é reflexivo, existe uma subsequência (y_{n_j}) que converge fracamente para algum y_0 (ver [11], pág 251, Corolário 2.8.9). Como C é convexo e fechado, C é fracamente fechado. Logo, $y_0 \in C$. Agora, note que $d(x_0, C) \leq \|y_0 - x_0\| \leq \liminf_j \|y_{n_j} - x_0\| = d(x_0, C)$, donde y_0 é uma melhor aproximação para x_0 em C (a segunda desigualdade decorre da proposição anterior). Como X é estritamente convexo, segue então do teorema anterior que C é um conjunto de Chebyshev. $\square$

Observação 1.3.7. Na demonstração do corolário anterior, vimos que se X é um espaço normado reflexivo então todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio de X é um conjunto de existência.

Reciprocamente, vale o seguinte resultado:

Teorema 1.3.8. *Seja X um espaço de Banach. Se todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio de X é um conjunto de existência, então X é reflexivo.*

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que X é um espaço real. Seja $f \in X^*$ e considere o conjunto $C = \{x \in X \ ; \ f(x) = \|f\|\}$, o qual é convexo, fechado e não-vazio. Se mostrarmos que existe $x_0 \in C \cap B_X$, o Teorema de James(ver [11], pág 262, Teorema 2.9.4) nos garante que X é reflexivo, já que $f \in X^*$ é arbitrário. Da hipótese, C é um conjunto de existência, o que equivale a dizer que C possui um elemento de norma mínima. Seja $x_0 \in C$ um tal ponto. Afirmamos que $x_0 \in B_X$; realmente, suponha que seja $\|x_0\| > 1$. Como
$$\|f\| = \sup_{y \in B_X} f(y) \ ,$$
podemos escolher $y \in B_X$, $\|y\| < 1$ tal que $f(y) \geq \dfrac{\|f\|}{\|x_0\|}$, donde $f(\|x_0\|y) \geq \|f\|$. Daí, escolhendo $0 < c \leq 1$ tal que
$$f(c\|x_0\|y) = cf(\|x_0\|y) = \|f\| \ ,$$
vemos que $c\|x_0\|y \in C$ e $\| \ c\|x_0\|y \ \| < \|x_0\|$, uma contradição. $\square$

Observação 1.3.9. Um resultado de Jörg Blatter de 1976 (ver [5]) garante que um espaço normado é completo se todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio do espaço tem um elemento de norma mínima, isto é, se todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio é um conjunto de existência. Logo, se X for um espaço normado no qual todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio for um conjunto de existência, o teorema anterior nos diz que X é reflexivo.

Combinando esta observação, o teorema 1.3.4 e o corolário 1.3.5 obtemos a demonstração do seguinte

Teorema 1.3.10. *Um espaço normado X é estritamente convexo e reflexivo se e somente se cada subconjunto convexo, fechado e não-vazio de X é um conjunto Chebyshev.*

Este importante teorema da Teoria de Aproximação , que caracteriza os espaços normados estritamente convexos e reflexivos, é muitas vezes chamado de Teorema de Day-James.

Já vimos que se X é um espaço normado estritamente convexo e $M \subset X$ é um subespaço fechado então o quociente X/M não necessariamente é estritamente convexo. Porém, se M for também um conjunto de existência, então o resultado é verdadeiro. Temos o seguinte

Teorema 1.3.11. *Suponha X um espaço normado estritamente convexo e $M \subset X$ um subespaço que é conjunto de existência. Então X/M é estritamente convexo.*

Demonstração: Note que o fato de M ser um conjunto de existência implica que M é fechado: de fato, tome $y \in \overline{M}$. Como M é um conjunto de existência, existe $x \in M$ tal que $\|y - x\| = \inf_{z \in M} \|y - z\| = 0$, donde $y = x \in M$. Sejam agora $x + M$ e $y + M$ dois elementos de $S_{X/M}$. Recorde a definição da norma quociente:

$$\|x + M\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|$$

Como M é conjunto de existência, existem z_x e z_y em M tais que

$$1 = \|x + M\| = \inf_{z \in M} \|x - z\| = \|x - z_x\|$$

e

$$1 = \|y + M\| = \inf_{z \in M} \|y - z\| = \|y - z_y\| \ .$$

Daí, $x - z_x$ e $y - z_y$ estão em S_X. Como X é estritamente convexo, segue que

$$\|t(x - z_x) + (1 - t)(y - z_y)\| < 1 \quad (0 < t < 1) \ .$$

Logo,

$$\|t(x + M) + (1 - t)(y + M)\| \leq \|t(x - z_x) + (1 - t)(y - z_y)\| < 1 \quad (0 < t < 1)$$

e X/M é estritamente convexo. $\square$

Capítulo 2

Espaços Uniformemente Convexos

No capítulo anterior, vimos que um espaço normado é estritamente convexo se e somente se todo segmento de reta não-trivial com extremos na esfera unitária possui seu ponto médio no interior da bola unitária fechada. Naquele momento, não questionamos quão distante da esfera unitária tal ponto médio está, se escolhemos inicialmente um tamanho mínimo para o segmento de reta que une os dois pontos. Veremos mais adiante que é possível que um espaço normado X seja estritamente convexo e que existam sequências (x_n) e (y_n) em S_X tais que a sequência $(\|x_n - y_n\|)$ é limitada inferiormente por uma constante positiva e $\sup_n \left\| \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1$. Quando isto não ocorre, dizemos que o espaço normado X é uniformemente convexo.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1. Seja X um espaço normado. Defina uma função $\delta_X : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$ pela fórmula

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x - y\| \geq \epsilon \right\} \quad \text{se} \quad X \neq \{0\}$$

e pela fórmula

$$\delta_X(\epsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se} \ \ \epsilon = 0 \\ 1 & \text{se} \ \ 0 < \epsilon \leq 2 \end{array} \right. \qquad \text{se} \quad X = \{0\} \ .$$

Dizemos que δ_X é o *módulo de convexidade de* X. O espaço X é *uniformemente convexo* quando $\delta_X(\epsilon) > 0$ sempre que $0 < \epsilon \leq 2$. Equivalentemente, um espaço normado X é dito uniformemente convexo se para cada $0 < \epsilon \leq 2$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \leq 1 - \delta$, sempre que $x, y \in S_X$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$.

Suponha que $X \neq \{0\}$ e sejam $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$. Pela definição, $\delta_X(\epsilon_2) \leq 1 - \|\frac{1}{2}(x + y)\|$

para cada $x, y \in S_X$ tais que $\|x - y\| \geq \epsilon_2$. Como $\epsilon_1 > \epsilon_2$, em particular vale

$$\delta_X(\epsilon_2) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\|$$

para cada $x, y \in S_X$ tais que $\|x - y\| \geq \epsilon_1$. Portanto, $\delta_X(\epsilon_2) \leq \delta_X(\epsilon_1)$, donde vemos que $\delta_X(\epsilon)$ é uma função não-decrescente de ϵ tal que $\delta_X(0) = 0$. Além disso, é claro que se M é um subespaço de X então $\delta_M(\epsilon) \geq \delta_X(\epsilon)$ para cada $0 \leq \epsilon \leq 2$.

Por fim, se X é um espaço real unidimensional, então

$$\delta_X(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \epsilon = 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < \epsilon \leq 2 \ . \end{cases}$$

Exemplo 2.1.2. Se X é um espaço de Hilbert, então X é uniformemente convexo munido da norma que provém do produto interno. De fato, a Lei do Paralelogramo nos diz que

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 \ .$$

Daí, se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ então

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4} \ ,$$

donde temos $\delta_X(\epsilon) \geq 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$.

Observação 2.1.3. Deve-se notar que, em geral, não é uma tarefa simples concluir se um espaço normado é ou não uniformemente convexo através do cálculo explícito do módulo de convexidade. Na maior parte dos casos precisamos de resultados auxiliares a fim de concluir se existe ou não uma limitação inferior positiva e uniforme para a diferença $1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \quad (x, y \in X \ , \ \|x\| = \|y\| = 1 \ , \ \|x - y\| \geq \epsilon)$.

Observação 2.1.4. Existem outras formas de se calcular o módulo de convexidade; por exemplo, se X é um espaço normado com dimensão maior do que 0 se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou com dimensão maior do que 1 se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \delta_X(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in B_X \ , \ \|x - y\| \geq \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x - y\| = \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in B_X \ , \ \|x - y\| = \epsilon \right\}, \end{aligned}$$

quando $0 \leq \epsilon \leq 2$, e

$$\begin{aligned}\delta_X(\epsilon) &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \; x,y \in S_X \;,\; \|x-y\| > \epsilon\right\} \\ &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \; x,y \in B_X \;,\; \|x-y\| > \epsilon\right\},\end{aligned}$$

quando $0 \leq \epsilon < 2$.

Veremos a demonstração deste fato na próxima seção.

O conceito de convexidade uniforme foi introduzido por Clarkson em 1936 (ver [6]). Obviamente, todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo, uma vez que dados x, y dois elementos distintos na esfera unitária de um espaço normado uniformemente convexo X, tem-se

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta_X(\|x-y\|) < 1 \; .$$

Veremos agora que em dimensão finita os dois conceitos são equivalentes.

Teorema 2.1.5. *Seja X um espaço normado de dimensão finita. Se X é estritamente convexo então X é uniformemente convexo.*

Demonstração: Suponha que X não seja uniformemente convexo. Existe $0 < \epsilon \leq 2$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem elementos x_n, y_n em S_X com $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ e

$$1 \geq \left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\| > 1-\frac{1}{n} \; .$$

Sendo a dimensão de X finita, temos que S_X é compacta. Daí, podemos supor que existem elementos $x, y \in S_X$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Portanto, temos $\|x-y\| \geq \epsilon$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \; ,$$

o que contradiz a convexidade estrita de X. $\square$

Entretanto, em dimensão infinita, um espaço normado pode ser estritamente convexo sem ser uniformemente convexo. Vejamos um exemplo desta situação:

Exemplo 2.1.6. Para cada inteiro $n \geq 1$, seja $p_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Consideremos o espaço de Banach $X = (\sum \ell^2_{p_n})_2$. Como cada $\ell^2_{p_n}$ é estritamente convexo, segue do Teorema 1.2.16 que X é estritamente convexo. Sabemos que X contém uma cópia isométrica de cada $\ell^2_{p_n}$. Observe que $(1,0), (0,1) \in S_{\ell^2_{p_n}}$, $\|(1,0)-(0,1)\|_{p_n} = 2^{\frac{n}{n+1}} \geq \sqrt{2}$ e

$$\left\|\frac{(1,0)+(0,1)}{2}\right\|_{p_n} = 2^{\frac{-1}{n+1}} \; .$$

Como $2^{\frac{-1}{n+1}} \to 1$ quando $n \to \infty$, concluímos que X não é uniformemente convexo. $\square$

Veremos agora um lema útil para demonstrarmos o Teorema de Clarkson, o qual afirma que se μ é uma medida positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto Ω e $1 < p < \infty$, então $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ é uniformemente convexo. Embora apresentaremos o lema em uma forma um pouco mais geral do que o necessário para demonstrar o resultado de Clarkson, esta forma nos será útil quando discutirmos a convexidade uniforme de somas diretas.

Lema 2.1.7. *Para cada $1 < p < \infty$, cada $t \in (0, 2]$ e cada função $\lambda : (0, 2] \longrightarrow (0, 1]$, existe um escalar $\gamma_{p,t,\lambda} \in (0, 1]$ tal que se X é um espaço normado uniformemente convexo cujo módulo de convexidade δ_X satisfaz $\lambda(\epsilon) \leq \delta_X(\epsilon)$ quando $0 < \epsilon \leq 2$, então*

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\|^p \leq (1 - \gamma_{p,t,\lambda}) \left(\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} \right)$$

sempre que x, y são elementos de X tais que $\|x - y\| \geq t \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Demonstração: Primeiro, observe que basta provar o resultado para $x, y \in X$ tais que $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$ (após provar para este caso, pode-se supor que $\|x\| \geq \|y\|$ e divide-se a desigualdade do resultado por $\|x\|^p$). Agora, suponha por absurdo que existam $1 < p < \infty$, $t \in (0, 2]$ e uma função $\lambda : (0, 2] \longrightarrow (0, 1]$ tal que não exista escalar $\gamma_{p,t,\lambda} \in (0, 1]$ com a propriedade desejada. Seja

$$f(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1 + t)\right)^p}{\frac{1}{2}(1 + t^p)} \quad (0 \leq t \leq 1) \ .$$

Através de teste de derivada verificamos que f é estritamente crescente em $[0, 1]$, de modo que f atinge seu valor máximo 1 no intervalo $[0, 1]$ exatamente em $t = 1$. Logo, se X é um espaço normado e x e y são elementos de X tais que $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$, então

$$\frac{\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\|^p}{\frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}(1 + \|y\|)\right)^p}{\frac{1}{2}(1 + \|y\|^p)} \leq 1 \ . \quad (*)$$

Como estamos supondo que não existe uma constante $\gamma_{p,t,\lambda} \in (0, 1]$ que satisfaça o resultado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem X_n espaço normado uniformemente convexo com módulo de convexidade δ_{X_n} satisfazendo $\lambda(\epsilon) \leq \delta_{X_n}(\epsilon) \quad (0 < \epsilon \leq 2)$ e elementos $x_n, y_n \in X_n$ tais que:

(1) $\|x_n\| = 1$ e $\|y_n\| \leq 1$;

(2) $\|x_n - y_n\| \geq t \max\{\|x_n\|, \|y_n\|\} = t$;

(3) $\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\|^p > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p}{2} \right)$.

