Existência de Funções Harmônicas Obtidas Por Deformação Através do Fluxo do Calor

Adilson Lopes dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexander Arbieto

Rio de Janeiro

Junho de 2009

Existência de Funções Harmônicas Obtidas Por Deformação Através do Fluxo do Calor

Adilson Lopes dos Santos

Orientador: Alexander Arbieto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Alexander Arbieto - IM/UFRJ

Profa. Walcy Santos - IM/UFRJ

Prof. Fernando Codá - IMPA

Profa. Maria Fernanda Elbert - IM/UFRJ

Rio de Janeiro

Julho de 2009

A Joaquim e Zeny

Agradecimentos

Sou imensamente grato ao casal Joaquim e Zeny

que me acolheram em seu lar.

Ao meu amigo Anderson

quem de fato idealizou o cumprimento de mais esta etapa de meus estudos.

Ao casal Valdecir e Geni e família

a quem considero como meus familiares.

A minha amiga Isabela.

que sempre me apoiou.

Ao casal Márcio e Simone

que sempre estiveram comigo.

Ao meu orientador Alexander Arbieto

por quem tenho grande admiração e respeito

e sem quem, de forma alguma eu teria conseguido concluir este curso.

Finalmente, agradeço meus pais e irmãos

que desde sempre fizeram o possível para que eu tivesse a oportunidade de estudar.

A todos vocês, muito obrigado!

Ficha Catalográfica

Santos, Adilson Lopes.

S237 Existência de Funções Harmônicas Obtidas Por Deformação Através do Fluxo do Calor/ Adilson Lopes dos Santos.- Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

XI, 151f.; 30cm.

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, 2009.

Orientador: Alexander Arbieto

Referências Bibliográficas: f.149-151.

1. Fluxo do Calor.

2. O Teorema de Eells-Sampson (matemática)-Tese. I. Arbieto, Alexander. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

Existência de Funções Harmônicas Obtidas Por Deformação Através do Fluxo do Calor

Adilson Lopes dos Santos

Orientador: Alexander Arbieto

As aplicações harmônicas são extremamente importantes. Não apenas por suas propriedades, como também pelo fato destas poderem ser utilizadas para estudar a topologia das variedades nas quais estas se encontram definidas ou tomam valores. Assim, torna-se uma questão relevante saber quais são as condições necessárias para que as variedades admitam alguma aplicação harmônica (não constante) definida entre elas. Também, e até de maior relevância, é a questão de se saber, se uma aplicação contínua qualquer entre estas variedades, pode ou não, ser "deformada" de forma que se torne uma aplicação harmônica.

O objetivo principal desta dissertação, é demonstrar o seguinte teorema devido a Eells e Sampson (1964): "*Se M e N são variedades Riemannianas compactas, e se além disto N tem curvatura não-positiva. Então, toda aplicação contínua $f : M \to N$ entre tais variedades é livremente homotópica a uma aplicação harmônica $g : M \to N$.*"

Iniciamos definindo os conceitos de segunda forma fundamental e de campo de tensão, a partir do que se define o conceito de aplicação harmônica para aplicações entre variedades

Riemannianas. É definido o funcional energia de tais aplicações e em seguida seus pontos críticos são estudados. Prova-se a primeira e segunda fórmulas de variação de energia para o funcional apresentado. Conclui-se que as aplicações harmônicas são os pontos críticos de tal funcional. São estudadas as aplicações totalmente geodésicas, as imersões e as funções subharmônicas e superharmônicas.

Demonstramos o teorema de Eells e Sampson, utilizando para isto o método do fluxo do calor e o teorema da função inversa em espaços de Banach. Prova-se ainda as fórmulas de Weitzenböck para as soluções da equação do calor.

Existence of harmonic functions obtained by deformation through the heat flow

Adilson Lopes dos Santos

Advisor: Alexander Arbieto

Harmonic Functions are extremely important. Not only because of their properties, but also by the fact that they can be used to study the topology of the manifolds where they are defined. So, it is a relevant question to known what are the necessarily conditions to guarantee that manifolds with these conditions admit an harmonic function (not constant). Even more relevant, is the question of whether a continuous function between two manifolds can be deformed to an harmonic function.

The main objective of this dissertation is to prove the following theorem due to Eells and Sampson (1964): ´´If M and N are two compact Riemannian manifolds, and N has non-positive curvature then any continuous map $f : M \to N$ between such manifolds is freely homotopic to an harmonic map $g : M \to N$".

We start defining the concepts of second fundamental form and tension field, hence, we can define de notion of harmonic map between Riemannian manifolds. The energy functional of such maps is defined and its critical points are studied. Also, we prove the first and second variational formulae of the energy functional. It follows that harmonic maps

are critical points of this functional. We also study totally geodesic maps, immersions and subharmonic and superharmonic functions.

We prove the Eells-Sampson's theorem using the heat flow and the inverse function theorem between Banach spaces. We also prove Weitzenböck formulae for the solutions of the heat equation.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, procuramos definir o conceito de aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas. Obviamente, como não poderia deixar de ser, espera-se que tal definição coincida com a definição prévia desta, feita para aplicações entre espaços euclidianos. Ou seja, busca-se que a definição apresentada, estenda o conceito de função harmônica, as aplicações entre variedades Riemannianas.

Observando o caso das aplicações $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entre espaços euclidianos, para os quais se define as aplicações harmônicas como sendo as que satisfazem a equação

$$\text{traço}\nabla^2 f = \Delta f = 0,$$

constatamos que nesta particular situação, utiliza-se o conceito de Laplaciano, o qual, por sua vez, faz uso dos conceitos de derivada segunda de aplicações (Hessiana) e do conceito de traço.

Espelhando-nos então no caso apresentado, vemos que para o caso em que as aplicações em questão estiverem definidas entre variedades Riemannianas, faz-se necessário a utilização do conceito de conexão (uma vez que neste caso, as derivações segundas são na realidade derivadas de campos de vetores) e também do conceito de métrica (métrica fibrada), para que se possa ter a noção de traço.

Utilizando então estes conceitos (conexão e traço), definimos os conceitos de segunda forma fundamental e de campo de tensão para aplicações entre variedades Riemannianas, os quais estendem respectivamente para tais aplicações, os conceitos de Hessiana e de Laplaciano, o qual inicialmente é dado para as aplicações da forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definimos então, o conceito de aplicação harmônica para aplicações entre variedades

Riemannianas, como aquelas que possuem campo de tensão identicamente nulo. Mostramos que as definições feitas estendem as definições prévias.

Passamos então a estudar tais aplicações harmônicas, mostrando que várias aplicações importantes, tal é o caso das geodésicas, são aplicações deste tipo, e também, que tais aplicações podem ser utilizadas para estudar a topologia das variedades nas quais estas tomam valores.

É mostrado ainda, que em geral, tais aplicações harmônicas, possuem a propriedade de serem minimizantes (de energia, área, etc). Assim, põe-se a questão de se saber (e sob que condições), se uma dada aplicação contínua entre tais variedades, pode ou não, ser deformada homotopicamente de forma a se tornar uma aplicação harmônica.

Como mostraremos, sob as hipóteses de compacidade das variedades em questão e da não-positividade da curvatura da variedade de chegada, tal deformação, de fato pode ser realizada, como asserta o teorema de Eells e Sampson.

Para a demostração deste teorema, é empregado o "método do fluxo do calor", o qual reduz o problema de deformar homotopicamente uma aplicação dada até que esta se torne uma aplicação harmônica, ao problema de obter uma solução global para um problema de valor inicial envolvendo uma EDP parabólica não-linear.

De início, obteremos soluções locais para o problema dado (o que de fato pode ser feito sem grandes restrições as variedades em questão), para o que é utilizado o teorema da aplicação inversa em espaços de Banach, o qual reduz a resolução do problema de EDP não-linear, a resolução de um linear, possibilitando assim que sejam empregados teoremas de existência de soluções de EDP's. Sendo tal equação uma EDP parabólica não-linear, não podemos no entanto a partir disto, afirmar pela existência de uma solução global para a mesma. Para se fazer uma tal afirmação, é necessário que se estimem as taxas de crescimento de tais soluções locais, o que será feito utilizando a hipótese da não-positividade da curvatura da variedade de chegada, bem como das fórmulas de Weitzenböck válidas para as soluções da equação do calor, as quais, relacionam a curvatura com as taxas de crescimento das soluções (locais) obtidas.

Obtida tal solução global (que de fato é única), mostra-se que a mesma produz a aplicação harmônica procurada.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1, essencialmente é feita uma revisão de alguns conceitos de Álgebra Multilinear, entre os quais, estão o de produto tensorial. Tal capítulo, tem por objetivo suavizar a introdução dos conteúdos feitos posteriormente no texto, podendo a leitura da mesma ser omitida caso o leitor tenha alguma familiaridade com o tema.

No capítulo 2, são discutidos os conceitos de fibrados vetoriais, métricas fibradas e conexões em fibrados vetoriais. Alguns fibrados importantes ao restante do texto são introduzidos, tais são os casos do fibrado dual, fibrado induzido e fibrado tensorial. Para cada um de tais fibrados vetoriais, métricas fibradas e conexões compatíveis são introduzidas. Para a maioria dos conceitos introduzidos, sua abordagem é feita em uma linguagem bastante geométrica, o que de certa forma, facilita a compreensão dos mesmos.

No capítulo 3, introduz-se o conceito de energia de aplicações entre variedades Riemannianas. É mostrado, que tal funcional generaliza o conceito de energia das curvas das variedades Riemannianas. São introduzidos também, os conceitos de segunda forma fundamental e de campo de tensão para tais aplicações, a patir do que definimos o conceito de aplicação harmônica.

Neste capítulo, estuda-se também, os pontos críticos do funcional energia. A primeira e segunda fórmulas de variação de energia são demonstradas, á partir do que, mostra-se que as aplicações harmônicas são exatamente os pontos críticos de tal funcional. Ainda neste capítulo, relacionamos os conceitos de segunda forma fundamental aqui definido, com o conceito clássico deste, o qual é feito para imersões. Além disto, introduzi-se os conceitos de funções subharmônicas e superharmônicas para as funções diferenciáveis das variedades Riemannianas.

No capítulo 4, é discutido o método do fluxo do calor. Prova-se o teorema de Cartan (existência de geodésicas fechadas em variedades Riemannianas compactas). São provadas também as fórmulas de Weitzenböck satisfeitas pelas soluções da equação parabólica das aplicações harmônicas e da equação do calor. Neste capítulo é provado o teorema de Eells e Sampson.

No capítulo 5, são discutidas as hipóteses do teorema de Eells e Sampson. É mostrado por exemplo, que a compacidade da variedade de chegada é imprescindível para a conclusão do teorema.

No apêndice, são expostos alguns resultados utilizados durante o texto, relacionados com a teoria das medidas Riemannianas. São expostos também, vários resultados de EDP, tendo como objetivo principal obter as estimativas de Schauder para as soluções dos operadores diferenciais lineares elípticos e parabólicos. É apresentada uma demonstração das estimativas de Schauder para as soluções dos operadores lineares parabólicos (consequentemente também para as soluções dos operadores lineares elípticos) utilizando o princípio do máximo.

Este tópico (tratando das EDP's) inicia-se com uma breve revisão de alguns resultados clássicos, apresentando por exemplo algumas propriedades das equações de Laplace e Poisson, a continuidade Hölder, bem como alguns teoremas de existência, unicidade e regularidade de soluções para operadores diferenciais lineares elípticos e parabólicos. Encerra-se mostrando como os resultados obtidos (para espaços reais) podem ser estendidos para o caso em que as aplicações em questão forem entre variedades Riemannianas, tratando de alguns destes, nesta situação específica, tais como o princípio do máximo para a equação do calor e o teorema de regularidade das aplicações harmônicas.

Capítulo 1

Álgebra Multilinear

Introdução

Neste capítulo, faremos uma breve abordagem do conteúdo dos fibrados vetoriais. Tal discussão tem como objetivo não só relembrar ou introduzir tais conceitos, como também introduzir parte da notação que será utilizada no decorrer do texto.

Como veremos, tais fibrados vetoriais são muito parecidos com o fibrado tangente, sendo este um caso particular dos primeiros. A idéia é associarmos a cada ponto $p \in M$, de uma variedade M, um espaço vetorial, o qual, não necessariamente precisa ser o espaço tangente como ocorre no fibrado tangente. Obviamente, que estas referidas "associações" não podem ser tão arbitrárias assim, se esperamos estudar as estruturas dos fibrados assim obtidos (que são variedades como veremos a seguir) . Na verdade, exigiremos que estas sejem diferenciáveis (em um sentido a ser esclarecido). Feito isto, procuraremos introduzir uma "métrica" nestas novas variedades, o que nos possibilitará fazer geometria neste, e uma conexão compatível com tal métrica, o que nos permitirá fazer derivações nos mesmos. Para finalizar, serão introduzidos fibrados vetoriais um pouco mais gerais, tais como o fibrado induzido e o produto tensorial, e também nestes casos, métricas e conexões convenientes serão introduzidas.

Ressaltamos que tanto os conteúdos deste capítulo, quanto sua forma de abordagem, serão em sua grande maioria um tanto quanto elementares, podendo pois serem omitidas por um leitor que já tenha algum conhecimento a respeito dos fibrados vetoriais.

Como motivação, ou mesmo para ilustrar que os fibrados vetoriais (definidos formalmente adiante) surgem naturalmente no estudo das variedades Riemannianas, apresentamos a seguir os produtos tensoriais, os quais darão origem aos fibrados tensoriais.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão m. Para cada $p \in M$, sabemos que existe um espaço vetorial associado a este, a saber, o espaço tangente a M em p, o qual denota-se por T_pM. Sabemos também que a união destes espaços $\bigcup_{p\in M} T_pM = TM$, dá origem a uma outra variedade TM de dimensão $2m$, que é o fibrado tangente de M.

Mostraremos agora, que associados a $p \in M$, existem outros espaços vetoriais diferentes de T_pM, alguns deste inclusive originados deste último. Desta forma, pelo mesmo processo com que obtemos TM á partir de T_pM, obteremos novos e diferentes fibrados vetoriais á partir deste espaços vetoriais descritos.

Os novos espaços vetoriais a que nos referimos, são os produtos tensoriais e espaços duais, os quais definiremos neste capítulo. Salientemos porém, que há muitos outros tipos de espaços associados aos pontos de uma variedade, bem diferentes dos que descreveremos aqui.

Poderíamos de inicio, definir o conceito de produto tensorial de espaços vetoriais, tomando T_pM como espaço de referência, e em seguida generalizar-mos o que foi feito para espaços vetoriais quaisquer. Preferimos no entanto fazer o inverso, por achar que tal generalidade permitirá ao leito perceber a essência do que está sendo feito, e somente ao final, passamos a abordar o espaço T_pM, mostrando que este é apenas um caso particular. Passemos então as definições.

Dualidade

Seja V um espaço vetorial m-dimensional sobre $\mathbb{R}$ e $f, g : V \to \mathbb{R}$ aplicações lineares (as quais chamaremos de funcionais lineares, para contrastar com aquelas aplicações com valores em outros espaços vetoriais) e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad e \qquad \alpha f(x) = \alpha \cdot f(x) \quad x \in V.$$

É fácil ver que $(f+g)$ e (αf) são também funcionais lineares, e portanto, temos que de fato, isto definem operações sobre o conjunto das funcionais lineares do espaço V. É possível ver ainda que com tais operações, tal conjunto de funções é na realidade, um espaço vetorial, o qual é chamado de *espaço dual* de V e denotado por V^*. Nesta situação, temos que V^* possui a mesma dimensão que V $(dimV^* = m = dimV)$. Temos também que toda base de V determina uma base de V^*. De fato, seja $\{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V, $v = \sum_i^m a_i v_i \in V$ e $f \in V^*$. Então

$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} a_i f(v_i).$$

Isto mostra que um funcional linear, fica completamente determinado, se fixamos os valores deste em uma base. Definine-mos então os seguintes funcionais lineares

$$v^i(v_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Temos então que

$$v^i(v) = v^i\left(\sum_{j=1}^{m} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \left(a_j v^i(v_j)\right) = a_i.$$

Portanto

$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{m} f(v_i) v^i(v) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v^i(v).$$

onde $\beta_i = f(v_i)$. Donde concluímos que,

$$f = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v^i.$$

O que mostra que cada $f \in V^*$, pode ser escrita como combinação linear dos funcionais lineares $\{v^1, \ldots, v^m\}$. Não é difícil ver também, que esta combinação linear é única. Donde temos que $\{v^1, \ldots, v^m\}$, é uma base para V^*. Tal base é chamada de *base dual* de $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Isto mostra ainda que, $dimV^* = dimV$. Na maioria das situações, denotaremos os elementos de V^* por u^*, v^*.

Sob as condições acima, podemos ver ainda que o espaço dual de V^* é o espaço V, ou seja $(V^*)^* = V$. De fato, dado $v \in V$, mostremos que este define um funcional linear em V^*. Com efeito seja $v_f : V^* \to \mathbb{R}$, tal que

$$v_f(u^*) = u^*(v) \qquad u^* \in V^*. \tag{1.1}$$

É fácil ver, usando a linearidade de u^* que $v_f \in (V^*)^*$. Podemos na realidade mostrar que todo funcional linear em V^* é da forma acima. De fato, dado $g \in (V^*)^*$ um funcional linear em V^*. Seja $v = \sum_{i=1}^{M} g(v^i)v_i \in V$, onde $\{v_i\}_{i\in\{1,\dots,m\}}$ como antes é uma base qualquer de V, e $\{v^i\}_{i\in\{1,\dots,m\}}$ é sua base dual associada. Dado $u^* \in V^*$, temos que $u^* = \sum_{i=1}^{m} u^*(v_i)v^i$. Donde

$$\begin{aligned}
g(u^*) &= g\left(\sum_{i=1}^{m} u^*(v_i)v^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} u^*(v_i)g(v^i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} u^*\left[g(v^i)v_i\right] \\
&= u^*\left[\sum_{i=1}^{m} g(v^i)v_i\right] \\
&= u^*(v) \\
&= v_f(u^*).
\end{aligned}$$

Assim, vemos que não somente cada vetor $v \in V$, determina um funcinoal linear em V^*, como também, que todos de tais funcionais são desta forma. Donde concluímos que de fato $(V^*)^* = V$. Na sequência não faremos distinção entre v_f e $v \in V$, pois achamos não haver perigo de confusão neste caso.

Produto Tensorial

De maneira análoga a que fizemos para os funcionais lineares do espaço V, pode proceder também com os funcionais r-lineares de V.

Sejam $V_1, \dots, V_r$ espaços vetoriais, $f, g : V_1 \times \cdots \times V_r \to \mathbb{R}$ funcionais r-lineares em

$V_1 \times \cdots \times V_r$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar. Definimos

$$(f+g)(v_1,\ldots,v_r) = f(v_1,\ldots,v_r) + g(v_1,\ldots,v_r) \quad \text{e} \tag{1.2}$$
$$(\alpha f)(v_1,\ldots,v_r) = \alpha \cdot (f)(v_1,\ldots,v_r).$$

É fácil ver $(f+g)$ e (αf) assim definidos são funcionais r-lineares em $V_1 \times \cdots \times V_r$, ou seja, tal soma e produto por escalar realmente definem operações no conjuto dos funcionais r-lineares de $V_1 \times \cdots \times V_r$. Pode-se ver ainda, que com estas operações, tal conjunto torna-se um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Denotaremos este espaço por $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r;\mathbb{R})$ ou simplesmente por $\mathcal{L}_r(V;\mathbb{R})$, no caso em que $V_1,\ldots,V_r = V$.

Na sequência definimos um operador

$$\otimes : V_1^* \times \cdots \times V_r^* \to \mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r;\mathbb{R})$$

que associa a cada $(u_1^*,\ldots,u_r^*) \in (V_1^* \times \cdots \times V_r^*)$ um funcional r-linear $(u_1^* \otimes \cdots \otimes u_r^*)$ tal que

$$(u_1^* \otimes \cdots \otimes u_r^*)(v_1,\ldots,v_r) = u_1^*(v_1)\cdots u_r^*(v_r) \qquad (v_1,\ldots,v_r) \in (V_1 \times \cdots \times V_r).$$

É imediata a verificação de que $u_1^* \otimes \cdots \otimes u_r^*$ assim definido é realmente um funcional r-lineares de $V_1 \times \cdots \times V_r$ em $\mathbb{R}$. Também é de fácil verificação, que o operador $\otimes$ é r-linear de $V_1^* \times \cdots \times V_r^*$ em $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r;\mathbb{R})$.

Sob as condições anteriores, definimos o *produto tensorial* $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ dos espaços $V_1^*,\ldots,V_r^*$, como sendo o espaço vetorial sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$, gerado por todos os elementos da forma $(u_1^* \otimes \cdots \otimes u_r^*)$, onde $u_i^* \in (V_i^*)_{i\in\{1,\ldots,r\}}$. Vemos pela definição dada que $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ é um subespaço de $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r;\mathbb{R})$. Ressaltamos no entanto que nem todo elemento de $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ é da forma $(u_1^* \otimes \cdots \otimes u_r^*)$, os que assim são, são ditos *reduzidos*.

Para ilustrar esta situação, tomemos $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$ com sua base canônica $\{e_1, e_2\}$. Então, neste caso

$$\otimes : (\mathbb{R}^2)^* \times (\mathbb{R}^2)^* \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}).$$

Afirmamos que $(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \in (\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ não pode ser escrito na forma reduzida. De fato, suponhamos que existissem $u^*, v^* \in (\mathbb{R}^2)^*$ tais que $u^* \otimes v^* \equiv e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$.

Então, $u^*(e_1)\cdot v^*(e_1) = u^*\otimes v^*(e_1,e_1) = 1 = u^*\otimes v^*(e_2,e_2) = u^*(e_2)\cdot v^*(e_2)$. Donde $u^*(e_1)\neq 0$ e $v^*(e_2)\neq 0$. Por outro lado, $u^*(e_1)\cdot v^*(e_2) = u^*\otimes v^*(e_1,e_2) = 0$, um absurdo.

Vemos assim, que $(e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2)\in(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*$ não pertence a imagem do operador r-linear $\otimes$, o que mostra que ao contrário do que ocorre para os operadores lineares, a imagem de um espaço vetorial por um operador r-linear nem sempre é um espaço vetorial do contradomínio.

Fixemos bases $\{u_i^{j_i}\}_{1\leq j_i\leq m_i}$ para os espaços $(V_i^*)_{1\leq i\leq r}$, com dimensões m_i, respectivamente. Dado $v_1^*\otimes\cdots\otimes v_r^*\in(V_1^*\otimes\cdots\otimes V_r^*)$. Como por definição $v_i^*\in V_i^*$, temos que existem $\{a_{j_i}\}_{1\leq j_i\leq m_i}\in\mathbb{R}$, tais que $v_i^* = \sum_{j_i=1}^{m_i} a_{j_i}u_i^{j_i}$. Assim, pela linearidade do operador $\otimes$ temos que

$$\begin{aligned} v_1^*\otimes\cdots\otimes v_r^* &= \left(\sum_{j_1=1}^{m_1} a_{j_1}u_1^{j_1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{j_1=r}^{m_r} a_{j_r}u_r^{j_r}\right)\\ &= \sum_{j_1,\ldots,j_r}(a_{j_1}\ldots a_{j_r})u_1^{j_1}\otimes\cdots\otimes u_r^{j_r}. \end{aligned}$$

Isto mostra que qualquer elemento de $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_r^*$ que esteja na forma reduzida pode ser escrito como combinação linear dos elementos

$$u_1^{j_1}\otimes\cdots\otimes u_r^{j_r} \qquad 1\leq j_i\leq m_i \qquad 1\leq i\leq r. \tag{1.3}$$

Como por definição, todos os elementos de $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_r^*$ são combinações lineares de elementos na forma reduzida, concluímos que na realidade, todo elemento de $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_r^*$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos apresentados em (1.3), ou seja, que os elementos em (1.3), que são no total de $dimV_1\cdots dimV_r = m_1\cdots m_r$, geram $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_r^*$. Não é difícil ver que tais elementos são também linearmente independentes, e que portanto, formam uma base para $V_1^*\otimes\cdots\otimes V_r^*$. Dado um $f\in\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_r;\mathbb{R})$, sejam

$$f_{j_1,\ldots,j_r} = f(u_1^{j_1}\otimes\cdots\otimes u_1^{j_1})\in\mathbb{R} \qquad 1\leq j_i\leq m_i \qquad 1\leq i\leq r. \tag{1.4}$$

É fácil ver utilizando a linearidade de f, que esta pode ser escrita como combinação linear dos elementos de (1.3), e que os coeficientes desta combinação são as constantes $f_{j_1,\ldots,j_r}\in\mathbb{R}$

apresentadas em (1.4). Desta forma, temos que $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$, é mais que um simples subespaço de $f \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_r; \mathbb{R})$, e que na realidade temos

$$V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^* = \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_r; \mathbb{R}). \tag{1.5}$$

De forma inteiramente análoga, podemos definir o produto tensorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, e neste caso

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r = \mathcal{L}(V_1^*, \ldots, V_r^*; \mathbb{R}) \tag{1.6}$$

pois como vimos V_i e V_i^* são duais um do outro. É possível ver ainda que $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ e $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$, também são duais um do outro. De fato, consideremos a aplicação

$$\langle\ \ ,\ \ \rangle : (V_1 \otimes \cdots \otimes V_r) \times (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\Big\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_r, v^1 \otimes \cdots \otimes v^r \Big\rangle = v^1(u_1) \cdots v^r(u_r) \tag{1.7}$$

para quaisquer $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \in (V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)$ e $v^1 \otimes \cdots \otimes v^r \in (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*)$. É fácil ver pela definição dada que $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ é um funcional bilinear em $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r) \times (V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*)$. Assim, de maneira análoga a que fizemos em (1.1), podemos associar a cada elemento $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \in (V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)$ uma aplicação

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_r : V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^* \to \mathbb{R} \tag{1.8}$$

tal que $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r(v^1 \otimes \cdots \otimes v^r) = v^1(u_1) \cdots v^r(u_r)$. É de fácil constatação a partir da definição dada, que estas aplicações são em verdade funcionais r-lineares em $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$, donde se conclui que cada elemento de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ determina um funcional r-linear em $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$. Também, utilizando (1.7), podemos mostrar de maneira análoga ao que se fez para o caso linear, que todos de tais funcionais lineares são de fato da forma acima, e portanto tem-se que

$$(V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*)^* = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r. \tag{1.9}$$

De mesma forma, porém desta vez fixando-se os elementos de $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ na aplicação dada em (1.7), concluir-se que

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)^* = V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*. \tag{1.10}$$

Donde se conclui a veracidade da afirmação de que $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ e $V_1^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$, são duais um do outro.

Tensores do tipo-(r, s)

De especial interesse, são os produtos tensoriais da forma

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\ termos} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\ termos} = V_s^r \tag{1.11}$$

os quais são chamados **tensores tipo-**(r, s) sobre V, onde r é a *ordem contravariante* e s é a *ordem covariante*. Em particular, os elementos da forma V_0^r são ditos *tensores contravariantes de ordem* r, os quais como vimos, podem ser indentificados com os elementos do espaço $\mathcal{L}_r(V^*; \mathbb{R})$, enquanto que os da forma V_s^0 são ditos *tensores covariantes de ordem* s e se identificam com o espaço $\mathcal{L}_s(V; \mathbb{R})$. É comum as seguintes convenções $V_0^0 = \mathbb{R}$, $V_0^1 = V$ e $V_1^0 = V^*$. Os elementos de V são chamados de *contravetores*, os de V^* *covetores*.

Para encerrar esta seção, como prometido no início, relacionaremos o que foi feito, para o caso em que os espaços vetoriais em questão forem os espaços T_pM tangentes a M. Neste caso, o espaço dual T_pM^* é chamado de *espaço cotangente* e os elementos deste último espaços são chamados *covetores*.

Os produtos tensoriais da forma

$$\underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{r\ termos} \otimes \underbrace{T_pM^* \otimes \cdots \otimes T_pM^*}_{s\ termos} = T_r^s(p)$$

são chamados **tensores tipo-**(r, s) sobre T_pM e podem ser identificados, como sendo o conjuto dos funcionais

$$T : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{s\ termos} \times \underbrace{T_pM^* \times \cdots \times T_pM^*}_{r\ termos} \to \mathbb{R}$$

os quais são $r + s$ lineares.

Da mesma maneira a que se faz com os espaços tangentes, onde toma-se sua totalidade $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$, o qual é o fibrado tangente de M, também o faremos na próxima seção como os espaços $TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^*$ e $T_s^r = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p)$, e também para outros mais, os quais como veremos, constituem variedades de especial interesse para o estudo da variedade M.

Capítulo 2

Fibrados Vetoriais

Esperamos que os tópicos tratados na seção anterior, tenham servido para ilustrar, o quão naturais são os fibrados vetoriais, os quais passaremos a abordar agora.

Aqui, a exemplo da seção anterior, abordaremos de início os casos mais gerais, e somente ao final passamos aos casos que julgamos mais específicos, como o caso do fibrado tangente e dos demais fibrados advindos deste, como o cotangente e outros mais a serem introduzidos. Inclusive, em algumas destas situções, nossa abordagem terá como finalidade maior, mostrar que o que se fez anteriormente de fato são extensões do tema em questão.

Definição 2.1. Sejam E e M variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação C^∞ e sobrejetiva $\zeta : E \to M$ é um *fibrado vetorial* (real) de dimensão m sobre M se:

1) Para cada $p \in M$ a imagem inversa $E_p = \zeta^{-1}(p)$ é um espaço vetorial (real) de dimensão m.

2) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e um difeomorfismo $\Phi_U : \zeta^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ com as seguintes propriedades:

(i) $pr_1 \circ \Phi_U = \zeta|\zeta^{-1}(U)$.

(ii) Para cada $q \in U$, $\Phi^2_{U_q} := pr_2 \circ \Phi_U|E_q : E_q \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo linear, onde $pr_1 : U \times \mathbb{R}^m \to U$ e $pr_2 : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ são as projeções canônicas.

Neste caso, dizemos que (U, Φ_U) é uma *trivialização local* do fibrado $\zeta : E \to M$. Dizemos também que E é o *espaço total*, M é *base* e ζ é a *projeção* do fibrado. $E_p = \zeta^{-1}(p)$, é dita a *fibra* sobre $p \in M$ do fibrado E.

Em alguns trabalhos um fibrado $\zeta : E \to M$ é referido como uma tripla (ζ, E, M). Aqui, por questão de simplicidade, um tal fibrado será denotado somente por fibrado E, ou seja, pelo espaço total. Pela definição dada, vemos claramente que o fibrado tangente TM é um fibrado vetorial, cuja fibra sobre $p \in M$ é o espaço tangente T_pM.

Trabalhando-se com o fibrado tangente, vemos que os campos de vetores são uma ferramenta muito útil para o estudo das aplicações definidas ou tomando valores em M. Desta forma, vemos que talvez seja importante estender tal conceito para fibrados mais gerais. Assim, seja $\zeta : E \to M$ um fibrado vetorial sobre M. Dizemos que uma aplicação diferenciável $X : M \to E$ é uma *seção* de E sobre M, se $\zeta \circ X(p) = p$ para todo $p \in M$. Por tal definição, vemos que $X(p) \in E_p$, qualquer que seja $p \in M$, isto é, uma seção X de E sobre M, nada mais é que uma aplicação, que associa a cada $p \in M$ um elemento (vetor) $X(p)$ na fibra E_p, fato obviamente válido para os campos vetoriais, e portanto, como pretendíamos, estes são casos particulares de seções (em TM). Denotaremos o conjunto de todas as seções de um fibrado vetorial E sobre M por, $\Gamma(E)$. Se no entanto a aplicação X estiver definida apenas em um aberto $U \subset M$, então X é dita ser um seção de E sobre U e denotamos o conjunto de tais seções por $\Gamma(E|U)$

De posse então deste novo conjunto $\Gamma(E)$, como é quase natural, e de costume, buscaremos definir operações neste, para de alguma maneira dar-lhe uma estrutura linear. Observando porém a definição deste, vemos que um conjunto de escalares conveniente, seria o dos funções reais diferenciáveis $C^\infty(M)$ de M, as quais constituem um anel. Neste sentido, utilizamos o conceito de módulo[1].

Sejam então $X, Y \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M)$. Definimos

$$(X+Y)(p) = X(p) + Y(p) \quad e \quad fX(p) = f(p)X(p) \quad p \in M. \tag{2.1}$$

[1]Quando se define um espaço vetorial, utiliza-se de um corpo $\mathbb{F}$ (em geral $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), chamado de corpo de escalares. Se no entanto, ao invés de um corpo, utilizar-mos um anel A em tal definição, então o espaço linear (definido sobre o anel A) assim obtido, é dito ser um A-**módulo**.

É fácil ver que isto de fato definem operações sobre $\Gamma(E)$, (i.e, $X+Y,\ fX \in \Gamma(E)$), e que com tais operações $\Gamma(E)$ é um $C^\infty(M)$-**módulo**. Obviamente, no caso de $\Gamma(E|U)$, o anel utilizado é $C^\infty(U)$. Na próxima seção, esclareceremos um pouco mais, o uso do conceito de módulo.

Métricas Fibradas e Conexões

Um outro conceito do fibrado tangente que estenderemos aos fibrados vetoriais é o de métrica Riemanniana. Seja $\zeta : E \to M$ um fibrado vetorial sobre M. Dizemos que g é uma *métrica fibrada* de E, se para cada $p \in M$, g associa um produto interno (forma bilinear, simétrica, positiva definida) na fibra $E_p = \zeta^{-1}(p)$, tal que para toda $X, Y \in \Gamma(E)$ as funções $g(X,Y) : p \mapsto g(X(p), Y(p))_p$ são diferenciáveis. Adiante, quando já tivermos definido ao noção de fibrados tensoriais, poderemos dar uma outra caracterização para as métricas fibradas, a saber, as veremos como seções.

Por fim, como dito no início, introduzimos uma noção de derivação nos fibrados vetoriais da forma que se segue.

Definição 2.2 (Conexão Linear)**.** Seja $\zeta : E \to M$ um fibrado vetorial sobre M. Definimos uma *conexão linear* ∇ (neste fibrado) como sendo uma aplicação nos espaços de seções

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

com $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, tal que

a) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

b) $\nabla_X (Z+W) = \nabla_X Z + \nabla_X W$

c) $\nabla_X (fZ) = f\nabla_X Z + X(f)Z.$

onde $f, g \in C^\infty(M)$, $\ X, Y \in \Gamma(TM)$ $\ $ e $\ Z, W \in \Gamma(E)$.

Caso o fibrado E possua uma métrica fibrada g definida em si, uma conexão ∇ em E, é dita ser compatível com tal métrica fibrada, se para quaisquer $X \in \Gamma(TM)$ e $Y, Z \in \Gamma(E)$

tivermos

$$Xg(Y,Z) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right). \tag{2.2}$$

Passemos então a descrever alguns fibrados vetoriais.

Fibrados Duais

Recordemos que pela definição do fibrado vetorial $\zeta : E \to M$, temos que cada fibra $E_p = \zeta^{-1}(p)$, é um espaço vetorial. Assim, podemos considerar seu espaço dual E_p^*, isto é, o conjunto de todas as aplicações lineares $f : E_p \to \mathbb{R}$ definidas neste, o qual como vimos na seção anterior, pode ser feito um espaço vetorial com respeito as operações

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad e \quad (\alpha f)(v) = \alpha \cdot f(v) \tag{2.3}$$

onde $f, g \in E_p^*$, $v \in E_p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma, podemos considerar a totalidade destes espaços, isto é

$$TM^* = \bigcup_{p\in M} E_p^* = \{(p,\omega) \mid p\in M, \ \ \omega\in E_p^*\}$$

que, como pode ser visto sem dificuldade, possui uma estrutura de variedade diferenciável, com dimensão igual a $2m$ (m é a dimensão de M). Podemos então considerar o fibrado $\pi : E^* \to M$ sobre M, tal que

$$\pi(p,\omega) = p \qquad (p,\omega)\in E^*$$

a qual é obviamente uma aplicação diferenciável de E^* em M. As demais condições da definição (2.1) são de verificação imediata. Tal fibrado é chamado de *fibrado dual* de E sobre M, e este obviamente, tem como fibras os epaços E_p^* em cada ponto $p \in M$. No caso do fibrado tangente TM, o fibrado dual $\pi^* : TM^* \to M$ (ou simplesmente TM^*) é chamado de *fibrado cotangente* de M.

Caso o fibrado E tenha uma métrica fibrada g definida em si, podemos definir uma métrica fibrada g^* em E^* através desta. De fato, de início, podemos observar que, para cada $p \in M$, g_p induz um isomorfismo $\sharp : E_p^* \to E_p$ entre as fibras E_p^* e E_p, tal que dado $\omega \in E_p^*$, temos que $\omega^\sharp = \sharp(\omega)$, é tal que

$$g(\omega^\sharp, X)_p = \omega(X) \tag{2.4}$$

qualquer que seja $X \in E_p$. Temos também que $\sharp^{-1} = \flat : E_p \to E_p^*$, é tal que, dado $X \in E_p$, esta associa o funcional $X^\flat = \flat(X) \in E_p^*$ tal que

$$X^\flat(Y) = g(X, Y)_p \quad\quad Y \in T_pM \tag{2.5}$$

Assim, dados $\omega, \eta \in E_p^*$, definimos

$$g^*(\omega, \eta)_p = g(\omega^\sharp, \eta^\sharp)_p \quad\quad p \in M. \tag{2.6}$$

Claramente podemos ver que g^* assim definida é bilinear, simétrica, positiva e definida em cada fibra E_p^*, e que portanto é uma métrica fibrada de E^*. Tal situação é particularmente interessante no caso do fibrado tangente TM, como veremos adiante.

Se E é um fibrado vetorial sobre M, então, pelo que vimos, E^* também o é, logo, vemos que faz sentido definir-mos uma conexão neste último, a qual deve satisfazer as condições da definição (2.2). Caso, E possua uma conexão ∇ em si, então como mostraremos, podemos utilizar desta para definir uma conexão ∇^* em E^* chamada *conexão dual*.

De início, observemos que os isomorfismos definidos em (2.4) e (2.5) da discussão acima, induzem os isomorfismos

$$\flat : E \to E^* \quad\quad \text{e} \quad\quad \sharp : E^* \to E. \tag{2.7}$$

Assim, definimos a conexão ∇^*, como uma aplicação

$$\nabla^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*)$$

tal que

$$\nabla^*_X \omega = (\nabla_X \omega^\sharp)^\flat. \tag{2.8}$$

onde $X \in \Gamma(E)$, $\omega \in \Gamma(E^*)$ e ∇ é a conexão de E. É fácil ver utilizando os isomorfismos dados em (2.7) e a hipótese de ∇ ser uma conexão de E, que ∇^* assim definida, satisfaz as condições do definição (2.2). Caso o fibrado E, além da conexão ∇, admita uma métrica fibrada g compatível com esta (no sentido apresentado em (2.2)), então a conexão ∇^* de E^*, é compatível com a métrica fibrada g^* dada em (2.6). Com efeito, dados $X \in \Gamma(TM)$ e $\omega, \gamma \in \Gamma(E^*)$ por (2.4) e (2.5) temos que $\left(\nabla_X \omega^\sharp\right) = (\nabla^*_X \omega)^\sharp$. Assim

$$\begin{aligned} Xg^*(\omega,\gamma) &= Xg\left(\omega^\sharp, \gamma^\sharp\right) \\ &= g\left(\nabla_X \omega^\sharp, \gamma^\sharp\right) + g\left(\omega^\sharp, \nabla_X \gamma^\sharp\right) \\ &= g^*\left(\left(\nabla^*_X \omega^\sharp\right)^\flat, \left(\gamma^\sharp\right)^\flat\right) + g^*\left(\left(\omega^\sharp\right)^\flat, \left(\nabla_X \gamma^\sharp\right)^\flat\right) \\ &= g^*\left(\nabla^*_X \omega, \gamma\right) + g^*\left(\omega, \nabla^*_X \gamma\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

o que comprova a afirmação feita. Nesta situação, isto é, quando se tem também uma métrica fibrada compatível envolvida, podemos ainda apresentar uma outra caracterização para ∇^*. Com efeito, dados $X \in \Gamma(TM)$, $\omega \in \Gamma(E^*)$ e $Y \in \Gamma(E)$, temos então que

$$\begin{aligned} \left(\nabla^*_X \omega\right) Y &= g\left(\left(\nabla^*_X \omega\right)^\sharp, Y\right) = g\left(\nabla_X \omega^\sharp, Y\right) \\ &= Xg(\omega^\sharp, Y) - g\left(\omega^\sharp, (\nabla_X Y)\right) \\ &= X\omega(Y) - \omega\left(\nabla_X Y\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

A caracterização acima, é bem útil para efetuar-se cálculos envolvendo a conexão ∇^*. No que se segue, trabalharemos apenas com fibrados munidos de métricas fibradas, como para estes a expressão anterior é sempre válida, adota-la-emos como definição de ∇^*.

Fibrados Induzidos

Outro fibrado vetorial de uso muito comum, são os fibrados induzidos que descreveremos agora.

Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades M, N e $\zeta : E \to N$ um fibrado vetorial sobre N. Consideremos o conjunto

$$\phi^{-1}(E) = \{(p, v);\ p \in M \ e \ v \in E_{\phi(p)} = \zeta^{-1}(\phi(p))\}.$$

Definamos uma aplicação

$$\zeta^*\phi : \phi^{-1}(E) \to M \tag{2.11}$$

tal que

$$\zeta^*\phi(p,v) = p \qquad p \in M \quad e \quad v \in E_p. \tag{2.12}$$

Afirmamos que $\zeta^*\phi : \phi^{-1}(E) \to M$, é um fibrado vetorial sobre M. Nesta situação, poderíamos simplesmente dizer que $\phi^{-1}(E)$ é um fibrado vetorial sobre M, cuja fibra sobre $p \in M$, é dada por $E_{\phi(p)} = \zeta^{-1}(\phi(p))$, a qual por definição é um espaço vetorial.

Preferimos no entanto, argumentar um pouco mais, pois este tipo de fibrado, desempenhará um papel determinante na próxima seção. Além disto, uma tal demonstração, serve para ilustrar a forma de se proceder neste tipo de situação, sendo as demais citadas neste capítulo, feitas de forma análoga.

Dado $p \in M$. como por hipótese $\zeta : E \to N$ é um fibrado vetorial, temos que existe um aberto $U \subset N$ contendo $\phi(p)$ e uma trivialização $\Phi_U : \zeta - 1(U) \to U \times \mathbb{R}^n$. Definamos então a aplicação

$$\psi : (\zeta^*\phi)^{-1}\left(\phi^{-1}(U)\right) \to \phi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n$$

tal que

$$\psi(p,v) = (p, P_2 \circ \Phi_U(v)).$$

Obviamente, ψ assim definida é diferenciável. Temos ainda que sua inversa é dada pela aplicação $\xi : \phi^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n \to (\zeta^*\phi)^{-1}(\phi^{-1}(U))$ tal que $\xi(p,u) = (p, \Phi_U^{-1}(\phi(p), u))$, a qual, é também diferenciável, implicando então que ψ é um difeomorfismo. É fácil ver que as demais condições da definição (2.1) de fibrado vetorial são também satisfeitas, restando apenas mostrar que $\phi^{-1}(E)$ é uma variedade diferenciável, o que é quase evidente pelo já feito, uma vez que podemos tomar uma vizinhança coordenada V de p, de forma que $\phi(V) \subset U$, e neste caso, como $(V \times \mathbb{R}^n)$ é isomorfo a $\phi^{-1}(E) \cap (V \times \zeta^{-1}(U))$ o resultado segue. Pode-se mostrar que se E estiver munido uma métrica fibrada e uma conexão, então estas induzem uma métrica fibrada e uma conexão em $\phi^{-1}(E)$. Porém, como neste trabalho, o uso deste tipo de fibrado (induzido) será restrito ao caso em que $E = TN$, preferimos adiar as definições destas, apresentando-as adiante, quando então trabalharemos com tal tipo de fibrado, em qual caso, seremos bem mais restritos e por tal razão um pouco mais profundos na abordagem.

Observação 2.1. É comum denotar-se o fibrado induzido por ϕ^*E ao invés de $\phi^{-1}E$, como estamos fazendo. O motivo disto, é porque neste trabalho, o uso do asterisco esta reservado ao caso em que trabalhar-mos com duais.

Fibrados Tensoriais

Dando prosseguimento as idéias tratadas no tópico anterior, passamos a descrever agora, o conceito de fibrado tensorial. Como veremos , estes são de grande auxílio no estudo dos operadores definidos nas seções dos fibrados vetoriais, tais são os casos da métrica fibrada, conexões, curvaturas, etc, além de prover-nos de uma notação mais clara e conveniente, permitindo que se perceba de fato a exata “ação” realizada por um tal operador.

Sejam pois $E^1, \ldots, E^r$, fibrados vetoriais sobre M. Neste caso, temos por definição que para cada $p \in M$, as fibras $E^1_p, \ldots, E^r_p$, constituem espaços vetoriais. Logo, como vimos na seção anterior, podemos considerar o produto tensorial $E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p$, o qual com as operações de soma e produto por escalar lá definidas é um espaço vetorial, sendo pois $E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p$ constituido pelos funcionais r-lineares $\mathcal{L}(E^1_p, \ldots, E^r_p; \mathbb{R})$. Podemos então considerar a totalidade destes espaços

$$E^1 \otimes \cdots \otimes E^r = \bigcup_{p \in M} E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p = \{(p, E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p)\}$$

o qual, como pode ser verificada de maneira análoga aos casos anteriores, constitui uma variedade diferenciável. Podemos ver também, que a aplicação $\pi \ : \ E^1 \otimes \cdots \otimes E^r \to M$, tal que

$$\pi(p, E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p) = p, \qquad (p, E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p) \in E^1 \otimes \cdots \otimes E^r$$

é de fato um fibrado sobre M chamado de *fibrado tensorial* de $E^1, \ldots, E^r$ sobre M, cuja fibra sobre $p \in M$ é dada pelo espaço $E^1_p \otimes \cdots \otimes E^r_p$.

Constatado então que $E^1 \otimes \cdots \otimes E^r$ é de fato um fibrado vetorial sobre M, faz então sentido, considerarmos métricas fibradas e conexões neste. De fato, se os fibrados $E^1, \ldots, E^r$, estiverem munidos das respectivas métricas fibradas $g_1, \ldots, g_r$, então como mostraremos agora, é possível definir uma métrica fibrada em $E^1 \otimes \cdots \otimes E^r$, utilizando destas últimas.

De início, ressaltemos que apesar dos elementos de $E^1 \otimes \cdots \otimes E^r$ não serem necessariamente da forma, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, onde $v_1 \in E^1, \ldots\ v_r \in E^r$, para os efeitos da demonstração seguinte, é suficiente que se mostre apenas para os deste tipo, uma vez que sendo os primeiros combinações lineares dos do tipo utilizado, a conclusão segue, já que todas as operações utilizadas serão lineares. Assim, dados $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r$ e $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in \Gamma(E^1 \otimes \cdots \otimes E^r)$, onde $u_1, v_1 \in E^1, \ldots\ u_r, v_r \in E^r$, definimos

$$g^{\otimes}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r, v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)(p) = g_1(u_1, v_1)(p) \cdots g_r(u_r, v_r)(p) \qquad p \in M.$$

Facilmente podemos constatar que $g^{\otimes}$ assim definida, de fato é uma métrica fibrada sobre o fibrado $E^1 \otimes \cdots \otimes E^r$.

Também, se os fibrados $E^1, \ldots, E^r$ admitem as respectivas conexões $\nabla^1, \ldots, \nabla^r$, então, podemos definir uma conexão

$$\nabla^{\otimes} : \Gamma(TM) \times \Gamma(E^1 \otimes \cdots \otimes E^r) \to \Gamma(E^1 \otimes \cdots \otimes E^r)$$

tal que

$$\nabla^{\otimes}_X(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_r) = \left(\nabla^1_X Y_1\right) \otimes Y_2 \otimes \cdots \otimes Y_r + \cdots + Y_1 \otimes \cdots \otimes \left(\nabla^r_X Y_r\right)$$

para quaisquer $X \in \Gamma(TM)$, $Y_1 \in \Gamma(E^1), \ldots, Y_r \in \Gamma(E^r)$. Um cálculo direto, mostra que $\nabla^{\otimes}$ assim definida, satisfaz todas as condições da definição 2.2. Se além disto os fibrados $E^1, \ldots, E^r$ estiverem munidos das respectivas métricas fibradas $g_1, \ldots, g_r$, de forma que cada conexão ∇^i seja compatível com a métrica fibrada g_i, então a conexão $\nabla^{\otimes}$ é compatível com a métrica fibrada $g^{\otimes}$ definida como antes, como pode ser facilmente comprovado.

Obviamente, poderíamos utilizar nas definições acima os fibrados duais $(E^i)^*$ em lugar de quaisquer E^j que compõem o fibrado tensorial $E^1 \otimes \cdots \otimes E^r$, não alterando qualquer das situações tratadas, até por que, em cada caso, como já mostramos anteriormente, haveriam métricas fibradas e conexões (compatíveis) se fosse o caso.

De especial interesse são os fibrados da forma

$$\underbrace{E^* \otimes \ldots \otimes E^*}_{s \ vezes} \otimes \underbrace{E \otimes \ldots \otimes E}_{r \ vezes}$$

cujas fibras sobre $p \in M$ podem ser vistas como sendo os espaços

$$\underbrace{E_p^* \otimes \ldots \otimes E_p^*}_{s \ vezes} \otimes \underbrace{E_p \otimes \ldots \otimes E_p}_{r \ vezes} = \mathcal{L}(\underbrace{E_p, \ldots, E_p}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{E_p^*, \ldots, E_p^*}_{r \text{ vezes}}; \mathbb{R}).$$

Tais fibrados vetoriais são ditos do **tipo-**(r, s) de E sobre M.

Um fato importante sobre os fibrados tensoriais, é que o conjunto de suas seções $\Gamma(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k)$, possui a estrutura de $C^\infty(M)$ módulo com respeito as operações de soma e produto por escalar, definidas de forma análoga a que fizemos em (2.1), porém utilizando das operações definidas em (1.3) em cada um dos espaços $\mathcal{L}(\underbrace{E_p, \ldots, E_p}_{s \text{ vezes}}, \underbrace{E_p^*, \ldots, E_p^*}_{r \text{ vezes}}; \mathbb{R})$.

Campos Tensoriais do tipo-(r, s)

Neste tópico, daremos continuidade ao que se fez no anterior, porém, aqui trataremos somente do caso particular em que o fibrado vetorial em questão é o fibrado tangente TM, em qual caso, denotamos um fibrado tensorial do tipo-(r, s) por

$$\underbrace{TM^* \otimes \ldots \otimes TM^*}_{s \text{ vezes}} \otimes \underbrace{TM \otimes \ldots \otimes TM}_{r \text{ vezes}} = T_r^s(M).$$

Uma seção deste fibrado é dita ser um *campo tensorial do tipo-*(r, s). Tais seções, nada mais são que aplicações da forma

$$T : \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{s \text{ vezes}} \times \underbrace{\Gamma(TM^*) \times \ldots \times \Gamma(TM^*)}_{r \text{ vezes}} \to C^\infty(M) \tag{2.13}$$

satisfazendo além disto, a condição de serem $C^\infty(M)$ linear com respeito a todas as variáveis. Assim por exemplo, uma seção $T \in C^\infty(T_1^s(M))$, é na realidade uma aplicação s-linear, da forma

$$T : \underbrace{\Gamma(TM) \times \ldots \times \Gamma(TM)}_{s \text{ vezes}} \to \Gamma(TM) \tag{2.14}$$

tal que para cada $f_i \in C^\infty(M)$ e $X_i \in \Gamma(TM)$ temos

$$T(f_1X_1, \ldots, f_sX_s) = f_1 \cdot f_2 \ldots f_s T(X_1, \ldots, X_s).$$

É comum chamar as seções dos fibrados tensoriais do tipo-$(0, s)$ simplesmente de *tensores* de ordem s sobre M.

No que se segue, discutiremos as expressões locais dos campos tensoriais do tipo-(r, s) (seções do fibrado tensorial $T_r^s(M)$). Mostraremos que as identificações desta dadas acima em (2.13) e (2.14), podem de fato facilitar a obtenção de sua expressão local (em termo de sistemas locais de coordenadas). Praticamente todo material exposto, será utilizado adiante no texto.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana m-dimensional. Dado um sistema local de coordenadas (x_i) em uma vizinhança $U \subset M$. Sabemos que esta dá origem as seções $(\partial/\partial x_i) \in \Gamma(TM \mid U)$ e $dx_i \in \Gamma(TM^* \mid U)$, de forma que para $p \in M$, temos que os vetores

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right\}$$

formam uma base do espaço T_pM, e que também o conjunto

$$\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p\}$$

forma uma base para o espaço T_pM^*, sendo esta, a base dual associada a base anterior do espaço tangente, isto é

$$((dx_i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq M.$$

Desta forma, como vimos anteriormente, para cada $p \in U$ temos que os vetores

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right)_p \otimes (dx_{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (dx_{j_s})_p \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_r \leq m$$

formam uma base para os espaços $T_r^s(p) = \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{r \ termos} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{s \ termos}$, que é como vimos, a fibra sobre $p \in M$ do fibrado tensorial $T_r^s(M)$. Se $X \in \Gamma\left(T_r^s(M|U)\right)$, então, para cada $p \in U$, $X(p)$ é um elemento do espaço $T_r^s(p)$. Portanto, devem existir $x_{i_1, .., i_s}^{j_1, .., j_r}$, que são as componentes de $X(p)$ nesta base, tais que

$$X(p) = \sum_{\substack{j_1,..,j_r \\ i_1,..,i_s}} x^{j_1,..,j_r}_{i_1,..,i_s} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right)_p \otimes (dx_{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (dx_{j_s})_p.$$

Valendo isto para cada $p \in U$, vemos pois que isto dá origem a m^{r+s} funções diferenciáveis $x^{j_1,..,j_r}_{i_1,..,i_s} \in C^\infty(M)$, chamadas de as *componentes locais* da seção X, na parametrização (x_i). De fato, a diferenciabilidade das componentes, é uma consequência de que por definição toda seção $X \in \Gamma\left(T^s_r(M)\right)$ é uma aplicação diferenciável.

Desta forma, vemos que os campos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) \otimes dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_s} \in \Gamma\left(T^s_r(M \mid U)\right),$$

podem ser vistos, como bases (locais) para as seções $X \in \Gamma\left(T^s_r(M)\right)$, o qual como vimos tem uma estrutura de $C^\infty(M)$-**módulo** com as operações definidas em (2.1).

Ante tudo que foi dito acima, podemos passar as caracterizações locais dos campos tensores como havíamos prometido. Iniciemos então com as métricas Riemannianas. Como sabemos, se g é uma métrica Riemanniana na variedade M, então, a cada $p \in M$ esta associa uma aplicação $g_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_pM; \mathbb{R})$. Assim, pelas identificações feitas neste capítulo, temos que, $g \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*)$. Logo, pelo dito acima, temos que existem funções $(a_{ij}) \in C^\infty(U)$, tais que

$$g = \sum_{ij=1}^{m} a_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Utilizando então do fato de $\{dx_i\}_{(p)}$ ser base dual de $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p)}$, podemos por um simples cálculo, obter que as funções componentes (a_{ij}) de g no sistema local de coordenadas (x_i) são tais que

$$a_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

as quais, como de usual, são denotadas por $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, e portanto

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

ou como é de costume

$$g=\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}dx_i dx_j.$$

Sendo g_p por definição uma forma bilinear, simétrica e positiva, temos pois que esta dá origem a uma matriz deste mesmo tipo, a qual neste caso, como pode ser facilmente constatado, admite como componentes, exatamente $g_{ij}(p)$ (funções coordenadas de g em p). Obviamente, a matriz $(g_{ij}(p))$, admite uma matriz inversa, a qual denoteremos por $(g^{ij}(p))$. Como veremos em seguida, as componentes desta matriz $(g^{ij}(p))$, são exatamente as funções componentes da métrica dual g^*. Com efeito, sendo por definição $g_p^* \in \mathcal{L}(T_pM^*, T_pM^*; \mathbb{R})$, temos novamente pelas identificações feitas anterior-
mente $g \in \Gamma(TM \otimes TM)$, donde, pelo que dissemos acima, devem existir funções $b_{ij} \in C^\infty(U)$, tais que

$$g^*=\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\otimes\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

onde temos que

$$b_{ij}=g^*(dx_i,dx_j).$$

Então, utilizando da definição (2.6), bem como das expressões (2.4) e (2.5), obtemos que

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= g^*(dx_i,dx_j)=g\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\sharp,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\sharp\right) \qquad (2.15)\\
&= g\left(\sum_{k=1}^{m} g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right),\sum_{l=1}^{m} g^{jl}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\right)\\
&= \sum_{k,l=1}^{m} g^{ik}g^{jl}g_{kl}\\
&= \sum_{k=1}^{m} g^{ik}\delta_{jk}\\
&= g^{ij}.
\end{aligned}$$

Como afirmado. Detaquemos que o uso das expressões (2.4) e (2.5), como fizemos acima, são de fato a pricipal ferramenta quando se trabalha com operadores duais, tais como a métrica e conexão de TM^*. Como ilustração deste fato, apresentemos uma outra situação na qual isto ocorre.

Seja $X \in T_pM$ e $\omega \in T_pM^*$, tais que

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p \quad \text{e} \quad \omega = \sum_{j=1}^{m} \omega_j (dx_i)_p$$

então, uma aplicação direta das expressões (2.4) e (2.5) implica que

$$X^\flat = \sum_i^m \Big(\sum_j^m g_{ij}(p) X^j\Big)(dx_i)_p \quad \text{e} \quad \omega^\sharp = \sum_i^m \Big(\sum_j^m g^{ij}(p)\omega_j\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p. \tag{2.16}$$

Isto mostra que por exemplo $(dx_i)^\sharp = \sum_{k=1}^{m} g^{ik}(\partial/\partial x_k)$, como inclusive já utilizamos em (2.15).

De um forma geral, o procedimento de obtenção das expressões locais são análogos aos que foram feitos aqui, no decorrer do texto outros casos serão apresentados.

Para encerrar este tópico, relembramos o importante conceito de *diferencial covariante* de campos tensoriais do tipo-(r, s), a qual a cada $T \in \Gamma(T_r^s(M))$, esta associa o campo tensorial $\nabla T \in \Gamma(T_r^{s+1}(M))$, tal que

$$\begin{aligned}\nabla T(X, Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) = {} & XT(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) \\ & -T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) \cdots - T(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \nabla_X^* \omega_r)\end{aligned} \tag{2.17}$$

para $X, Y_1, \dots, Y_s \in \Gamma(TM)$ e $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Gamma(TM^*)$. Utilizando a definição anterior, introduzimos o conceito de *derivada covariante* de campos tensoriais, tal que se $K \in \Gamma(T_r^s(M))$ então definimos

$$(\nabla_X K)(Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) = \nabla K(X, Y_1, \dots, Y_s, \omega_1, \dots, \omega_r) \tag{2.18}$$

para $X, Y_1, \dots, Y_s \in \Gamma(TM)$ e $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Gamma(TM^*)$. Ou seja, para cada $X \in \Gamma(TM)$ temos que $(\nabla_X K) \in \Gamma(T_r^s(M))$.

Expressões Locais no Fibrado Induzido

Nesta seção retomaremos a abordadagem dos fibrados induzidos por uma aplicação $\phi : M \to N$ sobre M, desta vez porém utilizando do fibrado tangente TN de N. Os fatos aqui apresentados, poderiam na realidade, serem descritos como casos específicos de idéias mais gerais, válidas para fibrados vetoriais genéricos, definidos sobre a variedade N, podendo pois, terem sidos desenvolvidos nas seções anterioriores. Optamos pelo contrário, para termos a oportunidade de investigar mais de perto os fatos descritos, apresentando provas e expressões específicas para este caso.

De qualquer forma, quando julgar-mos necessário, afirmaremos simplesmente que tais fatos seguem dos já discutidos anterioriormente. Um outro motivo para nossa escolha, é que os conteúdos abordados, serão utilizados quase que integralmente no próximo tópico, assim, pensamos que tal escolha possa auxiliar bastante no encadeiamento e interligação das idéias.

No que se segue, suporemos que (M, g) e (N, h), são variedades Riemannianas munidas das respectivas conexões compatíveis, apesar de as definições seguintes, como já vimos no capítulo anterior, valerem para situações bem menos restritas.

Como vimos anteriormente, dada uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$, definida entre variedades diferenciáveis e um fibrado vetorial $\zeta : E \to N$ sobre N, podemos definir o fibrado induzido $\zeta^*\phi \;:\; \phi^{-1}\;(E) \;\to\; M$ sobre M, onde $\phi^{-1}(E) = \{(q, v);\; q \in M \; e \; v \in E_q = \zeta^{-1}(q)\}$. Sendo TN um fibrado deste tipo, podemos utilizar tal resultado para justificar a seguinte definição.

Definição 2.3. Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades M, N de dimensões m e n respectivamente. Definimos o fibrado induzido de TN por ϕ, como sendo o fibrado $\zeta : \phi^{-1}(TN) \to M$ sobre M, onde

$$\phi^{-1}(TN) = \{(p, v) \mid p \in M \text{ e } v \in T_{\phi(p)}N\}$$

e

$$\zeta(p, v) = p.$$

Neste caso, temos que a fibra de $\phi^{-1}(TN)$ sobre $p \in M$ é dada (na realidade isomorfa) pelo espaço vetorial n-dimensional $T_{\phi(p)}N$. Uma seção de $\phi^{-1}(TN)$ é uma aplicação

$X : M \rightarrow \phi^{-1}(TN)$, tal que, $X(p) \in T_{\phi(p)}N$ para todo $p \in M$. Denotaremos por $\Gamma(\phi^{-1}(TN))$ o conjunto de tais seções.

Uma forma simples de definirmos seções em $\phi^{-1}(TN)$, é utilizando-se das seções de TM e TN. Dada $X_M \in \Gamma(TM)$, podemos definir uma seção $X_N \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$ tomando por exemplo

$$X_N(p) = d\phi_p(X_M(p)), \quad p \in M.$$

Também, dada $Y_N \in \Gamma(TN)$, definimos $Y_M \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, tomando

$$Y_M(p) = Y_N(\phi(p)) \quad p \in M.$$

Para facilitar a compreensão, denotaremos uma seção deste último tipo por $\phi^{-1}(Y_N)$ ou simplesmente por $Y \circ \phi$.

Observando a forma como foi definido o fibrado induzido, vemos que o modo mais simples de definir-se uma métrica fibrada neste, seria através da métrica de TN. Assim, definiremos uma métrica fibrada em $\phi^{-1}(TN)$, a qual denotaremos por $\phi^{-1}h$ ou $h \circ \phi$, tomando

$$\phi^{-1}h(X, Y)(p) = h(X(p), Y(p))_{\phi(p)}$$

para $p \in M$ e $X, Y \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$. Não é difícil ver, que $\phi^{-1}h$ assim definida é de fato uma métrica fibrada em $\phi^{-1}(TN)$. Nossa intensão agora é definir uma conexão em $\phi^{-1}(TN)$, que seja compatível com tal métrica fibrada. Assim, sejam como antes $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e ∇^N a conexão Riemanniana de N. Definimos uma conexão ∇^ϕ no fibrado induzido $\phi^{-1}(TN)$ como sendo uma aplicação

$$\nabla^\phi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\phi^{-1}(TN)) \rightarrow \Gamma(\phi^{-1}(TN))$$

tal que

$$\nabla^\phi_X Y = \nabla^N_{d\phi(X)} Y$$

para $X \in \Gamma(TM)$ e $Y \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$. A verificação de que ∇^ϕ assim definida é realmente uma conexão em $\phi^{-1}(TN)$, bem como de que esta é compatível com a métrica fibrada

$\phi^{-1}h$ não é difícil, e é feita utilizando-se do fato de que ∇^N é a conexão Riemanniana de (N, h).

Obviamente, não faz sentido falar-mos em conexões simétricas em $\phi^{-1}h$ (ou em qualquer outro fibrado sobre M, diferente de TM). Porém, podemos ver que ∇^ϕ definida como antes, satisfaz uma propriedade semelhante a esta, como veremos no próximo resultado.

Proposição 2.1. *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $X, Y \in \Gamma(TM)$, então*

$$\nabla^\phi_X d\phi(Y) - \nabla^\phi_Y d\phi(X) - d\phi(([X, Y]) = 0.$$

Demonstração: Como a expressão acima é tensorial em X e Y, vemos que é suficiente mostrar a validade de tal afirmação tomando $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ para coordenadas locais (x_i) de uma parametrização de uma vizinhança de $p \in M$. Desta forma, tomamos uma parametrização local (y_α) de uma vizinhança de $y = \phi(x)$. Obtemos que

$$\begin{aligned}
\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} d\phi(\frac{\partial}{\partial x_j}) - \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_j}} d\phi(\frac{\partial}{\partial x_i}) &= \sum_{\alpha=1}^n \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - \sum_{\alpha=1} \nabla^\phi_{\partial_i} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \Big(\frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x_j \partial x_i}\Big) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^n \Big(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big).
\end{aligned}$$

Sendo ϕ por hipótese diferenciável, temos por Schwarz, que todas as suas derivadas segundas são simétricas, isto implica que o primeiro termo da soma da última expressão vale zero. Afirmamos que o segundo também tem este mesmo valor, com efeito

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_i} \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_i} \nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \\
&= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial y_\beta}.
\end{aligned}$$

Como $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, concluímos o resultado. □

Como conseqüência direta da definição ∇^ϕ, temos em primeiro lugar que $\nabla^\phi_X Y(p)$ só depende do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a $X(p)$. Isto provém de fato análogo válido para ∇^N. Com efeito, seja $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$ e $p \in M$. Seja também $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$. Sabemos que $\phi \circ \gamma$ é uma curva em N, tal que $\phi \circ \gamma(0) = \phi(p)$ e que $\frac{d}{dt}\phi \circ \gamma \mid_{t=0} = d\phi_p(X(p)) = \frac{\partial \phi}{\partial X}(p)$. Portanto considerando $Y \mid_{\gamma(t)}$, obtemos um campo de vetores em N ao longo da curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ e assim

$$\nabla^{\phi}_X Y(p) = \nabla^N_{d\phi(X)} Y(p) = \frac{d}{dt}(Y \circ \gamma(t)) \mid_{t=0} .$$

Também, dado $Z \in \Gamma(TN)$, então como $\phi^{-1}(Z) \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, temos que

$$\nabla^{\phi}_X \phi^{-1}(Z) = \phi^{-1}\left(\nabla^N_{d\phi(X)} Z\right).$$

Capítulo 3

Aplicações Harmônicas

Introdução

Quando se estudam as curvas em um variedade Riemanniana, vê-se que as geodésicas surgem de maneira natural como os pontos críticos do funcional energia. Este fato por si só, justifica tal tipo de estudo. Além disto, como se sabe, estas curvas são de extrema importância ao estudo (inclusive da topologia) das variedades Riemannianas.

Gostaríamos então de generalizar tal estudo às aplicações diferenciáveis entre variedades. Como este intuito, definiremos de forma conveniente um funcional (o qual chamaremos de funcional energia), nos espaços $C^\infty(M, N)$ das aplicações diferenciáveis de M em N. Feito isto, buscaremos determinar os pontos críticos deste funcional, nos valendo para este fim, da fórmula da primeira variação de energia.

Durante tal estudo, uma aplicação, a qual chamaremos de segunda forma fundamental, surge, e devida a sua destacada importância, faremos sua abordagem de forma separada, durante a qual, surge o que denominaremos, campo de tensão da aplicação.

Utilizando de tais campos, definiremos o conceito de aplicação harmônica. Como teremos a oportunidade de mostrar, tal definição estende (em um certo sentido a ser esclarecido) às aplicações entre variedades, o conceito de aplicação harmônica; definido previamente para aplicações em espaços euclidianos. Veremos ainda, que no caso em que a variedade M é compacta, tais aplicações são em verdade os pontos críticos do funcional energia.

Energia de Aplicações

Neste tópico, "construiremos" o funcional energia, o qual anunciamos no início. Daremos ainda uma interpretação geométrica deste, o que mostrará que de fato, tal funcional serve aos nossos propósitos.

Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas de dimensões m e n respectivamente e $\phi\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável entre estas variedades, em qual caso denotaremos $\phi \in C^\infty(M, N)$. Mostraremos que a diferencial $d\phi$ desta aplicação, pode ser vista como uma seção de um fibrado conveniente.

Tomemos pois sistemas locais de coordenadas (x_i) e (y_α) em abertos $U \subset M$ e $V \subset N$ respectivamente, de forma que $\phi(U) \subset V$. Assim, para cada $p \in U$ temos que

$$\phi(p) = (\phi_1(p_1, \ldots, p_m), \ldots, \phi_n(p_1, \ldots, p_m)) \tag{3.1}$$

onde $p_1, \ldots, p_m$ são as coordenadas locais de p, e as $\phi_\alpha = y_\alpha \circ \phi$, são funções diferenciáveis que determinam as coordenadas locais de $\phi(p)$.

Sabemos que para cada $p \in M$, tem-se

$$d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$$

é uma aplicação linear do espaço tangente T_pM no espaço $T_{\phi(p)}N$, a qual pode ser representada por uma matriz $n \times m$, com componentes $a_{i\alpha} = (\partial\phi^\alpha/\partial x_i)(p)$, obtida utilizando as coordenadas locais em U. De fato, por (3.1) temos que

$$d\phi_p\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_p\Big) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big)_{\phi(p)} \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Por outro lado, como chegamos a comentar anteriormente, os espaços $\mathcal{L}(T_pM, T_{\phi(p)}; N)$ e $T_pM^* \otimes T_{\phi(p)}N$, são linearmente isomorfos. Com efeito, a cada $f \in \mathcal{L}(T_pM, T_{\phi(p)}N)$, podemos associar a aplicação $f^\otimes \in T_pM^* \otimes T_{\phi(p)}; N$, tal que

$$f^\otimes(v, \omega) = \omega(f(v)) \qquad v \in T_pM \quad e \quad \omega \in T_{\phi(p)}N^*.$$

Sendo $d\phi_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_{\phi(p)}N)$, pela identificação que acabamos de descrever, para todo $p \in M$, temos que

$$d\phi_p \in (T_pM^* \otimes T_{\phi(p)}N).$$

Como $\{(dx_i(p))\}_{\{1\leq i\leq m\}}$ e $\{(\partial/\partial y_\alpha)(\phi(p))\}_{\{1\leq\alpha\leq n\}}$ são bases para T_pM^* e $T_{\phi(p)}N$ respectivamente, temos que

$$(dx_i(p)) \otimes (\partial/\partial y_\alpha)(\phi(p)) \qquad 1 \leq i \leq m \;\; 1 \leq \alpha \leq n$$

constituem uma base para $T_pM^* \otimes T_{\phi(p)}N$. Assim, temos que $d\phi_p$ admite uma representação da forma

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha}(dx_i(p)) \otimes (\partial/\partial y_\alpha)(\phi(p)).$$

Por um cálculo simples obtemos

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}(p)\right)(dx_i(p)) \otimes (\partial/\partial y_\alpha)(\phi(p)). \tag{3.2}$$

Pelo capítulo anterior, sabemos que o fibrado $\phi^{-1}(TN)$ sobre M, é tal que sua fibra sobre $p \in M$, é dada pelo espaço vetorial $T_{\phi(p)}N$, logo, neste caso, podemos ver que o fibrado $TM^* \otimes \phi^{-1}(TN)$, é tal que sua fibra sobre $p \in M$, é dada por $T_pM^* \otimes T_{\phi(p)}N$. Por outro lado, como tivemos a oportunidade de mostrar, para cada $p \in M$, $d\phi \in T_pM^* \otimes T_{\phi(p)}N$, donde concluímos que $d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes \phi^{-1}(TN))$.

Ainda pelo capítulo anterior, sabemos que se os fibrados vetoriais que compõem um produto tensorial admitem métricas fibradas definidas em si, então o mesmo pode ser dito para este último. Desta forma, definimos uma métrica fibrada $g^{\otimes}$ em $TM^* \otimes \phi^{-1}(TN)$, tal que

$$g^{\otimes}(v_1 \otimes \omega_1, v_2 \otimes \omega_2)(p) = g^*(v_1, v_2)(p) \cdot h(\omega_1, \omega_2)(\phi(p)) \qquad p \in M,$$

para $v_1, v_2 \in \Gamma(TM^*)$, $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$.

Sendo $d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes \phi^{-1}(TN))$, podemos utilizar da métrica fibrada $g^{\otimes}$ para definir a norma de $d\phi$, tal que

$$|d\phi|_p^2 = g^{\otimes}(d\phi_p, d\phi_p)_p \qquad p \in M.$$

Assim, por (3.2) temos que

$$
\begin{aligned}
|d\phi|_p^2 &= g^{\otimes}(d\phi_p, d\phi_p)_p \\
&= g^{\otimes}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}\right)(p)(dx_i)_p\otimes\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{\phi(p)}, \sum_{j=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}\right)(p)(dx_j)_p\otimes\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{\phi(p)}\right)_p \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}(p)\right)\left(\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}(p)\right)g^{\otimes}\left((dx_i)_p\otimes\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{\phi(p)}, (dx_j)_p\otimes\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{\phi(p)}\right)_p \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}(p)\right)\left(\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}(p)\right)g^{*}((dx_i)_p, (dx_j)_p)_p\cdot h\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{\phi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{\phi(p)}\right)_{\phi(p)} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x_i}(p)\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_j}(p)g^{ij}(p)\cdot h_{\alpha\beta}(\phi(p)).
\end{aligned}
$$

Sob tais observações, passemos as definições.

Definição 3.1. Seja $\phi\colon M\to N$ uma aplicação diferenciável entre as variedades Riemannianas (M,g) e (N,h). Definimos uma função $e(\phi)\in C^\infty(M)$ por

$$e(\phi)(p) = \frac{1}{2}\left|d\phi\right|^2(p), \qquad p\in M,$$

chamada de *função densidade de energia* da aplicação ϕ.

Pela defnição dada, podemos ver que de fato $e(\phi)\in C^\infty(M)$. Para melhor entender $e(\phi)$, tomemos bases ortonormais $(e_1,\ldots,e_m)$ e $(v_1,\ldots,v_n)$ para T_pM e $T_{\phi(p)}N$ respectivamente . Temos pois que

$$d\phi_p(e_i) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}v_\alpha \qquad i=1,\ldots,m$$

Assim pela expressão (3.3) temos que

$$\left|d\phi\right|^2(p) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}(a_{i\alpha})^2.$$

Por outro lado, temos que

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_{i,\alpha})^2 = \left|d\phi(e_i)\right|^2(p) = \left(\left|d\phi(e_i)\right|(p)/\left|e_i\right|\right)^2.$$

Por esta última expressão, vemos que $\left|d\phi(e_i)\right|^2(p)$, é na realidade, o quadrado da taxa de expansão de $d\phi_p$ na direção e_i. Assim, $\left|d\phi\right|^2(p)$ pode ser interpretada, como sendo a soma dos quadrados das taxas de expansão de $d\phi_p$ em direções ortogonais (de T_pM). Sob tais considerações, definamos a energia da aplicação ϕ da seguinte forma:

Definição 3.2. Seja (M, g), uma variedade Riemanniana compacta. Então a integral de $e(\phi)$ sobre M dada por

$$E(\phi) = \int_M e(\phi) d\mu_g$$

é chamada de *energia* da aplicação ϕ. Onde μ_g é a medida padrão induzida em M pela métrica Riemanniana g (ver apêndice).

Pela definição anterior, vemos que se a variedade M é compacta, então a energia das aplicações pode ser considerada como um funcional

$$E : (M, N) \to \mathbb{R}$$

o qual chamaremos de *funcional energia*.

No que se segue, procuraremos identificar, quais aplicações são pontos críticos para o funcional E (num sentido que será melhor esclarecido), o que será feito através da primeira fórmula de variação de energia. Para este fim, necessitaremos do que chamaremos, segunda forma fundamental de uma aplicação e de seu campo de tensão, conteúdos que passaremos a abordar na próxima seção.

Segunda Forma Fundamental e Campo de Tensão

Diferentemente do que é feito em outros trabalhos, onde a segunda forma fundamental é definida somente para imersões, aqui, seremos um pouco menos restritivos e definiremos esta última para aplicações um pouco mais gerais. Adiante, neste mesmo capítulo, veremos como a definição aqui apresentada se relaciona com a definição clássica. Veremos também, que o estudo desta, revela não somente o comportamento da aplicação que lhe deu origem, como também o comportamento da própria variedade na qual esta se acha definida. Durante toda esta seção, utilizaremos de forma exaustiva das idéias apresentadas nas seções anteriores.

Sejam como antes (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas e $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre tais variedades.

Na seção anterior, vimos que era possível definir-se a métrica fibrada $g^{\otimes}$ no fibrado tensorial $TM^* \otimes \phi^{-1}TN$, e que tal definição era dada, à partir das métricas fibradas g^* e $\phi^{-1}h$ dos fibrados que compunham o produto tensorial acima. Dando prosseguimento ao que foi feito, definiremos uma conexão $\hat{\nabla}$ compatível com $g^{\otimes}$ no fibrado $TM^* \otimes \phi^{-1}TN$, isto é

$$\hat{\nabla} : \Gamma(TM^* \otimes \phi^{-1}TN) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM^* \otimes \phi^{-1}TN).$$

Com efeito, como cada um dos fibrados compondo $TM^* \otimes \phi^{-1}TN$, no caso TM^* e $\phi^{-1}(TN)$, admitem conexões compatíveis com suas respectivas métricas fibradas, pelo capítulo anterior, temos que é possível definirmos uma conexão $\hat{\nabla}$ em $TM^* \otimes \phi^{-1}TN$, tal que

$$\hat{\nabla}_X(du \otimes V) = (\nabla^*_X du) \otimes V + du \otimes \left(\nabla^{\phi}_X V\right)$$

para $X \in \Gamma(TM)$, $du \in \Gamma(TM^*)$ e $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, e que além disto, a conexão assim definida é compatível com a métrica fibrada $g^{\otimes}$.

Como pela seção anterior $d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes \phi^{-1}TN)$, vemos então que é possível considerar a diferencial covariante desta com respeito a $\hat{\nabla}$, obtendo a seção

$$\hat{\nabla} d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes \phi^{-1}TN).$$

a qual chamamos de *segunda forma fundamental* da aplicação ϕ.

Pelas identificações feitas no capítulo anterior, vemos que $\hat{\nabla} d\phi$ assim definida, tanto pode ser vista como uma seção $\hat{\nabla} d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes \phi^{-1}TN)$, quanto como uma aplicação diferenciável bilinear em $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ com valores em $\Gamma(\phi^{-1}(TN))$, isto é, $\hat{\nabla} d\phi \in \mathcal{L}(TM, TM; \phi^{-1}TN)$. Ambas identificações são importantes e de fato serão utilizadas no que se segue. Utilizando por exemplo a última destas, mostraremos um resultado que será de grande utilidade nas próximas seções.

Lema 3.1. *Seja $\phi \in C^{\infty}(M, N)$ e $X, Y \in \Gamma(TM)$. Então temos que*

$$\hat{\nabla} d\phi(X, Y) = \nabla^{\phi}_X d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X Y).$$

Demonstração: Como $d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes \phi^{-1}(TN))$, temos então que esta pode ser escrita como combinação linear de elementos da forma $du \otimes V$ com $du \in \Gamma(TM^*)$ e $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, donde temos que é suficiente mostrar-mos o resultado para os elementos do tipo $du \otimes V$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\nabla} du \otimes V\right](X,Y) &= \left[\hat{\nabla}_X (du \otimes V)\right](Y) \\
&= \left[(\nabla^*_X du) \otimes V + du \otimes \left(\nabla^\phi_X V\right)\right](Y) \\
&= (\nabla^*_X du)(Y) \cdot V + du(Y) \cdot \left(\nabla^\phi_X V\right) \\
&= (X du(Y) - du(\nabla_X Y)) V + du(Y) \cdot \left(\nabla^\phi_X V\right) \\
&= du(Y) \left(\nabla^\phi_X V\right) + X(du(Y)) V - du(\nabla_X Y) V \\
&= \nabla^\phi_X [du(Y)V] - du(\nabla_X Y) V.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{\nabla} d\phi(X,Y) = \nabla^\phi_X d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X Y).$$

Como queríamos demonstrar. □

Utilizando deste último lema, podemos mostrar que $\hat{\nabla} d\phi$ é simétrica e tensorial. Com efeito, pela proposição 2.1 temos

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla} d\phi(fX + gY, Z) &= \nabla^\phi_{(fX+gY)} d\phi(Z) - d\phi(\nabla^M_{(fX+gY)} Z) \\
&= \nabla^N_{d\phi(fX+gY)} d\phi(Z) - d\phi(f\nabla^M_X Z + g\nabla^M_Y Z) \\
&= \nabla^N_{fd\phi(X)+gd\phi(Y)} d\phi(Z) - fd\phi(\nabla^M_X Z) - gd\phi(\nabla^M_Y Z) \\
&= [f\nabla^N_{d\phi(X)} d\phi(Z) - fd\phi(\nabla^M_X Z)] + [g\nabla^N_{d\phi(Y)} d\phi(Z) \\
&- gd\phi(\nabla^M_Y Z)] \\
&= f\hat{\nabla} d\phi(X,Z) + g\hat{\nabla} d\phi(Y,Z)
\end{aligned}$$

para $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. O mesmo procedimento pode ser aplicado a segunda variável, mostrando que é tensorial. Quanto a simetria, novamente pela proposição 2.1

temos

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla} d\phi(X,Y) &= \nabla^{\phi}_X d\phi(Y) - d\phi(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla^{\phi}_Y d\phi(X) + d\phi[X,Y] - d\phi(\nabla^M_X Y) \\
&= \nabla^{\phi}_Y d\phi(X) - d\phi(\nabla^M_X Y - [X,Y]) \\
&= \nabla^{\phi}_Y d\phi(X) - d\phi(\nabla^M_Y X) \\
&= \hat{\nabla} d\phi(Y,X)
\end{aligned}$$

para $X, Y \in \Gamma(TM)$, como afirmado.