Por $(*)$ e por (3), temos

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|^p}{\frac{1}{2}(\|x_n\|^p+\|y_n\|^p)} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}(\|x_n\|+\|y_n\|)\right)^p}{\frac{1}{2}(\|x_n\|^p+\|y_n\|^p)} \leq 1\ , \qquad (**)$$

donde

$$\lim_n \frac{\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|^p}{\frac{1}{2}(\|x_n\|^p+\|y_n\|^p)} = 1\ . \qquad (***)$$

Por $(**)$, temos $\lim_n \frac{\left(\frac{1}{2}(1+\|y_n\|)\right)^p}{\frac{1}{2}(1+\|y_n\|^p)} = 1$ e, como $1 = f(1) = \max_{0\leq t\leq 1} f(t)$, segue que $\|y_n\| \to 1$. Podemos então assumir $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ponha $z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ para cada n. Como $\|y_n\| \to 1$, segue de $(***)$ que

$$\lim_n \left\|\frac{1}{2}(x_n+z_n)\right\| = \lim_n \left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| = 1\ .$$

Por outro lado, note que

$$\|x_n - z_n\| = \left\|x_n - \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| = \|\|y_n\|x_n - y_n\|.\frac{1}{\|y_n\|} \geq \|\|y_n\|x_n - y_n\| \quad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Como $\|x_n - y_n\| \geq t$ e $\|y_n\| \to 1$, podemos então supor que $\|x_n - z_n\| \geq \frac{t}{2}$ para cada n. Logo,

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n+z_n)\right\| \leq 1 - \delta_{X_n}\left(\frac{t}{2}\right) \leq 1 - \lambda\left(\frac{t}{2}\right) < 1$$

para cada n, e assim,

$$\lim_n \left\|\frac{1}{2}(x_n+z_n)\right\| < 1\ .$$

Esta contradição conclui a demonstração do resultado. □

Usando as notações do lema anterior e tomando λ como o módulo de convexidade do espaço normado uniformemente convexo $\mathbb{K}$, obtemos imediatamente o seguinte resultado, que será usado na demonstração do Teorema de Clarkson:

Lema 2.1.8. *Seja $1 < p < \infty$. Existe uma função $\gamma_p : (0,2] \longrightarrow (0,1]$ tal que*

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p \leq (1-\gamma_p(t))\left(\frac{|\alpha|^p+|\beta|^p}{2}\right)$$

sempre que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ satisfazem $|\alpha - \beta| \geq t\max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Estamos agora em condições de demonstrar o

Teorema 2.1.9 (Clarkson)**.** *Suponha que μ é uma medida positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto $\Omega \neq \varnothing$ e tome $1 < p < \infty$. Então, $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ é uniformemente convexo.*

Demonstração: Fixe $\epsilon > 0$ e considere $f_1, f_2 \in S_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}$ tais que $\|f_1 - f_2\|_p \geq \epsilon$. Seja

$$A = \left\{ w \in \Omega \ ; \ |f_1(w) - f_2(w)|^p \geq \frac{\epsilon^p}{4}(|f_1(w)|^p + |f_2(w)|^p) \right\} .$$

Note que

$$|f_1(w) - f_2(w)| \geq \frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \max\{|f_1(w)|, |f_2(w)|\} \quad \text{quando} \ \ w \in A \ . \quad (*)$$

Se tivéssemos $A = \varnothing$ então

$$\int_\Omega |f_1 - f_2|^p d\mu \leq \frac{\epsilon^p}{4} \left(\int_\Omega |f_1|^p d\mu + \int_\Omega |f_2|^p d\mu \right) = \frac{\epsilon^p}{4}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p) = \frac{\epsilon^p}{2} \ ,$$

donde

$$\|f_1 - f_2\|_p \leq \frac{\epsilon}{2^{\frac{1}{p}}} < \epsilon \ ,$$

o que seria uma contradição. Portanto, $A \neq \varnothing$. Sendo γ_p como no lema anterior, temos

$$\left| \frac{f_1(w) + f_2(w)}{2} \right|^p \leq \left(1 - \gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) \right) \left(\frac{|f_1(w)|^p + |f_2(w)|^p}{2} \right)$$

sempre que $w \in A$ (por (*)) e

$$\left| \frac{f_1(w) + f_2(w)}{2} \right|^p \leq \frac{|f_1(w)|^p + |f_2(w)|^p}{2}$$

sempre que $w \in \Omega$. Portanto,

$$\begin{aligned}
1 - \left\| \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \right\|_p^p &= \frac{\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p}{2} - \left\| \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \right\|_p^p \\
&= \int_\Omega \left(\frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} - \left| \frac{f_1 + f_2}{2} \right|^p \right) d\mu \\
&\geq \int_A \left(\frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} - \left| \frac{f_1 + f_2}{2} \right|^p \right) d\mu \\
&\geq \int_A \left(\frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} \right) d\mu \\
&+ \int_A \left(\gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) - 1 \right) \left(\frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} \right) d\mu \\
&= \gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) \int_A \frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} d\mu \ . \quad (**)
\end{aligned}$$

Seja I_A a função característica de A. Então,

$$\begin{aligned}\|f_1 I_A - f_2 I_A\|_p^p &= \|f_1 - f_2\|_p^p - \int_{\Omega\setminus A} |f_1 - f_2|^p d\mu \\ &\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4}\int_{\Omega\setminus A}(|f_1|^p + |f_2|^p)d\mu \\ &\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4}(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p) = \frac{\epsilon^p}{2}\ ,\end{aligned}$$

donde

$$\max\{\|f_1 I_A\|_p, \|f_2 I_A\|_p\} \geq \frac{\epsilon}{2.2^{\frac{1}{p}}}\ .$$

Logo, por $(**)$ segue que

$$1 - \left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_p^p \geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}}\right)\frac{\|f_1 I_A\|_p^p + \|f_2 I_A\|_p^p}{2} \geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}}\right)\frac{\epsilon^p}{2^{p+2}}\ ,$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_p \leq \left(1 - \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}}\right)\frac{\epsilon^p}{2^{p+2}}\right)^{\frac{1}{p}} < 1\ .$$

Assim, vemos que existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_p \leq 1 - \delta$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 2.1.10. *Suponha $1 < p < \infty$. Então ℓ_p é uniformemente convexo assim como ℓ_p^n sempre que n é um inteiro não-negativo.*

2.2 Propriedades

Antes de entrarmos realmente nas propriedades dos espaços normados uniformemente convexos, precisaremos de alguns fatos sobre posições de pontos em espaços normados. Esta parte inicial será organizada em forma de lemas.

Lema 2.2.1. *Seja X um espaço normado real bidimensional. Então S_X é conexo. Além disso, se $x^* \in X^*$ então*

$$\{x \in S_X\ ;\ x^*(x) \geq 0\}$$

é conexo.

Demonstração: Observe que a segunda afirmação implica a primeira, bastando tomar $x^* = 0$. Provemos então a segunda afirmação. Primeiro, observe que como a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é também um conjunto conexo e X é isomorfo a $\mathbb{R}^2$ como espaço normado, podemos supor que X é $\mathbb{R}^2$. Vamos considerar duas normas em X, a saber: $\|.\|_X$ sua norma original e $\|.\|_2$ a norma euclidiana. Tome $x^* \in X^*$. Defina a aplicação $f : \{x \in S_{\ell_2^2}\ ;\ x^*(x) \geq 0\} \longrightarrow \{x \in S_X\ ;\ x^*(x) \geq 0\}$ por

$f(x) = \dfrac{x}{\|x\|_X}$, sendo ℓ_2^2 o espaço $\mathbb{R}^2$ munido da norma euclidiana. Como todas as normas em $\mathbb{R}^2$ são equivalentes, a função norma $\|.\|_X$ é contínua em ℓ_2^2, donde f também o é. Além disso, f é uma bijeção com inversa dada por $g : \{y \in S_X \ ; \ x^*(y) \geq 0\} \longrightarrow \{y \in S_{\ell_2^2} \ ; \ x^*(y) \geq 0\}$, $g(y) = \dfrac{y}{\|y\|_2}$. Portanto, como $\{x \in S_{\ell_2^2} \ ; \ x^*(x) \geq 0\}$ é conexo, segue que $\{x \in S_X \ ; \ x^*(x) \geq 0\}$ também é conexo. $\square$

Lema 2.2.2. *Suponha que X é um espaço normado que tem dimensão pelo menos 1 se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou tem dimensão pelo menos 2 se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dados $x_0 \in S_X$ e $y_0 \in B_X$, existem x_1 e y_1 em S_X tais que $x_1 - y_1 = x_0 - y_0$ e*

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \right\| \geq \left\| \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \right\| .$$

Demonstração: Como X é um espaço normado real quando a multiplicação dos vetores por escalares é restrita a $\mathbb{R} \times X$, e como um espaço normado complexo unidimensional se torna um espaço real bidimensional também quando visto por esta restrição, podemos supor que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e portanto, que X é bidimensional. Assim, podemos assumir também que $X = \mathbb{R}^2$. É claro também que podemos assumir que $\|y_0\| < 1$. Defina $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $x^*(ax_0 + by_0) = b$. Pelo lema anterior, o conjunto $\{x \in S_X \ ; \ x^*(x) \geq 0\}$ é conexo. Como $\|x_0 + y_0 - x_0\| < 1$ e $\| - x_0 + y_0 - x_0\| \geq 2\|x_0\| - \|y_0\| > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $x_1 \in \{x \in S_X \ ; \ x^*(x) \geq 0\}$, necessariamente distinto de x_0 e de $-x_0$, tal que $\|x_1 + y_0 - x_0\| = 1$. Ponha $y_1 = x_1 + y_0 - x_0$. Então, $x_1, y_1 \in S_X$ e $x_1 - y_1 = x_0 - y_0$. Falta apenas verificar que

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \right\| \geq \left\| \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \right\| .$$

Se $z_1 \in B_X$ e $z_2 \in \overset{\circ}{B}_X$, então $tz_1 + (1-t)z_2 \in \overset{\circ}{B}_X$ para cada $0 < t < 1$: de fato, note que como B_X é convexa, vale $tz_1 + (1-t)z_2 \in tB_X + (1-t) \overset{\circ}{B}_X \subset B_X$. Como $tB_X + (1-t) \overset{\circ}{B}_X$ é aberto, sendo X normado, vale $tB_X + (1-t) \overset{\circ}{B}_X \subset \overset{\circ}{B}_X$. Usaremos este fato repetidas vezes nos argumentos subsequentes. Ponha $\overline{z_1, z_2}$ para representar a linha reta (não somente o segmento) passando pelos pontos z_1 e z_2 em X, $z_1 \neq z_2$. Na Figura 2.1 abaixo, defina W_0 como sendo o conjunto dos pontos sobre ou acima de $\overline{x_0, -x_0}$ e sobre ou à esquerda de $\overline{x_0, -x_1}$, e W_1 o conjunto dos pontos estritamente acima de $\overline{x_1, -x_0}$ e estritamente à esquerda de $\overline{x_0, x_1}$. Como $x_0, x_1, -x_0, -x_1$ estão em S_X, pela convexidade de B_X segue que o paralelogramo cujos vértices são estes pontos está contido em B_X e seu interior está contido em $\overset{\circ}{B}_X$. Como $x^*(y_0) \geq 0$, então na Figura 2.1 y_0 está localizado sobre ou acima de $\overline{x_0, -x_0}$. Se y_0 estivesse estritamente à esquerda de $\overline{x_0, x_1}$ mas fora de A(veja Figura 2.1) então poderíamos encontrar um ponto z_0 no interior do paralelogramo (e portanto no interior de B_X) tal que x_0 ou x_1 pertencem ao segmento $\overline{y_0, z_0}$, o que é impossível já que $\|y_0\| < 1$ e $\|z_0\| < 1$ implicariam $\|x_0\| < 1$ ou $\|x_1\| < 1$. Se $y_0 \in A$, como $y_1 = y_0 + x_1 - x_0$, poderíamos ligar y_1 a um ponto z_1 no interior do paralelogramo passando por x_1, o que novamente é impossível já que $\|z_1\| < 1$ e $\|x_1\| = 1$ implicaria $\|y_1\| < 1$, um absurdo. Logo, y_0 está sobre ou à direita de $\overline{x_0, x_1}$. Se y_0 estivesse sobre esta reta, existiria $t > 0$ tal que $y_0 = x_0 + t(x_1 - x_0)$ e, como $y_1 = y_0 + x_1 - x_0$, teríamos $x_1 = y_1 - y_0 + x_0 = y_1 - x_0 - t(x_1 - x_0) + x_0$ e assim, $x_1 = \dfrac{1}{t+1}y_1 + \dfrac{t}{t+1}x_0$, donde x_1 é combinação convexa de $y_1, x_0 \in S_X$, o que junto com a convexidade estrita de ℓ_2^2 nos daria $\|x_1\| < 1$, absurdo. Portanto, y_0 está estritamente à direita de $\overline{x_0, x_1}$. Como $-x_0$ e $-x_1$ são pontos distintos de S_X, pelo mesmo argumento acima temos que os pontos de $\overline{-x_0, -x_1}$ sobre ou acima de $\overline{-x_0, x_0}$ têm norma maior do que 1. Logo, y_0 não está sobre $\overline{-x_0, -x_1}$ e acima de $\overline{x_0, -x_0}$. Se estivesse estritamente à direita de $\overline{-x_0, -x_1}$ e acima de $\overline{x_0, -x_0}$, então $-x_0$ seria combinação convexa de y_0 e um ponto z_0 do interior do paralelogramo, o que é impossível pois $\|-x_0\| = 1$, $\|y_0\| < 1$ e $\|z_0\| < 1$. Assim, y_0 está estritamente à esquerda de $\overline{-x_0, -x_1}$. Agora, como $\overline{x_0, x_1}$, $\overline{0, x_1 - x_0}$ e $\overline{-x_0, -x_1}$ são paralelos, então o ponto médio $\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) = m_0$ está estritamente entre $\overline{x_0, x_1}$ e $\overline{0, x_1 - x_0}$, pois do contrário, y_0 estaria à direita de $\overline{-x_0, -x_1}$, contradição. Assim, $\overline{0, m_0}$ intersecta $\overline{x_0, x_1}$ sobre ou acima de $\overline{x_0, -x_0}$(veja Figura 2.2). Este argumento então nos dá $s > 1$ e

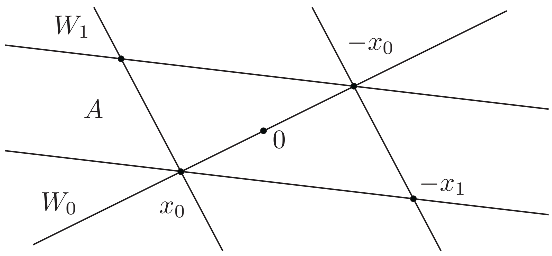


Figura 2.1:

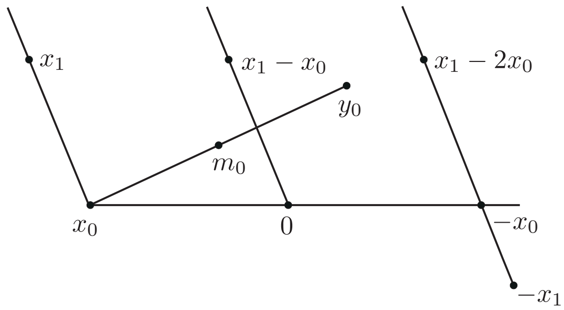


Figura 2.2:

$t \geq 0$ satisfazendo a equação $\dfrac{s}{2}(x_0 + y_0) = x_0 + t(x_1 - x_0)$. Daí, tiramos que

$$\begin{aligned} \frac{s}{2}(x_1 + y_1) &= \frac{s}{2}(x_1 + y_0 + x_1 - x_0) = \frac{s}{2}(2x_1 + x_0 + y_0 - 2x_0) \\ &= sx_1 - sx_0 + x_0 + t(x_1 - x_0) = x_0 + (t+s)(x_1 - x_0) \ . \end{aligned}$$

Se $t \leq 1$, vale

$$\begin{aligned} \left\| \frac{s}{2}(x_0 + y_0) \right\| &= \|x_0 + t(x_1 - x_0)\| = \|(1-t)x_0 + tx_1\| \\ &\leq 1 \leq \|x_0 + (t+s)(x_1 - x_0)\| = \left\| \frac{s}{2}(x_1 + y_1) \right\| \ , \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida pois

$$\begin{aligned} \|x_0 + (t+s)(x_1 - x_0)\| &= \|(1 - (t+s))x_0 + (t+s)x_1\| \\ &\geq (t+s)\|x_1\| - (1 - (t+s))\|x_0\| = 2(t+s) - 1 \geq 1 \ . \end{aligned}$$

Se $t > 1$, como $\|x_1\| = 1$, $\|x_0 + (t+s)(x_1 - x_0)\| \geq 1$ e $x_0 + t(x_1 - x_0)$ está sobre o segmento de reta que liga x_1 a $x_0 + (t+s)(x_1 - x_0)$, temos que

$$\left\| \frac{s}{2}(x_0 + y_0) \right\| = \|x_0 + t(x_1 - x_0)\| \leq \|x_0 + (t+s)(x_1 - x_0)\| = \left\| \frac{s}{2}(x_1 + y_1) \right\| \ .$$

Portanto, em qualquer caso, vale $\left\|\frac{s}{2}(x_0+y_0)\right\| \leq \left\|\frac{s}{2}(x_1+y_1)\right\|$, donde

$$\left\|\frac{1}{2}(x_0+y_0)\right\| \leq \left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1)\right\| ,$$

como queríamos. $\square$

Lema 2.2.3. *Suponha que X é um espaço normado, $0<\epsilon<2$ e $x,y\in S_X$ são tais que $\|x-y\|=\epsilon$. Então existem sequências (x_n) e (y_n) em S_X tais que $x_n\to x$, $y_n\to y$ e $\|x_n-y_n\|>\epsilon$ para cada n.*

Demonstração: Como no lema anterior, basta considerarmos $X=\mathbb{R}^2$. Seja $x^*\in X^*\backslash\{0\}$ tal que $x^*(ax+by)=a+b$. Logo, $x^*(x-y)=0$. Se $x^*(x)=0$ então $x,y\in S_X\cap Ker\ x^*$ e, portanto, $\|x-y\|=0$ ou 2, uma contradição. Logo, podemos supor que $x^*(x)=x^*(y)=1$. Para cada número real δ, defina

$$H_\delta=\{z\in X\ ;\ x^*(z)=\delta\}\ ,$$

que é o hiperplano gerado por x^* e δ.

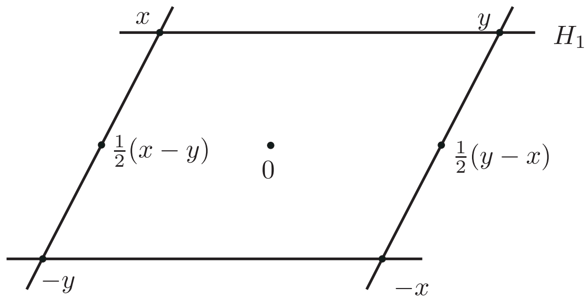


Figura 2.3:

A convexidade de B_X garante que o paralelogramo cujos vértices são $x,y,-x,-y$ está em B_X. A conclusão do lema é imediata se o segmento de reta $H_1\cap B_X$ tem comprimento maior do que ϵ (pela simetria de B_X e pois $x,y\in H_1\cap S_X$). Podemos então assumir que x e y são os extremos de $H_1\cap B_X$. Suponha que $H_{\delta_0}\cap B_X$ tem comprimento ϵ para algum $0<\delta_0<1$. Então, algum ponto de S_X estaria na linha que passa por x e $-y$, entre estes pontos, o que implicaria $\left\|\frac{1}{2}(x-y)\right\|=1$. Mas isto é impossível já que $\|x-y\|=\epsilon<2$. Portanto, $H_\delta\cap B_X$ tem comprimento maior que ϵ sempre que $0<\delta<1$. Seja agora (δ_n) uma sequência estritamente crescente em $(0,1)$ tal que $\delta_n\to 1$. Para cada n, sejam x_n,y_n os extremos do segmento $H_{\delta_n}\cap B_X$ tais que x_n está sobre ou à esquerda da reta que passa por x e $-y$, e y_n está sobre ou à direita da reta que passa por y e $-x$. Então, $x_n,y_n\in S_X$ e $\|x_n-y_n\|>\epsilon$ para cada n. Pela compacidade de S_X, podemos supor que existem $x_0,y_0\in S_X$ tais que $x_n\to x_0$ e $y_n\to y_0$. Daí, como $\delta_n\to 1$ e x^* é contínuo, segue que $x_0,y_0\in H_1\cap S_X$. Também temos $\|x_0-y_0\|\geq\epsilon$. Como x e y são os extremos de $H_1\cap B_X$, temos $x=x_0$ e $y=y_0$. $\square$

Estes dois últimos lemas serão úteis ao provarmos o resultado abaixo, que nos dá outras formas para calcular o módulo de convexidade δ_X.

Teorema 2.2.4. *Suponha que X é um espaço normado com dimensão maior do que 0 se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou com dimensão maior do que 1 se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Seja*

$$\delta_X(\epsilon)=\inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\ ;\ x,y\in S_X\ ,\ \|x-y\|\geq\epsilon\right\}$$

o módulo de convexidade de X. Então:

$$\begin{aligned}\delta_X(\epsilon) &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\ ;\ x,y\in B_X\ ,\ \|x-y\|\geq\epsilon\right\}\\ &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\ ;\ x,y\in S_X\ ,\ \|x-y\|=\epsilon\right\}\\ &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\ ;\ x,y\in B_X\ ,\ \|x-y\|=\epsilon\right\},\end{aligned}$$

quando $0\leq\epsilon\leq 2$, e

$$\begin{aligned}\delta_X(\epsilon) &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\ ;\ x,y\in S_X\ ,\ \|x-y\|>\epsilon\right\}\\ &= \inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|\ ;\ x,y\in B_X\ ,\ \|x-y\|>\epsilon\right\},\end{aligned}$$

quando $0\leq\epsilon<2$.

Demonstração: Novamente, podemos assumir que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Sejam $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5$ os 5 ínfimos da conclusão do Teorema na ordem em que aparecem.

Afirmação 1: $\delta_X(\epsilon)=\delta_1(\epsilon)$ quando $0\leq\epsilon\leq 2$. Isto é claro se $\epsilon=0$. Fixe $0<\epsilon\leq 2$ e tome $x_0,y_0\in B_X$ com $\|x_0-y_0\|\geq\epsilon$. Como $S_X\subset B_X$, basta provarmos que

$$\delta_X(\epsilon)\leq 1-\left\|\frac{1}{2}(x_0+y_0)\right\|\ .$$

Podemos assumir que $x_0\in S_X$. Como $x_0\in S_X$ e $y_0\in B_X$, pelo Lema 2.2.2, existem $x_1,y_1\in S_X$ tais que $x_1-y_1=x_0-y_0$ e

$$\left\|\frac{1}{2}(x_0+y_0)\right\|\leq\left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1)\right\|\ .$$

Daí, $\|x_1-y_1\|=\|x_0-y_0\|\geq\epsilon$, donde

$$\delta_X(\epsilon)\leq 1-\left\|\frac{1}{2}(x_1+y_1)\right\|\leq 1-\left\|\frac{1}{2}(x_0+y_0)\right\|\ ,$$

como queríamos.

Afirmação 2: $\delta_4(\epsilon)=\delta_5(\epsilon)$ quando $0\leq\epsilon<2$. O resultado é claro para $\epsilon=0$. Fixe $0<\epsilon<2$ e $x_1,y_1\in B_X$ tais que $\|x_1-y_1\|>\epsilon$. Como $S_X\subset B_X$, basta provamos que

$\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \right\|$. Novamente, podemos supor que $x_1 \in S_X$ e, pelo Lema 2.2.2, existem $x_2, y_2 \in S_X$ tais que $x_2 - y_2 = x_1 - y_1$ e

$$\left\| \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \right\| \leq \left\| \frac{1}{2}(x_2 + y_2) \right\| .$$

Logo, $\|x_2 - y_2\| = \|x_1 - y_1\| > \epsilon$ e, portanto,

$$\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x_2 + y_2) \right\| \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \right\| ,$$

como queríamos.

Afirmação 3: $\delta_X(\epsilon) = \delta_4(\epsilon)$ quando $0 \leq \epsilon < 2$. É óbvio para $\epsilon = 0$. Suponha $0 < \epsilon < 2$ e $x_3, y_3 \in S_X$ com $\|x_3 - y_3\| = \epsilon$. Como

$$\left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x - y\| > \epsilon \right\}$$

está contido em

$$\left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x - y\| \geq \epsilon \right\} ,$$

basta mostrar que $\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x_3 + y_3) \right\|$. Pelo Lema 2.2.3, existem sequências $(v_n), (w_n)$ em S_X tais que $\|v_n - w_n\| > \epsilon$ para cada n e $v_n \to x_3$, $w_n \to y_3$. Daí, $\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(v_n + w_n) \right\|$ para todo n, donde

$$\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x_3 + y_3) \right\| ,$$

como queríamos.

Afirmação 4: $\delta_2(\epsilon) = \delta_3(\epsilon)$ quando $0 \leq \epsilon \leq 2$. Como

$$\left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x - y\| = \epsilon \right\}$$

está contido em

$$\left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \ ; \ x, y \in B_X \ , \ \|x - y\| = \epsilon \right\} ,$$

basta provar que $\delta_2(\epsilon) \leq \delta_3(\epsilon)$ quando $0 < \epsilon \leq 2$. Fixe $0 < \epsilon \leq 2$ e $x_4, y_4 \in B_X$ tais que $\|x_4 - y_4\| = \epsilon$. Basta então provarmos que $\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\| \frac{1}{2}(x_4 + y_4) \right\|$. Suponha por um momento que x_4 e y_4 tenham norma menor que 1. Então, existem dois segmentos de reta fechados de tamanho ϵ sobre a reta que passa por x_4 e y_4 tal que cada segmento tem um extremo em S_X e o outro extremo em $\overset{o}{B}_X$. Como $\frac{1}{2}(x_4 + y_4)$ é uma combinação convexa dos pontos médios destes dois segmentos, o ponto médio de pelo menos um destes segmentos tem norma pelo menos $\left\|\frac{1}{2}(x_4+y_4)\right\|$. Portanto, podemos supor que $x_4 \in S_X$. Pelo Lema 2.2.2, existem x_5, y_5 em S_X tais que $x_5 - y_5 = x_4 - y_4$ e

$$\left\|\frac{1}{2}(x_4+y_4)\right\| \leq \left\|\frac{1}{2}(x_5+y_5)\right\| .$$

Logo, $\|x_5 - y_5\| = \|x_4 - y_4\| = \epsilon$ e, assim,

$$\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x_5-y_5)\right\| \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x_4-y_4)\right\| .$$

Afirmação 5: $\delta_X(\epsilon) = \delta_2(\epsilon)$ quando $0 \leq \epsilon \leq 2$. Como

$$\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x-y\| = \epsilon\right\}$$

está contido em

$$\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \ ; \ x, y \in S_X \ , \ \|x-y\| \geq \epsilon\right\} ,$$

basta mostrar que $\delta_2(\epsilon) \leq \delta_X(\epsilon)$ quando $0 \leq \epsilon \leq 2$. É claro para $\epsilon = 0$. Fixemos então $0 < \epsilon \leq 2$ e $x_6, y_6 \in S_X$ tais que $\|x_6 - y_6\| \geq \epsilon$. É suficiente mostrar que $\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x_6+y_6)\right\|$. O segmento de reta fechado com extremos x_6 e y_6 contém um segmento de reta fechado de tamanho ϵ centrado em $\frac{1}{2}(x_6+y_6)$ e, pelo mesmo argumento da afirmação 4, obtemos $x_7, y_7 \in S_X$ tais que $\|x_7 - y_7\| = \|x_6 - y_6\| \geq \epsilon$ e

$$\left\|\frac{1}{2}(x_7+y_7)\right\| \geq \left\|\frac{1}{2}(x_6+y_6)\right\| .$$

Portanto,

$$\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x_7+y_7)\right\| \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x_6+y_6)\right\| .$$

Isto conclui a demonstração do teorema. □

Assim como ocorre com a convexidade estrita, a convexidade uniforme não é preservada por isomorfismos; vejamos isto:

Exemplo 2.2.5. O espaço ℓ_2^2 é uniformemente convexo e é isomorfo a ℓ_1^2, que não é sequer estritamente convexo.

O máximo que se pode garantir neste sentido é a seguinte

Proposição 2.2.6. *Todo espaço normado que é isometricamente isomorfo a um espaço normado uniformemente convexo é também uniformemente convexo.*

Demonstração: Decorre imediatamente do fato de que convexidade uniforme é uma propriedade métrica.

O próximo resultado é um "critério sequencial" para a convexidade uniforme em espaços normados.

Proposição 2.2.7. *Seja X um espaço normado. São equivalentes:*

(a) X é uniformemente convexo.

(b) Sempre que (x_n) e (y_n) são sequências em S_X tais que $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \to 1$, tem-se $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(c) Sempre que (x_n) e (y_n) são sequências em B_X tais que $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \to 1$, tem-se $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(d) Sempre que (x_n) e (y_n) são sequências em X tais que $\|x_n\|$, $\|y_n\|$ e $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|$ convergem para 1, tem-se $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Demonstração: Suponha que vale (b) e considere $(x_n), (y_n)$ sequências em X tais que $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$ e $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \to 1$. Mostraremos que $\|x_n - y_n\| \to 0$. Como $\|x_n\| \to 1$ e $\|y_n\| \to 1$, podemos assumir que $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para cada n. Daí, a desigualdade triangular reversa nos dá

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left\|\frac{1}{2}(\|x_n\|^{-1}x_n) + \|y_n\|^{-1}y_n)\right\| \\ &\geq \left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| - \left\|\frac{1}{2}(1-\|x_n\|^{-1})x_n\right\| - \left\|\frac{1}{2}(1-\|y_n\|^{-1})y_n\right\| \longrightarrow 1 \ , \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(\|x_n\|^{-1}x_n + \|y_n\|^{-1}y_n)\right\| \longrightarrow 1 \ .$$

Por (b), temos $\|\|x_n\|^{-1}x_n - \|y_n\|^{-1}y_n\| \longrightarrow 0$ e assim

$$0 \leq \|x_n - y_n\| \leq \|\|x_n\|^{-1}x_n - \|y_n\|^{-1}y_n\| + \|(1-\|x_n\|^{-1})x_n\| + \|(1-\|y_n\|^{-1}y_n)\| \longrightarrow 0 \ .$$

Logo, (b)$\Rightarrow$(d).

Agora, suponha que valha (d) e considere $(x_n), (y_n)$ sequências em B_X tais que

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1 \ .$$

Como $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \leq \frac{1}{2}(\|x_n\|+\|y_n\|)$ para cada n, $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$ e $(x_n),(y_n) \in B_X$, temos $\|x_n\| \to 1$ e $\|y_n\| \to 1$. Por (d), segue que $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$, o que mostra que (d)$\Rightarrow$(c). Como é imediato que (c)$\Rightarrow$(b), temos então (b)$\Leftrightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d).

Por fim, mostremos que vale (a)$\Leftrightarrow$(b): suponha X uniformemente convexo e considere $(x_n),(y_n)$ sequências em S_X tais que $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$ mas que $\|x_n - y_n\| \not\to 0$. Logo, existem $\epsilon > 0$ e subsequências (x_{n_j}) de (x_n) e (y_{n_j}) de (y_n) tais que $\|x_{n_j} - y_{n_j}\| \geq \epsilon$ para todo j. Daí, se δ_X é o módulo de convexidade de X, por definição de convexidade uniforme temos $\left\|\frac{1}{2}(x_{n_j}+y_{n_j})\right\| \leq 1-\delta_X(\epsilon)$ para cada j, o que é uma contradição. Isto mostra que (a)$\Rightarrow$(b).