Por outro lado, utilizando das caracterizações de $d\phi$ e $\hat{\nabla} d\phi$ como seções, podemos obter mais facilmente, as expressões destas em sistemas locais de coordenadas. Com efeito, seja (x_i) e (y_α) sistemas locais de coordenadas de (M,g) e (N,h) respectivamente. Sendo $d\phi \in \Gamma(TM)$ e $\hat{\nabla} d\phi \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes \phi^{-1}TN)$ temos que

$$d\phi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \nabla_i \phi^\alpha \cdot dx_i \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \circ \phi \tag{3.3}$$

$$\hat{\nabla} d\phi = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \nabla_i \nabla_j \phi^\alpha \cdot dx_i \otimes dx_j \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \circ \phi \tag{3.4}$$

onde $\nabla_i \phi^\alpha$ e $\nabla_i \nabla_j \phi^\alpha$ são as funções componentes de $d\phi$ e $\hat{\nabla} d\phi$ nas parametrizações locais fixadas, as quais são localmente diferenciáveis em M. Como vimos em (3.2)

$$\nabla_i \phi^\alpha = \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i}\right) \tag{3.5}$$

Calculemos então as componentes $\nabla_i \nabla_j \phi^\alpha$. Por questão de simplicidade, nos cálculos abaixo denotaremos $\partial/\partial y_\alpha \circ \phi = y_\alpha^{-1}$ e $dy_\alpha \circ \phi = dy_\alpha^{-1}$. Também, utilizaremos o mesmo símbolo ∇ para as diversas conexões utilizadas. Pelas definições dadas temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j \phi^\alpha &= \hat{\nabla} d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, dy_\alpha^{-1}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, dy_\alpha^{-1}\right) - d\phi \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, dy_\alpha^{-1}\right) - d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} - d\phi \left(\sum_{l=1}^{m} \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, dy_\alpha^{-1}\right) - d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{ij}^l d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_l}, dy_\alpha^{-1}\right) - d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{ij}^l \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_l} - d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

É possível ver também que

$$
\begin{aligned}
d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right) &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right)\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\\
&= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right)\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j} y_\beta^{-1}\right)\\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\left[\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dy_\alpha^{-1}\right)\left(y_\beta^{-1}\right)\right]\\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(dy_\beta^{-1}\left(y_\alpha^{-1}\right)\right) - dy_\alpha^{-1}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} y_\beta^{-1}\right)\right]\\
&= \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\delta_{\alpha\beta}\right) - dy_\alpha^{-1}\left(\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} {}^N\Gamma_{\rho\beta}^{\gamma}\frac{\partial \phi^\rho}{\partial x_i} y_\gamma^{-1}\right)\right]\\
&= -\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\left(\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} {}^N\Gamma_{\rho\beta}^{\gamma}\frac{\partial \phi^\rho}{\partial x_i} dy_\alpha^{-1}\left(y_\gamma^{-1}\right)\right)\\
&= -\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\sum_{\rho=1}^{n} {}^N\Gamma_{\rho\beta}^{\alpha}\frac{\partial \phi^\rho}{\partial x_i}\\
&= -\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^\rho}{\partial x_i}\; {}^N\Gamma_{\rho\beta}^{\alpha}. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Aplicando (3.7) em (3.6) temos que

$$
\nabla_i\nabla_j\phi^\alpha = \; = \frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{l=1}^{m}\Gamma_{ij}^{l}\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_l} - \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\; {}^N\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}.
$$

Donde concluimos que

$$
\hat{\nabla} d\phi \;=\; \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\phi^\alpha}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_k} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{n}\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j}\; {}^N\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}\right) dx_i\otimes dx_j\otimes y_\alpha^{-1}.
$$

Sob as considerações feitas, estamos prontos para definir o conceito de campo de tensão de uma aplicação.

Seja $\{e_i, \cdots, e_m\}$ uma base ortonormal de T_pM. Podemos ver que o vetor dado por

$$
\sum_{i=1}^{m}\hat{\nabla} d\phi(p)(e_i, e_i) \in T_{\phi(p)}N
$$

não depende da particular escolha da base ortonormal de T_pM. Assim, podemos definir uma seção traço$\hat{\nabla} d\phi \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$ tal que

$$
\text{traço}\hat{\nabla} d\phi(p) = \sum_{i=1}^{m}\hat{\nabla} d\phi(p)(e_i, e_i).
$$

É fácil ver que traço$\hat{\nabla} d\phi$ assim definida, de fato é uma seção de $\phi^{-1}TN$. Utilizando de (3.4), vemos que traço$\hat{\nabla} d\phi$ pode ser expresso em termo dos sistemas locais de coordenadas (x_i) e (y_α) de M e N respectivamente por

$$\text{traço}\hat{\nabla} d\phi = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} g^{ij} \nabla_i \nabla_j \phi^\alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(TN)). \tag{3.8}$$

Assim, podemos finalmente definir.

Definição 3.3. Dada uma aplicação diferenciável $\phi \in C^\infty(M, N)$. Dizemos que

$$\tau(\phi) = \text{traço}(\hat{\nabla} d\phi)$$

é o *campo de tensão* da aplicação ϕ.

Na próxima seção, utilizaremos o conceito de campo tensão das aplicações, para definir as aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas.

Adiante, ainda neste capítulo, reobteremos a definição clássica de segunda forma fundamental válida para imersões. Na ocasião, apresentaremos ainda uma interpretação geométrica desta.

Aplicações Harmônicas

Nesta seção definiremos o importante conceito de aplicação harmônica entre variedades Riemannianas. Feito isto, passaremos a estudar algumas propriedades destas, utilizando para este fim, dos conceitos e definições apresentados nos tópicos anteriores, bem como de alguns que apresentaremos no que se segue.

Iniciaremos por definir o que venha ser uma aplicação harmônica entre variedades Riemannianas.

Definição 3.4. Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas. Dizemos que uma aplicação $\phi : M \to N$ é harmônica, se o campo de tensão desta é identicamente nulo, isto é

$$\tau(\phi) = 0.$$

Posteriormente, quando então tratar-mos da regularidade das aplicações harmônicas (ver teorema (5.17)) mostremos que tal definição pode ser na realidade feita para as aplicações que são $C^2(M,N)$.

Um conjunto mais restrito de aplicações, porém com muitas propriedades semelhantes ao das aplicações harmônicas é o das *totalmente geodésicas*, as quais são aplicações $\phi : M \to N$, entre variedades Riemannianas cujas segundas formas fundamentais são identicamente nulas, isto é:

$$\hat{\nabla} d\phi = 0.$$

Tal conjunto de aplicações, desempenha um papel extremamente importante na teoria das variedades Riemannianas, pois entre outras, estas possuem a propriedade de levarem geodésicas em geodésicas , como será mostrado (ver exemplo (3.5)). Uma outra propriedade também bastante importante destas, é que a composição de aplicações totalmente geodésicas ainda é uma aplicação deste mesmo tipo. Com efeito

Proposição 3.1. *Sejam M, N e P variedades Riemannianas e $\phi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ aplicações diferenciáveis entre estas. Denotando a seção $d\psi(\hat{\nabla} d\phi(\cdot,\cdot))$ por $d\psi(\hat{\nabla} d\phi)$ e $\hat{\nabla} d\psi(d\phi(\cdot), d\phi(\cdot))$ por $\hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi)$ temos*

$$\hat{\nabla} d(\psi \circ \phi) = d\psi(\hat{\nabla} d\phi) + \hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi).$$

Demonstração: Dados $X, Y \in \Gamma(TM)$ temos que

$$\begin{aligned} d\psi\left[\hat{\nabla} d\phi(X,Y)\right] &= d\psi\left[\nabla^{\phi}_{X} d\phi(Y) - d\phi\left(\nabla^{M}_{X} Y\right)\right] \\ &= d\psi\left(\nabla^{\phi}_{X} d\phi(Y)\right) - d\psi\left(d\phi\left(\nabla^{M}_{X} Y\right)\right) \end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} d\psi(d\phi(X), d\phi(Y)) &= \nabla^{\psi}_{d\phi(X)} d\psi(d\phi(Y)) - d\psi\left(\nabla^{N}_{d\phi(X)} d\phi(X)\right) \\ &= \nabla^{\psi}_{d\phi(X)} d\psi(d\phi(Y)) - d\psi(\nabla^{\phi}_{X} d\phi(Y)). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} d\psi\left[\hat{\nabla} d\phi(X,Y)\right] + \hat{\nabla} d\psi(d\phi(X), d\phi(Y)) &= \nabla^{\psi}_{d\phi(X)} d\psi(d\phi(Y)) - d\psi\left(d\phi\left(\nabla^M_X Y\right)\right) \\ &= \nabla^P_{d\psi(d\phi(X))} d\psi(d\phi(Y)) - d\psi\left(d\phi\left(\nabla^M_X Y\right)\right) \\ &= \nabla^P_{d(\psi\circ\phi)(X)} d(\psi\circ\phi)(Y) - d\psi\left(d\phi\left(\nabla^M_X Y\right)\right) \\ &= \nabla^{\psi\circ\phi}_X d(\psi\circ\phi)(Y) - d(\psi\circ\phi)\left(\nabla^M_X Y\right) \\ &= \hat{\nabla} d(\psi\circ\phi)(X,Y). \end{aligned}$$

Isto encerra a demostração. □

Assim, pela proposição anterior, podemos ver que de fato a composição de aplicações totalmente geodésicas ainda é uma aplicação deste mesmo tipo. Ressaltamos que em geral, isto não é válido para aplicações harmônicas. De fato.

Proposição 3.2. *Sejam M, N e P variedades Riemannianas e $\phi : M \to N$, $\psi : N \to P$ aplicações diferenciáveis entre estas, então*

$$\tau(\psi\circ\phi) = d\psi(\tau(d\phi) + \textit{traço}(\hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi)).$$

Demonstração: Utilizando da mesma notação da proposição anterior temos

$$\begin{aligned} \tau(\psi\circ\phi) &= \text{traço}\hat{\nabla}(d\psi\circ d\phi) \\ &= \text{traço}\left[d\psi\left(\hat{\nabla}(d\phi)\right) + \hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi)\right] \\ &= \text{traço}\left[d\psi\left(\hat{\nabla}(d\phi)\right)\right] + \text{traço}\left[\hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi)\right] \\ &= d\psi\left[\text{traço}\hat{\nabla}(d\phi)\right] + \text{traço}\left[\hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi)\right] \\ &= d\psi(\tau(d\phi) + \text{traço}\left[\hat{\nabla} d\psi(d\phi, d\phi)\right] \end{aligned}$$

onde na última passagem utilizamos que traço$(d\psi(\hat{\nabla}(d\phi)) = d\psi(\text{traço}\hat{\nabla}(d\phi)$. De fato,

$$\begin{aligned} \text{traço}\left(d\psi(\hat{\nabla}(d\phi))\right) &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} d\psi\left[(\hat{\nabla} d\phi)\right](e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} d\psi\left[(\hat{\nabla} d\phi)(e_i, e_j)\right] \\ &= d\psi\left[\sum_{i,j=1}^m g^{ij}(\hat{\nabla} d\phi)(e_i, e_j)\right] \\ &= d\psi(\text{traço}\hat{\nabla} d\phi). \end{aligned}$$

O que confirma o resultado. $\square$

Passaremos agora à abordagem direta das aplicações harmônicas. Iniciaremos por mostrar, que de fato, o conceito de campo de tensão é o modo apropriado de generalizar o conceito de função harmônica. De início, mostremos este fato para o caso das funções reais.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\phi : M \to \mathbb{R}$ uma função real diferenciável definida nesta. Tomando uma base (local) ortonormal (e_i) para no espaço tangente TM de M temos que

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \text{traço}(\hat{\nabla} df) && (3.9)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \hat{\nabla} d\phi(e_i, e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(\nabla^f_{e_i} df(e_i) - df\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{m} (e_i(e_i(f)) - \nabla^M_{e_i} e_i(f))\\
&= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla^M_{e_i} grad(f), e_i)\\
&= div(grad(f))\\
&= \Delta^M f. && (3.10)
\end{aligned}$$

onde Δ^M é o operador de Laplace-Beltrami de M. Portanto, vemos que uma função real possui um campo de tensão identicamente nulo, se e somente se seu Laplaciano também o for, isto é

$$\tau(f) = 0 \Leftrightarrow \Delta^M f = 0.$$

Para mostrar-mos a validade do resultado anterior para outras situações, precisaremos de mais alguns resultados. No que se segue, abteremos a expressão local de $\tau(\phi)$ em parametrizaçõe locais (x_i) e (y_α) de (M, g) e (N, h) respectivamente. Por definição temos que

$$
\begin{aligned}
\tau(\phi) &= \text{traço}\hat{\nabla} d\phi \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\hat{\nabla} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left[\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} d\phi(\frac{\partial}{\partial x_j}) - d\phi(\nabla^{M}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j})\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left[\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}) - d\phi(\nabla^{M}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j})\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left[\sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j})\frac{\partial}{y_\gamma}) - d\phi(\nabla^{M}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j})\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left[\sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\nabla^{N}_{d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j})\frac{\partial}{y_\gamma}) - d\phi(\nabla^{M}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j})\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left\{\sum_{\gamma=1}^{n}\left[\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\left(\nabla^{N}_{\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_\beta}}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right) + (\frac{\partial^2 \phi^{\gamma}}{\partial x_i \partial x_j})\frac{\partial}{y_\gamma}\right]\right\} \\
&- \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij} d\phi(\frac{\partial}{\partial x_k}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\left[\sum_{\gamma,\beta=1}^{n}\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i}\left(\nabla^{N}_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)\right] + \sum_{i,j,\gamma=1} g^{ij}\frac{\partial^2 \phi^{\gamma}}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{y_\gamma} \\
&- \sum_{i,j,k,\alpha=1} g^{ij}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \sum_{i,j,\gamma,\beta\alpha=1}\left[g^{ij}\ {}^{N}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right] + \sum_{i,j,\alpha=1} g^{ij}\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&- \sum_{i,j,k,\alpha=1} g^{ij}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{i,j,\gamma,\beta=1} g^{ij}\left(\ {}^{N}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k}\right]\frac{\partial}{\partial y_\alpha}
\end{aligned}
$$

portanto

$$
\begin{aligned}
\tau(\phi)^{\alpha} &= \sum_{i,j,\gamma,\beta=1} g^{ij}\ {}^{N}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k} \\
&= \Delta^{M}(\phi)^{\alpha} + \sum_{i,j,\gamma,\beta=1} g^{ij}\ {}^{N}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial \phi^{\gamma}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi^{\beta}}{\partial x_i} \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

onde na última passagem utilizamos que $\Delta^{M}(\phi)^{\alpha} = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2 \phi^{\alpha}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{i,j}\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x_k}$. De fato, pelo visto anteriormente, para o caso das funções reais, temos que $\Delta^M(\phi)^\alpha = \tau(\phi^\alpha)$. Mas

$$\begin{aligned}
\tau(\phi^\alpha) &= \text{traço}\hat{\nabla} d\phi^\alpha \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\hat{\nabla} d\phi^\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}[\nabla^{\phi^\alpha}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} d\phi^\alpha(\frac{\partial}{\partial x_j}) - d\phi^\alpha(\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j})] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}[\nabla^{\phi^\alpha}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_j}] - \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\ {}^M\Gamma^k_{ij} d\phi^\alpha(\frac{\partial}{\partial x_k}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij}\ {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Donde vemos a validade da expressão anterior.

Apresentemos então alguns exemplos de aplicações harmônicas.

Exemplo 3.1 (Aplicações constantes)**.** Como não poderia deixar de ser, mostremos que as aplicações constantes entre variedades Riemannianas são aplicações harmônicas. Com efeito, seja $\phi : M \to N$ uma aplicação constante. Neste caso, existe um ponto $q \in N$ tal que

$$\phi(x) = q \qquad x \in M.$$

Assim, temos que a diferencial $d\phi$ de ϕ é identicamente nula (i.e $d\phi = 0$). Donde temos que o campo de tensão de ϕ também o é, ou seja, $\tau(\phi) = 0$. O que mostra que ϕ de fato é harmônica.

Exemplo 3.2 (Aplicação Identidade)**.** Afirmamos que também a aplicação identidade entre variedades Riemannianas $Id : M \to M$, é uma aplicação harmônica. Com efeito, para toda aplicação $\phi : M \to M$ da variedade M nela mesma, temos que:

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= \sum_{i=1}^{m} \hat{\nabla} d\phi(e_i, e_i) = \nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right) \qquad (3.12) \\
&= \nabla^M_{d\phi(e_i)} d\phi(e_i) - d\phi\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)
\end{aligned}$$

onde como antes, (e_i) é uma base ortonormal do espaço tangente T_xM para cada $x \in M$. Assim, se $\phi = Id$, isto é

$$\phi(x) = x \qquad x \in M.$$

Então, neste caso, para cada $x \in M$ temos que a aplicação $d\phi_x : T_xM \to T_xM$ é a aplicação identidade, donde por (3.12) temos que

$$\tau(Id) = \nabla^M_{e_i} e_i - \nabla^M_{e_i} e_i = 0,$$

o que confirma a afirmação feita.

Utilizando da expressão local para o campo de tensão apresentada em (3.11), podemos apresentar mais algumas situações.

Exemplo 3.3 (Funções harmônicas)**.** Seja $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Neste caso temos que ${}^N\Gamma^k_{ij} = 0$, logo pela expressão (3.11), temos

$$\tau(\phi) = (\Delta^M(\phi^1), \cdots, \Delta^M(\phi^N)).$$

Portanto, ϕ é harmônica se e somente se cada uma de suas funções coordenadas o é. Em particular, se M é compacto, então como veremos, pelo princípio do máximo ϕ é *cte*.

Exemplo 3.4 (Geodésicas)**.** Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to M$ uma curva regular e (x_k) um sistema de coordenadas em M. Logo pelo que vimos temos que

$$\tau(\gamma)^k = \frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j}^{m} {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{d\ \gamma^i}{dt}\frac{d\gamma^j}{dt} = \frac{D}{dt}(\gamma'(t))^k.$$

Portanto, dizer que uma curva γ de M é harmônica, significa dizer que esta é geodésica.

Exemplo 3.5 (Aplicações totalmente geodésicas)**.** Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação totalmente geodésica entre as variedades Riemannianas M e N, isto é, ϕ possui a segunda forma fundamental identicamente nula $\nabla d\phi = 0$. Mostremos que a imagem de uma geodésica de M por ϕ é uma geodésica de N, ou seja, que ϕ leva geodésicas em geodésicas. A recíproca também é verdadeira.

Com efeito, seja I um intervalo aberto e $\alpha : I \to M$ uma geodésica de M. Neste caso, como vimos no exemplo anterior, α é uma aplicação harmônica, isto é $\tau(\alpha) = 0$. Assim, pela proposição (3.2) temos que a curva $\tilde{\alpha} = \phi \circ \alpha : I \to N$ é tal que

$$\tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\phi \circ \alpha) = d\phi(\tau(\alpha)) + \nabla d\phi(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}). \tag{3.13}$$

Assim, se ϕ é totalmente geodésica, então $\nabla d\phi = 0$, logo $\tau(\tilde{\alpha}) = 0$, e portanto a curva $\tilde{\alpha} : I \to N$ é uma geodésica de N.

Reciprocamente, suponhamos que a aplicação $\phi : M \to N$, tenha a propriedade de levar cada geodésica de M em uma geodésica de N. Isto é, para cada curva $\alpha : I \to M$ é tal que $\tau(\alpha) = 0$, temos que $\tau(\tilde{\alpha}) = 0$. Neste caso, por (3.13) temos que

$$\nabla d\phi(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}) \equiv 0,$$

isto é

$$\nabla d\phi(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt})(x) = 0 \qquad \text{para todo } \ x \in M \tag{3.14}$$

Por outro lado, para cada $x \in M$ e $v \in T_xM$, existe uma geodésica α de M, tal que $\alpha(0) = x$ e $\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t=0} = v$, donde conclui-se de (3.14) que

$$d\phi(v, v)(x) = 0 \qquad x \in M.$$

Afirmamos que isto implica que

$$\nabla d\phi(x) = 0 \qquad x \in M.$$

De fato, sendo $\nabla d\phi$ simétrica e tensorial, temos que

$$\nabla d\phi(u, v)(x) = -\frac{1}{2}\nabla d\phi(u - v, u - v)(x) = 0,$$

para todo $u, v \in T_xM$, daí o afirmado.

Exemplo 3.6. Seja $\phi : M \to S^{n-1}$ uma aplicação com valores na esfera unitária, $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão e $\hat{\phi} = i \circ \phi$. Então, pela proposição 3.2 temos que

$$\tau(\hat{\phi}) = di(\tau(\phi)) + \text{traço}(\hat{\nabla} di(d\phi, d\phi)).$$

Observando a equação acima vemos que o primeiro termo do lado direito é tangente a esfera unitária e como "i'' óbviamente uma imersão isométrica, temos pela identificação feita anteriormente que o segundo termo é ortonormal a esta. Assim ϕ é harmônica se somente se a parte tangencial de $\tau(\hat{\phi})$ se anula. Tomemos $f : \mathbb{R}^n \to R$, tal que

$f(x) = \|x\|^2$, então

$$\begin{aligned}
0 = \nabla^M(f \circ \hat{\phi}) &= \tau(f \circ \hat{\phi}) = df(\tau(\hat{\phi})) + traço(\hat{\nabla} df(d\hat{\phi}, d\hat{\phi})) \\
&= \left\langle grad(f), \tau(\hat{\phi}) \right\rangle + traço(\hat{\nabla} df(d\hat{\phi}, d\hat{\phi})) \\
&= 2(\left\langle \hat{\phi}, \tau(\hat{\phi}) \right\rangle + |d\phi|^2).
\end{aligned}$$

Assim temos que ϕ é harmônica se somente se $\tau(\hat{\phi}) = -|d\phi|^2 \hat{\phi}$.

Exemplo 3.7. Seja $\pi : \mathbb{R}^n/\{0\} \to S^{n-1}$, tal que $\phi(x) = \frac{x}{|x|}$. Pelo exemplo anterior temos que

$$\tau(\hat{\pi}) = -(n-1)\,|x|^{-2}\,\hat{\pi}(x),$$

Assim temos que π é harmônica e $|d\pi_x|^2 = (n-1)\,|x|^{-2}$.

A título de informação, apresentaremos sem demonstração, dois resultados relacionados com os conceitos de aplicações harmônicas aqui apresentados. O primeiro de tais resultados foi provado por Sampson e pode ser encontrado em [35].

Teorema 3.1 (Continuação Única)**.** *Sejam $f, g : M \to N$ duas aplicações harmônicas. Se estas coincidem em algum aberto então estas são idênticas; na relidade tal conclusão é válida se estas possuem todas as suas derivadas parciais e de todas as ordens iguais em algum ponto. Em particular, se uma aplicação harmônica é constante em um aberto, então esta é constante em toda M.*

Um outro resultado também muito importante é o seguinte:

Teorema 3.2. *Para cada $x \in M$ existe um sistema local de coordenadas (U, x_i) em uma vizinhança U de p, tal que todas as funções coordenadas são harmônicas.*

Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [17].

Na próxima seção, quando então tratar-mos da variação de energia das aplicações, apresentaremos mais algumas noções geométricas do conceito de aplicação harmônica. Em tal situação, seremos capazes de apresentar mais algumas propriedades importantes destas.

Fórmulas de Variação de Energia

Nesta seção, retomaremos o estudo do funcional energia E, definido no início do capítulo. Agora que já possuimos as ferramentas apropridas, podemos passa ao estudo dos pontos críticos deste. Mostraremos que tais pontos críticos são aplicações harmônicas. Em verdade, historicamente as aplicações harmônicas foram introduzidas como soluções deste problema variacional envolvendo o funcional energia. De fato, no caso em que a variedade M é compacta, estes conceitos são na realidade equivalentes, como teremos a oportunidade de ver, podendo mesmo a definição de aplicação o harmônica ser dada desta forma.

Definição 3.5. Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas, com M além disto compacta. Dada uma aplicação diferenciável $\phi \in C^{\infty}(M, N)$. Dizemos que uma aplicação $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to N$ é uma variação de ϕ, se

$$F(0, x) = \phi(x) \qquad x \in M.$$

Denotando $F(t, x) = \phi_t(x)$ para $x \in M, t \in I = (-\epsilon, \epsilon)$, vemos pela definição que $\{\phi_t\}_{t \in I}$ constitui uma família de aplicações diferenciáveis, isto é, $\phi_t \in C^{\infty}(M, N)\ \forall t \in I$ e $\phi_o = \phi$.

Fixado $x \in M$, vemos que $\phi_t(x) = \phi(t, x) : I \to N$, define uma curva diferenciável em N, a qual passa por $\phi(x)$ em $t = 0$. Consequentemente, os vetores tangentes a estas curvas, os quais denotaremos por

$$V(x) = \frac{d\phi_t(x)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \phi(0, x)}{\partial t} \in T_{\phi(x)}N \qquad x \in M$$

dão origem a uma seção $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$. Tal seção é denominada *Campo Variacional* de F. Desta forma, vemos que cada variação de ϕ, dá origem a uma seção $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$. Afirmamos que a recíproca neste caso também é verdadeira.

Proposição 3.3. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas, com M compacta. Seja $\phi \in C^{\infty}(M, N)$ uma aplicação diferenciável e $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$ uma seção do fibrado induzido. Então existe uma variação $F = \phi_t : I \times M \to N$ tal que*

$$\frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = V(p).$$

Demonstração: Utilizando da compacidade de M, bem como da continuidade do campo V, podemos obter um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que a aplicação $exp_{\phi(x)}(tV(x))$ esteja definida para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon) = I$ e $x \in M$. Definamos

$$F(t,x) = exp_{\phi(x)}(tV(x)) \qquad (t,x) \in I \times M.$$

É fácil ver que F assim definida constitui uma variação de ϕ, e que

$$V(x) = \frac{\partial \phi_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0} \qquad x \in M.$$

O que confirma a afirmação feito. $\square$

Fórmula da Primeira Variação de Energia

Passamos agora a estudar a energia das variações. Seja $F = \{\phi_t\}_{t\in I}$ como antes, uma variação de ϕ. Como por definição $\phi_t \in C^\infty(M,N)$ para cada $t \in I$, podemos considerar a energia de cada uma das funções desta família, ou seja

$$E(\phi_t) = \frac{1}{2}\int_M |d\phi_t|^2 \, d\mu_g.$$

Temos então, que restrita a esta família, $E(\phi_t)$ torna-se uma função em t. Assim, podemos considerar a variação de $E(\phi_t)$.

Teorema 3.3 (Fórmula da Primeira Variação de Energia)**.** *Seja $F = \{\phi_t\}_{t\in I}$ uma variação da aplicação $\phi \in C^\infty(M,N)$. Então*

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t)\Big|_{t=0} = -\int_M \langle V, \tau(\phi)\rangle \, d\mu_g,$$

onde V é o campo variacional de F, $\tau(\phi)$ é o campo de tensão de ϕ e $\langle \ , \ \rangle$ é a métrica do fibrado induzido $\phi^{-}TN$, a qual também denotaremos por h.

Demonstração: Sendo (M,g) uma variedade Riemanniana com uma conexão compatível definida em si, então o mesmo pode ser dito para $(I \times M)$, ou seja, $(I \times M)$ é uma variedade diferenciável e admite uma métrica e uma conexão compatível com esta última definidas em si, as quais por motivo de simplicidade denotaremos por $\langle \ , \ \rangle$ e ∇. Neste caso, temos também que $T_{(t,x)}(I \times M) \cong T_xM \oplus T_tI$. Tomemos uma base local ortonormal (e_i) do fibrado tangente TM, e denotemos $e_i = (0, e_i) \in \Gamma(T(I \times M))$. Como $[(0, e_i), (d/dt, 0)] = 0$, pela proposição 2.1 temos que

$$\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi(e_i) = \nabla^{\Phi}_{e_i} d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}).$$

Definamos implicitamente o campo de vetores $(0, X_t) \in \Gamma(T((I \times M))$ onde $X_t \in \Gamma(TM)$ para $t \in I$ tal que

$$\langle X_t, (0, Y)\rangle = h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(Y))$$

para $Y \in \Gamma(TM)$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m} h(d\Phi(e_i), d\Phi(e_i)) &= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\Phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi(e_i), d\Phi(e_i)) = \sum_{i} h(\nabla^{\Phi}_{e_i} d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(e_i)) - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \nabla^{\Phi}_{e_i} d\Phi(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(e_i)) - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(\nabla^{M}_{e_i} e_i)) \\
&- \sum_{i=1}^{m} h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \hat{\nabla} d\Phi(e_i, e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i \langle X_t, e_i\rangle - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(\nabla^{M}_{e_i} e_i)) \\
&- \sum_{i=1}^{m} h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \hat{\nabla} d\Phi(e_i, e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} [e_i \langle X_t, e_i\rangle - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\Phi(\nabla^{M}_{e_i} e_i))] \\
&- \sum_{i=1}^{m} h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \hat{\nabla} d\Phi(e_i, e_i)) \\
&= div(X_t) - \sum_{i=1}^{m} h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \hat{\nabla} d\Phi(e_i, e_i)) \\
&= div(X_t) - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \sum_{i=1}^{m} \hat{\nabla} d\Phi(e_i, e_i)) \\
&= div(X_t) - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \tau(\Phi)).
\end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\Phi_t) &= \frac{d}{dt}\int_M \frac{1}{2}\langle d\Phi, d\Phi\rangle\, d\mu_g = \int_M \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle d\Phi, d\Phi\rangle\, d\mu_g \\
&= \int_M \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m} h(d\Phi(e_i), d\Phi(e_i))d\mu_g \\
&= \int_M div(X_t)d\mu_g - h(d\Phi(\frac{\partial}{\partial t}), \tau(\Phi))d\mu_g \\
&= \int_M div(X_t)d\mu_g - \int_M h(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}, \tau(\Phi))d\mu_g.
\end{aligned}
$$

Sendo M por hipótese compacta, pelo teorema de divergência (ver apêndice), temos que a primeira das integrais acima se anula. Assim, temos

$$
\frac{d}{dt}E(\Phi_t)\Big|_{t=0} = -\int_M h(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}, \tau(\Phi))d\mu_g.
$$

Como afirmado. $\square$

Utilizando o teorema anterior, podemos obter o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades de Riemannianas, com M compacta e $\phi \in C^\infty(M, N)$. Uma condição necessária e suficiente para que $\frac{d}{dt}E(\phi_t)\Big|_{t=0} = 0$, para qualquer que seja a variação $F = \{\phi_t\}_t$ de ϕ, é que tenhamos o campo tensão de ϕ identicamente nulo, isto é $\tau(\phi) \equiv 0$.*

Demonstração: A condição é realmente necessária, de fato, como vimos, dado um campo $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, existe uma variação F de ϕ, cujo campo variacional é V. Assim, sendo $\tau(\phi)$ um de tais campos, poderíamos tomar uma variação de ϕ cujo campo variacional fosse $\tau(\phi)$, logo pelo teorema anterior, teríamos que $\tau(\phi) \equiv 0$. A suficiência é imediata. $\square$

A partir do corolário 3.1, podemos como dito no início, caracterizar as aplicações harmônicas (definidas em variedades compactas), como os pontos críticos do funcional energia E.

Corolário 3.2. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades de Riemannianas, com M compacta. Então, uma aplicação $\phi \in C^\infty(M, N)$ é harmônica se e somente se é um ponto crítico para o funcional energia.*

Observação 3.1. No resultado anterior, bem como no restante deste e do próximo tópico, poderíamos nos restringir as aplicações de suporte compacto (neste caso as variações utilizadas seriam de suporte compacto), ao invés de exigir que a variedade de partida M fosse compacta. Preferimos fazer desta forma, pois para os nossos propósitos posteriores estas restrição será necessária.

Fórmula da Segunda Variação de Energia

Na sequência, apresentaremos a segunda fórmula de variação de energia, para aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas.

Seja (M, g) variedade Riemanniana compacta de dimensão m, (N, h) uma variedade Riemanniana de dimensão n, $\phi \in C^\infty(M, N)$ uma aplicação harmônica entre tais variedades, $I = (-\epsilon, \epsilon)$ um intervalo aberto e $F = \{u_t\}_{t\in I}$ uma variação diferenciável de ϕ, cujo campo variacional é dado por

$$V = \frac{d\phi_t(x)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial\phi(0, x)}{\partial t} \in T_{\phi(x)}N \in \Gamma\left(\phi^{-1}TN\right).$$

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 3.4 (Fórmula da Segunda Variação de Energia)**.** *Seja $u \in C^\infty(M, N)$ uma aplicação harmônica e $F = \{u_t\}_{t\in I}$ uma variação diferenciável de ϕ. Então*

$$\frac{d^2E(u_t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = -\int_M h\left(V, traço\left(R^N\left(V, \phi\right)\phi + \nabla\nabla V\right)\right) d\mu_g,$$

onde V é o campo variacional de ϕ e R^N é o tensor curvatura de N.

Demonstração: De forma análoga a que fizemos na demonstração da primeira fórmula de variação de energia, consideraremos a variedade produto $I \times M$, munida da métrica produto e da conexão compatível com esta, consideraremos ainda, o produto tensorial $T\left(I \times M\right)^* \otimes F^{-1}TN$, o qual, como vimos, também admite uma métrica fibrada e uma conexão compatível com esta. Tomemos ainda, da mesma forma que fizemos anteriormente, uma base local ortonormal (e_i) do fibrado tangente TM, e denotemos

$e_i = (0, e_i) \in T_{(t,p)}(I \times M)$. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2E(u_t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dE(u_t)}{dt}\right) \qquad (3.15)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_M h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^m \nabla du(e_i, e_i)\right) d\mu_g\right)\\
&= \int_M \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla du(e_i, e_i)\right) d\mu_g\\
&= \int_M \sum_{i=1}^m \left[h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla du(e_i, e_i)\right) + h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla du(e_i, e_i)\right)\right] d\mu_g.
\end{aligned}$$

Mas pelo lema (3.1) temos que

$$\nabla du(e_i, e_i) = \nabla_{e_i} du(e_i) - du\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right).$$

Donde

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla du(e_i, e_i) = \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla_{e_i} du(e_i) - \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right).$$

E portanto

$$\begin{aligned}
h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla du(e_i, e_i)\right) &= h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla_{e_i} du(e_i)\right)\\
&- h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du\left(\nabla^M_{e_i} e_i\right)\right). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Por outro lado, por definição temos que

$$\begin{aligned}
R^N\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du(e_i)\right) du(e_i) &= \nabla^N_{du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla^N_{du(e_i)} du(e_i) - \nabla^N_{du(e_i)} \nabla^N_{du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du(e_i)\\
&- \nabla^N_{\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du(e_i)\right]} du(e_i)
\end{aligned}$$

Porém, como pode ser facilmente verificado com o auxílio da proposição (2.1)

$$\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du(e_i)\right] = 0.$$

Donde temos que

$$\nabla^N_{du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} \nabla^N_{du(e_i)} du(e_i) = R^N\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du(e_i)\right) du(e_i) + \nabla^N_{du(e_i)} \nabla^N_{du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du(e_i) \qquad (3.17)$$

Mostremos também que

$$\left(\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(e_i, e_i) = \nabla_{du(e_i)} \nabla_{du(e_i)} du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \nabla_{\nabla^M_{e_i} e_i} du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_i,e_i) &= \left[\nabla\left(\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right](e_i,e_i)\\
&= \nabla_{e_i}\left[\left(\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(e_i)\right]-\left[\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)\\
&= \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-\nabla_{\nabla^M_{e_i}e_i}du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= \nabla_{e_i}\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du(e_i)-\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right).
\end{aligned}$$

Onde na última passagem utilizamos a simetria provinda proposição (2.1). Logo temos que

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du\left(\nabla^M_{e_i}e_i\right)=\nabla_{e_i}\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du(e_i)-\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_i,e_i). \tag{3.18}$$

Substituindo então (5.22) e (5.23) em (5.21) obtemos que

$$\begin{aligned}
&h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\nabla du(e_i,e_i)\right)\\
&\quad= h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),R^N\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),du(e_i)\right)du(e_i)+\nabla^N_{du(e_i)}\nabla^N_{du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du(e_i)\right]\\
&\quad -h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\nabla_{e_i}\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du(e_i)-\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_i,e_i)\right].
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
h\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\nabla du(e_i,e_i)\right) &= h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),R^N\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),du(e_i)\right)du(e_i)\right]\\
&+ h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_i,e_i)\right]
\end{aligned}$$

Assim por (3.15) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2E(u_t)}{dt^2} &= \int_M\sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\nabla du(e_i,e_i)\right)d\mu_g\\
&- \int_M\sum_{i=1}^m h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),R^N\left(du(e_i),du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)du(e_i)+\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_i,e_i)\right]d\mu_g\\
&= \int_M h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\sum_{i=1}^m\nabla du(e_i,e_i)\right)d\mu_g\\
&- \int_M h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\sum_{i=1}^m R^N\left(du(e_i),du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)du(e_i)+\sum_{i=1}^m\nabla\nabla du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(e_i,e_i)\right]d\mu_g\\
&= \int_M h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\tau(u_t)\right)d\mu_g\\
&- \int_M h\left[du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\text{traço}\left(R^N\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),du_t\right)du_t+\nabla\nabla du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right]d\mu_g
\end{aligned}$$

Assim em $t = 0$ temos que

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2E(u_t)}{dt^2}\right|_{t=0} &= \int_M h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}, \tau(\phi)\right) d\mu_g \\ &- \int_M h\left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}, \text{traço}\left(R^N\left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}, du_0\right) du_0 + \nabla\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)\right) d\mu_g\end{aligned}$$

Sendo ϕ por hipótese harmônica, temos que $\tau(\phi) = 0$, e portanto

$$\left.\frac{d^2E(u_t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_M h\left(V, \text{traço}\left(R^N\left(V, d\phi\right) d\phi + \nabla\nabla V\right)\right) d\mu_g.$$

Como queríamos demonstrar. □

Imersões

Neste tópico, estudaremos o caso em que $\phi \in C^\infty(M, N)$ é uma imersão. Aqui teremos finalmente a oportunidade de relacionar-mos, como prometido, a definição clássica da segunda forma fundamental, válida para imersões, com a definição desta apresentada nas seções anteriores. Algumas propriedades minimizantes das aplicações harmônicas, também serão apresentadas.

Sejam M^m e $N^{m+k=n}$ variedades de Riemannianas e $\phi \in C^\infty(M, N)$ uma imersão isométrica. Podemos então identificar $X \in \Gamma(TM)$ com $d\phi(X) \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$ e considerar T_pM como sendo um subespaço de $T_{\phi(p)}N$ onde $p \in M$. Desta forma, podemos utilizar o produto interno definido em $T_{\phi(p)}N$ para decompor este em soma direta

$$T_{\phi(p)}N = T_pM \oplus T_pM^\perp$$

onde $T_pM^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_{\phi(p)}N$. Assim, temos que se $v \in T_pM$ então

$$v = v^T + v^N, \quad \textit{onde} \quad v^T \in T_pM \textit{ e } v^N \in T_pM^\perp$$

e v^T, v^N são únicos. Dados pois $X, Y \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, então pela proposição 3.1 temos

$$\hat{\nabla} d\phi(X, Y) = \nabla^N_{d\phi(X)} d\phi(Y) - d\phi(\nabla^M_X Y).$$

Portanto

$$\nabla^N_{d\phi(X)} d\phi(Y) = \hat{\nabla} d\phi(X,Y) + d\phi(\nabla^M_X Y).$$

Assim, vemos que neste caso, $\hat{\nabla} d\phi$ é a segunda forma fundamental de M no sentido clássico, ou seja, $\hat{\nabla} d\phi(X,Y)$ é a projeção de $\nabla^N_X Y$ no espaço $T_pM^{\perp}$ (isto é, a projeção ortogonal de $\nabla^N_X Y$), de acordo com as identificações feitas. Relembremos ainda, que neste caso, podemos definir o conceito de vetor curvatura média H de M em N, como sendo o *traço* da segunda forma fundamental dividido por m. Passemos então a estudar algumas propriedades minimizantes das aplicações harmônicas.

Definição 3.6. Seja $\phi : M \to N$ uma imersão isométrica. Dizemos que ϕ é uma imersão mínima de M em N, se o vetor curvatura média é tal que $H(p) = 0$ para todo $p \in M$.