Agora, suponha que X não é uniformemente convexo. Existe $0 < \epsilon \leq 2$ tal que $\delta_X(\epsilon) = 0$. Daí, existem sequências $(x_n),(y_n)$ em S_X tais que $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ para cada n e $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$, donde não vale (b). Isto conclui a demonstração. $\square$

O próximo teorema nos diz que uma condição necessária para que um espaço de Banach seja uniformemente convexo é ser reflexivo. Antes, recordemos um resultado que usaremos na demonstração:

Proposição 2.2.8. *Seja X um espaço normado. Se $(x_i^*)_{i\in I} \subset X^*$ é uma rede que converge para $x^* \in X^*$ na topologia fraca-estrela então*

$$\|x^*\| \leq \liminf_i \|x_i^*\| \ .$$

Demonstração: Fixe $\epsilon > 0$. Existe $x \in B_X$ tal que

$$\lim_i |x_i^*(x)| = |x^*(x)| \geq \|x^*\| - \epsilon \ .$$

Também existe $i_0 = i_0(\epsilon) \in I$ tal que $i \geq i_0 \Rightarrow \|x^*\| - 2\epsilon \leq |x_i^*(x)| \leq \|x_i^*\|$. Logo, $\|x^*\| \leq \liminf_i \|x_i^*\|$. $\square$

Teorema 2.2.9 (Milman-Pettis)**.** *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração: Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Tome $x^{**} \in S_{X^{**}}$ e considere Q a injeção canônica de X em X^{**}. Segue do Teorema de Goldstine(ver [11], pág 232, Teorema 2.6.26) que existe uma rede $(x_i)_{i\in I}$ em B_X tal que

$$(Q(x_i))_{i\in I} \xrightarrow{w^*} x^{**} \ .$$

Defina $(i_1,j_1) \leq (i_2,j_2)$ quando $i_1 \leq i_2$ e $j_1 \leq j_2$ ($i_1,i_2,j_1,j_2 \in I$). Assim,

$$\left(Q(\frac{1}{2}(x_i+x_j))\right)_{(i,j)\in I\times I}$$

é uma rede tal que

$$\left(Q(\frac{1}{2}(x_i + x_j))\right)_{(i,j)\in I\times I} \xrightarrow{w^*} x^{**} .$$

Pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} 1 &= \|x^{**}\| \leq \liminf_{(i,j)\in I\times I} \left\| Q\left(\frac{1}{2}(x_i + x_j)\right)\right\| \\ &= \liminf_{(i,j)\in I\times I} \left\|\frac{1}{2}(x_i + x_j)\right\| \leq \limsup_{(i,j)\in I\times I} \left\|\frac{1}{2}(x_i + x_j)\right\| \leq 1 , \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(x_i + x_j)\right\| \longrightarrow 1 .$$

Como X é uniformemente convexo, segue que $\|x_i - x_j\| \longrightarrow 0$, o que implica que $(x_i)_{i\in I}$ é uma rede de Cauchy. Como X é completo, existe $x_0 \in X$ tal que $(x_i)_{i\in I} \longrightarrow x_0$. Logo, $(Q(x_i))_{i\in I} \longrightarrow Q(x_0)$, donde $x^{**} = Q(x_0)$. Portanto, X é reflexivo. $\square$

Corolário 2.2.10. *Se um espaço normado X é isomorfo a um espaço de Banach uniformemente convexo, então X é reflexivo.*

Equivalentemente, temos o seguinte

Corolário 2.2.11. *Todo espaço de Banach que possui uma norma uniformemente convexa equivalente é um espaço reflexivo.*

Observação 2.2.12. Uma vez conhecido o Teorema de Milman-Pettis, vemos porque não foi tão fácil construir um exemplo de espaço de Banach não-reflexivo e estritamente convexo ($\ell_{1,r}$). Apesar de ser estritamente convexo, um exemplo deste tipo não pode ser uniformemente convexo.

Já vimos que todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio de um espaço normado estritamente convexo e reflexivo é um conjunto de Chebyshev.

Logo, temos como consequência imediata do Teorema de Milman-Pettis o seguinte

Corolário 2.2.13. *Todo subconjunto convexo, fechado e não-vazio de um espaço de Banach uniformemente convexo é um conjunto de Chebyshev.*

Mostremos agora que os espaços normados uniformemente convexos possuem uma propriedade importante conhecida como propriedade de Radon-Riesz.

Primeiro, recordemos a definição desta propriedade:

Definição 2.2.14. Dizemos que um espaço normado X tem a *propriedade de Radon-Riesz* quando sempre que (x_n) é uma sequência em X e $x \in X$ são tais que $x_n \xrightarrow{w} x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$ tem-se $x_n \to x$.

Teorema 2.2.15. *Todo espaço normado uniformemente convexo tem a propriedade de Radon-Riesz.*

Demonstração: Sejam X um espaço normado uniformemente convexo, $(x_n) \subset X$ uma sequência e $x \in X$ tais que $x_n \xrightarrow{w} x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$. Mostraremos que $x_n \to x$. Claramente podemos supor que $x \neq 0$. Daí, podemos supor também que $x_n \neq 0$ para todo n. Como

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} \frac{x}{\|x\|}$$

e é suficiente provar que

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \longrightarrow \frac{x}{\|x\|} \ ,$$

podemos supor que x e cada x_n estão em S_X. Como $\frac{1}{2}(x_n + x) \xrightarrow{w} x$, temos

$$\|x\| = 1 \leq \liminf \left\| \frac{1}{2}(x_n + x) \right\| \leq \limsup \left\| \frac{1}{2}(x_n + x) \right\| \leq 1$$

e assim,

$$\left\| \frac{1}{2}(x_n + x) \right\| \longrightarrow 1 \ .$$

Logo,

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

pelo critério sequencial de convexidade uniforme. □

O teorema anterior juntamente com o Teorema de Clarkson nos dão o seguinte

Corolário 2.2.16. *Se μ é uma medida positiva sobre uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de um conjunto $\Omega \neq \varnothing$ e $1 < p < \infty$, então $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ tem a propriedade de Radon-Riesz.*

Observação 2.2.17. O corolário acima foi provado por Radon e por Riesz uma década antes de Clarkson ter introduzido o conceito de convexidade uniforme.

Para finalizar este capítulo, discutiremos a convexidade uniforme de subespaços, bem como a de quocientes e somas direta.

Proposição 2.2.18. *Todo subespaço de um espaço normado uniformemente convexo é uniformemente convexo.*

Demonstração: Sejam X um espaço normado uniformemente convexo e $M \subset X$ um subespaço. Pela definição dos módulos de convexidade de M e de X, segue diretamente que $\delta_M(\epsilon) \geq \delta_X(\epsilon)$, $0 \leq \epsilon \leq 2$. Logo, como X é uniformemente convexo, temos $\delta_X(\epsilon) > 0$ sempre que $0 < \epsilon \leq 2$. Daí, $\delta_M(\epsilon) > 0$ sempre que $0 < \epsilon \leq 2$, donde M é uniformemente convexo por definição. □

Para o resultado correspondente para quocientes, precisaremos de uma

Proposição 2.2.19. *Seja M um subespaço fechado de um espaço normado X.*

(a) Se $x \in X$ então $\|x\| \geq \|x + M\|$;

(b) Se $x \in X$ e $\epsilon > 0$ são dados, então existe $x' \in X$ tal que $x' + M = x + M$ e $\|x'\| < \|x + M\| + \epsilon$.

Demonstração: (a) Como $0 \in M$, temos $\|x\| = \|x - 0\| \geq d(x, M) = \|x + M\|$ para cada $x \in X$.

(b) Fixe $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Pela definição da norma quociente, existe $y \in M$ tal que $\|x - y\| < \|x + M\| + \epsilon$. Logo, pondo $x' = x - y$, segue (b). □

Teorema 2.2.20. *Se M é um subespaço fechado de um espaço normado uniformemente convexo X, então X/M é uniformemente convexo.*

Demonstração: Sejam $(x_n + M), (y_n + M)$ sequências em $S_{X/M}$ tais que

$$\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) + M \right\| \longrightarrow 1 \ .$$

Pelo critério sequencial de convexidade uniforme, basta mostrar que $\|(x_n - y_n) + M\| \longrightarrow 0$. Pela proposição anterior, para cada n existem x'_n, y'_n em X tais que

$$1 = \|x_n + M\| = \|x'_n + M\| \leq \|x'_n\| < \|x_n + M\| + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

e

$$1 = \|y_n + M\| = \|y'_n + M\| \leq \|y'_n\| < \|y_n + M\| + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \ .$$

Daí, $\|x'_n\| \to 1$ e $\|y'_n\| \to 1$. Como

$$\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) + M \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x'_n + y'_n) + M \right\| \leq \left\| \frac{1}{2}(x'_n + y'_n) \right\| \leq \frac{1}{2}(\|x'_n\| + \|y'_n\|) \ ,$$

temos que

$$\left\| \frac{1}{2}(x'_n + y'_n) \right\| \longrightarrow 1 \ ,$$

donde $\|x'_n - y'_n\| \longrightarrow 0$ (pelo critério sequencial de convexidade uniforme). Logo,

$$\|(x_n - y_n) + M\| = \|(x'_n - y'_n) + M\| \leq \|x'_n - y'_n\| \longrightarrow 0 \ .$$

□

Vejamos o resultado correspondente para somas diretas:

Teorema 2.2.21. *Sejam $X_1, ..., X_n$ espaços normados. Então, $X_1 \oplus ... \oplus X_n$ é uniformemente convexo se e somente se cada X_j é uniformemente convexo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha $X_1 \oplus ... \oplus X_n$ uniformemente convexo. Como cada X_j é isometricamente isomorfo a um subespaço de $X_1 \oplus ... \oplus X_n$, segue que cada X_j é uniformemente convexo.

($\Leftarrow$) Suponha agora que cada X_j seja uniformemente convexo. Fixe $\epsilon > 0$ e considere $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in S_{X_1 \oplus ... \oplus X_n}$ tais que $\|(x_1, ..., x_n) - (y_1, ..., y_n)\| \geq \epsilon$. Seja

$$A = \left\{ j \in \{1, ..., n\} \ ; \ \|x_j - y_j\|^2 \geq \frac{\epsilon^2}{4}(\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2) \right\} .$$

Note que $A \neq \varnothing$ pois do contrário, teríamos $\|x_j - y_j\|^2 < \dfrac{\epsilon^2}{4}(\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Somando em j, obteríamos

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j - y_j\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4} \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^2 \right) = \frac{\epsilon^2}{4}(1+1) = \frac{\epsilon^2}{2} ,$$

donde $\|(x_1, ..., x_n) - (y_1, ..., y_n)\| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, o que iria contradizer a nossa escolha. Observe também que $\|x_j - y_j\| \geq \dfrac{\epsilon}{2} \max\{\|x_j\|, \|y_j\|\}$ para cada $j \in A$. Seja $\lambda(t) = \min\{\delta_{X_1}(t), ..., \delta_{X_n}(t)\} \quad (0 < t \leq 2)$. Para $t = \dfrac{\epsilon}{2}$, considere a constante $\gamma_{2, \frac{\epsilon}{2}, \lambda}$ dada pelo Lema 2.1.7. Temos então

$$\left\| \frac{1}{2}(x_j + y_j) \right\|^2 \leq \left(1 - \gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\right) \left(\frac{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2}{2} \right)$$

sempre que $j \in A$ e

$$\left\| \frac{1}{2}(x_j + y_j) \right\|^2 \leq \frac{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2}{2}$$

para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Daí,

$$\begin{aligned} 1 - \left\| \frac{1}{2}((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)) \right\|^2 &= 1 - \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{1}{2}(x_j + y_j) \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2}{2} - \left\| \frac{1}{2}(x_j + y_j) \right\|^2 \\ &\geq \sum_{j \in A} \frac{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2}{2} - \left\| \frac{1}{2}(x_j + y_j) \right\|^2 \\ &\geq \gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda} \sum_{j \in A} \frac{\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2}{2} . \end{aligned}$$

Além disso, se $B = \{1, ..., n\} \backslash A$ então

$$\begin{aligned} \sum_{j \in A} \|x_j - y_j\|^2 &= \|(x_1, ..., x_n) - (y_1, ..., y_n)\|^2 - \sum_{j \in B} \|x_j - y_j\|^2 \\ &\geq \epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{j \in B} (\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2) \\ &\geq \epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{j=1}^{n} (\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2) = \epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{\epsilon^2}{2} . \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\sum_{j\in A}\|x_j-y_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\ .$$

Daí,

$$\max\left\{\left(\sum_{j\in A}\|x_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}},\left(\sum_{j\in A}\|y_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\geq\frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}\ .$$

Portanto,

$$1-\left\|\frac{1}{2}((x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n))\right\|^2\geq\gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\sum_{j\in A}\frac{\|x_j\|^2+\|y_j\|^2}{2}\geq\gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\frac{\epsilon^2}{16}$$

e assim,

$$\left\|\frac{1}{2}((x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n))\right\|\leq\left(1-\gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\frac{\epsilon^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}<1\ .$$

Isto mostra que $X_1\oplus...\oplus X_n$ é uniformemente convexo. $\square$

Observação 2.2.22. O Exemplo 2.1.6 mostra que o resultado acima pode ser falso se considerarmos somas diretas infinitas.

Capítulo 3

O Teorema de Enflo

3.1 Árvores em Espaços de Banach

Definição 3.1.1. Seja X um espaço de Banach. Dados um número real $\epsilon > 0$ e um número inteiro $n \geq 1$, uma (n, ϵ)-*árvore* em X é um conjunto da forma

$$T_n = \{x_0\} \cup \{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k}; 1 \leq k \leq n, \epsilon_i = \pm 1\}$$

tal que:

(1) $x_0 = \dfrac{x_{-1} + x_{+1}}{2}$ e $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k} = \dfrac{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,-1} + x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,+1}}{2}$, sempre que $1 \leq k \leq n-1$;

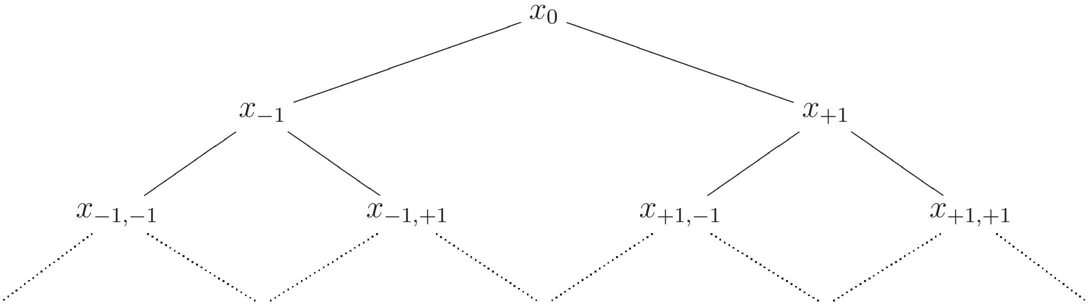
(2) $\|x_{-1} - x_{+1}\| \geq \epsilon$ e $\|x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,-1} - x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,+1}\| \geq \epsilon$, sempre que $1 \leq k \leq n-1$.

Uma (∞, ϵ)-*árvore* em X é um conjunto da forma

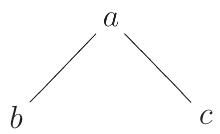
$$T_\infty = \{x_0\} \cup \{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k}; k \geq 1, \epsilon_i = \pm 1\}$$

tal que as condições (1) e (2) acima se verificam para todo $k \geq 1$.

Podemos visualizar tais árvores da seguinte maneira:



O ponto x_0 é dito a *raiz* da árvore e de cada vértice a saem exatamente dois ramos conduzindo a dois vértices b e c:



A condição (1) nos diz que a é o ponto médio do segmento de reta que liga b a c, enquanto a condição (2) nos diz que este segmento de reta tem comprimento maior ou igual a ϵ. Dizemos que (x_0) é a 0-*parte da árvore*, (x_{-1}, x_{+1}) é a 1-*parte da árvore*, $(x_{-1,-1}, x_{-1,+1}, x_{+1,-1}, x_{+1,+1})$ é a 2-*parte da árvore*, e assim por diante. Em geral, para $k \geq 1$, a k-*parte da árvore* é uma sequência de 2^k elementos obtida ordenando-se os 2^k elementos do conjunto $\{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k}; \epsilon_i = \pm 1\}$ na ordem lexicográfica de seus índices. Em situações em que estamos especialmente interessados em uma certa k-parte de uma árvore é comum usarmos uma indexação linear, denotando a k-parte da árvore por

$$(a_1, a_2, ..., a_{2^k}) \ ,$$

por exemplo. Com esta notação, decorre da propriedade (1) que

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, ..., \frac{a_{2^k-1} + a_{2^k}}{2}\right)$$

é exatamente a $(k-1)$-parte da árvore.

Exemplo 3.1.2. No espaço ℓ_∞^n, o conjunto

$$T_n = \{(0, 0, ..., 0)\} \cup \{(\epsilon_1, ..., \epsilon_k, 0, 0, ..., 0); 1 \leq k \leq n, \epsilon_i = \pm 1\}$$

é uma $(n, 2)$-árvore, que está contida na bola $B_{\ell_\infty^n}$. Já no espaço ℓ_∞, o conjunto

$$T_\infty = \{(0, 0, ...)\} \cup \{(\epsilon_1, ..., \epsilon_k, 0, 0, ...); k \geq 1, \epsilon_i = \pm 1\}$$

é uma $(\infty, 2)$-árvore contida na bola B_{ℓ_∞}.

Definição 3.1.3. Dizemos que um espaço de Banach X possui a *Propriedade da Árvore Finita* (P.A.F.) se, para algum $0 < \epsilon \leq 2$, existe uma (n, ϵ)-árvore T_n contida em B_X, para cada $n \geq 1$.

Definição 3.1.4. Dizemos que um espaço de Banach X possui a *Propriedade da Árvore Infinita* (P.A.I.) se, para algum $0 < \epsilon \leq 2$, existe uma (∞, ϵ)-árvore T_∞ contida em B_X.

Pelo que vimos no Exemplo 3.1.2, ℓ_∞ é um exemplo de um espaço de Banach que tem a P.A.I. Veremos no que se segue que nenhum espaço de Banach reflexivo tem a P.A.I. Todavia, é possível que um espaço de Banach reflexivo tenha a P.A.F., como nos mostra o seguinte

Exemplo 3.1.5. Consideremos o espaço de Banach

$$X = \left(\sum_n \ell_\infty^n\right)_2 \ .$$

Como cada ℓ_∞^n é reflexivo, segue do Lema 1.2.14 que X é reflexivo. Como X contém uma cópia isométrica de cada ℓ_∞^n e como $B_{\ell_\infty^n}$ contém uma $(n, 2)$-árvore (Exemplo 3.1.2), vemos que B_X contém uma $(n, 2)$-árvore, para cada $n \geq 1$. Portanto, X tem a P.A.F.

Agora, observamos o seguinte fato:

Proposição 3.1.6. *As propriedades de árvore são invariantes por isomorfismos (não necessariamente isométricos).*

Demonstração: Suponha que $f : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo de um espaço de Banach X sobre um espaço de Banach Y. Então existem constantes positivas c e C tais que

$$c\|x\| \leq \|f(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Daí, vemos que f transforma uma (n, ϵ)-árvore em B_X numa $(n, c\epsilon)$-árvore em CB_Y; multiplicando esta última árvore por C^{-1}, a transformamos numa $\left(n, \dfrac{c\epsilon}{C}\right)$-árvore em B_Y.

Analogamente, f^{-1} transforma uma (n, ϵ)-árvore em B_Y numa $\left(n, \dfrac{\epsilon}{C}\right)$-árvore em $c^{-1}B_X$; multiplicando esta última árvore por c, a transformamos numa $\left(n, \dfrac{c\epsilon}{C}\right)$-árvore em B_X. O mesmo vale com (∞, ϵ)-árvores. Isto prova a proposição. $\square$

A fim de provarmos que nenhum espaço de Banach reflexivo tem a P.A.I., precisaremos de dois resultados auxiliares.

Proposição 3.1.7. *Sejam K um subconjunto convexo e compacto de um espaço localmente convexo X e U um subconjunto compacto de K. São equivalentes:*

(a) $K = \overline{co}(U)$;

(b) $E(K) \subset U$.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$: O teorema de Milman(ver [12], pág 76 ,Teorema 3.25) garante que se F é um conjunto compacto num espaço localmente convexo X e $\overline{co}(F)$ também é compacto, então todo ponto extremal de $\overline{co}(F)$ está em F, ou seja, $E(\overline{co}(F)) \subset F$. Logo, pondo $F = U$, segue de (a) que $E(K) \subset U$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Pelo Teorema de Krein-Milman (ver [12], pág 75,Teorema 3.23) e por (b), $K = \overline{co}(E(K)) \subset \overline{co}(U) \subset K$, donde $K = \overline{co}(U)$. $\square$

O próximo lema é devido a Asplund e Namioka.

Lema 3.1.8. *Seja K um subconjunto convexo, separável e w-compacto(fraco-compacto) num espaço de Banach X. Para cada $\epsilon > 0$, existe um subconjunto convexo e fechado C de K, distinto de K, tal que diam$(K \backslash C) < \epsilon$, isto é, $\sup\limits_{x,y \in K \backslash C} \|x - y\| < \epsilon$.*

Demonstração: Ponha $D = \overline{E(K)}^{w}$. Como $D \subset K$ e K é w-compacto, segue que D também é w-compacto, donde é um espaço de Baire na topologia fraca. Fixe $\epsilon > 0$. Como K é separável, K pode ser coberto por uma família contável de bolas fechadas (B_n) de raio $\dfrac{\epsilon}{3}$. Note que cada B_n também é w-fechado. Como $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B_n \cap D)$ e $B_n \cap D$

é w-fechado para cada $n \geq 1$, o teorema de Baire garante que existe $n_0 \geq 1$ tal que $(B_{n_0} \cap D)$ tem interior não-vazio relativo a D munido da topologia fraca. Logo, existe um conjunto w-aberto O tal que $\varnothing \neq O \cap D \subset B_{n_0} \cap D$. Ponha $U = D \backslash O$, que é um conjunto w-compacto. Agora, colocando $K_1 = \overline{co}(U)$, temos que $K_1 \neq D$. De fato, se tivéssemos $\overline{co}(U) = D = \overline{E(K)}^w$, então a proposição anterior garantiria que $E(K) = E(E(K)) \subset E(\overline{E(K)}^w) \subset U$, o que não é possível já que O é w-aberto e $O \cap \overline{E(K)}^w \neq \varnothing$ (donde $O \cap E(K) \neq \varnothing$). Além disso, observe que $E(K) \nsubseteq K_1$ pois caso contrário, teríamos pelo Teorema de Krein-Milman que $K = \overline{co}(E(K)) \subset \overline{co}(K_1) = K_1$, o que seria uma contradição. Fixemos então $x_0 \in E(K) - K_1$. Note que não podemos tomar K_1 como sendo o C da conclusão do Lema pois não há garantias de que o diâmetro de $K \backslash K_1$ seja pequeno. Ponha agora $K_2 = \overline{co}(O \cap D)$. Afirmamos que $K = co(K_1 \cup K_2)$. De fato, como K é convexo e contém $K_1 \cup K_2$, temos que $co(K_1 \cup K_2) \subset K$. Por outro lado, como K_1 e K_2 são convexos e compactos, segue que $co(K_1 \cup K_2)$ é compacto (ver [12], pág 72, Teorema 3.20 (a)). Logo, como $E(K) \subset D \subset K_1 \cup K_2$, temos $K = \overline{co}(E(K)) \subset co(K_1 \cup K_2)$. Isto prova a afirmação. Consequentemente, todo ponto $k \in K$ tem uma decomposição

(1) $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$; $0 \leq \lambda \leq 1$, $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$.

Definimos A_r como o conjunto dos pontos de K que admitem uma decomposição da forma (1) para algum $\lambda \geq r$ $(0 < r \leq 1)$. Mostraremos que se r é suficientemente pequeno então podemos escolher A_r para o papel do C procurado. Para tal:

(a) A_r é fechado: Seja (k_n) uma sequência de pontos em A_r convergindo para um elemento $k \in K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $k_n = \lambda_n k_{1,n} + (1-\lambda_n)k_{2,n}$ a decomposição (1) de k_n. Como K_1 e K_2 são w-compactos, existe uma sequência estritamente crescente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturais para a qual existem $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ e $\lambda \in [0,1]$ tais que $k_{1,n_j} \longrightarrow k_1$, $k_{2,n_j} \longrightarrow k_2$ e $\lambda_{n_j} \longrightarrow \lambda$. Logo, fazendo $j \to \infty$, vemos que $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$ com $\lambda \geq r$, donde $k \in A_r$.

(b) A_r é convexo: Se $k, k' \in A_r$, então $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$ e $k' = \lambda' k_1' + (1-\lambda')k_2'$ com $\lambda, \lambda' \geq r$, $k_1, k_1' \in K_1$ e $k_2, k_2' \in K_2$. Logo,

$$\frac{k+k'}{2} = \left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)\frac{\lambda k_1 + \lambda' k_1'}{\lambda+\lambda'} + \left(1 - \frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)\frac{(1-\lambda)k_2 + (1-\lambda')k_2'}{(1-\lambda)+(1-\lambda')} \in A_r \ ,$$

já que $\dfrac{\lambda+\lambda'}{2} \geq r$, $\dfrac{\lambda k_1 + \lambda' k_1'}{\lambda+\lambda'} \in K_1$ e $\dfrac{(1-\lambda)k_2 + (1-\lambda')k_2'}{(1-\lambda)+(1-\lambda')} \in K_2$. Como A_r é fechado, isto prova que A_r é convexo.

(c) A_r não é igual a K: Como $x_0 \in E(K) \subset K_1 \cup K_2$ e $x_0 \notin K_1$, temos que $x_0 \in K_2$. Como $x_0 \in E(K)$ e $K_1 \cup K_2 \subset K$, a única decomposição de x_0 na forma (1) é $x_0 = 0.k_1 + 1.x_0$ ($k_1 \in K_1$ qualquer). Logo, $x_0 \notin A_r$ para todo $0 < r \leq 1$.

(d) Se $M = \sup\{\|x\|; x \in K\}$, então $diam(K\backslash A_r) < \epsilon$ se $0 < r \leq \dfrac{\epsilon}{9M}$: Primeiro, observe que como $K_2 = \overline{co}(O \cap D)$, segue que $K_2 \subset B_{n_0}$ (pois $O \cap D \subset B_{n_0} \cap D \subset B_{n_0}$). Logo, $diam(K_2) \leq \dfrac{2\epsilon}{3}$. Agora, sejam $k, k' \in K\backslash A_r$ e considere as suas respectivas decomposições $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$ e $k' = \lambda' k_1' + (1-\lambda')k_2'$, com $\lambda < r$ e $\lambda' < r$, $k_1, k_1' \in K_1$ e $k_2, k_2' \in K_2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|k - k'\| &= \|\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 - \lambda' k_1' - (1-\lambda')k_2'\| \\
&= \|\lambda k_1 - \lambda' k_1' + (1-\lambda)(k_2 - k_2') + (\lambda' - \lambda)k_2'\| \\
&\leq \lambda\|k_1\| + \lambda'\|k_1'\| + (1-\lambda)\|k_2 - k_2'\| + |\lambda' - \lambda|\|k_2'\| \\
&\leq 3rM + \frac{2\epsilon}{3} \leq \epsilon \, .
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do Lema. □

Podemos agora mostrar o

Teorema 3.1.9. *Se X é um espaço de Banach reflexivo então X não tem a P.A.I.*

Demonstração: Para obter uma contradição, assuma que X possua a P.A.I, ou seja, que exista uma (∞, ϵ_0)-árvore T contida em B_X. Seja $K = \overline{co}(T)$. Note que K é separável, já que T é contável, de modo que as combinações convexas de elementos de T com coeficientes possuindo partes reais e imaginárias racionais formam um subconjunto contável e denso em K. Como X é reflexivo, B_X é w-compacta e, portanto, K satisfaz as hipóteses do lema anterior. Seja $\epsilon = \dfrac{\epsilon_0}{3}$ e seja C o conjunto convexo e fechado dado pelo lema anterior. O conjunto $K\backslash C$ deve conter algum ponto da árvore pois do contrário, a árvore inteira estaria contida em C, donde $K = C$, o que não é possível pois o lema garante que $C \neq K$. Considere então $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ um ponto da árvore que pertence a $K\backslash C$. Agora, como $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \dfrac{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,-1} + x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,+1}}{2}$ com $\|x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} - x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,-1}\| \geq \dfrac{\epsilon_0}{2}$, $\|x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} - x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,+1}\| \geq \dfrac{\epsilon_0}{2}$ e $diam(K\backslash C) < \epsilon$, segue que $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,-1}$ e $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,+1}$ não podem estar em $K\backslash C$. Logo, ambos estão em C. Como C é convexo, seu ponto médio $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ também está em C, o que não é possível. Esta contradição conclui a demonstração do teorema. □

Vejamos agora que nenhum espaço uniformemente convexo tem a P.A.F.

Teorema 3.1.10. *Se um espaço de Banach X é uniformemente convexo, então X não tem a P.A.F.*

Demonstração: Suponha que X tem a P.A.F, isto é, que para um certo $0 < \epsilon \leq 2$, existe uma (n, ϵ)-árvore contida em B_X para cada $n \geq 1$. Como X é uniformemente convexo, existe $\delta > 0$ tal que

(1) $x, y \in B_X$ e $\|x - y\| \geq \epsilon \Rightarrow \left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$

Afirmamos que

$$(2)\ \ x,y\in B_X \ \text{ e } \ \|x-y\|\geq\epsilon\Rightarrow\|x\|\geq\frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \quad \text{ou} \quad \|y\|\geq\frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|.$$

De fato, fixe x, y como em (2). É claro que podemos supor que $\dfrac{1}{1-\delta}\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| > 0$. Suponha, por absurdo, que

$$\|x\| < \frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \ \text{ e } \ \|y\| < \frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| .$$

Ponha $c = \max\{\|x\|, \|y\|\} \in (0,1]$. Então, $\dfrac{x}{c}, \dfrac{y}{c} \in B_X$ e $\left\|\dfrac{x}{c} - \dfrac{y}{c}\right\| \geq \dfrac{\epsilon}{c} \geq \epsilon$. Logo, por (1), $\left\|\dfrac{\frac{x}{c}+\frac{y}{c}}{2}\right\| \leq 1-\delta$, donde $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leq (1-\delta)c < (1-\delta)\dfrac{1}{(1-\delta)}\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|$, uma contradição. Isto prova (2). Seja agora $n \geq 1$ um inteiro tal que

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{n-1}\epsilon > 2$$

e considere uma (n,ϵ)-árvore T_n contida em B_X. Pelo menos um dos dois vetores da 1-parte de T_n tem norma $\geq \dfrac{\epsilon}{2}$, já que a distância entre eles é $\geq \epsilon$; seja x_1 um tal vetor. Na 2-parte de T_n existem dois vetores que distam um do outro pelo menos ϵ e cujo ponto médio é x_1. Por (2), pelo menos um desses vetores tem norma $\geq \dfrac{1}{(1-\delta)}\dfrac{\epsilon}{2}$; seja x_2 um tal vetor. Da mesma forma, a 3-parte de T_n contém um vetor x_3 com norma $\geq \left(\dfrac{1}{1-\delta}\right)^2\dfrac{\epsilon}{2}$. Continuando este processo, obtemos um vetor x_n na n-parte de T_n com norma $\geq \left(\dfrac{1}{1-\delta}\right)^{n-1}\dfrac{\epsilon}{2} > 1$, uma contradição.

3.2 O Teorema de Enflo

Vamos agora apresentar o resultado central desta dissertação.