O motivo da palavra mínima na definição acima, é que estas possuem a propriedade de minimizarem volume. Mais especificamente falando, temos que; se $M \subset N$ é uma imersão mínima e $P \subset M$ é um domínio sulficientemente pequeno tal que ∂P é regular, então, o volume de P vista como subvariedade de N, isto é, com a métrica induzida de N, é menor que o volume de qualquer outra subvariedade de N que tenha este mesmo bordo (ver [30]). Pelo que foi dito temos:

Teorema 3.5. *Seja $\phi: M \to N$ uma imersão isométrica. Então, ϕ é uma imersão mínima de M em N, se e somente se ϕ é harmônica.*

Demonstração: Com efeito, sendo ϕ uma imersão isométrica, temos que a segunda forma fundamental $\hat{\nabla} d\phi$ coincide com a segunda forma fundamental clássica. Neste caso, o vetor curvatura média H de M em N é tal que

$$H = \frac{\text{traço}\hat{\nabla} d\phi}{m} = \frac{\tau(\phi)}{m}.$$

Assim temos que ϕ é imersão mínima, se e somente se

$$\frac{\tau(\phi)}{m} = H \equiv 0 \Leftrightarrow \tau(\phi) \equiv 0$$

o que mostra afirmado. $\square$

Pode-se ver também, que, dada uma variação $F = \{\phi_t\}_{t\in I} : I \times M \to N$ de ϕ por imersões (i.e $\phi_t : M \to N$ é uma imersão para cada $t \in I$ fixado). Então

$$\frac{d}{dt}(\int_M d\mu_{\phi^{-1}h})\Big|_{t=0} = -\int_M \left\langle \frac{\partial \phi_t}{\partial t}\Big|_{t=o}, \tau(\phi)\right\rangle d\mu_{\phi^{-1}h}$$

onde $d\mu_{\phi^{-1}h}$ é a medida padrão de M associada com a métrica induzida $g = \phi^{-}h$. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [8].

Definição 3.7. Dizemos que $\phi : M \to N$ é uma *aplicação conforme*, se existe uma função positiva $\lambda : M \to \mathbb{R}^*_+$ tal que para todo $p \in M$ e $X, Y \in \Gamma(TM)$ tenhamos

$$g(X,Y)(p) = \lambda^2(p)h(d\phi(X), d\phi(Y))_{\phi(p)}.$$

Neste caso, λ é chamado de *fator de conformalidade* de ϕ. Nesta situação, podemos então definir uma nova métrica $\tilde{g}$ em M tomando $\tilde{g} = \lambda^2 g$, neste caso, temos que $\tilde{g}$ coincide com a métrica induzida $\phi^{-1}h$ em M por ϕ. Sendo $(M, \tilde{g})$ uma variedade de Riemanniana, temos que esta admite uma conexão de Levi-Civita, a qual denotaremos por $\tilde{\nabla}$. Relacionamos as duas conexões $\tilde{\nabla}$ e ∇ (onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M, g)) através do seguinte resultado.

Lema 3.2. *Sejam $\tilde{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $(M, \tilde{g})$ e (M, g) respectivamente, onde $\tilde{g} = \lambda^2 g$. Então*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{\lambda^{-2}}{2} X(\lambda^2)Y + \frac{\lambda^{-2}}{2} Y(\lambda^2)X - \frac{\lambda^{-2}}{2} g(X,Y) grad_g(\lambda^2)$$

para $X, Y \in \Gamma(TM)$. Onde $grad_g$ é o gradiente em (M, g).

Demonstração: Fixado $p \in M$. Tomemos um referencial (local) geodésico em p com respeito a métrica g, isto é, $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ em uma vizinhança de p e $\nabla^M_{X_i} X_j(p) = 0$. Sejam pois

$$X = \sum_{i=1}^m a_i X_i \qquad e \qquad \tilde{\nabla}_X Y(p) = \sum_{j=1}^m b_j X_j(p).$$

Assim, afim de determinar-mos $\tilde{\nabla}_X Y(p)$, é suficiente que determine-mos as componentes (b_i), da combinação anterior. Como $\tilde{\nabla}_X Y(p) = \sum_{j=1}^m b_j X_j(p)$ então $b_k = g(X_k(p), \tilde{\nabla}_X Y(p)$. Portanto

$$\begin{aligned} b_k \lambda^2(p) &= \lambda^2(p) g(X_k(p), \tilde{\nabla}_X Y(p)) \\ &= \tilde{g}(X_k, \tilde{\nabla}_X Y)(p). \end{aligned}$$

Como por hipótese $\tilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $(M, \tilde{g})$, temos pela fórmula de Koszul que

$$\begin{aligned}
b_k\lambda^2(p) &= \tilde{g}(X_k, \tilde{\nabla}_X Y)(p) \\
&= \frac{1}{2}\{X\tilde{g}(Y, X_k) + Y\tilde{g}(X_k, X) - X_k\tilde{g}(X, Y) \\
&- \tilde{g}([X, X_k], Y) - \tilde{g}([Y, X_k], X) - \tilde{g}([X, Y], X_k)\} \\
&= \frac{1}{2}\{X[\lambda^2 g(Y, X_k)] + Y[\lambda^2 g(X_k, X)] - X_k[\lambda^2 g(X, Y)]\} \\
&- \lambda^2 g([X, X_k], Y) - \lambda^2 g([Y, X_k], X) - \lambda^2 g([X, Y], X_k)\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\big[X(\lambda^2)g(Y, X_k) + \lambda^2 X g(Y, X_k)\big] \\
&+ \big[Y(\lambda^2)g(X_k, X) + \lambda^2 Y g(X_k, X) \\
&- \big[X_k(\lambda^2)g(X, Y) - \lambda^2 X_k g(X, Y) \\
&- \lambda^2 g([X, X_k], Y) - \lambda^2 g([Y, X_k], X) - \lambda^2 g([X, Y], X_k)\Big\}.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2}\Big\{X g(Y, X_k)\big] + Y g(X_k, X) - X_k g(X, Y) \\
&- g([X, X_k], Y) - g([Y, X_k], X) - g([X, Y], X_k)\Big\} \\
&+ \lambda^{-2}\frac{1}{2}\Big\{\big[X(\lambda^2)g(Y, X_k) + \big[Y(\lambda^2)g(X_k, X) - \big[X_k(\lambda^2)g(X, Y)\Big\} \\
&= g\big(X_k(p), \nabla_X Y(p)\big) + \lambda^{-2}\frac{1}{2}\Big\{\big[X(\lambda^2)g(Y, X_k) + \big[Y(\lambda^2)g(X_k, X) - \big[X_k(\lambda^2)g(X, Y)\Big\}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_Y X(p) &= \sum_{i=1}^{m} b_i X_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} g\big(X_i(p), \nabla_X Y(p)\big) X_i \\
&+ \lambda^{-2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\Big\{\big[X(\lambda^2)g(Y, X_i) + \big[Y(\lambda^2)g(X_i, X) - \big[X_i(\lambda^2)g(X, Y)\Big\}X_i \\
&= \nabla_X Y(p) + \frac{\lambda^{-2}}{2}X(\lambda^2)Y(p) + \frac{\lambda^{-2}}{2}Y(\lambda^2)X(p) - \frac{\lambda^{-2}}{2}g(X(p), Y(p))grad_g(\lambda^2).
\end{aligned}$$

Como isto é válido para todo $p \in M$, o resultado segue. $\square$

Mostraremos agora que o teorema (3.5) pode ser generalizado para as imersões conformes.

Teorema 3.6. *Sejam (M^m, g), (N^n, h) variedades Riemannianas, com $m \geq 2$ e $\phi : M \to N$ uma imersão conforme. Então*

a) Se $m = 2$ então ϕ é harmônica se somente se M é mínima em N.

b) Se $m > 2$ então duas das condições seguintes implicam na terceira:

1) ϕ é harmônica,

2) M é mínima em N,

3) ϕ é uma homotetia (i.e. seu fator de conformalidade é constante).

Demonstração: Sejam $(M, g), (M, \tilde{g})$ e $\nabla^M, \nabla^{\tilde{M}}$ como no lema anterior, suas respectivas conexões Riemannianas. Suponhamos que λ seja o fator de conformalidade de ϕ. Logo pelo lema anterior temos

$$\nabla_X^{\tilde{M}} Y = \nabla_X^M Y + \frac{\lambda^{-2}}{2} X(\lambda^2) Y + \frac{\lambda^{-2}}{2} Y(\lambda^2) X - \frac{\lambda^{-2}}{2} g(X, Y) grad_g(\lambda^2) \tag{3.19}$$

para $X, Y \in \Gamma(TM)$. Tomando então um referencial local geodésico $\{e_i\}$ em TM temos

$$\nabla_{e_i}^{\tilde{M}} e_i = \nabla_{e_i}^M e_i + \lambda^{-2} e_i(\lambda^2) e_i - \frac{\lambda^{-2}}{2} grad_g(\lambda^2) \quad i = 1, \cdots, m.$$

Pelo lema 3.1, temos que

$$\hat{\nabla}^{\tilde{M}} d\phi(e_i, e_i) = \nabla_{d\phi(e_i)}^N d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^{\tilde{M}} e_i).$$

Assim

$$\tilde{\tau}(\phi) = \sum_{i=1}^m \hat{\nabla}^{\tilde{M}} d\phi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^m \nabla_{d\phi(e_i)}^N d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^{\tilde{M}} e_i).$$

Por outro lado, utilizando 3.19 obtemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}^{\tilde{M}} d\phi(e_i, e_i) &= \nabla_{d\phi(e_i)}^N d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^{\tilde{M}} e_i) \\
&= \nabla_{d\phi(e_i)}^N d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i) \\
&+ d\phi(\lambda^{-2} e_i(\lambda^2) e_i - \frac{\lambda^{-2}}{2} grad_g(\lambda^2)) \\
&= \nabla_{d\phi(e_i)}^N d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^M e_i) \\
&+ \frac{\lambda^{-2}}{2} d\phi(\frac{1}{2} e_i(\lambda^2) e_i - grad_g(\lambda^2)).
\end{aligned}$$

Somando em i, obtemos

$$mH = \tau(\phi) + \frac{\lambda^{-2}}{2}(m-2)d\phi(grad_g(\lambda^2)$$

onde no lado esquerdo utilizamos que $\phi : (M, \tilde{g}) \to (N, h)$ é imersão isométrica, donde como vimos $\tilde{\tau}(\phi) = mH$. Por esta última equação, concluimos o afirmado. $\square$

Funções Subharmônicas e Superharmônicas

Nesta seção, faremos uma breve abordagem das funções subharmônicas e superharmônicas (definidas no que se segue), apresentando alguns resultados a respeito destas.

Definição 3.8. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é *subharmônica* se

$$\Delta f \geq 0.$$

onde Δ é o operador Laplaciano de M. Se pois, $-f$ é subharmônica, então f é dita ser *superharmônica.*

Nosso próximo resultado é de grande utilidade no estudo das aplicações subharmônicas, uma vez que pode dizer muito sobre a topologia das variedades nas quais estas se acham definidas.

Teorema 3.7. *Seja (M, g) uma variedade compacta. Então, toda aplicação $f : M \to \mathbb{R}$ subharmônica em M é constante.*

Demonstração: Dada uma aplicação diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, como vimos em 3.10, neste caso $\Delta f = div(grad(f))$, assim, sendo (M, g) por hipótese compacta, pelo teorema de divergência (ver apêndice), temos que

$$\int_M \Delta f d\mu_g = 0. \tag{3.20}$$

Como por definição $\Delta f \geq 0$, (pois por hipótese f é subharmônica), concluímos por 3.20 que $\Delta f = 0$.

Por outro lado, dadas $h, g \in C^\infty(M)$, temos que

$$\Delta(h \cdot g) = h\Delta g + g\Delta h + 2g(grad\ (h), grad\ (g)).$$

Assim, tomando $h = f/2$ e $g = f$ na equação acima obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta(f^2/2) &= (f/2)\Delta(f) + f\Delta(f/2) + 2g(f/2, f) \\
&= f\Delta f + g(grad\ (f), grad\ (f)) \\
&= f\Delta f + \|grad\ (f)\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta(f^2/2) = \|grad\ (f)\|^2 \geq 0.$$

Donde temos que $f^2/2$, também é subharmônica. Utilizando-a em 3.20, obtemos que

$$\int_M \|grad\ (f)\|^2 \, d\mu_g = \int_M \Delta(f^2/2) d\mu_g = 0.$$

Como obviamente $\|grad\ (f)\|^2 \geq 0$, temos por esta última equação que $grad\ (f) = 0$, e portanto f é constante. $\square$

Observando a demonstração do teorema anterior, vemos que no caso em que M é compacta e orientada, as definições de aplicação harmônica e subharmônica são equivalentes. Também neste caso, temos pelo teorema, que as únicas funções harmônicas de tais superfícies são essencialmente as funções constantes. Uma outra conseqüência direta do teorema acima é que os espaços $\mathbb{R}^n$ não admitem subvariedades compactas que sejam mínimas.

Capítulo 4

Existência de Aplicações Harmônicas

Introdução

Como vimos nos capítulos iniciais deste trabalho, as aplicações harmônicas são extremamente importantes. Não apenas por suas propriedades, como também pelo fato destas poderem ser utilizadas para se estudar a topologia das variedades nas quais estas se encontram definidas ou tomam valores. Assim, torna-se uma questão relevante se saber, quais são as condições necessárias para que as variedades admitam alguma aplicação harmônica (não constante) definida entre elas. Também, e até de maior relevância, é a questão de se saber, se uma aplicação contínua qualquer entre estas variedades, pode ou não, ser "deformada" de forma que se torne uma aplicação harmônica.

Como veremos na próxima seção, para a situação específica das curvas em variedades Riemannianas (ou seja, quando a variedade de partida é um intervalo da reta), as questões acima levantadas podem ser integralmente respondidas. Inclusive, historicamente isto foi o que mais motivou tais questionamentos.

Na realidade, o intuito principal deste texto, é generalizar os resultados previamente obtidos (e demonstrados na próxima seção) no caso das curvas (em qual caso, as aplicações harmônicas são exatamente as geodésicas), para situações mais gerais de aplicações entre variedades Riemannianas.

Existência de Geodésicas Fechadas

Iniciemos revisando alguns conceitos, os quais serão necessários para o que se segue.

Definição 4.1. Dadas dois caminhos contínuos e fechados $c_0 : [0, a] \to M$ e $c_1 : [0, a] \to M$ na variedade M (isto é, $c_i(0) = c_i(a), \quad i = 0, 1$). Dizemos que uma aplicação contínua $f : [0, a] \times [0, 1] \to M$ é uma homotopia livre entre c_0 e c_1 se:

i) $f(t, 0) = c_0(t), \;\; f(t, 1) = c_1(t) \qquad t \in [0, a],$

ii) $f(0, s) = f(a, s) \qquad s \in [0, 1].$

Nesta situação, dizemos que c_0 e c_1 são livremente homotópicas e denotamos $c_0 \simeq c_1$. Como pode ser mostrado, a relação de dois caminhos fechados de M serem livremente homotópicos, é uma relação de equivalência. Assim, dado um caminho fechado c de M, temos a seguinte classe de equivalência

$$[c] = \{c_1 \text{ (caminhos fechados de } M) \mid c \simeq c_1\}.$$

Denotamos o conjunto de tais classes por $C_1(M)$. A classe das aplicações que são livremente homotópicas a uma aplicação constante, é dita ser a **classe trivial**.

Outros dois conceitos importantes, são os de laço geodésico e o de geodésica fechada. Dizemos que um caminho fechado $c : [0, a] \to M$ de M é um **laço geodésico** em M se c é uma geodésica (logo C^∞) em todos menos um de seus pontos, onde este deixa de ser regular. Em geral, nesta situação tem-se $c'(0) \neq c'(a)$. Por outro lado, uma **geodésica fechada** de M, é um caminho fechado $c : [0, a] \to M$ de M, que é geodésica em todos os seus pontos (neste caso $c'(0) = c'(a)$). Feitas tais observações, passemos a analisar a existência de geodésicas fechadas.

Teorema 4.1 (Cartan)**.** *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta, e $\mathcal{L} \in C_1(M)$ não é a classe trivial (constante), então existe uma geodésica fechada de M na classe $\mathcal{L}$.*

Demonstração: Seja d o ínfimo dos comprimentos $L(\gamma)$ das curvas fechadas diferenciáveis por parte da classe $\mathcal{L}$. Tomemos uma sequência $\{c_i\} \subset \mathcal{L}$ de curvas fechadas diferenciáveis por parte da classe $\mathcal{L}$, tal que

$$L(c_i) \to d = \inf L(\gamma).$$

Podemos sem perda de generalidade supor que cada c_j seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, definida em $[0,1]$, e tal que a restrição $c_j|_{[t_{j-1},t_j]}$ seja uma geodésica (i.e c_j é uma geodésica quebrada). Uma argumentação da suposição anterior, pode ser feita utilizando-se de vizinhanças totalmente normais de maneira análoga a que faremos abaixo. Seja $L_j = L(c_j)$ e $L = \inf(L_j)$. Assim, se $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ então

$$d(c_j(t_1), c_j(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| c_j'(t)dt \right| \leq L(t_2 - t_1).$$

Assim, temos que $\{c_j\}$ é uma família equicontínua. Como M por hipótese é compacta, por Arzelá-Ascoli, temos que existe uma subsequência de $\{c_j\}$, a qual também denotaremos por $\{c_j\}$, que converge para uma curva contínua e fechada $c_0 : [0,1] \to M$, e como pode ser mostrado $c_0 \in \mathcal{L}$.

Como a imagem $c_0([0,1])$ é um compacto da variedade M, podemos tomar uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ do intervalo $[0,1]$, de forma que cada $c_0 \mid_{[t_{i-1},t_i]}$ esteja contida em uma vizinhança totalmente normal W_i. Trocando então $c_0 \mid_{[t_{i-1},t_i]}$ pela geodésica minimizante c^i que liga os pontos $c_0(t_{i-1})$ e $c_0(t_i)$ em W_i, obtemos que uma curva fechada diferenciável por partes $c : [0,1] \to M$ em M, tal que $c|_{[t_{i-1},t_i]} = c^i$ (geodésica minimizante), para cada $i = 1, \ldots, k$. Por construção, temos que c é livremente homotópica a c_0. Logo, temos que $c \in \mathcal{L}$, donde seu comprimento é tal que $L(c) \geq d$. Mostremos que $L(c) = d$.

Com efeito, suponhamos que $L(c) > d$, seja então $\epsilon = (L(c) - d)/(2k+1) > 0$. Pela definição de d e pelo fato de $\{c_j\}$ convergir uniformemente para c_0, podemos tomar um j suficientemente grande, de forma que

$$L(c_j) < d + \epsilon, \quad d(c_j(t), c_0(t)) < \epsilon \qquad t \in [0,1].$$

Denotando $c_j^i = c_j|_{[t_{i-1},t_i]}$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\big(L(c_j^i)+2\epsilon\big) &= L(c_j)+2k\epsilon < d+(2k+1)\epsilon \\ &= L(c) = \sum_{i=1}^{k} L(c^i).\end{aligned}$$

Donde temos que

$$L(c_j^i)+2\epsilon < L(c^i), \qquad 1 \le i \le k.$$

Isto mostra que o comprimento da curva diferenciável por partes obtida unindo a geodésica mínimizante que liga $c_0(t_{i-1})$ e $c_j(t_{i-1})$, a curva c_j^i e a geodésica mínimizante que liga $c_0(t_i)$, e $c_j(t_i)$, possui comprimento menor que c, isto contradiz o fato de c^i ser minimizante e portanto temos que $L(c) = d$.

Como por hipótese $\mathcal{L}$ não é a classe trivial de homotopia, temos que $L(c) = d > 0$. Assim, parametrizando c pelo comprimento de arco, temos que $c : [0,d] \to M$ é uma curva fechada diferenciável por partes, tal que $c^i = c|_{[t_{i-1},t_i]}$ é uma geodésica, e que c tem o menor comprimento entre todas as curvas da classe $\mathcal{L}$. Assim, resta somente verificar que c é regular (C^∞) em cada ponto $p_i = c(t_i)$, $\;i = 0,\dots,k$.

Suponhamos que c não fosse regular em algum dos pontos p_i. Ou seja, estamos supondo que ${c_-^i}'(t_i) \neq {c_+^i}'(t_i)$. Neste caso, consideremos uma bola convexa B centrada em p_i, com raio suficientemente pequeno. Tomando então dois pontos $q_1, q_2 \in c([t_{i-1},t_i]) \cap B$ próximos de p_i e em seguida ligando-os por uma geodésica minimizante em B, obtemos uma curva fechada diferenciável por partes de comprimento menor que c, o que contradiz o fato de c ser minimizante. Portanto, c é regular em p_i. $\square$

Infelizmente, para situações mais gerais que a das curvas, o problema posto não pode ser abordado da forma que fizemos acima. Inclusive, uma tal afirmação com respeito a existência como a feita, não é necessariamente verdadeira, sem que se façam maiores restrições as variedades dadas.

Como veremos neste capítulo, sob as hipóteses de compacidade das variedades, e de não-positividade da curvatura da variedade de chegada, então a resposta para a segunda questão acima a respeito da existência (e com maior razão para a primeira) é sim.

A demonstração deste fato, foi primeiro apresentada em 1964 por Eells e Sampson, os quais utilizaram para este propósito de uma técnica conhecida como *método do fluxo do calor*, que explicaremos na sequência. Neste texto, daremos uma demonstração deste resultado, na qual utilizaremos o teorema da aplicação inversa em espaços de Banach.

O Método do Fluxo do Calor

Podemos sintetizar as idéias acima no seguinte teorema devido a Eells e Sampson, cuja demonstração é o objetivo principal deste texto.

Teorema 4.2 (Eells e Sampson)**.** *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas, onde N além disto tem curvatura não-positiva. Então, qualquer aplicação contínua $f : M \to N$, é livremente homotópica a uma aplicação harmônica $g : M \to N$.*

A expressão "f e g são livremente homotópicas", quer dizer que existe uma aplicação contínua $u : M \times [0, 1] \to N$ tal que

$$u(x, 0) = f(x) \qquad e \qquad u(x, 1) = g(x), \qquad x \in M.$$

Lembramos também, que N possuir curvatura não-positiva, quer dizer que para cada $q \in N$ e para cada subsespaço bidimensional $\sigma \subset T_qN$ tem-se que a curvatura seccional $K(\sigma) \leq 0$. No que se segue, representaremos este fato simplesmente dizendo que $K^N \leq 0$.

Como já dissemos, um ponto importante na demonstração do teorema acima, é a utilização que se faz do método do fluxo do calor que passaremos a descrever. De início, daremos apenas as idéias intuitivas e geométricas deste, desconsiderando os possíveis detalhes e entraves, os quais posteriormente serão esclarecidos ou mesmo definidos.

Relembrando as definições apresentadas nos capítulos anteriores, temos que dada uma aplicação $\phi \in C^\infty(M, N)$, define-se uma variação desta, como sendo uma aplicação diferenciável $F = \{u_t\}_{t \in I}$, tal que a cada $t \in I = (-\epsilon, \epsilon)$, esta associa diferenciavelmente uma aplicação $u_t \in C^\infty(M, N)$, isto é

$$F : I \to C^\infty(M, N) \tag{4.1}$$

e que além disto $u_0 = \phi$. Vimos também, que ssociado a cada de tais aplicações, temos um campo

$$V = \frac{du_t}{dt}\Big|_{t=0} \in \Gamma(\phi^{-1}TN) \tag{4.2}$$

chamado de campo variacional.

Sendo M compacta, podemos também definir o funcional energia E nos espaços das aplicações diferenciáveis

$$E : C^{\infty}(M, N) \to \mathbb{R}$$

tal que a cada $\phi \in C^{\infty}(M, N)$, esta associa um número real. Portanto, pelo dito em (4.1), podemos considerar uma variação como uma família de aplicações diferenciáveis $F = \{u_t\}_{t \in I}$, tal que o funcional energia E, restrito a esta torna-se pois uma aplicação

$$E(u_t) : I \to \mathbb{R}$$

a qual a cada $t \in I$, associa um número real. Assim, podemos considerar a derivada de $E(u_t)$ em $t = 0$, que é a primeira variação

$$\frac{d}{dt}E(u_t)\Big|_{t=0} = -\int_M \langle V, \tau(\phi)\rangle \, d\mu_g. \tag{4.3}$$

Desta forma, se considerarmos $\mathcal{M} = C^{\infty}(M, N)$ como uma **variedade**, temos que cada aplicação $\phi \in C^{\infty}(M, N)$, pode então ser pensada como um **ponto** desta. Neste caso, temos também, que cada variação pode ser pensada como uma **curva** em $\mathcal{M}$, e que o funcional energia $E : C^{\infty}(M, N) \to \mathbb{R}$ é pois um **funcional** em $\mathcal{M}$.

Sob estas considerações, vemos por (4.2) que um campo variacional $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, nada mais é que um vetor tangente a curva (variação) F de $\mathcal{M}$ no ponto ϕ. Por outro lado, como foi mostrado no capítulo 2, todo campo $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, define uma variação F de ϕ (isto é, dada $V \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, existe uma variação F de ϕ, tal que o campo variacional de F seja exatamente V), e portanto, podemos considerar o espaço tangente $T_{\phi}\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$ em ϕ, como sendo o próprio $\Gamma(\phi^{-1}(TN))$. A este espaço, associamos o produto interno $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, tal que

$$\langle\langle V_1, V_2 \rangle\rangle = \int_M \langle V_1, V_2 \rangle \, d\mu_g \tag{4.4}$$

onde $V_1, V_2 \in \Gamma(\phi^{-1}(TN))$, $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica fibrada do fibrado induzido $\phi^{-1}(TN)$ e μ_g é a medida padrão induzida pela métrica g em M.

De maneira geral, se $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ é uma função diferenciável em uma variedade M, então sua derivada direcional $df_p(V)$, em um ponto $p \in M$ na direção $V \in T_pM$, é definida por $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\big|_{t=0}$, onde $\alpha : I \to M$ é uma curva diferenciável qualquer de M, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = V$. Portanto, pelas considerações anteriores, temos que a variação $\frac{d}{dt}E(u_t)\big|_{t=0}$, pode então ser pensada como a derivada direcional do funcional E no ponto $\phi \in \mathcal{M}$, tomada na direção do campo variacional V, e portanto, por (4.3) temos que

$$dE_\phi(V) = -\int_M \langle V, \tau(\phi)\rangle \, d\mu_g = -\langle\langle v, \tau(\phi)\rangle\rangle \,.$$

Vemos então pela expressão acima, que o campo de tensão $\tau(\phi)$, nada mais é que o gradiente do funcional $-E$ tomado no ponto $\phi \in \mathcal{M}$, isto é

$$-grad\ E(\phi) = \tau(\phi). \tag{4.5}$$

Desta forma, sob as indentificações feitas, vemos que as aplicações harmônicas entre as variedades M, N, são na realidade as singularidades do campo gradiente $grad\ E$ do funcional energia E.

Sendo pois o funcional energia E não-negativo, o nosso problema de deformar uma aplicação dada até que se obtenha uma aplicação harmônica (ou mesmo saber se isto é possível), por nossas identificações, torna-se de certa forma (não necessariamente) um problema de minimização, isto é, busca-se por uma curva que passe por um ponto (aplicação inicial dada), e tal que restrita a esta o funcional energia E, assuma seu valor mínimo. Como sabemos, isto pode ser feito utilizando-se do campo gradiente. Isto é, em se buscando obter o mínimo de um funcional (no caso E), tendo-se por condição incial um ponto $\phi \in \mathcal{M}$, o melhor a se fazer é seguir na direção oposta ao campo gradiente (neste caso o campo de tensão τ). Assim, devemos buscar uma curva $\{u_t\}_{\{t \in I\}}$ em $\mathcal{M}$, tal que seu campo direcional coincida em cada ponto u_t com o campo determinado pelo campo de tensão $\tau(u_t)$, ou posto de outra forma, devemos buscar pelas curvas integrais do campo de tensão $\tau = -grad\ E$, logo, a curva procurada deve ser tal que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \tau(u_t). \tag{4.6}$$

Como vimos anteriormente, o campo de tensão de uma aplicação $\phi \in C^\infty(M,N)$, pode ser pensado como uma generalização do Laplaciano Δf das funções $f \in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$. Desta forma, vemos que a equação (4.6) acima, pode ser identificada com a equação do calor (ver apêndice), sendo no entanto não-linear. Por este motivo, o método de se obter aplicações harmônicas a partir de uma aplicação dada, deformando-a na direção do campo de tensão, recebe o nome de *método do fluxo do calor*. Como veremos, tal método é muito eficiente para a finalidade proposta, que é a de obter uma aplicação harmônica a partir de uma aplicação contínua dada.

Diante das observações feitas, passemos a considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) & (x,t) \in M \times (0,T) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $T > 0$ e $f \in C^\infty(M,N)$ é a condição inicial do problema. Uma aplicação u é dita solução deste problema, se

$$u \in C^0(M \times [0,T), N) \cap C^\infty(M \times (0,T), N)$$

e além disto u satisfizer (4.7). O sistema parabólico de equações diferenciais parciais não-linear (4.7), é chamado de *equação parabólica das aplicações harmônicas*.

Por intermédio do problema (4.7) provaremos o teorema (4.2). Nossa estratégia será a seguinte:

1) Mostraremos que o problema (4.7) admite uma solução global $u : M \times [0,\infty) \to N$, e isto será feito em duas etapas:

    i) Mostraremos que o problema (4.7) admite solução local.

    ii) Mostraremos (utilizando o item i, e estimativas provindas da hipótese de curvatura) que o problema (4.7) admite solução global.

2) Mostraremos que a aplicação $u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ é harmônica, e que $f = u_0$ (condição inicial) é livremente homotópica a ela.

Para a obtenção da solução global u_∞ (que será obtida a partir das soluções locais), faremos uso de uma ferramenta muito importante, que são as fórmulas de Weitzenböck satisfeitas pelas soluções da equação parabólica das aplicações harmônicas, as quais apresentaremos na próxima seção.

Fórmulas de Weitzenböck

Nesta seção, demonstraremos as fórmulas de Weitzenböck, bem como alguns importantes resultados derivados destas, os quais serão largamente utilizados durante o texto.

Tais fórmulas, são essenciais ao método de demonstração do teorema de **Eells e Sampson** feito neste trabalho utilizando o método do fluxo do calor, pois são através destas, que podemos obter uma solução global para o problema de valor inicial da equação parabólica das aplicações harmônicas, a qual por sua vez dá origem a aplicação harmônica necessária a demonstração do teorema.

De fato, como teremos a oportunidade de mostrar, a maior importância destas fórmulas, reside no fato de estas relacionarem as taxas de variações das aplicações obtidas como soluções para o problema de valor inicial (4.7), acima citado, com a curvatura da variedade N, o que nos permitirá inferir algumas importantes conclusões a respeito de tais soluções.

Destaquemos porém, que as fórmulas de Weitzenböck aqui apresentadas, são válidas apenas para as soluções do problema de valor inicial (4.7).

Antes de apresentarmos tais fórmulas, revisemos alguns dos conceitos utilizados.

Sejam (x_i) e (y_α) sistemas de coordenadas locais em (M, g) e (N, h) respectivamente. Dada uma solução $u(x,t)$ (a qual também iremos denotar $u_t(x)$) para o problema (4.7), definimos

$$\begin{aligned}
\kappa(u_t) &= \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u_t}{\partial t}\right|^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}(u_t)\frac{\partial u_t^\alpha}{\partial t}\frac{\partial u_t^\beta}{\partial t}, \\
K(u_t) &= \int_M \kappa(u_t)d\mu_g, \\
e(u_t) &= \frac{1}{2}|du_t|^2 = \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{ij}h_{\alpha\beta}(u_t)\frac{\partial u_t^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^\beta}{\partial x_j}, \\
E(u_t) &= \int_M e(u_t)d\mu_g,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde como antes, $E(u_t)$ e $e(u_t)$ são respectivamente, a energia e a densidade de energia de cada uma das aplicações $u_t \in C^\infty(N,N)$, e $K(u_t)$ e $\kappa(u_t)$ (agora definidos), são respectivamente a energia cinética e a densidade de energia cinética da deformação determinada por u_t.

Relembremos também, que dada uma aplicação $u \in C^\infty(M,N)$, podemos definir a aplicação $\nabla du \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes u^{-1}TN)$.

De mesma forma, podemos considerar a diferencial de segunda ordem da aplicação $du \in \Gamma(TM^* \otimes u^{-1}TN)$, a qual é neste caso tal que

$$\nabla\nabla du \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes TM^* \otimes u^{-1}TN). \tag{4.9}$$

De maneira análoga a que fizemos para ∇du (ver lema(3.1)), podemos ver que

$$\nabla\nabla du(X,Y,Z) = \left(\nabla_X\left(\nabla_Y du\right)\right)(Z) - \left(\nabla_{\nabla_X Y} du\right)(Z),.$$

para X,Y e $Z \in \Gamma(TM)$. Por (4.9), temos que em coordenadas locais $\nabla\nabla du$ pode ser expressa da seguinte forma

$$\nabla\nabla du = \sum_{i,j,k=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} a_{ijk\alpha}dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes \frac{\partial}{\partial y_\alpha}(u)$$

onde os $a'_{ijk\alpha}s$ são as fuções coordenadas da representação.

Relacionando tais funções coordenadas, temos o importante resultado denominada *a identidade de Ricci*, a qual asserta que

$$a_{ijk\alpha} - a_{jik\alpha} = -\sum_{l=1}^{m} {}^M R_{ijk}^l \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_l} + \sum_{\beta,\gamma,\delta=1}^{n} {}^N R_{\beta,\gamma,\delta}^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i}\frac{\partial u^\gamma}{\partial x_j}\frac{\partial u^\delta}{\partial x_k}. \tag{4.10}$$

onde ${}^M R$ e ${}^N R$ são os tensores curvatura de M e N.

Postas tais considerações, podemos apresentar então as fórmulas de Weitzenböck da maneira que se segue.

Proposição 4.1. *Seja $u \in C^0(M \times [0,T), N) \cap C^\infty(M \times (0,T), N)$ uma solução de equação parabólica (4.7) das aplicações harmônicas. Então, para os pontos $(x,t) \in M \times (0,T)$ temos*

(1) (Fórmula de Weitzenböck para $\kappa(u_t)$)

$$\frac{\partial \kappa(u_t))}{\partial t} = \Delta \kappa(u_t) - \left| \nabla \frac{\partial u_t}{\partial t} \right|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left\langle R^N \left(du_t(e_i), \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) \frac{\partial u_t}{\partial t}, du_t(e_i) \right\rangle. \tag{4.11}$$

(2) (Fórmula de Weitzenböck para $e(u_t)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(u_t))}{\partial t} &= \Delta e(u_t) - |\nabla du_t|^2 - \sum_{i=1}^{m} \left\langle du_t \left(\sum_{j=1}^{m} Ric^M(e_i, e_j) e_j \right), du_t(e_i) \right\rangle \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle R^N(du_t(e_i), du_t(e_j)) du_t(e_j), du_t(e_i) \right\rangle. \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde Ric^M e R^N são respectivamente o tensor de Ricci de M e o tensor curvatura de N, e $\{e_i\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente T_xM em cada $x \in M$.

Demonstração: (1) Aqui, a exemplo do que fizemos na demonstração do teorema (3.3) da primeira fórmula de variação de energia , trabalharemos com a variedade produto $M \times (0,T)$, utilizando pois que a mesma admite uma conexão compatível com a métrica produto anteriormente introduzida. Fixado um referencial (local) geodésico $\{e_i\}$ em $p \in M$ (neste caso $\nabla_{e_i} e_j \big|_p = 0$), temos que

$$\kappa(u_t) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u_t}{\partial t} \right|^2 = \frac{1}{2} h \left(du_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), du_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right).$$

Assim temos que

$$\frac{\partial \kappa(u_t)}{\partial t} = h \left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), du_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right). \tag{4.13}$$

Por outro lado, como $\nabla_{e_i} e_j\big|_p = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\kappa(u_t) &= \sum_{i=1}^{m} e_i \left(e_i \ \kappa(u_t)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} e_i \left(e_i \ h\left(du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i \ h\left(\nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\
&+ \ h\left(\nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right).
\end{aligned}$$

Observemos no entanto que

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) &= h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\nabla_{e_i} du_t(e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\
&- \ \left\langle R^N\left(du_t(e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como neste caso tem-se que

$$\nabla_{e_i} du_t(e_i) = \nabla du_t(e_i, e_i).$$

Então

$$\begin{aligned}
\Delta\kappa(u_t) &= \sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\nabla du_t(e_i, e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\
&- \ \sum_{i=1}^{m}\left\langle R^N\left(du_t(e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_i)\right\rangle \\
&= h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\sum_{i=1}^{m}\nabla du_t(e_i, e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) + \left|\nabla du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|^2 \qquad (4.14) \\
&- \ \sum_{i=1}^{m}\left\langle R^N\left(du_t(e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_i)\right\rangle \\
&= h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\tau(u_t), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) + \left|\nabla du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|^2 \\
&- \ \sum_{i=1}^{m}\left\langle R^N\left(du_t(e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_i)\right\rangle
\end{aligned}$$

onde em (4.14) utilizamos

$$\sum_{i=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \nabla_{e_i} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = \left|\nabla du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|^2$$

o que pode ser facilmente comprovado. Como por hipótese u é solução do problema (4.7), temos que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \tau(u_t)$$

e portanto

$$h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\tau(u_t), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\frac{\partial u_t}{\partial t}, du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right).$$

Assim por (4.13) temos que

$$h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}\tau(u_t), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = \frac{\partial \kappa(u_t)}{\partial t}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta\kappa(u_t) &= \frac{\partial \kappa(u_t)}{\partial t} + \left|\nabla du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|^2 \\
&- \sum_{i=1}^{m}\left\langle R^N\left(du_t(e_i), du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Donde se conclui o afirmado.

(2) Tomemos como antes, um referencial (local) geodésico (e_i) em uma vizinhança de $p \in M$ (neste caso, $\nabla_{e_i}e_j\big|_p = 0$). Temos então que

$$e(u_t) = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}h\left(du_t(e_j), du_t(e_j)\right).$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(u_t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{m} h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)}du_t(e_j), du_t(e_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j}du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_j)\right). \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{e_i}e_j\big|_p = 0$, temos que

$$\tau(u_t) = \sum_{i=1}^{m}\nabla du_t(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{m}\nabla_{e_i}du_t(e_i).$$

Também, sendo u por hipótese solução para a equação parabólica das aplicações harmônicas, temos que

$$du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial u_t}{\partial t} = \tau(u_t).$$

Logo,

$$du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i} du_t(e_i).$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(u_t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{m} h\left[\left(\nabla_{e_j}\left(\sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i} du_t(e_i)\right), du_t(e_j)\right)\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} du_t(e_i), du_t(e_j)\right). \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\Delta e(u_t) &= \sum_{i=1}^{m} e_i \left\{e_i\left[e(u_t)\right]\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i \left\{e_i\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} h\left(du_t(e_j), du_t(e_j)\right)\right]\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i \left\{\sum_{j=1}^{m} h\left[\nabla_{e_i} du_t(e_j), du_t(e_j)\right]\right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t(e_j), du_t(e_j)\right) \qquad (4.17) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i} du_t(e_j), \nabla_{e_i} du_t(e_j)\right).
\end{aligned}$$

É fácil ver que

$$\sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i} du_t(e_j), \nabla_{e_i} du_t(e_j)\right) = \left|\nabla du_t\right|^2. \qquad (4.18)$$

Também, pela identidade de Ricci (ver (4.10)), temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t(e_j) &= \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} du_t(e_i) - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} {}^{M}R^{r}_{i,j,i} \frac{\partial u_t^\alpha}{\partial x_r} \\
&+ \sum_{\alpha,\gamma,\delta,\epsilon=1}^{n} {}^{N}R^{\alpha}_{\gamma,\delta,\epsilon} \frac{\partial u_t^\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^\delta}{\partial x_j}\frac{\partial u_t^\epsilon}{\partial x_i} y_\alpha \circ u_t.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t(e_j), du_t(e_j)\right) &= h\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} du_t(e_i), du_t(e_j)\right) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} {}^{M}R^{r}_{i,j,i} \frac{\partial u_t^\alpha}{\partial x_r}\frac{\partial u_t^\beta}{\partial x_j} h_{\alpha\beta}(u_t) \\
&+ \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon=1}^{n} {}^{N}R^{\alpha}_{\gamma,\delta,\epsilon} \frac{\partial u_t^\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^\delta}{\partial x_j}\frac{\partial u_t^\epsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^\beta}{\partial x_j} h_{\alpha\beta}(u_t).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t(e_j), du_t(e_j)\right) &= \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} du_t(e_i), du_t(e_j)\right) \\
&- \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} {}^{M}R^{r}_{i,j,i}\frac{\partial u_t^{\alpha}}{\partial x_r}\frac{\partial u_t^{\beta}}{\partial x_j} h_{\alpha\beta}(u_t) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon=1}^{n} {}^{N}R^{\alpha}_{\gamma,\delta,\epsilon}\frac{\partial u_t^{\gamma}}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^{\delta}}{\partial x_j}\frac{\partial u_t^{\epsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^{\beta}}{\partial x_j} h_{\alpha\beta}(u_t).
\end{aligned}$$

Utilizando então que (e_i) é ortonormal, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} du_t(e_j), du_t(e_j)\right) &= \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} du_t(e_i), du_t(e_j)\right) \\
&- \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{ij} h_{\alpha\beta}(u_t)\left\{\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{k,l=1}^{m} g^{kl}\ {}^{M}R^{r}_{k,i,l}\right)\frac{\partial u_t^{\alpha}}{\partial x_r}\right\}\frac{\partial u_t^{\beta}}{\partial x_j} \\
&+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}(u_t)\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{m}\sum_{\gamma,\delta,\epsilon=1}^{n} g^{ij}g^{kl}\ {}^{N}R^{\alpha}_{\gamma,\delta,\epsilon}\frac{\partial u_t^{\gamma}}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^{\delta}}{\partial x_j}\frac{\partial u_t^{\epsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial u_t^{\beta}}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i} du_t(e_i), du_t(e_j)\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\left\langle du_t\left(\sum_{j=1}^{m} Ric^{M}(e_i,e_j)e_j\right), du_t(e_i)\right\rangle \\
&- \sum_{i,j=1}^{m}\left\langle R^{N}(du_t(e_i), du_t(e_j))du_t(e_j), du_t(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando (4.16) nesta última expressão, vemos por (4.17) e (4.18) que

$$\begin{aligned}
\Delta e(u_t) &= \frac{\partial e(u_t)}{\partial t} + |\nabla du_t|^2 + \sum_{i=1}^{m}\left\langle du_t\left(\sum_{j=1}^{m} Ric^{M}(e_i,e_j)e_j\right), du_t(e_i)\right\rangle \\
&- \sum_{i,j=1}^{m}\left\langle R^{N}(du_t(e_i), du_t(e_j))du_t(e_j), du_t(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}$$

O que encerra a demonstração. □

A partir deste resultado, podemos derivar alguns outros, os quais relacionam o comportamento do funcional energia E, com a curvatura da variedade N.