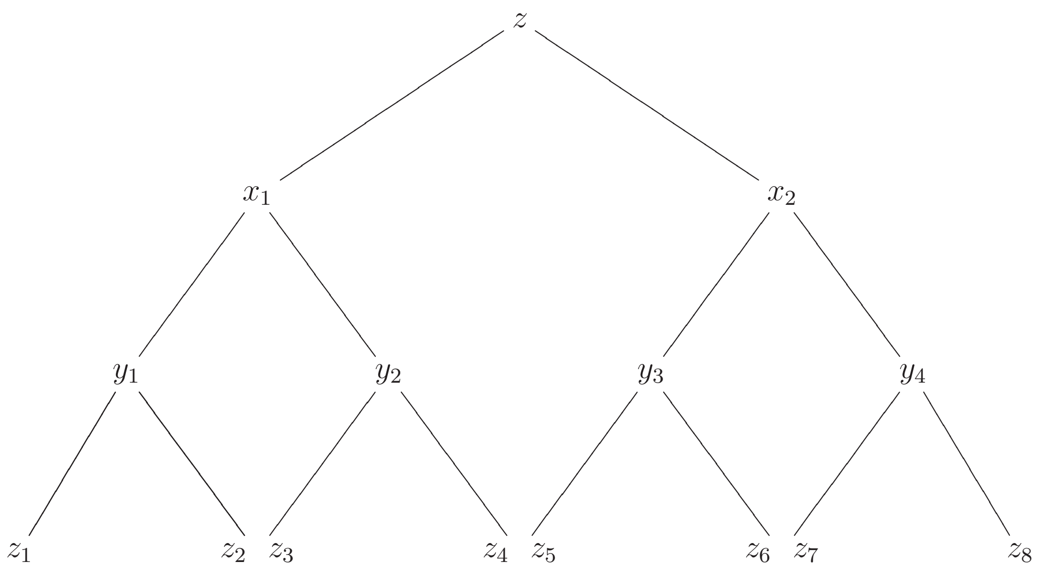
Teorema 3.2.1 (Enflo)**.** *Um espaço de Banach X admite uma norma uniformemente convexa equivalente se e somente se X não tem a Propriedade da Árvore Finita (P.A.F.).*

A necessidade da condição decorre da Proposição 3.1.6 e do Teorema 3.1.10. A demonstração da suficiência baseia-se em cinco lemas, que apresentaremos a seguir. Antes, precisaremos da seguinte

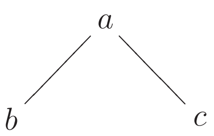
Definição 3.2.2. Sejam X um espaço de Banach, $z \in X$ e $\epsilon > 0$. Um par ordenado (x_1, x_2) é uma $(1,\epsilon)$-*partição* de z se $x_1 + x_2 = z$, $\|x_1\| = \|x_2\|$ e $\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\| \geq \epsilon$. Tendo definido uma (n,ϵ)-*partição* de z, dizemos que a 2^{n+1}-upla $(x_1, x_2, ..., x_{2^{n+1}})$ é uma $(n+1,\epsilon)$-*partição* de z se $\|x_{2j-1}\| = \|x_{2j}\|$, $\left\|\frac{x_{2j-1}}{\|x_{2j-1}\|} - \frac{x_{2j}}{\|x_{2j}\|}\right\| \geq \epsilon$, para cada $1 \leq j \leq 2^n$, e a 2^n-upla $(x_1+x_2, x_3+x_4, ..., x_{2^{n+1}-1}+x_{2^{n+1}})$ é uma (n,ϵ)-partição de z. Se $(x_1, x_2, ..., x_{2^n})$

é uma (n,ϵ)-partição de z, então para todo $1 \leq k \leq n$, temos que a (k,ϵ)-partição de z dada por $(x_1 + x_2 + ... + x_{2^{n-k}}, x_{2^{n-k}+1} + x_{2^{n-k}+2} + ... + x_{2^{n-k+1}}, ..., x_{2^n - 2^{n-k+1}+1} + ... + x_{2^n - 2^{n-k}}, x_{2^n - 2^{n-k}+1} + ... + x_{2^n})$ é dita a *k-parte* da (n,ϵ)-partição $(x_1, x_2, ..., x_{2^n})$. Por simplicidade, dizemos que (z) é uma $(0,\epsilon)$-*partição* de z.

Podemos visualizar uma (n,ϵ)-partição de z juntamente com suas k-partes através de uma estrutura de árvore. Por exemplo, abaixo indicamos uma $(3,\epsilon)$-partição $(z_1, ..., z_8)$ de z, juntamente com a sua 2-parte $(y_1, ..., y_4)$, a sua 1-parte (x_1, x_2) e a sua 0-parte (z).



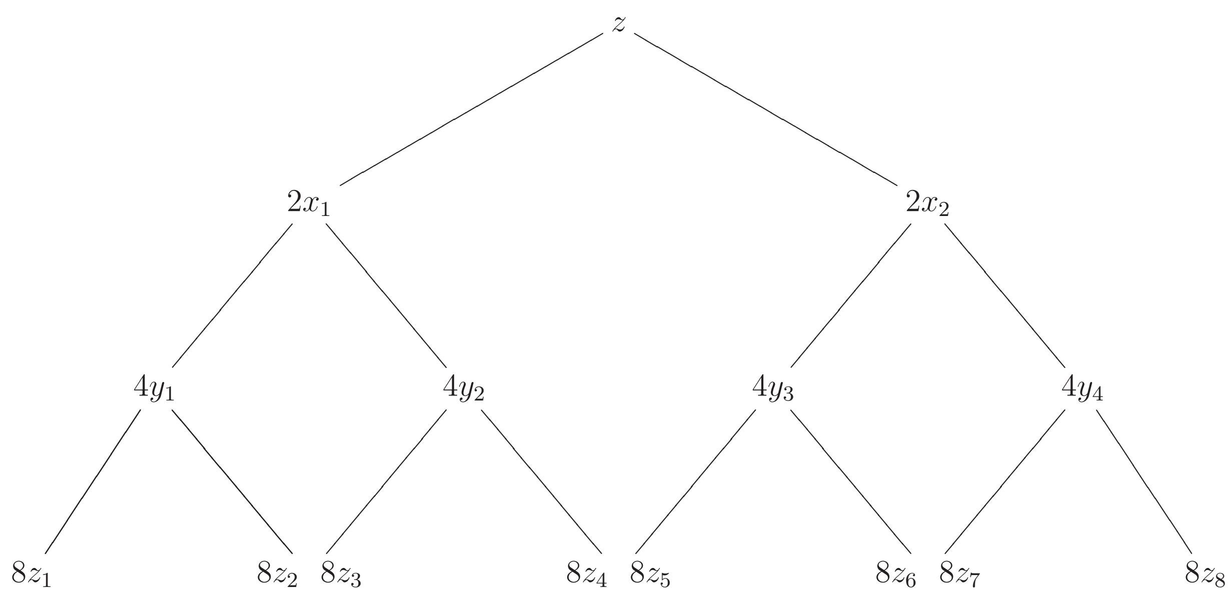
Para cada pedaço dessa árvore da forma



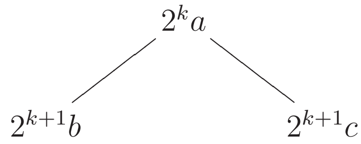
temos que $a = b + c$, $\|b\| = \|c\|$ e $\left\| \dfrac{b}{\|b\|} - \dfrac{c}{\|c\|} \right\| \geq \epsilon$. Em particular,

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \\ &= (y_1 + y_2) + (y_3 + y_4) \\ &= ((z_1 + z_2) + (z_3 + z_4)) + ((z_5 + z_6) + (z_7 + z_8)) \ . \end{aligned}$$

Observação 3.2.3. Suponha $\|z\| = 1$. Um fato importante que usaremos no primeiro lema é como uma (n,ϵ)-partição $(x_1, x_2, ..., x_{2^n})$ de z produz uma (n,ϵ)-árvore. Para tal, basta multiplicarmos cada k-parte da (n,ϵ)-partição $(x_1, x_2, ..., x_{2^n})$ por 2^k $(0 \leq k \leq n)$. Na visualização das partições dada anteriormente, podemos obter uma $(3,\epsilon)$-árvore da seguinte maneira



Para provarmos que este procedimento realmente produz uma (n, ϵ)-árvore, consideremos um pedaço dessa árvore da forma



Como $a = b + c$, vemos que $2^k a$ é o ponto médio do segmento de reta que liga $2^{k+1}b$ a $2^{k+1}c$, o que estabelece a condição (1) de (n, ϵ)-árvore (Definição 3.1.1.). Verifiquemos a condição (2) de (n, ϵ)-árvore. Suponhamos, por indução, que $\|a\| \geq \dfrac{1}{2^k}$(note que isto é verdade se $k = 0$ pois então $a = z$ e $\|z\| = 1$). Então,

$$\frac{1}{2^k} \leq \|a\| = \|b + c\| \leq \|b\| + \|c\| = 2\|b\| = 2\|c\| \ ,$$

donde

$$\|b\| = \|c\| \geq \frac{1}{2^{k+1}} \ .$$

Daí,

$$\epsilon \leq \left\| \frac{b}{\|b\|} - \frac{c}{\|c\|} \right\| = \frac{1}{\|b\|}\|b - c\| \leq 2^{k+1}\|b - c\| = \|2^{k+1}b - 2^{k+1}c\| \ ,$$

provando que o segmento de reta que liga $2^{k+1}b$ a $2^{k+1}c$ tem comprimento maior ou igual a ϵ.

O primeiro lema nos diz que se X é um espaço de Banach sem a P.A.F., então sua norma original satisfaz uma desigualdade triangular "uniformemente mais forte", válida para vetores que formam partições. A idéia é relacionar partições e partes de árvore.

Este é o começo da construção da norma uniformemente convexa equivalente procurada e, observe que é um início "coerente", já que a principal característica de tal norma é também uma desigualdade triangular "uniformemente mais forte", válida para vetores da esfera unitária. Vejamos então o significado preciso de tais fatos:

Lema 3.2.4. *Se um espaço de Banach X não tem a P.A.F. então, para cada $\epsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que se $z \in X$ e $(x_1, x_2, ..., x_{2^n})$ é uma (n, ϵ)-partição de z, então*

$$\sum_{j=1}^{2^n} \|x_j\| \geq (1+\delta)\|z\| \ .$$

Demonstração: Assuma que o resultado é válido para cada $z \in S_X$. Seja $(y_1, ..., y_{2^n})$ uma (n, ϵ)-partição de $y \in X \backslash \{0\}$. Então, $\left(\frac{y_1}{\|y\|}, ..., \frac{y_{2^n}}{\|y\|}\right)$ é uma (n, ϵ)-partição de $z = \dfrac{y}{\|y\|} \in S_X$. Pela hipótese,

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left\| \frac{y_j}{\|y\|} \right\| \geq (1+\delta) \ , \text{ ou seja, } \sum_{j=1}^{2^n} \|y_j\| \geq (1+\delta)\|y\| \ .$$

Assim, podemos supor $\|z\| = 1$.

Afirmamos que existem $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que toda (n, ϵ)-árvore em X possui um vetor de norma $\geq 1 + 2^n\delta$. De fato, suponhamos que isto é falso. Fixemos $0 < \epsilon' < \epsilon$. Como X não tem a P.A.F. , existe $n \in \mathbb{N}$ para o qual não existe uma (n, ϵ')-árvore contida em B_X. Seja $\delta = \dfrac{\epsilon - \epsilon'}{2^n \epsilon'} > 0$. Como estamos negando a afirmação, para este n e este δ, existe uma (n, ϵ)-árvore T contida em $(1 + 2^n\delta)B_X$. Multiplicando esta árvore T por $t = \dfrac{1}{1 + 2^n\delta} = \dfrac{\epsilon'}{\epsilon} > 0$, obtemos uma (n, ϵ')-árvore T' contida em B_X, o que contradiz a escolha de n.

Agora, sejam n e δ como na afirmação acima. Seja $(x_1, ..., x_{2^n})$ uma (n, ϵ)-partição de z. Seja T a (n, ϵ)-árvore produzida por esta partição como na Observação 3.2.3. Pela nossa afirmação algum vetor de T tem norma $\geq 1 + 2^n\delta$. Logo, o mesmo é verdade para algum vetor da n-parte de T, donde existe $j_0 \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que $\|2^n x_{j_0}\| \geq 1 + 2^n\delta$. Como $\|x_j\| \geq \dfrac{1}{2^n}$ para todo $j \in \{1, ..., 2^n\}$(veja a Observação 3.2.3.), concluímos que

$$\sum_{j=1}^{2^n} \|x_j\| = \|x_1\| + ... + \|x_{j_0}\| + ... + \|x_{2^n}\| \geq \frac{1}{2^n} + ... + \left(\frac{1}{2^n} + \delta\right) + ... + \frac{1}{2^n} = 1 + \delta = (1+\delta)\|z\| \ ,$$

o que prova o primeiro lema. □

Para o segundo lema, precisamos de uma

Definição 3.2.5. Uma função real $x \in X \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ é dita uma *função comprimento* em X se:

(a) $|x| \geq 0$ para todo $x \in X$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $|\alpha x| = |\alpha||x|$ para todos $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 3.2.6. *Seja X um espaço de Banach sem a P.A.F. Seja $\epsilon > 0$ e tome $n \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ como na conclusão do primeiro lema. Assuma $0 < \delta < \epsilon < \dfrac{1}{8}$. Então existem uma função comprimento em X e um $\delta_1 > 0$ de modo que:*

(a) $(1-\delta)\|x\| \leq |x| \leq \left(1 - \dfrac{\delta}{3}\right)\|x\|$.

(b) Se $\|x\| = \|y\| = 1$ *e* $\|x - y\| \geq \epsilon$ *então* $|x+y| < |x| + |y| - \delta_1$.

Demonstração: Para cada $z \in X$ e cada $0 \leq k \leq n$, seja $Q_k(z)$ o conjunto de todas as (m, ϵ)-partições de z com $0 \leq m \leq k$. Para cada $P = (u_1, ..., u_{2^m}) \in Q_n(z)$, definimos

$$N(P) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^m} \|u_j\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^m}\right)}.$$

Além disso, definimos

$$|z| = \inf_{P \in Q_n(z)} N(P).$$

Como $\|z\| \leq \left(1 + \dfrac{2}{3}\delta\right) N(P)$ para todo $P \in Q_n(z)$, temos que

$$|z| \geq \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)^{-1} \|z\| \geq (1-\delta)\|z\|.$$

Considerando a $(0, \epsilon)$-partição (z) de z, vemos que

$$|z| \leq N((z)) = \frac{\|z\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}} \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|z\|.$$

Portanto, a condição (a) do lema se verifica. Daí, é óbvio que a função $z \mapsto |z|$ satisfaz a primeira condição de função comprimento. Provemos a segunda condição:

$$|\alpha z| = \inf_{P \in Q_n(\alpha z)} N(P) = \inf_{Q \in Q_n(z)} N(\alpha Q) = |\alpha| \inf_{Q \in Q_n(z)} N(Q) = |\alpha||z|\ ,$$

sempre que $z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$. Assim, resta apenas provarmos a condição (b) do lema. Para tal fim, precisaremos do fato de que

$$|z| = \inf_{P \in Q_{n-1}(z)} N(P). \qquad (*)$$

Com efeito, se Q é uma (n, ϵ)-partição de z então o Lema 3.2.4 implica que

$$N(Q) \geq \frac{(1+\delta)\|z\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^m}\right)} \geq \frac{(1+\delta)\|z\|}{1 + \dfrac{2}{3}\delta} \geq \frac{\|z\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}} = N((z)).$$

Fixemos $x, y \in X$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \epsilon$. Então, (x,y) é uma $(1,\epsilon)$-partição de $x+y$. Escolha γ tal que $0 < \gamma < \dfrac{\delta}{2.4^{n+2}}$. Por $(*)$, existem uma (k,ϵ)-partição $(u_1, ..., u_{2^k})$ de x e uma (l,ϵ)-partição $(w_{l,1}, ..., w_{l,2^l})$ de y com $k, l \in \{0, ..., n-1\}$ tais que

$$|x| > \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^k}\right)} - \gamma \text{ e } |y| > \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^l} \|w_{l,j}\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^l}\right)} - \gamma.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $k \leq l$. Denotemos por $(w_{k,1}, ..., w_{k,2^k})$ a k-parte da (l,ϵ)-partição de y. Então,

$$\begin{aligned} |y| > \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^l} \|w_{l,j}\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^l}\right)} - \gamma \quad &\geq \quad \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^l}\right)} - \gamma \\ &\geq \quad \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^{k+1}} + \dfrac{1}{3.4^{k+1}}\right)} - \gamma. \end{aligned}$$

Consideremos a $(k+1,\epsilon)$-partição $(u_1, ..., u_{2^k}, w_{k,1}, ..., w_{k,2^k})$ de $x+y$ associada à $(u_1, ..., u_{2^k})$ e $(w_{k,1}, ..., w_{k,2^k})$. Como $k+1 \leq n$, temos

$$|x+y| \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\| + \sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^{k+1}}\right)}.$$

Em resumo, temos:

- $$|x| > \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^k}\right)} - \gamma.$$

- $$|y| > \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1 + \dfrac{\delta}{2}\left(1 + \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{4^{k+1}} + \dfrac{1}{3.4^{k+1}}\right)} - \gamma.$$

- $-|x+y| \geq \dfrac{-\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\|}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)} + \dfrac{-\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)}.$

Logo,

$$\begin{aligned}
|x|+|y|-|x+y| &> \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\|}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{4^k}\right)} + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}+\dfrac{1}{3.4^{k+1}}\right)} \\
&+ \frac{-\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\|}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)} + \frac{-\displaystyle\sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\|}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)} - 2\gamma \\
&= \sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\| \left(\frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+...+\dfrac{1}{4^k}\right)} - \frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)} \right) \\
&- \sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\| \left(\frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}\right)} - \frac{1}{1+\dfrac{\delta}{2}\left(1+...+\dfrac{1}{4^{k+1}}+\dfrac{1}{3.4^{k+1}}\right)} \right) \\
&- 2\gamma.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$1 \leq \sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\| \leq 1+\delta \ \text{ e } \ 1 \leq \sum_{j=1}^{2^k} \|w_{k,j}\| \leq 1+\delta.$$

De fato, provaremos apenas o primeiro caso, sendo o segundo análogo. Como $|x| \leq \left(1-\dfrac{\delta}{3}\right)\|x\| = 1-\dfrac{\delta}{3}$, obtemos $|x|+\gamma<1$, donde

$$1 = \|x\| \leq \sum_{j=1}^{2^k} \|u_j\| < \left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^k}\right)\right)(|x|+\gamma) < 1+\delta.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|x|+|y|-|x+y| &> \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^k}\right)}-\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}\right)}\\
&- (1+\delta)\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}\right)}-\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{3.4^{k+1}}\right)}\right)\\
&- 2\gamma = \frac{\frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+1}}}{\left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^k}\right)\right)\left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}\right)\right)}\\
&- (1+\delta)\left(\frac{\frac{\delta}{2}.\frac{1}{3.4^{k+1}}}{\left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}\right)\right)\left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{3.4^{k+1}}\right)\right)}\right)\\
&- 2\gamma.
\end{aligned}$$

Cada parcela do denominador da primeira fração após esta última igualdade é $\leq 1+\frac{2}{3}\delta \leq \frac{4}{3}$ (pois $\delta < \frac{1}{8}$), enquanto cada parcela do denominador da segunda fração é ≥ 1. Além disso, $1+\delta < \frac{9}{8}$ e $\gamma < \frac{\delta}{2.4^{n+2}} \leq \frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+3}}$. Com tudo isso, vemos que

$$\begin{aligned}
|x|+|y|-|x+y| &> \frac{9}{16}.\frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+1}} - \frac{9}{8}.\frac{\delta}{2}.\frac{1}{3.4^{k+1}} - 2.\frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+3}}\\
&= \frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+3}} \geq \frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\delta_1 = \frac{\delta}{2.4^{n+2}} > 0$ resolve. □

Lema 3.2.7. *Seja X um espaço de Banach com norma $\|.\|$ e sem a P.A.F. Seja $\epsilon > 0$ e tome n e δ como na conclusão do primeiro lema. Assuma que $0 < \delta < \epsilon < \frac{1}{8}$. Então é possível introduzir uma norma $\|.\|_{5\epsilon}$ em X tal que:*

(a) $(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{5\epsilon} \leq \left(1-\frac{\delta}{3}\right)\|x\|$.

(b) $\|x\| = \|y\| = 1$ *e* $\|x-y\| \geq 5\epsilon \Rightarrow \|x+y\|_{5\epsilon} \leq \|x\|_{5\epsilon} + \|y\|_{5\epsilon} - \epsilon\delta_1$ *, onde δ_1 é o mesmo da conclusão do segundo lema.*

Demonstração: Pelo segundo lema, existe uma função comprimento $|.|$ satisfazendo

(a) $(1-\delta)\|x\| \leq |x| \leq \left(1-\frac{\delta}{3}\right)\|x\|$.

(b) $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \epsilon \Rightarrow |x+y| < |x| + |y| - \delta_1$.

Seja $x \in X$ arbitrário. Dada $g_x : 0 = x_0, x_1, x_2, ..., x_l = x$ uma poligonal ligando 0 a x , ponha $|g_x|$ como sendo o tamanho de g_x medido pela função comprimento; mais precisamente:

$$|g_x| = \sum_{j=1}^{l} |x_j - x_{j-1}|.$$

Analogamente, ponha $\|g_x\|$ como sendo o tamanho da poligonal g_x medido pela norma de X, isto é, $\|g_x\| = \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \|x_j - x_{j-1}\|$.

Defina

$$\|x\|_{5\epsilon} = \inf_{g_x \in P_x} |g_x| \ ,$$

onde P_x é o conjunto de todas as poligonais que ligam 0 a x.

Considerando o caminho poligonal trivial $g_x : 0 = x_0, x_1 = x$, vemos que

$$\|x\|_{5\epsilon} \leq |x - 0| = |x| \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \|x\|.$$

Além disso, se $g_x : 0 = x_0, ..., x_l = x$ é qualquer poligonal ligando 0 a x, temos

$$(1-\delta)\|x\| = (1-\delta)\|\sum_{j=1}^{l}(x_j - x_{j-1})\| \leq (1-\delta)\sum_{j=1}^{l} \|x_j - x_{j-1}\| \leq \sum_{j=1}^{l} |x_j - x_{j-1}| = |g_x|.$$

Logo, vale

$$(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{5\epsilon}.$$

Assim, a propriedade (a) se verifica. Daí, é óbvio que $\|x\|_{5\epsilon} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Se $x \in X$ e $\alpha \neq 0$ então

$$\|\alpha x\|_{5\epsilon} = \inf_{g_{\alpha x} \in P_{\alpha x}} |g_{\alpha x}| = \inf_{f_x \in P_x} |\alpha f_x| = |\alpha| \inf_{f_x \in P_x} |f_x| = |\alpha| \|x\|_{5\epsilon}.$$

Se $x, y \in X$, $g_x : 0 = x_0, ..., x_l = x$ e $g_y : 0 = y_0, ..., y_m = y$ são caminhos poligonais ligando 0 a x e 0 a y respectivamente, então $g_{x+y} : 0 = x_0, ..., x_l + y_0 = x, x_l + y_1, ..., x_l + y_m = x + y$ é um caminho poligonal ligando 0 a $x + y$, donde

$$\|x+y\|_{5\epsilon} \leq |g_{x+y}| = |g_x| + |g_y|.$$

Tomando o ínfimo em $g_x \in P_x$ e depois em $g_y \in P_y$ concluímos que

$$\|x+y\|_{5\epsilon} \leq \|x\|_{5\epsilon} + \|y\|_{5\epsilon}.$$

Portanto, $\|.\|_{5\epsilon}$ é uma norma e resta apenas provar que vale a propriedade (b).

Suponhamos $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq 5\epsilon$. Fixemos $\gamma > 0$ tal que $\delta + \gamma < \epsilon$. Sejam $g_x : 0 = x_0, ..., x_l = x$ em P_x e $g_y : 0 = y_0, ..., y_m = y$ em P_y tais que

(1) $\qquad |g_x| \leq \|x\|_{5\epsilon} + \gamma$ e $|g_y| \leq \|y\|_{5\epsilon} + \gamma.$

Afirmamos que

(2) $\qquad 1 \leq \|g_x\| < 1 + \epsilon$ e $1 \leq \|g_y\| < 1 + \epsilon.$

De fato, como $\|x\| = \|y\| = 1$, segue que $1 \leq \|g_x\|$ e $1 \leq \|g_y\|$. Além disso,

$$(1-\delta)\|g_x\| \leq |g_x| \leq \|x\|_{5\epsilon} + \gamma \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) + \gamma$$

donde

$$1 \leq \|g_x\| \leq \frac{1 - \frac{\delta}{3} + \gamma}{1-\delta} \leq 1 + \delta + \gamma < 1 + \epsilon.$$

Analogamente, $1 \leq \|g_y\| < 1 + \epsilon$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\|g_x\| \leq \|g_y\|$.

Introduzindo no máximo m pontos no caminho poligonal g_x que subdividem seus segmentos e no máximo l pontos no caminho poligonal g_y também subdividindo seus segmentos é possível obtermos caminhos $g'_x : 0 = x'_0, ..., x'_s = x$ em P_x e $g'_y : 0 = y'_0, ..., y'_r = y$ em P_y de modo que

(3) $\qquad \|x'_1\| = \|y'_1\|$ e $\|x'_j - x'_{j-1}\| = \|y'_j - y'_{j-1}\| \;\; (1 \leq j \leq \min\{s, r\}).$

Com efeito, se for $\|x_1\| \leq \|y_1\|$, ponha $x'_1 = x_1$ e escolha $y'_1 \in [0, y_1]$ tal que $\|y'_1\| = \|x_1\| = \|x'_1\|$. Se for $\|x_1\| > \|y_1\|$, ponha $y'_1 = y_1$ e escolha $x'_1 \in [0, x_1]$ tal que $\|x'_1\| = \|y_1\| = \|y'_1\|$. Assim, temos x'_1 e y'_1.

Supondo construídos x'_j e y'_j, vamos construir x'_{j+1} e y'_{j+1}. Sejam i o menor índice tal que $x_i \notin \{x'_1, ..., x'_j\}$ e k o menor índice tal que $y_k \notin \{y'_1, ..., y'_j\}$. Temos então 3 possibilidades:

(a) $\|x_i - x'_j\| = \|y_k - y'_j\|$: neste caso, ponha $x'_{j+1} = x_i$ e $y'_{j+1} = y_k$.

(b) $\|x_i - x'_j\| < \|y_k - y'_j\|$: seja y'_{j+1} o único vetor no segmento $[y'_j, y_k]$ tal que $\|y'_{j+1} - y_k\| = \|x_i - x'_j\|$ e ponha $x'_{j+1} = x_j$.

(c) Análogo ao (b).

Por fim, depois de esgotar os x' ou os y' (o que acontecer primeiro), completamos a construção com os pontos restantes.

Sabemos que se dividimos um segmento de reta $[a, b]$ em X em dois pedaços $[a, c]$ e $[c, b]$, então o comprimento de $[a, b]$ é igual à soma dos comprimentos de $[a, c]$ e $[c, b]$ em relação à norma:

$$\|b - a\| = \|b - c\| + \|c - a\|.$$

Isto implica que

(4) $\qquad \|g_x'\| = \|g_x\|$ e $\|g_y'\| = \|g_y\|$.

Apesar da função comprimento $|.|$ não ser uma norma, o mesmo é válido:

$$|b-a| = |b-c| + |c-a| \ ,$$

o que implica que

(5) $\qquad |g_x'| = |g_x|$ e $|g_y'| = |g_y|$.

De fato, podemos escrever b na forma $b = a + t(c-a)$ para algum $t \geq 1$. Logo,

$$|b-a| = t|c-a| \ \text{ e } \ |b-c| = (t-1)|c-a| \ ,$$

donde

$$|b-c| + |c-a| = (t-1)|c-a| + |c-a| = t|c-a| = |b-a|.$$

Agora, como estamos supondo $\|g_x\| \leq \|g_y\|$, segue de (3) e (4) que $s \leq r$, de modo que $\min\{s,r\} = s$. Como $1 \leq \|g_x'\| \leq \|g_y'\| < 1+\epsilon$ (por (2)), segue de (3) que a soma dos comprimentos dos segmentos de g_y' que ligam y_s' a y_r' tem tamanho menor do que ϵ na norma. Isto nos dá

(6) $\qquad \|x - y_s'\| \geq \|x-y\| - \|y - y_s'\| \geq 4\epsilon$.

Sejam

$$J = \{1 \leq i \leq s \ ; \|(x_i' - x_{i-1}') - (y_i' - y_{i-1}')\| \geq \epsilon\|(x_i' - x_{i-1}')\|\}$$

e

$$I = \{1, ..., s\} \backslash J.$$

Usando (2),(3),(4) e (6), vemos que

$$\begin{aligned}
4\epsilon &\leq \|x - y_s'\| = \|\sum_{i=1}^{s}(x_i' - x_{i-1}') - \sum_{i=1}^{s}(y_i' - y_{i-1}')\| \\
&\leq \sum_{i\in I}\|(x_i' - x_{i-1}') - (y_i' - y_{i-1}')\| + \sum_{i\in J}\|(x_i' - x_{i-1}') - (y_i' - y_{i-1}')\| \\
&\leq \epsilon\sum_{i\in I}\|x_i' - x_{i-1}'\| + \sum_{i\in J}(\|x_i' - x_{i-1}'\| + \|y_i' - y_{i-1}'\|) \\
&\leq \epsilon\|g_x'\| + 2\sum_{i\in J}\|x_i' - x_{i-1}'\| \leq 2\epsilon + 2\sum_{i\in J}\|x_i' - x_{i-1}'\|,
\end{aligned}$$

donde

(7) $\qquad \displaystyle\sum_{i\in J}\|x_i' - x_{i-1}'\| \geq \epsilon.$

Além disso, para todo $i \in J$, segue do segundo lema que

$$\left|\frac{(x'_i - x'_{i-1})}{\|x'_i - x'_{i-1}\|} + \frac{(y'_i - y'_{i-1})}{\|x'_i - x'_{i-1}\|}\right| < \frac{|x'_i - x'_{i-1}|}{\|x'_i - x'_{i-1}\|} + \frac{|y'_i - y'_{i-1}|}{\|y'_i - y'_{i-1}\|} - \delta_1,$$

donde

$$|(x'_i - x'_{i-1}) + (y'_i - y'_{i-1})| < |x'_i - x'_{i-1}| + |y'_i - y'_{i-1}| - \|x'_i - x'_{i-1}\|\delta_1.$$

Logo, por (7),

$$(8) \quad \sum_{i \in J} |(x'_i - x'_{i-1}) + (y'_i - y'_{i-1})| < \sum_{i \in J} |x'_i - x'_{i-1}| + \sum_{i \in J} |y'_i - y'_{i-1}| - \epsilon\delta_1.$$

Escreva $J = \{k_1, ..., k_l\}$ com $k_1 < ... < k_l$. Vamos construir um caminho poligonal h_{x+y} ligando 0 a $x + y$ da seguinte maneira:

(*) Vamos de 0 a $x'_{k_1-1} + y'_{k_1-1}$ caminhando primeiro com os x' e depois com os y', e então vamos diretamente a $x'_{k_1} + y'_{k_1}$:

$$0, x'_1, ..., x'_{k_1-1}, x'_{k_1-1} + y'_1, ..., x'_{k_1-1} + y'_{k_1-1}, x'_{k_1} + y'_{k_1}.$$