Proposição 4.2. *Seja $u\colon M \times [0,T) \to N$ uma solução da equação parabólica (4.7) das aplicações harmônicas. Então para os pontos $(x,t) \in M \times (0,T)$ temos*

(1) *Se $K_N \leq 0$, então*

$$\frac{\partial\kappa(u_t))}{\partial t} \leq \Delta\kappa(u_t).$$

(2) *Se $K_N \leq 0$, e existir uma constante C, tal que $Ric^M \geq -Cg$, então*

$$\frac{\partial e(u_t))}{\partial t} \leq \Delta e(u_t) + 2Ce(u_t).$$

Demonstração: (1) Segue direto do item (1) da proposição(4.1).

(2) Se $Ric^M \geq -Cg$, temos que

$$du_t\left(\sum_{j=1}^{m} Ric^M(e_i, e_j)e_j\right) \geq -Cdu_t(e_i).$$

Assim, pelo item (2) da proposição(4.1) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(u_t))}{\partial t} &\leq \Delta e(u_t) - |\nabla du_t|^2 + C\sum_{i=1}^{m}\langle du_t(e_i), du_t(e_i)\rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m}\left\langle R^N(du_t(e_i), du_t(e_j))du_t(e_j), du_t(e_i)\right\rangle \\
&\leq \Delta e(u_t) + C\,|du_t|^2 \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m}\left\langle R^N(du_t(e_i), du_t(e_j))du_t(e_j), du_t(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como também $K_N \leq 0$, temos que o último termo da expressão acima é ≤ 0, logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(u_t))}{\partial t} &\leq \Delta e(u_t) + C\,|du_t|^2 \\
&= \Delta e(u_t) + 2Ce(u_t).
\end{aligned}$$

Mostrando o afirmado. □

Observemos que, sendo M por hipótese compacta, então, de fato sempre existe uma constante Cg tal que $Ric^M \geq Cg$. Utilizando a proposição (4.2), podemos demonstrar o seguinte resultado

Proposição 4.3. *Seja $u\colon M \times [0,T) \to N$ uma solução da equação parabólica (4.7) das aplicações harmônicas. Então para os pontos $(x,t)\in M \times (0,T)$ temos:*

(1) $E(u_t)$ *é uma função monótona não-crescente, isto é*

$$\frac{d}{dt}E(u_t) = -2K(u_t) \leq 0.$$

(2) *Se* N *possui curvatura não-positiva* $K_N \leq 0$, *então*

$$\frac{d^2}{dt^2}E(u_t) = -2\frac{d}{dt}K(u_t) \geq 0.$$

Demonstração: (1) Pela fórmula da primeira variação de energia dada no teorema (3.3), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u_t) &= -\int_M \left\langle \frac{\partial u_t}{\partial t}, \tau(u_t) \right\rangle d\mu_g \\
&= -\int_M \left\langle \frac{\partial u_t}{\partial t}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\rangle d\mu_g \\
&= -\int_M \left| \frac{\partial u_t}{\partial t} \right|^2 d\mu_g \\
&= -2K(u_t) \leq 0.
\end{aligned}$$

(2) Pelo item (1) da proposição (4.2) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}K(u_t) &= \frac{d}{dt}\int_M \kappa(u_t)d\mu_g \\
&= \int_M \frac{\partial \kappa(u_t)}{\partial t}d\mu_g \\
&\leq \int_M \Delta\kappa(u_t)d\mu_g \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos Green. Portanto o resultado segue. □

Passemos então a obtenção de soluções para o problema (4.3).

Existência de Soluções Locais

O objetivo desta e da próxima seção, é encontrar uma solução global $u : M \times [0, \infty) \to N$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) & (x,t) \in M \times (0,T) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{4.19}$$

onde $T > 0$ e $f \in C^0(M,N)$ é a condição inicial dada. De início , como é comum para problemas de EDP, seremos capazes de apresentar somente soluções locais para o problema dado. Na próxima seção, apresentaremos algumas condições suficientes para afirmarmos a existência de soluções globais para o mesmo.

Ressaltemos que durante o processo de obtenção de tais soluções, por vezes fugiremos das condições iniciais originais dadas. Por exemplo, em algumas situações, exigiremos que a aplicação f, dada como valor inicial, possua uma regularidade um pouco maior (de início esta é somente contínua). O motivo disto, é para que possamos "enquadrar" o problema de valor incial (4.19), nas condições exigidas pelos teoremas clássicos de EDP. Porém, como veremos, isto não trará nenhum prejuízo a conclusão do teorema.

Para atingir nosso objetivo, a princípio apresentaremos um outro problema de valor inicial, o qual como provaremos, é equivalente ao problema (4.19), no sentido de que para obtermos a solução de um deste problemas, e suficiente que obtenhamos uma solução para o outro.

Na realidade, o que faremos de fato, é reescrever o problema dado, de forma a colocá-lo em um formato um pouco mais trabalhável, para o qual podemos obter soluções mais facilmente. Para este fim, usaremos o mergulho de Nash [28], o qual afirma que toda variedade Riemanniana compacta pode ser isometricamente mergulhada em um espaço euclidiano de dimensão suficientemente alta. Isto é, toda variedade Riemannianna compacta (N,h), pode ser idealizada como sendo uma subvariedade de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^q$, para algum $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e tal que a métrica h, é pois a métrica induzida a partir de $\mathbb{R}^q$. Denotaremos tal mergulho por

$$l : N \to \mathbb{R}^q.$$

Seja N_ϵ a vizinhança tubular da subvariedade compacta $l(N) \subset \mathbb{R}^q$, isto é, N_ϵ é o conjunto aberto de $\mathbb{R}^q$ definido por

$$N_\epsilon = \{p + v \in \mathbb{R}^q |\ p \in l(N) \ \ e \ \ v \in (T_p l(N))^\perp;\ |v| < \epsilon\}.$$

Defina-mos então a projeção

$$\pi : N_\epsilon \to l(N),$$

tal que a cada $p \in N_\epsilon$, π associa um ponto $\pi(p) = b \in N$, de forma que b seja o ponto de $l(N)$ mais próximo de p.

Seja $u : M \times [0,T) \to N_\epsilon$, uma aplicação com valores em $\mathbb{R}^q$. Seja também (x_i) um sistema de coordenadas locais em M, e (z^A) as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^q$. Expressas nestes sistemas de coordenadas, as aplicações $\pi(u)$ e $u(x,t)$ descritas acima ficam da forma

$$\begin{aligned} \pi(z) &= (\pi_1(z_1,\ldots,z_q),\ldots,\pi_q(z_1,\ldots,z_q)) = \left(\pi^A(z^B)\right) \\ u(x,t) &= (u_1(x_1,\ldots,x_m,t),\ldots,u_q(x_1,\ldots,x_m,t)) = \left(u^A(x_i,t)\right). \end{aligned}$$

Definamos a aplicação $\Pi(u)(du,du) : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^q$, tal que

$$(\Pi(u)(du,du))^A = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{B,C=1}^{q} g^{ij} \frac{\partial^2 \pi^A}{\partial z_B \partial z_C}(u) \frac{\partial u^B}{\partial x_i} \frac{\partial u^C}{\partial x_j} \quad 1 \le A \le q. \tag{4.20}$$

Feitas as devidas definições, consideremos o sistema parabólico de EDP com valor inicial

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) - \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t) = \Pi(u)(du,du)(x,t) & (x,t) \in M \times (0,T) \\ u(x,0) = l \circ f(x) \end{cases} \tag{4.21}$$

onde f é a aplicação dada como condição inicial para o problema (4.19) e Δ é o Laplaciano de M.

Para o problema (4.21), consideraremos somente soluções da forma

$$u \in C^0(M \times [0,T), N_\epsilon) \cap C^{(2,1)}(M \times (0,T), N_\epsilon).$$

Nosso próximo resultado, mostrará que os problemas (4.19) e (4.21), são como pretendía-mos equivalentes. Antes disto, observe-mos que a aplicação $\Pi(u)(du,du)$, definida em (4.20), pode ser também representada da seguinte forma

$$\Pi(u)(du,du) = \text{traço} \nabla d\pi(du,du), \tag{4.22}$$

o que pode ser comprovado facilmente a partir da caracterização da segunda forma fundamental, apresentada em (3.8).

Esta nova caracterização de $\Pi(u)(du, du)$ será útil nas demonstrações dos resultados que se seguem.

Proposição 4.4. *Seja $\tilde{u} \in C^0(M \times [0,T), N_\epsilon) \cap C^{(2,1)}(M \times (0,T), N_\epsilon)$ uma solução para o problema (4.21). Então $\tilde{u}(M \times [0,T)) \subset l(N)$ e $\tilde{u} = l \circ u$, onde $u \in C^0(M \times [0,T), N) \cap C^{(2,1)}(M \times (0,T), N)$ é solução do problema (4.19). A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Seja $\tilde{u} \in C^0(M \times [0,T), N_\epsilon) \cap C^{(2,1)}(M \times (0,T), N_\epsilon)$ uma solução para o problema (4.21), mostremos que $\tilde{u}(M \times [0,T)) \subset l(N)$. Com efeito, seja $\eta : N_\epsilon \to \mathbb{R}^q$ tal que

$$\eta(z) = z - \pi(z).$$

Defina-mos a aplicação $h : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(x,t) = |\eta(\tilde{u}(x,t))|^2 \qquad (x,t) \in M \times [0,T).$$

Isto é, h mede o quadrado da distância de $\tilde{u}(x,t)$ a $l(N)$. Assim, afim de mostrar que $\tilde{u}(M \times [0,T)) \subset l(N)$, é suficiente mostrar que $h(x,t) = 0$.

Como por hipótese $\tilde{u}$ é solução do problema (4.21), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \eta(\tilde{u}), \eta(\tilde{u}) \rangle = 2 \left\langle d\eta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right), \eta(\tilde{u}) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle d\eta \left(\nabla \tilde{u} - \Pi(\tilde{u})(d\tilde{u}, d\tilde{u}) \right), \eta(\tilde{u}) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta \langle \eta(\tilde{u}), \eta(\tilde{u}) \rangle \\ &= 2 \langle \Delta\ \eta(\tilde{u}), \eta(\tilde{u}) \rangle + 2 \left| \nabla \eta(\tilde{u}) \right|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela proposição (3.2) temos que

$$\Delta \eta(\tilde{u}) = d\eta(\Delta \tilde{u}) + \text{traço} \nabla d\eta(d\tilde{u}, d\tilde{u}).$$

Como por definção $\eta(z) + \pi(z) = z$, temos que $d\eta + d\pi = Id$ (identidade), daí $\nabla d\eta + \nabla d\pi =$

0. Sendo também $d\pi$ e η ortogonais, temos que $\langle d\eta, \eta\rangle = \langle I - d\pi, \eta\rangle = \langle I, \eta\rangle$, e portanto

$$\begin{aligned} \Delta h &= 2\left\langle d\eta(\Delta\ \eta(\tilde{u})) - \text{traço}\nabla d\pi(d\tilde{u}, d\tilde{u}), \eta(\tilde{u})\right\rangle + 2\left|\nabla\eta(\tilde{u})\right|^2 \\ &= 2\left\langle d\eta(\Delta\ \eta(\tilde{u}) - \text{traço}\nabla d\pi(d\tilde{u}, d\tilde{u})), \eta(\tilde{u})\right\rangle + 2\left|\nabla\eta(\tilde{u})\right|^2 \\ &= 2\left\langle d\eta\left(\Delta\ \eta(\tilde{u}) - \Pi(\tilde{u})(d\tilde{u}, d\tilde{u})\right), \eta(\tilde{u})\right\rangle + 2\left|\nabla\eta(\tilde{u})\right|^2. \end{aligned}$$

Donde temos que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h - 2\left|\nabla\eta(\tilde{u})\right|^2.$$

Assim, como M não tem bordo, otemos que se $t \in (0, T)$ então

$$\frac{d}{dt}\int_M h(\cdot, t)d\mu_g = \int_M \frac{\partial h}{\partial t}(\cdot, t)d\mu_g = -2\int_M \left|\nabla\eta(\tilde{u})\right|^2 d\mu_g \leq 0.$$

donde temos que

$$\int_M h(\cdot, t)d\mu_g \leq \int_M h(\cdot, 0)d\mu_g,$$

como por hipótese $\tilde{u}(x, 0) = l \circ f(x) \in l(N)$, temos que $h(x, 0) = 0$, e portanto

$$h(x, t) = 0.$$

Isto mostra que $\tilde{u}(M \times [0, T)) \subset l(N)$. Assim, temos que toda solução $\tilde{u} : M \times [0, T) \to N_\epsilon$ para o problema (4.21) é da forma $\tilde{u} = l \circ u : M \times [0, T) \to l(N)$, onde $u \in C^0(M \times [0, T), N) \cap C^{(2,1)}(M \times (0, T), N)$. Resta então mostrar que $\tilde{u}$ é solução do problema (4.21) se e somente se u é solução do problema (4.19).

Com efeito, como $l = \pi \circ l$, temos pelas proposições (3.1) e (3.2) que

$$\Delta\tilde{u} = \Delta(l \circ u) = dl(\tau(u)) + \text{traço } \nabla dl(du, du) \tag{4.23}$$

$$\text{traço } \nabla dl = \text{traço } \nabla d(\pi \circ l) = d\pi(\text{traço } \nabla dl) + \text{traço } \nabla d\pi(dl, dl). \tag{4.24}$$

Sendo $l : N \to \mathbb{R}^q$, uma imersão isométrica, temos que ∇dl é ortogonal a $l(N)$ em cada ponto, daí traço∇dl também o é, e portanto, $d\pi(\text{traço } \nabla dl) = 0$, logo temos por (4.24) que

$$\text{traço } \nabla dl = \text{traço } \nabla d\pi(dl, dl))$$

e portanto, por (4.23)

$$\begin{aligned} dl(\tau(u)) &= \Delta\tilde{u} - \text{traço } \nabla d\pi(dl(du), dl(du)) \\ &= \Delta\tilde{u} - \text{traço } \nabla d\pi(d\tilde{u}, d\tilde{u}). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} dl\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= dl\left(du\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = d(l\circ u)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &= d\tilde{u}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} dl\left(\tau(u) - \frac{\partial u}{\partial t}\right) &= dl(\tau(u)) - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right) \\ &= \Delta\tilde{u} - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right) - \text{traço } (d\tilde{u}, d\tilde{u}) \\ &= \Delta\tilde{u} - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right) - \Pi(\tilde{u})(d\tilde{u}, d\tilde{u}). \end{aligned}$$

Assim, se $\tilde{u}$ é solução de (4.21), então

$$dl\left(\tau(u) - \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

e portanto, pela injetividade de dl concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tau(u)$$

mostrando pois que u é solução para o problema (4.19). A prova da recíproca é análoga. □

Assim, vemos que afim de encontrarmos soluções para o problema (4.19), é suficiente que encontremos soluções para este novo problema (4.21), e isto é nosso próximo objetivo.

Para resolver o problema (4.21), utilizaremos o teorema da função inversa em espaços de Banach. Nosso objetivo com isso, é tentar reduzir à solubilidade de uma EDP não-linear, a solubilidade de uma equação linear.

Teorema 4.3. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas. A cada aplicação $f \in C^{(2+\alpha)}(M, N)$ dada, temos que existe um $\epsilon = \epsilon(M, N, f, \alpha) > 0$ e uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}(M \times [0, \epsilon], N_\epsilon)$, solução em $M \times [0, \epsilon)$, para o problema (4.21).*

A idéia da prova é a seguinte: Consideraremos o operador diferencial $P(u) = \Delta u - \partial_t u - \Pi(u)(du, du)$. Afim de resolvermos o problema dado, é suficiente então que apresentar uma aplicação u tal que $P(u) = 0$. Com este intuito, iniciaremos apresentando uma aplicação v, que de certa forma estará próxima de u em $t = 0$. Como mostraremos, esta aplicação v também é tal que sua a imagem $P(v)$ pelo operador P, satisifaz a condição de que $P(v)(x, 0) = 0$. Desta forma, para obter a conclusão desejada, necessitamos mostrar que para valores relativamente pequenos de t, o operador P satisfaz a condição de ser sobrejetivo em uma vizinhança da origem, o que por sua vez será feito através do teorema da função inversa em espaços de Banach.

Demonstração: De início, estenderemos a aplicação $\pi : N_\epsilon \to l(N)$, a todo o espaço $\mathbb{R}^q$, de forma que $\pi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ seja diferenciável. Isto de fato pode ser feito, uma vez que como N por hipótese é compacta (daí $l(N) \subset \mathbb{R}^q$ também o é), podemos tomar uma bola $B \subset \mathbb{R}^q$ suficientemente grande, de forma que $N_\epsilon \subset B \subset \mathbb{R}^q$. Assim, podemos estender π de forma que esta seja constante fora de B. Feito isto, passamos então a considerar a definição de $\Pi(u)(du, du)$ para a aplicação π estendida, usando para isto a expressão (4.20). Fixemos então $0 < \alpha' < \alpha < 1$.

Como primeiro passo, apresentamos , uma solução aproximada para o problema (4.21). Para este fim, consideramos o sistema linear parabólico de EDP com valor inicial

$$\begin{cases} \Delta v(x,t) - \partial_t v(x,t) = \Pi(f)(df, df)(x) & (x,t) \in M \times (0,1) \\ v(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{4.26}$$

onde estamos identificando f com $l \circ f$. Como por hipótese $f \in C^{(2+\alpha)}(M, \mathbb{R}^q)$, temos que

$$\Pi(f)(df, df) \in C^{(1+\alpha)}(M, \mathbb{R}^q).$$

Logo, pelo teorema (5.18) de existência e unicidade de soluções locais para equações diferenciais parciais parabólicas, temos que existe uma única solução

$$v \in C^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}(M \times [0,1], \mathbb{R}^q)$$

para o problema (4.26). Se u é uma solução para o problema (4.21), temos que

$$v(x,0) = u(x,0) \quad e \quad \partial_t v(x,0) = \partial_t u(x,0)$$

o que mostra que v de fato é uma aproximação da solução u em $t = 0$, encerrando então esta primeira etapa.

Para o próximo passo, consideremos o operador diferencial

$$P(u) = \Delta u - \partial_t u - \Pi(u)(du, du).$$

Vemos então, que encontrar uma solução para o problema (4.21), é equivalente a encontrar uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M\times[0,\epsilon], \mathbb{R}^q)$, tal que $P(u) = 0$, e que além disto, satisfaça a condição de que $u(x, 0) = f(x)$.

Como pode ser facilmente comprovado, $P(v)(x, 0) = 0$, o que de certa forma mostra que a imagem de v pelo operador P, também aproxima a imagem da solução u.

Nosso próximo objetivo, será mostrar que existem vizinhanças (em espaços de funcões convenientes) de v e $P(v)$, tal que restrito a estas, o operador P é bijetivo. Faremos isto, utilizando o teorema da aplicação inversa em espaços de Banach, o que por sua vez exige que se calcule a derivada do operador P no ponto v, o que faremos na sequência.

Seja $Q = M \times [0, 1]$, definamos os sequintes subespaços X, Y dos respectivos espaços de funções $C^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$ e $C^{(\alpha',\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$, tais que

$$\begin{aligned} X &= \{z \in C^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)|\ z(x, 0) = 0,\ \ \partial_t z(x, t) = 0\} \\ Y &= \{\omega \in C^{(\alpha',\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)|\ \omega(x, 0) = 0, \}. \end{aligned}$$

É fácil ver que X, Y são subespaços fechados dos espaços dados, e que portanto são espaços de Banach. Definamos então o operador

$$\mathcal{D}(z) = P(v + z) - P(v) \qquad z \in X. \tag{4.27}$$

o qual como mostremos, é tal que $\mathcal{D} : X \to Y$.

Pela definição dada, vemos que estudar a diferenciabilidade do operador P em uma vizinhança (contida em X) de v, é equivalente a fazê-lo a $\mathcal{D}$ em uma vizinhança de $z = 0$. Como além disso $\mathcal{D}(0) = 0$, vemos também que calcular a derivada Fréchet $\mathcal{D}'(0) : X \to Y$ equivale a calcular a derivada Fréchet do operador P em v. Passemos então a estudar $\mathcal{D}$.

Por (4.27) temos que

$$\mathcal{D}(z) = \Delta z - \partial_t z - \Pi(z + v)(d(z + v), d(z + v)) + \Pi(v)(dv, dv). \tag{4.28}$$

Observemos também, que como $v(x,0) = f(x)$, temos que se $t = 0$ então

$$\Pi(v)(dv, dv) = \Pi(f)(df, df). \tag{4.29}$$

Assim, para todo $z \in X$ (neste caso por definição $z(x,0)$ e $\partial_t(x,0)$), temo por (4.28) e (4.29) que

$$\mathcal{D}(z)(x,0) = 0.$$

Como além disto $\mathcal{D}(z) \in C^{(\alpha',\alpha'/2)}(Q,\mathbb{R}^q)$, temos que $\mathcal{D}(z) \in Y$ para todo $z \in X$ tomado, e portanto $\mathcal{D} : X \to Y$ é um operador entre os espaços de Banach X e Y. É fácil ver ainda que $\mathcal{D}(0) = 0$ e que $\mathcal{D}$ é Fréchet-diferenciável em uma vizinhança de $z = 0$. Utililizemos então a definição de $\mathcal{D}$ para calcularmos a derivada Fréchet $\mathcal{D}'(0) : X \to Y$.

Para cada $Z \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(0)Z &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathcal{D}(hZ) - \mathcal{D}(0)\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{D}(hZ)}{h}. \end{aligned}$$

Por (4.28) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{D}(hZ)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\Delta(hZ) - \partial_t(hZ) - \Pi(hZ+v)\left(d(hZ+v), d(hZ+v)\right) \\ &+ \Pi(v(dv,dv)\Big] \\ &= \Delta Z - \partial_t Z \\ &+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\Pi(v)(dv,dv) - \Delta(hZ) - \partial_t(hZ) - \Pi(hZ+v)\left(d(hZ+v), d(hZ+v)\right)\right]. \end{aligned}$$

Calculemos então este último limite. Por (4.20) temos que

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\Delta(hZ) - \partial_t(hZ) - \Pi(hZ+v)\left(d(hZ+v), d(hZ+v)\right)\right]^A \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B \partial z^C}(hZ+v)\frac{\partial(hZ+v)^B}{\partial x_i}\frac{\partial(hZ+v)^C}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(hZ+v)\left[\left(h\frac{\partial Z^B}{\partial x_i} + \frac{\partial v^B}{\partial x_i}\right)\left(h\frac{\partial Z^C}{\partial x_j} + \frac{\partial v^C}{\partial x_j}\right)\right]\right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(hZ+v)\left(\frac{\partial Z^B}{\partial x_i}\frac{\partial Z^C}{\partial x_j} + \frac{\partial Z^B}{\partial x_i}\frac{\partial v^C}{\partial x_j} + \frac{\partial v^B}{\partial x_i}\frac{\partial Z^C}{\partial x_j}\right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\frac{\partial v^B}{\partial x_i}\frac{\partial v^C}{\partial x_j}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(hZ+v)\right). \end{aligned}$$

Como

$$\Pi(v)(dv,dv)^A \;=\; \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(v)\frac{\partial v^B}{\partial x_i}\frac{\partial v^C}{\partial x_j}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\Pi(v)(dv,dv)^A-\Pi(hZ+v)\left(d(hZ+v),d(hZ+v)\right)^A\right]\\
&=-\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(hZ+v)\left(\frac{\partial Z^B}{\partial x_i}\frac{\partial Z^C}{\partial x_j}+\frac{\partial Z^B}{\partial x_i}\frac{\partial v^C}{\partial x_j}+\frac{\partial v^B}{\partial x_i}\frac{\partial Z^C}{\partial x_j}\right)\\
&-\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{B,C=1}^{q} g^{ij}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(hZ+v)-\frac{\partial^2\pi^A}{\partial z^B\partial z^C}(v)\right)\cdot\left(\frac{\partial v^B}{\partial x_i}\frac{\partial v^C}{\partial x_j}\right)\\
&=-2\left(\Pi(v)(dv,dZ)\right)^A-\frac{\partial}{\partial Z}\left(\Pi(v)(dv,dv)\right)^A.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\Pi(v)(dv,dv)-\Pi(hZ+v)\left(d(hZ+v),d(hZ+v)\right)\right]\\
&\quad=-2\Pi(v)(dv,dZ)-\sum_{A=1}^{q}\partial_A\Pi(v)(dv,dv)\cdot Z^A.
\end{aligned}$$

Donde temos que

$$\mathcal{D}'(0)Z=\Delta Z-\partial_t Z-2\Pi(v)(dv,dZ)-\sum_{A=1}^{q}\partial_A\Pi(v)(dv,dv)\cdot Z^A. \tag{4.30}$$

Para utilizar o teorema da função inversa, resta então mostrar que $\mathcal{D}'(0):X\to Y$ é um isomorfismo. Com efeito, afirmamos que $\mathcal{D}'(0)$ é sobrejetivo, de fato, como $v\in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(Q,\mathbb{R}^q)$, temos que todos os termos da lado direito na equação (4.30), são no mínimo $C^{(\alpha',\alpha'/2)}(Q,\mathbb{R}^q)$, com além disto, tal equação é uma EDP linear parabólica, temos pelo teorema (5.18), que para cada $W\in Y$ dado, existe uma única $Z\in C^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}(Q,\mathbb{R}^q)$, tal que

$$\begin{cases}\mathcal{D}'(0)(Z)(x,t)=W(x,t) & (x,t)\in M\times(0,T)\\ Z(x,0)=0\end{cases}$$

Onde, além disto, tem-se que

$$|Z|_Q^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}\le C\,|W|_Q^{(\alpha',\alpha'/2)}. \tag{4.31}$$

Para concluirmos então a sobrejetividade, resta mostrar que $Z \in X$. De fato, como $Z(x,0)=0$, temos que as duas últimas parcelas de (4.30) são iguais a zero, logo $\partial_t Z(x,0) = \mathcal{D}'(0)(Z)(x,0) = W(x,0) = 0$. Daí $Z \in X$, e portanto $\mathcal{D}'(0)$ é sobrejetivo como afirmamos.

Por outro lado, por (4.31) podemos ver que $\mathcal{D}'(0)$ é injetivo, é que além disto este possui inversa contínua (pois é linear limitada). Assim, pelo teorema da aplicação aberta (ver [22]), concluímos que o próprio $\mathcal{D}'(0)$ é contínuo e que portanto é um isomorfismo.

Reunidas todas as condições, podemos então aplicar o teorema da função inversa em espaços de Banach para concluir que existem vizinhanças $\mathcal{V}$ de $0 \in X$ e $\mathcal{W}$ de $0 \in Y$ tais que $\mathcal{D} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ seja um homeomorfismo. Portanto, temos que existe $\delta = \delta(M, N, f) > 0$, tal que se $\kappa \in Y$ (isto é, $\kappa \in C^{(\alpha',\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$ e $\kappa(x,0)=0$), com $|\kappa|_Q^{(\alpha',\alpha'/2)} < \delta$, então, existe uma única $z \in \mathcal{V} \subset X$, tal que

$$\mathcal{D}(z) = \kappa. \tag{4.32}$$

Tomando $u = v + z$ e $\omega = P(v)$, temos que $u \in C^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$ e que além disto, é tal que

$$\begin{cases} P(u)(x,t) = (\omega + \kappa)(x,t) & (x,t) \in M \times (0,1) \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Feito isto, mostramos em seguida, que existe um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que se $t \in [0, \epsilon]$ então, $-\omega$ tem norma pequena o bastante para pertencer a $\mathcal{W}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, consideremos a aplicação auxiliar $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $\xi(t) = 1$ se $t \leq \epsilon$, $\xi(t) = 0$ se $t \geq 2\epsilon$, $0 \leq \xi(t) \leq 1$ e $|\xi'(t)| \leq 2/\epsilon \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$. Observemos que como $v \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$ então, $\omega = P(v) \in C^{(\alpha,\alpha/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$, daí como $0 < \alpha' < \alpha < 1$, temos então que $\omega \in C^{(\alpha',\alpha'/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$. Assim, pelo lema (5.9), temos que existe $C > 0$ (o qual não depende de ϵ), tal que

$$|\xi\omega|_Q^{(\alpha',\alpha'/2)} \leq C\epsilon^{(\alpha-\alpha')/2} \, |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}. \tag{4.33}$$

Tomando então $\kappa = -\xi\omega$, temos pela expressão acima que $|\omega|_Q^{(\alpha',\alpha'/2)} < \delta$ se ϵ é suficientemente pequeno. Como além disto $\kappa(x,0) = -\omega(x,0) = 0$, temos então que existe uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}(M \times [0,\epsilon], \mathbb{R}^q)$ tal que

$$\begin{cases} P(u)(x,t) = 0 & (x,t) \in M \times (0,\epsilon) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ou seja, temos que existe uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha',1+\alpha'/2)}(M \times [0,\epsilon], \mathbb{R}^q)$, que é pois uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) - \partial_t(x,t) = \Pi(u)(du,du)(x,t) & (x,t) \in M \times (0,\epsilon) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Como $f \in C^{(2+\alpha)}(M, \mathbb{R}^q)$ e $\Pi(u)(du,du) \in C^{(\alpha,\alpha/2)}(M \times [0,\epsilon], \mathbb{R}^q)$, temos pelo teorema (5.18) de existência, unicidade e regularidade das soluções das EDP's lineares parabólicas que

$$u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0,\epsilon], \mathbb{R}^q).$$

Tomando ϵ um pouco menor se necessário, podemos fazer com que $u(M \times [0,\epsilon]) \subset N_\epsilon$, que é a vizinhança tubular da subvariedade $l(N)$. E portanto, temos que u é uma solução para o problema (4.21) em $M \times [0,\epsilon]$ (onde $\epsilon > 0$ só depende de M, N, f e α) como queríamos demostrar. □

Combinando então o teorema (4.3) com a proposição (4.4), obtemos o seguinte resultado

Corolário 4.1. *Sejam (M,g) e (N,h) variedades Riemannianas compactas. Dada uma $f \in C^{(2+\alpha)}(M,N)$, temos que existem um $T = T(M,N,f,\alpha) > 0$ e uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0,T], N)$ tais que*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) & (x,t) \in M \times (0,T) \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Para encerrar esta seção, apresentaremos um resultado a respeito da regularidade das soluções da equação parabólica das aplicações harmônicas. Para isto, utilizaremos do teorema de regularidade das soluções das EDP lineares parabólicas.

Teorema 4.4. *Sejam (M,g) e (N,h) variedades Riemannianas compactas. Dada uma $f \in C^{(2+\alpha)}(M,N)$, temos que existem um $T = T(M,N,f,\alpha) > 0$ e uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0,T], N) \cap C^\infty(M \times (0,T), N)$ tais que*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) & (x,t) \in M \times (0,T) \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Demonstração: Seja $T > 0$ e $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0,T], N)$, como no corolário (4.1). Para concluirmos a prova do teorema, resta apenas mostrar que u é diferenciável em cada ponto $(x,t) \in M \times (0,T)$. Para este fim, tomemos sistemas locais de coordenada (x_i) e (y_α) em x e $u(x,t)$ respectivamente. Expressa nestes sistemas de coordenadas, a equação parabólica das aplicações harmônicas assume a seguinte forma

$$\Delta u^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} g^{ij}\ {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x_j}.$$

Pelas hipótese feitas em u, temos que o lado direito da equação acima é $C^{(1+\alpha,\alpha/2)}$, donde pelo teorema de regularidade das soluções das EDP's lineares parabólicas (ver teorema (5.16)), temos que $u \in C^{(3+\alpha,1+\alpha/2)}$. Logo, temos então que o lado direito é $C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$, implicando então que $u \in C^{(4+\alpha,1+\alpha/2)}$. Assim por repetições sucessivas do argumento anterior, concluímos que u é C^∞ em uma vizinhança de cada ponto $(x,t) \in M \times (0,T)$, o que confirma o resultado. $\square$

Existência de Soluções Globais

Nesta seção iremos demonstrar a existência de soluções globais $u : M \times [0,\infty) \to N$ para a equação parabólica das aplicações harmônicas

$$\begin{cases} \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) \qquad (x,t) \in M \times (0,T) \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{4.34}$$

A razão disto, como provaremos na próxima seção, é que uma tal solução fornece de fato uma solução para o nosso teorema principal (4.2). Na realidade, como veremos, a existência de tal solução global é necessária para demonstração do teorema (4.2) aqui apresentada utilizando o método do fluxo do calor.

Tendo já demonstrado a existência local de soluções para o problema acima, poderíamos então ser tentados a afirmar a existência de uma solução global para o problema dado. Isto no entanto não é necessariamente verdadeiro, e a razão disto é que o problema (5.1) acima, é um sistema não-linear de equações diferenciais parciais, e portanto, o simples fato de se saber previamente da existência de soluções locais para o mesmo, não garante que este de fato admita uma solução global. Para fazer tal afirmação, necessitamos estimar a **taxa de crescimento** das soluções obtidas.

Para este fim, acrescentaremos uma hipótese adicional a variedade N, exigindo-se além de sua compacidade, que esta também tenha curvatura não-positiva.

Ressaltemos no entanto, que tais condições não são em verdade imprescidíveis para a conclusão do teorema (4.2), como mostram alguns exemplos apresentados adiante.

Observemos ainda, que em momento algum do processo de obtenção de soluções locais para o problema (5.1), feita na seção anterior, é utilizada esta, ou qualquer outra restrição a curvatura da variedade N.

Para o que se segue, nossa estratégia será estudar como é possível utilizar o fato de a curvatura de N ser não positiva, para controlar as taxas de crescimento das soluções locais obtidas. De fato, nossa necessidade principal é controlar os termos não-lineares da equação dada. Para isto, faremos uso das fórmulas de Weitzenböck, bem como do princípio do máximo para a equação do calor (ver lema (5.7)).

Nos próximos dois resultados faremos uso dos conceitos de densidade de energia $e(u_t)$ e de densidade de energia cinética $\kappa(u_t)$ das aplicações u_t, os quais foram definidos em (5.17).

Proposição 4.5. *Seja $u \in C^{(2,1)}(M \times [0,T), N) \cap C^{\infty}(M \times (0,T), N)$ uma solução para (5.1). Se a curvatura de N é não-positiva $K_N \leq 0$, então, para cada $(x,t) \in M \times (0,T)$ temos que*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| \leq \sup_{x \in M} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right|.$$

Demonstração: Pela proposição (4.2)-(1), temos que a densidade de energia cinética $\kappa(u_t)$ da aplicação u_t é tal que

$$L\kappa(u_t) = \Delta\kappa(u_t) - \frac{\partial \kappa(u_t)}{\partial t} \geq 0$$

onde $L = \Delta - \partial_t$ é o operador do calor. Logo, pelo princípio do máximo para equação do calor, dado no lema (5.7), o resultado segue. $\square$

Ainda utilizando das fórmulas de Weitzenböck, obteremos um outro resultado relacionando a curvatura de N com a taxa de crescimento das soluções locais de (5.1).

Proposição 4.6. *Seja* $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0,T], N) \cap C^{\infty}(M \times (0,T), N)$ *uma solução para (5.1). Suponhamos que a curvatura de* N *seja não-positiva* $K_N \leq 0$*, e que o tensor de Ricci da variedade* M *seja tal que* $Ric^M \geq -C_M$*, onde* $C_M \in \mathbb{R}$ *é uma constante. Então, para todo* $0 < \epsilon < T$ *temos que os seguites fatos são verdadeiros para a densidade de energia* $e(u)$ *da aplicação* u*:*

i) Para todo $(x,t) \in M \times (0,T)$ *tem-se que*

$$e(u_t)(x) \leq \exp(2C_M t) \sup_{x \in M} e(f)(x).$$

ii) Existe uma constante $C = C(M, \epsilon)$*, tal que para todo* $(x,t) \in M \times [\epsilon, T)$ *tem-se*

$$e(u_t)(x) \leq CE(f).$$

Demonstração: Pela proposição (4.2)-(2), temos que

$$L(e(u_t)) = \Delta e(u_t) - \partial_t e(u_t) \geq -2C_M e(u_t). \tag{4.35}$$

Tomando então $v(x,t) = \exp(-2C_M t)e(u_t)$, temos pois que

$$\begin{aligned} L(v) &= \exp(-2C_M t)\left(\Delta e(u_t) - \frac{\partial e(u_t)}{\partial t}\right) + 2C_M \exp(-2C_M t)e(u_t) \\ &\geq \exp(-2C_M t)(-2C_M e(u_t)) + 2C_M \exp(-2C_M t)e(u_t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto pelo pelo princípio do máximo para a equação do calor (lema (5.7)), temos que

$$\exp(-2C_M t)e(u_t) = v(x,t) \leq \max_{x \in M} v(x,0) = \max_{x \in M} e(u_0)(x) = \max_{x \in M} e(f)(x)$$

para todo $(x,t) \in M \times [0,T)$, onde na última igualdade da expressão acima, utilizamos que $u(x,t)$ é solução do problema (5.1), e portanto $u_0(x) = u(x,0) = f(x)$. Isto prova o primeiro item.

Para a demonstração do segundo item, faremos uso da solução fundamental da equação do calor $H(x,y,s)$, bem como de algumas de suas propriedades.

Dado $(x,t)\in M\times(0,T)$, tomemos ϵ tal que $0<\epsilon\leq t<T$. Consideremos pois $E(u_t)$ e $e(u_t)$ como funções de t e (x,t) respectivamente, donde passamos a denota-las por $E(u)(t)$ e $e(u)(x,t)$. Definimos então

$$v_1(x,s)=\int_M H(x,y,s)\exp\left[-2C_M(t-\epsilon)\right]e(u)(y,t-\epsilon)d\mu_g(y).$$

Pela definição dada podemos ver facilmente que

$$\begin{cases} \Delta v_1(x,s)-\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,s)=0 & (x,t)\in M\times(0,T) \\ \lim\limits_{s\to 0^+} v_1(x,s)=\exp\left[-2C_M(t-\epsilon)\right]e(u)(x,t-\epsilon) \end{cases} \tag{4.36}$$

Defina-mos também

$$v_2(x,s)=\exp\left[-2C_M(s+t-\epsilon)\right]e(u)(x,s+t-\epsilon).$$

Temos que

$$\begin{aligned} L(v_2) &= \exp\left[-2C_M(s+t-\epsilon)\right]\left(\Delta e(u)(x,s+t-\epsilon)-\frac{\partial e(u)}{\partial t}(x,s+t-\epsilon)\right) \\ &+ 2C_M\exp\left[-2C_M(s+t-\epsilon)\right]e(u)(x,s+t-\epsilon) \\ &\geq \exp\left[-2C_M(s+t-\epsilon)\right]\left(-2C_M e(u)(x,s+t-\epsilon)\right) \\ &+ 2C_M\exp\left[-2C_M(s+t-\epsilon)\right]e(u)(x,s+t-\epsilon) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $(x,t)\in M\times(0,T)$. Temos também que

$$\lim_{s\to 0^+} v_2(x,s)=\exp\left[-2C_M(t-\epsilon)\right]e(u)(x,t-\epsilon).$$

Em suma $v_2(x,s)$ é tal que

$$\begin{cases} \Delta v_2(x,s)-\frac{\partial v_2}{\partial t}(x,s)\geq 0 & (x,t)\in M\times(0,T) \\ \lim\limits_{s\to 0^+} v_2(x,s)=\exp\left[-2C_M(t-\epsilon)\right]e(u)(x,t-\epsilon) \end{cases} \tag{4.37}$$

Tomando então $v_3=v_2-v_1$, temos que

$$Lv_3=Lv_2-Lv_1=Lv_2\geq 0.$$

Portanto pelo princípio do máximo (lema (5.7)), temos que

$$\max_{M\times[0,T]} v_3=\max_{M\times\{0\}} v_3.$$

Como porém $v_3(x,0)=0$, temos então que

$$\max_{M\times[0,T]} v_3 = 0.$$

Donde temos que $v_3 \leq 0$, e portanto

$$v_2(x,s) \leq v_1(x,s) \qquad (x,s)\in M\times[0,T).$$

Tomando então $s=\epsilon$ na desigualdade acima, obtemos que

$$e(u)(x,s) \leq \exp(2\epsilon C_M)\int_M H(x,y,\epsilon)e(u)(y,t-\epsilon)d\mu_g(y) \tag{4.38}$$

para quaisquer $(x,t)\in M\times[\epsilon,T)$.