(**) Em geral, vamos de $x'_{k_i} + y'_{k_i}$ a $x'_{k_{i+1}-1} + y'_{k_{i+1}-1}$ caminhando primeiro com os x' e depois com os y', e então vamos diretamente a $x'_{k_{i+1}} + y'_{k_{i+1}}$:

$$x'_{k_i} + y'_{k_i}, x'_{k_i+1} + y'_{k_i}, ..., x'_{k_{i+1}-1} + y'_{k_i}, x'_{k_{i+1}-1} + y'_{k_i+1}, ..., x'_{k_{i+1}-1} + y'_{k_{i+1}-1}, x'_{k_{i+1}} + y'_{k_{i+1}}.$$

(***) Finalmente, vamos de $x'_{k_l} + y'_{k_l}$ a $x + y$ caminhando primeiro com os x' e depois com os y':

$$x'_{k_l} + y'_{k_l}, x'_{k_l+1} + y'_{k_l}, ..., x'_s + y'_{k_l}, x'_s + y'_{k_l+1}, ..., x'_s + y'_r = x + y.$$

Dessa forma, usando (1),(5) e (8), vemos que

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_{5\epsilon} &\leq |h_{x+y}| = \sum_{i \in J} |(x'_i - x'_{i-1}) + (y'_i - y'_{i-1})| \\
&+ \sum_{i \in \{1,...,s\} \setminus J} |x'_i - x'_{i-1}| + \sum_{i \in \{1,...,r\} \setminus J} |y'_i - y'_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |x'_i - x'_{i-1}| + \sum_{i=1}^{r} |y'_i - y'_{i-1}| - \epsilon\delta_1 = |g'_x| + |g'_y| - \epsilon\delta_1 \\
&= |g_x| + |g_y| - \epsilon\delta_1 \leq \|x\|_{5\epsilon} + \|y\|_{5\epsilon} - \epsilon\delta_1 + 2\gamma.
\end{aligned}$$

Como $\gamma > 0$ é arbitrário, o lema está provado. $\square$

Lema 3.2.8. *Seja X um espaço vetorial com duas normas $\|.\|$ e $\|.\|_u$. Assuma que para todo $x \in X$ tenhamos $\|x\|_u \leq \|x\| \leq 2\|x\|_u$. Assuma também que exista uma função real $\delta(\epsilon)$, com $\delta(\epsilon) > 0$ se $\epsilon > 0$, tal que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ então $\|x + y\|_u \leq \|x\|_u + \|y\|_u - \delta(\epsilon)$. Então, $\|.\|_u$ é uma norma uniformemente convexa.*

Demonstração: Primeiramente, observamos que para qualquer norma $\|.\|_1$ em um espaço normado temos que $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ e $1 \geq \|x-y\|_1 \geq \epsilon > 0$ implicam $\inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \|\alpha x - y\|_1 \geq \dfrac{\epsilon}{2}$: de fato, ponha $g(\alpha) = \|\alpha x - y\|_1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Afirmamos que g é uma função convexa de α:
realmente, basta mostrar que $g(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tg(\alpha) + (1-t)g(\beta)$; mas, observe que

$$\begin{aligned} g(t\alpha + (1-t)\beta) &= \|(t\alpha + (1-t)\beta)x - y\|_1 \\ &= \|t\alpha x - y + (1-t)\beta x\|_1 \\ &= \|t\alpha x - y + (1-t)\beta x + ty - ty\|_1 \\ &\leq \|t\alpha x - ty\|_1 + \|(1-t)\beta x + ty - y\|_1 \\ &= t\|\alpha x - y\|_1 + (1-t)\|\beta x - y\|_1 \\ &= tg(\alpha) + (1-t)g(\beta). \end{aligned}$$

Note que $g(0) = 1 \geq \|x-y\|_1 = g(1) \geq \epsilon > 0$. Logo, como g é convexa, não existe $\alpha \leq 0$ tal que $g(\alpha) < \dfrac{\epsilon}{2}$: de fato, a convexidade de g nos dá:

$$\frac{g(0)-g(\alpha)}{0-\alpha} \leq \frac{g(1)-g(\alpha)}{1-\alpha} \leq \frac{g(1)-g(0)}{1-0}$$

Daí, se existisse um $\alpha \leq 0$ tal que $g(\alpha) < \dfrac{\epsilon}{2}$, teríamos

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\frac{\epsilon}{2}}{-\alpha} \leq \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{-\alpha} \\ &< \frac{1-g(\alpha)}{-\alpha} \leq \frac{\|x-y\|_1 - g(\alpha)}{1-\alpha} \\ &\leq \|x-y\|_1 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, $g(\alpha) \geq \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $\alpha \leq 0$. Por outro lado, se $|\alpha - 1| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, temos

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \|\alpha x - y\|_1 = \|x - y + \alpha x - x\|_1 = \|x - y + x(\alpha-1)\|_1 \\ &\geq \|x-y\|_1 - |\alpha - 1|\|x\|_1 \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Se for $\alpha > 1 + \dfrac{\epsilon}{2}$ ou $0 < \alpha < 1 - \dfrac{\epsilon}{2}$ temos

$$g(\alpha) = \|\alpha x - y\|_1 \geq |\|\alpha x\|_1 - \|y\|_1| = |\alpha - 1| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, segue que $g(\alpha) \geq \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $\inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \|\alpha x - y\|_1 \geq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Agora, assuma que $\|x\|_u = \|y\|_u = 1$ e $\|x-y\|_u \geq \epsilon$. Como $\|z\|_u \leq \|z\| \leq 2\|z\|_u$ para todo $z \in X$, existem $\dfrac{1}{2} \leq \alpha, \beta \leq 1$ tais que $\|\alpha x\| = \|\beta y\| = 1$. Pela observação inicial,

$$\|\alpha x - \beta y\| \geq \|\alpha x - \beta y\|_u = \left\|\frac{\alpha}{\beta}x - y\right\|_u \beta \geq \frac{1}{2}\left\|\frac{\alpha}{\beta}x - y\right\|_u \geq \frac{\epsilon}{4}.$$

Então, $\|\alpha x\| = \|\beta y\| = 1$ e $\|\alpha x - \beta y\| \geq \frac{\epsilon}{4}$ nos dão, por hipótese,

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y\|_u &\leq \|\alpha x\|_u + \|\beta y\|_u - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \\ &= |\alpha| + |\beta| - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_u &= \|\alpha x + \beta y + (1-\alpha)x + (1-\beta)y\|_u \\ &\leq \|\alpha x + \beta y\|_u + \|(1-\alpha)x + (1-\beta)y\|_u \\ &\leq |\alpha| + |\beta| - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) + |1-\alpha| + |1-\beta| \\ &= \alpha + \beta - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) + 1 - \alpha + 1 - \beta = 2 - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right), \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_u \leq 1 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$$

e assim, $\|.\|_u$ é uniformemente convexa. $\square$

Lema 3.2.9. *Se num espaço de Banach X for possível introduzir, para cada $\epsilon > 0$, uma norma satisfazendo (a) e (b) do terceiro lema, então X admite uma norma equivalente uniformemente convexa.*

Demonstração: Fixe $\epsilon > 0$ e, com as notações do terceiro lema, defina

$$\|x\|_u = \frac{1}{2}\|x\|_\epsilon + \frac{1}{4}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{1}{8}\|x\|_{\frac{\epsilon}{4}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}}.$$

Pelo terceiro lema, temos

$$(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}} \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\|,$$

para cada $n \geq 1$. Portanto, a série que define $\|.\|_u$ converge. Além disso, é fácil ver que $\|.\|_u$ é uma norma sobre X. Mostremos que $\|.\|_u$ é equivalente à original:

Realmente, observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1-\delta)\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\| \Leftrightarrow$$

$$(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_u \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\|.$$

Como $0 < \delta < \epsilon < \dfrac{1}{8}$, temos

$$\frac{7}{8}\|x\| \leq (1-\epsilon)\|x\| \leq (1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_u \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\| \leq \|x\|,$$

donde

$$\frac{7}{8}\|x\| \leq \|x\|_u \leq \|x\|$$

para cada $x \in X$. Portanto, $\|.\|_u$ é equivalente à norma original de X. Mostremos agora que $\|.\|_u$ é uniformemente convexa:

Com efeito, primeiro observe que

$$\begin{aligned} 2\|x\|_u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}((1-\delta)\|x\|) \\ &= (1-\delta)\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2(1-\delta)\|x\| \geq \|x\|. \end{aligned}$$

Como já temos $\|x\| \geq \|x\|_u$, segue que

$$\|x\|_u \leq \|x\| \leq 2\|x\|_u.$$

Suponha agora que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \epsilon_1$. Fixe $k > 1$ tal que $\epsilon_1 > \dfrac{\epsilon}{2^k}$. Segue do terceiro lema que

$$\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} \leq \|x\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} - \frac{\epsilon}{5.2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right)$$

onde $\delta_1\left(\dfrac{\epsilon}{5.2^k}\right)$ é o δ_1 do terceiro lema correspondente a $\dfrac{\epsilon}{2^k}$. Agora, note que

$$\begin{aligned} \|x+y\|_u &= \frac{1}{2}\|x+y\|_\epsilon + \frac{1}{4}\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} \\ &+ \frac{1}{2^{k+2}}\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}} + \ldots \leq \frac{1}{2}\left(\|x\|_\epsilon + \|y\|_\epsilon\right) + \frac{1}{4}\left(\|x\|_{\frac{\epsilon}{2}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2}}\right) \\ &+ \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\left(\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} - \frac{\epsilon}{5.2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right)\right) + \frac{1}{2^{k+2}}\left(\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}}\right) \\ &+ \ldots \leq \|x\|_u + \|y\|_u - \frac{\epsilon}{5.2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right) \leq \|x\|_u + \|y\|_u - \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\epsilon}{2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right) \ , \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é válida pois $k > 1$. Segue então do quarto lema que $\|.\|_u$ é uniformemente convexa. $\square$

Isto conclui a demonstração do Teorema de Enflo. $\square$

3.3 Comentários finais

Terminamos este trabalho com algumas considerações finais, a fim de mostrar com maior clareza a importância do resultado obtido por Enflo. Para tal, precisaremos introduzir dois tipos de espaços, a saber: os espaços normados uniformemente suaves e os espaços normados superreflexivos.

Definição 3.3.1. Um espaço normado X é dito *suave* quando o limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t}$$

existe e é igual a 0, sempre que $x \in S_X$ e $y \in X$.

Um espaço normado X é dito *uniformemente suave* quando o quociente

$$\frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t}$$

converge para 0 quando $t \to 0^+$, uniformemente para $(x,y) \in S_X \times S_X$. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t} < \epsilon \text{ , sempre que } \ 0 < t < \delta \ \text{ e } \ x, y \in S_X \ .$$

Note que $\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1 \geq \frac{1}{2}\|2x\|-1 = 0$, o que mostra que o quociente acima é sempre não-negativo (pois temos também $t > 0$).

Um teorema devido a V. L. Smulian (ver [11], pág 500, Teorema 5.5.12) diz que um espaço normado X é uniformemente suave se e somente se o dual X^* é uniformemente convexo, e X é uniformemente convexo se e somente se o dual X^* é uniformemente suave.

Vejamos agora os espaços superreflexivos:

Definição 3.3.2. Sejam X, Y dois espaços de Banach. Dizemos que *Y é finitamente representável em X* se, para todo $\epsilon > 0$ e todo subespaço de dimensão finita Y' de Y existem um subespaço de dimensão finita X' de X com $dim\ X' = dim\ Y'$ e um isomorfismo $f : Y' \longrightarrow X'$ tal que $\|f\|\|f^{-1}\| \leq 1+\epsilon$.

Um espaço de Banach X é dito *superreflexivo* se todo espaço de Banach Y finitamente representável em X é reflexivo.

Trivialmente, um espaço de Banach superreflexivo é reflexivo, pois todo espaço de Banach é finitamente representável em si mesmo. Entretanto, um espaço de Banach reflexivo não necessariamente é superreflexivo; por exemplo, $\left(\sum_{n\geq 1} \ell_1^{(n)}\right)_2$ é reflexivo mas não é superreflexivo, pois pode-se mostrar que ℓ_1 (o qual não é reflexivo) é finitamente representável em $\left(\sum_{n\geq 1} \ell_1^{(n)}\right)_2$ (ver [4], exemplo da pág 218).

Observamos que é possível mostrar que um espaço de Banach X é superreflexivo se e somente se o dual X^* é superreflexivo(ver [4], pág 237, Corolário 8).

James introduziu as propriedades de árvore, assim como os espaços superreflexivos. Também mostrou que um espaço de Banach é superreflexivo se e somente se não tem a P.A.F(ver [4], pág 231, Teorema 2). Portanto, o resultado de Enflo relaciona os espaços de Banach superreflexivos com aqueles que admitem uma norma uniformemente convexa equivalente, mostrando que são os mesmos espaços. Além disso, usando também o resultado de Smulian, podemos concluir que um espaço de Banach X admite uma norma uniformemente convexa equivalente se e somente se X admite uma norma uniformemente suave equivalente; realmente, se X é um espaço de Banach que admite uma norma uniformemente convexa equivalente, então X é superreflexivo. Como X é Banach, temos que X^* também é superreflexivo. Logo, pelo Teorema de Enflo, X^* admite uma norma uniformemente convexa equivalente. Daí, pelo Teorema de Smulian, $X = X^{**}$ admite uma norma uniformemente suave equivalente.

Reciprocamente, se X é um espaço de Banach que admite uma norma uniformemente suave equivalente, então o Teorema de Smulian garante que X^* admite uma norma uniformemente convexa equivalente. Logo, X^* é superreflexivo. Como X^* é Banach, segue que $X = X^{**}$ é superreflexivo. Pelo Teorema de Enflo, X admite uma norma uniformemente convexa equivalente.

Cabe ressaltar que Asplund mostrou que, se X é um espaço de Banach que admite uma norma uniformemente convexa equivalente e também admite uma norma uniformemente suave equivalente então X admite uma norma equivalente que é, ao mesmo tempo, uniformemente convexa e uniformemente suave(ver [3]).

Assim sendo, podemos destacar a importância do resultado de Enflo através das seguintes equivalências, válidas se X é um espaço de Banach:

X é superreflexivo $\Leftrightarrow$ X admite uma norma uniformemente convexa equivalente $\Leftrightarrow$ X admite uma norma uniformemente suave equivalente $\Leftrightarrow$ X admite uma norma uniformemente convexa e uniformemente suave equivalente.

Bibliografia

[1] Akhiezer, N.I. and Krein, M.G., *Some questions in the theory of moments*(em russo), Gosudarstv. Naucno-Tehn. Izdat. Ukrain., Kharkov, 1938.

[2] Akhiezer, N.I. and Krein, M.G., *Some questions in the theory of moments*(tradução para o inglês de [1]), Translations of Mathematical Monographs, vol. **2**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[3] Asplund, E., *Averaged norms*, Israel J. Math. **5** (1967), 227-233.

[4] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*, Notas de Matemática [86], Mathematics Studies, vol. **68**, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[5] Blatter, J., *Reflexivity and the existence of best approximations*, Approximation Theory, II (George G.Lorentz, Charles K. Chui, and Larry L. Schumaker, eds.), Proc. Internat, Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., Academic Press, New York, 1976, pp.299-301.

[6] Clarkson, J.A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936),396-414.

[7] Day, M. M., *Normed Linear Spaces*, third ed.,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **21**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[8] Diestel, J., *Geometry of Banach Spaces*, Selected Topics. Lecture Notes vol. **485**, Springer.

[9] Enflo, P., *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. Math. **13** (1972), 281-288.

[10] Fabian et al, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics, Canadian Mathematical Society, Springer, 2001.

[11] Megginson, R. E., *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate texts in mathematics; **183**, Springer-Verlag New York, Inc, 1998.

[12] Rudin, W., *Functional Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1991.

[13] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1987.