Também, por uma das propriedades da solução fundamental da equação do calor, a cada $\epsilon>0$ dado, temos que existe uma constante $c=c(M,\epsilon)>0$, tal que

$$H(x,y,\epsilon)\leq c(M,\epsilon).$$

Utilizando então este último resultado em (4.38), obtemos que

$$\begin{aligned} e(u)(x,t) &\leq \exp(2\epsilon C_M)c(M,\epsilon)\int_M e(u)(y,t-\epsilon)d\mu_g(y) \\ &= \exp(2C_M\epsilon)c(M,\epsilon)E(u)(t-\epsilon). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Por outro lado, pelas condições iniciais, temos pela proposição (4.3) que $E(u)(t)$ é uma função (em t) monótona não-crescente, daí

$$E(u)(t-\epsilon)\leq E(u)(t=0)=E(f).$$

Logo, por (4.39) temos que

$$e(u)(x,t)\leq \exp(2\epsilon C_M)c(M,\epsilon)E(f).$$

Tomando então $C(M,\epsilon)=\exp(2\epsilon C_M)c(M,\epsilon)$, obtemos o resultado desejado. □

Utilizando então as proposições (4.5) e (5.81) podemos estimar as taxas de crescimento das soluções do problema (5.1). Em verdade seremos capazes de limita-las de maneira uniforme.

Proposição 4.7. *Seja* $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M\times[0,T),N)\cap C^{\infty}(M\times(0,T),N)$*, uma solução para o problema (5.1). Se a variedade* N *possui curvatura não-positiva* $K_N \leq 0$*, então, existe* $C = C(M,N,F,\alpha) > 0$ *tal que*

$$|u(\cdot,t)|_{C^{(2+\alpha)}(M,N)} + \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|_{C^{(\alpha)}(M,N)} \leq C.$$

Demonstração: Para facilitar a demonstração, vamos supor, assim como fizemos na seção anterior, que N é uma subvariedade de um espaço euclidiano $\mathbb{R}^q$, o que, como vimos, é feito através da identificação desta com sua imagem pelo mergulho isométrico $l : N \to \mathbb{R}^q$. Neste caso, como vimos, u pode ser considerada como uma função com o valores em $\mathbb{R}^q$, isto é $u : M \to \mathbb{R}^q$, a qual é solução do problema (4.21). Olhando então $\frac{\partial u}{\partial t}$ como uma aplicação (neste caso em $C^{(2+\alpha,\alpha/2)}(M\times[0,T),N)\cap C^{\infty}(M\times(0,T),N)$), podemos pensar em u como uma solução para o sistema elíptico de EDP

$$\Delta u = \Pi(u)(du,du) + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.40}$$

Assim, vemos pelas definições de $\Pi(u)(du,du)$ e $e(u)$, juntamente com as proposições (4.5) e (5.81), que o lado direito da expressão acima, pode ser limitado uniformemente em $M\times[0,T)$, isto é,

$$\left|\Pi(u)(du,du)(\cdot,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|_{L_\infty(M,\mathbb{R}^q)} \leq C_1(M,N,f)$$

e tal limitante, não depende do $t \in [0.T)$ tomado. Temos também que u é tal que suas imagens estão no compacto $l(N) \subset \mathbb{R}^q$, assim temos que

$$|u(\cdot,t)|_{L_\infty(M,\mathbb{R}^q)} \leq C_2(N)$$

onde novamente, o limitante não depende do $t\in[0,T)$ tomado. Assim, pelas estimativas de Schauder para soluções de equações diferenciais parciais elípticas vistas no teorema (5.6), temos que

$$\begin{aligned} |u(\cdot,t)|_{C^{(1+\alpha)}(M,\mathbb{R}^q)} &\leq C_3(M,\alpha)\left(\sup_{t\in[0,T)}\left|\Pi(u)(du,du)(\cdot,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|_{L_\infty(M,\mathbb{R}^q)}\right. \\ &\quad \left. + \sup_{t\in[0,T)}|u(\cdot,t)|_{L_\infty(M,\mathbb{R}^q)}\right) \\ &\leq C_4(M,N,f,\alpha) \end{aligned} \tag{4.41}$$

sendo tal limitante independente do $t \in [0,T)$ tomado.

Por outro lado, u também pode ser considerado como sendo solução do sistema parabólico de EDP

$$Lu = \Pi(u)(du,du)$$

onde $L = \Delta - \partial_t$ em M. Recordemos que por definição

$$(\Pi(u)(du,du))^A = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{B,C=1}^{q} g^{ij} \frac{\partial^2 \pi^A}{\partial z_B \partial z_C}(u) \frac{\partial u^B}{\partial x_i} \frac{\partial u^C}{\partial x_j} \quad 1 \leq A \leq q.$$

Donde podemos ver que a norma C^α de $\Pi(u)(du,du)$ pode ser majorada pela norma $C^{1+\alpha}$ de u, e que isto não depende do $t \in [0,T)$ tomado. Assim, por (4.41), temos que

$$|\Pi(u)(du,du)(\cdot,t)|_{C^\alpha(M,\mathbb{R}^q)} \leq C_5(M,N,f,\alpha).$$

Portanto, pelas estimativas de Schauder para soluções de EDP parabólicas vistas no teorema (5.14), temos que

$$\begin{aligned} |u(\cdot,t)|_{C^{(2+\alpha)}(M,\mathbb{R}^q)} + \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|_{C^\alpha(M,\mathbb{R}^q)} &\leq C_6(M,\alpha)\Bigg(\sup_{t\in[0,T)} |\Pi(u)(du,du)(\cdot,t)|_{C^\alpha(M,\mathbb{R}^q)} \\ &\quad + \sup_{t\in[0,T)} |u(\cdot,t)|_{L_\infty(M,\mathbb{R}^q)}\Bigg) \\ &\leq C_7(M,N,f,\alpha). \end{aligned}$$

e novamente o limitante não depende do $t \in [0,T)$ tomado. $\square$

Como dissemos no início, uma limitação como a que acabamos de obter, pode ser utilizada para provar a existência de soluções globais para o problema dado. Antes disto no entanto, mostraremos um resultado sobre a unicidade de soluções da equação parabólica das aplicações harmônicas.

Teorema 4.5. *Seja (M,g) e (N,h) variedades Riemannianas compactas. Suponhamos que $u_1, u_2 \in C^0(M \times [0,T), N) \cap C^{(2,1)}(M \times (0,T), N)$, sejam ambas, soluções da equação parabólica das aplicações harmônicas*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) \qquad (x,t) \in M \times (0,T)$$

tais que $u_1(x,0) = u_2(x,0)$ para todo $x \in M$. Então, $u_1 \equiv u_2$ em $M \times [0,T)$.

Demonstração: Assim como fizemos na demonstração da proposição (4.7), vamos supor que $u_1, u_2 : M \to l(N)$, são funções com valores em $\mathbb{R}^q$, e portanto neste caso, u_1 e u_2 são ambas soluções para o problema (4.21). Seja então $h : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(x,t) = |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 \qquad (x,t) \in M \times [0,T).$$

Para concluir o teorema, é suficiente mostrar que $h(x,t) = 0$, o que faremos (de maneira indireta) utilizando o princípio do máximo. Com efeito, pelas definições feitas temos que

$$\begin{aligned} \Delta h - \frac{\partial h}{\partial t} &= \left(2\left\langle \Delta u_1 - \Delta u_1, u_1 - u_2\right\rangle + 2\left|d(u_1 - u_2)\right|^2\right) \\ &- 2\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}, u_1 - u_2 \right\rangle \\ &= 2\left\langle \left(\Delta u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \left(\Delta u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right), u_1 - u_2 \right\rangle \\ &+ 2\left|d(u_1 - u_2)\right|^2 \\ &= 2\left\langle \Pi(u_1)(du_1, du_1) - \Pi(u_2)(du_2, du_2), u_1 - u_2 \right\rangle \\ &+ 2\left|d(u_1 - u_2)\right|^2 . \end{aligned} \tag{4.42}$$

Neste ponto, estendemos pois a definição de $\Pi(u)(du,du)$ para o caso em que tenhamos três aplicações u_1, u_2 *e* $u_3 : M \to N$, de forma que possamos falar em $\Pi(u_1)(du_2, du_3)$, tal que

$$(\Pi(u_1)(du_2, du_3))^A = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{B,C=1}^{q} g^{ij} \frac{\partial^2 \pi^A}{\partial z_B \partial z_C}(u_1) \frac{\partial u_2^B}{\partial x_i} \frac{\partial u_3^C}{\partial x_j} \quad 1 \le A \le q. \tag{4.43}$$

É fácil ver que Π assim definida é bilinear nas duas últimas variáveis. Pela definição dada, podemos ver que

$$\begin{aligned} \Pi(u_1)(du_1, du_1) - \Pi(u_2)(du_2, du_2) &= \Pi(u_1)(du_1, du_1) - \Pi(u_2)(du_1, du_1) \\ &+ \Pi(u_2)(du_1 - du_2, du_1) + \Pi(u_2)(du_2, du_1 - du_2). \end{aligned}$$

Substituindo este último resultado em (4.42) e aplicando Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\Delta h - \frac{\partial h}{\partial t}\right| &\le |u_1 - u_2| \left|\Pi(u_1)(du_1, du_1) - \Pi(u_2)(du_1, du_1)\right| \qquad (4.44) \\ &+ \left|\Pi(u_2)(du_1 - du_2, du_1)\right| + \left|\Pi(u_2)(du_2, du_1 - du_2)\right| + 2\left|d(u_1 - u_2)\right|^2 . \end{aligned}$$

Aplicando então o teorema do valor médio obtemos que

$$\begin{aligned}
|u_1 - u_2| \, |\Pi(u_1)(du_1, du_1) - \Pi(u_2)(du_1, du_1)| &+ |\Pi(u_2)(du_1 - du_2, du_1)| \\
&+ |\Pi(u_2)(du_2, du_1 - du_2)| \\
\leq k_1 \, |u_1 - u_2| \, |du_1|^2 &+ k_2 \, |du_1 - du_2| \, |du_1| + k_3 \, |du_1 - du_2| \, |du_2| \\
\leq k_4 \, (|u_1 - u_2| &+ |du_1 - du_2|) \, .
\end{aligned}$$

Donde temos que

$$\Delta h - \frac{\partial h}{\partial t} \quad \geq \quad -k_4 \, |u_1 - u_2| \, (|u_1 - u_2| + |du_1 - du_2|) + 2 \, |d(u_1 - u_2)|^2 \, .$$

Denotando $|u_1 - u_2| = a$ e $|d(u_1 - u_2)| = b$ e usando a desigualdade $ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2$ (válida para qualquer $\epsilon > 0$), temos então que

$$-k_4 a(a + b) + 2b^2 \geq -k_4 a^2 - k_4 \epsilon a^2 - k_4 \epsilon^{-1} b^2 + 2b^2.$$

Tomando então $\epsilon = k_4/2$, obtemos que

$$-k_4 a(a + b) + 2b^2 \geq -k_4 a^2 - \frac{k_4^2}{2} a^2 = -k_5 a^2.$$

E portanto

$$\Delta h - \frac{\partial h}{\partial t} \quad \geq \quad -k_5 h$$

onde k_4 e k_5 dependem somente das derivadas terceiras da projeção $\pi : N_\epsilon \to l(N)$ da vizinhaça tubular de $l(N)$, e dos valores máximos atingidos por $e(u_1)$ e $e(u_2)$ em $M \times [0, T)$.

Como $h(x, 0) = 0$, concluímos pelo princípio do máximo (ver lema (5.8)) que $h(x, t) = 0$, daí temos que $u_1 \equiv u_2$ como afirmado. □

Teorema 4.6. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas, com N além disto de curvatura não-positiva $K_N \leq 0$. Então, para toda $f \in C^{2+\alpha}(M, N)$ dada, existe uma única $u \in C^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}(M \times [0, \infty), N) \cap C^\infty(M \times (0, \infty), N)$, tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \tau(u(x, t)) & (x, t) \in M \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \tag{4.45}$$

A idéia da prova é basicamente mostrar que uma vez que já se sabe que o problema admite solução e que tal solução não exploda em vizinhança de ponto algum, então tal solução pode ser estendida a toda reta.

Demonstração: Pelo teorema (4.4) da seção anterior, temos que existe uma constante $T = T(M, N, f, \alpha) > 0$ e uma aplicação $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0, T), N)$ que é solução local para o problema (4.45), onde neste caso a igualdade $\frac{\partial u_t}{\partial t}(x, t) = \tau(u(x, t))$ somente é exigida para os pontos $(x, t) \in M \times (0, T)$. Destaquemos ainda que a existência de tal solução, não depende da particular condição dada a curvatura da variedade N. Se no entanto tivermos que tal curvatura é não-positiva $K_N \leq 0$ (donde podemos utilizar a proposição (4.7)), mostremos que tal solução pode ser estendida a $M \times [0, \infty)$. Seja

$$T_0 = \sup\{t \in [0, \infty), \text{ tal que (4.45) tenha solução em } \; M \times [0, t)\}$$

mostremos que $T_0 = \infty$. Com efeito, suponhamos por um absurdo, que $T_0 < \infty$. Tomemos então um sequência $\{t_i\}$, tal que $t_i \to T_0$. Novamente, assim como fizemos na proposição (4.7), vamos supor que N seja uma subvariedade de um espaço euclidiano $\mathbb{R}^q$, e neste caso, cada $u(\cdot, t_i) \in C^\infty(M, N)$ pode ser consideranda como uma função $u : M \to \mathbb{R}^q$ com valores em $\mathbb{R}^q$.

Como a curvatura de N por hipótese é não positiva $K_N \leq 0$, temos então pela proposição (4.7) que as sequências de aplicações

$$\{u(\cdot, t_i)\} \qquad \text{e} \qquad \{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_i)\}$$

são subconjuntos uniformemente limitados dos respectivos espaços de funções $C^{2+\alpha}(M, \mathbb{R}^q)$ e $C^\alpha(M, \mathbb{R}^q)$, uma vez que como vimos, a limitação imposta, não depende do particular t tomado no intervalo de solução. Assim, por Arzelá-Ascoli, temos que existe uma subsequência $\{t_{i_k}\}$ de $\{t_i\}$ e funções

$$u(\cdot, T_0) \in C^{2+\alpha}(M, \mathbb{R}^q) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T_0) \in C^\alpha(M, \mathbb{R}^q),$$

tais que as subsequências

$$\{u(\cdot, t_{i_k})\} \quad e \quad \{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_{i_k})\}$$

convirjam uniformemente para $u(\cdot, T_0)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T_0)$ respectivamente, quando $t_{i_k} \to T_0$. Como para cada t_{i_k} tem-se que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\cdot, t_{i_k}) = \tau(u(\cdot, t_{i_k}))$$

então pela convergência uniforme temos pois que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\cdot, T_0) = \tau(u(\cdot, T_0)).$$

Assim, temos que o problema (4.45) admite uma solução em $M \times [0, T_0]$, a qual além disto satisfaz a igualdade

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}(\cdot, T_0) = \tau(u(\cdot, T_0)) \qquad \text{para } t = T_0.$$

Aplicando o teorema (4.4) a condição inicial $u(\cdot, T_0) \in C^{2+\alpha}(M, N)$, temos então que existe um $\epsilon > 0$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,t) = \tau(\tilde{u}(x,t)) & (x,t) \in M \times (T_0, T_0 + \epsilon) \\ \tilde{u}(x, 0) = u(x, T_0). \end{cases}$$

admita uma solução $\tilde{u} \in C^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}(M \times [T_0, T_0 + \epsilon], N)$ em $[T_0, T_0 + \epsilon]$. Podemos ver então que u e $\tilde{u}$, coincidem em $M \times T_0$. Além disto, estas dão origem a uma solução $v \in C^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}(M \times [0, T_0 + \epsilon], N)$ para o problema de valor inicial (4.45). Neste caso, ainda pelo mesmo teorema (4.4), temos que $v \in C^{\infty}(M \times (0, T_0 + \epsilon), N)$. Portanto, v é uma solução para (4.45) em $M \times [0, T_0 + \epsilon]$, o que contradiz nossa hipótese inicial sobre T_0, e portanto $T_0 = \infty$. Quanto a unicidade, esta segue direto do teorema (4.5). □

Existência de Aplicações Harmônicas

Nesta seção, finalmente provaremos o teorema (4.2) de **Eells e Sampson**, enunciado no inicio. Nosso objetivo será mostrar que a aplicação $u \in C^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}(M \times [0, \infty), N) \cap C^{\infty}(M \times (0, \infty), N)$ obtida na seção anterior como solução global para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \tau(u(x,t)) & (x,t) \in M \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \tag{4.46}$$

de fato, pode ser utilizada para obter-se uma aplicação harmônica, que seja livremente homotópica a aplicação $f \in C^0(M,N)$, dada no teorema (4.2) (e utilizada como condição inicial para o problema (4.46)), o que aliás, era o que de fato buscávamos quando utilizamos o método do fluxo do calor.

Para obter a conclusão acima referida, faremos uso das fórmulas de Weitzenböck, bem como de alguns outros resultados derivados destas.

Lema 4.1. *Sejam (M,g) e (N,h) variedades Riemannianas compactas, com N de curvatura não-positiva $K_N \leq 0$. Se $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(M \times [0,\infty), N) \cap C^\infty(M \times (0,\infty), N)$ é a solução global para o problema (4.46), então temos que*

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} \to 0 \quad se \quad t \to \infty.$$

Demonstração: Como por hipótese a curvatura de N é não positiva $K_N \leq 0$, temos pela proposição (4.3), que o funcional energia $E : C^\infty(M,N) \to \mathbb{R}$ restrito a u, isto é, $E(u_t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, é tal que

$$\frac{d}{dt}E(u_t) \leq 0 \qquad e \qquad \frac{d^2}{dt^2}E(u_t) \geq 0.$$

Donde temos que a função $\frac{d}{dt}E(u_t)$ é monótona (não-decrescente) e limitada. Logo, existe $b \leq 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{d}{dt}E(u_t) = b.$$

Afirmamos que $b = 0$. Com efeito, se $b < 0$, então

$$\frac{d}{dt}E(u_t) < b < 0 \qquad \forall t \in [0,\infty).$$

Donde teríamos que

$$E(u)(t) \leq bt + E(u)(0)$$

e portanto $\lim\limits_{t \to +\infty} E(u)(t) = -\infty$, o que é um absurdo, uma vez que $E(u)(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,\infty)$. Assim, de fato temos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{d}{dt}E(u_t) = 0.$$

Por outro lado, por outro lado, sendo u uma solução de (4.46), temos por (4.5) que

$$\frac{d}{dt}E(u_t) = -\int_M \left\langle \frac{\partial u_t}{\partial t}, \tau(u_t) \right\rangle d\mu_g = -\int_M \left\langle \frac{\partial u_t}{\partial t}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\rangle d\mu_g = -\left| \frac{\partial u_t}{\partial t} \right|^2$$

donde temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial u_t}{\partial t} = 0$$

como afirmamos. □

Utilizando o resultado anterior, podemos mostrar que a solução global u converge para uma aplicação harmônica livremente homotópica a aplicação f, dada como condição inicial.

Proposição 4.8. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas, com N além disto de curvatura não-positiva $K_N \leq 0$. Dada uma condição inicial $f \in C^{2+\alpha}(M, N)$, seja $u : M \times [0, \infty) \to N$ a solução global para o problema (4.46). Então, existe uma sequência $\{t_i\} \in \mathbb{R}$ com $t_i \to \infty$, tal que a sequência de aplicações $\{u(\cdot, t_i)\}$ converge para uma aplicação harmônica $u_\infty \in C^\infty(N, N)$, a qual é livremente homotópica a f.*

Demonstração: Da hipótese de N possuir curvatura não-positiva $K_N \leq 0$, temos pela proposição (4.7), que as famílias de aplicações

$$\{u(\cdot, t)\} \quad e \quad \{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)\}$$

são subconjuntos uniformemente limitados dos espaços de aplicações $C^{2+\alpha}(M, N)$ e $C^\alpha(M, N)$. Assim, por Arzelá-Ascoli, temos que existe uma sequência $t_i \to \infty$ e aplicações

$$u_\infty \in C^{2+\alpha}(M, N) \quad e \quad \partial_t u_\infty \in C^\alpha(M, N)$$

tais que as sequências

$$\{u(\cdot, t_i)\} \quad e \quad \{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_i)\}$$

convergem uniformemente para u_∞ e $\partial_t u_\infty$ quando $t_i \to \infty$. Como porém para cada t_i tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_i) = \tau(u(\cdot, t_i))$$

temos então que

$$\partial_t u_\infty = \tau(u_\infty).$$

Por outro lado, pelo lema (4.47) acima, temos que

$$\partial_t u_\infty = \lim_{t_i \to \infty +} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t_i) = 0.$$

Donde temos que

$$\tau(u_\infty) = 0.$$

Como além disto $u_\infty \in C^{2+\alpha}(M, N)$, temos pelo teorema (5.17) de regularidade de aplicações harmônicas, que $u_\infty \in C^\infty(M, N)$, donde temos que u_∞ é uma aplicação harmônica.

Resta então mostrar que u_∞ é livremente homotópica a f. De fato, como a sequência $\{u_{t_i}\}$ converge uniformemente para aplicação u_∞, podemos então pela compacidade da variedade N, tomar um t_i suficientemente grande, de forma que $u(x, t_i)$ e $u_\infty(x)$ pertençam a mesma vizinhança coordenada. Com M também é compacta, podemos então construir uma uma homotopia livre entre u_{t_i} e u_∞.

Também, sendo u contínua em t, temos pois que $f = u_0$ e u_{t_i} são livremente homotópicas, o que mostra que f e u_∞ são livremente homotópicas. □

Lema 4.2. *Sejam M e N variedades diferenciáveis compactas. Então, toda aplicação contínua $f \in C^0(M, N)$ é livremente homotópica a uma aplicação $g \in C^\infty(M, N)$.*

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em ([11]).

Com este último resultado, podemos concluir a demonstração do teorema (4.2).

Teorema 4.7 (Eells e Sampson)**.** *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas, sendo N além disto de curvatura não-positiva. Então, para qualquer aplicação contínua $f : M \to N$, existe uma aplicação harmônica $u_\infty : M \to N$ livremente homotópica a f.*

Demonstração: Pelo lema (4.2), temos que $f \in C^0(M, N)$ é livremente homotópica a uma aplicação $\tilde{f} \in C^\infty(M, N)$, portanto, aplicando o teorema (5.82) a $\tilde{f}$, concluímos que $\tilde{f}$ é livremente homotópica a uma aplicação harmônica, e portanto, f também o é, o que conclui o resultado. □

Capítulo 5

Comentários Finais

Sobre a Eficiência do Método do Fluxo do Calor

Provada a existência de aplicações harmônicas (sob as condições postas), uma pergunta natural seria: Esta é única?

Obviamente que no caso em que tal aplicação harmônica for constante, não se tem unicidade. Também no caso em que a aplicação harmônica obtida for uma geodésica fechada, não se tem unicidade. Porém, como mostra o próximo resultado devido a Hartman, a menos deste casos, pode-se afirmar a unicidade de tais aplicações. Ou seja, a menos dos casos supracitados, temos unicidade das soluções do teorema de Eells e Sampson.

Teorema 5.1. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas compactas, com N além disto de curvatura não positiva. Então temos que:*

(1) Sejam $u_0, u_2 \in C^\infty(M, N)$ aplicações harmônicas livremente homotópicas. Então, existe uma homotopia livre $u : M \times [0, 1] \to N$ entre u_0 e u_2, tal que cada aplicação da família $\{u_s |\ s \in [0, 1]\} \subset C^\infty(M, N)$ seja uma aplicação harmônica. Ou seja, o conjunto das aplicações harmônicas livremente homotópicas a u_0 é um conjunto conexo.

(2) Se N é de curvatura negativa (i.e $K^N < 0$), então, temos a unicidade de aplicações harmônicas no seguinte sentido. Se $u_0, u_2 \in C^\infty(M, N)$ são aplicações harmônicas

livremente homotópicas, então, $u_0 = u_1$ exceto para os casos (i) e (ii) abaixo:

(i) u_0 é uma aplicação constante. Neste caso, apesar de não necessariamente se ter $u_0 = u_1$, porém, ainda sim temos que u_1 também é uma aplicação constante.

(ii) A imagem $u_0(M)$ de M por u_0 é uma geodésica fechada γ. Neste caso, apesar de não necessariamente ter-mos $u_0 = u_1$, porém, ainda sim, temos que $u_1(M) = \gamma$ e além disto, para cada $x \in M$ temos que $u_1(x)$ pode ser obtido de $u_0(x)$ por um movimento constante ao longo de γ e no mesmo sentido.

Uma demontração deste resultado, pode ser encontrada em [18].

Sobre as Hipóteses do Teorema de Eells e Sampson

A compacidade de N é Necessária

Seja M a superfície de revolução obtida girando uma função positiva estritamente decrescente $v = v(u)$, em torno do eixo u; seja ϕ o ângulo de revolução. Tomando então uma aplicação do círculo unitário $f : S^1 \to M$ parametrizada pelo ângulo central θ, então neste caso, a equação do calor assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{v'v''}{1+(v')^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{vv'}{1+(v')^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + 2\frac{v'}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right). \end{aligned}$$

Logo, se f satisfaz as condições iniciais $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, $\phi = \theta$ quando $t = 0$, então o mesmo ocorre com a solução f_t para os demais valores de t. Assim, se tomar-mos $v(u) = 1 + e^{-u}$, então, $R^M_{1212} = -\dfrac{1+e^u}{1+e^{2u}} < 0$, e portanto a equação do calor assume a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1+e^u}{1+e^{2u}}.$$

Assim, temos que $e^u + u - 2\log(e^u+1) = t + \text{const.}$; em particular, $u \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Assim, vemos que M não possui geodésicas fechadas, e portanto para este caso, temos que qualquer aplicação contínua, que não esteja na classe tivial de homotopia, não pode ser livremente homotópica a nenhuma aplicação harmônica.

Implicações do Teorema de Eells e Sampson

Utilizando dos conteúdos apresentados anteriormente, bem como de alguns outros que são clássicos em EDP (ver apêndice), podemos obter alguns fatos importantes a respeito das aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas.

Nosso próximo resultado por exemplo, pode ser utilizado (o que de fato faremos na sequência), para mostrar como as propriedades das variedades em questão, tal é o caso da curvatura, podem ser utilizadas para se estudar as aplicações harmônicas entre estas variedades.

Proposição 5.1. *Sejam (M,g) e (N,h) variedades Riemannianas de dimensões m e n respectivamente. Então, para toda aplicação harmônica $\phi : M \to N$, temos que a densidade de energia $e(\phi)$ de ϕ é tal que:*

$$\Delta e(\phi) = |\nabla\phi|^2 + Q(d\phi), \tag{5.1}$$

para $Q(d\phi)$ dada por

$$Q(d\phi) = \sum_{i=1}^{m} \left\langle d\phi\left(\sum_{j=1}^{m} Ric^M(e_i,e_j)e_j\right), d\phi(e_i)\right\rangle - \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle R^N(d\phi(e_i), d\phi(e_j))d\phi(e_j), d\phi(e_i)\right\rangle.$$

onde Ric^M e R^N são respectivamente o tensor de Ricci de M e o tensor curvatura de N e $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM para cada $p \in M$.

Demonstração: Seja $F = \{u_t\}_{t\in I} : I \times M \to N$ uma variação diferenciável de ϕ, tal que além disto, $u_t(x) = u(t,x)$ satisfaça a equação parabólica das aplicações harmônicas. Tomando um referencial (local) geodésico (e_i) em uma vizinhança de $p \in M$, temos então que

$$e(u_t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} h\left(du_t(e_j), du_t(e_j)\right).$$

Assim temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial e(u_t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{m} h\left(\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)} du_t(e_j), du_t(e_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j} du_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), du_t(e_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j} \frac{\partial u_t}{\partial t}, du_t(e_j)\right),
\end{aligned}
$$

onde na segunda igualdade, utilizamos a proposição (2.1), que juntamente com Schwarz, implica neste caso na simetria das derivadas tomadas. Como por hipótese u satifaz a equação parabólica das aplicações harmônicas, temos que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \tau(u_t)$$

e portanto

$$\frac{\partial e(u_t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} h\left(\nabla_{e_j} \tau(u_t), du_t(e_j)\right).$$

Sendo $\phi = u_0$ harmônica, temos que $\tau(u_0) = \tau(\phi) = 0$, logo

$$\left.\frac{\partial e(u_t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Assim, pela fórmula de Weitzenböck para $e(u_t)$ (ver proposição (4.1-(2)), temos que

$$
\begin{aligned}
\Delta e(\phi) &= |\nabla d\phi|^2 + \sum_{i=1}^{m} \left\langle d\phi\left(\sum_{j=1}^{m} Ric^M(e_i, e_j)e_j\right), d\phi(e_i)\right\rangle \\
&- \sum_{i,j=1}^{m} \left\langle R^N(d\phi(e_i), d\phi(e_j))d\phi(e_j), d\phi(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

□

Utilizando então desta última proposição, podemos provar o próximo resultado.

Proposição 5.2. *Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas, onde M é compacta com $Ric^M \geq 0$ e N é de curvatura não-positiva (i.e. $K^N \leq 0$). Então, para toda aplicação harmônica $u : M \to N$ temos que:*

(1) u é totalmente geodésica, isto é, $\nabla du = 0$.

(2) A densidade de energia $e(u)$ de u é constante.

(3) Se o tensor de Ricci de M é positivo definido, isto é, $Ric^M(x) > 0$ em um ponto $x \in M$, então u é constante.

(4) Se N é de curvatura negativa $K^N < 0$, então, ou u é uma aplicação constante, ou sua imagem é uma geodésica fechada de N.

Demonstração: (1) Pelo teorema de Green, temos que

$$\int_M \Delta e(u) d\mu_g = 0.$$

Assim, pela expressão (5.1) da proposição anterior, temos que

$$\int_M \sum_{i=1}^m |\nabla u|^2 + Q(du) d\mu_g = 0.$$

Sendo ambos os termos do integrando anterior não-negativos (pois por hipótese $Ric^M(x) \geq 0$ e $K^N < 0$), concluímos que $\nabla du = 0$ e $Q(du) = 0$.
(2) Sendo $Ric^M(x) \geq 0$ e $K^N < 0$, temos pela proposição (5.1) que $\nabla e(u) \geq 0$, ou seja, que $e(u)$ é uma função subharmônica. Como M é compacta, temos pelo teorema (3.7) que $e(u)$ é constante.
(3) Como pelo item anterior $Q(du) = 0$, temos então que

$$\sum_{i=1}^m \left\langle du \left(\sum_{j=1}^m Ric^M(e_i, e_j) e_j \right), du(e_i) \right\rangle = 0.$$

Assim, se $Ric^M(x) > 0$ para algum $x \in M$, então $du(x) = 0$, donde $e(u)(x) =$. Como pelo item anterior $e(u)$ é constante, concluímos que $e(u) \equiv 0$.
(4) Como $Q(du) = 0$, então, para toda base ortonormal $\{e_i\}$ do espaço tangente T_xM em $x \in M$, temos que

$$\left\langle R^N(du(e_i), du(e_j)) du(e_j), du(e_i) \right\rangle = 0, \qquad 1 \leq i, j \leq m.$$

Por outro lado, se N é de curvatura negativa (i.e $K^N < 0$), então, para todo subespaço bidimensional $\sigma \subset T_xM$ de T_xM, temos que sua curvatura seccional $K(\sigma) < 0$ é negativa. Donde neste caso, devemos ter que $du(e_i)$ e $du(e_j)$ são sempre linearmente dependente (não podem gerar um subespaço de bidimensional). E portanto, neste caso, em cada $x \in M$ devemos ter que

$$dim\ du_x(T_xM) \leq 1,$$

Se $dim\ du_x(T_xM) = 0$, então u é constante. Se por outro lado, $dim\ du_x(T_xM) = 1$, então, $u(M) \subset N$ é uma curva de N. Como além disto, u é totalmente geodésica, então, nesta situação, afirmamos que $u(M)$ é uma geodésica fechada de N. Com efeito, tomando uma geodésica fechada em M (cuja existência é assegurada pelo teorema de Cartan (4.1), uma vez que M é compacta), então devemos ter que a imagem desta geodésica fechada por u é também uma geodésica fechada de N, pois u é totalmente geodésica e portanto leva geodésicas em geodésicas, isto então confirma o afirmado e encerra a demonstração. $\square$

Apêndice

Medidas Riemannianas

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão m. Mostremos que é possível introduzir-se uma noção de medida nesta. Denotemos por $C_0(M)$, o espaço das funções reais com suporte compacto em (M, g). Podemos definir uma métrica em $C_0(M)$, tomando $\|f\| := sup\{|f(p)|\,; p \in M\}$. Posto isto, podemos passar as definições.

Definição: : Seja $V : C_0(M) \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Dizemos que V é uma *medida de Radon* em M, se para todo compacto $K \subset M$, existir um $a_k > 0$, tal que

$$|V(f)| \leq a_k \,\|f\| \qquad f \in C_0(M),\ suppf \subset K.$$

Tal medida é dita *positiva*, se $V(f) \geq 0$, para toda $f > 0$. Caso M seja compacta, temos que $C_0(M) = C(M)$ (espaço das funções reais e contínuas em M) é um espaço de Banach com a norma definida acima. Neste caso, uma medida de Radon em M, nada mais é que um funcional linear limitado em $C(M)$.

Dados uma estrutura diferenciável $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ de M, e uma partição d unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a cobertura $\{x_\alpha(U_\alpha)\}$. Para cada $f \in C_0(M)$ definimos

$$\mu_g(f) := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \left(\rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{det(g_{ij}^\alpha)}\right) \circ x_\alpha \; dx_\alpha^1, \ldots, dx_\alpha^1$$

onde (g_{ij}^α), é a matriz consistindo das componentes de g, com respeito ao sistema local de coordenadas (x_α). A integral do lado direito, representa a integral de Lebesgue de funções contínuas com suporte compacto, definidas em subconjuntos U_α de $\mathbb{R}^n$. Observemos que a soma dada acima, é na verdade finita, pois por hipótese *supp f* é compacto.

Mostremos que a definição dada, não depende da particular escolha da estrutura diferenciável $\{U_\alpha, x_\alpha\}$. Com efeito, seja $\{V_\beta, y_\beta\}$, uma outra estrutura diferenciável e $\{\tau_\beta\}$ a partição da unidade subordinada a $\{y_\beta(V_\beta)\}$. Neste caso temos que

$$\sqrt{det(g_{ij}^{\beta})(p)} = J\sqrt{det(g_{ij}^{\alpha})(p)} \qquad p \in x_\alpha(U_\alpha) \cap y_\beta(V_\beta)$$

onde $J = det\left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial y_j^\beta}\right) = det(dx_\alpha^{-1} \circ dy_\beta)(y_\beta^{-1})$. Portanto, denotando por $W_{\alpha\beta} = x_\alpha(U_\alpha) \cap y_\beta(V_\beta)$, temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_\beta \int_{V_\beta} \left(\tau_\beta \cdot f \cdot \sqrt{det(g_{ij}^{\beta})}\right) \circ y_\beta dy_\beta^1, \ldots, dy_\beta^m \\
= & \sum_{\alpha\beta} \int_{y_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})} \left(\tau_\beta \cdot \rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{det(g_{ij}^{\beta})}\right) \circ y_\beta dy_\beta^1, \ldots, dy_\beta^m \\
= & \sum_{\alpha\beta} \int_{y_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})} \left(\tau_\beta \cdot \rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{det(g_{ij}^{\alpha})}\right) \circ y_\beta \cdot J dy_\beta^1, \ldots, dy_\beta^m
\end{aligned}$$

(Pela fórmula de mudança de variáveis para integrais em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}
= & \sum_{\alpha\beta} \int_{x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})} \left(\tau_\beta \cdot \rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{det(g_{ij}^{\alpha})}\right) \circ x_\alpha \cdot J dx_\alpha^1, \ldots, dx_\alpha^m \\
= & \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \left(\rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{det(g_{ij}^{\alpha})}\right) \circ x_\alpha \cdot J dx_\alpha^1, \ldots, dx_\alpha^m.
\end{aligned}$$

Podemos ver ainda que μ_g é uma medida de Radon positiva em M, a qual é chamada de *medida padrão* induzida pela métrica g em M. Denotamos $\mu_g(f)$ por $\int_M f d\mu_g$, a qual é dita ser a integral de f sobre M.

Pode-se mostrar ainda, que são válidos os seguintes resultados

Teorema 5.2 (Divergência)**.** *Seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo de vetores com suporte compacto na variedade Riemanniana (M, g). Então*

$$\int_M div(X) d\mu_g = 0.$$

De uso frequênte neste texto será o seguinte resultado, o qual é uma implicação imediata do teorema anterior

Corolário 5.1. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta. Então para todo* $X \in \Gamma(TM)$ *temos*

$$\int_M div(X) d\mu_g = 0.$$

Não daremos a demonstração destes fatos, ao leitor interessado sugerimos [34], onde é feita uma exposição dos conteúdos das medidas Riemannianas.

Resultados Gerais de EDP

Neste capítulo faremos uma breve revisão de alguns resultados de EDP utilizados no restante do texto. Tais resultados são em sua grande maioria bem clássicos, sendo portanto esperados serem do conhecimento da maioria dos leitores. Assim, para um leitor que tenha algum conhecimento a respeito do assunto, ou mesmo que não o tenha e não esteja interessado no momento nestes, recomendamos que avance para o próximo capítulo, retornando ao atual somente para conferir algum dos resultados utilizados adiante, caso julgue necessário.

Como dissemos, nossa intensão é apenas fazer um apanhado geral da teoria de EDP utilizada durante o texto. Desta forma, os tópicos tratados, serão abordados de forma sucinta, muitas vezes sem serem demonstrados. De qualquer forma, fontes serão citadas para que o leitor interessado possa consultar afim de obter maiores informações a respeito dos tópicos expostos.

Nosso objetivo principal aqui, será obter as estimativas de Schauder para as soluções das EDPs lineares elípticas e parabólicas (a serem definidas), as quais são imprescindíveis ao estudo da existência e regularidade das soluções de tais EDPs. Em ambos os casos (elíptico e parabólico), nosso ponto de partida serão os casos mais simples (respectivamente equação de Poisson e do calor), estendendo posteriormente os resultados obtidos aos casos mais gerais.

Ao final, mostraremos como os resultados obtidos (para espaços reais) podem ser estendidos para o caso em que as aplicações em questão forem entre variedades Riemannianas, tratando de alguns destes resultados nesta situação específica, tal é o caso do teorema de regularidade das aplicações harmônicas e do princípio do máximo para a equação do calor. Aproveitamos a oportunidade para demonstrar também alguns resultados que serão utilizados no próximo capítulo.

EDPs Lineares Elípticas

Nesta seção, abordaremos as EDPs lineares elípticas de segunda ordem. Nossa estratégia será de início supor a existência de soluções (com a regularidade pretendida) para as equações dadas, e obter então estimativas para estas. Em seguida, utilizando das estimativas obtidas, que são neste caso chamadas de estimativas a priori, passamos a estudar a existência e regularidade de tais soluções.

No que se segue, revisaremos alguns resultados a respeito das soluções da equação de Laplace, a qual como dissemos, é o protótipo mais simples das EDPs lineares elípticas de segunda ordem. A maioria dos resultados expostos nesta seção podem ser encontrados em [16].

Equação de Laplace

Por questão de comodidade, durante todo este tópico, utilizaremos como domínio de nossas funções, uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a qual é aberta, conexa e com fronteira de classe no mínimo C^1. Nos tópicos subsequêntes utilizaremos conjuntos menos restritos.

Seja $u \in C^2(\Omega)$ uma função. Então, o Laplaciano de u, o qual denotamos Δu, é definido por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u = div(Du).$$

Utilizando deste, definimos a equação

$$\Delta u = 0$$

chamada de *equação de Laplace*. Tal equação, admite como solução a função

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x-y|, & n = 2 \end{cases}$$

onde ω_n é o volume da bola unitária de $\mathbb{R}^n$. Tal função é chamada de *solução fundamental* da equação de Laplace.

A partir da solução fundamental, podemo obter as *fórmula de representação de Green*:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) ds + \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u \, dx, \quad y \in \Omega \tag{5.2}$$

para toda $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Utilizando desta fórmula, bem como das fórmulas de Green, podemos resolver o problema de Dirichlet para bolas, como mostra o teorema:

Teorema 5.3. *Seja $B = B(0,R)$ e ϕ uma função contínua em ∂B. Então a função definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\phi(y)}{|x-y|^n} dS_y & x \in B \\ \phi(x), & x \in \partial B \end{cases} \tag{5.3}$$

pertence a $C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ e satisfaz a equação $\Delta u = 0$ em B.

Operadores Diferenciais Lineares Elípticos

Seja Ω um domínio conexo e limitado de $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$. Consideremos o *operador diferencial linear elíptico* L em Ω

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u + c(x) u \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

para $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. L é dito ser *elíptico* em um ponto $x \in \Omega$, se os coeficientes da matriz $[a_{ij}(x)]$ são positivos, ou seja, se

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x) |\xi|^2 \qquad \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

onde $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$, são respectivamente o menor e o maior autovalor de $[a_{ij}(x)]$.

Durante todo este capítulo, assumiremos que os coeficientes a_{ij}, b_i e c, são no mínimo contínuos, donde limitados em $\bar{\Omega}$. Neste caso, L é dito ser *uniformemente elíptico* em Ω se:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda\,|\xi|^2 \qquad x \in \Omega \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

onde λ é uma constante positiva.

Uma propriedade importane dos operadores lineares elípticos de segunda ordem, é que suas soluções, assim como as soluções do operador de Laplace, satisfazem o princípio do máximo. Esta importante característica, possibilita que se estude de forma mais simples este tipo de operadores, pois entre outras coisas, esta propriedade permite estimar mais facilmente as soluções dos mesmos, tal por exemplo é o caso do resultado abaixo.

Proposição 5.3 (Estimativas a priori)**.** *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *uma solução para o problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = \phi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

com $f \in C(\bar{\Omega})$ *e* $\phi \in C(\partial\Omega)$*. Se* $c(x) \leq 0$*, então*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\phi| + C \max_{\Omega} |f| \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

onde C *é uma constante positiva dependente somente de* λ*,* Λ *e do diam*(Ω)*.*

Hölder Continuidade

Neste tópico, introduziremos a classe das funções Hölder contínuas, as quais como veremos, são muito convenientes para o tipo de estudo que faremos neste texto, tal por exemplo é o caso da regularriddade das soluções dos operadores diferenciais.

Definição 5.1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$ e $\alpha \in (0, 1)$. Então f é dita ser Hölder contínua em x_0 com expoente α se

$$[f]_{\alpha;x_0} = \sup_{x \in \Omega \setminus \{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{\alpha}} < \infty. \tag{5.5}$$

Se (5.5) ocorre para $\alpha = 1$, então f é dita ser Lipschitz contínua em x_0.

Tal definição pode ser estendida a todo conjunto Ω. Para isto, definimos a seminorma Hölder (de expoente α) por

$$[f]_{\alpha;\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}. \tag{5.6}$$

Caso tal valor seja finito, f é dita ser *uniformemente Hölder contínua* com expoente α em Ω. Caso f seja uniformemente Hölder contínua com expoente α em cada subconjunto compacto de Ω, então f é dita ser *localmente Hölder contínua* com expoente α em Ω.

Definimos os espaços Hölder $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ (resp. $C^{k+\alpha}(\Omega)$), como sendo os espaços das funções $f \in C^k(\bar{\Omega})$ (resp. $f \in C^k(\Omega)$), cujas k-ésimas derivadas parciais são uniformemente Hölder contínuas (resp. localmente Hölder contínuas). Definimos também o espaço $C_0^{k+\alpha}(\Omega)$, que é formado pelas funções de $C^{k+\alpha}(\Omega)$ que possuem suporte compacto em Ω (i.e *supp* $f \subset\subset \Omega$).

Definimos também as seminormas

$$\begin{aligned} [u]_{C^k(\Omega)} &= \sup_{|\beta|=k}\sup_{\Omega}\left|D^{\beta}u\right|, \quad k = 0,1,2,\ldots \\ [u]_{C^{k+\alpha}(\Omega)} &= \sup_{|\beta|=k}[D^{\beta}u]_{\alpha;\Omega}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

A partir das quais definimos as normas nos respectivos espaços $C^k(\bar{\Omega})$ e $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, tais que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^k(\Omega)} &= \sum_{j=0}^{k}[u]_{C^j(\Omega)} \\ \|u\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} &= \|u\|_{C^k(\Omega)} + [u]_{C^{k+\alpha}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Podemos ainda definir outras normas nos espaços $C^k(\bar{\Omega})$ e $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, as quais serão úteis no que se segue. Seja Ω limitado, com *diam* $\Omega = d$, definimos

$$\begin{aligned} \|u\|'_{C^k(\Omega)} &= \sum_{j=0}^{k} d^j[u]_{C^j(\Omega)} \\ \|u\|'_{C^{k+\alpha}(\Omega)} &= \|u\|'_{C^k(\Omega)} + d^{k+\alpha}[u]_{C^{k+\alpha}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Pode-se mostrar que com as normas definidas em (5.9) e (5.10), $C^k(\bar{\Omega})$ e $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ são espaços de Banach.

Podemos definir mais algumas normas em $C^k(\Omega)$ e $C^{k+\alpha}(\Omega)$, as quais serão bastante convenientes para o que se segue. Dados $x, y \in \Omega$, seja $d_x = dist(x, \partial\Omega)$, $d_{x,y} = min(d_x,\ d_y)$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, definimos as seguintes seminormas

$$[u]^*_{C^k(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_x^k \left|D^\beta u(x)\right|, \qquad [u]^*_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_x^{k+\alpha} \frac{D^\beta u(x) - D^\beta u(y)}{|x-y|^\alpha}, \tag{5.10}$$

$$[u]^{(\sigma)}_{C^k(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_x^{k+\sigma} \left|D^\beta u(x)\right| \quad \text{e} \quad [u]^{(\sigma)}_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_x^{k+\alpha+\sigma} \frac{D^\beta u(x) - D^\beta u(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

A partir das quais definimos as normas nos respectivos espaços $C^k(\bar{\Omega})$ e $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, tais que

$$\|u\|^*_{C^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} [u]^*_{C^j(\Omega)}, \qquad \|u\|^*_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = \|u\|^*_{C^k(\Omega)} + [u]^*_{C^{k+\alpha}(\Omega)}, \tag{5.11}$$

$$\|u\|^{(\sigma)}_{C^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} [u]^{(\sigma)}_{C^j(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|^{(\sigma)}_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = \|u\|^{(\sigma)}_{C^k(\Omega)} + [u]^{(\sigma)}_{C^{k+\alpha}(\Omega)}.$$

De posse destas novas definições, podemos apresentar o próximo teorema, o qual nos será útil na sequência.

Teorema 5.4. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^\alpha(\Omega)$. Suponhamos que $u \in C^2(\Omega)$ e que u satisfaça a equação $\Delta u = f$. Então, existe $C = C(n, \alpha)$ tal que*

$$\|u\|^*_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|^{(2)}_{C^\alpha(\Omega)} \right). \tag{5.12}$$

Ressaltemos que este últimos resultado, é de extrema importância ao estudo das soluções da equação de Poisson, pois este nos fornece limitações para as derivadas Du e D^2u, e para os coeficientes Hölder de D^2u em subconjuntos compactos de Ω, o que nos possibilita utilizar argumentos de compacidade para tais soluções, sendo uma de suas implicações diretas, a equicontinuidade das derivadas primeiras e segundas em subcojuntos compactos de Ω, de qualquer conjunto de soluções da equação de Poisson.

Estimativas de Schauder

Neste tópico, apresentaremos algumas estimativas para as soluções dos operadores lineares elípticos de segunda ordem com coeficientes Hölder contínuos, as quais possibilitam que utilizemos argumentos de compacidade (ver comentário após o teorema (5.4)), que são essenciais para teoria de existência e regularidade de soluções.

Na realidade, o que faremos aqui é basicamente estender os resultados obtidos na seção anterior (para as soluções da equação de Poisson), para as equações elípticas de segunda ordem. Assim, iniciamos apresentando tal extensão para o caso mais simples das equações lineares elípticas de segunda ordem com coeficientes constantes.

Lema 5.1. *Consideremos a equação*

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_{ij} u = f(x), \quad A_{ij} = A_{ji}, \tag{5.13}$$

onde $[A_{ij}]$ *é uma matriz constante tal que*

$$\lambda \left|\xi\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda \left|\xi\right|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

para constantes positivas λ, Λ. *Suponhamos que* $u \in C^2(\Omega)$ *satisfaça a equação* $L_0 u = f$, *onde* Ω *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f \in C^\alpha(\Omega)$. *Então, existe* $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$ *tal que*

$$\|u\|^*_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|^{(2)}_{C^\alpha(\Omega)} \right). \tag{5.14}$$

A demonstração deste resultado segue direto do teorema (5.4), fazendo-se o uso de mudanças de coordenadas convenientes, a qual leva Δ em L_0 .

Utilizando então o resultado acima, podemos obter as estimativas de Schauder para as soluções da equação $Lu = f$. De fato, nosso objetivo principal é apresentar estimativas para a norma $\|u\|^*_{C^{2+\alpha}(\Omega)}$ de tais soluções.

Para facilitar esta tarefa, é comum utilizar-se as seguintes *desigualdades de interpolação.*

Lema 5.2. *Seja* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $0 \leq \alpha$, $0 \leq \beta$ *tais que* $j + \beta < k + \alpha$, *para* $j, k = 0, 1, 2, \ldots,$. *Suponhamos que* $u \in C^{k+\alpha}(\Omega)$, *então, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, temos que existe uma constante* $C = C(\epsilon, j, k)$ *tal que*

$$\begin{aligned} [u]^*_{C^{j+\beta}(\Omega)} &\leq C \|u\|_{C^0(\Omega)} + \epsilon [u]^*_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \\ \|u\|^*_{C^{j+\beta}(\Omega)} &\leq C \|u\|_{C^0(\Omega)} + \epsilon \|u\|^*_{C^{k+\alpha}(\Omega)} . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Para o nosso próximo resultado precisaremos do seguinte lema:

Lema 5.3. *Sejam $f, g \in C^{\alpha}(\Omega)$ onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Então, para todos $\sigma + \tau \geq 0$ temos que*

$$\|fg\|^{(\sigma+\tau)}_{C^{\alpha}(\Omega)} \leq \|f\|^{(\sigma)}_{C^{\alpha}(\Omega)} \|g\|^{(\tau)}_{C^{\alpha}(\Omega)} . \tag{5.16}$$

Este fato pode ser facilmente verificado a partir das definições feitas em (5.10).

Mediante tais considerações, é possível estabelecer-se as seguintes *estimativas de Schauder*.

Teorema 5.5. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, e $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ uma solução limitada em Ω da equação*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu = f,$$

onde $f \in C^{\alpha}(\Omega)$ e existem constantes positiva λ, Λ, tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ os coeficientes do operador L satisfaçam

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad e \quad \|a_{ij}\|^{(0)}_{C^{\alpha}(\Omega)} , \ \|b_i\|^{(1)}_{C^{\alpha}(\Omega)} , \ \|c\|^{(2)}_{C^{\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{5.17}$$

Então, temos que existe $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$ tal que

$$\|u\|^{*}_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|^{(2)}_{C^{\alpha}(\Omega)} \right) . \tag{5.18}$$

Salientemos novamente, que estimativas como as que acabamos de apresentar, são essenciais a teoria de existência e regularidade de soluções como a aqui descritas.

Uma situção que ilustra bem a força deste tipo de estimativa, é o caso em que as mesmas são utilizadas para se demonstrar a equicontinuidade das derivadas de ordem até dois, dos conjuntos de soluções da equação $Lu = f$, donde se pode obter resultados a respeito da convergência das mesmas em subconjuntos compactos de Ω. Para este tipo de aplicação do teorema anterior, é mais coveniente que utilizemos uma outra formulação (porém equivalente) do mesmo, a qual é apresentada no próximo resultado.

Corolário 5.2. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, no qual L satisfaça as condições do teorema (5.5) e que seus coeficientes estejam em $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Suponhamos que $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$*

satisfaça a equação $Lu = f$ em Ω. Então, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, com $dist(\Omega', \partial\Omega) \geq d$, existe C dependente somente de n, α, λ, do diâmetro de Ω e das normas $C^\alpha(\bar{\Omega})$ dos coeficientes de L, tal que

$$d \|Du\|_{C^0(\Omega')} + d^2 \left\|D^2u\right\|_{C^0(\Omega')} + d^{2+\alpha}[D^2u]_{C^\alpha(\Omega')} \leq C \left(\|u\|_{C^0(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} \right). \quad (5.19)$$

Sumariando tudo que foi dito acima com respeito as estimativas de Schauder para as soluções de EDPs lineares elípticas, podemos então apresentar nosso próximo resultado, qual trata do caso mais simples, onde nosso domínio $\Omega = B$ uma bola.

Dados $r > 0$ e $0 < \alpha < 0$, seja $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < r\}$. Suponhamos que

$$a^{ij},\ b^i,\ d \in C^\alpha(B(0,r)), \qquad 1 \leq i,j \leq n,$$

e que

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

onde as constantes acima são tais que $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, $x \in B(0,r)$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$. Consideremos o operador diferencial parcial linear elíptico

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + d(x),$$

temos então o seguinte resultado

Teorema 5.6. *Seja $f \in C^\alpha(B(0,r))$. Se $u \in C^2(B(0,r))$ é solução da equação*

$$Lu(x) = f(x),$$

então, $u \in C^{2+\alpha}(B(0,r))$ e

$$\begin{aligned} |u|_{C^{1+\alpha}(B(0,r/2))} &\leq C \left(|f|_{L^\infty(B(0,r))} + |u|_{L^\infty(B(0,r))} \right) \\ |u|_{C^{2+\alpha}(B(0,r/2))} &\leq C \left(|f|_{C^\alpha(B(0,r))} + |u|_{L^\infty(B(0,r))} \right) \end{aligned}$$

onde C, é uma constante dependente somente de $n, \alpha, \Lambda/\lambda, |a^{ij}|_{C^\alpha(B(0,r))}, |b^i|_{C^\alpha(B(0,r))}, |d|_{C^\alpha(B(0,r))}$.

Por hora, interromperemos o estudo das estimativas das soluções da equação $Lu = f$, para apresentar alguns resultados de existência de solução para a mesma, o que faremos no próximo tópico. Posteriormente, retomaremos o estudo aqui feito, apresentando alguns resultados que utilizam tais estimativas para estudar a regularidade das soluções obtidas.

Existência de Soluções

Neste tópico, trataremos da existência de soluções para o problema de Dirichlet da equação $Lu = f$, para domínios e condições de bordo suficientemente suaves. Na verdade, o que faremos aqui, é como já dissemos, somente apresentar um esboço de um possível caminho a ser seguido para se chegar ao resultado pretendido, apresentando os resultados utilizados e qual o motivo de sua utilização. Uma versão completa do que trataremos pode ser encontrada em [16].

Nos casos aqui apresentados, nos restringiremos a situção em que $c \leq 0$, o que para nossos propósitos são suficientes, uma vez que para os demais casos (i.e $c > 0$), pode-se mostrar através de exemplos, que o problema proposto, em geral não admite solução.

Teorema 5.7. *Seja Ω um domínio $C^{2+\alpha}$ de $\mathbb{R}^n$, L um operador estritamente elíptico em Ω cujos coeficientes são $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ e tal que $c \leq 0$. Logo, se o problema de Dirichlet para equação de Poisson, $\Delta u = f$ em Ω, $u = \phi$ em $\partial\Omega$, tem uma solução $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ para toda $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, então o problema*

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega, \qquad u = \phi \quad \text{em } \ \partial\Omega, \tag{5.20}$$

também admite uma (única) solução $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ para toda f e ϕ.

Um resultado relacionado com ao dado acima é o que se segue.

Lema 5.4. *Seja B uma bola em $\mathbb{R}^n$ e $\phi \in C^0(\partial B)$. Logo, se L satisfaz as condições do teorema (5.7) em B, e $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, então o problema de Dirichlet, $Lu = f$ em Ω, $u = \phi$ em ∂B, tem uma (única) solução $C^{2+\alpha}(B) \cap C^0(\bar{B})$.*

Regularidade das Soluções

Neste tópico, analisaremos como a regularidade da função f e dos coeficientes do operador L, influenciam na regularidade das soluções da equação $Lu = f$. Enfatizamos que tal análise é feita utilizando as estimativas de Schauder para tais soluções, mostradas anteriormente.

Isto contrasta com o que viemos fazendo até o presente momento, pois até então, sempre tínhamos por hipótese que tanto f quanto os coeficientes de L eram $C^{\alpha}(\Omega)$, e que as soluções da equação apresentada eram $C^{2+\alpha}(\Omega)$.

De início, veremos que na situação acima, onde f e os coeficientes de L são $C^{\alpha}(\Omega)$, é suficiente supor que as soluções da equação $Lu = f$, sejam somente $C^{2}(\Omega)$, pois neste caso, estas são automaticamente $C^{2+\alpha}(\Omega)$, como mostra o próximo resultado.

Lema 5.5. *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, L um operador elíptico cujos coeficientes são $C^{\alpha}(\Omega)$ e $f \in C^{\alpha}(\Omega)$. Suponhamos que $u \in C^{2}(\Omega)$ seja uma solução da equação $Lu = f$. Então, $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$.*

Ressaltemos, que em momento algum da demonstração do resultado anterior, é feita qualquer retrição ao sinal de c, o mesmo ocorrendo para os demais resultados deste tópico.

Utilizando o lema anterior, bem como as estimativas de Schauder, pode-se apresentar situações de regularidades maiores para as soluções da equação $Lu = f$.

Teorema 5.8. *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^{k+\alpha}(\Omega)$ e L um operador linear elíptico cujos coeficientes são $C^{k+\alpha}(\Omega)$. Suponhamos que $u \in C^{2}(\Omega)$ seja uma solução da equação $Lu = f$. Então, $u \in C^{k+2+\alpha}(\Omega)$. E se f e os coeficientes de L são $C^{\infty}(\Omega)$, então $u \in C^{\infty}(\Omega)$.*

EDPs Lineares Parabólicas

Neste tópico, basicamente nos restringiremos a demosntrar as estimativas de Schauder para as soluções das EDPs lineares parabólicas. Alguns outros resultados que serão utilizados no restante do texto, tal é o caso da solução fundamental da equação do calor, serão simplesmente enunciados. Também não serão feitas grandes considerações a respeito da existência e regularidade das soluções das EDPs lineares parabólicas, pois além de serem resultados um tanto clássicos, o processo de demonstração dos mesmos seguem nas linhas do que sugerimos na seção anterior para o caso elíptico. De qualquer forma, algumas fontes sobre o assunto serão sugeridas.

Equação do calor

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(0,T) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Denotemos

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T) \qquad \text{e} \qquad \partial\Omega_T = \left(\bar{\Omega} \times \{0\}\right) \cup \left(\partial\Omega \times (0,\bar{T})\right).$$

$\partial\Omega$ é chamada de fronteira reduzida de Ω_T. Definimos um operador L chamado de *operador do calor*, agindo no conjunto das funções $C^{2,1}(\Omega_T)$, isto é, no conjunto das funções $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, onde para cada $t \in (0,T)$ temos que $u(x,t) \in C^2(\Omega)$ e para cada $x \in \Omega$, temos que $u(x,t) \in C^1((0,T))$, tal que

$$Lu = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.21}$$

O caso particular (homogêneo)

$$L = 0 \tag{5.22}$$

é chamada de *equação do calor*.

Dada uma aplicação $f \in C^0(\partial\Omega_T)$ podemos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta_x u(x,t) & (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = f(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega_T \end{cases}. \tag{5.23}$$

Dados $x,\ y \in \mathbb{R}^n$, $t,\ t_0 \in \mathbb{R}$, $t \neq t_0$ definimos o *núcleo do calor* em (y,t_0) como

$$K(x,y,t,t_0) = \frac{1}{(4\pi\left|t-t_0\right|)^{n/2}} e^{\dfrac{-\left|x-y\right|^2}{4(t-t_0)}}. \tag{5.24}$$

Pode ser mostrado, que o núcleo do calor é uma solução para a equação (5.22). Como veremos na sequência, o núcleo do calor K é tão importante para equação do calor, quanto a solução fundamental Γ o é para a equação de Laplace.

Para a situação em que $t_0 = 0$, temos que

$$H(x,y,t) = K(x,y,t,0) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\dfrac{-\left|x-y\right|^2}{4t}} \tag{5.25}$$

chamada de *solução fundamental* da equação do calor. Tal função é C^2 em $x \in \mathbb{R}^n$ e C^1 em $t \in (0,T)$. Também, dada uma função f contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, temos que a convolução

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x,y,t) f(y) dy$$

é tal que $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, u é uma solução da equação do calor $u_t = \Delta u$ e

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} H(x,y,t) f(y) dy = f(x).$$

Para a solução fundamental, temos ainda os seguintes resultados. Dados $x,\ y \in \Omega$ e $t,\ s > 0$ então:

$$\begin{aligned} i) &= \int_{\mathbb{R}^n} H(x,y,t) dy = 1, \\ ii) &= H(x,y,t) = H(y,x,t) \quad \text{(simetria)}. \end{aligned}$$

Estimativas Schauder para EDPs Parabólicas

Neste tópico, apresentaremos as estimativas de Schauder para as soluções de EDP's lineares parabólicas.

Em geral, da mesma forma que se faz para as soluções das EDP's lineares elípticas, onde tais estimativas são derivadas de estimativas semelhantes obtidas para soluções de casos mais simples (no caso das EDP's lineares elípticas, isto é feito para a solução fundamental da equação de Poisson), também para o caso parabólico, é comum se obter tais estimativas por um processo semelhante, estima-se a princípio a solução fundamental da equação do calor, e com isto estimam-se as soluções gerais, uma vez que estas podem ser representadas por meio da solução fundamental através de integrais. De fato, tal processo é bem instrutivo, pois permite que se compreenda melhor o comportamento de tais soluções, podendo o leitor interessado consultar Friedman [14], onde é feita uma excelente exposição do mesmo.

Aqui no entanto, preferimos apresentar uma demonstração uma pouco diferente deste fato, tendo esta a vantagem de ser muito mais simples e direta que a usual, uma vez que por exemplo, a mesma não faz uso do conceito de solução fraca e desde o início faz uso do conceito de continuidade Hölder, que é de fato o que aqui nos interessa.

A demonstração que apresentaremos, é devida a Brandt [1] e se baseia na continuidade Hölder em x (com expoente α) de cada uma das derivadas $D_x^2 u$ da solução, tendo como principal argumento o princípio do máximo forte. Nossa estratégia aqui será aplicar o princípio do máximo a um operador conveniente (definido em dimensões maiores), obtendo assim um importante resultado que chamaremos de "*Resultado Fundamental*", que é na realidade a estimativa Schauder para este caso particular. Em seguida, utilizando tal resultado, obteremos estimativas para "perturbações" do caso apresentado, e com isto obteremos o que desejamos.

Resultado Fundamental

Durante toda esta seção, utilizaremos as seguintes notações. Para o domínio das nossas funções utilizaremos sempre um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^n_1 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, e para qualquer ponto P em Ω denotaremos por $T(P)$ o conjunto dos pontos Q no bordo de Ω que podem ser conectados a P por um caminho simples contínuo, ao longo do qual a coordenada t seja não-decrescente de Q para P. Os pontos Q de Ω que podem ser conectados a P (através de caminhos com as mesmas condições anteriores) serão denotados por $S(P)$. Como de praxe, denotaremos por e_k o vetor unitário na k-ésima direção de $\mathbb{R}^n_1$. Utilizaremos a seguinte métrica

$$|P-Q| = \max\left\{\left|x_1^P - x_1^Q\right|, \ldots, \left|x_n^P - x_n^Q\right|, \left|t^P - t^Q\right|^{1/2} \cdot 4\sqrt{n+1}\right\} \tag{5.26}$$

para todo $P = (x_1^P, \ldots, x_n^P, t^P)$ e $Q = (x_1^Q, \ldots, x_n^Q, t^Q)$ em Ω. Também, tomaremos

$$d_P = \inf_{Q \in T(P)} |P-Q| \qquad \text{e} \qquad d_{PQ} = \min\{d_P, d_Q\}. \tag{5.27}$$

Para $0 < \alpha < 1$, $\sigma = 0, 1, 2$ e qualquer função suave $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definimos

$$\|d^\sigma u\|_{C^0(\Omega^*)} = \|u\|^{(\sigma)}_{C^0(\Omega^*)} = \sup_{P \in \Omega} |d_P^\sigma u(P)| \tag{5.28}$$

$$[d^\sigma u]_{C^\alpha(\Omega^*)} = \sup_{P,Q \in \Omega} d_{PQ}^{\sigma+\alpha} \frac{|u(P) - u(Q)|}{|P-Q|^\alpha} \tag{5.29}$$

$$\|d^\sigma u\|_{C^\alpha(\Omega^*)} = \|d^\sigma u\|_{C^0(\Omega^*)} + [d^\sigma u]_{C^\alpha(\Omega^*)} \tag{5.30}$$

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} = \|u\|_{C^\alpha(\Omega^*)} + \sum_{i=1}^n \|dD_{x_i} u\|_{C^\alpha(\Omega^*)} + \sum_{|\beta|=2} \left\|d^2 D_x^\beta u\right\|_{C^\alpha(\Omega^*)} + \left\|d^2 D_t u\right\|_{C^\alpha(\Omega^*)} \tag{5.31}$$

onde todos os supremos acima são tomados sobre os pontos $P,\ Q \in \Omega$ tais que $P = Q + \eta e_k$ para algum escalar η e inteiro k, $1 \leq k \leq n$.

Na definição anterior, bem como no restante deste capítulo, o asterisco $(*)$ acrescentado ao conjunto Ω (em Ω^*), tem por finalidade indicar que os pontos P e Q tomados, possuem a mesmo parâmetro t. As normas assim obtidas, são bastante convenientes, quando se deseja estudar a continuidade Hölder na variável x, sem se importar com a mesma em t. Ressaltemos também, que muitas das normas e seminormas definidas na seção anterior, como por exemplo em (5.8), (5.9), (5.10) e (5.10), serão utilizadas adiante com a restrição que acabamos de dizer, e em tais situções não faremos mais este tipo de comentário.

Para cada função $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η escalar e $1 \leq k \leq n$ definimos

$$\begin{aligned} \delta_k(\eta)u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[u(x+\eta e_k) - u(x-\eta e_k)\right] \\ \mu_k(\eta)u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[u(x+\eta e_k) + u(x-\eta e_k)\right]. \end{aligned}$$

Pela definição dada, pode-se mostrar que

$$\delta_k\left[u \cdot v\right] = \delta_k u \cdot \mu_k v + \mu_k u \cdot \delta_k v. \tag{5.32}$$

Também, dados $k = (k_1, k_2, k_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, definamos o operador

$$\delta_k^3(y) = \delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2)\delta_{k_3}(y_3) \tag{5.33}$$

o qual é tal que

$$\begin{aligned} \delta_k^3(y)u(x,t) = \frac{1}{8}\{&u(x+y_1e_{k_1}+y_2e_{k_2}+y_3e_{k_3},t) - u(x-y_1e_{k_1}+y_2e_{k_2}+y_3e_{k_3},t) \\ &-u(x+y_1e_{k_1}-y_2e_{k_2}+y_3e_{k_3},t) + u(x-y_1e_{k_1}-y_2e_{k_2}+y_3e_{k_3},t) \\ &-u(x+y_1e_{k_1}+y_2e_{k_2}-y_3e_{k_3},t) + u(x-y_1e_{k_1}+y_2e_{k_2}-y_3e_{k_3},t) \\ &+u(x+y_1e_{k_1}-y_2e_{k_2}-y_3e_{k_3},t) - u(x-y_1e_{k_1}-y_2e_{k_2}-y_3e_{k_3},t)\}. \end{aligned}$$

No que se segue, estudaremos a equação parabólica

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)D_iu + c(x,t)u = f(x,t) \tag{5.34}$$

onde os coeficiente em (5.34) são assumidos serem de forma que $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $c(x,t) \leq 0$ e existem constantes $\lambda,\ \Lambda > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que

$$\|a_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega^*)}, \quad \|b_i\|^{(1)}_{C^\alpha(\Omega^*)}, \quad \|c\|^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)} \leq \Lambda, \tag{5.35}$$

o operador L será assumido ser unifomemente elíptico, isto é

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \lambda\,|\xi|^2 \qquad (x,t)\in\Omega \quad \text{e} \quad \xi\in\mathbb{R}^n-\{0\} \tag{5.36}$$

e o termo não-homogêneo será no mínimo de forma que

$$\|f\|^{(2)}_{C^{\alpha}(\Omega)} < \infty \tag{5.37}$$

onde na norma acima não impomos condições a P e Q como em (5.30).

O princípio do Máximo

Neste tópico, recordaremos o princípio do máximo para equações parabólicas como em (5.34). Em verdade, para as situações aqui tratadas, necessitaremos apenas de um caso particular do mesmo, a saber, no caso em que L possui somente sua parte principal e cujos coeficientes sejam independentes de x.

Teorema 5.9 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Se $Lu \geq 0$ em Ω e se u tem um máximo positivo em $(x^0,t^0)\in\Omega$ então $u(x,t)=u(x^0,t^0)$ para todo $(x,t)\in S(x^0,t^0)$.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em Friedman ([14]) pag. 34, e também em Evans ([10]) pag. 376.

Para o que se segue, necessitaremos de uma variação do teorema acima, que é na realidade uma versão um pouco mais fraca do mesmo.

Corolário 5.3. *Seja Ω um domínio limitado e ϕ, ψ funções contínuas no bordo deste. Suponhamos que $L\psi \leq -|L\phi|$ e que $\psi \geq |\phi|$ em $T(P)$ para $P\in\Omega$. Então, $\psi(P)\geq|\phi(P)|$.*

Seja E o cilindro em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ dado por

$$E=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\ |x|\leq d,\ -\frac{d^2}{4\sqrt{n+1}}<t<0\right\}.$$

Consideremos o operador parabólico

$$L_0u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D_{ij}u-u_t \tag{5.38}$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\xi_i\xi_j \geq \lambda \left|\xi\right|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\sum_{1=1}^{n} a_{ii}(t) \leq \bar{a}$, onde $\bar{a}$ é uma constante positiva.

Sob tais considerações, podemos apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 5.10 (Resultado Fundamental)**.** *Seja $f \in C^{\alpha}(\Omega)$. Suponhamos que u seja uma solução suave da equação parabólica $L_0 u = f(x,t)$ em E, então para todo $1 \leq k \leq n$ e $0 < \eta \leq d$ temos que*

$$\frac{|\delta_k(\eta) D^2 u(0,0)|}{\eta^{\alpha}} \leq \left(\frac{C_{\alpha}}{\lambda}\right) [f]_{\alpha,\eta} + (4 + W)\, \eta^{1-\alpha} d^{-1} [u]_{C^2(\Omega)} \tag{5.39}$$

onde

$$[f]_{\alpha,\eta} = \sup_{k,\eta,x,t} \frac{|\delta_k(\eta) f(x,t)|}{\eta^{\alpha}}, \qquad [u]_{C^2(\Omega)} = \sup_{|\beta|=2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|D_x^{\beta} u(x,t)\right|$$

e

$$C_{\alpha} = 6(1-\alpha^2)^{-1} 3^{1/\alpha}, \qquad W = \lambda^{-1}(16\bar{c} + 2\sqrt{(n+1)}).$$

Demonstração: Seja $D_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}$ para $1 \leq k_1,\ k_2 \leq n$.

Nosso objetivo é mostrar que qualquer das derivadas segundas $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}(0,0)$ (para quaisquer $1 \leq k_1,\ k_2 \leq n$) satisfaz (5.39) para qualquer direção e_{k_3} ($k = k_3$) tomada. Ou seja

$$\frac{|\delta_{k_3}(y_3) D^2 u(0,0)|}{y_3^{\alpha}} \leq C$$

para $0 < y_3 \leq d$, onde $C = C_{\alpha}\lambda^{-1}[f]_{\alpha,y_3} + (4+W)\, y_3^{1-\alpha} d^{-1}[u]_{C^2(\Omega)}$. Para o que é suficiente que mostremos que

$$\frac{|\delta_{k_3}(y_3) D^2 u(x,t)|}{y_3^{\alpha}} \leq C + g(x,t)$$

onde $g(0,0) = 0$. Isto é

$$\left|\frac{\partial^2 u(x+\delta_{k_3} e_{k_3}, t)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} - \frac{\partial^2 u(x+\delta_{k_3} e_{k_3}, t)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}\right| \leq y_3^{\alpha} C_1$$

onde $C_1 = C + g$. Neste caso devemos ter

$$\left|\lim_{y_1,y_2\to 0} \left(\frac{\delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2) u(x+\delta_{k_3} e_{k_3}, t)}{y_1 y_2}\right) - \lim_{y_1,y_2\to 0} \left(\frac{\delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2) u(x-\delta_{k_3} e_{k_3}, t)}{y_1 y_2}\right)\right| \leq y_3^{\alpha} C_1$$

para $0 < y_1,\ y_2,\ y_3 \leq d$, onde

$$\begin{aligned}\delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2)u(x,t) = \frac{1}{4}\{&u(x+y_1e_{k_1}+y_2e_{k_2},t) - u(x-y_1e_{k_1}+y_2e_{k_2},t) \\ &+u(x-y_1e_{k_1}-y_2e_{k_2},t) - u(x+y_1e_{k_1}-y_2e_{k_2},t)\}.\end{aligned}$$

Este último fato, nos sugere que é suficiente que tenhamos

$$\left|\delta_k^3(y)u(x,t)\right| \leq y_3^\alpha y_1 y_2 C_2 \tag{5.40}$$

para quaisquer $k = (k_1, k_2, k_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, onde

$$\lim_{y_1,y_2\to 0} C_2 = C_1 = \left(\frac{C_\alpha}{\lambda}\right)[f]_{\alpha,y_3} + (4+W)\, y_3^{1-\alpha} d^{-1}[u]_{C^2(\Omega)} + g(x,t). \tag{5.41}$$

com $g(0,0) = 0$. Como uma primeira tentativa, poderíamos sugerir que $C_2(x,t,y)$ tivesse a forma

$$C_2(x,t,y) = C_\alpha \lambda^{-1} g_1(y)\lambda^{-1}[f]_{\alpha,y_3} + d^{-1}g_2(y)[u]_{C^2(\Omega)} + g_3(y)g(x,t) \tag{5.42}$$

onde

$$\lim_{y_1,y_2\to 0} g_1(y) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y_1,y_2\to 0} g_2(y) = y_3^{1-\alpha}(4+W). \tag{5.43}$$

Seja Q o domínio em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ definido por

$$Q = \left\{(x_1,\ldots,x_n,t,y_1,y_2,y_3);\ |x_j| < \frac{d}{4},\ -t_0 < t < 0,\ 0 < y_l < \frac{d}{4}\right\} \qquad t_0 = \frac{d^2}{4\sqrt{n+1}}$$

no qual definimos as funções

$$\begin{aligned}\phi(x,t,y) &= \delta_k^3(y)u(x,t) = \delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2)\delta_{k_3}(y_3)u(x,t) &(5.44)\\ F(x,t,y) &= \delta_k^3(y)f(x,t) = \delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2)\delta_{k_3}(y_3)f(x,t). &(5.45)\end{aligned}$$

Pela definição dada, podemos ver que

$$|F(x,t,y)| \leq [f]_{\alpha,\eta} y_\alpha^* \quad \text{em} \quad Q \tag{5.46}$$

onde $y_* = \min(y_1, y_2, y_3)$.

Também, pelo teorema do valor médio temos que

$$|\phi(x,t,y)| \leq [u]_{C^2(\Omega)} y_k y_{l,} \quad \text{em} \quad Q \tag{5.47}$$

para $(k,l)=(1,2),\ (2,3)$ ou $(3,1)$. Aplicando o operador $\delta_k^3(y)=\delta_{k_1}(y_1)\delta_{k_2}(y_2)\delta_{k_3}(y_3)$ a (5.38), obtemos que

$$L^*\phi = F \quad \text{em} \;\; Q \tag{5.48}$$

onde L^* denota o operador parabólico

$$L^* = L_0 + \frac{\lambda}{4}\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_l^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{k_l}^2}\right). \tag{5.49}$$

Assim, por (5.46) temos que

$$|L^*\phi| \leq [f]_{\alpha,\eta} y_*^{\alpha}. \tag{5.50}$$

Nossa intensão é provar (5.40), aplicando o princípio do máximo (na realidade o corolário (5.3)) ao operador L^*. Para isto, é necessário que $h(x,t,y) = y_3^{\alpha} y_1 y_2 C_2$, satisfaça (5.41), com (5.42) e (5.43) ainda válidas, e que além disso tenhamos

$$h \geq |\phi| \quad \text{em} \; \partial Q \tag{5.51}$$

e também

$$L^* h \leq -\left|L^*\phi\right|. \tag{5.52}$$

Ou seja, h deve ser tal que

$$\lim_{y_1,y_2\to 0}\frac{h(x,t,y)}{y_1y_2} = y_3^{\alpha}C_1 = y_3^{\alpha}C_{\alpha}\lambda^{-1}[f]_{\alpha,y_3} + y_3^{\alpha}\left(4+W\right)y_3^{1-\alpha}d^{-1}[u]_{C^2(\Omega)} + y_3^{\alpha}g(x,t) \tag{5.53}$$

com $g(0,0)=0$, tendo h a forma

$$h(x,t,y) = C_{\alpha}\lambda^{-1}h_1(y)\lambda^{-1}[f]_{\alpha,y_3} + d^{-1}h_2(y)[u]_{C^2(\Omega)} + h_3(y)g(x,t) \tag{5.54}$$

onde

$$h_1(y) = y_1y_2y_3^{\alpha}g_1(y) \qquad \text{e} \qquad h_2(y) = y_1y_2y_3^{\alpha}g_2(y)$$

e portanto

$$\lim_{y_1,y_2\to 0}\frac{h_1(y)}{y_1y_2} = y_3^{\alpha} \quad \text{e} \quad \lim_{y_1,y_2\to 0}\frac{h_2(y)}{y_1y_2} = y_3^{1}(4+W) \tag{5.55}$$

e que além disto h satisfaça (5.51) e (5.52).

Definamos as funções ψ, w e v em Q, da forma que se segue:

$$\begin{aligned}
\psi &= C_\alpha \lambda^{-1} y_1 y_2 y_3 \left(y_1^\alpha + y_2^\alpha + y_3^\alpha\right)^{1-1/\alpha} \\
w &= d^{-1} y_1 y_2 y_3 \left[4 + W\left(1 - \frac{4}{d} y_1\right)\right] \\
v &= y_2 y_3 \left[\frac{16}{d^2} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{t}{t_0}\right],
\end{aligned}$$

a partir das quais definimos a função

$$h = [f]_{\alpha,\eta}\psi + [u]_{C^2(\Omega)} w + [u]_{C^2(\Omega)} v \tag{5.56}$$

chamada de *função de comparação.*

É fácil ver que h assim definida satisfaz (5.53). Resta então mostrar, que esta também satisfaz (5.51) e (5.52).

De início, mostremos (5.51), isto é, que $h \geq |\phi|$ na *fronteira parabólica* de Q. Com efeito, pelas definições dadas, podemos ver $\psi,\ w,\ v \geq 0$ em $\bar{Q}$, e que além disso tem-se

$$\begin{aligned}
h &\geq |\phi| = 0 \qquad \text{em } \ Q_1 = \bar{Q} \cap \bigcup_{l=1}^{3} \{y_l = 0\}, \\
h &\geq [u]_{C^2(\Omega)} w \geq \frac{4}{d}[u]_{C^2(\Omega)} y_1 y_2 y_3 \geq [u]_{C^2(\Omega)} y_k y_l \qquad \text{em } \ Q_2 = \bar{Q} \cap \bigcup_{l=1}^{3} \{y_l \frac{4}{d}\}, \\
h &\geq [u]_{C^2(\Omega)} v \geq [u]_{C^2(\Omega)} y_2 y_3 \qquad \text{em } \ Q_3 = \bar{Q} \cap \left(\{t = -t_0\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \left\{|x_j| = \frac{4}{d}\right\}\right)
\end{aligned}$$

assim, por (5.47) temos que

$$h \geq |\phi| \qquad \text{em } \ \partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \tag{5.57}$$

o que termina esta parte, resta assim mostrar-mos (5.52). Calculemos então $L^*\psi$, L^*w e L^*v.

Por derivação direta, obtemos que

$$L^* v \leq d^{-2} y_2 y_3 (32\bar{a} + a_0) = -L^* w \tag{5.58}$$

e

$$L^*\psi \leq -\frac{1}{4}C_\alpha(1-\alpha^2)\left(y_1^\alpha + y_2^\alpha + y_3^\alpha\right)^{1-1/\alpha} \sum_{\sigma(k,l,m)} y_k^{\alpha-1} y_l y_m^{\alpha+1} \tag{5.59}$$

em Q, onde $\sigma(k,l,m)$ é uma permutação de $(1,2,3)$, e $\sum_{\sigma(k,l,m)}$ indica a soma de todas de tais permutações. Tomando então $y_* = y_k \leq y_l \leq y_m$, obtemos que

$$\begin{aligned} L^*\psi &\leq -\frac{1}{4}C_\alpha(1-\alpha^2)(3y_m^\alpha)^{-(1+\alpha)/\alpha}\left(y_1^\alpha + y_2^\alpha + y_3^\alpha\right)^{1-1/\alpha} y_m^{\alpha+1} \\ &= -\frac{1}{2}\left(y_{\alpha-1}^k y_l + y_{\alpha-1}^l y_k\right) \\ &\leq -y_\alpha^*. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Juntando então (5.50), (5.56), (5.58), (5.59) e (5.60) obtemos que

$$L^*h \leq |L^*\phi|\,. \tag{5.61}$$

Assim, por (5.57) e (5.61) temos pelo princípio do máximo (corolário (5.3)) que $h \geq |\phi|$ em Q. Em particular, tomando $x_1 = \cdots = x_n = t = 0$ temos que

$$|\phi(0,0,y)| \quad \leq \quad h(0,0,y) = [f]_{\alpha,\eta}\psi + [u]_{C^2(\Omega)}w. \tag{5.62}$$

isto é

$$|\phi(0,0,y)| \leq [f]_{\alpha,\eta} C_\alpha \lambda^{-1} y_1 y_2 y_3 \left(y_1^\alpha + y_2^\alpha + y_3^\alpha\right)^{1-1/\alpha} + [u]_{C^2(\Omega)} d^{-1} y_1 y_2 y_3 \left[4 + W(1 - \frac{4}{d}y_1)\right].$$

Dividindo então por $y_1 y_2 y_3^\alpha$ e fazendo y_1 e y_2 tenderem a zero, obtemos (5.39) para $k = k_3$ e $\eta = y_3 \leq \frac{d}{4}$. Para $\eta \geq \frac{d}{4}$, (5.39) segue diretamente da definição de $[u]_{C^2(\Omega)}$. □

Estimativas de Schauder Por Perturbações

Em vista do resultado anterior (teorema (5.10)), no que se segue, utilizaremos o argumento de perturbação padrão (ver Friedman [14]) para alcançar nosso objetivo.

O que faremos basicamente, é obter estimativas para o operador geral $Lu = f$, utilizando para isto do conhecimento prévio que temos a respeito do operador $L_0 u = f'$, o que será feito tomando $f' = f - Lu + L_0 u$ (a qual não depende de $D_t u$) aplicando então o resultado anterior (teorema (5.10)) que temos para este caso específico.

Como em (5.34), (5.35) e (5.36) consideremos o operador uniformemente elíptico tal que

$$Lu = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) D_i u + c(x,t) u \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad c \leq 0 \tag{5.63}$$

onde temos que

$$\|a_{ij}\|_{C^\alpha(\Omega^*)}, \quad \|b_i\|^{(1)}_{C^\alpha(\Omega^*)}, \quad \|c\|^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)} \leq \Lambda, \tag{5.64}$$

e também

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \lambda \left|\xi\right|^2. \qquad (x,t) \in \Omega \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\} \tag{5.65}$$

Introduzamos também os seguintes limitantes

$$B = \sup_{P \in \Omega} d_P \sum_{i=1}^{n} \left|b_i(P)\right|, \quad A = \frac{1}{2} a_0 + 16 \sup_{P \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(P)$$

e

$$K_{1+\alpha} = \sup_{P,Q \in \Omega} d^{1+\alpha}_{PQ} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|b_i(P) - b_i(Q)\right|}{\left|P - Q\right|^\alpha}, \qquad K_{2+\alpha} = \sup_{P,Q \in \Omega} d^{\alpha}_{PQ} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\left|a_{ij}(P) - a_{ij}(Q)\right|}{\left|P - Q\right|^\alpha}$$

onde como antes, todos os supremos acima são tomados sobre os pontos $P,\ Q \in \Omega$ tais que $P = Q + \eta e_k$ para algum escalar η e inteiro k, $1 \leq k \leq n$.

Teorema 5.11. *Suponhamos que $Lu = f$, e que $[f]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)}, A, B < \infty$. Então*

$$[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} \leq 7C_\alpha \lambda^{-1} N + 5\nu^{-1}(4 + \lambda^{-1}A)[u]^*_{C^2(\Omega^*)} + 7C_\alpha \lambda^{-1} [f]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)} \tag{5.66}$$

onde

$$N = (K_{2+\alpha} + K_1)[u]^*_{C^2(\Omega^*)} + (K_{1+\alpha} + [c]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)})[u]^*_{C^1(\Omega^*)} + [c]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)} \left\|u\right\|^*_{C^0(\Omega^*)} \tag{5.67}$$

e

$$\nu = \min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2} n C_\alpha \lambda^{-1} K_{2+\alpha}\right)^{-1/\alpha}\right\} \tag{5.68}$$

Demonstração: Seja $\nu_1 = \nu/(1+\nu)$. Dado $1/2 < s < 1$, por definição, temos que existem dois pontos P, Q com $P = Q + \eta e_k$ e $1 \leq k \leq n$, tais que

$$s[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} \leq d_{PQ}^{2+\alpha} \max_{|\beta|=2} \frac{\left|D^\beta u(P) - D^\beta u(Q)\right|}{|P-Q|^\alpha}.$$

Tomemos $R = (Q+P)/2 = Q + 1/2\eta e_k$. Se pois tivermos que $\eta \geq 2\nu_1 d_R$, então

$$\begin{aligned} d_{PQ}^{2+\alpha} \max_{|\beta|=2} \frac{\left|D^\beta u(P) - D^\beta u(Q)\right|}{|P-Q|^\alpha} &\leq \left(\frac{d_{PQ}}{\eta}\right)^\alpha \cdot 2[u]^*_{C^2(\Omega^*)} \leq \left(\frac{d_R + \eta/2}{\eta}\right)^\alpha \cdot 2[u]^*_{C^2(\Omega^*)} \\ &\leq 2\nu^{-1}[u]^*_{C^2(\Omega^*)} \end{aligned}$$

mostrando a validade de (5.66). Resta então mostrar a validade da afirmação anterior para o caso em que $\eta < 2\nu_1 d_R$. Consideremos então o cilindro E em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dado por

$$E = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ |x| \leq d,\ -\frac{d^2}{4\sqrt{n+1}} < t < 0\right\}.$$

onde $d = \nu_1 d_R$. É fácil ver que $P, Q \in E$. Seja como em (5.38)

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^R, t) D_{ij} u - u_t$$

e

$$f'(x,t) = \sum_{i,j=1}^n \left[a_{ij}(x^R,t) - a_{ij}(x,t)\right] D_{ij} u - \sum_{i=1}^n b_i(x,t) D_i u - c(x,t) u + f(x). \tag{5.69}$$

Aplicando então o teorema (5.10) a equação $L_0 u = f'$ em E obtemos

$$d_{PQ}^{2+\alpha} \max_{|\beta|=2} \frac{\left|D^\beta u(P) - D^\beta u(Q)\right|}{|P-Q|^\alpha} \leq d_{PQ}^{2+\alpha} \left\{C_\alpha \lambda^{-1} h_{f'} + (4 + \lambda^{-1} A)(2d)^{-\alpha} m_2\right\} \tag{5.70}$$

onde

$$h_{f'} = \sup_{(x,t)\in E} \frac{|\delta_k(\zeta) f'(x,t)|}{(2\zeta)^\alpha}, \quad d_\nu = \inf_{S \in E} d_S \geq d_R - d = d/\nu \ \text{ e} \tag{5.71}$$

$$m_2 = \sup_{\substack{(x,t)\in E \\ |\beta|=2}} \left|D^\beta u(x,t)\right| \leq d_\nu^{-2}[u]^*_{C^2(\Omega^*)}. \tag{5.72}$$

Aplicando então (5.32) a cada um dos termos de $f'(x,t)$, obtemos que

$$h_{f'} \leq d_\nu^{-(2+\alpha)} \left(\nu^\alpha n K_{2+\alpha}[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} + N + [f]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)}\right). \tag{5.73}$$

Juntando então todas estas estimativas, e o fato de que $d_{PQ} \leq d_R \leq 3/2\nu^{-1} d$, obtemos então

$$\begin{aligned} s[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} &\leq d_{PQ}^{2+\alpha} \max_{|\beta|=2} \frac{\left|D^\beta u(P) - D^\beta u(Q)\right|}{|P-Q|^\alpha} \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2+\alpha} \left\{C_\alpha \lambda^{-1} \left(\nu^\alpha n K_{2+\alpha}[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} + N + [f]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)}\right) + (4 + \lambda_{-1} A)(2\nu)^{-\alpha}\right\}. \end{aligned}$$

Por (5.68) e (5.67) temos que os coeficientes de $[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)}$ não são maiores que $1/2$. Donde o resultado segue. $\square$

Para apresentar então o resultado pretendido em sua forma clássica (em termo das normas C^0 de u e C^α de f), utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 5.6. *Sejam $0 < \beta \leq 1$, $q > 0$ (inteiro) e $u \in C^{q+\beta}(\Omega)$. Então, para todo $0 < \sigma < 1$ temos que*

$$[u]^*_{C^q(\Omega^*)} \leq (1-\sigma)^{-(q+\beta)}\sigma^\beta [u]^*_{C^{q+\beta}(\Omega^*)} + (1-\sigma)^{(-q+1)}\sigma^{-1}[u]^*_{C^{q-1}(\Omega^*)}. \tag{5.74}$$

A demonstração deste resultado pode ser feita por um simples cálculo.

Fixemos $\sigma \leq 1/100$. Tomando então $\rho = 100/99$, pelo lema anterior temos que

$$[u]^*_{C^1(\Omega^*)} \leq \rho^2\bar{\sigma}[u]^*_{C^2(\Omega^*)} + \bar{\sigma}^{-1}[u]^*_{C^0(\Omega^*)}, \quad [u]^*_{C^2(\Omega^*)} \leq \rho^3\sigma^\alpha[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} + \rho\sigma^{-1}[u]^*_{C^1(\Omega^*)}.$$

Tomando então $\bar{\sigma} = 1/3\rho^{-3}\sigma$ obtemos que

$$[u]^*_{C^1(\Omega^*)} \leq \sigma^{1+\alpha}[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} + 5\sigma^{-1}\|u\|^*_{C^0(\Omega^*)}, \tag{5.75}$$

$$[u]^*_{C^2(\Omega^*)} \leq 2\sigma^\alpha[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} + 5\sigma^{-2}\|u\|^*_{C^0(\Omega^*)}. \tag{5.76}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \min\left\{\left[21C_\alpha\lambda^{-1}\left(K_{1+\alpha} + \|c\|^{(2)}_{C^0(\Omega^*)}\right)\right]^{-1/(1+\alpha)},\ 1/100\right\} \\
\sigma_2 &= \left[42C_\alpha\lambda^{-1}\left(K_{2+\alpha} + B\right) + 30\rho^{-1}\left(4 + \lambda^{-1}A\right)\right]^{-1/\alpha}.
\end{aligned}$$

Tomando então $\sigma = \sigma_1$ em (5.75) e $\sigma = \sigma_2$ em (5.76) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.12. *Suponhamos que $\|c\|^{(2)}_{C^0(\Omega^*)}, A, B, K_{q+\alpha}, [u]^*_{C^q(\Omega^*)}, [u]^*_{C^{q+\alpha}(\Omega^*)}$ para $q = 0, 1, 2$, sejam finitos e que $Lu = f$, então*

$$[u]^*_{C^{2+\alpha}(\Omega^*)} \leq C\left(\|u\|^*_{C^0(\Omega^*)} + [f]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)}\right) \tag{5.77}$$

onde $C = \max\left\{5/2{\sigma_2}^{-(2+\alpha)} + 5{\sigma_1}^{-(2+\alpha)} + 21C_\alpha\lambda^{-1}[c]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)},\ 21C_\alpha\lambda^{-1}\right\}$.

Observando (5.75) e (5.76), vemos que $[u]^*_{C^1(\Omega^*)}$ e $[u]^*_{C^2(\Omega^*)}$, também são estimadas pelo teorema anterior. Em suma, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.13 (Estimativas de Schauder)**.** *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma solução clássica de (5.34) em Ω, onde (5.35) e (5.36) ocorram. Então, existe uma constante $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda) > 0$, dependente somente de n, α, λ e Λ (mas não de u), tal que*

$$\|u\|_{C^\alpha(\Omega^*)}+\sum_{i=1}^{n}\|dD_{x_i}u\|_{C^\alpha(\Omega^*)}+\sum_{|\beta|=2}\left\|d^2D_x^\beta u\right\|_{C^\alpha(\Omega^*)}+\left\|d^2D_t u\right\|_{C^\alpha(\Omega^*)}\leq C\left(\|u\|^*_{C^0(\Omega^*)}+[f]^{(2)}_{C^\alpha(\Omega^*)}\right).$$

A partir do teorema anterior, podemos apresentar o nosso próximo resultado, o qual é uma versão para o caso parabólico do teorema (5.6) apresentado para o caso elíptico.

Dados $r > 0$ e $0 < \alpha < 0$, seja $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < r\}$. Suponhamos que

$$a^{ij},\ b^i,\ d \in C^\alpha(B(0,r)), \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

e que

$$\lambda\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda\,|\xi|^2$$

onde as constantes acima são tais que $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, $x \in B(0, r)$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Consideremos o operador diferencial parcial linear parabólico

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + d(x) - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Temos então o seguinte resultado

Teorema 5.14. *Seja $T > 0$, tal que $u : Q \to \mathbb{R}$, onde $Q = \Omega \times (0, T)$ e $B(0, r) \subset \Omega$. Dado $0 \leq t \leq T$, suponhamos que $f(\cdot, t) \in C^\alpha(B(0, r))$ e $u(\cdot, t) \in C^2(B(0, r))$ satisfaz a equação diferencial parcial linear parabólica*

$$Lu(x, t) = f(x, t)$$

então, $u(\cdot, t) \in C^{2+\alpha}(B(0, r))$ e

$$\begin{aligned}
|u(\cdot,t)|_{C^\alpha(B(0,r/2))} &\leq C\left(\sup_{t\in[0,T]}|f(\cdot,t)|_{L^\infty(B(0,r))}+\sup_{t\in[0,T]}|u(\cdot,t)|_{L^\infty(B(0,r))}\right)\\
|u(\cdot,t)|_{C^{2+\alpha}(B(0,r/2))}+\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|_{C^\alpha(B(0,r/2))} &\leq C\left(\sup_{t\in[0,T]}|f(\cdot,t)|_{C^\alpha(B(0,r))}+\sup_{t\in[0,T]}|u(\cdot,t)|_{L^\infty(B(0,r))}\right)
\end{aligned}$$

onde C, é uma constante dependente somente de $n, \alpha, \Lambda/\lambda, |a^{ij}|_{C^\alpha(B(0,r))}, |b^i|_{C^\alpha(B(0,r))}, |d|_{C^\alpha(B(0,r))}$.

Existência de Soluções Para Operadores Lineares Parabólicos

A respeito da existência de soluções para operadores lineares parabólicos, temos o seguinte teorema, o qual é suficiente para o que necessitaremos neste texto:

Teorema 5.15. *Seja como antes Ω um domíni de $\mathbb{R}^n$, e seja $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Dada uma função $u : \Omega_T \to \mathbb{R}^q$, seja*

$$Lu = \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla + \mathbf{b} \cdot u - \partial_t u$$

o operador diferencial parcial parabólico, consideremos então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} L(u)(x,t) = f(x,t) & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = \phi(x). \end{cases} \tag{5.78}$$

Onde neste caso as componentes de Δu, $\mathbf{a} \cdot \nabla$, $\mathbf{b}u$, $\partial_t u$ são definidas respectivamente por

$$\Delta u^A, \quad \sum_{B=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_B^{iA}(x,t) \frac{\partial u^B}{\partial x_i}, \quad \sum_{B=1}^{q} \mathbf{b}_B^A(x,t) u^B, \quad \frac{\partial u^B}{\partial t}.$$

Logo se

$$\mathbf{a}_B^{iA},\ \mathbf{b}_A^B \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T, \mathbb{R}), 1 \leq n, \quad 1 \leq A, B \leq q,$$

para algun $0 < \alpha < 1$, então, para quaisquer

$$f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T, \mathbb{R}^q), \qquad \phi \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^q),$$

existe uma unique solução $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(\bar{\Omega}_T, \mathbb{R}^q)$ para (5.82), tal que

$$|u|_{\Omega_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leq C(|f|_{\Omega_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\phi|_{\Omega}^{(2+\alpha)}),$$

onde $C = C(\Omega, L, q, T, \alpha)$ é uma constante.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [23].

Regularidade das Soluções de Operadores Lineares Parabólicos

Como dissemos na introdução, para o caso parabólico a regularidade das soluções podem ser tratadas de forma semelhante a que se faz para o caso elíptico. Antes no entanto, façamos algumas considerações. Dado um $T > 0$, façamos $Q = \Omega \times (0, T)$. Dada então uma função $u : Q \to \mathbb{R}$, definimos as seminormas

$$|u|_x^\alpha = \sup_{\substack{(x,t),(x',t) \in Q \\ x \neq x'}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x - x'|^\alpha}$$

$$|u|_t^\alpha = \sup_{\substack{(x,t),(x,t') \in Q \\ x \neq x'}} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t - t'|^\alpha}.$$

A partir das definições acima, definimos as normas $|u|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}$ e $|u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$, tais que

$$|u|_Q = \sup_{(x,t) \in Q} |u(x,t)|$$

$$|u|_Q^{(\alpha,\alpha/2)} = |u|_Q + |u|_x^{(\alpha)} + |u|_t^{(\alpha/2)}$$

$$\begin{aligned} |u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \quad &= \quad |u|_Q + |\partial_t u|_Q + |D_x u|_Q + \left|D_x^2 u\right|_Q \\ &+ |\partial_t u|_t^{(\alpha/2)} + |D_x u|_t^{(1/2+\alpha/2)} + \left|D_x^2 u\right|_t^{(\alpha/2)} \\ &+ |\partial_t u|_x^{(\alpha)} + \left|D_x^2 u\right|_x^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

As normas acima, por sua vez, dão origem aos espaços de funções

$$C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}), \quad C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}) \quad \text{e} \quad C^{\alpha,\alpha/2}(Q), \quad C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q).$$

Feitas tais considerações, podemos apresentar o seguinte resultado:

Teorema 5.16. *(1) Dado $0 < \alpha < 1$, suponhamos que a^{ij}, b^i, $d \in C^\alpha(\Omega)$ e $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$. Neste caso, se $u \in C^{2,1}(Q)$ é uma solução da equação diferencial parcial linear parabólica*

$$Lu(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f(x,t) \tag{5.79}$$

então, $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha}(Q)$.
(2)Sejam p, q, sao inteiros não negativos. Dados β, κ, com $|\beta| \leq p$, $|\beta| + 2\kappa \leq p$, $\kappa \leq q$. Suponhamos que $D_x^\beta a^{ij}$, $D_x^\beta b^i$, $D_x^\beta d \in C^\alpha(\Omega)$. Assim, se u é uma solução de (1), então, temos que $D_x^\beta D_t^\kappa u \in C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$ para quaisquer $|\beta| + 2\kappa \leq p + 2$ e $\kappa \leq q + 1$. Em particular, se a^{ij}, b^i, $d \in C^\infty(\Omega)$ e $f \in C^\infty(Q)$, então $u \in C^\infty(Q)$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [23].

Resultados em Variedades Riemannianas

Sejam M e N uma variedades Riemannianas. Utilizando partição da unidade, pode-se estender os conceitos definidos acima (inicialmente para aplicações de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$) para as aplicações entre as variedades M e N, obtendo assim noções de seminormas, normas e espaços de funções nestas. O que é feito da seguinte forma:

Seja $0 < \alpha < 1$ e $T > 0$, tomemos $Q = M \times [0, T]$. Dada então uma função $u : Q \to \mathbb{R}^q$, definimos as seminormas

$$\begin{aligned} |u|_x^\alpha &= \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in Q \\ x\neq x'}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{d(x,x')^\alpha} \\ |u|_t^\alpha &= \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in Q \\ x\neq x'}} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^\alpha}. \end{aligned}$$

A partir das definições acima, definimos as normas $|u|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}$ e $|u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$, tais que

$$|u|_Q = \sup_{(x,t)\in Q} |u(x,t)|$$

$$|u|_Q^{(\alpha,\alpha/2)} = |u|_Q + |u|_x^{(\alpha)} + |u|_t^{(\alpha/2)}$$

$$\begin{aligned} |u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &= |u|_Q + |\partial_t u|_Q + |D_x u|_Q + \left|D_x^2 u\right|_Q \\ &\quad + |\partial_t u|_t^{(\alpha/2)} + |D_x u|_t^{(1/2+\alpha/2)} + \left|D_x^2 u\right|_t^{(\alpha/2)} \\ &\quad + |\partial_t u|_x^{(\alpha)} + \left|D_x^2 u\right|_x^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

As normas acima, por sua vez, dão origem aos espaços de funções $C^{\alpha,\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q)$ e $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q)$, os quais são definidos por

$$\begin{aligned} C^{\alpha,\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q) &= \{u \in C^0(M \times [0,T]);\ |u|_Q^{(\alpha,\alpha/2)} < \infty\} \\ C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q) &= \{u \in C^{2,1}(M \times [0,T]);\ |u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} < \infty\}. \end{aligned}$$

Temos que $C^{\alpha,\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q)$ e $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q)$ assim definidos são espaços de Banach respeito as respectivas normas $|u|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}$ e $|u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$. Tais espaços são chamados de *espaços Hölder* em $Q = M \times [0, T]$.

Definimos então

$$C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q, N) = \{u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q, \mathbb{R}^q);\ u(Q) \subset N\}.$$

Pode ser mostrado que $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q,N)$ é um subespaço fechado de $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q,\mathbb{R}^q)$, donde é também um espaço de Banach.

A partir desta considerações, podemos estender as variedades Riemannianas, os conceitos de operadores diferenciais parciais, e também, os teoremas clássicos de EDP. No que se segue, apresentaremos apenas os principais, os quais utilizamos durante o texto.

No que se segue, demonstraremos alguns resultados, os quais serão utilizados durante o texto.

Nosso primeiro resultado, trata da regularidade das aplicações harmônicas entre as variedades Riemannianas (M,g) e (N,h).

Tal resultado, mostrará que a definição de aplicação harmônica, que em princípio só é feita para aplicações $C^\infty(M,N)$, pode na realidade ser feita para aplicações de classe $C^2(M,N)$.

A idéia é mostrar que toda aplicação $C^2(M,N)$ que satisfaça a equação para aplicações harmônicas (ver 3.11), é na realidade $C^\infty(M,N)$, donde como vimos, é harmônica.

Teorema 5.17. *Sejam (M,g) e (N,h) variedades Riemannianas compactas de dimensões m e n respectivamente. Se uma aplicação $u \in C^2(M,N)$, satisfaz a equação para aplicações harmônicas*

$$\tau(u) = 0, \tag{5.80}$$

então $u \in C^\infty(M,N)$.

Demonstração: Afim de mostrar a afirmação feita, é sulficiente mostra-la para cada ponto $p \in M$. Tomemos então sistemas locais de coordenadas (x_i) e (y_α) em p e $u(p)$. Como vimos em (3.11), expressa nestes sistemas locais, a equação (5.7) assume a forma

$$\Delta u^\alpha = -\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} g^{ij}\ {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) \frac{\partial u^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x_j}. \tag{5.81}$$

Logo, como por hipótese u satisfaz (5.7), temos que u satisfaz a equação (5.81). Como além disto $u \in C^2(M,N)$, temos que o lado direito da equação (5.81) acima, é uma aplicação $C^1(M,N)$, e com maior razão $C^\alpha(M,N)$, para $0 < \alpha < 1$. Assim, pelo teorema de regularidade das soluções de EDP lineares elípticas (ver Teorema (5.8)), temos que $u \in C^{2+\alpha}(M,N)$. Mas então, neste caso, temos que o lado direito da equação (5.81) é uma aplicação $C^{1+\alpha}(M,N)$, donde pelo mesmo teorema, temos que $u \in C^{3+\alpha}(M,N)$. Assim, por repetições sucessivas do argumento anterior, concluímos que $u \in C^{\infty}(M,N)$. □

Obs: Na demonstração acima, utilizamos um truque clássico em EDP. Iniciamos supondo que a equação (5.7) tenha solução u, neste caso, tal solução também satisfaz a equação (5.81). A partir disto, passamos a olhar o lado direito da equação (5.81) como uma aplicação (neste caso $C^{\alpha}(M,N)$), que não depende de u. Assim, podemos concluir o resultado, utilizando o teorema de regularidade das soluções de EDP lineares elípticas.

Um outro resultado importante é o que se segue, o qual trata da existência e unicidade de soluções de EDP's lineares parabólicas o qual é o análogo para o caso de aplicações entre variedades Riemannianas, do teorema (5.15) apresentado anteriormante.

Teorema 5.18. *Seja (M,g), uma variedade Riemanniana compacta, e seja $Q = M \times [0,T]$. Dada uma função $u : Q \to \mathbb{R}^q$, seja*

$$Lu = \Delta u + \mathbf{a}\cdot\nabla + \mathbf{b}\cdot u - \partial_t u$$

o operador diferencial parcial parabólico, consideremos então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} Ł(u)(x,t) = F(x,t) & (x,t)\in M\times(0,T) \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{5.82}$$

Onde neste caso as componentes de Δu, $\mathbf{a}\cdot\nabla$, $\mathbf{b}u$, $\partial_t u$ são definidas respectivamente por

$$\Delta u^A, \quad \sum_{B=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{a}_B^{iA}(x,t)\frac{\partial u^B}{\partial x_i}, \quad \sum_{B=1}^{q}\mathbf{b}_B^{A}(x,t)u^B, \quad \frac{\partial u^B}{\partial t}.$$

Logo se

$$\mathbf{a}_B^{iA},\ \mathbf{b}_A^{B} \in C^{\alpha,\alpha/2}(Q,\mathbb{R}^q), 1 \le m, \quad 1 \le A,B \le q,$$

para algun $0 < \alpha < 1$, então, para quaisquer

$$F \in C^{\alpha,\alpha/2}(Q,\mathbb{R}^q), \qquad f \in C^{2+\alpha(}M,\mathbb{R}^q),$$

existe uma unique solução $u \in C^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}(Q, \mathbb{R}^q)$ *para (5.82), tal que*

$$|u|_Q^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leq C(|F|_Q^{(\alpha,\alpha/2)} + |f|_M^{(2+\alpha)}),$$

onde $C = C(M, L, q, T, \alpha)$ *é uma constante.*

Nosso próximo resultado, é o **princípio do máximo** para equação do calor, o qual é um caso particular do princípio do máximo válido para soluções de EDP's parabólicas. No caso, aqui consideramos o operador do calor $L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$.

Lema 5.7. *Seja* $u \in C^0(M \times [0, T), \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(M \times (0, T), \mathbb{R})$*. Se* $Lu \geq 0$ *em* $M \times (0, T)$*, então*

$$\max_{M \times [0,T]} u = \max_{M \times \{0\}} u.$$

Demonstração: Dados $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, seja

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \epsilon_1 t \qquad (x, t) \in Q = M \times [0, T - \epsilon_2].$$

Iremos mostrar que

$$\max_{M \times [0,T-\epsilon_2]} \tilde{u} = \max_{M \times \{0\}} \tilde{u}. \tag{5.83}$$

De fato, como $\tilde{u}$ é contínua e Q é compacto, temos que $\tilde{u}$ atinge seu valor máximo em algum ponto $(x_0, t_0) \in Q = M \times [0, T - \epsilon_2]$. Afirmamos que $t_0 = 0$. Com efeito, suponhamos que $t_0 > 0$. Neste caso, temos que $\Delta u(x_0, t_0) - \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = Lu(x_0, t_0) \geq 0$. Logo, temos que

$$\Delta \tilde{u} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \;=\; \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon_1 \geq \epsilon_1.$$

Assim, para todo sistema local de coordenadas tomado em uma vizinhança de (x_0, t_0), temos

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \leq \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} \right\} - \epsilon_1 \tag{5.84}$$

em (x_0, t_0). Por outro lado, como $\tilde{u}(x_0, t_0)$ é o máximo da aplicação $\tilde{u}$ em Q, temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0, \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x_0, t_0) = 0$$

e a matriz $\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0, t_0)\right)$ é semi-negativa definida. Neste caso, por (5.84) temos que $\epsilon_1 \leq 0$, o que é um absurdo. Como (5.83) ocorre para todo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tomados, o resultado segue. $\square$

Um outro resultado relacionado a este o qual é utilizado durante o texto é o que se segue.

Lema 5.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta. Dada $C \in \mathbb{R}$, suponhamos que uma aplicação $u \in C^0(M \times [0, T), \mathbb{R}) \cap C^{2,1}(M \times (0, T), \mathbb{R})$ seja tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta u + Cu$$

em $M \times (0, T)$, e que além disto, $u \leq 0$ em $M \times \{0\}$. Então, $u \leq 0$ em $M \times [0, T)$.

Demonstração: Fixado $\epsilon > 0$, seja

$$\tilde{u}(x, t) = \exp\left[-(C + 1)t\right] u(x, t), \qquad (x, t) \in Q = M \times [0, T - \epsilon].$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{u} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \tilde{u} &= \exp\left[-(C + 1)t\right]\left(\Delta u + (C + 1)u - \frac{\partial u}{\partial u} - u\right) \\
&= \exp\left[-(C + 1)t\right]\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial u} + Cu\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

em $M \times (0, T)$, pois por hipótese $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + Cu \geq 0$ em $M \times (0, T)$. Isto mostra que para os pontos de $M \times (0, T)$ (e com maior razão para os de $M \times (0, T - \epsilon]$), aplicação $\tilde{u}$ satisfaz a desigualdade

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \leq \Delta \tilde{u} - \tilde{u}. \tag{5.85}$$

Como $\tilde{u}$ contínua e $Q = M \times [0, T - \epsilon]$ é compacto, temos que $\tilde{u}$ atinge seu valor máximo em algum ponto $(x_0, t_0) \in Q$.

Como $\tilde{u}$ e u tem o mesmo sinal em Q, para provar o afirmado, é suficiente que mostrar que $\tilde{u}(x,t) \leq 0$, ou com mais forte razão que $\tilde{u}(x_0,t_0) \leq 0$. De fato, uma vez demonstrado que isto é válido para cada $\epsilon > 0$ tomado, o resultado segue.

Suponhamos então que $\tilde{u}(x_0,t_0) > 0$. Como $\tilde{u}$ e u tem o mesmo sinal em Q, e por hipótese $u \leq 0$ em $M \times \{0\}$, temos que $t_0 > 0$. Afirmamos que isto é um absurdo. Com efeito, neste caso por (5.85) temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x_0,t_0) \leq \Delta\tilde{u}(x_0,t_0) - \tilde{u}(x_0,t_0).$$

Tomando então um sistema local de coordenadas em uma vizinhança de (x_0,t_0), temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \leq \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} \right\} - \tilde{u} \tag{5.86}$$

no ponto (x_0,t_0). Por outro lado, sendo $\tilde{u}(x_0,t_0)$ o máximo da aplicação $\tilde{u}$ em Q, temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0, \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x_0,t_0) = 0$$

e a matriz $\left(\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,t_0) \right)$ é semi-negativa definida. Donde por (5.86) temos que necessariamente $\tilde{u}(x_0,t_0) < 0$, o que contradiz nossa hipótese. Assim, $t_0 = 0$, é portanto o resultado segue. □

Para encerrar este tópico, provaremos mais um resultado.

Lema 5.9. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e $Q = M \times [0,1]$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos uma aplicação $\xi \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tal que $\xi(t) = 1$ se $t \leq \epsilon$, $\xi(t) = 0$ se $t \geq 2\epsilon$, $0 \leq \xi(t) \leq 1$ e $|\xi'(t)| \leq 2/\epsilon \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $0 < \alpha' < \alpha$. Seja ω uma aplicação tal que $\omega \in C^{(\alpha,\alpha/2)}(Q,\mathbb{R}^q)$ e que $\omega(x,0) = 0$. Então, existe uma constante $C > 0$, a qual não depende de ϵ e ω, tal que*

$$|\xi\omega|_Q^{(\alpha',\alpha'/2)} \leq C\epsilon^{(\alpha-\alpha')/2}\, |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}.$$

Demonstração: Por definição temos que $|\xi\omega|_Q^{(\alpha',\alpha'/2)} = |\xi\omega|_Q + |\xi\omega|_x^{\alpha'} + |\xi\omega|_x^{\alpha'/2}$. Assim, para demonstrar-mos a desigualdade indicada, é sulficiente que a demonstremos para cada uma das parcelas da soma apresentada, o que faremos no que se segue.

Para as parcelas $|\xi\omega|_Q$ e $|\xi\omega|_x^{\alpha'}$, a demonstração será feita dividindo-se os casos em que $d(x,x') \leq \epsilon^{1/2}$ e $d(x,x') \geq \epsilon^{1/2}$. Iniciemos então por $|\xi\omega|_Q$.

Se pois, $d(x,x') \leq \epsilon^{1/2}$, então $\dfrac{\epsilon^{1/2}}{d(x,x')} \geq 1$ e portanto $\dfrac{\epsilon^{\alpha/2}}{d(x,x')^\alpha} \geq 1$. Como $\omega \in C^{(\alpha,\alpha/2)}(Q,\mathbb{R}^q)$ e $\omega(x,0) = 0$, temos então que

$$\begin{aligned} |\xi(t)\omega(x,t)| &\leq |\omega(x,t)| = |\omega(x,t) - \omega(x,0)| \\ &\leq \frac{|\omega(x,t) - \omega(x,0)|}{d(x,x')^\alpha} \cdot \epsilon^{\alpha/2} \\ &\leq |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)} \epsilon^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

Se no entanto $d(x,x') \geq \epsilon^{1/2}$. Então, como M é compacta, temos que $d(x,x') \leq k \leq C_1\epsilon^{1/2}$ para uma constante C_1. Assim, temos que

$$\begin{aligned} |\xi(t)\omega(x,t)| &\leq \frac{|\omega(x,t) - \omega(x,0)|}{d(x,x')^\alpha} d(x,x')^\alpha \\ &\leq C_1\epsilon^{\alpha/2} |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $C_2 = \max\{C_1, 1\}$, temos que

$$\begin{aligned} |\xi\omega|_Q &= \sup_{(x,t)\in Q} |\xi(t)\omega(x,t)| \leq C_2\epsilon^{\alpha/2} |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)} \\ &\leq C_3\epsilon^{(\alpha-\alpha')/2} |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}. \end{aligned}$$

onde $C_3 = C_2\epsilon^{-\alpha'/2}$. De mesma forma, procedemos com a parcela $|\xi\omega|_x^{\alpha'}$.

Se pois $d(x,x') \geq \epsilon^{1/2}$, então como antes, temos que $d(x,x') \leq C_1\epsilon^{1/2}$, donde $1 \leq C_1\epsilon^{\alpha/2}/d(x,x')^\alpha$. Logo

$$\begin{aligned} |\xi(t)\omega(x,t) - \xi(t)\omega(x',t)| &\leq |\omega(x,t) - \omega(x',t)| \\ &\leq \frac{|\omega(x,t) - \omega(x',t)|}{d(x,x')^\alpha} C_1\epsilon^{\alpha/2} \\ &\leq C_1\epsilon^{\alpha/2} |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Como também $\dfrac{1}{d(x,x')^{\alpha'}} \leq \epsilon^{-\alpha'/2}$, temos que

$$\frac{|\xi(t)\omega(x,t)-\xi(t)\omega(x',t)|}{d(x,x')^{\alpha'}} \leq C_1\epsilon^{(\alpha-\alpha')/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}.$$

Se por outro lado, $d(x,x') \leq \epsilon^{1/2}$, então $d(x,x')^{(\alpha-\alpha')} \leq \epsilon^{(\alpha-\alpha')/2}$. Assim, como

$$|\xi(t)\omega(x,t)-\xi(t)\omega(x',t)| \leq \frac{|\omega(x,t)-\omega(x',t)|}{d(x,x')^{\alpha}}d(x,x')^{\alpha}.$$

Temos pois que

$$\begin{aligned}\frac{|\xi(t)\omega(x,t)-\xi(t)\omega(x',t)|}{d(x,x')^{\alpha'}} &\leq \frac{|\omega(x,t)-\omega(x',t)|}{d(x,x')^{\alpha}}d(x,x')^{(\alpha-\alpha')}\\ &\leq \epsilon^{(\alpha-\alpha')/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}.\end{aligned}$$

Donde temos que

$$\begin{aligned}|\xi\omega|_x^{\alpha'} &= \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in Q\\ x\neq x'}}\frac{|\xi(t)\omega(x,t)-\xi(t)\omega(x',t)|}{d(x,x')^{\alpha'}}\\ &\leq C_2\ \epsilon^{(\alpha-\alpha')/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}.\end{aligned}$$

O que mostra a validade da afirmação para parcela $|\xi\omega|_x^{\alpha'}$. Resta então somente mostrarmos a desilgualdade apresentada para a parcela $|\xi\omega|_x^{\alpha'/2}$. Com efeito, suponhamos que $0 \leq t < t' \leq /2\epsilon$ (caso contrário, a afirmação é imediata). Como, $\omega(x,0)=0$, temos pois que

$$\begin{aligned}|\xi(t)\omega(x,t)-\xi(t')\omega(x,t)| &\leq |\xi(t)\omega(x,t)-\omega(x,t')|\\ &+ |(\xi(t)-\xi(t'))(\omega(x,t')-\omega(x,0))|\\ &\leq |\xi(t)|\,\frac{|\omega(x,t)-\omega(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}}\,|t-t'|^{\alpha/2}\\ &+ |\xi(t)-\xi(t')|\,\frac{|(\omega(x,t')-\omega(x,0))|}{|t'-0|^{\alpha/2}}\,|t'-0|^{\alpha/2}\\ &\leq |\xi(t)|\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}\,|t-t'|^{\alpha/2}+2\epsilon^{-1}\,|t-t'|\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}\,|t'|^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $|t-t'|^{\alpha'/2}$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{|\xi(t)\omega(x,t)-\xi(t')\omega(x,t)|}{|t-t'|^{\alpha'/2}} &\leq |\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}\,(2\epsilon)^{(\alpha-\alpha')/2}+(2\epsilon)^{-\alpha'/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}\,(2\epsilon)^{\alpha/2}\\ &= 2(2\epsilon)^{(\alpha-\alpha')/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}\\ &\leq C_4\ (\epsilon)^{(\alpha-\alpha')/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}.\end{aligned}$$

Donde temos que $|\xi\omega|_x^{\alpha'/2} \leq C_4\ (\epsilon)^{(\alpha-\alpha')/2}\,|\omega|_Q^{(\alpha,\alpha/2)}$. Donde o resultado segue. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Brandt, *Interior Schauder estimates for parabolic differential - (or difference-) equations*. Israel J. Math. **7**(1969), 254-262.

[2] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[3] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Boston, Birkhäuser, 1993.

[4] S.S. Chern, W.H. Chen and K.S. Lam, *Lectures on Diferential Geometry*, World Scientific, Singapore, 1998.

[5] J. Eells and L. Lemaire, *A Report on harmonic maps*, Bull. Lodon Math. Soc. **10**(1978), 1-68.

[6] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in harmonic maps*, CMBS Regional Conference Series in Mathematis **50**, Amer. Maths. Soc., 1983.

[7] J. Eells and L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. Lodon Math. Soc. **20**(1988), 385-524.

[8] J. Eells and A. Ratto, *Harmonics Maps and Minimal Immersions with Symmetries*, Annal of the Mathematics Studies **130**, Priceton University Press, 1993.

[9] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86**(1964), 109-160.

[10] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Math. 19, AMS, 1998.

[11] E. L. Lima, *Introdução à Topologia Diferencial*, Notas de Matemática, 23, IMPA, Rio de Janeiro, 1961. Reeditado em Publicações Matemáticas. IMPA, 2001.

[12] E. L. Lima, *Variedades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática do IMPA, 15, 1973.

[13] A. Friedman, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart, Winston, 1969.

[14] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, 1064.

[15] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1987.

[16] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Eliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschafter **224**, 2nd edition, Springer-Verlag, 1983.

[17] R. E. Greene and H. Wu, *Embedding of Open Riemannian Manifold by Harmonic Functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25** (1975), 215-235.

[18] P. Hartman, On Homotopic Harmonic maps, *Canad. J. Math.*, **19**(1967), 673-687.

[19] C. S. Höning, *Aplicações da Topologia à Análise*, Rio de Janeiro, IMPA, 1976.

[20] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1995.

[21] J. Jost, *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, Centre for Mathematicals Analysis 4, Australian National Univ., 1983.

[22] Kreyzig

[23] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. H. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translation of Mathematical Monographs **23**, Amer. Math.Soc., 1968.

[24] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, New York, Springer-Verlag, 2003.

[25] G. M. Lieberman, *Second Order Parabolic Partial Differential Equations*, World Scientific, 1996.

[26] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton Univ. Press., 1963.

[27] S. B. Myers, *Riemannian Manifolds with Positive Mean Curvature*, Duke Math., J., **8**(1941), 401-404.

[28] J. Nash, The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds, *Ann. of Math.*, **63**(1956), 20-63.

[29] S. Nishikawa, *Variational Problems in Geometry*, Iwanami koza"Gendai sugaku no kizo", Iwanami Shoten, 1997.

[30] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1969, 2a. edição, Dover Pub., New York, 1986.

[31] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, New York, Springer, 2000.

[32] A. Preissmann, Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, *Comm. Math. Helv.*, **15**(1943), 175-216.

[33] J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, *Ann. of Math.*, **113**(1981), 1-24.

[34] T. Sakai, *Riemanian Geometry*, Shokabo, 1992.

[35] J. H. Sampson *Some Properties and Aplications of Harmonics Maps*, Ann. Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 211-228.

[36] S. Smale, Morse Theory and Non-Linear Generalization of the Dirichlet Problem, *Ann. of Mth.*, **80**(1964), 382-292

[37] H. Urakawa, *The Variational Method of Harmonic Maps*, Shokabo, 1990.

[38] S. T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry*, Indiana J. Math.